МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ

**ХАРКІВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ ЕКОНОМІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ
ІМЕНІ СЕМЕНА КУЗНЕЦЯ**

Сенчуков В. Ф.
Денисова Т. В.

ВИЩА МАТЕМАТИКА. ЗАГАЛЬНІ РОЗДІЛИ

Навчальний посібник

Частина 3

Харків. Вид. ХНЕУ ім. С. Кузнеця, 2014

УДК 51(075.8)
ББК 22.1я73
С31

Рецензенти: докт. фіз.-мат. наук, професор, завідувач кафедри вищої та прикладної математики Української інженерно-педагогічної академії *Литвин О. М.*; докт. фіз.-мат. наук, професор кафедри вищої математики Національного аерокосмічного університету ім. М. Є. Жуковського "ХАІ" *Проценко В. С.*

Затверджено на засіданні вченої ради Харківського національного економічного університету імені Семена Кузнеця.

Протокол № 10 від 02.06.2014 р.

Сенчуков В. Ф.

С31 Вища математика. Загальні розділи : навчальний посібник. Ч. 3 / В. Ф. Сенчуков, Т. В. Денисова. – Х. : Вид. ХНЕУ ім. С. Кузнеця, 2014. – 356 с. (Укр. мов.)

Подано теоретичний і практичний матеріал за розділами: "Звичайні диференціальні рівняння та їх системи" та "Кратні і криволінійні інтеграли". До кожної теми наведено: перелік питань, що розглядаються; компетентності, що формуються після вивчення теми; запитання для самодіагностики засвоєння матеріалу; задачі та вправи з відповідями; ключові терміни; резюме; використану літературу.

Рекомендовано для студентів напряму підготовки 6.050101 "Комп'ютерні науки" всіх форм навчання.

ISBN 978-966-676-543-0 **УДК 51(075.8)**
ББК 22.1я73

Вступ

Процвітання і досконалість математики тісно пов'язані з добробутом держави.

Наполеон

Третя частина пропонованого посібника із загального курсу навчальної дисципліни „Вища математика” для студентів напряму підготовки 6.050101 „Комп’ютерні науки” включає два розділи: „Звичайні диференціальні рівняння і їх системи” (розділ 5), „Кратні і криволінійні інтеграли” (розділ 6). Відповідний матеріал охоплює два змістові модулі підсумкового контролю знань, викладений відповідно до чинної робочої програми, складеної згідно з Галузевими стандартами навчальної дисципліни.

Названі розділи містять сім тем: „Звичайні диференціальні рівняння першого порядку, задача Коші”; „Диференціальні рівняння вищих порядків”; „Лінійні диференціальні рівняння n-го порядку”; „Системи лінійних диференціальних рівнянь”; „Теорія стійкості”; „Кратні інтеграли”; „Криволінійні інтеграли”.

Структура даного посібника така ж, як і в першій та другій частинах. За кожною темою наводяться:

мета, яку треба досягти в результаті вивчення теми; *питання теми*, які підлягають засвоєнню;

компетентності (за Галузевими стандартами), що формуються після вивчення теми (*загальнонаукова*, *загальнопрофесійна*, *спеціалізовано-професійна*);

висвітлення питань теми;

запитання для самодіагностики засвоєння матеріалу;

задачі та вправи і *відповіді* до них;

ключові терміни;

резюме;

література.

У кінці посібника поміщені: список усієї використаної *літератури*, покажчик *позначень*, *предметний* покажчик.

Тема 16 „Звичайні диференціальні рівняння першого порядку, задача Коші” охоплює відомості про основні типи названих рівнянь і такі, що зводяться до них. У темі 17 „Диференціальні рівняння вищих порядків” вивчаються рівняння, які припускають зниження порядку за допомогою відповідних підстановок. Тема 18 „Лінійні диференціальні рівняння n-го порядку" присвячена (в основному) однорідним і неоднорідним рівнянням зі сталими коефіцієнтами і спеціальною правою частиною. „Системи лінійних диференціальних рівнянь" (тема 19), однорідних і неоднорідних, викладено для рівнянь зі сталими коефіцієнтами. У темі 20 „Теорія стійкості" розглянуто стійкість розв'язків диференціальних рівнянь за Ляпуновим та критерій Гурвіца.

Матеріал тем 21, 22 – „Кратні інтеграли", „Криволінійні інтеграли" – викладається в усталеній послідовності: означення, теорема існування, властивості, способи обчислення, застосування.

Певна частина роботи з опанування навчальної дисципліни залишається студенту, хоча всі принципові положення викладені. У посібнику систематично використовуються елементи сучасної математичної символіки. Для її засвоєння означення понять, формулювання теорем тощо у виключній більшості випадків подаються і словесно, і в символічному вигляді.

З метою кращого осмислення теоретичних основ навчальної дисципліни загальні викладки супроводжуються конкретними прикладами (в тому числі і застосовного характеру) з детальним коментарем.

Для кращого засвоєння теоретичних положень і більш глибокого розуміння їх суті введено своєрідні рубрики – „*пропонуємо*", „*наголошуємо*" та інші (*прослідкуйте, обміркуйте, зіставте, порівняйте* тощо).

Опанування матеріалу в запропонованому обсязі є запорукою успішного оволодіння ідеями і методами математичного аналізу, які використовуються в інших дисциплінах математичного циклу: „Математичне програмування", „Теорія ймовірностей, ймовірнісні процеси та математична статистика", „Чисельні методи" і в спеціальних дисциплінах.

Для того щоб посібник можна було студіювати незалежно від інших джерел інформації, він не містить (за текстом) посилань на них. Формули, рисунки, теореми тощо нумеруються трьома числами, перше з яких є номером теми, друге (після крапки) указує на номер питання теми, третє (після крапки) є власне порядковим номером тієї чи іншої смислової складової тексту.

Розділ 5. Звичайні диференціальні рівняння та їх системи

16. Звичайні диференціальні рівняння першого порядку (ДР-1), задача Коші

Важливі не ті знання, які відкладаються в мозку як жир;
важливі ті, які перетворюються в розумові м'язи.
Г. Спенсер

Працюйте, працюйте – а розуміння прийде потім.
Жан Лерон Д'Аламбер

Мета: навчити майбутніх фахівців умінню за швидкісними (граничними) величинами, що описують економічні процеси або складові інформаційних систем, відтворювати їхні загальні характеристики (загальні витрати, загальний дохід, енергію сигналу тощо).

Питання теми:

16.1. Означення основних понять. Теорема Коші. Найпростіші ДР-1.

16.2. Диференціальні рівняння з відокремлюваними змінними та звідні до них.

16.3. Однорідні диференціальні рівняння першого порядку та звідні до них.

16.4. Лінійні диференціальні рівняння першого порядку і рівняння Бернуллі.

16.5. Диференціальні рівняння у повних диференціалах та звідні до них.

16.6. Розв'язання задач застосовного характеру.

Компетентності, що формуються після вивчення теми:

Загальнонаукова: володіння засобами знаходження невідомої функції за відомими співвідношеннями між нею та її похідною.

Загальнопрофесійна: підготовленість до аналізу швидкісних (граничних) характеристик функціональних залежностей з метою обробки інформації, яку несуть часові (сигнальні) функції.

Спеціалізовано-професійна: уміння впроваджувати диференціальні рівняння в моделювання процесів управління інформаційними системами.

16.1. Означення основних понять. Теорема Коші. Найпростіші ДР-1

Рівняння, яке зв'язує незалежну змінну x, невідому функцію $y = y(x)$ та її похідну $y'(x)$, називають **звичайним диференціальним рівнянням першого порядку**, і в символах описують так:

$$F(x,\ y,\ y') = 0\,, \qquad (16.1.1)$$

де ліва частина тлумачиться як функція трьох змінних: x, y, y'.

Якщо невідома функція є функцією кількох аргументів, то рівняння, яке зв'язує незалежні змінні, невідому функцію та її частинні похідні, називається **диференціальним рівнянням у частинних похідних**.

Ми вивчатимемо лише звичайні диференціальні рівняння, тому надалі термін „звичайні" у назві рівняння будемо пропускати.

***Відзначимо*,** що в окремих випадках аргумент x чи (і) шукана функція $y(x)$ можуть не входити у рівняння явним чином, але (16.1.1) повинне обов'язково містити $y'(x)$.

Приклади:

$$y' = y\cos x - 3x \quad \Rightarrow \quad \underbrace{y' - y\cos x + 3x}_{F(x,y,y')} = 0; \qquad \underbrace{y' + 3x}_{F(x,y')} = 0;$$

$$y' = 5y^2 \quad \Rightarrow \quad \underbrace{y' - 5y^2}_{F(y,y')} = 0; \qquad \underbrace{y' - 12}_{F(\ y')} \ = \ 0.$$

Функція $y = \varphi(x)$, визначена на інтервалі (a,b), і така, що при підстановці її замість $y(x)$ у рівняння (16.1.1) отримуємо тотожність, називається **розв'язком**, або **інтегралом**, ДР-1 на (a,b):

$$\underset{x\in(a,b)}{y = \varphi(x)} \text{ – розв'язок} \quad \rightleftarrows \quad F(x,\varphi(x),\varphi'(x))\big|_{\forall x\in(a,b)} = 0\,, \qquad (16.1.2)$$

а графік функції $y = \varphi(x)$ називають **інтегральною кривою**.

Наприклад, розв'язком рівняння $y' + y = 0 \quad \forall x \in \mathbf{R}$ є функція $\varphi(x) = e^{-x}$. Дійсно, якщо покласти $y = \varphi(x) = e^{-x}$, то $y' = -e^{-x}$, а сума $y' + y$ дає нуль.

Звичайно, $y=\varphi(x)$ повинна бути диференційовною на (a,b) функцією (*чому?*); випадки $a=-\infty$, $b=+\infty$ не виключаються.

Якщо рівняння (16.1.1) подано у вигляді:

$$y'=f(x,y), \tag{16.1.3}$$

де f – закон відповідності між парою $(x,y)\in\mathbf{R}^2$ і похідною y', то воно називається **розв'язаним відносно похідної**.

Таке рівняння більш посильне для вивчення, ніж (16.1.1), яке не припускає розв'язання відносно похідної, і має простий геометричний смисл. У подальшому будемо вивчати саме ДР-1 (16.1.3).

Нехай функція двох змінних $f(x,y)$ визначена у деякій не замкненій області D, яка належить вертикальній смузі між прямими $x=a$, $x=b$ (рис. 16.1.1):

$$\{(x,y)\,|\,x\in(a,b),\ y\in\mathbf{R}\}.$$

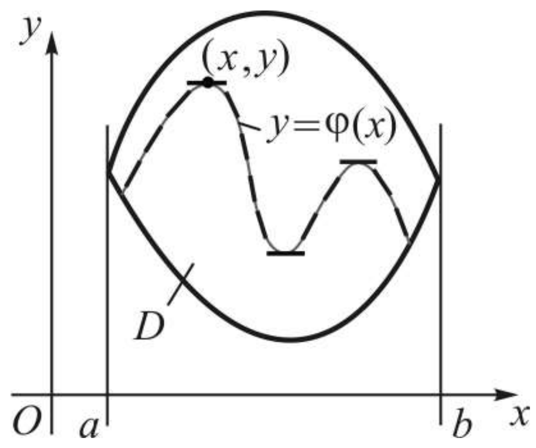


Рис. 16.1.1. **Поле напрямів**

Якщо $y=\varphi(x)$ є розв'язком рівняння (16.1.3), то у кожній точці (x,y) області D, через яку проходить інтегральна крива, тотожність $\varphi'(x)=f(x,y)$ визначає кутовий коефіцієнт дотичної до кривої, або, інакше, **напрям дотичної** до кривої, у точці, що розглядається (на рис. 16.1.1 напрями показано жирними рисками).

Сукупність (множину) всіх напрямів називають **полем напрямів**. Тому кажуть, що *у геометричному смислі розв'язане відносно похідної ДР-1 описує поле напрямів інтегральних кривих*.

Для якісного аналізу розв'язків рівняння (16.1.3) за відомим полем напрямів відтворюють наближено, за допомогою геометричних побудов, інтегральні криві.

Основна задача теорії диференціальних рівнянь – знайти всі розв'язки заданого рівняння і вивчити їх властивості. Відшукання розв'язків диференціального рівняння називають **інтегруванням** цього рівняння.

Теорема 16.1.1 (*існування і єдиності розв'язку ДР-1*). Якщо функція $f(x,y)$ – права частина рівняння $y' = f(x,y)$ – неперервна у деякій області D і має неперервну частинну похідну $f'_y(x,y)$ у цій області, то, якою б не була точка $(x_0, y_0) \in D$, існує єдина інтегральна крива – єдиний розв'язок $y = \varphi(x)$ рівняння, – яка проходить через точку (x_0, y_0), де $y_0 = \varphi(x_0)$:

$$\begin{gathered} \forall (x,y) \in D: \ f(x,y) \in \mathbf{C}(D) \wedge \partial f / \partial y \in \mathbf{C}(D) \ \Rightarrow \\ \Rightarrow \ \forall (x_0, y_0) \in D \ \ \exists!\ y = \varphi(x): \ \varphi'(x_0) = f(x_0, y_0), \end{gathered} \tag{16.1.4}$$

де $\mathbf{C}(D)$ – множина функцій, неперервних в області D.

Теорему 16.1.1 називають **теоремою Коші** (за ім'ям славнозвісного французького математика Огюстена Коші (1789 – 1857 рр.)).

Наслідок. Якщо функція $f(x,y)$ в області D задовольняє умови теореми Коші, то рівняння $y' = f(x,y)$ має безліч розв'язків. Дійсно, вважаючи x_0 сталим і змінюючи значення y_0 у деяких межах ($c \le y_0 \le d$), отримаємо для кожної ординати y свій розв'язок: $y = \varphi(x)$.

Щоб виділити (вибрати) з усієї, нескінченної, множини розв'язків один розв'язок (одну інтегральну криву), задають точку, через яку проходить інтегральна крива, тобто указують значення аргументу $x = x_0$ і відповідне значення функції $y\big|_{x=x_0} = y_0$.

Співвідношення

$$y\big|_{x=x_0} = y_0, \text{ або } y_0 = y(x_0), \text{ де } (x_0, y_0) \in D, \tag{16.1.5}$$

називають **початковою умовою** для розв'язку $y = \varphi(x)$.

Для опису безлічі розв'язків вводять поняття „загальний розв'язок''. **Загальним розв'язком** ДР-1 (16.1.3) називається функція

$$y = \varphi(x, C), \tag{16.1.6}$$

яка містить числовий параметр C $(-\infty < C < +\infty)$ і така, що:

1) задовольняє рівняння при будь-яких дійсних значеннях C (тому параметр C називають ще **довільною сталою**);

2) яка б не була початкова умова $y_0 = y(x_0)$, можна знайти таке значення $C_0 \in \mathbf{R}$, що функція $\varphi(x, C_0)$ задовольняє задану початкову умову: $\varphi(x, C_0)\big|_{x=x_0} = y_0$.

Розв’язок, який отримується із загального розв’язку рівняння при певному (фіксованому, конкретному) значенні параметра C, називається **частинним розв’язком**. Відшукання частинного розв’язку за заданою початковою умовою називається **задачею Коші**.

Підсумок („мовою геометрії”): загальний розв’язок рівняння описує множину всіх інтегральних кривих, яку називають **однопараметричною сім’єю** ліній; частинний розв’язок визначає одну з них; задача Коші із сім’ї кривих виділяє лінію, яка проходить через задану точку (x_0, y_0).

Приклад. Покажемо, що загальним розв’язком рівняння $y' + y = 0$ $\forall x \in \mathbf{R}$ є функція $\varphi(x, C) = Ce^{-x}$.

Дійсно, якщо покласти $y = \varphi(x, C) = Ce^{-x}$, то $y' = -Ce^{-x}$, а сума $y' + y$ дає нуль для всіх дійсних значень $C \in \mathbf{R}$. Таким чином, стосовно $\varphi(x, C) = Ce^{-x}$ перша умова загального розв’язку (16.1.6) виконується.

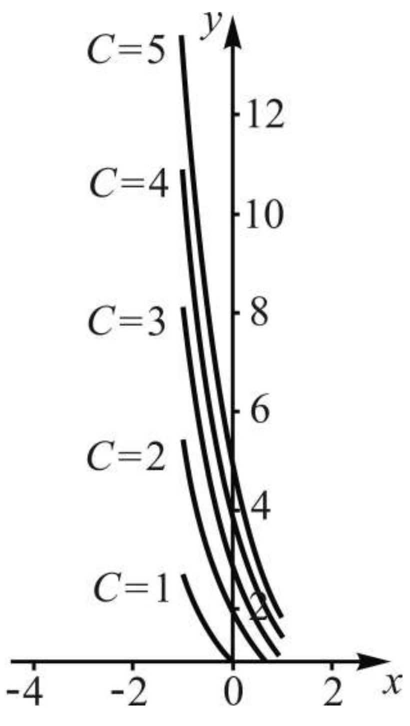


Рис.16.1.2. **Інтегральні криві** $\boldsymbol{y = Ce^{-x}}$

Задамо деяку початкову умову $y_0 = y(x_0)$ і підставимо значення x_0, y_0 у функцію $y = Ce^{-x}$:

$$y_0 = Ce^{-x_0} \Rightarrow C = C_0 = y_0 e^{x_0}.$$

Як бачимо, для будь-яких значень x_0, y_0 стала C_0 визначена; отже, функція $\varphi(x, C) = Ce^{-x}$ є загальним розв’язком рівняння $y' + y = 0$. Якщо у ньому покласти, *наприклад*, $C = 1$, то отримаємо один із безлічі частинних розв’язків: $y = e^{-x}$.

Задачу Коші розв’яжемо за початковою умовою $y\big|_{x=0} = 5$, або $y(0) = 5$, тобто знайдемо інтегральну криву (рис. 16.1.2), яка проходить через точку $(x_0, y_0) = (0, 5)$.

Для цього у загальний розв'язок $y=\varphi(x,C)=Ce^{-x}$ замість x (y) підставимо $x_0=0$ ($y_0=5$) і знайдемо значення C_0 параметра C: $C_0=5$. Розв'язком задачі Коші є $y=5e^{-x}$. ●

Часто при розв'язуванні ДР-1 загальний розв'язок одержують у неявній формі: $\Phi(x,y,C)=0$, з якої не завжди удається виразити y через x і C.

Співвідношення $\Phi(x,y,C)=0$, яке неявно визначає загальний розв'язок, називається **загальним інтегралом** ДР-1.

Отримане із загального інтеграла співвідношення при конкретному значенні параметра $C=C_0$: $\Phi(x,y,C_0)=0$, називається **частинним інтегралом** ДР-1.

Для інтегрування ДР-1, розв'язаних відносно похідної, частіше всього його зводять до „диференціальної форми”: якщо у рівнянні $y'=f(x,y)$ похідну записати як відношення диференціалів: $y'=dy/dx$, то відповідне подання ДР-1 називають **диференціальною формою** рівняння:

$$dy/dx=f(x,y) \Leftrightarrow dy=f(x,y)\,dx \Leftrightarrow f(x,y)dx=dy. \tag{16.1.7}$$

Оскільки з геометричної точки зору координати x і y рівноправні, то замість рівняння $dy/dx=f(x,y)$ можна розв'язувати рівняння $\dfrac{dx}{dy}=\dfrac{1}{f(x,y)}$, або $dx=\dfrac{dy}{f(x,y)}$, відшукуючи змінну x як функцію від y (за умови її існування).

Найпростішими ДР-1 називаються рівняння $y'=f(x,y)$, у яких права частина є функцією однієї змінної: а) $y'=f(x)$; б) $y'=f(y)$.

Розв'язання таких рівнянь не викликає принципових труднощів: *після зведення до диференціальної форми треба невизначеним інтегруванням відновити функції у лівій і правій частинах за їхніми диференціалами*, а саме:

а) $y'=f(x) \Rightarrow \dfrac{dy}{dx}=f(x) \Rightarrow dy=f(x)dx \Rightarrow \int dy=\int f(x)dx \Rightarrow$

$\Rightarrow y=\int f(x)dx+C$ – загальний розв'язок рівняння. (16.1.8)

Тут (і надалі) щоб підкреслити наявність параметра C (довільної сталої), його вносять до відшукання НІ $\int f(x)dx$, тобто тлумачать $\int f(x)dx$ як одну із первісних.

Приклад. Зінтегрувати рівняння $y' = x + \cos 2x$.

Переходимо до диференціальної форми й *інтегруємо* (відновлюємо змінну y як функцію від x за її диференціалом):

$$dy = (x + \cos 2x)dx \;\Rightarrow\; y = \int (x + \cos 2x)dx + C \;\Rightarrow$$

$\Rightarrow\; y = \dfrac{x^2 + \sin 2x}{2} + C$ – загальний розв'язок рівняння (*переконайтеся*). ●

б) $y' = f(y) \;\Rightarrow\; \dfrac{dy}{dx} = f(y) \;\Rightarrow\; dx = \dfrac{1}{f(y)}dy \;\Rightarrow\; \int dx = \int \dfrac{1}{f(y)}dy \;\Rightarrow$

$\Rightarrow\; x = \int \dfrac{1}{f(y)}dy + C$ – загальний інтеграл рівняння. (16.1.9)

Приклад. Зінтегрувати рівняння $y' = y^2 + 1$.

Переходимо до диференціальної форми й *інтегруємо* (відновлюємо змінну x як функцію від y за її диференціалом):

$$\frac{dy}{dx} = y^2 + 1 \;\Rightarrow\; dx = \frac{dy}{y^2 + 1} \;\Rightarrow\; \int dx = \int \frac{dy}{y^2 + 1} \;\Rightarrow\; x = \int \frac{dy}{y^2 + 1} + C \;\Rightarrow$$

$\Rightarrow\; x = arctg\, y + C$ – загальний інтеграл рівняння, бо змінна y не виражена через x і C.

У цьому прикладі від загального інтеграла можна перейти до загального розв'язку:

$$x = arctg\, y + C \;\Rightarrow\; arctg\, y = x - C \;\Rightarrow\; y = tg(x - C),$$

де $x - C \neq \pi/2 + \pi k$, $k \in \mathbf{Z}$ (*обґрунтуйте*).

Щоб переконатися у правильності знайденого розв'язку, треба здиференціювати його і підставити у рівняння вирази для y і y':

$$(y = tg(x - C) \;\Rightarrow\; y' = 1/\cos^2(x - C)) \;\Rightarrow\; \left| y' = y^2 + 1 \right| \;\Rightarrow$$

$\Rightarrow\; 1/\cos^2(x - C) = tg^2(x - C) + 1$; розв'язок правильний (отримали одну із основних тригонометричних тотожностей).

Розв'яжемо задачу Коші з початковою умовою $y(0)=0$, тобто знайдемо інтегральну криву, яка проходить через початок координат $O(0,0)$:

$$y = tg(x - C) \;\Rightarrow\; \left| x_0 = 0,\; y_0 = 0 \right| \;\Rightarrow\; tg(-C) = 0 \;\Rightarrow\; C_0 = 0 \;\Rightarrow$$

$\Rightarrow$ відповідний *частинний розв'язок* $y = tgx$, $x \in (-\pi/2,\, \pi/2)$. ●

При розв'язанні рівняння а) і б) зводилися відповідно до рівнянь $dy = f(x)dx$ і $dx = dy/f(y)$ (див. (16.1.8), (16.1.9)), у яких коефіцієнти при dy і dx дорівнюють одиниці (1). Узагальненням таких диференціальних форм є рівняння, у яких множники при dy і dx суть функції.

Якщо диференціальну форму ДР-1 за допомогою тотожних перетворень подано так, що множники при диференціалах dx і dy є функціями відповідно тільки від x і тільки від y, то кажуть, що здійснено **відокремлення змінних**, а отримане рівняння називають **рівнянням із відокремленими змінними** (**ДР-1*<u>вз</u>***):

$$\varphi(x)dx = \psi(y)dy\,, \tag{16.1.10}$$

де $\varphi(x)$, $\psi(y)$ – відомі (задані) функції.

ДР-1*<u>вз</u>* є рівністю диференціалів двох функцій, а це означає, що первісні для $\varphi(x)$ і $\psi(y)$ відрізняються лише сталим доданком.

Отже, *для розв'язання* (16.1.10) *треба невизначеним інтегруванням відновити функції у лівій і правій частинах за їхніми диференціалами*, а саме:

$$\varphi(x)dx = \psi(y)dy \;\Rightarrow\; \int \varphi(x)dx = \int \psi(y)dy + C \tag{16.1.11}$$

– загальний інтеграл рівняння з відокремленими змінними.

Таке рівняння також можна віднести до *найпростіших*, бо розв'язання (16.1.10) зводиться зразу, без додаткових перетворень, до невизначеного інтегрування, як і у випадку рівнянь а), б). Йому відповідає ДР-1 $y' = f(x,y)$, права частина якого є відношенням (чи добутком) двох функцій однієї змінної від різних аргументів, тобто рівняння вигляду:

в) $y' = \dfrac{\varphi(x)}{\psi(y)}$ або $y' = \dfrac{\psi_1(y)}{\varphi_1(x)}$, чи $y' = \varphi_2(x)\cdot\psi_2(y)$. (16.1.12)

Перехід до ДР-1<u>*вз*</u> легко здійснюється за властивостями пропорцій. *Наприклад*,

$$y' = \frac{\varphi(x)}{\psi(y)} \;\Rightarrow\; \frac{dy}{dx} = \frac{\varphi(x)}{\psi(y)} \;\Rightarrow\; \psi(y)dy = \varphi(x)dx\,.$$

(*Пропонуємо* інші випадки розглянути самостійно.)

Приклад. Для диференціального рівняння $y' = x^2 \cdot \cos 2y$ знайти: 1) загальний розв'язок (загальний інтеграл); 2) частинний розв'язок при $C = \pi$; 3) розв'язок задачі Коші, якщо $y(1) = 0$.

1. *Переходимо* до диференціальної форми і *відокремлюємо* змінні:

$$y' = x^2 \cos 2y \;\Rightarrow\; \frac{dy}{dx} = x^2 \cos 2y \;\Rightarrow\; \frac{dy}{dx} = \frac{\cos 2y}{1/x^2} \;\Rightarrow\; \frac{dy}{\cos 2y} = x^2 dx\,.$$

Інтегруємо ліву і праву частини рівняння:

$$\int \frac{dy}{\cos 2y} = \int x^2 dx + C \;\Rightarrow\; \frac{1}{2}\ln|tg(\pi/4 + y)| = \frac{x^3}{3} + C \;\Rightarrow$$

$\Rightarrow\; 3\ln|tg(\pi/4 + y)| = 2x^3 + C$ – загальний інтеграл рівняння, у якому замість $6C$ записано просто C, бо $C \in \mathbf{R} \;\Leftrightarrow\; 6C \in \mathbf{R}$.

2. *Підставляємо* значення параметра ($C = \pi$) у загальний інтеграл і отримуємо частинний інтеграл: $3\ln|tg(\pi/4 + y)| = 2x^3 + \pi$.

3. *Знаходимо* значення параметра C, підставляючи у загальний інтеграл замість пари (x, y) пару $(x_0, y_0) = (1, 0)$:

$$3\ln|tg(\pi/4)| = 2 + C \;\Rightarrow\; C = -2 \;\Rightarrow\; 3\ln|tg(\pi/4 + y)| = 2(x^3 - 1)$$

– розв'язок задачі Коші (у вигляді частинного інтеграла). ●

***Наголошуємо*:**

при розв'язанні диференціальних рівнянь перехід до невизначеного інтегрування здійснюється тільки після відокремлення змінних;

довільну сталу $C \in (-\infty, +\infty)$ у загальному розв'язку чи загальному інтегралі можна вводити у вигляді довільної функції від C, областю значень якої є вся числова вісь – множина дійсних чисел $\mathbf{R}$. *Наприклад*, у вигляді лінійної функції: kC, $kC+b$, де k і b – довільні сталі, або логарифмічної функції: $\ln C$, де $C>0$, або $\ln|C|$, де $C\in \mathbf{R}\setminus\{0\}$, тощо; при цьому відповідь (розв'язок) змінюється за формою, але не за суттю, і вдалий вибір форми C забезпечує лаконічність символічного запису відповіді.

16.2. Диференціальні рівняння з відокремлюваними змінними та звідні до них

Класифікацію ДР-1 за типами проводять залежно від того, яку структуру (будову) має його права частина – функція $f(x,y)$, – і якими властивостями вона володіє. Це обумовлює вибір відповідного методу розв'язання.

У світлі сказаного *першим кроком розв'язання будь-якого диференціального рівняння є установлення його типу!*

Диференціальним рівнянням із відокремлюваними змінними (**ДР-1*вз***) називається рівняння $y'=f(x,y)$, яке в диференціальній формі набуває вигляду:

$$\varphi_1(x)\cdot\psi_2(y)\,dx=\varphi_2(x)\cdot\psi_1(y)\,dy, \tag{16.2.1}$$

де $\varphi_i(x)$, $\psi_i(y)$, $i=1,2,$ – відомі функції однієї змінної.

Характеристична властивість ДР-1*вз* – множники при dx і при dy є добутком із функцій, залежних тільки від x і тільки від y.

Означення, еквівалентне (16.2.1), отримаємо, якщо перейдемо до позначення похідної через y':

$$y'=f(x,y)\ \text{– ДР-1}\textit{вз}\quad \rightleftharpoons\quad f(x,y)=\frac{\varphi_1(x)\cdot\psi_2(y)}{\psi_1(y)\cdot\varphi_2(x)}. \tag{16.2.2}$$

Тобто ДР-1*вз* називається рівняння $y'=f(x,y)$, у якого права частина є відношенням добутків із функцій тільки від змінної x і тільки від змінної y.

ДР-1*вз* легко зводяться до рівнянь із відокремленими змінними (див. (16.1.10)), чим і пояснюється назва.

Порядок розв'язання такий:

1) *переходимо* у рівнянні $y' = f(x, y)$ до диференціальної форми:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\varphi_1(x)\cdot\psi_2(y)}{\varphi_2(x)\cdot\psi_1(y)} \;\Rightarrow\; \varphi_1(x)\cdot\underline{\psi_2(y)}\,dx = \underline{\varphi_2(x)}\cdot\psi_1(y)\,dy. \qquad (16.2.3)$$

2) *ділимо* ліву і праву частини рівняння (16.2.3) на добуток $\psi_2(y)\cdot\varphi_2(x)$ немовби „зайвих" співмножників при dx і dy (які підкреслені) за умови, що він не дорівнює нулеві ($\psi_2(y)\cdot\varphi_2(x)\neq 0$):

$$\frac{\varphi_1(x)\cdot\psi_2(y)}{\psi_2(y)\cdot\varphi_2(x)}dx = \frac{\varphi_2(x)\cdot\psi_1(y)}{\psi_2(y)\cdot\varphi_2(x)}dy \;\Rightarrow\; \overbrace{\frac{\varphi_1(x)}{\varphi_2(x)}}^{\varphi(x)}dx = \overbrace{\frac{\psi_1(y)}{\psi_2(y)}}^{\psi(y)}dy \;\Rightarrow$$

$\Rightarrow\; \varphi(x)dx = \psi(y)dy$ – рівняння з відокремленими змінними;

3) *розв'язуємо* отримане ДР-1*вз*:

$\varphi(x)dx = \psi(y)dy \;\Rightarrow\; \int\varphi(x)dx = \int\psi(y)dy + C$ – загальний інтеграл.

Зауваження:

найпростіші ДР-1 і з відокремленими змінними є частковими випадками ДР-1*вз* (*за яких умов?*);

розв'язки, що відповідають умові $\psi_2(y)\cdot\varphi_2(x) = 0$, досліджуються окремо; їх називають **особливими** розв'язками;

(До якого типу *належить* ДР-1 $y' = c$, де $c - const$?)

Приклад. Розв'язати задачу Коші для диференціального рівняння $y'\cos y = x\ln x\sin y$, якщо $y(e) = \pi/2$.

Аналізуємо рівняння з метою установлення того, до якого типу воно належить (розв'язавши відносно похідної):

$y' = \dfrac{x\ln x\sin y}{\cos y} \;\Rightarrow\; y' = x\ln x\cdot tgy$, або $y' = \dfrac{x\ln x}{ctg\,y} = \dfrac{\varphi(x)}{\psi(y)}$ – ДР-1*вз*.

Переходимо до ДР-1 із відокремленими змінними й *інтегруємо*:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x\ln x}{ctg\,y} \;\Rightarrow\; ctg\,ydy = x\ln xdx \;\Rightarrow\; \int ctg\,ydy = \int x\ln xdx + C \;\Rightarrow$$

$\Rightarrow$ | інтеграл зліва (справа) табличний (береться частинами) | $\Rightarrow$

$$\Rightarrow \ln|\sin y| = \frac{x^2}{2}\ln x + \frac{x^2}{4} + C \ \Rightarrow\ \ln|\sin y| = \frac{x^2}{4}(2\ln x + 1) + C$$

– загальний інтеграл рівняння.

Знаходимо за початковою умовою значення параметра C (для цього у розв'язок замість пари (x, y) підставляємо пару $(e, \pi/2)$):

$$\ln\left|\sin\frac{\pi}{2}\right| = \frac{e^2}{4}(2\ln e + 1) + C \ \Rightarrow\ 0 = \frac{e^2}{4}3 + C \Rightarrow\ C = -0{,}75e^2.$$

Записуємо розв'язок задачі Коші: $4\ln|\sin y| = x^2(\ln x^2 + 1) - 3e^2$. ●

(*Розв'яжіть* як вправу частинний інтеграл відносно змінної y; до якого типу слід було *віднести* задане рівняння, якщо не застосовувати формули: $\sin y/\cos y = tgy$; $tgy \cdot ctgy = 1$?)

Зауваження. Як і при розв'язанні алгебраїчних рівнянь, взятті інтегралів тощо, так і при розв'язанні ДР-1 використовують *метод заміни змінної*, згідно з яким:

вводять допоміжну змінну (функцію), завдяки чому ДР-1 зводиться до більш простого рівняння або до рівняння відомого типу;

розв'язують рівняння відносно нової змінної;

вертаються до вихідної змінної-функції.

Звідними до ДР-1*вз* є рівняння $y' = f(x, y)$, права частина яких – функція від лінійної функції відносно змінних x і $y = y(x)$:

$$y' = f(ax + by + c), \text{ де } a,\ b,\ c \text{ – сталі.} \tag{16.2.4}$$

Дійсно, введемо в розгляд нову функцію (виконаємо заміну): $z = z(x) = ax + by + c$, тоді отримаємо:

$$\frac{dy}{dx} = f(ax + by + c) \ \Rightarrow\ \left| \begin{array}{c} z = ax + by + c \Rightarrow z'_x = a + by'_x \Rightarrow \\ \Rightarrow y'_x = (z'_x - a)/b \end{array} \right| \ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ \frac{z'_x - a}{b} = f(z) \ \Rightarrow\ \frac{dz}{dx} = bf(z) + a \ \Rightarrow\ dx = \frac{dz}{bf(z) + a} \ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ x = \int \frac{dz}{bf(z) + a} + C \text{ – загальний інтеграл.} \tag{16.2.5}$$

Після розв’язання рівняння відносно функції $z = z(x)$ вертаємось до вихідної функції $y = y(x)$.

Ілюстративний *приклад*. Зінтегрувати ДР-1 $y' = -2/3(2x+3y-1)^2$.

Здійснюючи наведені кроки, відповідно до (16.2.5) маємо:

$$\left| \begin{array}{c} z = 2x+3y-1 \Rightarrow z'_x = 2+3y'_x \Rightarrow \\ \Rightarrow y'_x = (z'_x-2)/3 \end{array} \right| \Rightarrow \frac{z'_x-2}{3} = \frac{-2z^2}{3} \Rightarrow z'_x = 2(1-z^2) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{dz}{dx} = 2(1-z^2) \Rightarrow dx = \frac{dz}{2(1-z^2)} \Rightarrow x = \frac{1}{2}\int \frac{dz}{1-z^2} = \frac{1}{4}\ln\left|\frac{1+z}{1-z}\right| + \frac{C}{4}.$$

Вертаємось до вихідної функції і *отримуємо* загальний інтеграл заданого рівняння:

$$4x = \ln\left|\frac{1+z}{1-z}\right| - \underset{(C>0)}{\ln C} \Rightarrow Ce^{4x} = \frac{2x+3y}{2x+3y-2} \quad (C \neq 0). \bullet \tag{16.2.6}$$

Як вправу покажіть, що загальний розв’язок рівняння такий:

$$y = \frac{2}{3}\left(1 - x + \frac{1}{Ce^{4x}-1}\right) \quad (C \neq 0).$$

16.3. Однорідні диференціальні рівняння першого порядку та звідні до них

Функція $f(x, y)$ називається **однорідною функцією виміру m** відносно x і y, якщо для будь-якого λ, крім, можливо, $\lambda = 0$, при підстановці замість пари (x, y) пари $(\lambda x, \lambda y)$ отримуємо добуток $f(x, y)$ зі степенем λ^m:

$$f(\lambda x, \lambda y) = \lambda^m f(x, y). \tag{16.3.1}$$

Наприклад,

$$f_1(x, y) = x^2 + 2y^2 - xy \Rightarrow f_1(\lambda x, \lambda y) = \lambda^2(x^2 + 2y^2 - xy)$$

– однорідна функція *другого* виміру (2-виміру) відносно x і y;

$$f_2(x,y)=\frac{x-y}{\sqrt{x^2+2y^2}} \;\Rightarrow\; f_2(\lambda x,\lambda y)=\frac{\lambda(x-y)}{\lambda\sqrt{x^2+2y^2}}=\lambda^0 f_2(x,y)$$

– однорідна функція *нульового* виміру (0-виміру) відносно x і y.

До однорідних функцій n-виміру належать однорідні одночлени і однорідні многочлени n-го степеня відносно змінних x і y; їх відношення є однорідною функцією 0-виміру.

Однорідним диференціальним рівнянням 1-го порядку (**ОДР-1**) називається ДР-1 $y' = f(x,y)$, права частина якого є однорідною функцією нульового виміру відносно x і y (тобто права частина такого рівняння не змінюється при заміні x на λx, y на λy):

$$y' = f(x,y) \text{ – ОДР-1} \;\rightleftharpoons\; f(\lambda x,\lambda y) = f(x,y). \tag{16.3.2}$$

Умова „права частина рівняння не змінюється при заміні x на λx, y – на λy'' є ***характеристичною властивістю*** ОДР-1.

Якщо покласти $\lambda = 1/x$, то отримаємо: $f(\lambda x,\lambda y) = f(1, y/x)$; це означає, що права частина є по суті функцією відношення y/x.

Тому означення ОДР-1 формулюють ще так: ДР-1 $y' = f(x,y)$, праву частину якого можна подати як функцію відношення y/x, називається **однорідним**:

$$y' = f(x,y) \text{ – ОДР-1} \;\rightleftharpoons\; f(x,y) = f\left(1,\frac{y}{x}\right) = \varphi\left(\frac{y}{x}\right), \tag{16.3.3}$$

де φ – закон залежності правої частини рівняння від відношення y/x.

Однорідні рівняння ***заміною змінної***: $t = \dfrac{y}{x}$, зводяться до ДР-1*вз.*

Наведемо **порядок розв'язання** ОДР-1:

1. *Вводимо* нову змінну-функцію і *знаходимо* зв'язок між похідними (диференціалами) нової і вихідної функцій:

$$t = \frac{y}{x} \;\Rightarrow\; y = tx \;\Rightarrow\; y'_x = t'_x \cdot x + t,$$

де $t = t(x)$, бо $y = y(x)$.

2. *Переходимо* у рівнянні до нової функції і *розв'язуємо* його:

$$y' = \varphi(y/x) \;\Rightarrow\; t'_x \cdot x + t = \varphi(t) \;\Rightarrow\; t' \cdot x = \underbrace{\varphi(t) - t}_{\psi(t)} \;\Rightarrow$$

$\Rightarrow$ | записуємо у диференціальній формі і відокремлюємо змінні | $\Rightarrow$

$$\Rightarrow\; \frac{dt}{dx} x = \psi(t) \;\Rightarrow\; \frac{dt}{dx} = \frac{\psi(t)}{x} \;\Rightarrow\; \frac{dx}{x} = \frac{dt}{\psi(t)} \;\Rightarrow$$ | інтегруємо | $\Rightarrow$

$$\Rightarrow\; \int \frac{dx}{x} = \int \frac{dt}{\psi(t)} + C \;\Rightarrow\; \ln|x| = \int \frac{dt}{\psi(t)} + \ln|C| \quad (C \neq 0) \;\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\; \ln\left|\frac{x}{C}\right| = \int \frac{dt}{\psi(t)} \;\Rightarrow\; \frac{x}{C} = e^{\int \frac{dt}{\psi(t)}} \;\Rightarrow\; x = Ce^{\int \frac{dt}{\psi(t)}}$$

– загальний інтеграл ($\psi(t) \neq 0$ на проміжку інтегрування).

3. *Вертаємось* у розв'язку рівняння відносно $t = t(x)$ до вихідної змінної, заміняючи t відношенням y/x.

***Відзначимо*:** за такою ж схемою інтегруються ОДР-1, у яких змінна x розглядається як функція змінної y, але в якості нової змінної береться $t = x/y$:

$$x' = \varphi(x/y): \;\; t = x/y \;\Rightarrow\; x = ty \;\Rightarrow\; x'_y = t'_y \cdot y + t,$$

де $t = t(y)$, бо $x = x(y)$.

Приклад. Зінтегрувати задане рівняння: $x - yy' = y + xy'$.

Переконаємося (перш за все!), що це рівняння однорідне (для чого зведемо його до вигляду $y' = f(x, y)$ і покажемо, що права частина є однорідною функцією 0-виміру):

$$x - yy' = y + xy' \;\Rightarrow\; x - y = (x + y)y' \;\Rightarrow\; y' = \frac{x - y}{x + y} \;\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\; f(\lambda x, \lambda y) = \frac{\lambda(x - y)}{\lambda(x + y)} = f(x, y)$$ – однорідна функція 0-виміру.

Заміна $t = \dfrac{y}{x}$ дає ($y = tx$, $y'_x = t'_x \cdot x + t$) $\Rightarrow\; t' \cdot x + t = \dfrac{1 - t}{1 + t} \;\Rightarrow$

$$\Rightarrow\; \frac{dt}{dx} \cdot x = \frac{1 - t}{1 + t} - t \;\Rightarrow\; \frac{dt}{dx} \cdot x = -\frac{t^2 + 2t - 1}{t + 1} \;\Rightarrow\; \frac{dx}{x} = -\frac{t + 1}{t^2 + 2t - 1} dt \;\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \ln|x| + \frac{1}{2}\ln|t^2+2t-1| = \underset{(C\neq 0)}{\ln|C|} \Rightarrow \ln\left|x^2(t^2+2t-1)\right| = \ln|C| \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \ln\left|x^2(t^2+2t-1)\right| = \ln|C| \Rightarrow \left|t = y/x\right| \Rightarrow y^2+2xy-x^2 = C.$$

Отримали загальний інтеграл рівняння, у чому легко переконатися:

$$(y^2+2xy-x^2)' = 2yy' + 2(y+xy') - 2x = 0 \Rightarrow x - yy' = y + xy'. \ \bullet$$

(Як *виглядатиме* розв’язок, якщо покласти $t = x/y$, де $x = x(y)$?)

Зауваження. ДР-1 $y' = f(x, y)$, задане в диференціальній формі:

$$M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0, \qquad (16.3.4)$$

є ОДР-1, якщо $M(x,y)$, $N(x,y)$ – однорідні функції однакового виміру, бо тоді $f(x,y) = -\dfrac{M(x,y)}{N(x,y)}$ – однорідна функція 0-виміру.

Згідно з характеристичною властивістю ОДР-1 (див. (16.3.2)) перевірку ДР-1 на однорідність також можна здійснювати при завданні його в диференціальній формі (16.3.4), а саме: якщо $M(\lambda x, \lambda y) = \lambda^m M(x,y)$, $N(\lambda x, \lambda y) = \lambda^m N(x,y)$, то заміна x на λx і y на λy приводить до вихідного рівняння.

Приклад. Перевірити, чи є рівняння $x^2dx - 2xydy = 3xydx + 4y^2dy$ однорідним.

Виокремлюємо члени рівняння з dx і dy:

$$(x^2-3xy)dx - 2(xy+2y^2)dy = 0,$$

і *перевіряємо*, чи задовольняється характеристична властивість:

$$\left|\begin{matrix} x \leftrightarrow \lambda x \\ y \leftrightarrow \lambda y \end{matrix}\right| \Rightarrow \lambda^2[(x^2-3xy)dx - 2(xy+2y^2)dy] = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (x^2-3xy)dx - 2(xy+2y^2)dy = 0 \Rightarrow \text{ОДР-1}. \ \bullet$$

(*Спробуйте* зробити відповідний висновок без формального викладу.)

Звідними до ОДР-1 є рівняння $y' = f(x, y)$, права частина яких – функція відношення лінійних функцій відносно змінних x і y:

$$y' = \frac{dy}{dx} = f\left(\frac{a_1x + b_1y + c_1}{a_2x + b_2y + c_2}\right), \text{ де } a_i,\ b_i,\ c_i,\ i = 1,2 \text{ – сталі.} \qquad (16.3.5)$$

При $c_1 = c_2 = 0$ воно буде однорідним (*чому?*), у противному випадку виконують заміну: $\left[\begin{array}{l} x = u + m, \\ y = v + n, \end{array}\right.$ де u, v – нові змінні, m, n – невідомі сталі.

Сталі підбираються так, щоб лінійні функції відносно нових змінних u, v не містили вільних членів.

Визначимо умови, за яких ця обставина матиме місце, для чого здійснимо у дробово-лінійній функції перехід до нових змінних:

$$\left|\begin{array}{l} x = u + m \\ y = v + n \end{array}\right| \Rightarrow \frac{a_1(u+m) + b_1(v+n) + c_1}{a_2(u+m) + b_2(v+n) + c_2} = \frac{a_1u + b_1v + (a_1m + b_1n + c_1)}{a_2u + b_2v + (a_2m + b_2n + c_2)}.$$

Значення параметрів m і n повинні задовольняти систему рівнянь:

$\begin{cases} a_1m + b_1n + c_1 = 0, \\ a_2m + b_2n + c_2 = 0, \end{cases}$ яка сумісна і визначена, якщо $\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \neq 0$.

При виконанні зазначених умов, ураховуючи, що $dx = du$, $dy = dv$, отримаємо:

$$v'_u = \frac{dv}{du} = f\left(\frac{a_1u + b_1v}{a_2u + b_2v}\right) \text{ – ОДР-1 відносно змінних } u,\ v. \qquad (16.3.6)$$

Якщо $\Delta = a_1b_2 - b_1a_2 = 0$, то (16.3.5) підстановкою $z = a_1x + b_1y$ (або $z = a_2x + b_2y$) зводиться до ДР-1*вз* (*переконайтеся*).

Приклад. Звести рівняння $y' = \sqrt{\dfrac{x - y + 1}{x + y - 5}}$ до ОДР-1.

Складаємо визначник із коефіцієнтів при змінних x і y, і *обчислюємо* його: $\Delta = a_1b_2 - b_1a_2 = 1 \cdot 1 + 1 \cdot 1 = 2 \neq 0$.

Розв'язуємо систему лінійних рівнянь відносно параметрів m, n (для визначення формул переходу до нових змінних):

$$\begin{cases} m-n+1=0, \\ m+n-5=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m=2, \\ n=3 \end{cases} \Rightarrow (x=u+2\,,\ y=v+3),$$

і відповідно до (16.3.6) отримаємо:

$$v'_u=\frac{dv}{du}=\sqrt{\frac{u-v}{u+v}}=\sqrt{\frac{1-v/u}{1+v/u}} \text{ – ОДР-1 відносно змінних } u, v\,. \bullet \qquad (16.3.7)$$

16.4. Лінійні диференціальні рівняння першого порядку і рівняння Бернуллі

Лінійним диференціальним рівнянням 1-го порядку (**ЛДР-1**) називається рівняння $y'=f(x,y)$, права частина якого є лінійною функцією від невідомої функції $y=y(x)$:

$$y'=f(x,y) \text{ – ЛДР-1 } \rightleftharpoons \ f(x,y) \text{ – лінійна функція від } y\,. \qquad (16.4.1)$$

Зважаючи на те, що в (16.4.1) і y, і y' входять у першому степені, кажуть: ЛДР-1 – це рівняння, лінійне відносно невідомої функції та її похідної, і у символах зображають так:

$$y'+P(x)\cdot y=Q(x), \qquad (16.4.2)$$

де $P(x)$ і $Q(x)$ – відомі функції.

Якщо $P(x)$ і $Q(x)$ неперервні на деякому інтервалі (a,b), то рівняння (16.4.2) задовольняє умови існування і єдиності розв'язку (див. теорему 16.1.1). Дійсно, його права частина і її частинна похідна за змінною y є неперервними функціями:

$$y'=\underbrace{Q(x)-P(x)\cdot y}_{f(x,y)\in \mathbf{C}(D)} \wedge f'_y=\underbrace{-P(x)}_{P(x)\in\mathbf{C}(D)} \Rightarrow \exists!\varphi(x):\varphi'(x_0)=f(x_0,y_0).$$

Розрізнюють два види рівнянь такого типу: якщо функція $Q(x)$ є тотожним нулем (не є тотожним нулем) на деякому інтервалі (a,b), то

ЛДР-1 називається **однорідним**, або **рівнянням без правої частини** (**неоднорідним,** або **рівнянням із правою частиною**):

$$Q(x) \equiv 0: \;\; y' + P(x) \cdot y = 0$$ – однорідне рівняння (ОЛДР-1);

$$Q(x) \not\equiv 0: \;\; y' + P(x) \cdot y = Q(x)$$ – неоднорідне рівняння (НЛДР-1).

Висвітлимо два підходи до інтегрування ЛДР-1: **метод Бернуллі** (за ім'ям швейцарського математика Якоба Бернуллі (1654 – 1705 рр.)) і **метод Лагранжа**.

I. ***Метод допоміжних функцій*** **(*метод Бернуллі*)**. Суть методу:

невідому функцію $y = y(x)$ відшукують у вигляді добутку двох (допоміжних) диференційовних функцій: $u = u(x)$ і $v = v(x)$;

одна з них вибирається спеціальним чином (із метою спрощення рівняння), а друга так, щоб їхній добуток задовольняв задане рівняння.

Покажемо реалізацію такого підходу у загальному вигляді:

1*. Покладаємо* $y = uv$, *знаходимо* похідну y' як похідну добутку: $y' = u'v + v'u$, і *підставляємо* вирази для y і y' у задане рівняння:

$$y' + P(x) \cdot y = Q(x) \;\Rightarrow\; \left| \begin{array}{c} y = uv \\ y' = u'v + v'u \end{array} \right| \;\Rightarrow\; u'v + v'u + P(x)uv = Q(x).$$

2. *Групуємо* у лівій частині отриманого рівняння два доданки зі спільним множником (наприклад, 2-й і 3-й), *виносимо* множник за дужки:

$$u'v + u(v' + P(x)v) = Q(x),$$

і *вибираємо* одну з допоміжних функцій так, щоб вона забезпечувала рівність нулеві виразу у дужках (у цьому і полягає спеціальний вибір):

$$v' + P(x)v = 0 \quad \text{(А)},$$

тоді друга функція (у нас це $u = u(x)$) повинна задовольняти умову (на якій *підставі?*):

$$u'v = Q(x) \quad \text{(Б)}.$$

3. *Інтегруємо* по черзі рівняння (А), (Б), які є рівняннями з відокремлюваними змінними, при цьому береться частинний розв'язок (А) і загальний розв'язок (Б), і *записуємо* $y = uv$.

(А): $v' + P(x)v = 0 \;\Rightarrow\; \dfrac{dv}{dx} = -P(x)v \;\Rightarrow\; \dfrac{dv}{v} = -P(x)dx$ – ДР-1*вз*;

знаходимо частинний розв'язок, беручи довільну сталу C рівною нулеві:

$$\int \frac{dv}{v} = -\int P(x)dx \;\Rightarrow\; \ln|v| = -\int P(x)dx \;\Rightarrow\; v = v(x) = e^{-\int P(x)dx}.$$

(Б): $u'v = Q(x) \;\Rightarrow\; \dfrac{du}{dx}v = Q(x) \;\Rightarrow\; du = \dfrac{Q(x)}{v}dx$ – ДР-1*вз* $\Rightarrow$

$$\Rightarrow\; \int du = \int e^{\int P(x)dx} Q(x)dx \;\Rightarrow\; u = u(x) = \int e^{\int P(x)dx} Q(x)dx + C.$$

Загальний розв'язок має вигляд:

$$y = vu = e^{-\int P(x)dx} \cdot \left(\int e^{\int P(x)dx} Q(x)dx + C \right). \qquad (16.4.3)$$

На практиці, при розв'язанні прикладів і задач, звичайно не користуються (16.4.3) як готовою формулою, а реалізовують усі три описані вище кроки.

Приклад. Знайти загальний розв'язок рівняння: $x - 1 = y + xy'$.

Аналізуємо рівняння, *переконуємося*, що воно є лінійним, і *приводимо* до (*стандартного*) вигляду (16.4.2):

$$x - 1 = y + xy' \;\Rightarrow\; y' + \frac{1}{x} \cdot y = \frac{x-1}{x} \quad (x \neq 0).$$

Здійснюємо ланцюжком описані кроки 1, 2, 3:

$$(y = uv \;\Rightarrow\; y' = u'v + v'u) \;\Rightarrow\; u'v + (v'u + \frac{1}{x} \cdot uv) = \frac{x-1}{x} \;\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\; u'v + u(v' + \frac{1}{x} \cdot v) = \frac{x-1}{x} \;\Rightarrow \left[\begin{array}{ll} v' + v/x = 0 & \text{(А)} \\ u'v = (x-1)/x & \text{(Б)} \end{array} \right.;$$

(А): $v' + v/x = 0 \;\Rightarrow\; \dfrac{dv}{dx} = -\dfrac{v}{x} \;\Rightarrow\; \dfrac{dv}{v} = -\dfrac{dx}{x} \;\Rightarrow\; \displaystyle\int \frac{dv}{v} = -\int \frac{dx}{x} \;\Rightarrow$

$$\Rightarrow\; \ln|v| = -\ln|x| \;\Rightarrow\; \ln|v| = \ln|x|^{-1} \;\Rightarrow$$

$\Rightarrow v = 1/x$ (вибираємо найпростіший частинний розв'язок);

(Б): $u'v=(x-1)/x \;\Rightarrow\; \dfrac{du}{dx}\cdot\dfrac{1}{x}=\dfrac{x-1}{x} \;\Rightarrow\; du=(x-1)dx \;\Rightarrow$

$$\Rightarrow \int du=\int (x-1)dx+C \;\Rightarrow\; u=\frac{(x-1)^2}{2}+C\,.$$

Загальний розв'язок рівняння: $y=uv=\left(\dfrac{1}{2}(x-1)^2+C\right)\cdot\dfrac{1}{x}$. ●

(*Переконайтеся* у правильності отриманого результату.)

II. *Метод варіації довільної сталої* (*метод Лагранжа*). Суть методу: невідому функцію $y=y(x)$ відшукують у вигляді загального розв'язку однорідного рівняння $y'+P(x)\cdot y=0$ за умови, що довільна стала C є функцією від змінної x.

Реалізуємо цей підхід у загальному вигляді, для рівняння (16.4.2):

1. *Розв'язуємо* однорідне рівняння, відповідне заданому рівнянню з правою частиною:

$$y'+P(x)\cdot y=0 \;\Rightarrow\; \frac{dy}{dx}=-P(x)\cdot y \;\Rightarrow\; \frac{dy}{y}=-P(x)dx \;\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \int\frac{dy}{y}=-\int P(x)dx+C \;\Rightarrow\; \ln|y|=-\int P(x)dx+\underset{(C\neq 0)}{\ln|C|} \;\Rightarrow\; \ln\left|\frac{y}{C}\right|=-\int P(x)dx \;\Rightarrow$$

$\Rightarrow\; y=C\cdot e^{-\int P(x)dx}$ – загальний розв'язок однорідного рівняння.

2. *Покладаємо* $C=C(x)$ – варіюємо довільну сталу – і знаходимо функцію $C(x)$ за умови, що $y=C(x)\cdot e^{-\int P(x)dx}$ є розв'язком (16.4.2):

$$y=C(x)\cdot e^{-\int P(x)dx} \;\Rightarrow\; y'=C'(x)\cdot e^{-\int P(x)dx}+C(x)\left(e^{-\int P(x)dx}\right)' \;\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\; y'=C'(x)\cdot e^{-\int P(x)dx}-C(x)e^{-\int P(x)dx}P(x);$$

підставляємо вирази для y і y' у вихідне рівняння (16.4.2) ($y'+P(x)y=Q(x)$):

$$C'(x)\cdot e^{-\int P(x)\cdot dx}-C(x)e^{-\int P(x)\cdot dx}P(x)+P(x)C(x)\cdot e^{-\int P(x)dx}=Q(x) \;\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\; C'(x)\cdot e^{-\int P(x)\cdot dx}=Q(x) \;\Rightarrow\; C'(x)=e^{\int P(x)\cdot dx}Q(x) \;\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\; C(x)=\int e^{\int P(x)dx}Q(x)\,dx+\tilde{C}\,,\ \text{де } \forall\tilde{C}\in\mathbf{R}\,.$$

Таким чином,

$$y = y(x) = \left(\int e^{\int P(x)dx} Q(x)\,dx + \tilde{C}\right) e^{-\int P(x)dx}. \qquad (16.4.4)$$

(*Зіставте* формулу (16.4.4) з (16.4.3) і зробіть відповідний висновок).

***Відмітимо*:**

розв'язання ОЛДР-1 рівносильне розв'язанню рівняння (А) у методі Бернуллі (у чому ж тоді *полягає* принципова відмінність методів?);

у окремих випадках ДР-1, нелінійне відносно y, y', може бути лінійним відносно x, x', якщо x розглядати як функцію від y: $x = x(y)$.

Наприклад,

$$y' = \frac{1}{y^3 - xy} \;\Rightarrow\; x' = y^3 - xy \;\Rightarrow\; x' + xy = y^3$$ – ЛДР-1 відносно x, x'.

Рівнянням Бернуллі називають ДР-1 вигляду:

$$y' + P(x)\cdot y = Q(x)\cdot y^n \quad (n \notin \{0,1\}). \qquad (16.4.5)$$

Воно є узагальненням ЛДР-1 і заміною змінної зводиться до нього. Покажемо, як це робиться:

1. *Поділимо* ліву і праву частини рівняння на y^n, покладаючи $y \neq 0$ ($y = 0$ є тривіальним розв'язком (16.4.5)):

$$y'y^{-n} + P(x)\cdot y^{1-n} = Q(x), \qquad (16.4.6)$$

2. *Виконаємо* заміну змінної: $t = y^{1-n}$, де $t = t(x)$ – зложена функція, адже $y = y(x)$.

За правилом диференціювання складеної функції для похідної dt/dx отримаємо: $t' = (1-n)y^{-n}y'$, звідки $y^{-n}y' = t'/(1-n)$, тоді (16.4.6) набуде вигляду:

$$\frac{t'}{1-n} + P(x)\cdot t = Q(x) \;\Rightarrow\; t' + (1-n)P(x)\cdot t = (1-n)Q(x) \;-$$

лінійне диференціальне рівняння відносно t, t'.

3. *Інтегруємо* отримане рівняння і *вертаємось* до змінної y:

$$t = y^{1-n} \;\Rightarrow\; y = t^{1/(1-n)} \text{ або } y = \frac{1}{\sqrt[n-1]{t}}, \text{ якщо } n \in \mathbf{N} \wedge t = t(x) > 0.$$

(*Розміркуйте*, із яких міркувань на n *накладаються* обмеження $n \neq 0,\ n \neq 1$?)

Зауваження:

рівняння Бернуллі можна розв'язувати, як і ЛДР-1, методом допоміжних функцій або методом Лагранжа без заміни змінної;

узагальненням нелінійного рівняння вигляду (16.4.6) є рівняння

$$R'_y(y) \cdot y'_x + P(x) \cdot R(y) = Q(x), \tag{16.4.7}$$

де $R(y)$ – функція від $y = y(x)$, яке зводиться до ЛДР-1 заміною $t = R(y)$:

$$t'_x = R'_y \cdot y'_x \;\Rightarrow\; t' + P(x) \cdot t = Q(x) \text{ – ЛДР-1 відносно } t,\ t'.$$

Приклад. Для заданого ДР-1 $x = (y + y') \cdot y^{-2}$ знайти інтегральну криву, якій належить точка $(1,1)$.

Установимо тип рівняння (для чого розв'яжемо його відносно y' і проаналізуємо праву частину отриманої рівності):

$$x = (y + y') \cdot y^{-2} \;\Rightarrow\; y' = xy^2 - y \;\Rightarrow\; f(x, y) = xy^2 - y.$$

Функція $f(x, y)$ не припускає відокремлення змінних (*чому?*), тому це ДР-1 не є рівнянням із відокремлюваними змінними; не є однорідною 0-виміру, бо $f(\lambda x,\ \lambda y) \neq f(x, y)$; не є лінійною, оскільки містить y^2.

Задане ДР-1 можна віднести і до рівняння Бернуллі з $n = 2$, $P(x) \equiv 1,\ Q(x) = x$, і до його узагальнення (16.4.7) з $R(y) = -y^{-1}$ (*переконайтеся*).

Зведемо $y' + 1 \cdot y = x \cdot y^2$ – рівняння Бернуллі – до лінійного відносно t, t' заміною $t = y^{1-n}$, де $n = 2$, тобто $t = y^{-1}$, тоді $t'_x = -y^{-2} y'_x$:

$$y' + 1 \cdot y = x \cdot y^2 \;\Rightarrow\; y' y^{-2} + 1 \cdot y^{-1} = x \;\Rightarrow\; t' - t = -x \text{ – ЛДР-1.}$$

Розв'яжемо ЛДР-1 методом Лагранжа (*наведіть* коментар):

1) $t'-t=0 \Rightarrow \dfrac{dt}{dx}=t \Rightarrow \dfrac{dt}{t}=dx \Rightarrow \int\dfrac{dt}{t}=\int dx+C \Rightarrow \ln|t|=x+\underset{(C\neq 0)}{\ln|C|} \Rightarrow$

$\Rightarrow \ln\left|\dfrac{t}{C}\right|=x \Rightarrow t=Ce^x$ (куди *подівся* модуль?) – загальний розв'язок ОЛДР-1;

2) $C=C(x)$: $(t=C(x)e^x \Rightarrow t'=C'(x)e^x+C(x)e^x) \Rightarrow |t'-t=-x| \Rightarrow$

$\Rightarrow C'(x)e^x=-x \Rightarrow C'(x)=-xe^{-x} \Rightarrow \int C'(x)dx=-\int xe^{-x}dx+\tilde{C} \Rightarrow$

$\Rightarrow C(x)=(x+1)e^{-x}+\tilde{C} \Rightarrow t=C(x)e^x=[(x+1)e^{-x}+\tilde{C}]e^x \Rightarrow$

$\Rightarrow t=(x+1)+\tilde{C}e^x$ – загальний розв'язок НЛДР-1 відносно змінної t, де $\tilde{C}$ – довільна стала;

$y=t^{-1}=(x+1+\tilde{C}e^x)^{-1}$ – загальний розв'язок заданого рівняння;

3) *розв'язуємо* задачу Коші:

$y=(x+1+\tilde{C}e^x)^{-1} \Rightarrow |x_0=y_0=1| \Rightarrow 1=(1+1+\tilde{C}e^1)^{-1} \Rightarrow$

$\Rightarrow \tilde{C}=-e^{-1} \Rightarrow y=(x+1-e^{-1}e^x)^{-1} \Rightarrow y=1/(x+1-e^{x-1})$ – рівняння інтегральної кривої, що проходить через точку $(1,1)$. ●

Зауваження. Більш складним випадком ДР-1, яке зводиться до розв'язання ЛДР-1, є **рівняння Лагранжа**:

$$y=x\varphi(y')+\psi(y'),$$

де $\varphi(y')$, $\psi(y')$ – відомі, диференційовні за y', функції.

Вводять заміну: $y'=p$, потім диференціюють ліву і праву частини рівняння, і розв'язують лінійне відносно x як функції від p ЛДР-1, отримуючи загальний розв'язок у параметричній формі:

$$x=\chi(p,C), \quad y=\chi(p,C)\varphi(p)+\psi(p),$$

де p – параметр.

У табл. 16.4.1 наведено характеристичні властивості, за якими можна розпізнати деякі (з певної точки зору – основні) типи ДР-1.

Таблиця 16.4.1

Розпізнання типу ДР-1 $y' = f(x, y)$ за його правою частиною

№ п/п	Назва і символічний запис	Характеристична властивість – права частина $f(x, y)$:
1	найпростіші: $y' = f(x)$ $(y' = f(y))$	функція тільки від змінної x (змінної y)
2	з відокремлюваними змінними: $y' = \dfrac{\varphi_1(x)\cdot\psi_2(y)}{\psi_1(y)\cdot\varphi_2(x)}$	відношення добутку з функцій тільки від змінної x і тільки від змінної y
3	однорідні: $y' = \varphi(y/x)$; $x' = \varphi(x/y)$	функція відношення y/x, якщо $y = y(x)$; або відношення x/y, якщо $x = x(y)$
4	лінійні: $y' + P(x)\cdot y = Q(x)$ $(y' = -P(x)\cdot y + Q(x))$	лінійна функція відносно змінної y
5	у повних диференціалах: $y' = -\dfrac{M(x, y)}{N(x, y)}$	відношення функцій, які задовольняють умову: $M'_y(x, y) = N'_x(x, y)$

16.5. Диференціальні рівняння у повних диференціалах та звідні до них

Означення, загальний інтеграл, критерій повного диференціала

Нагадаємо (див. ч. 2, п. 13.2), що повним диференціалом функції двох змінних $u = u(x, y)$ називають суму добутків частинних похідних із диференціалами незалежних змінних, і за умови диференційовності частинних похідних мішані похідні другого порядку рівні між собою:

$$du = \frac{\partial u}{\partial x}dx + \frac{\partial u}{\partial y}dy, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x}. \qquad (16.5.1)$$

Диференціальне рівняння першого порядку

$$M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0 \tag{16.5.2}$$

з неперервними в деякій області D функціями $M(x,y)$, $N(x,y)$ називають **рівнянням у повних диференціалах** (**ДР-1*пд***), якщо існує функція двох змінних $u(x,y)$, $(x,y) \in D$, така, що ліва частина рівняння є її повним диференціалом:

$$M(x,y)dx + N(x,y)dy = du(x,y). \tag{16.5.3}$$

Інакше, рівняння (16.5.2) називають **рівнянням у повних диференціалах,** якщо множники при dx і при dy є частинними похідними деякої функції $u(x,y)$:

$$\begin{gathered} M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0 - \text{ДР-1}\textit{пд} \rightleftharpoons \\ \rightleftharpoons (M(x,y) = u'_x, \;\; N(x,y) = u'_y). \end{gathered} \tag{16.5.4}$$

ДР-1*пд* задовольняє умови існування і єдиності розв'язку (див. теорему 16.1.1) в області D, у якій функції $M(x,y)$, $N(x,y)$ неперервні, до того ж $N(x,y)$ в жодній точці не стає нулем: $N(x,y) = u'_y(x,y) \neq 0$.

Це випливає, зокрема, з аналізу подання рівняння через y':

$$y' = -M(x,y)/N(x,y). \tag{16.5.5}$$

(*Наведіть* відповідні міркування.)

Прикладом рівняння у повних диференціалах є рівняння з відокремленими змінними:

$$\varphi(x)dx = \psi(y)dy, \text{ або } \varphi(x)dx + (-\psi(y))dy = 0, \text{ або } y' = \frac{\varphi(x)}{\psi(y)}.$$

Функція $u(x,y)$ має вигляд:

$$u = u(x,y) = \int \varphi(x)dx - \int \psi(y)dy + C.$$

Дійсно, за властивістю похідної від НІ за змінною інтегрування (за x і за y) отримуємо: $u'_x = \varphi(x)$, $u'_y = -\psi(y)$.

Функція $u = u(x,y)$ дає змогу визначити загальний інтеграл ДР-1*пд*.

Теорема 16.5.1 (*про загальний інтеграл ДР-1пд*). Загальний інтеграл рівняння у повних диференціалах описується рівністю:

$$u(x, y) = C, \tag{16.5.6}$$

де $y = y(x)$, C – довільна стала ($\forall C \in \mathbf{R}$).

Д о в е д е н н я ґрунтується на означенні загального інтеграла.

1. Знайдемо повні диференціали лівої і правої частин (16.5.6). Ураховуючи, що $C'_x = C'_y = 0$, отримуємо: $du(x, y) = dC = 0$. Це означає, що яке б не було C, функція $y = y(x)$ задовольняє рівність $du(x, y) = 0$, а значить і рівняння (16.5.3). Таким чином, перша умова означення загального інтеграла виконується.

2. Якщо задана початкова умова: $y(x_0) = y_0$, тобто точка (x_0, y_0), то за нею легко знайти відповідне значення параметра C: $C = u(x_0, y_0)$, і тоді рівність

$$u(x, y) = u(x_0, y_0) \tag{16.5.7}$$

у будь-якій точці $(x_0, y_0) \in D$ (за умови: $N(x_0, y_0) = u'_y(x_0, y_0) \neq 0$) визначає частинний інтеграл рівняння як неявне завдання функції $y = y(x)$ – розв'язку задачі Коші. ■

Стосовно розв'язання ДР-1*пд* постають питання: як серед різних ДР-1 розпізнати рівняння у повних диференціалах і як за функціями $M(x, y) = u'_x$ і $N(x, y) = u'_y$ відновити функцію $u(x, y)$ для отримання загального інтеграла?

Відповідь на ці питання дає теорема 16.5.2.

Теорема 16.5.2 (*критерій повного диференціала*). Для того, щоб вираз $M(x, y)dx + N(x, y)dy$ був повним диференціалом деякої функції $u(x, y)$, необхідно і достатньо щоб у розглядуваній області D функції $M(x, y)$, $N(x, y)$ були неперервними, мали неперервні частинні похідні M'_y, N'_x, і виконувалась умова: $M'_y \equiv N'_x$, тобто:

$$M(x, y)dx + N(x, y)dy = du(x, y) \;\Leftrightarrow\; M'_y \equiv N'_x. \tag{16.5.8}$$

Н е о б х і д н і с т ь (⇒). Нехай виконується (16.5.3):

$$M(x,y)dx+N(x,y)dy=du(x,y),$$

тоді справедливі рівності: $u'_x=M(x,y)$, $u'_y=N(x,y)$.

Здиференціюємо ці рівності відповідно за y і за x:

$$u'_{xy}=M'_y,\quad u'_{yx}=N'_x.$$

За умовою теореми частинні похідні M'_y і N'_x є неперервними функціями, тому мішані похідні 2-го порядку для $u(x,y)$ рівні між собою в усіх точках області D (див. (16.5.1)). На цій підставі маємо:

$$u'_{xy}\equiv u'_{yx}\ \Rightarrow\ M'_y\equiv N'_x.$$

Д о с т а т н і с т ь (⇐). Нехай виконується умова: $M'_y\equiv N'_x$.

Покажемо існування функції $u(x,y)$ такої, що ліва частина рівняння є її повним диференціалом, тобто:

$$u'_x=M(x,y),\quad u'_y=N(x,y).$$

Для цього залучимо (без виведення) формулу Лейбніца для диференціювання визначених інтегралів, залежних від параметра α:

$$\frac{d}{d\alpha}\left[\int_a^b f(x,\alpha)dx\right]=\int_a^b f'_\alpha(x,\alpha)dx, \qquad (16.5.9)$$

тобто похідна ВІ за параметром дорівнює ВІ від похідної підінтегральної функції за цим параметром.

Зафіксуємо в області D існування і єдиності розв’язку ДР-1*пд* деяку точку (x_0,y_0) і виберемо іншу, довільну, точку $(x,y)\in D$.

Інтегруванням рівності $u'_x=M(x,y)$ на проміжку $[x_0,x]$ за змінною x відновлюємо однопараметричну сім’ю функцій $u(x,y)$, де в ролі параметра може виступати довільна функція від y: $\varphi(y)$, бо $\varphi'_x(y)\equiv 0$:

$$u(x,y)=\int_{x_0}^{x} M(x,y)dx+\varphi(y). \qquad (16.5.10)$$

Підберемо функцію $\varphi(y)$ так, щоб виконувалась умова: $M'_y \equiv N'_x$. Для цього диференціюємо (16.5.10) за змінною y, залучаючи (16.5.9):

$$u'_y = \left(\int_{x_0}^{x} M(x,y)dx + \varphi(y) \right)'_y = \int_{x_0}^{x} M'_y(x,y)dx + \varphi'_y(y).$$

Підставляємо замість M'_y похідну N'_x і ураховуємо, що $u'_y = N(x,y)$:

$$N(x,y) = \int_{x_0}^{x} N'_x(x,y)dx + \varphi'(y).$$

Інтегруємо й отримуємо:

$$N(x,y) = N(x,y) - N(x_0,y) + \varphi'(y) \;\Rightarrow\; \varphi'(y) = N(x_0,y).$$

Відновлюємо функцію $\varphi(y)$ інтегруванням $N(x_0,y)$ на проміжку $[y_0,y]$ за змінною y:

$$\varphi(y) = \int_{y_0}^{y} N(x_0,y)dy + C_1.$$

Отже, шукана функція має вигляд:

$$u(x,y) = \int_{x_0}^{x} M(x,y)dx + \int_{y_0}^{y} N(x_0,y)dy + C_1. \; \blacksquare \tag{16.5.11}$$

(*Переконайтеся* в правильності цієї формули безпосередньою перевіркою.)

Виведена функція $u(x,y)$ є функцією, диференціал якої дорівнює лівій частині рівняння (16.5.3), отже за теоремою 16.5.1 загальний інтеграл ДР-1*пд* має вигляд:

$$\int_{x_0}^{x} M(x,y)dx + \int_{y_0}^{y} N(x_0,y)dy = C. \tag{16.5.12}$$

(Куди *поділася* стала C_1?)

При розв'язанні ДР-1*пд* можна користуватися співвідношенням (16.5.12) як готовою формулою (проте слід розрізнювати, за смислом, змінні інтегрування – x, y – і змінні верхні межі інтегрування).

Приклад. Розв'язати задачу Коші:

$$(3x+y)dx + xdy = 0\,, \quad y(1) = -0{,}5\,.$$

Установлюємо тип рівняння. З одного боку, це однорідне рівняння, адже $y' = -3 - y/x$ (див. (16.3.3)), з іншого – рівняння у повних диференціалах, бо $M'_y \equiv N'_x \equiv 1$, де $M = 3x + y$, $N = x$.

Скористуємося готовою формулою (16.5.12):

$$\int\limits_{x_0}^{x} M(x,y)dx = \int\limits_{x_0}^{x}(3x+y)dx = \left(\frac{3x^2}{2} + yx\right)\Bigg|_{x_0}^{x} = \frac{3x^2}{2} + yx - \frac{3{x_0}^2}{2} - yx_0\,;$$

$$\int\limits_{y_0}^{y} N(x_0,y)dy = \int\limits_{y_0}^{y} x_0 dy = x_0 y\Big|_{y_0}^{y} = x_0(y - y_0)\,.$$

Таким чином, маємо загальний інтеграл заданого рівняння:

$$1{,}5x^2 + xy + \underbrace{(-1{,}5x_0^2 - x_0 y_0)}_{C_1} = C\,, \text{ або } \; 1{,}5x^2 + xy = C\,.$$

Дійсно, $u(x,y) = 1{,}5x^2 + xy \quad \Rightarrow \quad (u'_x = 3x + y\,,\; u'_y = x)$ (куди знову *поділося* C_1?).

За початковою умовою знаходимо значення сталої C і записуємо частинний інтеграл та частинний розв'язок:

$$(x = 1,\; y = -0{,}5) \;\Rightarrow\; C = 1 \;\Rightarrow\; 1{,}5x^2 + xy = 1 \;\Rightarrow\; y = x^{-1} - 1{,}5x\,. \; \bullet$$

Зауваження. В якості точки (x_0, y_0) можна брати будь-яку точку з області D існування і єдиності розв'язку ДР-1*пд*, це ніяк не вплине на остаточний результат – вираз загального інтеграла.

(*Обміркуйте*, точки з якими координатами не можуть бути нижніми межами інтегрування в (16.5.12) у розглянутому прикладі.)

Звідні до рівнянь у повних диференціалах ДР-1

Зведеним до рівняння у повних диференціалах може бути будь-яке ДР-1 вигляду $M(x,y)dx+N(x,y)dy=0$, у якого ліва частина не є повним диференціалом, за умови, що існує така функція $\mu=\mu(x,y)$, після множення на яку обох частин рівняння у лівій частині отримаємо повний диференціал функції двох змінних $u=u(x,y)$:

$$\mu(x,y)M(x,y)dx+\mu(x,y)N(x,y)dy=du(x,y), \tag{16.5.13}$$

для якої справедливі рівності:

$$u'_x=\mu(x,y)M(x,y),\ \ u'_y=\mu(x,y)N(x,y).$$

Функція $\mu=\mu(x,y)$ така, що вираз $\mu M\,dx+\mu N\,dy$ є повним диференціалом деякої функції $u=u(x,y)$, називається **інтегрувальним множником** (**ІМ**) рівняння $Mdx+Ndy=0$:

$$\mu=\mu(x,y)\text{ – ІМ }\ Mdx+Ndy=0\ \ \rightleftharpoons\ \ \mu Mdx+\mu Ndy=du. \tag{16.5.14}$$

Умови, які повинен задовольняти ІМ, знайдемо на підставі критерію повного диференціала (16.5.8):

$$\begin{gathered}(\mu M)'_y=(\mu N)'_x\ \Rightarrow\ \mu'_yM+\mu M'_y=\mu'_xN+\mu N'_x\ \Rightarrow\\ \Rightarrow\ \left|\mu\neq 0\right|\ \Rightarrow\ M\frac{1}{\mu}\mu'_y-N\frac{1}{\mu}\mu'_x=N'_x-M'_y\ \Rightarrow\\ \Rightarrow\ M(\ln\mu)'_y-N(\ln\mu)'_x=N'_x-M'_y.\end{gathered} \tag{16.5.15}$$

Висновок. Відшукання ІМ потребує розв'язання диференціального рівняння з частинними похідними відносно функції $\ln\mu(x,y)$, що у загальному випадку є нелегкою задачею.

Задача значно спрощується, якщо ІМ буде функцію однієї змінної, тобто $\mu=\mu(x)$ або $\mu=\mu(y)$, тоді (16.5.15) набуває відповідно вигляду:

$$\begin{aligned}&\mu=\mu(x):\ -N(\ln\mu)'_x=N'_x-M'_y,\text{ або }\ (\ln\mu)'_x=(M'_y-N'_x)/N;\\ &\mu=\mu(y):\ M(\ln\mu)'_y=N'_x-M'_y,\text{ або }\ (\ln\mu)'_y=(N'_x-M'_y)/M.\end{aligned} \tag{16.5.16}$$

Із (16.5.16) випливають ***достатні умови*** існування ІМ $\mu(x)$, $\mu(y)$:

$$\begin{aligned} &(M'_y - N'_x)\big/N = \varphi(x) \;\Rightarrow\; \mu = \mu(x) = Ce^{\int \varphi(x)dx}; \\ &(N'_x - M'_y)\big/M = \psi(y) \;\Rightarrow\; \mu = \mu(y) = Ce^{\int \psi(y)dy}. \end{aligned} \tag{16.5.17}$$

Зазвичай довільну сталу C беруть рівною одиниці.

Приклад. Розв’язати задачу Коші:

$$4y^2dx + (x + e^{(2y)^{-1}})dy = 0, \quad y(0) = 1/2.$$

Перевіряємо, чи є це рівняння рівнянням у повних диференціалах:

$$\left[\begin{array}{l} M = 4y^2 \Rightarrow M'_y = 8y \\ N = x + e^{(2y)^{-1}} \Rightarrow N'_x = 1 \end{array}\right. \;\Rightarrow\; \left(M'_y \neq N'_x\right) \;\Rightarrow\; \text{(не є ДР-1}\textit{пд}\text{)}.$$

Аналізуємо відношення $(M'_y - N'_x)\big/N$, $(N'_x - M'_y)\big/M$ і приходимо до висновку, що друге з них – функція від y: $\psi(y) = (1-8y)\big/(4y^2)$.

Знаходимо ІМ:

$$\mu = \mu(y) = e^{\int \psi(y)dy} \;\Rightarrow\; \left|\; \int \psi(y)dy = \frac{1}{4}\int \frac{1-8y}{y^2}dy = -\left(\frac{1}{4y} + 2\ln|y|\right) \;\right| \;\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\; \mu = \mu(y) = e^{(-4y)^{-1} - 2\ln|y|} = y^{-2}e^{(-4y)^{-1}}.$$

Зводимо задане рівняння до рівняння у повних диференціалах:

$$4y^2dx + (x + e^{(2y)^{-1}})dy = 0 \;\Rightarrow\; \left|\,\mu M dx + \mu N dy = 0\,\right| \;\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\; 4e^{(-4y)^{-1}}dx + \left(xy^{-2}e^{(-4y)^{-1}} + y^{-2}e^{(4y)^{-1}}\right)dy = 0. \tag{16.5.18}$$

Переконуємося, що отримане рівняння є ДР-1*пд*:

$$(\mu M)'_y = \left(4e^{(-4y)^{-1}}\right)'_y = (\mu N)'_x = y^{-2}e^{(-4y)^{-1}},$$

і розв’язуємо його згідно з формулою (16.5.11):

$$u(x,y)=\int_{x_0}^{x} M(x,y)dx+\int_{y_0}^{y} N(x_0,y)dy+C_1.$$

Візьмемо в якості точки $(x_0,y_0)\in D$ точку, яка визначається початковою умовою: $(0,1/2)$; тоді відразу за рівністю $u(x,y)=0$ отримаємо інтеграл задачі Коші (які для цього є *підстави*?):

$$\int_{x_0}^{x} M(x,y)dx=\int_{0}^{x} 4e^{(-4y)^{-1}}dx=4xe^{(-4y)^{-1}};$$

$$\int_{y_0}^{y} N(x_0,y)dy=\int_{1/2}^{y} N(0,y)dy=\int_{1/2}^{y} y^{-2}e^{(4y)^{-1}}dy=$$

$$=-4\int_{1/2}^{y} e^{(4y)^{-1}}d((4y)^{-1})=-4e^{(4y)^{-1}}\Big|_{1/2}^{y}=-4\left(e^{(4y)^{-1}}-e^{1/2}\right).$$

Отже, частинний розв'язок – інтеграл задачі Коші – такий:

$$4xe^{(-4y)^{-1}}-4(e^{(4y)^{-1}}-\sqrt{e})=0,\ \text{або}\ \ xe^{(-4y)^{-1}}-e^{(4y)^{-1}}+\sqrt{e}=0. \ \bullet$$

(*Переконайтеся* в правильності знайденого результату.)

Метод розв'язання рівнянь $Mdx+Ndy=0$ зведенням до ДР-1*пд* за допомогою ІМ називають методом **інтегрувального множника**. Цей метод можна розглядати як загальний підхід до інтегрування ДР-1.

Виявляється, що всі студійовані рівняння є рівняннями в повних диференціалах або зводяться до них.

Приклад. Зведемо до ДР-1*пд* лінійне ДР-1: $y'+P(x)\cdot y=Q(x)$.

Переходимо до диференціальної форми:

$$\underbrace{(P(x)\cdot y-Q(x))}_{M}dx+\underbrace{1}_{N}\cdot dy=0.$$

Перевіряємо, чи є це рівняння рівнянням у повних диференціалах:

$(M'_y=P(x),\ N'_x=0)\ \Rightarrow\ \left(M'_y\neq N'_x\right)\ \Rightarrow$ (ЛДР-1 не є ДР-1*пд*).

Установлюємо, яка із достатніх умов (див. (16.5.17)) виконується, і *знаходимо* ІМ:

$$(M'_y - N'_x)\big/N = \varphi(x) = P(x) \;\Rightarrow\; \mu = \mu(x) = e^{\int P(x)dx}.$$

Записуємо рівняння у повних диференціалах:

$$e^{\int P(x)dx}(P(x)\cdot y - Q(x))dx + e^{\int P(x)dx}\cdot dy = 0. \qquad (16.5.18)$$

За такою ж схемою відшукуються ІМ інших, розглянутих ДР-1.

Як підсумок розглянутого наведемо таблицю ІМ ДР-1 (табл. 16.5.1).

Таблиця 16.5.1

Інтегрувальні множники деяких ДР-1

№ п/п	Назва ДР-1	Диференціальна форма: $Mdx + Ndy = 0$	Інтегрувальний множник μ
1	Найпростіші	$f(x)dx - 1\cdot dy = 0$, $1\cdot dx - 1/f(y)\cdot dy = 0$	$\mu(x, y) \equiv 1$
2	З відокремленими змінними	$\varphi(x)dx - \psi(y)dy = 0$	$\mu(x, y) \equiv 1$
3	З відокремлювани-ми змінними*	$\varphi_1(x)\psi_2(y)dx = \psi_1(y)\varphi_2(x)dy$	$\mu(x, y) = \dfrac{1}{\varphi_2(x)\psi_2(y)}$
4	Однорідні*	$f(x, y)dx - 1\cdot dy = 0$	$\mu(x, y) = \dfrac{1}{x\cdot f(x, y) - y}$
5	Лінійні	$(P(x)\cdot y - Q(x))dx + 1\cdot dy = 0$	$\mu(x) = e^{\int P(x)dx}$.

* *Переконайтеся* у правильності наведених ІМ.

16.6. Розв’язання задач застосовного характеру

Диференціальні рівняння закону попиту і пропозиції

Під **попитом** розуміють запит фактичного або потенційного покупця (споживача) на придбання того чи іншого товару за наявних у нього коштів. З позиції *числової характеристики* попит є кількістю товару чи послуг, яку покупці здатні або мають намір купувати за різними можливими цінами.

Пропозиція – це можливість і бажання продавця (виробника) пропонувати свої товари для реалізації на ринку за певними цінами. *Чисельно* пропозиція характеризується своєю величиною (об'ємом) як кількістю продукту (товару, послуг), яку продавець бажає і здатний запропонувати для продажу на ринку протягом деякого часу за певної ціни.

Нехай $p(t)$ – ціна на товар як функція часу, $p_t'(t)$ – швидкість змінювання ціни (у бік збільшення чи зменшення) – тенденція формування ціни. Попит і пропозиція є функціями не тільки введених величин, на них впливає і ряд інших чинників, які називають *неціновими*.

Найпростішою математичною моделлю, яка описує взаємозв'язок між попитом і пропозицією, є випадок коли попит $d = d(t)$ і пропозиція $s = s(t)$ описуються лінійними залежностями відносно $p(t)$ і $p_t'(t)$:

$$d = d(t) = a_1 p' + b_1 p + c_1, \; s = s(t) = a_2 p' + b_2 p + c_2,$$

де a_i, b_i, c_i, $i = 1, 2$, – числові коефіцієнти або функції від t.

Оптимальній поведінці (стратегії) і покупця, і продавця відповідає умова: $d = s$, за якою визначається так звана ***рівноважна ціна p**** закону попиту і пропозиції. Для її відшукання приходимо до розв'язання ДР-1 відносно функції $p(t)$:

$$a_1 p' + b_1 p + c_1 = a_2 p' + b_2 p + c_2, \text{ або } ap' + bp + c = 0, \qquad (16.6.1)$$

де $a = a_1 - a_2$, $b = b_1 - b_2$, $c = c_1 - c_2$.

Розв'яжемо рівняння відносно похідної і перейдемо до диференціальної форми:

$$p' = -\frac{bp + c}{a} \;\Rightarrow\; dp = -\frac{bp + c}{a} dt \;\Rightarrow\; \frac{a\,dp}{bp + c} = -dt.$$

Знаходимо загальний розв'язок отриманого ДР-1*вз*:

$$a\int \frac{dp}{bp + c} = -\int dt \;\Rightarrow\; \frac{a}{b}\ln\left| bp + c \right| - \ln\left| C \right| = -t \;\Rightarrow\; |\, C \neq 0 \,| \;\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\; \ln\left| \frac{bp + c}{C} \right| = -\frac{b}{a} \cdot t \;\Rightarrow\; p^* = \frac{Ce^{-b/a \cdot t} - c}{b}.$$

За заданою початковою умовою $p(t_0)=p_0$ – ціною товару на момент часу t_0 – завжди можна знайти відповідний частинний розв'язок.

Диференціальні рівняння в екології

Основним предметом дослідження в екології є еволюція популяцій (сукупність одного виду рослин, тварин та інше, які займають протягом тривалого часу певну територію).

Нехай $N(t)$ – кількісний стан популяції в момент часу t. Статистика спостережень показує, що з урахуванням конкурентної боротьби кількість попарних сутичок у популяції за одиницю часу пропорційна квадратові об'єму популяції N^2.

Тоді так зване **рівняння балансу**: „зміна кількості особень" = „приріст" – „втрати", можна подати у вигляді:

$$N_t' = aN - bN^2, \tag{16.6.2}$$

де a, b – відомі числа (a, b – коефіцієнт народжуваності, смертності відповідно), які у більш загальному випадку є функціями часу.

Математичною моделлю рівняння балансу є рівняння Бернуллі відносно функції $N(t)$. Знайдемо його загальний розв'язок зведенням до лінійного ДР-1, здійснивши перехід до нової змінної (*наведіть* коментар):

$$\frac{1}{N^2}N_t' - a\frac{1}{N} = -b \;\Rightarrow\; \left| y = \frac{1}{N} \;\Rightarrow\; y_t' = -\frac{1}{N^2}N_t' \right| \;\Rightarrow\; y_t' = -(ay-b) \;\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\; \frac{dy}{ay-b} = -dt \;\Rightarrow\; \int\frac{dy}{ay-b} = -\int dt \;\Rightarrow\; \ln|ay-b| - \underset{(C\neq 0)}{\ln|C|} = -at \;\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\; \ln\left|\frac{ay-b}{C}\right| = -at \;\Rightarrow\; ay-b = Ce^{-at} \;\Rightarrow\; y = \frac{Ce^{-at}+b}{a} \;\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\; N(t) = \frac{a}{Ce^{-at}+b} \text{ – загальний розв'язок.}$$

Якщо на початок спостережень: $t=0$, об'єм становив N_0, то частинний розв'язок отримаємо у такому вигляді:

$$N(0)=N_0 \;\Rightarrow\; C=\frac{a}{N_0}-b \;\Rightarrow\; N(t)=a\left[\left(\frac{a}{N_0}-b\right)e^{-at}+b\right]^{-1}.$$

Згідно з розглянутою моделлю у будь-якому разі всі розв'язки з часом прямують до відношення a/b (*обґрунтуйте*), тому ніякого перенаселення, як стверджував Мальтус, бути не може. (Мальтус Томас Роберт (1766 – 1834 рр.) – англійський економіст і священик.)

Зауваження. Математичні моделі – системи математичних співвідношень, які описують досліджуваний процес або явище, – побудовані за допомогою диференціальних рівнянь, є потужним засобом для таких наук, як: економіка, екологія, соціологія, фізика, хімія, механіка, інформатика, біологія та інші. Відповідні методи вивчаються у навчальній дисципліні „Математичне моделювання".

Наприклад, у ***механічному смислі*** ДР-1 $F(t,y,y')=0$ виражає у кожний момент часу t залежність між пройденим шляхом $y(t)$ і швидкістю y'_t прямолінійного руху точки. Розв'язок $y(t)$ такого рівняння є *законом руху*, який дозволяє у будь-який момент часу t визначити положення точки на прямій.

Якщо незалежною змінною є ціна товару p, то диференціальне рівняння $F(p,U,U')=0$ виражає (в ***економічному смислі***) для кожного p залежність між виручкою $U(p)$ і швидкістю $U'(p)$. Розв'язок $U(p)$ такого рівняння є *законом реалізації* товару, який дозволяє за будь-якою ціною визначити відповідну виручку.

Одним із найбільш виразних прикладів математичної моделі є **рівняння Максвелла** – диференціальне рівняння з частинними похідними, що описує електромагнітне поле (і його зв'язок з електричними зарядами і струмами у вакуумі і суцільних середовищах):

$$\frac{\partial^2\mathbf{E}}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\mathbf{E}}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\mathbf{E}}{\partial z^2}-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\mathbf{E}}{\partial t^2}=0, \qquad (16.6.3)$$

де $\mathbf{E}$ – напруженість електричного поля (в одиницях СІ – В/м);

t – час;

c – швидкість світла у вакуумі (299 792 458 м/с);

$x,\ y,\ z,\ t$ – координати чотиривимірного простору.

Наведене рівняння описує всі відомі електромагнітні явища. Завдяки цій математичній моделі процесу розповсюдження електромагнітних хвиль з'явилася можливість користуватися сучасними засобами аудіо- і відеозв'язку (і не тільки ними).

На закінчення розгляду наведемо типи ДР-1, виключаючи звідні до них (за винятком рівняння Бернуллі), та способи їх розв'язання (табл. 16.6.1).

Таблиця 16.6.1

Тип ДР-1 $y' = f(x, y)$ та спосіб розв'язання

№ п/п	Назва	Символічний запис	Спосіб розв'язання
1	Найпростіші	$y' = f(x)$ $\left(y' = f(y)\right)$	Інтегруванням y'_x (x'_y) як функції від x (y)
2	З відокремленими змінними	$\varphi(x)dx = \psi(y)dy$	Невизначеним інтегруванням обох частин рівняння
3	З відокремлюваними змінними	$y' = \dfrac{\varphi_1(x)\cdot\psi_2(y)}{\psi_1(y)\cdot\varphi_2(x)}$	Відокремленням змінних
4	Однорідні	$y' = \varphi(y/x)$ $(y' = \varphi(y/x))$	Підстановкою $t = y/x$ $(t = x/y)$
5	Лінійні	$y' + P(x)\cdot y = Q(x)$	Покладають $y = uv$ або варіюють сталу
6	Бернуллі	$y' + P(x)\cdot y = Q(x)y^n$	Покладають $y = uv$ або $t = y^{1-n}$
7	У повних диференціалах	$M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0$	Відновлюють невідому функцію за повним диференціалом

Запитання для самодіагностики засвоєння матеріалу

Відповіді на всі запитання сформулюйте словесно, запишіть у символічній формі, обґрунтуйте (на підставі означень, теорем, правил, формул тощо), наведіть відповідні конкретні приклади.

1. Що розуміють під диференціальним рівнянням першого порядку (ДР-1) і як його записують у символах?

2. Як записується в символах ДР-1, розв'язане відносно похідної, і в чому полягає його геометричний смисл?

3. Що називають розв'язком ДР-1 і інтегральною кривою?

4. Що називають загальним розв'язком диференціального рівняння?

5. Який розв'язок рівняння називається частинним?

6. Які типи диференціальних рівнянь першого порядку ви знаєте?

7. Що називають загальним і частинним інтегралами рівняння?

8. Яку задачу називають задачею Коші для диференціального рівняння першого порядку?

9. Сформулюйте теорему Коші про існування і єдність розв'язку диференціального рівняння першого порядку.

10. Який вигляд має диференціальне рівняння з відокремленими змінними і з відокремлюваними змінними? Як вони розв'язуються?

11. Що розуміють під особливими розв'язками рівняння?

12. Які ДР-1 зводяться до рівнянь із відокремлюваними змінними?

13. Яке диференціальне рівняння називається однорідним? Наведіть спосіб його інтегрування.

14. Які ДР-1 зводяться до однорідних диференціальних рівнянь?

15. Яке рівняння першого порядку називається лінійним?

16. У чому полягає метод Бернуллі розв'язання лінійного диференціального рівняння першого порядку (ЛДР-1)?

17. У чому полягає метод варіації довільної сталої (метод Лагранжа) розв'язання ЛДР-1?

18. За допомогою якої підстановки рівняння Бернуллі зводиться до ЛДР-1?

19. Які ДР-1 називаються рівняннями у повних диференціалах?

20. Сформулюйте і доведіть теорему про загальний інтеграл рівняння в повних диференціалах.

21. Сформулюйте і доведіть критерій існування повного диференціала.

22. Що називають інтегрувальним множником ДР-1 і як відшукуються інтегрувальні множники як функції однієї змінної?

Задачі та вправи

1. Перевірити, чи є розв'язком (інтегралом) диференціального рівняння задана функція $y = y(x)$ $(\varphi(x, y) = 0)$:

1) $y'x^3 = 2y$, $\quad y = 2e^{-1/x^2}$;

2) $x^2 dy = (y^2 + x^2)dx$, $\quad y = 1/x$;

3) $xdy - 2ydx = x^3 \ln x dx$, $\quad y = x^3(\ln x - 1) + 2x^3$;

4) $xy^2 y' = x^2 + y^3$, $\quad y = x^3$;

5) $xydx + \sqrt{1-x^2}dy = 0$, $\quad y = e^{\sqrt{1-x^2}}$;

6) $(x-2y)y' = 2x - y$, $\quad x^2 - xy + y^2 = 0$;

7) $y'(x^2 + \cos y) = -(2xy + x^{-1})$, $\quad x^2 y + \sin y + \ln x = 0$.

2. Скласти диференціальне рівняння, розв'язком якого є однопараметрична сім'я прямих, що проходять через точку з координатами (a, b).

3. Скласти диференціальне рівняння, розв'язок якої описує сім'ю парабол із вершиною у точці $M(3,2)$ і віссю симетрії $y = 2$.

4. Знайти загальний розв'язок або загальний інтеграл ДР з відокремлюваними змінними:

1) $xyy' = 1 - x^2$;

2) $(xy^2 + y^2)dx + (x^2 - x^2 y)dy = 0$;

3) $\ln x \sin^3 y dx + x \cos y dy = 0$;

4) $(\sqrt{xy} - 2\sqrt{x}) \cdot y' = y$;

5) $(y^2 + 3)dx - \frac{e^x}{x} y dy = 0$;

6) $y' + \sin(x + y) = \sin(x - y)$;

7) $e^{x^3}dy+3x^2\sqrt{1-y^2}dx=0$;

8) $2y\sin(x^{-2})+x^3y'=0$;

9) $y'\arcsin x\sqrt{1-x^2}=y\ln y$;

10) $5^{x^2+y}dy+xdx=0$.

5. Знайти частинний розв'язок (частинний інтеграл) ДР, який задовольняє початкову умову $y(x_0)=y_0$:

1) $(1+x^2)dy+ydx=0$, $\quad y(0)=1$;

2) $y'=2\sqrt{y}\ln x$, $\quad y(e)=1$;

3) $(1+x^2)y'=xy-y\sqrt{1+x^2}$, $\quad y(0)=1$;

4) $\dfrac{y}{y'}=\ln y$, $\quad y(2)=1$;

5) $3e^x tg\, y\, dx+\dfrac{1+e^x}{\cos^2 y}dy=0$, $\quad y(0)=\pi/4$;

6) $(1+e^{2x})y^2dy=e^xdx$, $\quad y(0)=0$;

7) $(1-e^{y^2})dy=\dfrac{dx}{2y}$, $\quad y(0)=0$;

8) $\sin xdy-(\cos x-\sin x)(y+1)dx=0$, $y(\pi/2)=0$.

6. Розв'язати диференціальні рівняння, звідні до ДР з відокремлюваними змінними (або задачу Коші):

1) $y'=(x+y)^2$;

2) $y'=\sqrt{x-y}+1$;

3) $y'=\cos(y-x)$;

4) $y'=y+2x-3$;

5) $(x+2y)y'=1$, $\quad y(0)=-1$;

6) $y'=\sqrt{4x+2y-1}$;

7) $y'=\sin(x-y)$, $\quad y(0)=0$;

8) $(x+y)^2y'=a^2$.

7. Знайти криву, яка проходить через точку $(4,3)$, а кожна дотична до цієї кривої перетинає пряму $y=1$ у точці з абсцисою, яка дорівнює потрійній абсцисі точки дотику.

8. Знайти криву, яка проходить через точку $(1,2)$, якщо відомо, що у кожній точці кривої відрізок дотичної, який міститься між осями координат, поділяється точкою дотику навпіл.

9. Знайти загальний або частинний розв'язок (інтеграл) однорідних ДР та рівнянь, звідних до них:

1) $y' = \frac{y}{x} + \frac{x}{y}$;

2) $(x^2 + xy)y' = x\sqrt{y^2 - x^2} + xy + y^2$, $\quad y(1) = 1$;

3) $xy' = y(\ln y - \ln x)$;

4) $x^2 y' = 4(x^2 + y^2) + xy$, $\quad y(1) = 0$;

5) $2x^2 y' = x^2 + y^2$;

6) $xy' - y = x \cdot tg\,\frac{y}{x}$, $\quad y(1) = \pi/2$;

7) $xy' - y = 2\sqrt{x^2 + y^2}$;

8) $y^2 + x^2 y' = xyy'$, $\quad y(1) = 1$;

9) $(y + \sqrt{x^2 - y^2})dx - xdy = 0$;

10) $(2\sqrt{xy} - y)dx + xdy = 0$, $\quad y(1) = 0$;

11) $(x^2 + y^2)dx + 2xydy = 0$;

12) $(y^2 - 2xy)dx - x^2 dy = 0$, $\quad y(1) = -3/7$;

13) $x^2 y' = y^2 + 4xy + 2x^2$;

14) $(5x^2 - 2xy)dy = (x^2 + 5xy - y^2)dx$;

15) $(y^2 + xy - 4x^2)dx - x^2 dy = 0$, $\quad y(1) = -10/3$;

16) $xy^2 y' - x^3 - y^3 = 0$;

17) $(2x + y + 1)dx + (x + 2y - 1) = 0$;

18) $(x - 2y + 3)dy + (2x + y - 1)dx = 0$, $\quad y(1) = 1$;

19) $y' = \dfrac{x+y-2}{2x-2}$;

20) $(2y+3)dx + (x+y-3)dy = 0$, $y(4) = 1$.

10. Знайти загальний або частинний розв’язок лінійних ДР:

1) $y' - 2xy = e^{x^2}\cos 5x$;

2) $xy' - y = x^2 \ln x$;

3) $y' = \dfrac{1}{x^6+1} - \dfrac{2y}{x}$;

4) $y' + \dfrac{2x^2}{x^3+1}y = x^2$;

5) $y' + 2ctgx \cdot y = 2$;

6) $(1+x^2)y' + y = arctg\,x$, $y(0) = 3$;

7) $y' ctg x - y = \cos^2 x \cdot ctg x$, $y(0) = 0$;

8) $(xy'-1)\ln x = 2y$, $y(e) = 0$;

9) $(2xy+3)dy - y^2 dx = 0$;

10) $(y^4 + 2x)y' = y$, $y(12) = 2$.

11. Знайти загальний або частинний розв’язок (інтеграл) рівнянь Бернуллі:

1) $xy' + y = xy^2 \ln x$;

2) $y' + y = e^{x/2}\sqrt{y}$, $y(0) = 1$;

3) $y' - y\,tg\,x + y^2 \cos x = 0$, $y(0) = 1$;

4) $xy' - 2x^2\sqrt{y} = 4y$;

5) $y' = \dfrac{x}{y}e^{2x} + y$, $y(0) = 3$;

6) $y' - xy = -e^{-x^2}y^3$;

7) $y' + \dfrac{3x^2}{x^3+1}y = y^2(x^3+1)\sin x$, $y(0) = 1$;

8) $yx' + x = -yx^2$;

9) $\dfrac{dx}{x}=\left(\dfrac{1}{y}-2x\right)dy, \quad y(1/4)=1;$

10) $xdx=\left(\dfrac{x^2}{y}-y^3\right)dy.$

12. Знайти загальний або частинний розв’язок (інтеграл) ДР у повних диференціалах:

1) $(3x^2y+2)dx+(x^3+3y^2)dy=0;$

2) $(2x\cos x^2+e^y)dx+(e^yx+\cos y)dy=0;$

3) $yx^{y-1}dx+x^y\ln xdy=0;$

4) $(2xy\cos x^2y+1)dx+(x^2\cos x^2y-\sin y)dy=0;$

5) $\left(\dfrac{1}{x}+\dfrac{y}{\cos^2 xy}\right)dx+\left(\dfrac{x}{\cos^2 xy}+2y\right)dy=0;$

6) $\left(\dfrac{1}{1+x^2}+3x^2e^y\right)dx+(x^3e^y+1)dy=0;$

7) $\dfrac{y}{x}dx+(y^3+\ln x)dy=0, \quad y(1)=2;$

8) $\left(\dfrac{2y}{x^3}+y\cos xy\right)dx+\left(x\cos xy-\dfrac{1}{x^2}\right)dy=0, \quad y(1)=0;$

9) $(3x^2+2y^2)dx+(4yx-\sin 2y)dy=0, \quad y(0)=0;$

10) $\sin 2x+3x^2y+\left(x^3+\dfrac{1}{1+y^2}\right)\cdot y'=0, \quad y(0)=0.$

13. Звести задані ДР до рівнянь у повних диференціалах і знайти їх загальні (частинні) інтеграли:

1) $(x+y^2)dx-2xydy=0;$

2) $y(1+xy)dx-xdy=0;$

3) $(y^2e^x+y)dx-xdy=0;$

4) $2xy\ln ydx+(x^2+y^2\sqrt{y^2+1})dy=0;$

5) $(1-x^2y)dx+x^2(y-x)dy=0;$

6) $(\ln y + 2x - 1)y' = 2y$, $y(2) = 1$;

7) $(2x^2 y + 2y + 5)dx + (2x^3 + 2x)dy = 0$, $y(0) = 2$;

8) $(x^4 \ln x - 2xy^3)dx + 3x^2 y^2 dy = 0$, $y(1) = 2$;

9) $(x + \sin x + \sin y)dx + \cos y dy = 0$, $y(0) = 0$;

10) $(2xy^2 - 3y^3)dx + (7 - 3xy^2)dy = 0$, $y(1) = -1$.

14. Визначити типи наведених ДР-1 та зінтегрувати їх:

1) $xy' = x\cos^2\left(\frac{y}{x}\right) + y$;

2) $e^x y = (x - y')(e^x + 1)$;

3) $(x - y + 4)dy + (x + y - 2)dx = 0$;

4) $y' + 2xy = y^2 e^{x^2}$;

5) $y' = 3x - 2y + 1$;

6) $\left(\frac{\sin 2x}{y} + x\right)dx + \left(y - \frac{\sin^2 x}{y^2}\right)dy = 0$;

7) $(1 + y^2)dx = (2xy + (1 + y^2)^2)dy$;

8) $y' \ln\cos x + y\, tgx = 0$;

9) $(x^3 + e^y)y' = 3x^2$;

10) $(3x^2 + 6xy^2)dx + (6x^2 y + 4y^3)dy = 0$;

11) $(2x - y)dx + (4x - 2y + 3)dy = 0$;

12) $y^2(x - 3y)dx + (1 - 3xy^2)dy = 0$;

13) $(3y - 7x + 7)dx - (3x - 7y - 3)dy = 0$;

14) $y' \cdot x\cos x + y \cdot (x\sin x + \cos x) = 1$;

15) $(4x - 3y)dx + (2y - 3x)dy = 0$;

16) $2y' \ln x + \frac{y}{x} = y^{-1}\cos x$;

17) $(x^2 + y^2 + 1)dy + xydx = 0$;

18) $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x\cos y + \sin 2y}$;

19) $(y+1)y' = \dfrac{y}{\sqrt{1-x^2}} + xy$;

20) $\left(x^3 - \dfrac{2\ln y}{x} - \dfrac{2y}{x}\right)dx + \left(\dfrac{1}{y} + 1\right)dy = 0$.

Відповіді

1. 1) Так; 2) Ні; 3) Так; 4) Ні; 5) Так; 6) Так; 7) Так.

2. $y - b = y'(x - a)$.

3. $2(x-3)y' = y - 2$.

4. 1) $x^2 + y^2 = \ln\left|Cx^2\right|$; 2) $\ln\left|\dfrac{x}{y}\right| - \dfrac{x+y}{xy} = C$;

3) $\ln^2 x - ctg^2 y = C$; 4) $\sqrt{y} = \sqrt{x} + \ln|Cy|$;

5) $\ln(y^2+3) = 2(C - xe^{-x} - e^{-x})$; 6) $2\sin x + \ln\left|tg\dfrac{y}{2}\right| = C$;

7) $\arcsin y = e^{-x^3} + C$; 8) $\cos\dfrac{1}{x^2} + \ln|y| = C$;

9) $y = e^{C\arcsin x}$; 10) $5^y = \dfrac{1}{2}5^{-x^2} + C$.

5. 1) $y = e^{-arctg\, x}$; 2) $y = (x\ln x - x + 1)^2$;

3) $y = \dfrac{\sqrt{1+x^2}}{x + \sqrt{1+x^2}}$; 4) $\ln^2 y = 2(x-2)$;

5) $(1+e^x)^3 tg\, y = 8$; 6) $\dfrac{y^3}{3} + \dfrac{\pi}{4} = arctg\, e^x$;

7) $e^{y^2} - y^2 + x = 1$; 8) $\ln\left|\dfrac{y+1}{\sin x}\right| + x = \dfrac{\pi}{2}$.

6. 1) $arctg\,(x+y) = x + C$; 2) $-2\sqrt{x-y} = x + C$, $y = x$;

3) $ctg\left(\dfrac{y-x}{2}\right) = x + C$, $y - x = 2\pi k$, $k \in \mathbf{Z}$;

4) $2x + y - 1 = Ce^x$; 5) $x + 2y + 2 = 0$;

6) $\sqrt{4x+2y-1} - 2\ln(\sqrt{4x+2y-1} + 2) = x + C$;

7) $x+1=ctg\left(\dfrac{y-x}{2}+\dfrac{\pi}{4}\right)$, $y-x=2\pi k$, $k\in \mathbf{Z}$

8) $x+y=a\cdot tg(C+\dfrac{y}{a})$, $x-y=\dfrac{3\pi}{2}+2\pi k$, $k\in \mathbf{Z}$.

7. $y=1+4/\sqrt{x}$.

8. $y=2/x$.

9. 1) $y^2=2x^2\ln|Cx|$;

2) $\dfrac{y}{x}+\sqrt{\dfrac{y^2}{x^2}-1}=x$;

3) $y=xe^{1+Cx}$;

4) $arctg\,\dfrac{y}{x}=\ln(x^4)$;

5) $\dfrac{2x}{x-y}=\ln|Cx|$;

6) $y=x\cdot\arcsin x$;

7) $arctg\,\dfrac{y}{x}-2\ln|x|=C$;

8) $e^{y/x}=e\cdot y$;

9) $\arcsin\dfrac{y}{x}-\ln|x|=C$;

10) $y=x\ln^2 x$;

11) $y^2=\dfrac{C}{3x}-\dfrac{x^2}{3}$;

12) $y=\dfrac{3x}{1-8x^3}$;

13) $\dfrac{y+x}{y+2x}=Cx$;

14) $5arctg\dfrac{y}{x}=\ln\left|\dfrac{C(x^2+y^2)}{x}\right|$;

15) $\dfrac{y-2x}{y+2x}=4x^2$;

16) $y^3=3x^3(\ln|x|+C)$;

17) $x^2+y^2+xy-y+x=C$;

18) $x^2-y^2+xy+3y-x=3$;

19) $(y-x)^2=C(x-1)$;

20) $(2y+3)(3x+y-12)^2=5$.

10. 1) $y=\left(\dfrac{1}{5}\sin 5x+C\right)e^{x^2}$;

2) $y=(x\ln x-x+C)\cdot x$;

3) $y=\left(\dfrac{1}{3}arctg\,x^3+C\right)\cdot\dfrac{1}{x^2}$;

4) $y=\dfrac{x^3+1}{5}+\dfrac{C}{\sqrt[3]{(x^3+1)^2}}$;

5) $y=(x-\dfrac{1}{2}\sin 2x+C)\cdot\sin^{-2}x$;

6) $y=arctg\,x-1+4e^{-arctg\,x}$;

7) $y=(\sin x-\dfrac{1}{3}\sin^3 x)\cdot\dfrac{1}{\cos x}$;

8) $y=\ln^2 x-\ln x$;

9) $x = Cy^2 - \frac{1}{y}$; 10) $x = y^2 + \frac{y^4}{2}$.

11. 1) $xy(C + \ln^2 x) + 2 = 0$; 2) $y = \left(\frac{1}{2}e^x + 1\right)^2 e^{-x}$;

3) $y = \frac{1}{(x+1)\cos x}$; 4) $y = (\ln|x| + C)^2 x^4$;

5) $y = e^x \cdot \sqrt{x^2 + 9}$; 6) $y^2 = \frac{e^{x^2}}{2(x+C)}$;

7) $y = \frac{1}{\cos x\,(x^3 + 1)}$; 8) $x = \frac{1}{y(\ln|y| + 1)}$;

9) $x = \frac{y}{y^2 + 3}$; 10) $x = \pm y \cdot \sqrt{C - y^2}$.

12. 1) $x^3 y + y^3 + 2x = C$; 2) $\sin x^2 + xe^y + \sin y = C$;

3) $x^y = C$; 4) $\sin x^2 y + x + \cos y = C$;

5) $\ln|x| + tg\, xy + y^2 = C$; 6) $arctg\, x + x^3 e^y + y = C$;

7) $y \ln x + \frac{y^4}{4} = 4$; 8) $\sin xy - \frac{y}{x^2} = 0$;

9) $x^3 + 2y^2 x + \cos^2 y = 1$; 10) $\sin^2 x + x^3 y + arctg\, y = 0$.

13. 1) $\ln|x| - \frac{y^2}{x} = C$; 2) $\frac{x}{y} + \frac{x^2}{2} = C$;

3) $e^x + \frac{x}{y} = C$; 4) $x^2 \ln y + \frac{1}{3}\sqrt{(y^2+1)^3} = C$;

5) $xy^2 - 2x^2 y - 2 = Cx$; 6) $2x - \ln y = 4$;

7) $5arctg\, x + 2xy = 0$; 8) $x^3(\ln x - 1) + y^3 = 7x^2$;

9) $2e^x \sin y + 2e^x (x-1) + e^x(\sin x - \cos x) = -3$;

10) $x^2 - 3xy - \frac{7}{y} = 11$.

14. 1) $tg\frac{y}{x} = \ln|Cx|$; 2) $y = \frac{e^x(x-1) + x^2/2 + C}{e^x + 1}$;

3) $x^2 + 2xy - y^2 - 4x + 8y = C$; 4) $y = \frac{e^{-x^2}}{C - x}$;

5) $6x-4y-1=Ce^{-2x}$; 6) $\dfrac{x^2+y^2}{2}+\dfrac{\sin^2 x}{y}=C$;

7) $x=(y+C)(1+y^2)$; 8) $y=C\ln\cos x$;

9) $x^3=(y+C)\cdot e^y$; 10) $x^3+3x^2y^2+y^4=C$;

11) $5x+10y+C=3\ln\left|10x-5y+6\right|$; 12) $\dfrac{x^2}{2}-\dfrac{1}{y}-3xy=C$;

13) $(x+y-1)^5(x-y-1)^2=C$; 14) $y=\dfrac{(\sin x+C\cos x)}{x}$;

15) $y^2-3xy+2x^2=C$; 16) $y^2\ln x=\sin x+C$;

17) $y^4+2x^2y^2+2y^2=C$; 18) $x=Ce^{\sin y}-2(1+\sin y)$;

19) $y+\ln|y|=\arcsin x+\dfrac{x^2}{2}+C$; 20) $\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{\ln y+y}{x^2}=C$.

Ключові терміни

Звичайне диференціальне рівняння першого порядку; рівняння, розв’язане відносно похідної; рівняння у частинних похідних; розв’язок рівняння; інтегральна крива; загальний розв’язок; частинний розв’язок; загальний інтеграл; частинний інтеграл; сім’я інтегральних кривих; особливий розв’язок; початкова умова; задача Коші; рівняння з відокремлюваними змінними; однорідне рівняння; лінійне рівняння; метод Бернуллі; метод варіації довільної сталої; рівняння Бернуллі; рівняння у повних диференціалах; інтегрувальний множник.

Резюме

Висвітлено означення понять, пов’язаних зі звичайними диференціальними рівняннями першого порядку (ДР-1). Розглянуто методи розв’язання найбільш вивчених типів рівнянь: ДР-1 з відокремленими та **з** відокремлюваними змінними; однорідних; лінійних; у повних диференціалах і таких, що зводяться до них.

Література: [1; 6; 10; 14; 16 – 18; 20; 26; 28].

17. Диференціальні рівняння вищих порядків

У математиці є своя краса, як у живопису та поезії.
М. Є. Жуковський

Те, що я встиг пізнати, – чудово. Сподіваюся, таке ж чудове те, що мені ще доведеться пізнати.
Сократ

Мета: навчити майбутніх фахівців умінню за швидкісними (граничними) величинами, що описують економічні процеси або складові інформаційних систем, відтворювати їхні загальні характеристики (загальні витрати, загальний дохід, енергію сигналу тощо).

Питання теми:

17.1. Означення основних понять. Теорема Коші.

17.2. Диференціальні рівняння другого порядку (ДР-2), які зводяться до ДР-1.

17.3. Диференціальні рівняння вищих порядків (ДР-n), що припускають зниження порядку.

17.4. Деякі задачі застосовного характеру в природничих науках і економіці.

Компетентності, що формуються після вивчення теми:

Загальнонаукова: володіння засобами знаходження невідомої функції за відомим співвідношенням між нею та її похідними від першої до вищих порядків, яке є математичною моделлю деякого процесу.

Загальнопрофесійна: підготовленість до аналізу швидкісних (граничних) характеристик функціональних залежностей з метою обробки інформації, яку несуть часові (сигнальні) функції; уміння впроваджувати диференціальні рівняння у побудову математичних моделей різноманітних за природою процесів.

Спеціалізовано-професійна: уміння впроваджувати диференціальні рівняння у побудову аналітичних моделей стосовно комп'ютерних наук і в процеси управління інформаційними системами, і аналізувати результати їхнього функціонування.

17.1. Означення основних понять. Теорема Коші

Диференціальним рівнянням вищого порядку (ДР-n) називають рівняння, яке пов'язує незалежну змінну x, невідому функцію $y = y(x)$ та її похідні до n-го порядку включно ($n \ge 2$), і в символах описують так:

$$F(x, y, y', y'', ..., y^{(n)}) = 0, \tag{17.1.1}$$

де ліва частина тлумачиться як функція від $(n+2)$ змінних.

Якщо невідома функція є функцією кількох аргументів, то рівняння, яке зв'язує незалежні змінні, невідому функцію та її частинні похідні від першого до n-го порядку включно, називається **диференціальним рівнянням вищого порядку у частинних похідних**. Прикладом такого рівняння є рівняння Максвелла (див. п. 16.5).

***Відзначимо*,** що в окремих випадках аргумент x чи (і) шукана функція $y(x)$ або похідні порядку нижче, ніж n, можуть не входити у рівняння явним чином, але (17.1.1) повинне обов'язково містити $y^{(n)}(x)$.

Наприклад: $\underbrace{7y^{\mathrm{V}} - 12}_{F(y^{(5)})} = 0$, $\underbrace{y''' - y'tgx + 5y}_{F(x, y, y', y''')} = 0$, $\underbrace{y'' - 3x^{y''}}_{F(x, y'')} = 0$ є диференціальними рівняннями 5-го, 3-го, 2-го порядку відповідно.

Якщо рівняння (17.1.1) подано рівністю

$$y^{(n)} = f(x, y, y', y'', ..., y^{(n-1)}), \tag{17.1.2}$$

де права частина є функцією $(n+1)$ змінних, то воно називається **розв'язаним відносно старшої похідної**. (*Чи можливо* наведені рівняння записати у вигляді (17.1.2)?)

Функція $y = \varphi(x)$, визначена на інтервалі (a,b), і така, що при підстановці її замість $y(x)$ у рівняння (17.1.1) (або (17.1.2)) отримуємо тотожність, називається **розв'язком**, або **інтегралом**, ДР-n на (a,b):

$$y = \varphi(x) \text{ – розв'язок ДР-}n \rightleftharpoons$$
$$\forall x \in (a,b):\ F(x, \varphi(x), \varphi'(x), ..., \varphi^{(n)}(x)) = 0, \tag{17.1.3}$$

а графік функції $y = \varphi(x)$ називають **інтегральною кривою**.

Звичайно, $y=\varphi(x)$ повинна бути диференційовною n разів на (a,b) функцією (*чому?*); випадки $a=-\infty$, $b=+\infty$ не виключаються.

Приклад: неважко збагнути, що розв'язком рівняння $y''-y'=0$ $\forall x\in\mathbf{R}$ є функція $\varphi(x)=e^{x}$. Але вона не єдина: $y=\varphi(x)=C_1+C_2e^{x}$, де C_1, C_2 – довільні сталі із $\mathbf{R}$, теж задовольняє задане рівняння (*переконайтеся*). ●

Теорема 17.1.1 (*теорема Коші існування і єдиності розв'язку ДР-*n). Якщо у рівнянні (17.1.2) функція $f(x,y,y',y'',...,y^{(n-1)})$:

1) неперервна за всіма аргументами x, y, y', y'', ..., $y^{(n-1)}$ у деякій області D їх змінювання;

2) має неперервні в області D частинні похідні за аргументами y, y', y'', ..., $y^{(n-1)}$, тобто, $\partial f/\partial y$, $\partial f/\partial y'$, $\partial f/\partial y''$, …, $\partial f\big/\partial y^{(n-1)}$, то існує єдиний розв'язок $y=\varphi(x)$ рівняння, який задовольняє умови:

$$y\big|_{x=x_0}=y_0,\ y'\big|_{x=x_0}=y_0',\ y''\big|_{x=x_0}=y_0'',\ \ldots,\ y^{(n-1)}\Big|_{x=x_0}=y_0^{(n-1)}. \quad (17.1.4)$$

Приймаємо теорему без доведення, як і ***наслідок*** з неї: якщо функція $f(x,y,y',y'',...,y^{(n-1)})$ в області D задовольняє умови теореми Коші, то рівняння (17.1.2) має безліч розв'язків. ■

Для ДР-2 $y''=f(x,y,y')$ **початкові умови** мають вигляд: $y(x_0)=y_0$, $y'(x_0)=y_0'$. У цьому випадку *з геометричної точки зору* теорема Коші означає, що через задану точку $(x_0,y_0)\in D$ площини xOy проходить єдина крива із заданим тангенсом кута нахилу дотичної y_0' до осі Ox; проте через точку (x_0,y_0) проходить безліч інтегральних кривих.

Для опису безлічі розв'язків ДР-n, як і для ДР-1, вводять поняття „загальний розв'язок''.

Загальним розв'язком диференціального рівняння n-го порядку (17.1.2) називається функція

$$y=\varphi(x,C_1,C_2,...,C_n), \quad (17.1.5)$$

яка містить n числових параметрів C_i, $i=\overline{1,n}$ $(-\infty<C_i<+\infty)$ і така, що:

1) задовольняє рівняння при будь-яких дійсних значеннях C_i (тому параметри C_i називають ще **довільними сталими**);

2) які б не були **початкові умови** (17.1.4), можна знайти такі значення $C_i^0 \in \mathbf{R}$, що функція $\varphi(x, C_1^0, C_2^0, ..., C_n^0)$ задовольняє задані початкові умови: $y(x_0) = y_0$, $y'(x_0) = y_0'$, $y''(x_0) = y_0''$, …, $y^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)}$.

Будь-який розв'язок, який отримується із загального розв'язку рівняння при певних (фіксованих, конкретних) значеннях параметрів C_i, $i = \overline{1, n}$, називається **частинним розв'язком** ДР-n.

Задача відшукання частинного розв'язку за даними початковими умовами називається **задачею Коші**.

Підсумок („мовою геометрії"): загальний розв'язок рівняння описує множину всіх інтегральних кривих, яку називають $\boldsymbol{n}$**-параметричною сім'єю** ліній; частинний розв'язок визначає одну з них; задача Коші із сім'ї кривих виділяє лінію, що проходить через задану точку (x_0, y_0), і похідні якої задовольняють умови: $y'(x_0) = y_0'$, …, $y^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)}$.

Приклад. Покажемо, що $y = \varphi(x, C_1, C_2) = C_1 + C_2 e^x \quad \forall x \in \mathbf{R}$ (див. приклад вище) є загальним розв'язком рівняння $y'' - y' = 0$.

Для цього підтвердимо виконання умов означення загального розв'язку:

1) дійсно, $\forall C_1$, C_2 із $\mathbf{R}$ маємо: ($y' = C_2 e^x$, $y'' = C_2 e^x$) $\Rightarrow$ $y'' = y'$;

2) задамо деякі початкові умови: $y(x_0) = y_0$, $y'(x_0) = y_0'$, у вирази для y і y' підставимо значення x_0, y_0, y_0', і отримаємо СЛАР 2×2 відносно сталих C_1, C_2:

$$\begin{cases} y = C_1 + C_2 e^x \\ y' = C_2 e^x \end{cases} \Rightarrow \left| \begin{matrix} y(x_0) = y_0 \\ y'(x_0) = y_0' \end{matrix} \right| \Rightarrow \begin{cases} C_1 + C_2 e^{x_0} = y_0 \\ \qquad\; C_2 e^{x_0} = y_0' \end{cases} \Rightarrow \left[\begin{matrix} C_1^0 = y_0 - y_0' \\ C_2^0 = y_0' e^{-x_0} \end{matrix} \right. .$$

За будь-яких початкових умов визначник матриці системи відмінний від нуля (*перевірте*), тому СЛАР має єдиний розв'язок.

Для тривіальних (найпростіших) умов: $y(0) = 0$, $y'(0) = 0$, маємо тривіальний розв'язок СЛАР: $C_1^0 = C_2^0 = 0$, і заданого рівняння: $y(x) \equiv 0$.●

Висновок (*порядок розв'язання задачі Коші*): для визначення параметрів C_i, $i=\overline{1,n}$, за початковими умовами треба у вирази для y, y', y'', ..., $y^{(n-1)}$, що відповідають загальному розв'язку, підставити значення x_0, y_0, y'_0, y''_0, ..., $y_0^{(n-1)}$, а потім розв'язати отриману СЛАР $n\times n$ відносно довільних сталих.

Часто при розв'язуванні ДР-n загальний розв'язок знаходять у неявній формі: $\Phi(x,y,C_1,C_2,...,C_n)=0$, з якої не завжди вдається виразити y через x і C_i, $i=\overline{1,n}$.

Функція $\Phi(x,y,C_1,C_2,...,C_n)=0$, яка неявно визначає загальний розв'язок рівняння, називається **загальним інтегралом** ДР-n.

Співвідношення, отримане із загального інтеграла при конкретних значеннях параметрів $C_i=C_i^0$ $(i=\overline{1,n})$: $\Phi(x,y,C_1^0,C_2^0,...,C_n^0)=0$, називається **частинним інтегралом** ДР-n.

Інтегрування диференціальних рівнянь n-го порядку – знаходження загальних розв'язків (загальних інтегралів) – загалом є більш складною задачею порівняно з розв'язанням ДР-1.

17.2. Диференціальні рівняння другого порядку (ДР-2), які зводяться до ДР-1

Відповідно до (17.1.1) і (17.1.2) ДР-2 в символах описуються не розв'язаним або розв'язаним відносно старшої похідної рівнянням:

$$F(x,y,y',y'')=0 \text{ або } y''=f(x,y,y'). \quad (17.2.1)$$

Для розв'язання задачі Коші задаються дві початкові умови:

$$y\big|_{x=x_0}=y_0,\ y'\big|_{x=x_0}=y'_0, \text{ або } y(x_0)=y_0,\ y'(x_0)=y'_0. \quad (17.2.2)$$

Для виділення єдиного розв'язку рівняння однієї умови недостатньо (*наведіть* відповідні міркування).

У ***механічному смислі*** рівняння $F(t,y,y',y'')=0$ виражає у кожний момент часу t залежність між пройденим шляхом $y(t)$, швидкістю y'_t і прискоренням y''_{tt} прямолінійного руху точки. Розв'язок $y(t)$ такого рівняння є *законом руху*, який дозволяє у будь-який момент часу t визначити положення точки на прямій.

Якщо незалежною змінною є ціна товару p, то диференціальне рівняння $F(p, U, U', U'') = 0$ виражає (в ***економічному смислі***) для кожного p залежність між виручкою $U(p)$, швидкістю $U'(p)$ і темпом $U''(p)$ її змінювання. Розв'язок $U(p)$ такого рівняння є *законом реалізації* товару, який дозволяє за будь-якою ціною визначити відповідну виручку.

Більш посильним для вивчення є рівняння, розв'язане відносно другої похідної, тому у подальшому будемо вивчати переважно саме такі рівняння.

Рівняння вигляду $y'' = f(x, y, y')$, які зводяться до ДР-1, класифікують за типами залежно від того, які з аргументів x, y, y' містить права частина; саме зниження порядку проводиться *заміною змінної*.

I. **Права частина містить тільки незалежну змінну**:

$$y'' = f(x). \tag{17.2.3}$$

Зниження порядку здійснюється ***заміною*** $y' = p$, де $p = p(x)$:

$$y'' = f(x) \;\Rightarrow\; \left| y' = p \Rightarrow y'' = p' \right| \;\Rightarrow\; p' = f(x) - \text{ДР-1} \;\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left| \text{відновлюємо } p(x) \right| \;\Rightarrow\; p = p(x, C_1) = \int f(x)dx + C_1 \;\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\; y' = p(x, C_1) \;\Rightarrow\; \left| \text{відновлюємо } y(x) \right| \;\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\; y = \int p(x, C_1)dx + C_2 \text{ – загальний розв'язок рівняння.}$$

У підсумку, розв'язання рівняння зводиться до двократного невизначеного інтегрування правої частини.

Приклад. Для рівняння $y'' = 6x - 2$ знайти: 1) загальний розв'язок; 2) розв'язок задачі Коші з початковими умовами: $y(1) = 2$, $y'(1) = 1$.

1. *Відновлюємо* інтегруванням за другою похідною першу похідну, а за нею – саму функцію:

$$y' = \int (6x - 2)dx + C_1 = \underbrace{3x^2 - 2x + C_1}_{p(x,\, C_1)} \;\Rightarrow\; y = \int (3x^2 - 2x + C_1)dx + C_2 =$$

$$= x^3 - x^2 + C_1 x + C_2 \;\text{ – загальний розв'язок рівняння.}\; \bullet$$

2. *Знаходимо* частинний розв'язок згідно з порядком розв'язання задачі Коші:

$$\begin{cases} y = x^3 - x^2 + C_1 x + C_2 \\ y' = 3x^2 - 2x + C_1 \end{cases} \Rightarrow \left| (x_0, y_0, y_0') = (1,2,1) \right| \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2 = 1 - 1 + C_1 + C_2 \\ 1 = 3 - 2 + C_1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_1 + C_2 = 2 \\ C_1 = 1 \end{cases} \Rightarrow (C_1 = 0,\ C_2 = 2).$$

Частинний розв'язок – розв'язок задачі Коші: $y = x^3 - x^2 + 2$. ●

(*Розв'яжіть* рівняння, виконуючи заміну $y' = p(x)$.)

II. Права частина містить незалежну змінну і похідну невідомої функції:

$$y'' = f(x, y'). \qquad (17.2.4)$$

Зниження порядку здійснюється ***заміною*** $y' = p$, де $p = p(x)$:

$$y'' = f(x, y') \Rightarrow \left| y' = p \Rightarrow y'' = p' \right| \Rightarrow p' = f(x, p) \text{ – ДР-1} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow p = p(x, C_1) \Rightarrow y' = p(x, C_1) \Rightarrow y = \int p(x, C_1)dx + C_2$$

– загальний розв'язок рівняння.

Приклад. Знайти загальний розв'язок рівняння $y'' = 6x - 2y'$.

Виконуємо заміну $y' = p(x)$, тоді $y'' = p'$, і рівняння набуває вигляду:

$$p' = 6x - 2p \text{ – ЛДР-1 (}\textit{обґрунтуйте}\text{).}$$

Розв'язуємо його (методом Бернуллі або методом Лагранжа):

$$p' + 2p = 6x \Rightarrow p = 3x - 1{,}5 + C_1 e^{-2x}.$$

Відновлюємо $y(x)$: $|\, p = y' \,| \Rightarrow y' = 3x - 1{,}5 + C_1 e^{-2x} \Rightarrow$

$$\Rightarrow y = \int (3x - 1{,}5 + C_1 e^{-2x})dx + C_2 \Rightarrow y = 1{,}5x(x-1) - C_1/2\, e^{-2x} + C_2$$

– загальний розв'язок рівняння. ●

(Чи можна його *зобразити* інакше: $y = 3x(x-1) + C_1 e^{-2x} + C_2$?)

III. Права частина не містить явно незалежну змінну (містить невідому функцію та її похідну):

$$y'' = f(y, y'). \tag{17.2.5}$$

Зниження порядку здійснюється ***заміною*** $y' = p$, де $p = p(y)$. У цьому, найбільш обтяжливому випадку, y' є складеною функцією від основного аргументу x: $y' = p(y(x))$, тому $y''_{xx} = p'_y \cdot y'_x$, тобто $y'' = p'p$.

$$y'' = f(y, y') \;\Rightarrow\; \left| y' = p \Rightarrow y'' = p'p \right| \;\Rightarrow\; p'p = f(y, p) - \text{ДР-1} \;\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\; p = p(y, C_1) \;\Rightarrow\; y' = p(y, C_1) \;\Rightarrow\; y = \int p(x, C_1)dx + C_2$$

– загальний розв’язок рівняння.

Приклад. Для рівняння $y'' - 3y^2 = 0$ знайти: 1) загальний розв’язок; 2) розв’язок задачі Коші з початковими умовами: $y(0) = 1$, $y'(0) = \sqrt{2}$.

1. *Знижуємо* порядок рівняння:

$$y'' = 3y^2 \;\Rightarrow\; \left| y' = p \Rightarrow y'' = p'p \right| \;\Rightarrow\; p'p = 3y^2 - \text{ДР-1} \;\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\; \frac{dp}{dy}p = 3y^2 \;\Rightarrow\; pdp = 3y^2dy \;\Rightarrow\; \int pdp = 3\int y^2dy + C_1 \;\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\; p^2/2 = y^3 + C_1 \;\Rightarrow\; p^2 = 2(y^3 + C_1) \;\Rightarrow\; p = \pm\sqrt{2}\cdot\sqrt{y^3 + C_1} \;\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\; y' = \frac{dy}{dx} = \pm\sqrt{2}\cdot\sqrt{y^3 + C_1} \;\Rightarrow\; dx = \frac{dy}{\pm\sqrt{2}\cdot\sqrt{y^3 + C_1}} \;\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\; \int dx = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}\int (y^3 + C_1)^{-1/2}dy + C_2 \;\Rightarrow\; x = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}\int (y^3 + C_1)^{-1/2}dy + C_2.$$

У правій частині інтеграл від біноміального диференціала (див. теорему 11.3.2 (*підстановки Чебишева*), ч. 2), який при довільному C_1 не береться у скінченному вигляді: $(m = 0,\ n = 3,\ p = -1/2) \;\Rightarrow\; \dfrac{m+1}{n} \notin \mathbf{Z}$.

Проте, задачу Коші розв’язати зможемо, якщо після встановлення функції $p = y' = \pm\sqrt{2}\cdot\sqrt{y^3 + C_1}$ визначимо C_1:

$$(y(0) = 1,\ y'(0) = \sqrt{2}) \;\Rightarrow\; C_1 = 0.$$

2. *Знаходимо* $y = y(x)$:

$$p = \frac{dy}{dx} = \sqrt{2}y^{3/2} \;\Rightarrow\; \int dx = \frac{1}{\sqrt{2}}\int y^{-3/2}dy + C_2 \;\Rightarrow\; x = -\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{y}} + C_2 \;\Rightarrow$$

$\Rightarrow \Big|$ визначаємо C_2: $0 = -\sqrt{2} + C_2 \;\Rightarrow\; C_2 = \sqrt{2} \Big| \;\Rightarrow\; y = \dfrac{2}{(x-\sqrt{2})^2}$ – частинний розв’язок – розв’язок задачі Коші. ●

(*Переконайтеся* у правильності знайденого розв’язку.)

***Відмітимо*:** при розв’язанні задачі Коші доцільно значення сталих C_1, C_2 визначати у процесі розв’язання, а не після знаходження загального розв’язку.

IV. Однорідні ДР-2 відносно шуканої функції та її похідних:

$$F(x, y, y', y'') = 0 \text{ або } \underbrace{y'' - f(x, y, y')}_{F(x,y,y',y'')} = 0, \tag{17.2.6}$$

де $F(x, \lambda y, \lambda y', \lambda y'') = \lambda^m F(x, y, y', y'')$.

Зведення до ДР-1 здійснюється за допомогою ***підстановки Ейлера:*** $y = e^{\int zdx}$, де $z = z(x)$ – „нова”, допоміжна, функція.

Дійсно:

$$y = e^{\int zdx} \;\Rightarrow\; y' = e^{\int zdx}\cdot z = yz \;\Rightarrow\; y'' = y'z + yz' = yz^2 + yz'. \tag{17.2.7}$$

Заміну $y = e^{\int zdx}$ можна виконувати і у випадку, коли x не входить у рівняння явним чином.

Приклад. Знизити порядок рівняння $y''y' - y^2 = 0$.

Перевіряємо ліву частину на однорідність:

$(\lambda y'')\cdot(\lambda y') - (\lambda y)^2 = \lambda^2(y''y' - y^2)$ – однорідна функція 2-виміру.

Застосовуємо підстановку Ейлера:

$y(z^2 + z')yz - y^2 = 0 \;\Rightarrow\; |\, y \neq 0\,|$ (*чому?*) $\Rightarrow\; z^3 + z'z - 1 = 0$ – ДР-1. ●

Якщо врахувати, що у задане рівняння аргумент x не входить явним чином, то покладемо $y' = p(y)$, тоді $y'' = p'_y p$, і ДР-1 матиме вигляд:

$$p'_y p^2 = y^2 \;\Rightarrow\; p^2 dp = y^2 dy \;\Rightarrow\; p = y'_x = \sqrt[3]{y^3 + C_1}\,.$$

(Якому, *на вашу думку*, з підходів слід віддати перевагу?)

17.3. Диференціальні рівняння вищих порядків (ДР-n), що припускають зниження порядку

Якщо диференціальне рівняння n-го порядку ($n \ge 2$) заміною змінної вдається звести до диференціального рівняння меншого, ніж n порядку, то кажуть що воно **припускає зниження порядку**.

Такими, як правило, є рівняння, що містять не всі аргументи функції із (17.1.1): $F(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n)})$.

I. Старша похідна $y^{(n)}$ є функцією незалежної змінної x:

$$y^{(n)} = f(x). \tag{17.3.1}$$

Загальний розв'язок рівняння такого вигляду знаходять n-кратним інтегруванням з урахуванням, що $y^{(n)} = (y^{(n-1)})'$, $\int y^{(n)} dx = y^{(n-1)} + C$:

$$y = \underbrace{\int \ldots \int}_{n} f(x) \underbrace{dx \ldots dx}_{n\text{ разів}} + C_1 \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} + C_2 \frac{x^{n-2}}{(n-2)!} + \ldots + C_{n-1} x + C_n\,. \tag{17.3.2}$$

Приклад. Розв'язати задачу Коші:

$$y''' = \sin x - x; \quad y(0) = 2\,,\; y'(0) = 1,\; y''(0) = 0\,.$$

Знаходимо загальний розв'язок, для чого інтегруємо послідовно три рази ліву і праву частини рівняння:

$$y'' = -\cos x - \frac{x^2}{2} + C_1 \;\Rightarrow\; y' = -\sin x - \frac{x^3}{6} + C_1 x + C_2 \;\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\; y = \cos x - \frac{x^4}{24} + C_1 \frac{x^2}{2} + C_2 x + C_3 \text{ – загальний розв'язок.}$$

Виділяємо за початковими умовами частинний розв'язок, для чого складаємо і розв'язуємо СЛАР 3×3 відносно сталих C_1, C_2, C_3:

$$\begin{cases} 2 = 1 + C_3 \\ 1 = C_2 \\ 0 = -1 + C_1 \end{cases} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} C_1 = 1 \\ C_2 = 1 \\ C_3 = 1 \end{array}\right. \Rightarrow\ y = \cos x - \frac{x^4}{24} + \frac{x^2}{2} + x + 1. \ \bullet$$

(*Чи можна* було знайти C_1, C_2, C_3, не складаючи СЛАР?)

II. Рівняння не містить явно невідому функцію $y = y(x)$ та її похідні до $(k-1)$-го порядку включно:

$$F(x, y^{(k)}, y^{(k+1)}, ..., y^{(n)}) = 0, \quad 1 \le k < n. \qquad (17.3.3)$$

Порядок такого рівняння можна зменшити до порядку $(n-k)$ відносно нової функції $p(x)$, якщо покласти $y^{(k)}(x) = p(x)$; тоді відповідно:

$$y^{(k+1)} = p', \ \ldots, \ y^{(n)} = p^{(n-k)},$$

а рівняння набуває вигляду:

$$F(x, p, p', ..., p^{(n-k)}) = 0. \qquad (17.3.4)$$

Приклад. Розв'язати рівняння: $y''' - x = y''/x$.

Проводимо візуальний аналіз і виводимо, що рівняння не містить явним чином невідому функцію $y = y(x)$ та її першу похідну $y' = y'(x)$.

Отже, для його розв'язання використаємо підстановку $y'' = p(x)$, тоді $y''' = p'(x)$, а рівняння стане лінійним ДР-1 відносно функції $p(x)$:

$$p'(x) - \frac{1}{x} p(x) = x. \qquad (17.3.5)$$

Розв'язуємо (17.3.5) методом Бернуллі або методом Лагранжа (див. п. 16.4): $p(x) = x(x + C_1)$ – загальний розв'язок (*переконайтеся*).

Згідно із заміною $y'' = p(x)$ приходимо до рівняння, розв'язаного відносно старшої похідної (17.3.1):

$$y'' = x(x + C_1).$$

Відновлюємо $y = y(x)$ невизначеним інтегруванням (двічі):

$$y' = \int (x^2 + C_1 x)dx = \frac{x^3}{3} + C_1\frac{x^2}{2} + C_2 \;\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\; y = \int\left(\frac{x^3}{3} + C_1\frac{x^2}{2} + C_2\right)dx = \frac{x^4}{12} + C_1\frac{x^3}{6} + C_2 x + C_3$$

– загальний розв'язок вихідного рівняння. ●

III. Рівняння не містить явно незалежної змінної x:

$$F(y, y', y'', ..., y^{(n)}) = 0. \qquad (17.3.6)$$

Такі рівняння припускають зниження порядку на одиницю, якщо розглядати першу похідну y'_x як складену функцію з проміжним аргументом $y = y(x)$, тобто покласти:

$$y'_x = p(y), \qquad (17.3.7)$$

і виразити всі інші похідні для $y(x)$: y'', y''', …, $y^{(n)}$, через нову функцію $p = p(y)$ та її похідні за змінною y:

$$y''_x = p'_y \cdot y'_x = p'_y \cdot p\,; \quad y'''_x = (y''_x)'_y \cdot p = [\,p''_y \cdot p + (p'_y)^2\,] \cdot p\,;$$

$$y^{(4)}_x = (y'''_x)'_y \cdot p = [\,p'''_y \cdot p^2 + 4p'_y \cdot p''_y \cdot p + (p'_y)^3\,] \cdot p\,; \,... \qquad (17.3.8)$$

$$...;\; y^{(n)}_x = \left(y^{(n-1)}_x\right)'_y \cdot p.$$

Згідно з (17.3.8) задане рівняння зводиться до диференціального рівняння $(n-1)$-го порядку відносно функції $p = p(y)$:

$$\Phi(y, p, p', ..., p^{(n-1)}) = 0. \qquad (17.3.9)$$

Приклад. Знайти інтегральну криву рівняння $yy''' = y'y''$, яка проходить точку $(x_0, y_0) = (1,1)$ з похідними: $y'(1) = 1$, $y''(1) = 1$.

Аналізуємо задане рівняння і встановлюємо, що воно не містить у явному вигляді аргументу x, тому виконуємо заміну: $y'_x = p(y)$.

Підставляємо вирази для y''_x та y'''_x у вихідне рівняння і *знаходимо* $p = p(y)$, визначаючи сталі C_1, C_2 у процесі розв'язання:

$$\left|\begin{array}{c} y''_x = p'_y \cdot p, \\ y'''_x = [p''_y \cdot p + (p'_y)^2] \cdot p \end{array}\right| \Rightarrow y[p''_y \cdot p + (p'_y)^2] \cdot p = p'_y p^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{p''_y}{p'_y} dy + \frac{p'_y}{p} dy = \frac{1}{y} dy \Rightarrow \ln\underbrace{|p'_y|}_{\neq 0} + \ln\underbrace{|p|}_{\neq 0} = \ln\underbrace{|y|}_{\neq 0} + \ln\underbrace{|C_1|}_{\neq 0} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \ln|p'_y p| = \ln|yC_1| \Rightarrow \underbrace{p'_y p}_{y''_x} = C_1 y \Rightarrow \left| y_0 = 1, y''_0 = 1 \Rightarrow C_1 = 1 \right| \Rightarrow$$

$$\Rightarrow pdp = ydy \Rightarrow p^2 = y^2 + C_2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left| y_0 = 1, y'_0 = 1 \Rightarrow C_2 = 0 \right| \Rightarrow p = y.$$

Розв'язуємо отримане найпростіше ДР-1:

$$\frac{dy}{dx} = y \Rightarrow dx = \frac{dy}{y} \Rightarrow x = \ln|y| + C_3 \Rightarrow y = \pm e^{(x - C_3)}.$$

Заданим початковим умовам відповідає лише знак „плюс” (*наведіть міркування*):

$$\left| x_0 = 1, y_0 = 1 \Rightarrow C_3 = 1 \right| \Rightarrow y = e^{(x-1)}$$ – розв'язок задачі Коші.

Стосовно виконання умов теореми Коші (17.1.4) маємо:

$$y''' = f(y, y', y'') = \frac{y'y''}{y} \Rightarrow \left(f'_y = -\frac{y'y''}{y^2},\ f'_{y'} = \frac{y''}{y},\ f'_{y''} = \frac{y'}{y} \right),$$

тобто права частина забезпечує існування і єдиність інтегральної кривої, що проходить через будь-яку точку (x_0, y_0) площини xOy з ненульовою ординатою, яка описується неперервною і двічі неперервно диференційовною функцією. ●

(*Обміркуйте*, за яких умов розв'язком є експонента $y = e^x$.)

IV. Однорідні ДР-n відносно шуканої функції та її похідних:

$$F(x,y,y',...,y^{(n)})=0 \text{ або } \underbrace{y^{(n)}-f(x,y,y',...,y^{(n-1)})}_{F(x,y,y',...,y^{(n)})}=0, \quad (17.3.10)$$

де $F(x,\lambda y,\lambda y',\lambda y'')=\lambda^m F(x,y,y',y'')$, m – вимір однорідності.

Зниження порядку ДР на одиницю здійснюється за допомогою ***підстановки Ейлера***: $y=e^{\int z dx}$, де $z=z(x)$ – „нова”, допоміжна функція.

Дійсно:

$$y=e^{\int zdx} \Rightarrow y'=e^{\int zdx}\cdot z=yz;$$
$$y''=y'z+yz'=yz^2+yz'; \quad (17.3.11)$$
$$y'''=yz^3+3yzz'+yz''; \ \ldots; \ y^{(n)}=(y^{(n-1)})'.$$

На кожному наступному кроці диференціювання замість y' підставляємо yz і у підсумку отримаємо рівняння $(n-1)$-го порядку:

$$\Phi(x,z,z',...,z^{(n-1)})=0.$$

Заміну $y=e^{\int zdx}$ можна виконувати й у випадку, коли x не входить у рівняння явним чином.

Приклад. Розв’язати рівняння:

$$y^2y'''-3yy'y''+2y'^3+y(yy''-y'^2)-y^3x=0.$$

Перевіряємо ліву частину на однорідність і переконуємося, що вона є однорідною функцією 3-виміру відносно змінних y, y', y'', y'''.

Застосовуємо підстановку Ейлера, залучаючи (17.3.11):

$$z^3+3zz'+z''-3z(z^2+z')+2z^3+z'-x=0 \Rightarrow z''+z'=x,$$

і отримуємо ДР-2, яке теж припускає зниження порядку (див. (17.2.4)):

$$z''+z'=x \Rightarrow \left| z'=p \Rightarrow z''=p' \right| \Rightarrow p'+p=x$$

– ЛДР-1 із загальним розв’язком (*підтвердіть* це): $p(x)=x-1+C_1e^{-x}$.

Відновлюємо функцію $z = z(x)$ за її похідною:

$$z'(x) = x - 1 + C_1 e^{-x} \;\Rightarrow\; z(x) = x^2/2 - x - C_1 e^{-x} + C_2,$$

і *знаходимо* інтеграл від неї:

$$\int z(x)dx = \frac{x^3}{6} - \frac{x^2}{2} + C_1 e^{-x} + C_2 x + C_3.$$

Записуємо загальний розв’язок вихідного рівняння:

$$y = e^{(x^3/6 - x^2/2 + C_1 e^{-x} + C_2 x + C_3)}. \;\bullet$$

(*Чи можна* для розв’язання рівняння $z'' + z' = x$ теж застосувати, вдруге, підстановку Ейлера?)

Якщо із заданого рівняння вилучити вільний від похідних член: ($-y^3 x$), то отримаємо:

$$y^2 y''' - 3yy'y'' + 2y'^3 + y(yy'' - y'^2) = 0,$$

і підстановка Ейлера приводить до рівняння: $z'' + z' = 0$.

(*Чи можна* для його розв’язання також застосувати, вдруге, підстановку Ейлера?)

17.4. Деякі задачі застосовного характеру в природничих науках і економіці

Математична модель руху планет навколо Сонця

Німецький астроном Йоганес Кеплер (1571 – 1630 рр.) емпіричним шляхом – шляхом аналізу спостережень руху Марса навколо Сонця, здійснених датським астрономом Тихо Браге (1546 – 1601 рр.) – вивів три залежності (названі ***законами Кеплера***), що описують рух планет навколо Сонця.

Приблизно через 70 років Ісаак Ньютон поклав закони Кеплера в основу своїх законів руху і гравітації. Ньютон показав, що із закону всесвітнього тяжіння випливають закони Кеплера, і таким чином була побудована математична модель руху планет навколо Сонця.

На рис. 17.4.1 у полярних координатах зображена орбіта планети Земля – еліпс, – в одному із фокусів якого знаходиться Сонце.

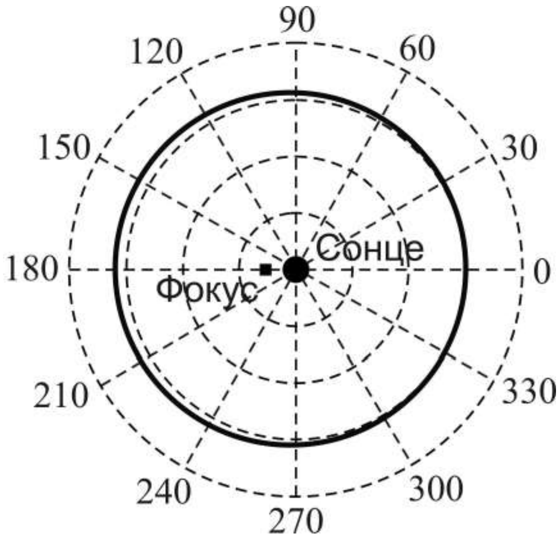


Рис. 17.4.1. **Орбіта планети Земля**

Відомо, що найближча до Сонця точка орбіти (*перигелій*), а найдальша від нього точка (*афелій*) визначаються відповідно відстанями: 147,5 млн км, 152,5 млн км, тобто відстань між фокусами $2c$ складає лише 5 млн км.

Рівняння еліпса має вигляд:

$$\frac{(x+c)^2}{a^2}+\frac{y^2}{a^2(1-e^2)}=1,$$

де $a=150$ млн км, $c=2{,}5$ млн км, $e=c/a=1/60$.

Тобто

$$\frac{(x+2{,}5)^2}{150^2}+\frac{y^2}{149{,}98^2}=1. \qquad (17.4.1)$$

Через мализну ексцентриситету e орбіта Землі близька до кола. Саме таке рівняння еліпса дає математична модель руху Землі.

Виведемо рівняння, що описує рух планети з масою m навколо Сонця маси M. Вплив інших планет на них враховувати не будемо.

За *законом всесвітнього тяжіння* два тіла, які знаходяться на відстані r один від одного, і які мають маси m і M притягуються з силою

$$F=\gamma\frac{m\cdot M}{r^2}. \qquad (17.4.2)$$

де γ – гравітаційна стала ($\gamma\approx 6{,}67\cdot 10^{-11}$ н·м^2/ кг^2).

Згідно з *другим* законом Ньютона прискорення матеріальної точки a прямо пропорційне силі F, що на неї діє, та напрямлене в бік дії цієї сили:

$$a=\frac{F}{m} \text{ або } F=ma, \text{ якщо } m-const.$$

За *третім* ньютонівським законом сили $F_{1,2}$ і $F_{2,1}$, що виникають при взаємодії двох тіл, є рівними за модулем і протилежними за напрямом: $F_{1,2} = -F_{2,1}$.

Залучаючи другий і третій закони Ньютона запишемо:

$$ma = -\gamma \frac{m \cdot M}{r^2}, \text{ або } a = -\frac{k}{r^2}, \text{ де } k = \gamma M - const. \qquad (17.4.3)$$

Нехай Сонце знаходиться в полюсі (див. рис. 17.4.1), а положення планети в момент часу t описується параметрично заданою функцією: $x = x(t)$, $y = y(t)$, де x, y – координати декартової системи координат, суміщеної з полярною. У полярній системі координат прискорення є другою похідною за часом від радіуса-вектора $\bar{r} = (x, y)$, а $r = \sqrt{x^2 + y^2}$.

На цих підставах рівняння із (17.4.3) запишеться у вигляді двох взаємно зв'язаних диференціальних рівнянь:

$$a = \frac{k}{r^2} : \begin{cases} \ddot{x} = -kr^{-2}\cos\varphi, \\ \ddot{y} = -kr^{-2}\sin\varphi. \end{cases} \qquad (17.4.4)$$

Ураховуючи, що $\cos\varphi = x/r$, $\sin\varphi = y/r$, $r = \sqrt{x^2 + y^2}$, приходимо до таких рівнянь (*переконайтеся*), що описують закони руху планет:

$$\begin{cases} \ddot{x} = -kx(x^2 + y^2)^{-2/3}, \\ \ddot{y} = -ky(x^2 + y^2)^{-2/3}, \end{cases} \text{ де } x = x(t),\ y = y(t). \qquad (17.4.5)$$

Якщо в (17.4.5) перейти до полярних координат (виклад проводити не будемо), то отримаємо диференціальне рівняння відносно $r = r(\varphi)$, розв'язком якого є функція:

$$r = r(\varphi) = \frac{C/k}{1 + e\cos\varphi}, \quad C - const,$$

яка описує криву 2-го порядку з ексцентриситетом e у полярній системі координат.

Для Землі це рівняння має вигляд: $r(\varphi) = 155 / (1 + 1/60 \cdot \cos\varphi)$; саме з нього отримуємо (*перевірте*) рівняння (17.4.1).

Розрахунок електричних ланцюгів

Розрахувати електричний ланцюг – це означає знайти величини струмів, що протікають у кожен момент часу t через кожен елемент ланцюга, або, в еквівалентному сенсі, вказати потенціал у кожному вузлі ланцюга в кожен момент часу.

Доведено, що перший і другий закони Кірхгофа (*згадайте їх*) разом із законами функціонування елементів ланцюга дають достатнє число рівнянь для визначення невідомих струмів і різниць потенціалів на кожному елементі.

На цих підставах будується так звана *аналітична модель* електричного ланцюга: складаються диференціальні рівняння, які відображують (описують) реальний ланцюг.

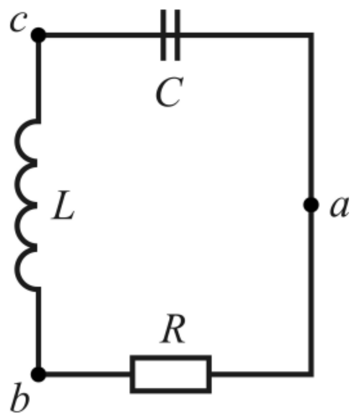


Рис. 17.4.2. **RLC-ланцюг**

Найпростішим прикладом електричного ланцюга (рис. 17.4.2) є коливальний контур, або RLC-ланцюг, який містить резистор (активний опір R), котушку (індуктивний опір L) і конденсатор (ємнісний опір C).

Закони функціонування елементів R, L, C описуються рівностями:

$$u = Ri \text{ (закон Ома)},\ u = Li',\quad i = Cu', \tag{17.4.6}$$

де $u = u(t)$, $i = i(t)$ – напруга і струм – є функціями часу; штрих означає похідну за змінною t.

За першим законом Кірхгофа (про суму струмів i у вузлах):

$$i_{ab}(t) = i_{bc}(t) = i_{ca}(t);$$

позначимо цей струм через $i = i(t)$.

За другим законом Кірхгофа (про суму падіння напруг u):

$$u_{ab}(t) + u_{bc}(t) + u_{ca}(t) = 0;$$

а за законами (17.4.6):

$$u_{ab} = Ri,\ u_{bc} = Li',\ u'_{ca} = i/C.$$

Із двох попередніх співвідношень отримуємо:

$$Ri + Li' + u_{ca} = 0 \;\Rightarrow\; \left|\text{диференціюємо за } i\right| \;\Rightarrow\; Ri' + Li'' + i/C = 0 \;\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\; i'' + \frac{R}{L}i' + \frac{1}{LC}i = 0 \qquad (17.4.7)$$

– диференціальне рівняння 2-го порядку, що описує коливальний контур.

Найпростішим і широко розповсюдженим електричним ланцюгом є ламповий генератор із тріодом (рис. 17.4.3). Він являє собою коливальний контур $bdae$, пов'язаний із тріодом через елемент, який називають *взаємоіндукцією*.

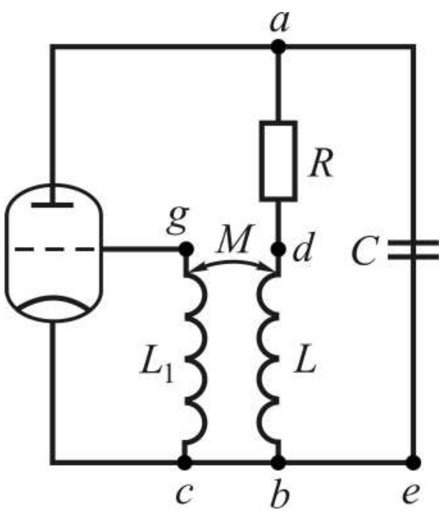


Рис. 17.4.3. **Ламповий генератор**

Останній є чотириполюсником $cgdb$, який складається з двох індуктивностей, що задовольняють рівності:

$$\begin{aligned} u_{cg} &= L_1 i_{cg} + M i'_{bd}, \\ u_{bd} &= L i_{bd} + M i'_{cg}, \end{aligned} \qquad (17.4.8)$$

де L_1 і L – індуктивності;

M $(M > 0)$ – коефіцієнт взаємоіндукції.

Закони функціонування тріода з достатньою точністю описується співвідношеннями:

$$i_{cg}(t) = 0, \;\; i_{ac}(t) = f(u_{cg}(t)), \qquad (17.4.9)$$

де функція $f(u_{cg}(t))$ – так звана вольтамперна характеристика тріода, що описує залежність анодного струму i_{ac} від сіткової напруги u_{cg}, – задана і залежить від фізичних характеристик конкретної лампи.

Виведемо рівняння, що описує роботу лампового генератора. Перший закон Кірхгофа для вузла a дає рівняння:

$$i_{da} - i_{ac} = i_{ae}, \qquad (17.4.10)$$

а за другим законом Кірхгофа для контуру $aebd$ маємо:

$$u_{bd} + u_{da} + u_{ae} = 0.$$

З урахуванням (17.4.6) отримуємо:

$$Li'_{bd} + Ri_{da} + u_{ae} = 0.$$

Одноразове диференціювання та закон функціонування ємності приводить до рівняння:

$$L\,i''_{bd} + R\,i'_{da} + \frac{i_{ae}}{C} = 0. \qquad (17.4.11)$$

Далі, враховуючи відсутність сіткового струму, згідно з (17.4.9) із рівняння взаємоіндукції (17.4.8) отримуємо:

$$u_{cg} = M\,i'_{bd},$$

і тому

$$i_{ac} = f(M\,i'_{bd}). \qquad (17.4.12)$$

Якщо тепер підставити i_{ac} із (17.4.12) в (17.4.10), а отриманий вираз для i_{ae} – в (17.4.11) і, крім того, позначити $i_{bd} = i_{da} = i_{ae}$ через i, то приходимо до рівняння, що описує роботу лампового генератора:

$$Li'' + Ri' + \frac{i}{C} = \frac{f(M\,i')}{C}. \qquad (17.4.13)$$

Зауваження. Аналогічно описуються генератори електромагнітних коливань на транзисторах. Фактично жоден підручник з теоретичних основ електро- і радіотехніки не обходиться без використання диференціальних рівнянь.

Аналіз поведінки економічних динамічних систем

Під економічною системою розуміють сукупність усіх видів економічної діяльності людей у процесі їх взаємодії, спрямованої на виробництво, обмін, розподіл, споживання товарів і послуг, на регулювання економічної діяльності. Динамічна система – математична абстракція, призначена для опису і вивчення систем, що еволюціонують з часом. На підставі математичних моделей динамічних систем можна прогнозувати майбутнє і по-новому оцінити минуле.

Розглянемо одну із задач збуту і споживання товарів та послуг. Нехай попит d та пропозиція на товар s визначаються співвідношеннями:

$$d = a_1 p'' + a_2 p' + a_3 p + a_4;$$
$$s = b_1 p'' + b_2 p' + b_3 p + b_4,$$

де $p = p(t)$ – ціна на товар;

$p' = p'(t)$ – тенденція формування ціни;

$p'' = p''(t)$ – темп зміни ціни;

a_i, b_i $(i = \overline{1,4}) - const$.

У початковий момент часу:

$$p(0) = p_0, \ \ d(0) = d_0, \ \ s(0) = s_0.$$

Знайдемо залежність ціни від часу: $p = p(t)$, ураховуючи вимогу відповідності попиту до пропозиції: $d = s$.

Задача зводиться до розв’язання задачі Коші для диференціального рівняння 2-го порядку:

$$c_1 p'' + c_2 p' + c_3 p + c_4 = 0, \qquad (17.4.14)$$

де $c_i = a_i - b_i$ $(i = \overline{1,4})$.

(*До якого типу* вивчених рівнянь слід віднести рівняння (17.4.14)?)

Побудована математична модель є більш гнучкою, порівняно з диференціальним рівнянням закону попиту і пропозиції (див. п. 16.6), оскільки вона враховує не тільки тенденцію формування ціни, а й темп зміни ціни.

Запитання для самодіагностики засвоєння матеріалу

Відповіді на всі запитання сформулюйте словесно, запишіть у символічній формі, обґрунтуйте (на підставі означень, теорем, правил, формул тощо), наведіть відповідні конкретні приклади.

1. Що розуміють під диференціальним рівнянням вищого порядку (ДР-n) і як його записують у символах?

2. Як записується в символах ДР-n, розв'язане відносно похідної?

3. Яка функція називається розв'язком ДР-n і що таке інтегральна крива?

4. Що називають загальним розв'язком диференціального рівняння n-го порядку?

5. Що називають n-параметричною сім'єю розв'язків?

6. Який розв'язок рівняння називається частинним?

7. Що називають загальним і частинним інтегралами рівняння?

8. Яку задачу називають задачею Коші для диференціального рівняння n-го порядку?

9. Сформулюйте теорему Коші про існування і єдиність розв'язку диференціального рівняння n-го порядку.

10. Яка заміна змінної використовується для інтегрування рівняння: а) $y'' = f(x)$; б) $y'' = f(x, y')$; в) $y'' = f(y, y')$; г) $F(x, y, y', y'') = 0$, де $F(x, \lambda y, \lambda y', \lambda y'') = \lambda^m F(x, y, y', y'')$?

11. У чому полягає механічний і економічний зміст диференціального рівняння другого порядку?

12. Які типи диференціальних рівнянь n-го порядку ($n > 2$) припускають зниження порядку і за допомогою яких підстановок?

Задачі та вправи

1. Знайти загальні або частинні розв'язки (інтеграли) заданих ДР-2, які зводяться до ДР-1:

1) $y'' = \cos 2x + \dfrac{1}{x}$;

2) $y'' = \sin^2 x + x \sin 2x$;

3) $y''(x+2)^5 = 1, \quad y(-1) = 1/12, \; y'(-1) = -1/4$;

4) $y'' = x \cdot e^x$, $y(0) = y'(0) = 0$;

5) $y'' = 2x \cdot \ln x$;

6) $y'' \cdot \sqrt{1 - x^2} = 1$, $y(0) = 3$, $y'(0) = 1$;

7) $y'' \cdot (4 + x^2) = 2$;

8) $(x + 4) \cdot y'' = x + 1$;

9) $y'' = 4\cos^4 x + 2\sin^2(x/2) + \sqrt{x + 2}$;

10) $xy'' = y'$;

11) $xy'' + y' = 0$;

12) $xy'' = (1 + 2x^2)y'$;

13) $xy'' = y' + x^2$;

14) $x \ln x \cdot y'' = y'$;

15) $xy'' = y' \cdot \ln \dfrac{y'}{x}$, $y(1) = 0$, $y'(1) = 1$;

16) $2xy'y'' = (y')^2 + 1$, $y(1) = 1/3$, $y'(1) = 1$;

17) $x^2 y'' + xy' = 1$;

18) $x^3 y'' + x^2 y' = 1$;

19) $2y'' = \dfrac{y'}{x} + \dfrac{x^2}{y'}$, $y(1) = \sqrt{2}/5$, $y'(1) = \sqrt{2}/2$;

20) $xy'' - y' = x^2 e^x$;

21) $xy'' = y' + x \cdot \sin \dfrac{y'}{x}$, $y(1) = y'(1) = \pi/2$;

22) $y'' + y' \cdot tg\, x = \sin 2x$;

23) $y''(x^2 + 1) = 2xy'$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 3$;

24) $xy'' + y' = \dfrac{x}{\sqrt{(1 - x^2)^3}}$;

25) $xy'' + y' = \ln x$, $y(1) = -2$, $y'(1) = -1$;

26) $y'' - \dfrac{y'}{x - 1} = x(x - 1)$, $y(0) = y'(0) = 0$;

27) $y'' \cdot ctg\, x + y' = 2$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 2$;

28) $xy'' - 3y' = -\dfrac{x^5}{\sqrt{9-x^2}}$, $\quad y(3) = 0$, $y'(3) = 0$;

29) $y'' = (y')^2$;

30) $y'' = \sqrt{1-(y')^2}$;

31) $y'' = 1 + (y')^2$;

32) $y'' = \sqrt{1+y'}$;

33) $y'' + y' + 2 = 0$, $\quad y(0) = 0$, $y'(0) = -2$;

34) $y'' = y'(1+y')$;

35) $y \cdot y'' = (y')^2$;

36) $yy'' + (y')^2 = 0$;

37) $yy'' = y' + (y')^2$;

38) $2yy'' = 1 + (y')^2$, $\quad y(0) = 1$, $y'(0) = 1$;

39) $y^3 y'' = -1$, $\quad y(1) = 1$, $y'(1) = 1$;

40) $yy'' - (y')^2 = y^2 y'$;

41) $y'' = e^{2y}$, $\quad y(0) = 0$, $y'(0) = 1$;

42) $y'' = 2yy'$, $\quad y(0) = 1$, $y'(0) = 1$;

43) $3y'y'' = 2y$, $\quad y(0) = 1$, $y'(0) = 1$;

44) $2y'' = 3y^2$, $\quad y(-2) = 1$, $y'(-2) = -1$;

45) $y'' = 2y^3$, $\quad y(0) = 1$, $y'(0) = 1$;

46) $(y')^2 = y \cdot y'' - 1$, $\quad y(0) = \sqrt{2}$, $y'(0) = 1$;

47) $y'' + (y')^2 = 2e^{-y}$;

48) $y'' = 2 - y$, $\quad y(0) = 2$, $y'(0) = 2$;

49) $2yy'' + y^2 - (y')^2 = 0$, $\quad y(0) = 1$, $y'(0) = 1$;

50) $y'' = \sqrt{1+(y')^2}$;

51) $2yy'' - 3(y')^2 = 4y^2$;

52) $3y'' = \sqrt{(1+(y')^2)^3}$;

53) $yy'' - y'(2\sqrt{yy'} - y') = 0$;

54) $y''(y-1) - 2(y')^2 = 0$;

55) $yy'' - (y')^2 = y^2 \ln y$, $\quad y(0) = 1$, $y'(0) = 1$;

56) $4y^3 y'' = y^4 - 1$, $\quad y(0) = \sqrt{2}$, $y'(0) = \sqrt{2}/4$;

57) $x^2 yy'' = (y - xy')^2$;

58) $xy'(yy'' - (y')^2) = y(y')^2 + x^4 y^3$.

2. Знайти загальні або частинні розв'язки (інтеграли) заданих ДР вищих порядків, що припускають зниження порядку:

1) $y''' = e^{2x} + x^3$;

2) $y''' = 2\ln x + x + 2$;

3) $y''' = \sin x + \cos x$;

4) $y^{\text{IV}} = x$;

5) $y''' = \dfrac{\ln x}{x^3}$, $\quad y(1) = 0$, $y'(1) = 1$, $y''(1) = 2$;

6) $xy''' - y'' = 0$;

7) $xy^{\text{V}} - y^{\text{IV}} = 0$;

8) $x^2 y''' = (y'')^2$;

9) $x^2 y''' - xy'' = -1$;

10) $y''' + y'' \cdot tgx = \dfrac{1}{\cos x}$, $\quad y(0) = 2$, $y'(0) = 1$, $y''(0) = 1$;

11) $y''' \cdot x \ln x = y''$;

12) $x^4 y''' + 2x^3 y'' = 1$;

13) $(y''')^2 + (y'')^2 = 1$;

14) $y' \cdot y''' = 3(y'')^2$;

15) $(y'')^2 - y'y''' = \left(y'/x\right)^2$;

16) $y''' = \sqrt{1 - (y'')^2}$;

17) $y''' + (y'')^2 = 0$;

18) $y''' = \sqrt{1 + (y'')^2}$;

19) $x^4 y^{\text{IV}} + 2x^3 y''' = 1$;

20) $y^{\text{IV}} - 2(y''' - 1)ctgx = 0$;

21) $xy''' - y'' + x^2 - 2 = 0$, $\quad y(1) = 2$, $y'(1) = -1/3$, $y''(1) = -3$.

Відповіді

1. 1) $y = -\dfrac{1}{4}\cos 2x + \ln|x| + C_1 x + C_2$;

2) $y = \dfrac{1}{4}x^2 - \dfrac{1}{4}x \sin 2x - \dfrac{1}{8}\cos 2x + C_1 x + C_2$;

3) $y=\dfrac{1}{12(x+2)^3}$; 4) $y=(x-2)\cdot e^x+x+2$;

5) $y=\dfrac{x^3}{3}\ln x-\dfrac{5}{18}x^3+C_1x+C_2$; 6) $y=x\cdot\arcsin x+\sqrt{1-x^2}+x+2$;

7) $y=x\cdot arctg(x/2)-\ln(x^2+4)+C_1x+C_2$;

8) $y=\dfrac{x^2}{2}-3(x+4)(\ln|x+4|-1)+C_1x+C_2$;

9) $y=\dfrac{5}{4}x^2-\dfrac{1}{2}\cos 2x-\dfrac{1}{32}\cos 4x+\cos x+\dfrac{4}{15}\sqrt{(x+2)^5}+C_1x+C_2$;

10) $y=C_1x^2+C_2$; 11) $y=C_1\ln|x|+C_2$;

12) $y=C_1e^{x^2}+C_2$; 13) $y=\dfrac{x^3}{3}+C_1x^2+C_2$;

14) $y=C_1x(\ln x-1)+C_2$; 15) $y=e^{-x+1}(-x-1)+2$;

16) $y=\dfrac{\sqrt{(2x-1)^3}}{3}$; 17) $y=\dfrac{\ln^2|x|}{2}+C_1\ln|x|+C_2$;

18) $y=\dfrac{1}{x}+C_1\ln|x|+C_2$; 19) $y=\dfrac{\sqrt{2x^5}}{5}$;

20) $y=e^x(x-1)+C_1x^2+C_2$; 21) $y=(x^2+1)\cdot arctg\,x-x+1$;

22) $y=-x-\dfrac{1}{2}\sin 2x+C_1\sin x+C_2$; 23) $y=x^3+3x+1$;

24) $y=C_1\ln|x|+C_2-\ln\left|1+\sqrt{1-x^2}\right|$; 25) $y=x(\ln|x|-2)$;

26) $y=\dfrac{x^4}{8}-\dfrac{x^3}{6}$; 27) $y=2x$;

28) $y=\dfrac{1}{5}\sqrt{(9-x^2)^5}-3\sqrt{(9-x^2)^3}$; 29) $y=C_2-\ln|x+C_1|$;

30) $y=C_2-\cos|x+C_1|$; 31) $y=C_2-\ln|\cos(x+C_1)|$;

32) $y=\dfrac{(x+C_1)^3}{12}-x+C_2$; 33) $y=-2x$;

34) $y=C_2-\ln\left|1-e^{x+C_1}\right|$; 35) $y=C_2e^{C_1x}$;

36) $y^2=C_1x+C_2$; 37) $y=\dfrac{1}{C_1}(e^{C_1x+C_2}+1)$;

38) $y=\frac{x^2}{2}+x+1$;

39) $y^2=2x-1$;

40) $\ln\left|\frac{y}{y+C_1}\right|=C_1x+C_2$;

41) $y=-\ln|1-x|$;

42) $y=\frac{1}{1-x}$;

43) $y=\frac{(x+3)^3}{27}$;

44) $y=4x^{-2}$;

45) $y=\frac{1}{1-x}$;

46) $x+\ln(1+\sqrt{2})=\ln\left|y+\sqrt{y^2-1}\right|$;

47) $e^y+C_1=(x+C_2)^2$;

48) $y=2\sin x+2$;

49) $y=\sin x+1$;

50) $\ln\left|y+C_1+\sqrt{(y+C_1)^2-1}\right|=x+C_2$;

51) $y\cos^2(x+C_2)=C_1$;

52) $(x+C_2)^2+(y+C_1)^2=9$;

53) $C_1y-\ln|C_1y+1|=x+C_2$;

54) $(C_1x+C_2)(1-y)=1$;

55) $x=\ln\left|\ln|y|+\sqrt{\ln^2|y|+1}\right|$;

56) $\ln\left|y^2-1\right|=x$;

57) $y=C_2xe^{-C_1/x}$;

58) $y=C_3e^{1/3\cdot(x^2+C_2)^{3/2}}$.

2. 1) $y=\frac{1}{8}e^{2x}+\frac{1}{120}x^6+\frac{1}{2}C_1x^2+C_2x+C_3$;

2) $y=\frac{1}{3}x^3\ln x-\frac{1}{9}x^3+\frac{1}{2}C_1x^2+C_2x+C_3$;

3) $y=\cos x-\sin x+C_1\frac{x^2}{2}+C_2x+C_3$;

4) $y=\frac{x^5}{120}+C_1x^3+C_2x^2+C_3x+C_4$;

5) $y=-\frac{x}{2}\ln^2 x+\frac{3}{2}x^2-2x+\frac{1}{2}$;

6) $y=C_1x^3+C_2x+C_3$;

7) $y=C_1\frac{x^5}{120}+C_2\frac{x^3}{6}+C_3\frac{x^2}{2}+C_4x+C_5$;

8) $y=C_1\frac{x^2}{2}-C_1^2(x+C_1)\ln|x+C_1|+C_2x+C_3$;

9) $y=\frac{1}{2}x(\ln|x|-1)+C_1x^3+C_2x+C_3$;

10) $y = -\sin x - \cos x + 2x + 3$;

11) $y = C_1 \dfrac{x^2}{4}(2\ln x - 3) + C_2 x + C_3$;

12) $y = -C_1 \ln|x| - \dfrac{1}{2x} + C_2 x + C_3$;

13) $y = \sin(x + C_1) + C_2 x + C_3$;

14) $x = C_1 y^2 + C_2 y + C_3$;

15) $y = C_2(x \cdot e^{C_1 x} - \dfrac{1}{C_1} e^{C_1 x}) + C_3$;

16) $y = C_3 + C_2 x - \sin(x + C_1)$;

17) $y = (x + C_1)\ln| x + C_1 | + C_2 x + C_3$;

18) $y = \dfrac{1}{2}(e^{x + C_1} - e^{-(x + C_1)}) + C_2 x + C_3$;

19) $y = -\dfrac{1}{2}\ln|x| - C_1(x\ln|x| - 1) + C_2 x^2 + C_3 x + C_4$;

20) $y = \dfrac{1}{4} C_1 \sin 2x + \dfrac{1}{6}(1 + 2C_1)x^3 + C_2 x^2 + C_3 x + C_4$;

21) $y = -\dfrac{x^4}{12} - x^2 + 2x + \dfrac{13}{12}$.

Ключові терміни

Диференціальні рівняння вищих порядків (ДР-n); розв’язок рівняння, інтегральна крива; загальний розв’язок; параметри (довільні сталі); частинний розв’язок; задача Коші; загальний інтеграл; частинний інтеграл; n-параметрична сім’я розв’язків; ДР-2, що зводяться до ДР-1; ДР-n, що припускають зниження порядку.

Резюме

Вводяться означення понять, пов’язаних із диференціальними рівняннями n-го порядку (ДР-n). Вивчаються ДР-2, які зводяться до диференціальних рівнянь 1-го порядку. Розглянуто різновиди ДР-n, що припускають зниження порядку. Указано економічний і механічний смисли ДР-2. Наведено задачі застосовного характеру.

Література: [5; 6; 11; 14; 16; 17; 24; 28; 32].

18. Лінійні диференціальні рівняння n-го порядку

Жодна інша наука не навчає так ясно розуміти гармонію природи, як математика ...

П. Карус

Перша умова, яку належить виконувати в математиці, – це бути точним, друге – бути ясним і, наскільки можна, простим.

Л. Карно

Мета: навчити майбутніх фахівців умінню за швидкісними (граничними) величинами, що описують економічні процеси або складові інформаційних систем, відтворювати їхні загальні характеристики (загальні витрати, загальний дохід, енергію сигналу тощо).

Питання теми:

18.1. Означення основних понять. Теорема Коші. Вронскіан.

18.2. Лінійні диференціальні рівняння другого порядку зі сталими коефіцієнтами (ЛДР-2): однорідні і неоднорідні.

18.3. Лінійні диференціальні рівняння вищих порядків зі сталими коефіцієнтами (ЛДР-n): однорідні і неоднорідні.

18.4. ЛДР-n зі змінними коефіцієнтами, які зводяться до рівнянь зі сталими коефіцієнтами або до рівнянь без $(n-1)$-ї похідної.

18.5. Деякі задачі застосовного характеру.

Компетентності, що формуються після вивчення теми:

Загальнонаукова: володіння засобами знаходження невідомої функції за відомими співвідношеннями між нею та її похідними.

Загальнопрофесійна: підготовленість до аналізу швидкісних (граничних) характеристик функціональних залежностей у задачах дослідження економічних динамічних систем, до побудови математичних моделей на основі інформації, яку несуть часові (сигнальні) функції.

Спеціалізовано-професійна: володіння основами побудови математичних (аналітичних) моделей, методами та алгоритмами їх дослідження; уміння впроваджувати диференціальні рівняння в моделювання економічних процесів та процесів управління інформаційними системами.

18.1. Означення основних понять. Теорема Коші. Вронскіан

Диференціальне рівняння вищого порядку – ДР-n, де $n \ge 2$ – називається **лінійним** (**ЛДР-n**), якщо в нього невідома функція $y = y(x)$ та її похідні до n-го порядку включно: y', y'', …, $y^{(n)}$, входять у першому степені і пов'язані лінійною залежністю:

$$y^{(n)} + p_1(x)y^{(n-1)} + \ldots + p_n(x)y = f(x), \qquad (18.1.1)$$

де $p_i(x)$, $i = \overline{1,n}$, $f(x)$ – відомі, неперервні на інтервалі (a,b), функції.

ЛДР-n називається **неоднорідним** (**НЛДР-n**), або **рівнянням із правою частиною,** якщо $f(x)$ на (a,b) не є тотожним нулем:

$$\text{ЛДР-}n \text{ неоднорідне} \ \rightleftarrows \ \forall x \in (a,b):\ f(x) \not\equiv 0. \qquad (18.1.2)$$

За символічним записом *сформулюйте* означення **однорідного** (**без правої частини**) ЛДР-n:

$$\text{ЛДР-}n \text{ однорідне} \ \rightleftarrows \ \forall x \in (a,b):\ f(x) \equiv 0. \qquad (18.1.3)$$

Означення понять, наведених для ДР-n (див. п. 17.1) – розв'язок (інтеграл), інтегральна крива, загальний розв'язок, частинний розв'язок, початкові умови, задача Коші, загальний інтеграл, частинний інтеграл – без змін переносяться на лінійні ДР-n.

Рівняння (18.1.1) розв'язуване відносно старшої похідної:

$$y^{(n)} = -\sum_{i=1}^{n} p_i(x)y^{(n-i)} + f(x), \qquad (18.1.4)$$

і для нього справедлива теорема 17.1.1 (*теорема Коші існування і єдиності розв'язку ДР-n*), бо права частина (18.1.4) (позначимо її f^*):

1) неперервна функція за всіма аргументами $x, y, y', y'', \ldots, y^{(n-1)}$ у деякій області D їх змінювання (*обґрунтуйте*);

2) має неперервні в області D частинні похідні за аргументами $y, y', y'', \ldots, y^{(n-1)}$: $\partial f^* / \partial y^{(n-i)} = -p_i(x)$, $i = \overline{1,n}$.

(Область D визначається інтервалом (a,b)).

Теорія ЛДР-n потребує введення понять, аналогічних тим, які розглядалися при вивченні систем n-вимірних векторів (див. п. 4.2, ч. 1).

Нехай $\{y_i(x)\}\big|_1^n$ – множина (система) функцій $y_1(x)$, $y_2(x)$, …, $y_n(x)$, визначених на інтервалі (a,b). Система функцій $\{y_i(x)\}\big|_1^n$ називається **лінійно залежною на** $\boldsymbol{(a,b)}$, якщо існують такі сталі α_1, α_2, …, α_n, не всі рівні нулю, що для всіх значень $x\in(a,b)$ справедлива тотожність:

$$\alpha_1 y_1(x)+\alpha_2 y_2(x)+...+\alpha_n y_n(x)\equiv 0. \qquad (18.1.5)$$

Система функцій $\{y_i(x)\}\big|_1^n$ називається **лінійно незалежною на** $\boldsymbol{(a,b)}$, якщо тотожність (18.1.5) виконується тільки при $\alpha_i=0\ \forall i=\overline{1,n}$.

Із (18.1.5) випливає, що принаймні одну із функцій системи можна виразити (подати) через інші. Наприклад, нехай $\alpha_1\neq 0$, тоді

$$y_1(x)+\frac{\alpha_2}{\alpha_1}y_2(x)+...+\frac{\alpha_n}{\alpha_1}y_n(x)\equiv 0,$$

звідки

$$y_1(x)\equiv\beta_2 y_2(x)+...+\beta_n y_n(x);\ \ \beta_j=-\alpha_j/\alpha_1,\ \ j=\overline{2,n}. \qquad (18.1.6)$$

Співвідношення (18.1.6) можна покласти в основу означення лінійної залежності. У разі лінійної незалежності системи функцій жодну із них неможливо виразити через інші, тобто подати у вигляді лінійної комбінації функцій системи.

Зокрема, при $n=2$ лінійна залежність системи функцій $\{y_1(x),y_2(x)\}$, описується умовою: $\alpha_1 y_1(x)+\alpha_2 y_2(x)\equiv 0$. Тоді:

$$\frac{y_1(x)}{y_2(x)}\equiv-\frac{\alpha_2}{\alpha_1}\ \ \Rightarrow\ \ \frac{y_1(x)}{y_2(x)}\equiv c-const\ \ \left(c=-\frac{\alpha_2}{\alpha_1}\right). \qquad (18.1.7)$$

При лінійній незалежності відношення $y_1(x)/y_2(x)$ чи $y_2(x)/y_1(x)$ не є сталою на (a,b). (*Обміркуйте*, якою буде, за контекстом викладу, система двох функцій: $\{y_1(x),y_2(x)\}$, якщо одна з них – тотожний нуль.)

Приклади систем лінійно незалежних і лінійно залежних функцій:

1) $\{e^x,\ e^{2x}\}$ лінійно незалежна на $\mathbf{R}$: $e^{2x}/e^x = e^x$ не є сталою;

2) $\{x, 2x\}$ лінійно залежна на $\mathbf{R}$: $2x/x = 2$ – стала величина;

3) $\{1, x, x^2\}$ лінійно незалежна на будь-якому інтервалі $(a,b) \in \mathbf{R}$: тотожність $\alpha_1 1 + \alpha_2 x + \alpha_3 x^2 \equiv 0$ не виконується, бо квадратний тричлен може стати нулем тільки у двох точках;

4) $\{x^i\}\big|_0^n$ лінійно незалежна на будь-якому інтервалі $(a,b) \in \mathbf{R}$, бо рівняння n-го степеня не може мати більше, ніж n коренів (ураховуючи їх кратність);

5) $\{\sin ix\}\big|_0^n$ лінійно залежна на $\mathbf{R}$ (*укажіть*, на якій підставі?).

Нехай $\{y_i(x)\}\big|_1^n$ – система $(n-1)$ разів диференційовних на (a,b) функцій. Визначник n-го порядку, елементами i-го рядка якого $(i = \overline{1,n})$ є похідні $(i-1)$-го порядку функцій системи, називається **визначником Вронського для системи $\{y_i(x)\}\big|_1^n$**, або, коротко, **вронскіаном**:

$$W[y_1, y_2, ..., y_n] = W(x) = \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) & ... & y_n(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) & ... & y_n'(x) \\ ... & ... & ... & ... \\ y_1^{(n-1)}(x) & y_2^{(n-1)}(x) & ... & y_n^{(n-1)}(x) \end{vmatrix}. \qquad (18.1.8)$$

(Юзеф Вронський (1778 – 1853 рр.) – польський математик та філософ.)

Залежно від того, яким буде порівняно з нулем вронскіан системи функцій, можна зробити висновок стосовно її лінійної залежності чи незалежності.

Теорема 18.1.1 (*необхідна умова лінійної залежності*). Якщо система $\{y_i(x)\}\big|_1^n$ диференційовних до $(n-1)$-го порядку функцій лінійно залежна на (a,b), то вронскіан системи тотожно дорівнює нулю:

$$\{y_i(x)\}\big|_1^n \text{ лінійно залежна } \Rightarrow \ W[y_1, y_2, ..., y_n] \equiv 0. \qquad (18.1.9)$$

Д о в е д е н н я. За означенням лінійної залежності (див. (18.1.5)) існують $\alpha_i \neq 0$, $i \in \{1, 2, ..., n\}$, такі, що: $\alpha_1 y_1(x) + \alpha_2 y_2(x) + ... + \alpha_n y_n(x) \equiv 0$.

Диференціюючи $(n-1)$ разів ліву і праву частини цієї тотожності, приходимо до однорідної СЛАР $n \times n$ відносно невідомих α_1, α_2, …, α_n:

$$\begin{cases} \alpha_1 y_1(x) \quad + \alpha_2 y_2(x) \quad + ... + \alpha_n y_n(x) \quad \equiv 0, \\ \alpha_1 y_1'(x) \quad + \alpha_2 y_2'(x) \quad + ... + \alpha_n y_n'(x) \quad \equiv 0, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \alpha_1 y_1^{(n-1)}(x) + \alpha_2 y_2^{(n-1)}(x) + ... + \alpha_n y_n^{(n-1)}(x) \equiv 0. \end{cases} \tag{18.1.10}$$

Визначником системи (18.1.10) є вронскіан із лінійно залежними стовпцями-векторами $Y_i = \left(y_i(x), y_i'(x), y_i''(x), ..., y_i^{(n-1)}(x)\right)^T$ у кожній точці (a, b), бо $\alpha_1 Y_1 + \alpha_2 Y_2 + ... + \alpha_n Y_n \equiv \overline{0}$. Таким чином, $W[y_1, y_2, ..., y_n] \equiv 0$. ■

Обернене твердження неправильне, тобто $W(x)$ може приймати нульове значення і в тому випадку, коли задані функції утворюють лінійно незалежну систему:

$$W[y_1, y_2, ..., y_n] = 0 \quad \not\Rightarrow \quad \{y_i(x)\}\big|_1^n \text{ лінійно залежна.} \tag{18.1.11}$$

Проте умова $W(x) \not\equiv 0$ є достатньою (*наведіть* міркування) для лінійної незалежності:

$$W[y_1, y_2, ..., y_n] \not\equiv 0 \quad \Rightarrow \quad \{y_i(x)\}\big|_1^n \text{ лінійно незалежна.} \tag{18.1.12}$$

Зауваження. Критерієм лінійної залежності (незалежності) системи функцій на (a, b) є тотожна рівність (нерівність) нулю визначника Грама $\Gamma[y_1, y_2, ..., y_n]$ – визначника з елементами γ_{ij}, які є ВІ від добутків із двох функцій системи:

$$\gamma_{ij} = \int_a^b y_i(x) \cdot y_j(x)\,dx: \quad \begin{matrix} \{y_i(x)\}\big|_1^n \text{ лінійно залежна} \Leftrightarrow \Gamma[y_1, y_2, ..., y_n] \equiv 0, \\ \left(\{y_i(x)\}\big|_1^n \text{ лінійно незалежна} \Leftrightarrow \Gamma[y_1, y_2, ..., y_n] \not\equiv 0\right). \end{matrix}$$

(Грам Йорген Петерсен (1850 – 1916 рр.) – датський математик)

18.2. Лінійні диференціальні рівняння другого порядку зі сталими коефіцієнтами (ЛДР-2): однорідні і неоднорідні

Однорідні лінійні диференціальні рівняння другого порядку зі сталими коефіцієнтами (ОЛДР-2)

І. Означення і властивості розв'язків. Рівняння $F(y, y', y'') = 0$, лінійно залежне від невідомої функції $y = y(x)$ та її похідних y', y'':

$$y'' + py' + qy = 0, \qquad (18.2.1)$$

де p і q – сталі величини, називається **однорідним лінійним диференціальним рівнянням другого порядку зі сталими коефіцієнтами**.

ОЛДР-2 є окремим випадком рівняння (18.1.3) за умови, що $n = 2$: $y'' + p_1(x)y' + p_2(x)y = 0$, і $p_1(x) = p$, $p_2(x) = q$ – сталі. До таких рівнянь часто приводять задачі економічної динаміки і природничих наук.

Легко показати, що функція $y_{\text{т}}(x) \equiv 0 \ \ \forall x \in (a, b) \subseteq \mathbf{R}$ є розв'язком рівняння (18.2.1) при довільних дійсних p і q; його називають **тривіальним** (**неоригінальним**) розв'язком.

Рівняння розв'язуване відносно старшої похідної: $y'' = -py' - qy$, і задовольняє умови існування і єдиності розв'язку (див. теорему 17.1.1 (*теорема Коші існування і єдиності розв'язку ДР-*n)). Дійсно, його права частина $f(y, y') = -py' - qy$ є лінійною функцією змінних y, y', а її частинні похідні – сталі величини:

$$(y'' = \underbrace{-py' - qy}_{f(y,y') \in \mathbf{C}(D)}, \ f'_y = -q, \ f'_{y'} = -p) \ \Rightarrow \ \exists! \varphi(x) : \varphi''(x_0) = f(y_0, y'_0).$$

Теорема 18.2.1 (*про лінійну комбінацію частинних розв'язків*). Якщо $y_1 = y_1(x)$, $y_2 = y_2(x)$ – частинні розв'язки рівняння, то їхня лінійна комбінація $y = C_1 y_1 + C_2 y_2$, де C_1, C_2 – довільні сталі, також є розв'язком рівняння.

Д о в е д е н н я зводиться до безпосередньої перевірки.

За умовою $y_1'' + py_1' + qy_1 = 0$ і $y_2'' + py_2' + qy_2 = 0$. Покажемо, що $y'' + py' + qy = 0$, якщо $y = C_1 y_1 + C_2 y_2$:

$$(y = C_1 y_1 + C_2 y_2 \Rightarrow y' = C_1 y_1' + C_2 y_2' \Rightarrow y'' = C_1 y_1'' + C_2 y_2'') \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (C_1 y_1'' + C_2 y_2'') + p(C_1 y_1' + C_2 y_2') + q(C_1 y_1 + C_2 y_2) =$$

$$= C_1(\underbrace{y_1'' + py_1' + qy_1}_{(=0)}) + C_2(\underbrace{y_2'' + py_2' + qy}_{(=0)}) = 0\,. \blacksquare \qquad (18.2.2)$$

(*Які властивості* похідної використані при доведенні теореми?)

Теорема 18.2.2 (*про структуру загального розв'язку ОЛДР-2*). Якщо частинні розв'язки рівняння y_1, y_2 лінійно незалежні, то їхня лінійна комбінація

$$y = C_1 y_1 + C_2 y_2 \qquad (18.2.3)$$

є загальним розв'язком рівняння.

Д о в е д е н н я зводиться до перевірки умов, які повинен задовольняти, за означенням, загальний розв'язок ДР-2 (див. (17.1.5)).

1. Лінійна комбінація $y = C_1 y_1 + C_2 y_2$ задовольняє рівняння при будь-яких дійсних значеннях параметрів C_1, C_2 (див. (18.2.2)).

2. Покажемо, що за будь-якими заданими початковими умовами: $y_0 = y(x_0)$, $y'(x_0) = y_0'$, можна знайти значення C_1^0, C_2^0 із $\mathbf{R}$, при яких функція $y = C_1 y_1 + C_2 y_2$ задовольнятиме початкові умови.

Нехай у точці $x_0 \in (a, b)$ для функцій $y_i = y_i(x)$, $i = 1, 2$, маємо:

$$y_1(x_0) = y_{01},\ y_1'(x_0) = y_{01}'; \qquad y_2(x_0) = y_{02},\ y_2'(x_0) = y_{02}'.$$

Складемо згідно з початковими умовами систему лінійних рівнянь відносно C_1, C_2:

$$\begin{cases} y = C_1 y_1 + C_2 y_2, \\ y' = C_1 y_1' + C_2 y_2' \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_1 y_{01} + C_2 y_{02} = y_0, \\ C_1 y_{01}' + C_2 y_{02}' = y_0'. \end{cases}$$

Її визначником є вронскіан $W(x_0)$ лінійно незалежної на (a, b) системи функцій $\{y_1, y_2\}$ у точці x_0. Покажемо, що він відмінний від нуля.

Проведемо доказ від протилежного.

Припустимо, що

$$W(x_0)=\begin{vmatrix} y_{01} & y_{02} \\ y'_{01} & y'_{02} \end{vmatrix}=0,$$

і розглянемо його як визначник однорідної СЛАР:

$$\begin{cases} C_1 y_{01}+C_2 y_{02}=0, \\ C_1 y'_{01}+C_2 y'_{02}=0. \end{cases} \qquad (18.2.4)$$

Система (18.2.4) сумісна і невизначена. Дійсно, з одного боку систему задовольняє тривіальний розв'язок $y_{\text{т}}(x)=C_1\cdot 0+C_2\cdot 0\equiv 0$ з початковими умовами $y_{\text{т}}(x_0)=0$, $y'_{\text{т}}(x_0)=0$; з другого – функція $y=y(x)=$ $=C_1y_1+C_2y_2$ з тими ж початковими умовами: $y(x_0)=0$, $y'(x_0)=0$. Але за умовою теореми y_1, y_2 лінійно незалежні частинні розв'язки (18.2.1), тому жоден із них не тривіальний. Виходить, що через точку $(x_0,0)$ проходить дві інтегральні криві, а це суперечить теоремі 17.1.1 (*теорема Коші існування і єдиності розв'язку ДР-*n).

Отже, $W(x_0)\neq 0$. За правилом Крамера система рівнянь відносно параметрів C_1, C_2 має єдиний розв'язок: C_1^0, C_2^0. ■

Система $\{y_1(x),y_2(x)\}$ двох лінійно незалежних на (a,b) розв'язків називається **фундаментальною системою розв'язків** (**ФСР**) ОЛДР-2.

У світлі цього означення можна зробити ***висновок:*** *для відшукання загального розв'язку рівняння (18.2.1) достатньо знати ФСР* (звідки і назва – фундаментальна (ґрунтовна) система розв'язків).

II. Розв'язання ОЛДР-2. Відміною таких рівнянь від уже вивчених є те, що вони *припускають* розв'язання без залучення невизначеного інтегрування. Дійсно, якщо шукати частинний розв'язок у вигляді показникової функції $y=e^{kx}$, де k – числовий параметр (стала), то отримуємо:

$(y=e^{kx} \Rightarrow y'=ke^{kx} \Rightarrow y''=k^2e^{kx}) \Rightarrow$ | підставляємо вирази для y, y', y'' у ліву частину рівняння | $\Rightarrow e^{kx}(k^2+pk+q)=0 \Rightarrow |e^{kx}\neq 0| \Rightarrow$

$$\Rightarrow \quad k^2+pk+q=0. \qquad (18.2.5)$$

Квадратне рівняння (18.2.5) відносно параметра k називають **характеристичним рівнянням ОЛДР-2**.

Висновок: *відшукання частинного розв'язку диференціального рівняння зводиться до розв'язання характеристичного рівняння.*

Правило: щоб записати (скласти) характеристичне рівняння треба у диференціальному рівнянні формально замінити y на k, а порядок похідної – показником степеня з основою k:

$$y'' + py' + qy = 0 \quad \Rightarrow \quad \left| \begin{matrix} y'' \leftrightarrow k^2, \; y' \leftrightarrow k, \\ y^{(0)} \leftrightarrow k^0 = 1 \end{matrix} \right| \quad \Rightarrow \quad k^2 + pk + q = 0. \qquad (18.2.6)$$

Приклади:

1) $y'' + 2y' + y = 0 \quad \Rightarrow \quad k^2 + 2k + 1 = 0$;

2) $y'' = 0 \quad \Rightarrow \quad k^2 = 0$;

3) $y'' - 3y' = 0 \quad \Rightarrow \quad k^2 - 3k = 0$;

4) $y'' + 5y = 0 \quad \Rightarrow \quad k^2 + 5 = 0$.

Задача 18.2.1. Знайти частинні розв'язки рівняння $y'' + py' + qy = 0$ залежно від дискримінанта характеристичного рівняння $k^2 + pk + q = 0$.

Розв'язання. Корені характеристичного рівняння як зведеного квадратного рівняння обчислюються за формулою:

$$k_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{D}, \qquad (18.2.7)$$

де $D = p^2 \big/ 4 - q$ – дискримінант квадратного рівняння.

Розглянемо можливі випадки розв'язків (18.2.7) і наведемо відповідні частинні розв'язки диференціального рівняння.

1⁰. $\boldsymbol{D > 0} \quad \Rightarrow$ корені дійсні і різні ($k_1 \neq k_2$): $y_1 = e^{k_1 x}$, $y_2 = e^{k_2 x}$ є *лінійно незалежними* розв'язками, адже $\dfrac{y_1}{y_2} = \dfrac{e^{k_1 x}}{e^{k_2 x}} = e^{(k_1 - k_2)x} \neq const$.

2⁰. $\boldsymbol{D=0}$ $\Rightarrow$ один двократний корінь ($k_1=k_2=k$), або корені дійсні і рівні: $y_1=y_2=e^{kx}$ є *лінійно залежними* розв'язками, оскільки $\dfrac{y_1}{y_2}=\dfrac{e^{kx}}{e^{kx}}=1-const$.

3⁰. $\boldsymbol{D<0}$ $\Rightarrow$ корені комплексні (взаємно спряжені): $k_{1,2}=a\pm bi$, де $a=-p/2$, $b=-D=q-p^2/4>0$, бо $k_{1,2}=-p/2\pm\sqrt{-D}\cdot i$, а $i=\sqrt{-1}$ – уявна одиниця; функції $y_1=e^{(a+bi)x}$, $y_2=e^{(a-bi)x}$ *лінійно незалежні*:

$$\frac{y_1}{y_2}=\frac{e^{(a+bi)x}}{e^{(a-bi)x}}=e^{2bix}\neq const.$$

Задача 18.2.2. Знайти загальний розв'язок ОЛДР-2 $y''+py'+qy=0$, якщо у характеристичного рівняння: 1) $D>0$; 2) $D=0$; 3) $D<0$.

Розв'язання ґрунтується теоремі 18.2.2 (*про структуру загального розв'язку*), яка потребує два лінійно незалежні частинні розв'язки, і результатах розв'язання задачі 18.2.1.

1. Якщо $\boldsymbol{D>0}$, то y_1, y_2 лінійно незалежні, і тоді

$$y=C_1y_1+C_2y_2 \;\Rightarrow\; \boldsymbol{y=C_1e^{k_1x}+C_2e^{k_2x}}. \tag{18.2.8}$$

2. Якщо $\boldsymbol{D=0}$, то по суті ми маємо тільки один частинний розв'язок $y_1=e^{kx}$, де $k=-p/2$. Спробуємо шукати другий частинний розв'язок $y_2=y_2(x)$ у вигляді $y_2=u(x)y_1(x)$, де $u=u(x)$ – допоміжна, поки що невідома, функція. Її вигляд установимо за умови, що $y_2=u\cdot y_1$ є розв'язком заданого рівняння.

Знайдемо вирази для y_2', y_2'':

$$y_2=u\cdot e^{kx} \;\Rightarrow\; y_2'=u'\cdot e^{kx}+kue^{kx}=e^{kx}(u'+ku),$$

аналогічно (*проведіть* детальний виклад) отримаємо:

$$y_2''=e^{kx}(u''+2ku'+k^2u),$$

і підставимо їх у рівняння $y_2''+py_2'+qy_2=0$:

$$e^{kx}(u'' + 2ku' + k^2 u + pu' + pku + qu) =$$
$$= e^{kx}\left[u'' + \underbrace{(2k + p)}_{(=0)}u' + u\underbrace{(k^2 + pk + q)}_{(=0)}\right] = 0.$$

Вираз у перших (других) круглих дужках дорівнює нулю, оскільки $k = -p/2$ ($D = 0$). Таким чином, відносно допоміжної функції отримуємо рівняння $e^{kx}u'' = 0$, або $u'' = 0$.

Двократним невизначеним інтегруванням знаходимо:

$$u' = \int 0dx = A \quad \Rightarrow \quad u = \int Adx + B \quad \Rightarrow \quad u = Ax + B,$$

де A, B – довільні сталі.

Покладаємо: $A = 1$, $B = 0$, тобто вибираємо найпростішу лінійну функцію: $u = u(x) = x$. Отже, $y_2 = u(x)y_1(x) = xe^{kx}$, де $k = -p/2$.

Остаточно: якщо $D = 0$, то $y_1 = e^{kx}$, $y_2 = xe^{kx}$ лінійно незалежні функції, і тоді:

$$y = C_1y_1 + C_2y_2 = C_1e^{kx} + C_2xe^{kx} \;\Rightarrow\; \boldsymbol{y = e^{kx}(C_1 + C_2x)}. \qquad (18.2.9)$$

3. Якщо $\boldsymbol{D < 0}$, то, як було показано, функції $y_1 = e^{(a+bi)x}$, $y_2 = e^{(a-bi)x}$ лінійно незалежні, і тоді:

$$y = C_1y_1 + C_2y_2 \quad \Rightarrow \quad y = C_1e^{(a+bi)x} + C_2e^{(a-bi)x}$$

– загальний розв'язок. (Звичайно на практиці цією формулою не користуються.)

Залучаючи формулу Ейлера (див. (5.1.15), Ч. 1) $e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi$ при $\varphi = \pm bx$, отримуємо:

$$\left[\begin{array}{l} y_1 = e^{(a+bi)x} = e^{ax}e^{bix}, \\ y_2 = e^{(a-bi)x} = e^{ax}e^{-bix} \end{array}\right. \quad \Rightarrow \quad \left[\begin{array}{l} y_1 = e^{ax}(\cos bx + i\sin bx), \\ y_2 = e^{ax}(\cos bx - i\sin bx). \end{array}\right.$$

Із y_1 і y_2 складаємо дві лінійні комбінації, які дають два лінійно незалежні частинні розв'язки $\bar{y}_1$, $\bar{y}_2$, що не містять уявної одиниці:

$$\left[\begin{array}{l}\bar{y}_1 = \dfrac{1}{2}y_1 + \dfrac{1}{2}y_2 = e^{ax}\cos bx, \\ \bar{y}_2 = \dfrac{1}{2i}y_1 - \dfrac{1}{2i}y_2 = e^{ax}\sin bx.\end{array}\right.$$

Записуємо відповідний загальний розв'язок:

$$y = C_1\bar{y}_1 + C_2\bar{y}_2 \;\Rightarrow\; \boldsymbol{y = e^{ax}(C_1\cos bx + C_2\sin bx)}. \qquad (18.2.10)$$

(*Як виглядатиме* загальний розв'язок, якщо k_1 і k_2 уявні числа?)

Наведемо ***загальний порядок*** розв'язання ОЛДР-2:
1) *складаємо* характеристичне рівняння і *розв'язуємо* його;
2) *виписуємо* ФСР і загальний розв'язок як їхню лінійну комбінацію;
3) *розв'язуємо* задачу Коші, якщо задано початкові умови.

Приклади на відшукання загального розв'язку і розв'язку задачі Коші:

А. $y'' - 3y' - 10y = 0$; $y(0) = 1,\; y'(0) = 5$.

1) $k^2 - 3k - 10 = 0 \;\Rightarrow\; k_{1,2} = \dfrac{3}{2} \pm \sqrt{\dfrac{9}{4} + 10} = \dfrac{3}{2} \pm \dfrac{7}{2} \;\Rightarrow\; \left[\begin{array}{l} k_1 = 5, \\ k_2 = -2 \end{array}\right.$

(корені характеристичного рівняння можна (і бажано) знаходити за теоремою Вієта або за формулою коренів загального, а не зведеного, квадратного рівняння);

2) $(y_1 = e^{5x},\; y_2 = e^{-2x}) \;\Rightarrow\; y = C_1e^{5x} + C_2e^{-2x}$;

3) $\begin{cases} y = C_1e^{5x} + C_2e^{-2x}, \\ y' = 5C_1e^{5x} - 2C_2e^{-2x} \end{cases} \Rightarrow \left|\begin{array}{l} y(0) = 1 \\ y'(0) = 5 \end{array}\right| \Rightarrow \begin{cases} C_1 + C_2 = 1, \\ 5C_1 - 2C_2 = 5 \end{cases} \Rightarrow$

$\Rightarrow (C_1 = 1,\; C_2 = 0) \;\Rightarrow\; y = e^{5x}$ – розв'язок задачі Коші. ●

Б. $y'' + 4y' = 0$.

1) $k^2 + 4k = 0 \;\Rightarrow\; k(k+4) = 0 \;\Rightarrow (k_1 = 0,\; k_2 = -4)$

(неповні квадратні рівняння звичайно розв'язуються без застосування формули його коренів);

2) $(y_1 = e^{0x} = 1,\; y_2 = e^{-4x}) \;\Rightarrow\; y = C_1 + C_2e^{-4x}$. ●

В. $y'' + 4y = 0$.

1) $k^2 + 4 = 0 \Rightarrow k^2 = -4 \Rightarrow k_{1,2} = \pm\sqrt{-4} = \pm 2i \Rightarrow (a = 0,\ b = 2)$

(якщо корені комплексні: $k_{1,2} = a \pm bi$, то обов'язково виписуємо їх дійсну частину a і модуль уявної b);

2) $(y_1 = \cos 2x,\ \ y_2 = \sin 2x) \Rightarrow y = C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x$. ●

Г. $y'' - 6y' + 9y = 0$; $y(1) = 0,\ y'(1) = e^3$.

1) $k^2 - 6k + 9 = 0 \Rightarrow (k-3)^2 = 0 \Rightarrow k_1 = k_2 = 3$;

2) $(y_1 = e^{3x},\ \ y_2 = xe^{3x}) \Rightarrow y = e^{3x}(C_1 + C_2 x)$;

3) $\begin{cases} y = e^{3x}(C_1 + C_2 x), \\ y' = e^{3x}(3C_1 + 3C_2 x + C_2) \end{cases} \Rightarrow \left| \begin{array}{c} y(1) = 0 \\ y'(1) = e^3 \end{array} \right| \Rightarrow \begin{cases} C_1 + C_2 = 0, \\ 3C_1 + 4C_2 = 1 \end{cases} \Rightarrow$

$\Rightarrow (C_1 = -1,\ C_2 = 1) \Rightarrow y = e^{3x}(x - 1)$ – розв'язок задачі Коші. ●

Як підсумок наведемо загальні розв'язки ОЛДР-2 (табл. 18.2.1) для можливих випадків стосовно коренів характеристичного рівняння.

Таблиця 18.2.1

Загальні розв'язки однорідних ЛДР-2

№ п/п	Ознаки коренів характеристичного рівняння	Фундаментальна система розв'язків	Вигляд загального розв'язку
1	дійсні і різні: $k_1 \neq k_2\ \ (k_{1,2} \in \mathbf{R})$	$\{e^{k_1 x},\ e^{k_2 x}\}$	$y = C_1 e^{k_1 x} + C_2 e^{k_2 x}$
2	кратні: $k_1 = k_2 = k$	$\{e^{kx},\ xe^{kx}\}$	$y = e^{kx}(C_1 + C_2 x)$
3	комплексні: $k_{1,2} = a \pm bi$	$\{e^{ax}\cos bx,\ e^{ax}\sin bx\}$	$y = e^{ax}(C_1 \cos bx + C_2 \sin bx)$

Зауваження. На таких самих принципових засадах, як і розглянуте, побудована загальна теорія ОЛДР-n для $n > 2$; у плані розв'язання диференціальних рівнянь високих порядків утруднення викликає точне розв'язання характеристичних рівнянь високих степенів, тому, як правило, їхні корені знаходять наближено (чисельними методами).

Неоднорідні лінійні диференціальні рівняння другого порядку зі сталими коефіцієнтами (НЛДР-2)

І. Означення, структура загального розв'язку. Диференціальне рівняння $F(x, y, y', y'') = 0$, лінійно залежне від невідомої функції $y = y(x)$ і її похідних y', y'':

$$y'' + py' + qy = f(x), \tag{18.2.11}$$

де p і q – сталі величини, $f(x)$ – відома функція, називається **неоднорідним лінійним диференціальним рівнянням другого порядку зі сталими коефіцієнтами**.

НЛДР-2 є окремим випадком рівняння (18.1.2) за умови, що $n = 2$: $y'' + p_1(x)y' + p_2(x)y = f(x)$, і $p_1(x) = p$, $p_2(x) = q$ – сталі. До таких рівнянь також часто приводять задачі економічної динаміки й інших наук.

Якщо права частина $f(x)$ неперервна на деякому інтервалі (a, b), то неоднорідне рівняння, як і однорідне, задовольняє умови теореми 17.1.1 (*теорема Коші існування і єдиності розв'язку ДР-*n).

Однорідне рівняння $y'' + py' + qy = 0$, отримане із неоднорідного за умови, що $f(x) \equiv 0$, називається **відповідним** рівнянню (18.2.11).

Теорема 18.2.3 (*про структуру загального розв'язку НЛДР-2*). Загальний розв'язок $y = y(x)$ неоднорідного рівняння (18.2.11) є сумою загального розв'язку відповідного однорідного рівняння ($\bar{y}$) і будь-якого його частинного розв'язку ($\tilde{y}$):

$$y = \bar{y} + \tilde{y}.$$

Д о в е д е н н я зводиться до перевірки умов, які повинен задовольняти, за означенням, загальний розв'язок ДР-2 (див. (17.1.5)).

З урахуванням теореми 18.2.2 (*про структуру загального розв'язку ОЛДР-2*) загальний розв'язок неоднорідного рівняння зображується так:

$$y = \underbrace{C_1 y_1 + C_2 y_2}_{\bar{y}} + \tilde{y}, \tag{18.2.12}$$

де C_1, C_2 – довільні сталі;

$y_1 = y_1(x)$, $y_2 = y_2(x)$ – лінійно незалежні частинні розв'язки.

1. Функція $y = \bar{y} + \tilde{y}$ задовольняє рівняння при будь-яких дійсних значеннях параметрів C_1, C_2 (стосовно $\bar{y}$ див. (18.2.2)):

$$(y = \bar{y} + \tilde{y} \quad \Rightarrow \quad y' = \bar{y}' + \tilde{y}' \quad \Rightarrow \quad y'' = \bar{y}'' + \tilde{y}'') \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad y'' + py' + qy = (\bar{y}'' + \tilde{y}'') + p(\bar{y}' + \tilde{y}') + q(\bar{y} + \tilde{y}) =$$

$$\Rightarrow \quad \underbrace{(\bar{y}'' + p\bar{y}' + q\bar{y})}_{(=0)} + \underbrace{(\tilde{y}'' + p\tilde{y}' + q\tilde{y})}_{(=f(x))} = f(x).$$

Вираз у перших круглих дужках є нулем, оскільки $\bar{y}$ як загальний розв'язок відповідного однорідного рівняння: $\bar{y} = C_1 y_1 + C_2 y_2$, задовольняє його при будь-яких дійсних значеннях параметрів C_1, C_2. Вираз у других круглих дужках дорівнює $f(x)$, оскільки $\tilde{y}$ – розв'язок неоднорідного рівняння.

2. Покажемо, що які б не були задані початкові умови: $y_0 = y(x_0)$, $y'(x_0) = y'_0$, можна знайти такі значення C_1^0, C_2^0 із $\mathbf{R}$, що функція $y = C_1 y_1 + C_2 y_2 + \tilde{y}$ їх задовольняє.

Складемо з урахуванням початкових умов систему двох лінійних алгебраїчних рівнянь відносно C_1, C_2:

$$\begin{cases} y = C_1 y_1 + C_2 y_2 + \tilde{y}, \\ y' = C_1 y'_1 + C_2 y'_2 + \tilde{y}' \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y_1(x_0)C_1 + y_2(x_0)C_2 = \tilde{y}(x_0) - y_0, \\ y'_1(x_0)C_1 + y'_2(x_0)C_2 = \tilde{y}'(x_0) - y'_0. \end{cases}$$

Її визначником, як і в теоремі 18.2.2 (*про структуру загального розв'язку ОЛДР-2*) є вронскіан, який за умови лінійної незалежності функцій $y_1(x)$, $y_2(x)$ відмінний від нуля:

$$W(x_0) = \begin{vmatrix} y_1(x_0) & y_2(x_0) \\ y'_1(x_0) & y'_2(x_0) \end{vmatrix} \neq 0.$$

Отже, існує єдиний розв'язок: $(C_1, C_2) = (C_1^0, C_2^0)$, алгебраїчної системи рівнянь, який визначає розв'язок задачі Коші:

$$y = C_1^0 y_1 + C_2^0 y_2 + \tilde{y}. \blacksquare$$

Загальний порядок розв’язання НЛДР-2 такий:

1) *знаходять* загальний розв’язок відповідного однорідного рівняння;

2) *відшукують* деякий частинний розв’язок неоднорідного рівняння;

3) *записують* загальний розв’язок;

4) *розв’язують* задачу Коші, якщо задані початкові умови.

II. Відшукання частинного розв’язку неоднорідного рівняння можна здійснити **методом Лагранжа** (методом варіації довільних сталих). Суть його полягає у такому (*зіставте* з однойменним методом для ЛДР-1).

Нехай знайдено загальний розв’язок відповідного однорідного рівняння $y'' + py' + qy = 0$, а саме: $\bar{y} = C_1 y_1 + C_2 y_2$.

Частинний розв’язок неоднорідного рівняння $\tilde{y}$ будемо відшукувати у такому ж вигляді, але при цьому C_1, C_2 розглядати не як сталі, а як функції від x: $\tilde{y} = C_1(x) y_1 + C_2(x) y_2$.

Здиференціюємо $\tilde{y}$:

$$\tilde{y}' = C_1' y_1 + C_1 y_1' + C_2' y_2 + C_2 y_2' = (C_1' y_1 + C_2' y_2) + (C_1 y_1' + C_2 y_2').$$

Здійснимо вибір функцій $C_1(x)$, $C_2(x)$ так, щоб вираз у перших круглих дужках дорівнював нулю (на розглядуваному інтервалі (a, b)):

$$C_1' y_1 + C_2' y_2 = 0. \qquad (18.2.13)$$

Тоді

$$\tilde{y}' = C_1 y_1' + C_2 y_2' \;\Rightarrow\; \tilde{y}'' = C_1' y_1' + C_1 y_1'' + C_2' y_2' + C_2 y_2''. \qquad (18.2.14)$$

Підставляючи у вихідне рівняння $\bar{y}$, $\bar{y}'$, $\bar{y}''$, приходимо до умови (*переконайтеся*):

$$C_1' y_1' + C_2' y_2' = f(x). \qquad (18.2.15)$$

Отже, $\tilde{y} = C_1(x) y_1 + C_2(x) y_2$ буде розв’язком неоднорідного рівняння (18.2.11), якщо функції $C_1(x)$, $C_2(x)$ задовольнятимуть умови (18.2.13), (18.2.15):

$$\begin{cases} C_1' y_1 + C_2' y_2 = 0, \\ C_1' y_1' + C_2' y_2' = f(x). \end{cases} \tag{18.2.16}$$

Ця система відносно функцій $C_1'(x)$, $C_2'(x)$ має єдиний розв'язок, бо визначник $W[y_1, y_2] = y_1 y_2' - y_1' y_2 \neq 0$, оскільки функції $y_1(x)$, $y_2(x)$ лінійно незалежні.

Розв'язавши систему (18.2.16), отримують $C_1'(x)$, $C_2'(x)$, а потім інтегруванням відновлюють $C_1(x)$, $C_2(x)$, і записують шуканий розв'язок:

$$\tilde{y} = C_1(x) y_1 + C_2(x) y_2 .$$

Приклад. Знайти частинний розв'язок рівняння $y'' + y = x$.

Знаходимо загальний розв'язок відповідного однорідного рівняння:

$$y'' + y = 0 \;\Rightarrow\; \left| k^2 + 1 = 0 \;\Rightarrow\; k_{1,2} = \pm i \right| \;\Rightarrow\; \bar{y} = C_1 \cos x + C_2 \sin x .$$

Покладаємо: $C_1 = C_1(x)$, $C_2 = C_2(x)$, *складаємо* систему рівнянь (18.2.16) і *розв'язуємо* її:

$$\begin{cases} C_1' y_1 + C_2' y_2 = 0, \\ C_1' y_1' + C_2' y_2' = x \end{cases} \;\Rightarrow\; \left| \begin{matrix} y_1 = \cos x \\ y_2 = \sin x \end{matrix} \right| \;\Rightarrow\; \Delta = \begin{vmatrix} \cos x & \sin x \\ -\sin x & \cos x \end{vmatrix} = 1 \;\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(\Delta_1 = \begin{vmatrix} 0 & \sin x \\ x & \cos x \end{vmatrix} = -x \sin x, \;\; \Delta_2 = \begin{vmatrix} \cos x & 0 \\ -\sin x & x \end{vmatrix} = x \cos x \right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{l} C_1' = \Delta_1/\Delta = -x \sin x, \\ C_2' = \Delta_2/\Delta = x \cos x \end{array} \right. \;\Rightarrow\; \left[\begin{array}{l} C_1 = -\int x \sin x \, dx = x \cos x - \sin x, \\ C_2 = \int x \cos x \, dx = x \sin x + \cos x \end{array} \right.$$

(інтегрували частинами і взяли найпростіші первісні).

Записуємо частинний розв'язок:

$$\tilde{y} = C_1(x) \cos x + C_2(x) \sin x =$$
$$= (x \cos x - \sin x) \cos x + (x \sin x + \cos x) \sin x \;\Rightarrow\; \underline{\tilde{y} = x} .$$

Загальний розв'язок неоднорідного рівняння такий:

$$y = \bar{y} + \tilde{y} = C_1 \cos x + C_2 \sin x + x . \; \bullet$$

Зауваження. Як бачимо, права частина рівняння не складна: $f(x)=x,$ а роботи з відшукання $\tilde{y}$ було багато. Існує клас функцій $f(x)$, для представників із якого установлення частинного розв'язку можна здійснити простіше, не удаючись до інтегрування, а саме:

$$f(x)=e^{\alpha x}(P_n(x)\cos\beta x+Q_m(x)\sin\beta x), \tag{18.2.17}$$

де α, β – числові параметри (сталі величини);

$P_n(x)$, $Q_m(x)$ – многочлени степеня n, m відповідно.

Функції вигляду (18.2.17), які є добутком показникової функції з сумою добутків многочленів із тригонометричними функціями – косинусом і синусом, – називають **квазімногочленами** (*квазі* від лат. *quasi* – немовби, наче, майже). У окремих випадках многочлени $P_n(x)$, $Q_m(x)$ можуть бути виродженими в одночлени або просто константами.

ІІІ. Відшукання частинного розв'язку неоднорідного рівняння зі спеціальною правою частиною – квазімногочленом.

Теорема 18.2.4 (*про частинний розв'язок НЛДР-2*). Частинний розв'язок рівняння $y''+py'+qy=f(x)$ зі спеціальною правою частиною:

$$f(x)=e^{\alpha x}(P_n(x)\cos\beta x+Q_m(x)\sin\beta x),$$

можна знайти у вигляді:

$$\tilde{y}=x^r e^{\alpha x}(M_s(x)\cos\beta x+N_s(x)\sin\beta x), \tag{18.2.18}$$

де $M_s(x)$, $N_s(x)$ – многочлени степеня $s=\max\{n,m\}$;

r – кратність числа $\alpha+\beta i$ як кореня характеристичного рівняння, тобто

$$r=\begin{cases}0, \text{ якщо } \alpha+\beta i\neq k_1 \text{ і } \alpha+\beta i\neq k_2;\\ 1, \text{ якщо } \alpha+\beta i=k_1 \text{ або } \alpha+\beta i=k;\\ 2, \text{ якщо } \alpha+\beta i=k_1=k_2=k.\end{cases}$$

Д о в е д е н н я теореми у загальному випадку громіздке, хоча і неважке, тому покажемо її справедливість за умови, що $\beta=0$, тобто коли $f(x)=e^{\alpha x}P_n(x)$.

1-й випадок: $\boldsymbol{r=0}$, тобто α не є коренем характеристичного рівняння. Покажемо, що $\tilde{y}$ може бути знайдене у вигляді:

$$\boldsymbol{\tilde{y}=e^{\alpha x}M_n(x)}.$$

Для цього *знайдемо* $\tilde{y}'$, $\tilde{y}''$:

$$\tilde{y}=e^{\alpha x}M_n(x) \quad \Rightarrow \quad \tilde{y}'=e^{\alpha x}\left(M_n'(x)+\alpha M_n(x)\right) \quad \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \quad \tilde{y}''=e^{\alpha x}(M_n''(x)+2\alpha M_n'(x)+\alpha^2 M_n(x)),$$

підставимо $\tilde{y}$, $\tilde{y}'$, $\tilde{y}''$ у рівняння $y''+py'+qy=e^{\alpha x}P_n(x)$, поділимо ліву і праву частини на $e^{\alpha x}$ і *згрупуємо* члени відносно похідних $M_n(x)$:

$$M_n''(x)+(2\alpha+p)M_n'(x)+(\alpha^2+p\alpha+q)M_n(x)=P_n(x). \qquad (18.2.19)$$

Ліва і права частини рівності є многочленами n-го степеня. Коефіцієнти многочлена $M_n(x)$ знайдемо відомим **методом невизначених коефіцієнтів**: прирівнюємо коефіцієнти многочленів лівої і правої частин при однакових степенях x, що дає систему $(n+1)$-го рівняння з $(n+1)$ невідомим відносно коефіцієнтів многочлена $M_n(x)$.

2-й випадок: $\boldsymbol{r=1}$, тобто α – однократний корінь характеристичного рівняння. У цьому випадку в лівій частині (18.2.19) многочлен $(n-1)$-го степеня, оскільки $\alpha^2+p\alpha+q=0$, тому тотожної рівності його з $P_n(x)$ не може бути. Отже, у частинному розв'язку треба брати многочлен не n-го степеня, а $(n+1)$-го, до того ж без вільного члена, бо він все рівно зникає при диференціюванні; тобто розв'язок треба брати у вигляді:

$$\boldsymbol{\tilde{y}=xe^{\alpha x}M_n(x)}.$$

3-й випадок: $\boldsymbol{r=2}$, тобто α – двократний корінь характеристичного рівняння. Розмірковуючи, як і в попередньому випадку, приходимо до висновку, що вираз для $\tilde{y}$ повинен містити многочлен $(n+2)$-го степеня (*обґрунтуйте*), причому вільний член і член 1-го степеня можна не включати:

$$\boldsymbol{\tilde{y}=x^2e^{\alpha x}M_n(x)}. \ \blacksquare$$

Зауваження. Звичайно многочлени $M_n(x)$ беруть у вигляді:

$$M_0(x) = A,$$
$$M_1(x) = Ax + B, \qquad (18.2.20)$$
$$M_2(x) = Ax^2 + Bx + C \text{ і т. д.}$$

Відшукання коефіцієнтів многочлена частинного розв'язку – кропітка робота, проте вона не виходить за межі елементарної алгебри.

Зведемо в таблицю (табл. 18.2.1) часткові випадки правої частини рівняння: $f(x)$, які часто зустрічаються на практиці, і вид розв'язків $\tilde{y}$.

Таблиця 18.2.1

Вигляд частинних розв'язків при деяких значеннях параметрів правої частини рівняння

Значення параметрів	Права частина $f(x)$	Вигляд частинного розв'язку $\tilde{y}$
$\alpha = \beta = 0$	$P_n(x)$	$x^r M_n(x)$
$\beta = 0$	$e^{\alpha x} P_n(x)$	$x^r e^{\alpha x} M_n(x)$
$\alpha = 0$	$P_n(x)\cos\beta x + Q_m(x)\sin\beta x$	$x^r (M_s(x)\cos\beta x + N_s(x)\sin\beta x)$
$n = m = 0$	$e^{\alpha x}(P_0 \cos\beta x + Q_0 \sin\beta x)$	$x^r e^{\alpha x}(M_0 \cos\beta x + N_0 \sin\beta x)$

Зверніть увагу, що за формою зображення частинні розв'язки відрізняються від правої частини рівняння тільки множником x^r.

Приклад. Розв'яжемо рівняння $y'' + y = x$ як рівняння зі спеціальною правою частиною $f(x) = x$, для якого частинний розв'язок уже знаходили методом Лагранжа.

1*. Знаходимо* загальний розв'язок $\bar{y}$ відповідного однорідного рівняння:

$$\bar{y} = C_1 \cos x + C_2 \sin x.$$

2. *Відшукуємо* частинний розв'язок неоднорідного рівняння $\tilde{y}$. (Відзначимо, що це потребує вміння аналізувати праву частину рівняння з метою правильного встановлення форми частинного розв'язку.)

Зіставляємо праву частину рівняння $f(x) = x$ із загальним виглядом спеціальної частини:

$$f(x) = e^{\alpha x}(P_n(x)\cos\beta x + Q_m(x)\sin\beta x),$$

і *виписуємо* значення параметрів α, β, n, m:

$\alpha = 0$, бо немає множника у вигляді показникової функції $e^{\alpha x}$;

$\beta = 0$, адже відсутні $\cos\beta x$, $\sin\beta x$;

$n = 1$, бо x – вироджений многочлен першого степеня; оскільки $\sin\beta x = 0$, то неважливо яким буде m і многочлен $Q_m(x)$; зазвичай покладають $m = 0$.

Таким чином:

$$(\alpha = 0,\ \beta = 0,\ n = 1) \ \Rightarrow \ \tilde{y} = x^r M_1(x) \quad \text{(див. табл. 18.2.1).}$$

Установлюємо значення показника r, для чого порівнюємо число $\alpha + \beta i = 0$ з коренями характеристичного рівняння $k_{1,2} = 0 \pm 1 \cdot i = \pm i$:

$$(\alpha + \beta i = 0 \neq k_{1,2} = \pm i) \ \Rightarrow \ r = 0.$$

Отже, частинний розв'язок має вигляд: $\tilde{y} = M_1(x) = Ax + B$; він, як і права частина рівняння, є многочленом 1-го степеня.

Знаходимо сталі A, B за умови, що $\tilde{y} = Ax + B$ – розв'язок заданого рівняння. Для цього визначаємо $\tilde{y}'$, $\tilde{y}''$ і підставляємо їх разом із $\tilde{y}$ у рівняння:

$$(\tilde{y} = Ax + B \ \Rightarrow \ \tilde{y}' = A \ \Rightarrow \ \tilde{y}'' = 0) \ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \ (y'' + y = x \ \Rightarrow \ Ax + B = x \ \Rightarrow \ \begin{cases} A = 1, \\ B = 0 \end{cases} \Rightarrow \ \tilde{y} = x).$$

На відміну від методу Лагранжа – обійшлися без інтегрування.

3. *Записуємо* загальний розв'язок:

$$y = \bar{y} + \tilde{y} \ \Rightarrow \ y = C_1\cos x + C_2\sin x + x. \ \bullet$$

Нехай права частина рівняння (18.2.11) є алгебраїчною сумою квазімногочленів: $f(x)= f_1(x)+ f_2(x)$, при різних значеннях параметрів α, β, n, m.

Теорема 18.2.5 (*принцип суперпозиції*) Якщо $\tilde{y}_1$, $\tilde{y}_2$ – частинні розв'язки рівнянь із правими частинами $f_1(x)$, $f_2(x)$ відповідно, то їх сума: $\tilde{y} = \tilde{y}_1 + \tilde{y}_2$, є частинним розв'язком вихідного НЛДР-2.

Д о в е д е н н я полягає в безпосередній перевірці слушності твердження. Підставивши у ліву частину рівняння $y'' + py' + qy = f(x)$ замість y функцію $\tilde{y}$, отримаємо праву частину рівняння:

$$\tilde{y}'' + p\tilde{y}' + q\tilde{y} = (\tilde{y}_1 + \tilde{y}_2)'' + p(\tilde{y}_1 + \tilde{y}_2)' + q(\tilde{y}_1 + \tilde{y}_2) =$$
$$= (\underbrace{\tilde{y}_1'' + p\tilde{y}_1' + q\tilde{y}_1}_{f_1(x)}) + (\underbrace{\tilde{y}_2'' + p\tilde{y}_2' + q\tilde{y}_2}_{f_2(x)}) = f_1(x) + f_2(x). \blacksquare$$

Наведений підхід до відшукання частинного розв'язку НЛДР-2 називають **принципом суперпозиції** (**накладання**).

Приклад. Знайти загальний розв'язок диференціального рівняння:

$$y'' + y' - 2y = xe^{-2x} - e^x(\sin x - \cos x).$$

Права частина рівняння є сумою двох квазімногочленів із різними числовими параметрами:

$$f_1(x) = xe^{-2x}, \quad f_2(x) = e^x(\cos x - \sin x),$$

тому доведеться розв'язувати фактично два рівняння з однаковими лівими і різними правими частинами:

А) $y'' + y' - 2y = f_1(x) = xe^{-2x}$;

Б) $y'' + y' - 2y = f_2(x) = e^x(\cos x - \sin x)$.

І. *Знаходимо* загальний розв'язок відповідного заданому однорідного рівняння:

$$k^2 + k - 2 = 0 \;\Rightarrow\; (k_1 = -2, k_2 = 1) \;\Rightarrow\; (y_1 = e^{-2x}, y_2 = e^x) \;\Rightarrow$$
$$\Rightarrow\; \bar{y} = C_1e^{-2x} + C_2e^x.$$

II. *Установлюємо* один із частинних розв'язків рівняння **А**, для чого, *зіставляючи* його праву частину $f_1(x)=xe^{-2x}$ із загальним виглядом квазімногочлена $f(x)=e^{\alpha x}(P_n(x)\cos\beta x+Q_m(x)\sin\beta x)$, *виписуємо* значення параметрів α, β, n, m, і *робимо* відповідні висновки:

$$\left[\begin{array}{l}(\alpha=-2,\ \beta=0)\Rightarrow(\alpha+\beta i=k_1=-2)\Rightarrow r=1;\\(n=1,m=0)\ \Rightarrow\ s=1\ \Rightarrow\ M_1(x)=Ax+B\end{array}\right.\quad\Rightarrow\quad\tilde{y}_1=xe^x(Ax+B).$$

Методом невизначених коефіцієнтів знаходимо сталі A, B.

Диференціюємо двічі $\tilde{y}_1(x)$:

$$\tilde{y}_1=e^x(Ax^2+Bx)\quad\Rightarrow\quad\tilde{y}_1'=e^x[Ax^2+(2A+B)x+B]\quad\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ \tilde{y}_1''=e^x\left[Ax^2+(4A+B)x+(2A+2B)\right].$$

Складаємо і розв'язуємо систему для визначення параметрів A, B:

$$\begin{array}{c|ccc}
 & \tilde{y}_1'' & \tilde{y}_1' & -2\tilde{y}_1\\
\hline
x^1 & 4A+B & 2A+B & -2B\\
x^0 & 2A+2B & B & 0
\end{array}\quad\Rightarrow\quad\begin{cases}6A=1,\\2A+3B=0\end{cases}\Rightarrow\ \left(A=\frac{1}{6};\ B=-\frac{1}{9}\right).$$

Таким чином, $\tilde{y}_1=e^x(x^2/6-x/9)$ – частинний розв'язок рівняння **А**.

III. *Установлюємо* аналогічним чином один із частинних розв'язків рівняння **Б** з правою частиною $f_2(x)=e^x(\cos x-\sin x)$.

Аналіз $f_2(x)$ дає:

$$\left[\begin{array}{l}(\alpha=\beta=1)\Rightarrow(\alpha+\beta i\neq k_{1,2})\Rightarrow r=0;\\(n=m=0)\Rightarrow s=0\Rightarrow(M_0=A,\ N_0=B)\end{array}\right.\quad\Rightarrow\ \tilde{y}_2=e^x(A\cos x+B\sin x).$$

Для похідних $\tilde{y}_2'$, $\tilde{y}_2''$ маємо:

$$\tilde{y}_2'=e^x[(A+B)\cos x+(B-A)\sin x],$$

$$\tilde{y}_2''=e^x(2B\cos x-2A\sin x).$$

Складаємо і розв'язуємо систему для визначення параметрів A, B:

$$\begin{array}{c|ccc} & \tilde{y}_2'' & \tilde{y}_2' & -2\tilde{y}_2 \\ \hline \cos x & 2B & A+B & -2A \\ \sin x & -2A & B-A & -2B \end{array} \Rightarrow \begin{cases} 3B-A=1, \\ -3A-B=-1 \end{cases} \Rightarrow (A=0{,}2;\ B=0{,}4).$$

Таким чином, $\tilde{y}_2 = 0{,}2e^x(\cos x + 2\sin x)$ – частинний розв'язок рівняння **Б**.

Записуємо загальний розв'язок заданого рівняння:

$$y = \bar{y} + \tilde{y}_1 + \tilde{y}_2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y = C_1e^{-2x} + C_2e^x + e^x(x^2/6 - x/9) + 0{,}2e^x(\cos x + 2\sin x). \bullet$$

(*Переконайтеся* в правильності отриманої відповіді.)

18.3. Лінійні диференціальні рівняння вищих порядків зі сталими коефіцієнтами (ЛДР-n): однорідні і неоднорідні

Теорія ЛДР-n $(n > 2)$ принципово нічим не відрізняється від викладеної теорії рівнянь другого порядку. Її положення є узагальненням розглянутих відомостей, глибоке засвоєння яких – запорука успішного опанування наведеного матеріалу. Його виклад ґрунтується на загальних засадах, висвітлених у п. 18.1.

Однорідні лінійні диференціальні рівняння n-го порядку зі сталими коефіцієнтами (ОЛДР-n)

I. Операторна форма завдання. Властивості розв'язків. Згідно з (18.1.1) ОЛДР-n є рівняння вигляду:

$$y^{(n)} + p_1y^{(n-1)} + \ldots + p_ny = 0, \qquad (18.3.1)$$

де $p_1, p_2, \ldots, p_n$ – сталі.

Для стислого символічного запису лівої частини рівняння залучимо поняття „лінійний оператор” (див. п. 4.4, ч. 1), але об'єктами перетворення будуть не вектори, а диференційовні n разів функції.

У математичному аналізі лінійним оператором є **диференціальний оператор** $\boldsymbol{D}$ (позначення Лагранжа) – оператор, який функції $y = f(x)$ – прообразу – ставить у відповідність її похідну $y' = f'(x)$ – образ:

$$\underset{\text{(прообраз)}}{f(x)} \xrightarrow{D} \underset{\text{(образ)}}{f'(x)}, \text{ тобто } Df(x) = f'(x).$$

Операторові D безумовно притаманні ***властивості***:

1) *адитивність* (похідна суми функцій дорівнює сумі їхніх похідних):

$$D(y_1 + y_2) = Dy_1 + Dy_2;$$

2) *однорідність* (сталий множник можна виносити за знак похідної):

$$D(Cy) = C \cdot Dy, \quad C - const.$$

Наведені властивості у сукупності можна записати так:

$$D(C_1 y_1 + C_2 y_2) = C_1 Dy_1 + C_2 Dy_2. \qquad (18.3.2)$$

Властивості оператора D узагальнюються на будь-яку скінченну кількість доданків. (*Наведіть* відповідні міркування.)

Ліва частина рівняння (18.3.1) теж є лінійним диференціальним оператором, який позначають через L:

$$Ly = y^{(n)} + p_1 y^{(n-1)} + \ldots + p_n y. \qquad (18.3.3)$$

Дійсно:

1) $L(y_1 + y_2) = (y_1 + y_2)^{(n)} + p_1 (y_1 + y_2)^{(n-1)} + \ldots + p_n (y_1 + y_2) = Ly_1 + Ly_2$;

2) $L(Cy) = (Cy)^{(n)} + p_1 (Cy)^{(n-1)} + \ldots + p_n (Cy) = CLy$.

Оператор L кожній функції y ставить у відповідність ліву частину рівняння (18.3.1), тому стисло воно зображується так:

$$Ly = 0. \qquad (18.3.4)$$

Подання ОЛДР-n (18.3.1) у вигляді: $Ly = 0$, називається його **операторною формою завдання**.

Наведемо узагальнені (на випадок $n>2$) властивості рівнянь, вивчених в п. 18.2. Нехай $y_1=y_1(x)$, $y_2=y_2(x)$ – розв'язки (18.3.4), тоді:

1) якщо y_1 – розв'язок (18.3.4), то і Cy_1 – її розв'язок ($C\in\mathbf{R}$):

$$Ly_1=0 \Rightarrow L(Cy_1)=0;$$

Пропонуємо наведені далі властивості сформулювати самостійно.

2) $Ly_1=0 \wedge Ly_2=0 \Rightarrow L(y_1+y_2)=0$;

3) $Ly_1=0 \wedge Ly_2=0 \Rightarrow L(C_1y_1+C_2y_2)=0$, $C_1,C_2\in\mathbf{R}$.

Теорема 18.3.1 (*про лінійну комбінацію частинних розв'язків*):

$$Ly_i=0,\ i=\overline{1,n} \quad\Rightarrow\quad L(\sum_{i=1}^{n}C_iy_i)=0, \tag{18.3.5}$$

де $y_i=y_i(x)$ – частинні розв'язки рівняння.

Теорема 18.3.2 (*про структуру загального розв'язку ОЛДР-n*):

$$\left\{y_i(x)\right\}\Big|_1^n \text{ – ФСР} \quad\Rightarrow\quad y=\sum_{i=1}^{n}C_iy_i \text{ – загальний розв'язок.} \tag{18.3.6}$$

Доведення теорем 18.3.1, 18.3.2 для довільного скінченного n достоту співпадають із доказами теорем 18.2.1, 18.2.2 для $n=2$, тому повторювати їх не будемо.

II. Розв'язання ОЛДР-n. Як і для рівнянь 2-го порядку, шукаємо за Ейлером частинний розв'язок у вигляді показникової функції $y=e^{kx}$, де k – числовий параметр (стала):

$$L(y)=L(e^{kx})=(k^n+p_1k^{n-1}+\ldots+p_{n-1}k+p_n)e^{kx}=0 \;\Rightarrow\; |\,e^{kx}\neq 0\,| \;\Rightarrow$$
$$\Rightarrow\quad k^n+p_1k^{n-1}+\ldots+p_{n-1}k+p_n=0. \tag{18.3.7}$$

Алгебраїчне рівняння n-го степеня (18.3.7) відносно параметра k називають **характеристичним рівнянням** ОЛДР-n.

Висновок: відшукання частинного розв'язку диференціального рівняння зводиться до розв'язання характеристичного рівняння (18.3.7).

***Правило*:** щоб записати (скласти) характеристичне рівняння треба у диференціальному рівнянні формально замінити $y^{(i)}$ $(i=\overline{0,n})$ на k^i.

Приклади:

1) $y''' - 3y = 0 \;\;\Rightarrow\;\; k^3 - 3 = 0$;

2) $y^{(4)} + y'' = 0 \;\Rightarrow\; k^4 + k^2 = 0$;

3) $y^{(10)} + 5y^{(5)} - 10y' = 0 \;\Rightarrow\; k^{10} + 5k^5 - 10k = 0$.

***Зауваження*.** На жаль не існує точних формул коренів для рівнянь вище четвертого порядку, для $n = 3, 4$ вони громіздкі. Наближені методи розв'язання вивчаються в навчальній дисципліні „Чисельні методи”.

Щоб знайти загальний розв'язок рівняння $Ly = 0$, треба мати в розпорядженні n частинних лінійно незалежних розв'язків – розв'язків, що утворюють ФСР: $\{y_i(x)\}\big|_1^n$. Вигляд (склад) ФСР залежить від того, які у характеристичного рівняння корені: дійсні чи комплексні, різні чи серед них є рівні між собою. У загальному випадку множина коренів характеристичного рівняння $\{k_1, k_2, ..., k_n\}$ може містити: прості (однократні) дійсні корені; кратні дійсні корені; комплексно-спряжені корені; кратні комплексно-спряжені корені.

1. *Корінь характеристичного рівняння дійсний і простий.*

Позначимо його через k_i, де $i \in \{1, 2, ..., n\}$. Такому кореню відповідає розв'язок $y_i = e^{k_i x}$. Якщо всі корені дійсні і прості, то відразу можна записати ФСР:

$$\{y_i(x)\}\big|_1^n = \{e^{k_1 x},\, e^{k_2 x}, ...,\, e^{k_n x}\}.$$

2. *Корінь характеристичного рівняння дійсний r-кратний.*

Нехай ним буде k_j, $1 \le j \le n - r + 1$, тобто

$$k_j = k_{j+1} = k_{j+2} = ... = k_{j+r-1}.$$

Такому кореню відповідає r лінійно незалежних розв'язків (за аналогією з випадком $D = 0$ для ОЛДР-2):

$$\{e^{k_j x}, xe^{k_{j+1} x}, ..., x^{r-1} e^{k_{j+r-1} x}\}.$$

3. *Характеристичне рівняння має пару комплексно-спряжених коренів:* $a \pm bi$.

Таким двом кореням відповідає два лінійно незалежних розв'язки (як і у випадку $D<0$ для ОЛДР-2, див. табл.18.2.1):

$$\{e^{ax}\cos bx,\ e^{ax}\sin bx\}.$$

4. *Характеристичне рівняння має пару комплексно-спряжених коренів кратності* $r \geq 2$.

Оскільки кожна пара породжує два лінійно незалежні розв'язки, то всього буде $2r$ однакових коренів. Доведено, що в цьому випадку добутки функцій $e^{ax}\cos bx$, $e^{ax}\sin bx$ зі степенями x, як і у разі кратних дійсних коренів, теж є лінійно незалежними розв'язками рівняння. Відповідні множини мають вигляд:

$$\{e^{ax}\cos bx,\ xe^{ax}\cos bx,\ ...,\ x^{r-1}e^{ax}\cos bx\};$$
$$\{e^{ax}\sin bx,\ xe^{ax}\sin bx,\ ...,\ x^{r-1}e^{ax}\sin bx\}.$$

Звичайно, загальна кількість лінійно незалежних розв'язків повинна дорівнювати n. У сукупності вони складатимуть ФСР, що дозволяє записати загальний розв'язок рівняння. Наведемо (табл. 18.2.2) підмножини ФСР, які відповідають різним за ознаками кореням характеристичного рівняння.

Таблиця 18.2.2

Множини лінійно незалежних розв'язків однорідних ЛДР-n

№ п/п	Ознаки коренів характеристичного рівняння	Відповідні множини лінійно незалежних розв'язків
1	всі корені дійсні і різні: $k_i \neq k_j$ при $i \neq j$	$\{e^{k_i x}\}_1^n = \{e^{k_1 x}, e^{k_2 x}, ..., e^{k_n x}\}$ – ФСР
2	дійсний корінь k_j має кратність r	$\{e^{k_j x}, xe^{k_j x}, ..., x^{r-1}e^{k_j x}\},\ 1 \leq j \leq n-r+1$
3	існує пара комплексних коренів: $a \pm bi$	$\{e^{ax}\cos bx,\ e^{ax}\sin bx\}$
4	існує пара комплексних коренів кратності r	$\{e^{ax}\cos bx,\ xe^{ax}\cos bx, ..., x^{r-1}e^{ax}\cos bx\} \cup$ $\cup \{e^{ax}\sin bx,\ xe^{ax}\sin bx, ..., x^{r-1}e^{ax}\sin bx\}$

Приклади. **А.** Розв'язати задачу Коші:

$$y''' - 2y'' - y' + 2y = 0; \quad y(0) = 2, \; y'(0) = 0, \; y''(0) = 2.$$

1. *Складаємо* характеристичне рівняння і *розв'язуємо* його:

$$k^3 - 2k^2 - k + 2 = 0 \;\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left| \text{розкладаємо ліву частину на множники методом групування} \right| \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \; (k^3 - k) - 2(k^2 - 1) = 0 \;\Rightarrow\; (k+1)(k-1)(k-2) = 0 \;\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \; (k_1 = -1, \; k_2 = 1, \; k_3 = 2).$$

2. *Виписуємо* ФСР і *подаємо* загальний розв'язок:

$$\left\{e^{-x}, \, e^x, \, e^{2x}\right\} \;\Rightarrow\; y = C_1 e^{-x} + C_2 e^x + C_3 e^{2x}.$$

3. *Складаємо* за даними початковими умовами систему рівнянь для знаходження значень довільних сталих і *розв'язуємо* її:

$$\begin{cases} y = C_1 e^{-x} + C_2 e^x + C_3 e^{2x}, \\ y' = -C_1 e^{-x} + C_2 e^x + 2C_3 e^{2x}, \\ y = C_1 e^{-x} + C_2 e^x + 4C_3 e^{2x} \end{cases} \Rightarrow \left| \begin{matrix} y(0) = 2 \\ y'(0) = 0 \\ y''(0) = 2 \end{matrix} \right| \Rightarrow \begin{cases} C_1 + C_2 + \;\; C_3 = 2, \\ -C_1 + C_2 + 2C_3 = 0, \\ C_1 + C_2 + 4C_3 = 2 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \; (C_1 = C_2 = 1, \; C_3 = 0).$$

Таким чином, $y = C_1 e^{-x} + C_2 e^x$ – розв'язок задачі Коші. ●

Зауваження. Якщо у характеристичного рівняння коефіцієнтами є цілі числа, то його цілі корені слід шукати серед дільників вільного члена (*переконайтеся* на розглянутому прикладі).

Б. Знайти розв'язок задачі Коші:

$$y^{\text{IV}} + 4y'' = 0; \quad y(0) = 2, \, y'(0) = 0, \, y''(0) = 3, \, y'''(0) = 8.$$

Діємо у послідовності, якої дотримувалися при розв'язанні попереднього прикладу (коментар *наведіть* самостійно).

1. $k^4 + 4k^2 = 0 \;\Rightarrow\; k^2(k^2 + 4) = 0 \;\Rightarrow\; (k_{1,2} = 0; \; k_{3,4} = 0 \mp 2i)$.

2. $\left\{y_1, y_2, y_3, y_4\right\} = \left\{e^{0x}, xe^{0x}, \cos 2x, \sin 2x\right\} = \left\{1, x, \cos 2x, \sin 2x\right\} \;\Rightarrow$

$\Rightarrow \; y = C_1 + C_2 x + C_3 \cos 2x + C_4 \sin 2x$ – загальний розв'язок.

3. $\begin{cases} y = C_1 + C_2 x + C_3\cos 2x + C_4\sin 2x, \\ y' = C_2 - 2C_3\sin 2x + 2C_4\cos 2x, \\ y'' = -4C_3\cos 2x - 4C_4\sin 2x, \\ y''' = 8C_3\sin 2x - 8C_4\cos 2x \end{cases} \Rightarrow \left| \begin{array}{l} y(0)=2 \\ y'(0)=0 \\ y''(0)=3 \\ y'''(0)=8 \end{array} \right| \Rightarrow$

$$\Rightarrow \begin{cases} C_1 + C_3 = 2, \\ C_2 + C_4 = 0, \\ C_1 + C_2 + 4C_3 = 3, \\ -8C_4 = 8 \end{cases} \Rightarrow (C_1 = 2, C_2 = 1, C_3 = 0, C_4 = -1).$$

Таким чином, $y = 2 + x - \sin 2x$ – розв'язок задачі Коші. ●

Неоднорідні лінійні диференціальні рівняння n-го порядку зі сталими коефіцієнтами (НЛДР-n)

I. Означення, структура загального розв'язку. Диференціальне рівняння $F(x, y, y', y'', ..., y^{(n)}) = 0$, $n > 2$, лінійно залежне від невідомої функції $y = y(x)$ та її похідних $y', y'', y^{(n)}$:

$$L(y) = y^{(n)} + p_1 y^{(n-1)} + ... + p_n y = f(x), \tag{18.3.8}$$

де $p_1, p_2, ..., p_n$ – сталі величини, $f(x)$ – відома функція, називається **неоднорідним лінійним диференціальним рівнянням n-го порядку зі сталими коефіцієнтами**.

Якщо права частина $f(x)$ неперервна на деякому інтервалі (a, b), то неоднорідне рівняння, як і однорідне, задовольняє умови теореми 17.1.1 (*теорема Коші існування і єдиності розв'язку ДР-n*).

Однорідне рівняння $L(y) = 0$, отримане із неоднорідного за умови, що $f(x) \equiv 0$, називається **відповідним** рівнянню (18.3.8).

Теорема 18.2.3 (*про структуру загального розв'язку НЛДР-2*) без змін узагальнюється на *НЛДР-n*:

$$y = \bar{y} + \tilde{y}, \text{ тобто } L(\bar{y} + \tilde{y}) = f(x),$$

де $\bar{y} = \sum_{i=1}^{n} C_i y_i$ – лінійна комбінація ФСР однорідного рівняння $L(y) = 0$;

$\tilde{y}$ – один із частинних розв'язків неоднорідного рівняння.

Загальний порядок розв’язання НЛДР-n такий самий, як і для рівнянь другого порядку.

II. Відшукання частинного розв’язку неоднорідного рівняння методом Лагранжа (методом варіації довільних сталих). Узагальненням системи (18.2.16) на випадок $n>2$ є система відносно $C_i'(x)$, $i=\overline{1,n}$:

$$\begin{cases} C_1'(x)\,y_1(x) & +C_2'(x)\,y_2(x) & +\ldots+C_n'(x)\,y_n(x) & =0, \\ C_1'(x)\,y_1'(x) & +C_2'(x)\,y_2'(x) & +\ldots+C_n'(x)\,y_n'(x) & =0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ C_1'(x)\,y_1^{(n-1)}(x) & +C_2'(x)\,y_2^{(n-1)}(x) & +\ldots+C_n'(x)\,y_n^{(n-1)}(x) & = f(x). \end{cases} \qquad (18.3.9)$$

Знайшовши $C_i'=C_i'(x)$, відновлюють невизначеним інтегруванням самі функції $C_i=C_i(x)$, $i=\overline{1,n}$, серед кожної однопараметричної сім’ї первісних беруть одну із них і записують частинний розв’язок $\tilde{y}$.

Приклад. Знайти загальний розв’язок рівняння: $y^{(4)}+y=x^2$.

Розв’язуємо відповідне однорідне рівняння:

$$y^{(4)}+y=0 \;\Rightarrow\; (k^4-1=0 \;\Rightarrow\; (k^2-1)(k^2+1)=0 \;\Rightarrow$$

$$\Rightarrow k_{1,2}=\mp 1,\ k_{3,4}=\pm 1i) \Rightarrow \{\tilde{y}_1,\ \tilde{y}_2,\ \tilde{y}_3,\ \tilde{y}_4\} \Rightarrow \{e^{-x},\ e^x,\ \cos x,\ \sin x\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\; \tilde{y}=C_1e^{-x}+C_2e^x+C_3\cos x+C_4\sin x.$$

Складаємо і *розв’язуємо* систему (18.3.9):

$$\begin{cases} C_1'(x)e^{-x}+C_2'(x)e^x+C_3'(x)\cos x+C_4'(x)\sin x & = & 0, \\ -C_1'(x)e^{-x}+C_2'(x)e^x-C_3'(x)\sin x+C_4'(x)\cos x & = & 0, \\ C_1'(x)e^{-x}+C_2'(x)e^x-C_3'(x)\cos x-C_4'(x)\sin x & = & 0, \\ -C_1'(x)e^{-x}+C_2'(x)e^x+C_3'(x)\sin x-C_4'(x)\cos x & = & x^2 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\; \Delta=\begin{vmatrix} e^{-x} & e^x & \cos x & \sin x \\ -e^{-x} & e^x & -\sin x & \cos x \\ e^{-x} & e^x & -\cos x & -\sin x \\ -e^{-x} & e^x & \sin x & -\cos x \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cos x & \sin x \\ -1 & 1 & -\sin x & \cos x \\ 1 & 1 & -\cos x & -\sin x \\ -1 & 1 & \sin x & -\cos x \end{vmatrix}=8;$$

для визначників Δ_i, $i=\overline{1,4},$ що відповідають невідомим, і невідомих $C_i' = C_i'(x)$, $i=\overline{1,4}$, маємо:

$$\Delta_1 = -2x^2e^{-x},\ \ \Delta_2 = 2x^2e^{x},\ \ \Delta_3 = 4x^2\sin x,\ \ \Delta_4 = -4x^2\cos x;$$
$$C_1' = -\frac{1}{4}x^2e^{-x},\ \ C_2' = \frac{1}{4}x^2e^{x},\ \ C_3' = \frac{1}{2}x^2\sin x,\ \ \Delta_4 = -\frac{1}{2}x^2\cos x.$$

Відновлюємо функції $C_i = C_i(x)$:

$$C_1(x) = -\frac{1}{4}\int x^2e^{-x}dx = \frac{1}{4}e^{-x}(x^2+2x+2)+\tilde{C}_1,$$
$$C_2(x) = \frac{1}{4}\int x^2e^{x}dx = \frac{1}{4}e^{x}(x^2-2x+2)+\tilde{C}_2,$$
$$C_3(x) = \frac{1}{2}\int x^2\sin x dx = -x\sin x+\frac{1}{2}(x^2-2)\cos x+\tilde{C}_3,$$
$$C_4(x) = \frac{1}{2}\int x^2\cos x dx = x\cos x+\frac{1}{2}(x^2-2)\sin x+\tilde{C}_4.$$

Визначаємо вигляд частинного розв'язку, покладаючи $\tilde{C}_i = 0$:

$$\tilde{y} = C_1(x)e^{-x} + C_2(x)e^{x} + C_3(x)\cos x + C_4(x)\sin x \ \Rightarrow\ \tilde{y} = x^2,$$

і записуємо загальний розв'язок заданого рівняння:

$$y = \bar{y} + \tilde{y} = C_1e^{-x} + C_2e^{x} + C_3\cos x + C_4\sin x + x^2. \ \bullet$$

Прикро, що після такої об'ємної роботи отримали такий „скромний" результат стосовно $\tilde{y} = \tilde{y}(x)$. Вийшло за прислів'ям: „Гора народила мишу". Якщо бути більше проникливим, то, аналізуючи ліву і праву частини рівняння, зразу приходимо до висновку, що його частинним розв'язком є функція $\tilde{y} = x^2$ (*наведіть* відповідні міркування).

Узагальнюючий ***висновок:***

$$Ly = f(x) \ \Rightarrow\ \left|\begin{array}{c} Ly = y^{(n)} + p_n y, \\ f(x) = P_k(x),\, n > k \end{array}\right| \ \Rightarrow\ \tilde{y} = P_k(x)/p_n, \qquad (18.3.10)$$

тобто якщо ліва частина рівняння містить тільки невідому функцію та її старшу похідну, а права частина – многочлен степеня k, $k<n$, то його частинним розв'язком є відношення правої частини до коефіцієнта при y. (*Укажіть* без формального викладу вигляд $\tilde{y}$ за умови: $k=n$.)

III. Відшукання частинного розв'язку неоднорідного рівняння зі спеціальною правою частиною – квазімногочленом.

Теорема 18.3.3 (*про частинний розв'язок НЛДР-*n). Частинний розв'язок рівняння $Ly=f(x)$ зі спеціальною правою частиною:

$$f(x)=e^{\alpha x}(P_n(x)\cos\beta x+Q_m(x)\sin\beta x),$$

можна знайти у вигляді:

$$\tilde{y}=x^r e^{\alpha x}(M_s(x)\cos\beta x+N_s(x)\sin\beta x), \tag{18.3.11}$$

де r – кратність числа $\alpha+\beta i$ як кореня характеристичного рівняння;

$M_s(x),\ N_s(x)$ – многочлени степеня $s=\max\{n,m\}$.

Д о в е д е н н я теореми базується на лінійності оператора $L\tilde{y}$.

З урахуванням того, що похідними показникової функції, синуса, косинуса, многочлена є відповідно функції того ж типу, при підстановці у ліву частину рівняння виразу для $\tilde{y}$ теж отримаємо квазімногочлен із многочленами того ж степеня, що і у правій частині рівняння.

Із умов:

$$x^r M_s(x)\equiv P_n(x),\quad x^r N_s(x)\equiv Q_m(x),$$

отримаємо СЛАУ для визначення коефіцієнтів при степенях x у виразі для $\tilde{y}(x)$.

Деталі висвітлювати не будемо. У теоремі 18.2.4 (*про частинний розв'язок НЛДР-2*) деталізовано розглядався випадок $\beta=0$. ■

Для відшукання частинних розв'язків рівнянь, праві частини яких є квазімногочленами з різними значеннями параметрів α, β, m, n, як і у випадку НЛДР-2, застосовується *принцип суперпозиції*.

Орієнтири щодо вигляду частинного розв'язку рівняння містить наведена далі табл. 18.3.2.

Таблиця 18.3.2

Вигляд частинного розв'язку НЛДР-n залежно від правої частини

№ п/п	Права частина рівняння: $f(x)=e^{\alpha x}(P_n(x)\cos\beta x+$ $+Q_m(x)\sin\beta x)$	Значення параметрів: α, β, n, m	Вигляд частинного розв'язку: $\tilde{y}=x^r e^{\alpha x}(M_s(x)\cos\beta x+$ $+N_s(x)\sin\beta x)$, де $s=\max\{n,m\}$
1	$f(x)=P_n(x)$	$\alpha=\beta=0$	$\tilde{y}=x^r M_n(x)$
2	$f(x)=e^{\alpha x}P_n(x)$	$\beta=0$	$\tilde{y}=x^r e^{\alpha x}M_n(x)$
3	$f(x)=P_n(x)\cos\beta x+$ $+Q_m(x)\sin\beta x$	$\alpha=0$	$\tilde{y}=x^r(M_s(x)\cos\beta x+$ $+N_s(x)\sin\beta x)$
		$\alpha=0$; $n=m=0$	$\tilde{y}=x^r(M_0\cos\beta x+N_0\sin\beta x)$, M_0, N_0 – сталі
4	$f(x)=e^{\alpha x}(P_0\cos\beta x+$ $+Q_0\sin\beta x)$, P_0, Q_0 – сталі	$n=m=0$	$\tilde{y}=x^r e^{\alpha x}(M_0\cos\beta x+N_0\sin\beta x)$
5	$f(x)=e^{\alpha x}P_n\cos\beta x$	$Q_m\equiv 0$	$\tilde{y}=x^r e^{\alpha x}(M_n(x)\cos\beta x+$ $+N_n(x)\sin\beta x)$
6	$f(x)=e^{\alpha x}Q_m\sin\beta x$	$P_n\equiv 0$	$\tilde{y}=x^r e^{\alpha x}(M_m(x)\cos\beta x+$ $+N_m(x)\sin\beta x)$

Приклад. Зінтегрувати диференціальне рівняння:

$$Ly=y^{\mathrm{IV}}+2y''+y=e^x(x-1)+x^2+2.$$

Розв'язуємо відповідне однорідне рівняння:

$$k^4+2k^2+1=0 \;\Rightarrow\; (k^2+1)^2=0 \;\Rightarrow\; (k_{1,2}=-i, k_{3,4}=i) \;\Rightarrow$$
$$\Rightarrow\; \{\bar{y}_1, \bar{y}_2, \bar{y}_3, \bar{y}_4\}=\{\sin x,\ x\sin x,\ \cos x,\ x\cos x\} \;\Rightarrow$$
$$\Rightarrow\; \bar{y}=C_1\sin x+C_2 x\sin x+C_3\cos x+C_4 x\cos x$$

– загальний розв'язок ОЛДР-4.

Знаходимо частинний розв'язок неоднорідного рівняння $\tilde{y}=\tilde{y}(x)$, застосовуючи принцип суперпозиції:

$$f(x)=f_1(x)+f_2(x) \;\Rightarrow\; \left| L\tilde{y}_1=f_1(x),\; L\tilde{y}_2=f_2(x) \right| \;\Rightarrow\; \tilde{y}=\tilde{y}_1+\tilde{y}_2.$$

За умовою: $f(x)=\underbrace{e^x(x-1)}_{f_1(x)}+\underbrace{x^2+2}_{f_2(x)}$, тому розв'язуємо фактично два рівняння з однаковими лівими і різними правими частинами:

1. $Ly=f_1(x)=e^x(x-1)$; **2.** $Ly=f_2(x)=x^2+2$.

I. Для правої частини рівняння **1** – функції вигляду $f_1(x)=e^{\alpha x}P_n(x)$ – маємо (див. табл. 18.3.2):

$$\left[\begin{array}{l}(\alpha=1,\,\beta=0)\Rightarrow(\alpha+\beta i\neq k_{1,2,3,4})\Rightarrow r=0;\\(n=1,\,m=0)\;\Rightarrow\; s=1\;\Rightarrow\; M_1(x)=Ax+B\end{array}\right. \;\Rightarrow\; \tilde{y}_1=e^x(Ax+B).$$

Знаходимо похідні $\tilde{y}_1$ до четвертого порядку включно:

$$\tilde{y}_1'=e^x\left[Ax+(A+B)\right];\quad \tilde{y}_1''=e^x\left[Ax+(2A+B)\right];$$
$$\tilde{y}_1'''=e^x\left[Ax+(3A+B)\right];\quad \tilde{y}_1^{(4)}=e^x\left[Ax+(4A+B)\right],$$

складаємо і розв'язуємо систему для визначення параметрів A, B:

$$\begin{array}{c|ccc} & \tilde{y}_1^{(4)} & 2\tilde{y}_1'' & \tilde{y}_1\\ \hline x^1 & A & 2A & A\\ x^0 & 4A+B & 4A+2B & B\end{array} \;\Rightarrow\; \begin{cases}4A=1,\\8A+4B=-1\end{cases} \;\Rightarrow\; (A=1/4,\; B=-3/4).$$

Таким чином, $\tilde{y}_1=e^x(x-3)/4$ – частинний розв'язок рівняння **1**.

II. Аналогічно для правої частини рівняння **2** – функції вигляду $f(x)=P_n(x)$ – маємо (див. табл. 18.3.2):

$$\left[\begin{array}{l}(\alpha=0,\,\beta=0)\;\Rightarrow(\alpha+\beta i\neq k_{1,2,3,4})\Rightarrow r=0;\\(n=2,\,m=0)\;\Rightarrow\; s=2\;\Rightarrow\; M_2(x)=Ax^2+Bx+C\end{array}\right. \Rightarrow \tilde{y}_2=Ax^2+Bx+C.$$

Похідні:

$$\tilde{y}_1' = 2Ax + B; \quad \tilde{y}_1'' = 2A; \quad \tilde{y}_1''' = 0; \quad \tilde{y}_1^{(4)} = 0.$$

Система для визначення A, B, C та її розв'язок, і $\tilde{y}_2$:

$$\begin{array}{c|ccc} & \tilde{y}_2^{(4)} & 2\tilde{y}_2'' & \tilde{y}_2 \\ \hline x^2 & 0 & 0 & A \\ x^1 & 0 & 0 & B \\ x^0 & 0 & 4A & C \end{array} \Rightarrow \begin{cases} A = 1, \\ B = 0, \\ C = -2 \end{cases} \Rightarrow \quad \tilde{y}_2 = x^2 - 2.$$

Записуємо загальний розв'язок заданого рівняння:

$$y = \bar{y} + \tilde{y}_1 + \tilde{y}_2 \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad y = C_1 \sin x + C_2 x \sin x + C_3 \cos x + C_4 x \cos x + \frac{1}{4} e^x (x - 3) + x^2 - 2. \; \bullet$$

(*Переконайтеся* в правильності отриманої відповіді; *знайдіть* усно $\tilde{y}_2$ у світлі висновку (18.3.10).)

18.4. ЛДР-n зі змінними коефіцієнтами, які зводяться до рівнянь зі сталими коефіцієнтами або до рівнянь без $(n-1)$-ї похідної

ОЛДР-2 зі змінними коефіцієнтами: $y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$

Однорідні ЛДР-2 зі сталими коефіцієнтами завжди інтегруються в елементарних функціях як тільки знайдені всі корені характеристичного рівняння, тому природно ставити питання про можливість зведення рівняння зі змінними коефіцієнтами до рівняння зі сталими коефіцієнтами за допомогою заміни незалежної змінної або шуканої функції.

Заміна незалежної змінної. Покладемо $t = \psi(x)$. Тоді:

$$y_x' = y_t' \cdot t_x' = y_t' \cdot \psi'(x); \quad y_x'' = (y_t' \cdot t_x')_x' = y_t'' \cdot [\psi'(x)]^2 + y_t' \cdot \psi''(x),$$

і рівняння набуває вигляду:

$$y_t'' \cdot [\psi'(x)]^2 + y_t' \cdot \left[\psi''(x) + p(x) \cdot \psi'(x)\right] + q(x) \cdot y = 0.$$

За умови, що $\psi'(x)\neq 0$ на розглядуваному інтервалі, отримуємо:

$$y_t'' + y_t' \cdot \left(\frac{\psi''(x)}{[\psi'(x)]^2} + \frac{p(x)}{\psi'(x)} \right) + \frac{q(x)}{[\psi'(x)]^2} y = 0\,. \tag{18.4.1}$$

Згідно із задумом функцію $\psi(x)$ необхідно вибрати так, щоб коефіцієнт при y був сталою.

Беремо $\dfrac{q(x)}{[\psi'(x)]^2} = \dfrac{1}{c^2}$ $(c\neq 0 - const)$, тоді $\psi'(x)=c\sqrt{q(x)}$.

Звідки

$$t = \psi(x) = c\int \sqrt{q(x)}dx \tag{18.4.2}$$

– необхідна умова сталості коефіцієнтів у рівнянні відносно t.

Висновок: якщо рівняння $y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$ звідне до рівняння зі сталими коефіцієнтами заміною незалежної змінної, то тільки за формулою вигляду (18.4.2).

За коефіцієнтами вихідного рівняння безпосередньо дізнаються, зводиться воно до ОЛДР-2 зі сталими коефіцієнтами чи ні.

Можна показати (деталі наводити не будемо), що достатньою умовою є певне співвідношення між функціями $p(x)$ і $q(x)$, а саме:

$$p(x) = pc\sqrt{q(x)} - \frac{1}{2}\cdot\frac{q'(x)}{q(x)}, \text{ або } p(x) = pc\sqrt{q(x)} - \frac{1}{2}\cdot(\ln q(x))', \tag{18.4.3}$$

де p – стала, яку обрано коефіцієнтом при y_t' у рівнянні відносно t.

Якщо функції $p(x)$ і $q(x)$ пов'язані рівністю: $p(x) = -(\ln q(x))'/2$, то рівняння $y_t'' + py_t' + qy = 0$, де $y = y(t)$, перетворюється у двочленне (у лівій частині) рівняння, що не містить першої похідної:

$$y_t'' + qy = 0, \tag{18.4.4}$$

яке легше інтегрується (див. (17.2.5)).

Наведемо два виразних рівняння, які зводяться до рівнянь зі сталими коефіцієнтами.

1⁰. Рівняння Ейлера 2-го порядку – це рівняння, в якому кожний доданок лівої частини містить множник у вигляді степеня аргументу x із показником степеня, рівним порядку похідної у відповідному доданку:

$$x^2 y'' + a_1 x y' + a_2 y = 0, \text{ або } y'' + \frac{a_1}{x} y' + \frac{a_2}{x^2} y = 0 \text{ при } x \neq 0. \qquad (18.4.5)$$

де a_1, a_2 – константи; *обміркуйте* ситуацію, коли $x = 0$.

Визначаємо підстановку, беручи одну із первісних НІ:

$$t = \psi(x) = c\int \sqrt{q(x)}dx = c\int \sqrt{\frac{a_2}{x^2}}\,dx = \left| c = \frac{1}{\sqrt{a_2}} \right| = \int \frac{1}{|x|}dx = \begin{cases} \ln x, & x > 0, \\ -\ln(-x), & x < 0. \end{cases}$$

Виконуємо заміну: $t = \ln x$, або $x = e^t$ ($x > 0$):

$$x = e^t \;\Rightarrow\; (t = \ln x \;\Rightarrow\; dt = e^{-t}dx) \;\Rightarrow\; \left| y'_x = y'_t \cdot t'_x \right| \;\Rightarrow\; y'_x = y'_t \cdot e^{-t};$$

$$y''_x = (y'_t \cdot e^{-t})'_x = (y''_t \cdot e^{-t} - y'_t e^{-t})e^{-t} \;\Rightarrow\; y''_x = (y''_t - y'_t)e^{-2t}.$$

Для від'ємних значень x ($x < 0$) беремо $t = -\ln(-x)$, або $x = -e^{-t}$.

Тоді (18.4.5) набуде вигляду:

$$y'' + \frac{a_1}{x} y' + \frac{a_2}{x^2} y = 0 \;\Rightarrow\; (y''_t - y'_t)e^{-2t} + \frac{a_1}{e^t} y'_t e^{-t} + \frac{a_2}{e^{2t}} y = 0 \;\Rightarrow\; \left| \times e^{2t} \right| \;\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\; y''_t + (a_1 - 1)y'_t + a_2 y = 0 \qquad (18.4.6)$$

– ОЛДР-2 зі сталими коефіцієнтами.

За Ейлером частинні розв'язки рівняння (18.4.6) знаходять у вигляді: $y = e^{kt}$, проте з урахуванням того, що $x = e^t$, частинні розв'язки рівняння (18.4.5) можна зразу шукати, не здійснюючи перехід до нової змінної, як

$$y = x^k. \qquad (18.4.7)$$

Підставляючи у вихідне рівняння замість y степінь x^k, приходимо до характеристичного рівняння відносно показника k. (*Укажіть*, як виглядатиме підстановка (18.4.7), якщо перейти до степеня з основою e.)

Приклад. Знайти загальний розв’язок рівняння: $x^2y''+3xy'+2y=0$.

Покладаємо $y=x^k$, для похідних маємо:

$$y'=kx^{k-1}, \quad y''=k(k-1)x^{k-2}.$$

Підставляємо вирази для y, y', y'' у задане рівняння:

$$x^2k(k-1)x^{k-2}+3xkx^{k-1}+2x^k=0 \;\Rightarrow\; k(k-1)x^k+3kx^k+2x^k=0.$$

Скорочуючи ліву і праву частини рівняння на x^k, отримуємо:

$k(k-1)+3k+2=0 \;\Rightarrow\; k^2+2k+2=0$ – характеристичне рівняння.

Розв’язуємо це рівняння, складаємо ФСР і записуємо загальний розв’язок:

$$k^2+2k+2=0 \;\Rightarrow\; k_{1,2}=-1\pm 1i \;\Rightarrow\; \{y_1,y_2\}=\{x^{k_1},x^{k_2}\}=$$

$$\Rightarrow\; \{x^{-1}\cos t,\; x^{-1}\sin t\}=\left|t=\ln x\right|=\{x^{-1}\cos(\ln x),\; x^{-1}\sin(\ln x)\} \;\Rightarrow$$

$\Rightarrow\; y=x^{-1}(C_1\cos(\ln x)+C_2\sin(\ln x))$ – загальний розв’язок рівняння. ●

2^0. Рівняння Чебишева – ЛДР-2 вигляду:

$$Ly=(1-x^2)y''-xy'+b^2y=0; \quad |x|<1,\; b\in\mathbf{R}. \qquad (18.4.8)$$

Ділимо ліву і праву частини рівняння на $(1-x^2)$, і діємо згідно з (18.4.2):

$$y''-\frac{x}{1-x^2}y'+\frac{b^2}{1-x^2}y=0 \;\Rightarrow\; \left|q(x)=\frac{b^2}{1-x^2}\right| \;\Rightarrow$$

$\Rightarrow\; t=\psi(x)=c\int\sqrt{q(x)}dx=c\int\sqrt{\dfrac{b^2}{1-x^2}}\,dx=\Big|$ виберемо $c=-1/b\;\Big|=$

$$=-\int\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx=\arccos x \;\Rightarrow\; x=\cos t \;\Rightarrow\; dx=-\sin t\,dt \;\Rightarrow\; t'_x=-\frac{1}{\sin t}.$$

Для похідних y'_x, y''_x маємо:

$$y'_x = y'_t \cdot t'_x = -\frac{y'_t}{\sin t};$$

$$y''_x = -\left(\frac{y'_t}{\sin t}\right)'_x = -\left(\frac{y'_t}{\sin t}\right)'_t \cdot t'_x = -\left(\frac{y''_t}{\sin t} - \frac{\cos t}{\sin^2 t}\right) \cdot \frac{-1}{\sin t} = \frac{y''_t}{\sin^2 t} - \frac{\cos t}{\sin^3 t};$$

$$Ly = \sin^2 t \cdot y'' - \cos t \cdot y' + n^2 y \quad \Rightarrow \quad Ly = y''_t + n^2 y.$$

Таким чином приходимо до двочленного рівняння:

$$y''_t + b^2 y = 0, \tag{18.4.9}$$

яке легко інтегрується:

$$k^2 + b^2 = 0 \;\Rightarrow\; k_{1,2} = \pm bi \;\Rightarrow\; \{y_1, y_2\} = \{\cos bt, \sin bt\} \;\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\; y = C_1 \cos bt + C_2 \sin bt \;\Rightarrow\; y = C_1 \cos(b \arccos x) + C_2 \sin(b \arccos x)$$

– загальний розв’язок рівняння.

Зауваження:

якщо $b = n \in \mathbf{N}$, то перша функція ФСР визначає так звані многочлени Чебишева: $T_n(x) = \cos(n \arccos x)$, які відіграють важливу роль у теорії апроксимації (наближення) функцій;

існують способи зведення довільного ЛДР-2 зі змінними коефіцієнтами, а не тільки рівняння Чебишева, до рівняння, яке не містить члена з першою похідною.

Лінійна заміна шуканої функції – заміна, яка не порушує лінійності й однорідності вихідного рівняння: $y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$.

Покладаємо

$$y = \alpha(x) \cdot z, \tag{18.4.10}$$

де $z = z(x)$ – нова шукана функція;

$\alpha = \alpha(x)$ – допоміжна, невідома поки що, функція.

Тоді: $y' = \alpha' z + \alpha z'$; $y'' = \alpha'' z + 2\alpha' z' + \alpha z''$, і рівняння набуває вигляду:

$$\alpha'' z + 2\alpha' z' + \alpha z'' + (\alpha' z + \alpha z')\, p(x) + \alpha z q(x) = 0,$$

або

$$z'' + \left[\frac{2\alpha'}{\alpha} + p(x)\right] z' + \left[\frac{\alpha''}{\alpha} + \frac{\alpha'}{\alpha} p(x) + q(x)\right] z = 0.$$

Функцію $\alpha(x)$ вибираємо так, щоб коефіцієнт при z' став нулем:

$$2\alpha'/\alpha + p(x) = 0,$$

звідки знаходимо $\alpha(x)$:

$$(\ln \alpha(x))' = -p(x)/2 \;\Rightarrow\; \alpha(x) = e^{-\int p(x)/2\, dx}.$$

Таким чином, підстановка (18.4.10) описується співвідношенням:

$$y = e^{-\int p(x)/2\, dx} \cdot z, \tag{18.4.11}$$

а рівняння відносно функції $z(x)$ таке:

$$z'' - \left[\frac{p'(x)}{2} + \frac{p^2(x)}{4} - q(x)\right] z = 0. \tag{18.4.12}$$

(*Пропонуємо* переконатися у справедливості (18.4.12).)

Зауваження. Якщо отримане рівняння піддається інтегруванню, то вихідне рівняння також інтегровне; в окремих випадках рівняння відносно $z(x)$ стає (*за яких умов?*) рівнянням зі сталими коефіцієнтами.

Приклад. Зінтегрувати рівняння: $y'' + 2xy' + x^2 y = 0$.

Знаходимо допоміжну функцію $\alpha = \alpha(x)$:

$$\alpha(x) = e^{-\int p(x)/2\, dx} \;\Rightarrow\; \left|\, p(x) = 2x \,\right| \;\Rightarrow\; \alpha(x) = e^{-\int x\, dx} = e^{-x^2/2},$$

тоді згідно з (18.4.11) маємо:

$$y = e^{-x^2/2} \cdot z.$$

Пропустимо технічні виклади переходу до рівняння відносно $z(x)$, а скористаємось співвідношенням (18.4.12) як готовою формулою:

$$\left| \frac{p'(x)}{2} + \frac{p^2(x)}{4} - q(x) = 1 + x^2 - x^2 = 1 \right| \Rightarrow z'' - z = 0$$

– однорідне рівняння зі сталими коефіцієнтами.

Знаходимо його загальний розв’язок, а потім і загальний розв’язок заданого рівняння:

$$(k^2 - 1 = 0 \Rightarrow k_{1,2} = \mp 1) \Rightarrow \{z_1, z_2\} = \{e^{-x}, e^x\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow z = C_1 e^{-x} + C_2 e^x \Rightarrow y = e^{-x^2/2}(C_1 e^{-x} + C_2 e^x). \bullet$$

Під кінець як ***довідку*** відзначимо: якщо відомий один частинний розв’язок $y_1 = y_1(x)$ рівняння $y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$, то застосовуючи підстановку $y = y_1 \cdot \int z dx$, для нової невідомої функції $z = z(x)$ отримаємо:

$$z = C_1 y_1^{-2} e^{-\int p(x)dx},$$

а загальний розв’язок рівняння матиме вигляд:

$$y = y_1\left(\int C_1 y_1^{-2} e^{-\int p(x)dx} dx + C_2\right)$$ – **формула Абеля**.

(Нільс Генрік Абель (1802 – 1829 рр.) – норвезький математик.)

ОЛДР-n зі змінними коефіцієнтами:
$y^{(n)} + p_1(x) y^{(n-1)} + \ldots + p_n(x) y = 0$

Розглянуті виклади без принципових змін узагальнюються на рівняння (18.1.1) порядку $n > 2$, проте технічний бік ускладнюється.

Заміна незалежної змінної. Покладаємо $t = \psi(x)$. Тоді необхідна умова сталості коефіцієнтів у рівнянні відносно нового аргументу t (див. (18.4.2)) для ОЛДР-n набуває вигляду:

$$t = \psi(x) = c \int \sqrt[n]{p_n(x)} dx. \tag{18.4.13}$$

Така підстановка забезпечує сталість коефіцієнта при y, але це не означає, що всі інші коефіцієнти будуть сталими (можливо, за винятком деяких). Однак існують рівняння, для яких умова (18.4.13) є і достатньою.

1^0. Рівняння Ейлера. Рівнянням Ейлера називають ОЛДР-n вигляду:

$$x^n y^{(n)} + p_1 x^{n-1} y^{(n-1)} + \ldots + p_{n-1} x y' + p_n y = 0, \tag{18.4.14}$$

де p_i $(i=\overline{1,n})$ – сталі величини.

Зведення рівняння (18.4.14) до рівняння зі сталими коефіцієнтами здійснюється заміною:

$$x = e^t, \text{ якщо } x > 0; \quad x = -e^{-t}, \text{ якщо } x < 0. \tag{18.4.15}$$

Дійсно:

$$x=e^t \;\Rightarrow\; (t = \ln x \;\Rightarrow\; dt = e^{-t}dx) \;\Rightarrow\; \left| y'_x = y'_t \cdot t'_x \right| \;\Rightarrow\; y'_x = y'_t \cdot e^{-t};$$

(Аналогічно для $x<0$: $x = -e^{-t} \;\Rightarrow\; dt = e^t dx \;\Rightarrow\; y'_x = y'_t \cdot e^t$.)

$$y''_x = (y'_t \cdot e^{-t})'_x = (y''_t \cdot e^{-t} - y'_t e^{-t})e^{-t} \;\Rightarrow\; y''_x = (y''_t - y'_t)e^{-2t};$$

……………………………………………………………………………..

$$y_x^{(n)} = (y_t^{(n)} + a_1 y_t^{(n-1)} + \ldots + a_{n-1} y'_t)\, e^{-nt}, \tag{18.4.16}$$

де a_i $(i=\overline{1,n-1})$ – нові коефіцієнти (сталі величини).

Якщо згідно з (18.4.15) і (18.4.16) у вихідному рівнянні (18.4.14) здійснимо перехід до змінної t, то отримаємо диференціальне рівняння n-го порядку зі сталими коефіцієнтами:

$$y_t^{(n)} + b_1 y_t^{(n-1)} + \ldots + b_{n-1} y'_t + b_n y = 0, \tag{18.4.17}$$

де b_i, $(i=\overline{1,n})$ – нові коефіцієнти (сталі величини).

Частинні розв’язки диференціального рівняння (18.4.17) знаходять звичайно за Ейлером: $y=e^{kt}$, проте з урахуванням (18.4.15): $x=e^t$ або $x=-e^{-t}$, частинні розв’язки рівняння (18.4.14) можна зразу шукати, не здійснюючи перехід до нової змінної, у вигляді:

$$y=x^k \;\; (x>0) \;\text{ або }\; y=(-x)^{-k} \;\; (x<0). \tag{18.4.18}$$

Приклад. Зінтегрувати диференціальне рівняння:

$$x^3 y''' - xy' + 2y = 0 \quad (x > 0).$$

Аналізуємо ліву частину рівняння і приходимо до висновку, що воно є рівнянням Ейлера, тому покладаємо: $y = x^k$.

Диференціюємо тричі:

$$y' = kx^{k-1}, \quad y'' = k(k-1)x^{k-2}, \quad y''' = k(k-1)(k-2)x^{k-3}.$$

Підставляємо вирази для y, y', y'', y''' у вихідне рівняння, потім розв'язуємо отримане – *характеристичне* – рівняння відносно k:

$$x^3 k(k-1)(k-2)x^{k-3} - xkx^{k-1} + 2x^k = 0 \;\Rightarrow\; \left| x^k \neq 0 \right| \;\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\; k(k-1)(k-2) - k + 2 = 0 \;\Rightarrow\; (k-2)(k^2 - k - 1) = 0 \;\Rightarrow$$

$$(k_1 = 2,\; k_2 = (1+\sqrt{5})/2,\; k_3 = (1-\sqrt{5})/2).$$

Складаємо ФСР і записуємо загальний розв'язок:

$$\{y_1,\, y_2,\, y_3\} = \{x^2,\, x^{(1+\sqrt{5})/2},\, x^{(1-\sqrt{5})/2}\} \;\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\; y = C_1 x^2 + C_2 x^{(1+\sqrt{5})/2} + C_3 x^{(1-\sqrt{5})/2}$$

– загальний розв'язок рівняння. ●

Якщо знаходити розв'язок рівняння за умови, що $x < 0$, то ФСР матиме вигляд: $\{(-x)^2,\, (-x)^{(1+\sqrt{5})/2},\, (-x)^{(1-\sqrt{5})/2}\}$; *переконайтеся*.

2^0. Рівняння Лагранжа – узагальнення рівняння Ейлера на випадок, коли основами степенів у кожному доданку лівої частини є не x, а лінійна функція від x, тобто $ax + b$:

$$(ax+b)^n y^{(n)} + (ax+b)^{n-1} p_1 y^{(n-1)} + \ldots + (ax+b) p_{n-1} y' + p_n y = 0, \quad (18.4.19)$$

відповідна заміна: $ax + b = e^t$, або спочатку покласти $ax + b = \tau$, що приведе до рівняння Ейлера відносно τ, а потім взяти $\tau = e^t$.

Лінійна заміна шуканої функції – заміна, яка не порушує лінійності й однорідності вихідного рівняння, і у загальному випадку приводить до рівняння, яке не містить похідної $(n-1)$-го порядку.

Як і у (18.4.10), покладають: $y = \alpha(x)\cdot z$, де $z = z(x)$ – нова шукана функція; $\alpha = \alpha(x)$ – допоміжна функція, яка підбирається так, щоб у рівнянні відносно z не було $(n-1)$-ої похідної.

Відповідна підстановка має вигляд:

$$y = e^{-\int p_1(x)/n\,dx}\cdot z. \qquad (18.4.20)$$

Буває і так, що разом з $(n-1)$-ою похідною „зникають" і інші похідні.

Приклад. Звести задане рівняння до такого, що не містить другої похідної:

$$y''' + 3\sin x\cdot y'' + 3(\cos x + \sin^2 x)y' + \frac{1}{2}\sin 2x(3-\cos x)y = 0.$$

Визначаємо за $p_1(x) = 3\sin x$ допоміжну функцію:

$$\alpha = \alpha(x) = e^{-\int \sin x dx} = e^{\cos x},$$

і виконуємо заміну: $y = e^{\cos x}\cdot z$ (докладний виклад наводити не будемо).

У результаті отримуємо рівняння відносно $z = z(x)$, яке містить лише похідну третього порядку: $z''' = 0$.

Відновлюємо нову функцію трикратним невизначеним інтегруванням:

$$z(x) = C_1\frac{x^2}{2} + C_2 x + C_3,$$

і записуємо загальний розв'язок заданого рівняння:

$$y = e^{\cos x}z(x) = e^{\cos x}\left(C_1\frac{x^2}{2} + C_2 x + C_3\right). \bullet$$

(*Знайдіть* початкові умови, для яких розв'язок задачі Коші має вигляд: $y = e^{\cos x}(x^2 + x + 1)$).

18.5. Деякі задачі застосовного характеру

Модель коливних процесів

Розглянемо ОЛДР-2 зі змінними коефіцієнтами (див. п. 18.4):

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0,$$

де $p(x)$, $q(x)$ – визначені і неперервні в деякому інтервалі (a, b) функції.

Таке рівняння задовольняє тривіальний розв'язок: $y = y(x) \equiv 0$, інші, ненульові розв'язки, є визначеними і двічі неперервно диференційовними у всьому інтервалі (a, b) (*чому?*).

Якщо розв'язок $y = y(x) \not\equiv 0$ на (a, b) приймає рівне нулю значення не менше двох разів, то він називається **коливним** у цьому інтервалі, в іншому випадку – **неколивним**.

Зауважимо, що перетворюючись на нуль, розв'язок обов'язково змінює знак.

При вивченні коливного характеру розв'язків рівняння досить обмежитися розглядом рівняння вигляду:

$$y'' + q(x)y = 0, \tag{18.5.1}$$

бо вихідне рівняння підстановкою (18.4.11): $y = e^{-\int p(x)/2\,dx} \cdot z$, зводиться до вигляду:

$$z''' + Q(x)z = 0, \tag{18.5.2}$$

де (див. (18.4.12))

$$Q(x) = -\frac{p'(x)}{2} - \frac{p^2(x)}{4} + q(x),$$

причому задане рівняння і рівняння (18.5.2) мають один і той самий коливний характер (*на якій підставі?*).

Установлено, що ***достатньою умовою*** неколивного розв'язку рівняння (18.5.1) є недодатність коефіцієнта $q(x)$:

$$q(x) \le 0 \quad \forall x \in (a, b).$$

Якщо $q(x)$ неперервна і додатна на відрізку $[a, b]$, то для відстані ρ між двома послідовними нулями розв'язку рівняння $y'' + q(x)y = 0$ має місце оцінка:

$$\pi/\sqrt{M} \le \rho \le \pi/\sqrt{m},$$

де M, m – відповідно найбільше і найменше значення функції $q(x)$ на відрізку $[a, b]$.

Розглядуваною математичною моделлю описуються механічні, електричні, економічні процеси тощо.

Питання про коливний чи неколивний характер розв'язків рівняння легко установити для ОЛДР-2 зі сталими коефіцієнтами: $y'' + py' + qy = 0$. Знайдемо, *наприклад*, умови, за яких усі (ненульові) розв'язки цього рівняння є неколивними в інтервалі $(-\infty, +\infty)$.

Зводимо рівняння до вигляду, який не містить першої похідної:

$$z'' + Qz = 0, \text{ де } Q = q - p^2/4. \qquad (18.5.3)$$

Висновок. Якщо виконана умова $Q \le 0$, тобто $q \le p^2/4$, то всі розв'язки рівняння (18.5.3), а отже, і вихідного рівняння, будуть неколивними на $(-\infty, +\infty)$. Умова $q \le p^2/4$ є і необхідною (*чому?*).

(*Яким* співвідношенням пов'язані величини Q і дискримінант характеристичного рівняння $k^2 + pk + q = 0$?)

Модель гармонічного осцилятора

Гармонічним осцилятором називається система, що здійснює коливання, описувані рівнянням вигляду:

$$y'' + a^2 y = 0, \qquad (18.5.4)$$

де $y = y(t)$ – невідома функція часу t (відхилення, видовження);

a^2 – числовий параметр, залежний від властивостей системи.

Коливання гармонічного осцилятора є важливим прикладом періодичного руху і служать точною або наближеною моделлю в багатьох задачах класичної та квантової фізики.

Прикладами гармонічного осцилятора є пружинний, фізичний і математичний маятники, коливальний контур (для струмів і напруг настільки малих, що елементи контуру можна було б вважати лінійними (див. п. 17.4)).

Пружинний маятник – це вантаж масою m, підвішений на абсолютно пружній пружині і здійснює гармонічні коливання під дією пружної сили $F = -kx$, де k – коефіцієнт пружності, який у випадку пружини називають жорсткістю.

Фізичний маятник – це тверде тіло, що здійснює під дією сили тяжіння коливання навколо нерухомої горизонтальної осі підвісу, що не проходить через центр мас тіла.

Математичний маятник (знайомий зі школи) – це ідеалізована система, що складається з матеріальної точки масою m, підвішеної на нерозтяжній невагомій нитці, і коливається під дією сили тяжіння.

Хорошим наближенням математичного маятника є невелика важка кулька, підвішена на тонкій довгій нитці.

Для пружинного маятника в силу другого закону Ньютона $F = my''$ і закону Гука $F = -ky$ рівняння (18.5.4) набуває вигляду:

$$my'' = -ky, \text{ або } y'' + \frac{k}{m}y = 0; \ \frac{k}{m} = a. \qquad (18.5.5)$$

(Роберт Гук (1635 – 1703 рр.) – англійський природодослідник, вчений-енциклопедист.)

Загальним розв'язком рівняння (18.5.5) є функція, яка описує гармонічні коливання (*переконайтеся*):

$$y = A\cos(at + \varphi),$$

де A, φ – довільні сталі (A – амплітуда, φ – початкова фаза), які визначаються завданням початкових умов;

a – частота коливань.

Запитання для самодіагностики засвоєння матеріалу

Відповіді на всі запитання сформулюйте словесно, запишіть у символічній формі, обґрунтуйте (на підставі означень, теорем, правил, формул тощо), наведіть відповідні конкретні приклади.

1. Який вигляд має диференціальне рівняння вищого порядку?
2. За якою ознакою розрізнюють однорідні і неоднорідні ДР-n?
3. Як формулюється теорема Коші про існування і єдиність розв'язку ДР-n?
4. Яка система функцій називається лінійно залежною (лінійно незалежною) на (a,b)?
5. Яким співвідношенням визначається лінійна залежність (лінійна незалежність) двох функцій?
6. Що таке вронскіан для системи функцій?
7. Яка умова є необхідною (достатньою) для лінійної залежності (лінійної незалежності) системи функцій?
8. Який вигляд має однорідне диференціальне рівняння другого порядку зі сталими коефіцієнтами (ОЛДР-2)?
9. Як формулюється теорема про лінійну комбінацію частинних розв'язків ОЛДР-2)?
10. Як формулюється теорема про структуру загального розв'язку ОЛДР-2?
11. Що розуміють під фундаментальною системою розв'язків?
12. Яке алгебраїчне рівняння називають характеристичним рівнянням ОЛДР-2? Як скласти характеристичне рівняння?
13. Який вигляд мають частинні розв'язки ОЛДР-2 залежно від дискримінанта характеристичного рівняння?

14 Як виглядає ФСР для однорідних ЛДР-2?

15. Наведіть загальний порядок розв'язання ОЛДР-2.
16. Який вигляд має неоднорідне диференціальне рівняння другого порядку зі сталими коефіцієнтами (НЛДР-2)?
17. Сформулюйте теорему про структуру загального розв'язку НЛДР-2.
18. У чому полягає метод Лагранжа відшукання частинного розв'язку неоднорідного рівняння другого порядку?

19. Як здійснюється відшукання частинного розв’язку неоднорідного рівняння зі спеціальною правою частиною – квазімногочленом?

20. Що таке принцип суперпозиції при розв’язанні НЛДР-2?

21. Який вигляд має ЛДР-n – лінійне диференціальне рівняння вищого порядку ($n > 2$) зі сталими коефіцієнтами?

22. Що називають лінійним диференціальним оператором?

23. Які ви знаєте властивості диференціального оператора?

24. Як виглядає операторна форма завдання?

25. Сформулюйте теорему про лінійну комбінацію частинних розв’язків однорідного ЛДР-n.

26. Який вигляд має структура загального розв’язку ОЛДР-n?

27. Яке алгебраїчне рівняння називають характеристичним рівнянням ОЛДР-n?

28. Які корені у загальному випадку може містити множина коренів характеристичного рівняння?

29. Яке рівняння називають неоднорідним лінійним диференціальним рівнянням n-го порядку зі сталими коефіцієнтами (НЛДР-n)?

30. Сформулюйте теорему про структуру загального розв’язку НЛДР-n.

31. У чому полягає метод Лагранжа відшукання частинного розв’язку неоднорідного рівняння?

32. Як знаходяться частинні розв’язки неоднорідного рівняння зі спеціальною правою частиною – квазімногочленом?

33. Яка необхідна умова зведення ОЛДР-2 зі змінними коефіцієнтами до рівнянь зі сталими коефіцієнтами?

34. Яку підстановку виконують для зведення ОЛДР-2 зі змінними коефіцієнтами до рівняння, яке не містить першої похідної?

35. Який вигляд має рівняння Ейлера 2-го порядку і як воно зводиться до рівняння зі сталими коефіцієнтами?

36. Яке рівняння називається рівнянням Чебишева і як воно розв’язується?

37. Який вигляд має формула Абеля і що вона описує?

38. Як розв’язується рівняння Ейлера n-го порядку?

39. Який вигляд має рівняння Лагранжа і як воно розв’язується?

Задачі та вправи

1. Дослідити лінійну залежність чи незалежність заданих систем функцій в області визначення функцій системи:

1) $\{x^2,\ x^2+x\}$;
2) $\{x,\ -3x, 2x\}$;
3) $\{\ln x, x, 1\}$;
4) $\{\sin x, \cos x\}$;
5) $\{x^2+3x, x^2-1, x+3\}$;
6) $\{\ln x^4, \ln 5x, 11\}$;
7) $\{e^x, xe^x, x^2e^x\}$;
8) $\{5, \cos^2 x, \sin^2 x\}$;
9) $\{1, \arcsin x, \arccos x\}$;
10) $\{5, \mathrm{arctg} x, \mathrm{arcctg} x\}$.

2. Обчислити визначник Вронського для заданих систем функцій:

1) $\{1, 2, x^2\}$;
2) $\{\cos(\pi/4-x), \sin(\pi/4-x)\}$;
3) $\{e^x, 2e^x, e^{-x}\}$;
4) $\{2, \cos x, \cos 2x\}$;
5) $\{\sin x, \sin(x+\pi/4)\}$;
6) $\{\pi, \arcsin x, \arccos x\}$;
7) $\{4, \sin^2 x, \cos 2x\}$;
8) $\{e^{-3x}\sin 2x, e^{-3x}\cos 2x\}$.

3. За допомогою визначника Грама показати, що задані системи функцій є лінійно залежними на відрізку $[-\pi, \pi]$:

1) $\{x, 2x, x^2\}$;
2) $\{5, \cos^2 x, \sin^2 x\}$;
3) $\{1, \sin 2x, (\sin x - \cos x)^2\}$.

4. Знайти загальні або частинні розв’язки заданих однорідних ЛДР зі сталими коефіцієнтами:

1) $y''+2y'-15y=0$;
2) $3y''-2y'-8y=0$;
3) $y''-4y'+3y=0$, $y(0)=6$, $y'(0)=10$;
4) $y''+8y'+16y=0$;
5) $y''-4y'+4y=0$, $y(0)=1$, $y'(0)=-1$;
6) $y''+6y'+25y=0$;
7) $4y''-8y'+5y=0$;

8) $y'' - 4y' + 29y = 0$, $y(0) = 3$, $y'(0) = 1$;

9) $y''' - 2y'' - 3y' = 0$;

10) $y''' + 6y'' + 11y' + 6y = 0$;

11) $y''' + 2y'' + y' = 0$;

12) $y''' + 4y'' + 13y' = 0$;

13) $y''' - 3y'' + 3y' - y = 0$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 2$, $y''(0) = 3$;

14) $y''' + y'' = 0$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$, $y''(0) = 1$;

15) $y''' - 8y = 0$;

16) $y^{\mathrm{IV}} - y = 0$;

17) $y^{\mathrm{IV}} + 2y''' + 4y'' - 2y' - 5y = 0$;

18) $y^{\mathrm{IV}} + 4y''' + 8y'' + 8y' + 4y = 0$;

19) $y^{\mathrm{V}} - 2y^{\mathrm{IV}} + 2y''' - 4y'' + y' - 2y = 0$;

20) $y^{\mathrm{V}} + 4y^{\mathrm{IV}} + 5y''' - 6y' - 4y = 0$.

5. Зінтегрувати наведені неоднорідні ЛДР зі сталими коефіцієнтами:

1) $y'' + 2y' + 2y = 1 + x$;

2) $y'' - 4y' + 4y = x^2$;

3) $y'' + 8y' = 8x$;

4) $y'' - 3y' + 2y = x^3$;

5) $y'' + y' = 4x^2 e^x$;

6) $y'' + 3y' = 3xe^{-3x}$;

7) $y'' + 10y' + 25y = 4e^{-5x}$;

8) $y'' + 5y' + 6y = 10(1 - x)e^{-2x}$;

9) $y'' - 2y' - 8y = 12\sin 2x - 36\cos 2x$;

10) $y'' + 16y = 8\cos 4x$;

11) $y'' + 3y' + 2y = x\sin x$;

12) $y'' + y = 4x\cos x$;

13) $y'' + 2y' = 4e^x(\sin x + \cos x)$;

14) $y'' + 4y' + 5y = 10e^{-2x}\cos x$;

15) $y''' + y'' = 1$;

16) $y''' - y'' = 12x^2 + 6x$;

17) $y''' - y'' + y' - y = x^2 + x$;

18) $27y''' - 27y'' + 9y' - y = 162e^{x/3}$;

19) $y''' + 6y'' + 11y' + 6y = -7xe^{-x}$;

20) $y''' - y = \sin x$;

21) $y''' - 3y'' + 3y' - y = e^{x}\cos 2x$;

22) $y^{\mathrm{IV}} - 2y''' + 2y'' - 2y' + y = 1$;

23) $y^{\mathrm{IV}} + y'' = x^2 + x$;

24) $y^{\mathrm{IV}} - 2y''' + 2y'' - 2y' + y = e^{x}$;

25) $y^{\mathrm{IV}} - 8y' = xe^{2x}$;

26) $y^{\mathrm{IV}} - 2y'' + y = \cos x$.

6. Розв’язати задачу Коші для заданих неоднорідних ЛДР зі сталими коефіцієнтами:

1) $y'' - 6y' + 9y = 9x^2 - 12x + 2$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 3$;

2) $y'' + y = 2(1 - x)$, $y(0) = 2$, $y'(0) = -2$;

3) $y'' - y = 4e^{x}$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$;

4) $y'' - 4y' + 4y = 2e^{2x}$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 0$;

5) $y'' - 5y' + 6y = (12x - 7)e^{-x}$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 0$;

6) $y'' + 4y = \sin x$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 1$;

7) $y'' + 3y' + 2y = 2\sin 3x + 6\cos 3x$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 0$;

8) $y'' + 9y = 6\cos 3x$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 3$;

9) $y'' - y' = -5e^{-x}(\sin x + \cos x)$, $y(0) = -4$, $y'(0) = 5$;

10) $y'' - 2y' + 2y = 4e^{x}\cos x$, $y(\pi) = \pi e^{\pi}$, $y'(\pi) = e^{\pi}$;

11) $y''' - y' = -2x$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$, $y''(0) = 2$;

12) $y''' - 9y'' + 27y' - 27y = 6e^{3x}$, $y(0)=1$, $y'(0)=3$, $y''(0)=9$;

13) $y''' - 5y'' + 4y' + 10y = 18\cos x + 12\sin x$, $y(0)=1$, $y'(0)=1$, $y''(0)=-1$;

14) $y''' + 3y'' - 4y = -6e^{-2x}$, $y(0)=1$, $y'(0)=1$, $y''(0)=3$;

15) $y^{\mathrm{IV}} - y = 8e^{x}$, $y(0)=-1$, $y'(0)=0$, $y''(0)=1$, $y'''(0)=0$;

16) $y^{\mathrm{IV}} + 8y'' + 16y = \cos x$, $y(0)=1/9$, $y'(0)=0$, $y''(0)=-1/9$, $y'''(0)=0$.

7. Знайти загальні розв'язки заданих неоднорідних ЛДР зі сталими коефіцієнтами, застосовуючи принцип суперпозиції відшукання їх частинних розв'язків:

1) $y'' - y' - 2y = 4x - 2e^{x}$;

2) $y'' - 3y' = 18x - 10\cos x$;

3) $y'' - 6y' + 9y = 4e^{x} - 16e^{3x}$;

4) $y'' - 2y' + y = 2 + e^{x}\sin x$;

5) $y'' + y' = \cos^2 x + e^{x} + x^2$;

6) $y'' + 2y' + 5y = 4e^{-x} + 17\sin 2x$;

7) $y''' - y'' - 2y' = 4x + 3\sin x + \cos x$;

8) $y''' - 4y' = xe^{2x} + \sin x + x^2$;

9) $y''' - 2y'' + 2y' = 4\cos x\cos 3x + 6\sin^2 x$;

10) $y^{\mathrm{IV}} + 2y''' + 2y'' + 2y' + y = xe^{x} + \frac{1}{2}\cos x$.

8. Зінтегрувати задані неоднорідні ЛДР методом варіації довільних сталих:

1) $y'' - y' = \dfrac{e^{2x}}{\sqrt{1-e^{2x}}}$;

2) $y'' - y = \dfrac{e^{x}}{1-e^{x}}$;

3) $y'' - 2y' + y = \dfrac{e^{x}}{x}$;

4) $y'' + 4y = \dfrac{1}{\cos^2 x}$;

5) $y'' + y + ctg^2 x = 0$;

6) $y'' - y' = e^{2x}\sqrt{1-e^{2x}}$;

7) $y'' - 2y' + y = \dfrac{e^x}{x^2+1}$;

8) $y'' + y = \dfrac{1}{\sin x}$;

9) $y'' - 2y = 4x^2 e^{x^2}$;

10) $y'' + y = \dfrac{1}{\sqrt{\cos^3 2x}}$.

9. Зінтегрувати ЛДР зі змінними коефіцієнтами:

1) $x^2 y'' + 2xy' - 6y = 0$;

2) $x^2 y'' + 3xy' + y = 0$;

3) $x^2 y'' - xy' + 2y = 0$;

4) $x^2 y''' - 3xy'' + 3y' = 0$;

5) $x^2 y''' = 2y'$;

6) $(x+2)^2 y'' + 3(x+2)y' - 3y = 0$;

7) $(2x+1)^2 y'' - 2(2x+1)y' + 4y = 0$;

8) $(x+1)^2 y''' - 12y' = 0$;

9) $(2x+1)^2 y''' + 2(2x+1)y'' + y' = 0$;

10) $(1-x^2)y'' - xy' + 4y = 0$, $|x| < 1$;

11) $(1-x^2)y'' - xy' + 2y = 0$, $|x| < 1$.

Відповіді

1. 1), 3), 4), 5), 7) – незалежна система функцій; 2), 6), 8), 9), 10) – залежна система функцій.

2. 1) $W(x) = 0$;

2) $W(x) = 1$;

3) $W(x) = 0$;

4) $W(x) = -8\sin^3 x$;

5) $W(x) = -\sqrt{2}/2$;

6) $W(x) = 0$;

7) $W(x) = 0$;

8) $W(x) = -2e^{-6x}$.

4. 1) $y = C_1 e^{-5x} + C_2 e^{3x}$;

2) $y = C_1 e^{2x} + C_2 e^{-4x/3}$;

3) $y=4e^{x}+2e^{3x}$;

4) $y=C_1e^{-4x}+C_2xe^{-4x}$;

5) $y=e^{2x}-3xe^{2x}$;

6) $y=e^{-3x}\left(C_1\cos 4x+C_2\sin 4x\right)$;

7) $y=e^{x}\left(C_1\cos\frac{x}{2}+C_2\sin\frac{x}{2}\right)$;

8) $y=e^{2x}(3\cos 5x-\sin 5x)$;

9) $y=C_1+C_2e^{-x}+C_3e^{3x}$;

10) $y=C_1e^{-x}+C_2e^{-2x}+C_3e^{-3x}$;

11) $y=C_1e^{-x}+C_2xe^{-x}+C_3$;

12) $y=C_1+C_2e^{-2x}\cos 3x+C_3e^{-2x}\sin 3x$;

13) $y=e^{x}(1+x)$;

14) $y=x+e^{-x}$;

15) $y=C_1e^{2x}+e^{-x}(C_2\cos\sqrt{3}x+C_3\sin\sqrt{3}x)$;

16) $y=C_1e^{x}+C_2e^{-x}+C_3\cos x+C_4\sin x$;

17) $y=C_1e^{x}+C_2e^{-x}+e^{-x}(C_3\cos 2x+C_4\sin 2x)$;

18) $y=e^{-x}(C_1+C_3x)\cos x+e^{-x}(C_2+C_4x)\sin x$;

19) $y=C_1e^{2x}+(C_2+C_3x)\cos x+(C_4+C_5x)\sin x$;

20) $y=C_1e^{x}+C_2e^{-2x}+e^{-x}(C_3+C_4\cos x+C_5\sin x)$.

5. 1) $y=(C_1\cos x+C_2\sin x)e^{-x}+x/2$;

2) $y=(C_1+C_2x)e^{2x}+\frac{1}{4}x^2+\frac{1}{2}x+\frac{3}{8}$;

3) $y=C_1+C_2e^{-8x}+\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{8}x$;

4) $y=C_1e^{2x}+C_2e^{x}+\frac{1}{2}x^3+\frac{9}{4}x^2+\frac{21}{4}x+\frac{45}{8}$;

5) $y=C_1+C_2e^{-x}+(2x^2-6x+7)e^{x}$;

6) $y = C_1 + C_2 e^{-3x} - \left(\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x\right)e^{-3x}$;

7) $y = (C_1 + C_2 x)e^{-5x} + 2x^2 e^{-5x}$;

8) $y = C_1 e^{-3x} + C_2 e^{-2x} + (20x - 5x^2)e^{-2x}$;

9) $y = C_1 e^{-2x} + C_2 e^{4x} + 3\cos 2x$;

10) $y = C_1 \cos 4x + C_2 \sin 4x + x \sin 4x$;

11) $y = C_1 e^{-x} + C_2 e^{-2x} + \left(-\frac{3}{10}x + \frac{17}{50}\right)\cos x + \left(\frac{1}{10}x + \frac{3}{25}\right)\sin x$;

12) $y = C_1 \cos x + C_2 \sin x + x\cos x + x^2 \sin x$;

13) $y = C_1 + C_2 e^{-2x} + \frac{1}{5}e^x(-2\cos x + 6\sin x)$;

14) $y = e^{-2x}\left(C_1 \cos x + C_2 \sin x\right) + 5xe^{-2x}\sin x$;

15) $y = C_1 + C_2 x + C_3 e^{-x} + x^2/2$;

16) $y = C_1 + C_2 x + C_3 e^x - x^4 - 5x^3 - 15x^2$;

17) $y = C_1 e^x + C_2 \cos x + C_3 \sin x - (x^2 + 3x + 1)$;

18) $y = (C_1 + C_2 x + C_3 x^2)\, e^{x/3} + x^3 e^{x/3}$;

19) $y = C_1 e^{-x} + C_2 e^{-2x} + C_3 e^{-3x} + (x^2 - 3x)e^{-x}$;

20) $y = C_1 e^x + e^{-x/2}\left(C_2 \cos\frac{\sqrt{3}}{2}x + C_3 \sin\frac{\sqrt{3}}{2}x\right) + \frac{1}{2}(\cos x - \sin x)$;

21) $y = (C_1 + C_2 x + C_3 x^2)e^x - \frac{1}{8}e^x \sin 2x$;

22) $y = C_1 \cos x + C_2 \sin x + (C_3 + C_4 x)e^x + 1$;

23) $y = C_1 + C_2 x + C_3 \cos x + C_4 \sin x + \frac{1}{12}x^4 + \frac{1}{6}x^3 - x^2$;

24) $y = (C_1 + C_2 x)e^x + C_3 \cos x + C_4 \sin x + \frac{1}{4}x^2 e^x$;

25) $y = C_1 + C_2 e^{2x} + e^{-x}(C_3 \cos\sqrt{3}x + C_4 \sin\sqrt{3}x) + \frac{e^{2x}}{48}(x^2 - 2x)$;

26) $y = (C_1 + C_2 x)e^x + (C_3 + C_4 x)e^{-x} + \frac{1}{4}\cos x$.

6. 1) $y = x^2 + e^{3x}$;

2) $y = 2 - 2x$;

3) $y = -\frac{1}{2}e^x + \frac{1}{2}e^{-x} + 2xe^x$;

4) $y = x^2 e^{2x}$;

5) $y = e^{2x} - e^{3x} + xe^{-x}$;

6) $y = \cos 2x + \frac{1}{3}(\sin 2x + \sin x)$;

7) $y = \frac{6}{13}e^{-2x} + \frac{4}{13}\sin 3x - \frac{6}{13}\cos 3x$;

8) $y = \cos 3x + (x+1)\sin 3x$;

9) $y = 2e^x + (\sin x - 2\cos x)e^{-x} - 4$;

10) $y = -[\pi\cos x + (\pi + 1 - 2x)\sin x]e^x$;

11) $y = \frac{1}{2}e^x - \frac{1}{2}e^{-x} + x^2$;

12) $y = e^{3x}(x^3 + 1)$;

13) $y = \sin x + \cos x$;

14) $y = x^2 e^{-2x} + e^x$;

15) $y = \cos x + 2\sin x + e^{-x} + (2x - 3)e^x$;

16) $y = \frac{1}{9}\cos x$.

7. 1) $y = C_1 e^{-x} + C_2 e^{2x} - 2x + 1 + e^x$;

2) $y = C_1 + C_2 e^{3x} - 3x^2 - 2x + \cos x + 3\sin x$;

3) $y = (C_1 + C_2 x)e^{3x} + e^x - 8x^2 e^{3x}$;

4) $y = 2 + e^x(C_1 + C_2 x - \sin x)$;

5) $y = C_1 + C_2 e^{-x} + \frac{1}{3}x^3 - x^2 + \frac{5}{2}x + \frac{1}{2}e^x + \frac{1}{20}\sin 2x - \frac{1}{10}\cos 2x$;

6) $y=(C_1\cos 2x+C_2\sin 2x)e^{-x}+e^{-x}-4\cos 2x+\sin 2x$;

7) $y=C_1+C_2e^{-x}+C_3e^{2x}+x-x^2+\cos x$;

8) $y=C_1+C_2e^{2x}+C_3e^{-2x}+\frac{1}{5}\cos x-\frac{1}{12}x^3-\frac{1}{8}x+\frac{1}{32}e^{2x}(2x^2-3x)$;

9) $y=C_1+(C_2\cos x+C_3\sin x)e^x+\frac{1}{65}\left(\cos 4x-1{,}75\sin 4x\right)+$

$+\frac{1}{10}\left(\frac{1}{2}\sin 2x-\cos 2x\right)+\frac{3}{2}x$;

10) $y=(C_1+C_2x)e^{-x}+C_3\cos x+C_4\sin x-\frac{x}{8}\cos x+\frac{1}{4}e^x(x/2-1)$.

8. 1) $y=C_1+C_2x+\sqrt{1-e^{2x}}+e^x\arcsin e^x$;

2) $y=C_1e^x+C_2e^{-x}+\frac{1}{2}e^x\ln\frac{e^x-1}{2}-\frac{1}{2}e^{-x}(e^x-\ln(e^x-1))$;

3) $y=C_1e^x+C_2xe^x+x(\ln|x|-1)e^x$;

4) $y=C_1\cos 2x+C_2\sin 2x-\cos 2x\ln|\cos x|+\left(x-\frac{1}{2}tgx\right)\sin 2x$;

5) $y=C_1\cos x+C_2\sin x+\cos x\ln\left|tg\frac{x}{2}\right|+2$;

6) $y=C_1+C_2e^x+\frac{1}{2}e^x(e^x\sqrt{1-e^{2x}}+\arcsin e^x)-\frac{1}{3}\sqrt{(1-e^{2x})^3}$;

7) $y=(C_1+C_2x)e^x+e^x(x\,arctgx-\ln\sqrt{x^2+1})$;

8) $y=C_1\cos x+C_2\sin x-x\cos x+\sin x\ln|\sin x|$;

9) $y=C_1e^{\sqrt{2}\cdot x}+C_2e^{-\sqrt{2}\cdot x}+e^{x^2}$;

10) $y=C_1\sin x+C_2\cos x-\sqrt{\cos 2x})$.

9. 1) $y=C_1x^{-3}+C_2x^2$;

2) $y=x^{-1}(C_1+C_2\ln x)$;

3) $y=x(C_1\cos\ln x+C_2\sin\ln x)$;

4) $y=C_1+C_2x^2+C_3x^4$;

5) $y=C_1+C_2\ln x+C_3x^3$;

6) $y = C_1(x+2) + C_2(x+2)^{-3}$;

7) $y = C_1(2x+1) + C_2(2x+1)\ln(2x+1)$;

8) $y = C_1 + C_2(x+1)^5 + C_3(x+1)^{-2}$;

9) $y = C_1 + (2x+1)\left[C_2 \cos\frac{\ln(2x+1)}{\sqrt{2}} + C_3 \sin\frac{\ln(2x+1)}{\sqrt{2}}\right]$;

10) $y = C_1 \cos(2\arccos x) + C_2 \sin(2\arccos x)$;

11) $y = C_1 \cos(\sqrt{2}\arccos x) + C_2 \sin(\sqrt{2}\arccos x)$.

Ключові терміни

Лінійне диференціальне рівняння вищого порядку (ЛДР-n); однорідне (неоднорідне) ЛДР-n; теорема Коші; лінійно залежна (лінійно незалежна) система функцій; вронскіан; лінійна комбінація частинних розв'язків; структура загального розв'язку; метод Лагранжа; квазімногочлен; принцип суперпозиції; лінійний диференціальний оператор; операторна форма завдання; характеристичне рівняння; підстановка; рівняння Ейлера; рівняння Чебишева; формула Абеля.

Резюме

Викладено основи теорії лінійних диференціальних рівнянь вищого порядку. Розглянуто: означення основних понять, структуру загального розв'язку однорідного і неоднорідного рівняння, методи відшукання частинних розв'язків рівнянь зі сталими коефіцієнтами (метод Лагранжа, метод невизначених коефіцієнтів); рівняння другого і вищих порядків зі змінними коефіцієнтами та їх зведення до рівнянь зі сталими коефіцієнтами або до рівнянь, що не містять похідної ($n-1$)-го порядку.

Література: [6; 8; 14; 16 – 18; 19; 22; 28].

19. Системи лінійних диференціальних рівнянь (СЛДР)

Все людство досі не сплатило за розробку математиком Максвеллом теорії електромагнітного поля – без цієї математики не було б у нас ні світла, ні електричок, ні метро. І автомобілі, і літаки, і супутники, і підводні човни, і телебачення – нічого цього без математики не було б.

В. І. Арнольд

Мета: навчити майбутніх фахівців умінню за швидкісними (граничними) величинами, що описують економічні процеси або складові інформаційних систем, відтворювати їхні загальні характеристики (загальні витрати, загальний дохід, енергію сигналу тощо).

Питання теми:

19.1. Означення основних понять. Теорема Коші.
19.2. Однорідні системи ЛДР-1 зі сталими коефіцієнтами.
19.3. Неоднорідні системи ЛДР-1 зі сталими коефіцієнтами.
19.4. Деякі задачі застосовного характеру.

Компетентності, що формуються після вивчення теми:

Загальнонаукова: володіння засобами знаходження невідомої функції за відомими співвідношеннями між нею та її похідними.

Загальнопрофесійна: підготовленість до аналізу швидкісних (граничних) характеристик функціональних залежностей із метою обробки інформації, яку несуть часові (сигнальні) функції.

Спеціалізовано-професійна: уміння впроваджувати диференціальні рівняння та їх системи в моделювання процесів управління інформаційними системами.

19.1 Означення основних понять. Теорема Коші

Системою диференціальних рівнянь першого порядку (ДР-1) називається сукупність n диференціальних рівнянь, що містять незалежну змінну x, одні й ті ж самі невідомі функції $y_j = y_j(x)$ та їх похідні $y'_j = y'_j(x)$, $j = \overline{1,n}$:

$$\Phi_i(x,\ y_1(x),\ y_2(x),\ ...,y_n(x),\ y_1'(x),\ y_2'(x),...y_n'(x))=0\,,\ \ i=\overline{1,n}\,, \quad (19.1.1)$$

де ліві частини рівностей є функціями змінних x, y_j, y_j', $j=\overline{1,n}$;

Φ_i, $i=\overline{1,n}$, – закон, якому підпорядковуються названі змінні.

Системою лінійних диференціальних рівнянь першого порядку (СЛДР-1) називається система рівнянь (19.1.1), у яких ліві частини є лінійними функціями від невідомих функцій та їх похідних.

Нормальною СЛДР-1 називають систему рівнянь, розв’язаних відносно похідних від невідомих функцій, і таких, що праві частини відповідних рівностей не містять похідних:

$$y_i'(x)=\psi_i(x,y_1(x),y_2(x),\ ...,\ y_n(x))\ ,\quad i=\overline{1,n}\,, \quad (19.1.2)$$

Звичайно нормальні системи записують у вигляді:

$$\begin{cases} y_1'=a_{11}(x)\cdot y_1+a_{12}(x)\cdot y_2+...+a_{1n}(x)\cdot y_n+f_1(x), \\ y_2'=a_{21}(x)\cdot y_1+a_{22}(x)\cdot y_2+...+a_{2n}(x)\cdot y_n+f_2(x), \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ y_n'=a_{n1}(x)\cdot y_1+a_{n2}(x)\cdot y_2+...+a_{nn}(x)\cdot y_n+f_n(x), \end{cases} \quad (19.1.3)$$

де $a_{ij}(x)$, $f_i(x)$ ($i=\overline{1,n}$; $j=\overline{1,n}$) – задані (відомі) функції.

Більш стисло систему (19.1.3) записують так:

$$y_i'=\sum_{j=1}^{n}a_{ij}(x)y_j+f_i(x),\ \ i=\overline{1,n}. \quad (19.1.4)$$

Якщо ввести в розгляд матрицю-стовпець Y невідомих функцій $y_i=y_i(x)$, матрицю-стовпець Y' їх похідних $y_i'=y_i'(x)$, матрицю A множників $a_{ij}=a_{ij}(x)$ при невідомих, матрицю-стовпець F відомих функцій $f_i=f_i(x)$:

$$Y=\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix},\quad Y'=\begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \\ \vdots \\ y_n' \end{pmatrix},\quad A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix},\quad F=\begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ \vdots \\ f_n \end{pmatrix},$$

то приходимо до так званої **матричної форми** запису системи (19.1.3):

$$Y' = AY + F. \qquad (19.1.5)$$

Матриці-стовпці Y, Y', F називають **векторними функціями**, або **вектор-функціями**, аргументу x: $Y = Y(x)$, $Y' = Y'(x)$, $F = F(x)$.

Якщо на деякому інтервалі (a,b) всі елементи вектор-функції $F(x)$ є тотожними нулями: $F(x) \equiv \overline{0} = (0,0,...,0)^T$, то система називається **однорідною** на цьому проміжку:

$$Y' = AY \text{ – однорідна СЛДР-1 } \rightleftharpoons \ f_i(x) \equiv 0 \ \forall i = \overline{1,n}. \qquad (19.1.6)$$

Якщо ж на деякому інтервалі (a,b) вектор-функція $F(x)$ має ненульові елементи, то система називається **неоднорідною** на цьому проміжку:

$$Y' = AY + F \text{ – неоднорідна СЛДР-1} \rightleftharpoons \exists\, i \in \{1,2,...,n\}\colon f_i(x) \not\equiv 0. \qquad (19.1.7)$$

Однорідна система, яка отримується з неоднорідної зануленням вектора-функції $F(x)$, називається **відповідною неоднорідній системі рівнянь**. Систему (19.1.6) можна подати у вигляді: $Y' - AY = \overline{0}$.

Означення понять щодо розв'язків СЛДР-1 змістовно аналогічні означенням, які вводилися стосовно диференціальних рівнянь.

Набір (кортеж) функцій $(\varphi_1(x), \varphi_2(x), ..., \varphi_n(x))$, $x \in (a,b)$, називають **розв'язком системи на (a,b)**, якщо при підстановці в рівняння системи замість y_i функцій $\varphi_i(x)$ рівняння перетворюються у тотожності, і кажуть, що функції $\varphi_i(x)$ *задовольняють систему*.

Під **загальним розв'язком** системи ЛДР-1 (19.1.3) розуміють набір функцій $\varphi_i = \varphi_i(x, C_1, C_2, ..., C_n)$, де C_i – числові параметри ($C_i \in \mathbf{R}$), $i = \overline{1,n}$, таких, що:

1) функції φ_i задовольняють систему при будь-яких значеннях параметрів C_i; тому їх називають **довільними сталими**;

2) для заданих початкових умов: $y_{i0} = y_i(x_0)$, $i = \overline{1,n}$, існують такі значення параметрів C_i^0, що функції φ_i задовольняють ці умови, тобто

$\varphi_i(x_0, C_1^0, C_2^0, ..., C_n^0) = y_{i0}$ (інакше, вибираючи відповідним чином сталі C_i, можна отримати будь-який розв'язок системи).

Розв'язок системи, отриманий із загального при конкретних (фіксованих) значеннях констант C_i, $i = \overline{1,n}$, називається **частинним розв'язком СЛДР-1**.

Відшукання частинного розв'язку системи: $y_i = \varphi_i(x)$, $i = \overline{1,n}$, який задовольняє задані початкові умови називають **задачею Коші**.

Теорема 19.1.1 (*існування та єдиності розв'язку задачі Коші*). Якщо функції $a_{ij} = a_{ij}(x)$ і $f_i = f_i(x)$ неперервні на інтервалі (a,b), то розв'язок системи (19.1.3) на цьому інтервалі однозначно визначається початковими умовами: $y_{i0} = y_i(x_0)$, або $y_{i0} = y_i(x)\big|_{x=x_0}$, $i = \overline{1,n}$. ■

Якщо в нормальній системі ЛДР-1 функції $a_{ij} = a_{ij}(x)$ є сталими, то вона називається **нормальною системою ЛДР-1 зі сталими коефіцієнтами**. Означені системи у порівнянні з системами іншого вигляду легше піддаються розв'язанню. (У кожній точці *якого інтервалу* для таких систем розв'язок існує і єдиний?)

19.2. Однорідні системи ЛДР-1 зі сталими коефіцієнтами

Структура загального розв'язку

Теорія однорідних СЛДР-1 зі сталими коефіцієнтами будується аналогічно теорії диференціальних рівнянь n-го порядку (ДР-n).

Нехай маємо n розв'язків однорідної системи (19.1.5):

$$Y_1 = \begin{pmatrix} y_{11} \\ y_{21} \\ \vdots \\ y_{n1} \end{pmatrix}, \ Y_2 = \begin{pmatrix} y_{12} \\ y_{22} \\ \vdots \\ y_{n2} \end{pmatrix}, \ \ldots, \ Y_n = \begin{pmatrix} y_{1n} \\ y_{2n} \\ \vdots \\ y_{nn} \end{pmatrix},$$

де $y_{ij} = y_{ij}(x)$; індекс i (j) указує на номер функції (розв'язку).

Визначник матриці, складеної з векторних функцій $Y_j(x)$, $j = \overline{1,n}$, називають **визначником Вронського** (**вронскіаном**) для цієї системи функцій:

$$W(x)=\begin{vmatrix} y_{11}(x) & y_{12}(x) & \dots & y_{1n}(x) \\ y_{21}(x) & y_{22}(x) & \dots & y_{2n}(x) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ y_{n1}(x) & y_{n2}(x) & \dots & y_{nn}(x) \end{vmatrix}. \qquad (19.2.1)$$

Теорема 19.2.1 (*про лінійну комбінацію розв'язків системи*). Якщо вектор-функції $Y_1,\ Y_2,\ \dots,\ Y_n$ є розв'язками однорідної системи, то їх лінійна комбінація: $\sum_{j=1}^{n} C_j\, Y_j(x)$, $\forall C_j \in \mathbf{R}$, є також розв'язком системи:

$$\left(Y' - AY\right)\Big|_{Y=Y_j} = \overline{0} \quad \Rightarrow \quad \frac{d}{dx}\sum_{j=1}^{n} C_j\, Y_j(x) - A(x)\sum_{j=1}^{n} C_j\, Y_j(x) = \overline{0}\,. \qquad (19.2.2)$$

Д о в е д е н н я. Справедливість правої частини (після символу $\Rightarrow$) співвідношення (19.2.2) покажемо, застосовуючи властивості про похідну суми функцій і про винесення сталої за знак похідної:

$$\sum_{j=1}^{n} C_j \frac{d}{dx} Y_j(x) - A(x)\sum_{j=1}^{n} C_j Y_j(x) = \sum_{j=1}^{n} C_j\,(Y_j'(x) - A(x)Y_j(x)) = \overline{0}\,,$$

бо за умовою теореми $Y_j'(x) - A(x)Y_j(x) = \overline{0}\ \ \forall j = \overline{1,n}$. ■

Множину (систему) розв'язків $Y_j(x)$, $j = \overline{1,n}$, називають **лінійно незалежною на (a,b)**, якщо $\forall x \in (a,b)$ їх лінійна комбінація задовольняє рівність $\sum_{j=1}^{n} \alpha_j Y_j(x) = \overline{0}$ тільки при $\alpha_j = 0\ \ \forall j = \overline{1,n}$.

Теорема 19.2.2 (*про нерівність нулю вронскіана*). Якщо розв'язки однорідної системи: $Y_1,\ Y_2,\ \dots,\ Y_n$, лінійно незалежні, то в кожній точці інтервалу (a,b) визначник Вронського не дорівнює нулю:

$$\forall x \in (a,b)\ \overline{\exists}\alpha_j \ne 0 : \sum_{j=1}^{n} \alpha_j Y_j(x) = \overline{0} \ \Rightarrow\ W(x) \ne 0\ \ \forall x \in (a,b). \qquad (19.2.3)$$

Д о в е д е н н я. Припустимо, що існує $x_0 \in (a,b)$, для якого

$$W(x_0) = \begin{vmatrix} y_{11}(x_0) & y_{12}(x_0) & \dots & y_{1n}(x_0) \\ y_{21}(x_0) & y_{22}(x_0) & \dots & y_{2n}(x_0) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ y_{n1}(x_0) & y_{n2}(x_0) & \dots & y_{nn}(x_0) \end{vmatrix} = 0. \qquad (19.2.4)$$

Але із умов лінійної незалежності: $\overline{\exists}\alpha_j \neq 0: \sum\limits_{j=1}^{n} \alpha_j Y_j(x) = \overline{0}$, випливає, що відносно параметрів α_j відповідна однорідна СЛАР $n \times n$:

$$\begin{cases} y_{11}(x_0)\cdot\alpha_1 + \; y_{12}(x_0)\cdot\alpha_2 + ... + y_{1n}(x_0)\cdot\alpha_n = 0, \\ y_{21}(x_0)\cdot\alpha_1 + \; y_{22}(x_0)\cdot\alpha_2 + ... + y_{2n}(x_0)\cdot\alpha_n = 0, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ y_{n1}(x_0)\cdot\alpha_1 + \; y_{n2}(x_0)\cdot\alpha_2 + ... + y_{nn}(x_0)\cdot\alpha_n = 0 \end{cases} \qquad (19.2.5)$$

має тільки тривіальний розв'язок, тому визначник системи, яким є $W(x_0)$, повинен бути відмінним від нуля. Отже, припущення не є слушним. ■

Сукупність розв'язків $Y_j(x)$, $j = \overline{1,n}$, однорідної СЛДР-1, для якої визначник Вронського відмінний від нуля в усіх точках інтервалу (a,b), називається **фундаментальною системою розв'язків** (**ФСР**) **на** $(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})$.

Теорема 19.2.3 (*про структуру загального розв'язку*). Загальним розв'язком $Y = Y(x)$ однорідної системи (19.1.5) на інтервалі (a,b) є лінійна комбінація функцій фундаментальної системи розв'язків на (a,b):

$$(Y_j(x),\ j = \overline{1,n}) - \text{ФСР} \;\Rightarrow\; Y = \sum_{j=1}^{n} C_j Y_j(x) \;\; - \text{загальний розв'язок.} \qquad (19.2.6)$$

Д о в е д е н н я. Перевіримо, чи задовольняє векторна функція $Y = \sum\limits_{j=1}^{n} C_j Y_j(x)$ умови означення загального розв'язку.

Перша умова виконується завдяки теоремі 19.2.1 (*про лінійну комбінацію розв'язків системи)*.

Друга умова теж виконується, бо для будь-яких заданих початкових умов: $y_{i0} = y_i(x_0)$, $i = \overline{1,n}$, або $Y_0 = (y_{10}, y_{20}, ..., y_{n0})^T$, відшукання відповідних значень C_j^0 зводиться (*яким чином?*) до розв'язання неоднорідної СЛАР $n \times n$, визначником якої є відмінний від нуля вронскіан. Ця умова забезпечує єдиний розв'язок СЛАР $n \times n$: $C_1^0, C_2^0, ..., C_n^0$. ■

Основні способи розв'язання

І. Розв'язання систем методом виключення (або зведенням до одного диференціального рівняння n-го порядку (ДР-n)).

Суть методу полягає у такому. Беремо одне (зазвичай перше) з рівнянь $y_i' = \sum\limits_{j=1}^{n} a_{ij} y_j$, $i = \overline{1,n}$, і диференціюємо його ліву і праву частини до порядку n включно, підставляючи на кожному кроці замість похідних y_1', y_2', …, y_n' праві частини заданих рівнянь. У результаті приходимо до системи:

$$\begin{cases} y_1' & = & a_{11}y_1 & + & a_{12}y_2 & + & \dots & + & a_{1n}y_n, \\ y_1'' & = & A_{21}y_1 & + & A_{22}y_2 & + & \dots & + & A_{2n}y_n, \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ y_1^{(n-1)} & = & A_{n-1,1}y_1 & + & A_{n-1,2}y_2 & + & \dots & + & A_{n-1,n}y_n, \\ y_1^{(n)} & = & A_{n1}y_1 & + & A_{n2}y_2 & + & \dots & + & A_{nn}y_n, \end{cases} \qquad (19.2.7)$$

де A_{ij}, $i = \overline{2,n}$, $j = \overline{1,n}$ – коефіцієнти при невідомих функціях у правих частинах рівнянь після взяття похідної i-го порядку функції $y_1 = y_1(x)$.

Потім із перших $n-1$ рівнянь виражаємо $y_j = y_j(x)$, $j = \overline{2,n}$, через функцію $y_1(x)$ та її похідні y_1', y_1'', …, $y_1^{(n-1)}$:

$$y_j = \psi_j(x, y_1, y_1', y_1'', ..., y_1^{(n-1)}), \quad j = \overline{2,n}, \qquad (19.2.8)$$

Підставляючи вирази для y_j в останнє рівняння, отримаємо ДР-n, за яким відновлюється функція $y_1 = \varphi_1(x, C_1, C_2, ..., C_n)$.

Далі $n-1$ разів диференціюємо знайдену функцію $y_1(x)$, підставляємо відповідні вирази у (19.2.8), визначаючи таким чином функції $y_j = \varphi_j(x, C_1, C_2, ..., C_n)$, $j = \overline{2, n}$.

Якщо задано початкові умови, то для розв'язання задачі Коші відповідні значення параметрів C_1^0, C_2^0, ..., C_n^0 відшукуються подібно до того, як це робилося у випадку одного диференціального рівняння n-го порядку.

Покажемо реалізацію методу на прикладі СЛДР-1 двох рівнянь:

$$\begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}, \text{ або } \begin{cases} y_1' = a_{11}y_1 + a_{12}y_2\,, & (1) \\ y_2' = a_{21}y_1 + a_{22}y_2\,. & (2) \end{cases} \qquad (19.2.9)$$

1-й крок. Знаходимо y_1'', диференціюючи ліву і праву частини *першого* рівняння:

$$y_1'' = a_{11}y_1' + a_{12}y_2' \quad (3);$$

2-й крок. Підставляємо замість y_2' праву частину другого рівняння:

$$y_1'' = a_{11}y_1' + a_{12}(a_{21}y_1 + a_{22}y_2) \quad (4)$$

3-й крок. Виключаємо із (4) функцію y_2, виражаючи її з першого рівняння:

$$y_2 = a_{12}^{-1}\left(y_1' - a_{11}y_1\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \; y_1'' = a_{11}y_1' + a_{12}[a_{21}y_1 + a_{22}(a_{12}^{-1}\left(y_1' - a_{11}y_1\right))] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \; y_1'' - (a_{11} + a_{22})y_1' + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} y_1 = 0. \quad (5) \qquad (19.2.10)$$

4-й крок. Розв'язуємо отримане ДР-2 відносно $y_1(x)$, а потім, знову залучаючи *перше* рівняння , знаходимо і $y_2(x) = a_{12}^{-1}\left(y_1' - a_{11}y_1\right)$.

Зауваження:

1) згідно (5) коефіцієнтами при y_1' і y_1 є відповідно сума діагональних елементів матриці A, взята з протилежним знаком, і її визначник; співвідношенням (19.2.10) можна користуватися як „готовою формулою"

для отримання ДР-2; корені характеристичного рівняння обчислюються за формулою (*покажіть це самостійно*):

$$k_{1,2}=\frac{1}{2}\left((a_{11}+a_{22})\pm\sqrt{(a_{11}-a_{22})^2+4a_{12}a_{21}}\right).$$

2) ДР-2, відповідне системі двох рівнянь, здобувають і інакше (може цей підхід комусь більше сподобається).

1-й крок. Знаходять з *першого* рівняння y_2 і потім похідну y_2':

$$\begin{cases} y_1'=a_{11}y_1+a_{12}y_2, & (1) \\ y_2'=a_{21}y_1+a_{22}y_2 & (2) \end{cases} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} y_2=a_{12}^{-1}(y_1'-a_{11}y_1), \\ y_2'=a_{12}^{-1}(y_1''-a_{11}y_1'). \end{array}\right. \quad (3)$$

2 -й крок. Підставляють вирази для y_2 і y_2' у *друге* рівняння:

$$a_{12}^{-1}(y_1''-a_{11}y_1')=a_{21}y_1+a_{22}a_{12}^{-1}(y_1'-a_{11}y_1) \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad y_1''+py_1'+qy_1=0 \quad (4)\ ,$$

де $p=-(a_{11}+a_{22})$, $q=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$.

Приклад. Розв'язати систему методом виключення невідомих:

$$\begin{cases} y_1'=-3y_1-y_2, & (1) \\ y_2'=y_1-y_2. & (2) \end{cases} \qquad (19.2.11)$$

Розв'язання. Здійснюємо перехід до ДР-2, виконуючи (ланцюжком) описані три кроки (за першим сценарієм):

$$y_1''=-3y_1'-y_2' \Rightarrow \underbrace{|y_2'=y_1-y_2|}_{\text{згідно з (2)}} \Rightarrow y_1''=-3y_1'-(y_1-y_2) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \underbrace{|y_2=-y_1'-3y_1|}_{\text{із (1)}} \Rightarrow y_1''=-3y_1'-y_1-y_1'-3y_1 \Rightarrow y_1''+4y_1'+4y_1=0.$$

Розв'язуємо отримане рівняння:

$$(k^2+4k+4=0 \Rightarrow k_{1,2}=k=-2) \Rightarrow y_1=e^{-2x}(C_1+C_2x).$$

Знаходимо y_1' і другу функцію ($y_2 = -y_1' - 3y_1$):

$$y_1' = -2e^{-2x}(C_1 + C_2 x) + C_2 e^{-2x} = e^{-2x}(-2C_1 + (1-2x)C_2);$$

$$y_2 = e^{-2x}(2C_1 - (1-2x)C_2) - 3C_1 - 3C_2 x) = -e^{-2x}(C_1 + (1+x)C_2).$$

Таким чином,

$$Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{-2x}(C_1 + C_2 x) \\ -e^{-2x}(C_1 + (1+x)C_2) \end{pmatrix}$$ – загальний розв'язок. ● (19.2.12)

Якщо у загальному розв'язку покласти, наприклад, $C_1 = 0$, $C_2 = 1$, то отримаємо один із нескінченної кількості розв'язків:

$$\left[\begin{array}{l} y_1 = xe^{-2x}, \\ y_2 = -(1+x)e^{-2x} \end{array}\right.$$ – частинний розв'язок.

Задамо тепер початкові умови: $y_1(-1) = e^2$, $y_2(-1) = 0$, і розв'яжемо задачу Коші. Розв'язання зводиться до знаходження значень параметрів C_1^0, C_2^0, що визначають частинний розв'язок, який задовольняє початкові умови:

$$\left[\begin{array}{l} y_1 = e^{-2x}(C_1 + C_2 x), \\ y_2 = -e^{-2x}(C_1 + (1+x)C_2) \end{array}\right. \Rightarrow \left|\begin{array}{l} y_1\big|_{x=-1} = e^2 \\ y_2\big|_{x=-1} = 0 \end{array}\right| \Rightarrow \begin{cases} e^2 = e^2(C_1 - C_2), \\ 0 = -e^2 C_1 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} C_1^0 = 0, \\ C_2^0 = -1 \end{cases} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} y_1 = -xe^{-2x}, \\ y_2 = (1+x)e^{-2x} \end{array}\right.$$ – розв'язок задачі Коші.

(*З'ясуйте,* для яких початкових умов $C_1 = 0$, $C_2 = 1$.)

ІІ. Розв'язання систем методом Ейлера.

Суть методу полягає у знаходженні лінійно незалежних частинних розв'язків системи (подібно до того, як це робилося при розв'язанні лінійних ДР-n із постійними коефіцієнтами).

Частинні розв'язки відшукують у вигляді: $y_i = s_i e^{kx}$, $i = \overline{1,n}$, де s_i і k константи, які підбираються так, щоб функції $\varphi_i(x) = s_i e^{kx}$ задовольняли систему.

Підставляючи $y_i = s_i e^{kx}$ у систему $Y' = AY$ (19.1.5) і скорочуючи на e^{kx}, отримуємо однорідну СЛАР $n \times n$ для визначення сталих s_i, $i = \overline{1, n}$:

$$\begin{cases} (a_{11} - k)s_1 + a_{12}s_2 + \ldots + a_{1n}s_n = 0, \\ a_{21}s_1 + (a_{22} - k)s_2 + \ldots + a_{2n}s_n = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1}s_1 + a_{n2}s_2 + \ldots + (a_{nn} - k)s_n = 0. \end{cases} \qquad (19.2.13)$$

Відмінні від нуля s_1, s_2, …, s_n можна знайти лише за умови, що її визначник дорівнює нулеві (*чому?*):

$$\begin{vmatrix} a_{11} - k & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - k & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} - k \end{vmatrix} = 0, \qquad (19.2.14)$$

при цьому система (19.2.13) матиме безліч розв'язків (*на якій підставі?*)

Після розкриття визначника приходимо до многочлена n-го степеня відносно параметра k: $P_n(k) = k^n + a_1 k^{n-1} + \ldots + a_{n-1}k + a_n$.

Алгебраїчне рівняння

$$k^n + a_1 k^{n-1} + \ldots + a_{n-1}k + a_n = 0, \qquad (19.2.15)$$

корені якого є значеннями параметра k у частинних розв'язках $y_i = s_i e^{kx}$, $i = \overline{1, n}$, однорідної СЛДР-1, називається її **характеристичним рівнянням**, а многочлен $P_n(k)$ – **характеристичним многочленом**.

Кожному кореню рівняння $P_n(k) = 0$ відповідає ненульовий розв'язок однорідної системи алгебраїчних рівнянь (19.2.13), а значить і ненульовий розв'язок однорідної СЛДР-1:

$$Y_j = (y_{1j}, y_{2j}, \ldots, y_{nj})^T, \quad j = \overline{1, n}. \qquad (19.2.16)$$

Залежно від коренів k_1, k_2, …, k_n характеристичного рівняння системи розрізняють три випадки.

1^0. ***Усі корені дійсні і різні.*** Тоді розв'язки Y_j складають лінійно незалежну, а значить фундаментальну, систему частинних розв'язків $(W(x) \neq 0 \quad \forall x \in (a,b))$, і загальний розв'язок системи диференціальних рівнянь є лінійною комбінацією частинних розв'язків:

$$Y = \sum_{j=1}^{n} C_j Y_j(x) = C_1 \begin{pmatrix} s_{11}e^{k_1 x} \\ s_{21}e^{k_1 x} \\ \vdots \\ s_{n1}e^{k_1 x} \end{pmatrix} + C_2 \begin{pmatrix} s_{12}e^{k_2 x} \\ s_{22}e^{k_2 x} \\ \vdots \\ s_{n2}e^{k_2 x} \end{pmatrix} + \ldots + C_n \begin{pmatrix} s_{1n}e^{k_n x} \\ s_{2n}e^{k_n x} \\ \vdots \\ s_{nn}e^{k_n x} \end{pmatrix}, \quad (19.2.17)$$

де s_{ij} – значення параметру s_i в j-му частинному розв'язку.

Або більш стисло:

$$Y = \begin{pmatrix} s_{11} & s_{12} & \cdots & s_{1n} \\ s_{21} & s_{22} & \cdots & s_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ s_{n1} & s_{n2} & \cdots & s_{nn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} C_1 e^{k_1 x} \\ C_2 e^{k_2 x} \\ \vdots \\ C_n e^{k_n x} \end{pmatrix} \text{ – загальний розв'язок.} \quad (19.2.18)$$

Приклад. Розв'язати за Ейлером систему трьох диференціальних рівнянь із трьома невідомими функціями:

$$\begin{cases} y_1' = -3y_1 + y_2 - y_3, \\ y_2' = y_1 - 5y_2 + y_3, \\ y_3' = -y_1 + y_2 - 3y_3. \end{cases}$$

Розв'язання.

1-й крок. Частинні розв'язки шукаємо у вигляді: $y_i = s_i e^{kx}$, $i = \overline{1,3}$. Записуємо однорідну СЛАР для визначення сталих s_i (див. (19.2.13)):

$$\begin{cases} (-3-k)s_1 + s_2 - s_3 = 0, \\ s_1 + (-5-k)s_2 + s_3 = 0, \\ -s_1 + s_2 + (-3-k)s_3 = 0. \end{cases} \quad (19.2.19)$$

2-й крок. Складаємо характеристичне рівняння:

$$P_3(k)=\begin{vmatrix} -3-k & 1 & -1 \\ 1 & -5-k & 1 \\ -1 & 1 & -3-k \end{vmatrix}=0 \;\Rightarrow\; k^3+11k^2+36k+36=0,$$

і знаходимо його корені серед від'ємних дільників вільного члена:

$$k_1=-6,\; k_2=-3,\; k_3=-2.$$

3-й крок. Підставляємо по черзі у систему (19.2.19) замість k числа k_1, k_2, k_3 і знаходимо сталі s_1, s_2, s_3 для кожного із них:

$$k_1=-6:\begin{cases} 3s_1 + s_2 - s_3=0, \\ s_1 + s_2 + s_3=0, \\ -s_1 + s_2+3s_3=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} s_1 + s_2 + s_3=0, \\ -s_1 + s_2+3s_3=0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left| \begin{array}{c} \text{оголошуємо вільною} \\ \text{змінною } s_3 \text{ і беремо } s_3=1 \end{array} \right| \Rightarrow \begin{pmatrix} s_{11} \\ s_{21} \\ s_{31} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Аналогічно, покладаючи $s_3=1$, дістанемо (*переконайтеся самі*):

$$k_2=-3:\begin{pmatrix} s_{12} \\ s_{22} \\ s_{32} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix};\quad k_3=-2:\begin{pmatrix} s_{13} \\ s_{23} \\ s_{33} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

4-й крок. Записуємо у формі (19.2.18) загальний розв'язок:

$$Y=\begin{pmatrix} s_{11} & s_{12} & s_{13} \\ s_{21} & s_{22} & s_{23} \\ s_{31} & s_{32} & s_{33} \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} C_1e^{k_1x} \\ C_2e^{k_2x} \\ C_3e^{k_3x} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} C_1e^{-6x} \\ C_2e^{-3x} \\ C_3e^{-2x} \end{pmatrix}.$$

Тобто: $y_1=C_1e^{-6x}+C_2e^{-3x}-C_3e^{-2x}$,

$y_2=-2C_1e^{-6x}+C_2e^{-3x}$,

$y_3=C_1e^{-6x}+C_2e^{-3x}+C_3e^{-2x}$. ●

2^0. ***Серед коренів є r-кратний*** ($r>1$). Позначимо його через k^*. Відповідний частинний розв'язок системи Y^* знаходять у вигляді:

$$Y^* = \left(y_1,\ y_2,...,\ y_n\right)^T = \left(M_1(x)e^{k^*x},\ M_2(x)e^{k^*x},...,\ M_n(x)e^{k^*x}\right)^T, \quad (19.2.20)$$

де $M_i(x)$, $i=\overline{1,n}$, – многочлени степеня не вище $m-1$ із невизначеними коефіцієнтами (індекс i – номер многочлена, а не його степінь):

$$M_i(x) = a_{i0} + a_{i1}x + ... + a_{i,m-1}x^{m-1}.$$

Коефіцієнти a_{i0}, a_{i1}, …, $a_{i,m-1}$ визначаються так:

підставляють $y_i = M_i(x)e^{k^*x}$ і $y_i' = (M_i(x)e^{k^*x})_x'$ у рівняння системи;

прирівнюють, після скорочення на e^{k^*x}, коефіцієнти при однакових степенях x у лівих і правих частинах кожної з рівностей;

розв'язують отриману невизначену однорідну систему лінійних алгебраїчних рівнянь із m вільними невідомими – довільними сталими.

При порівняно невеликих m невизначені коефіцієнти позначають прописними або малими літерами без індексів.

Приклад. Розв'язати систему рівнянь (19.2.11) методом Ейлера:

$$\begin{cases} y_1' = -3y_1 - y_2, \\ y_2' = y_1 - y_2. \end{cases}$$

Розв'язання.

1-й крок. Покладаємо: $y_1(x) = s_1e^{kx}$, $y_2(x) = s_2e^{kx}$, де $s_1 \neq 0$, $s_2 \neq 0$, і, підставляючи y_1, y_2 в задані рівняння, отримуємо систему двох алгебраїчних рівнянь для визначення s_1, s_2 (після скорочення на e^{kx}):

$$\left|\begin{matrix} y_1' = ks_1e^{kx} \\ y_2' = ks_2e^{kx} \end{matrix}\right| \Rightarrow \begin{cases} (a_{11}-k)s_1 + \quad a_{12}s_2 & = 0, \\ \quad a_{21}s_1 \quad + (a_{22}-k)s_2 & = 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} (-3-k)s_1 - \quad s_2 & = 0, \\ \quad s_1 \quad + (-1-k)s_2 & = 0. \end{cases}$$

2-й крок. Складаємо характеристичне рівняння системи і розв'язуємо його:

$$\begin{vmatrix} -3-k & -1 \\ 1 & -1-k \end{vmatrix} = 0 \;\Rightarrow\; (k^2+4k+4=0 \;\Rightarrow\; k_{1,2}=k^*=-2) \;\Rightarrow\; r=2.$$

Відповідний розв'язок СЛДР-1 згідно з (19.2.20) шукаємо у вигляді:

$$Y^* = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (a+bx)e^{-2x} \\ (c+dx)e^{-2x} \end{pmatrix}.$$

3-й крок. Установлюємо значення параметрів a, b, c, d. Для цього знаходимо похідні:

$$y_1' = (-2a-2bx+b)e^{-2x}, \quad y_2' = (-2c-2dx+d)e^{-2x},$$

і підставляємо вирази для y_1, y_2, y_1', y_2' у рівняння заданої системи:

$$\begin{cases} y_1' = -3y_1 - y_2, \\ y_2' = y_1 - y_2 \end{cases} \;\Rightarrow\; \begin{cases} -2a-2bx+b = -3a-3bx-c-dx, \\ -2c-2dx+d = a+bx-c-dx. \end{cases}$$

Прирівнюємо коефіцієнти при x і вільні члени в обох рівняннях:

$$\begin{array}{c|l} x^1 & \\ x^0 & \\ x^1 & \\ x^0 & \end{array}\begin{cases} -2b = -3b-d, \\ -2a+b = -3a-c, \\ -2d = b-d, \\ -2c+d = a-c \end{cases} \;\Rightarrow\; \begin{cases} a+b+c=0, \\ a+c-d=0 \end{cases} \;\Rightarrow\; \begin{cases} b=-(a+c), \\ d=a+c \end{cases}$$

і покладаємо: $a=C_1$, $c=C_2$, тоді $b=-(C_1+C_2)$, $d=C_1+C_2$.

4-й крок. Записуємо загальний розв'язок системи:

$$Y = Y^* = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} M_1(x)e^{k^*x} \\ M_2(x)e^{k^*x} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} [C_1-(C_1+C_2)x]\,e^{-2x} \\ [C_2+(C_1+C_2)x]\,e^{-2x} \end{pmatrix}. \; \bullet \qquad (19.2.21)$$

(*Чому* за виглядом y_1, y_2 розв'язки (19.2.12) і (19.2.21) *не збігаються?*)

3[0]. ***Серед коренів є компле́ксно-спряжені*** ($k_{1,2} = a \pm bi$, $b \neq 0$).

Щоб подати загальний розв'язок через функції дійсного аргументу (в разі матриці A з дійсними елементами), треба скористатися тим, що дійсна (Re) і уявна (Im) частини комплексного розв'язку, відповідного одному комплексному кореню, є лінійно незалежними частинними розв'язками. Виокремлення дійсної і уявної частин комплексного розв'язку для отримання двох лінійно незалежних розв'язків здійснюється за допомогою формули Ейлера: $e^{i\varphi} = \cos\varphi + i \cdot \sin\varphi$.

Покажемо як це реалізується на прикладі системи двох рівнянь.

Приклад. Розв'язати систему рівнянь методом Ейлера:

$$\begin{cases} y_1' = y_1 - 5y_2, \\ y_2' = 2y_1 - y_2. \end{cases}$$

Розв'язання. Виписуємо систему алгебраїчних рівнянь для визначення параметрів s_1, s_2 у розв'язках $y_i = s_i e^{kx}$, $i = \overline{1,2}$:

$$\begin{cases} (a_{11} - k)s_1 + \quad a_{12}s_2 \quad = 0, \\ \quad a_{21}s_1 \quad + (a_{22} - k)s_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (1 - k)s_1 - \quad 5s_2 \quad = 0, \\ \quad 2s_1 \quad + (-1 - k)s_2 = 0. \end{cases} \qquad (19.2.22)$$

Складаємо характеристичне рівняння системи і знаходимо його корені:

$$\begin{vmatrix} a_{11} - k & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} - k \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \begin{vmatrix} 1 - k & -5 \\ 2 & -1 - k \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow k^2 + 9 = 0 \Rightarrow k_{1,2} = 0 \pm 3i.$$

Підставляємо один із коренів (зазвичай беруть k_1) в (19.2.22) і розв'язуємо невизначену систему відносно s_1, s_2:

$$k_1 = 3i: \begin{cases} (1 - 3i)s_1 - \quad 5s_2 \quad = 0, \\ \quad 2s_1 \quad - (1 + 3i)s_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \left| \begin{array}{c} \text{оголошуємо вільною} \\ \text{змінною } s_1 \text{ і покладемо } s_1 = 5 \end{array} \right| \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (s_1 = 5, \; s_2 = 1 - 3i).$$

Частинний розв'язок $\bar{y}_1$, $\bar{y}_2$ у комплексній формі такий:

$$\bar{y}_1 = s_1 e^{k_1 x} = 5e^{i3x}, \quad \bar{y}_2 = s_2 e^{k_1 x} = (1 - 3i)e^{i3x},$$

або (з урахуванням формули Ейлера, Ч.1, (5.1.15)):

$$\bar{y}_1 = 5(\cos 3x + i\sin 3x) = 5\cos 3x + i5\sin 3x,$$

$$\bar{y}_2 = (1-3i)(\cos 3x + i\sin 3x) = (\cos 3x + 3\sin 3x) + i(\sin 3x - 3\cos 3x).$$

Виокремлюємо дійсні і уявні частини $\bar{y}_1$, $\bar{y}_2$:

$$\operatorname{Re}\bar{y}_1 = 5\cos 3x,\ \operatorname{Im}\bar{y}_1 = 5\sin 3x;$$

$$\operatorname{Re}\bar{y}_2 = \cos 3x + 3\sin 3x,\ \operatorname{Im}\bar{y}_2 = \sin 3x - 3\cos 3x.$$

Лінійна комбінація дійсних і уявних частин дає загальний розв'язок:

$$Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = C_1\begin{pmatrix} \operatorname{Re}\bar{y}_1 \\ \operatorname{Re}\bar{y}_2 \end{pmatrix} + C_2\begin{pmatrix} \operatorname{Im}\bar{y}_1 \\ \operatorname{Im}\bar{y}_2 \end{pmatrix},$$

який у звичайній – „відкритій” – формі запишеться так:

$$y_1 = 5C_1\cos 3x + 5C_2\sin 3x,$$

$$y_2 = C_1(\cos 3x + 3\sin 3x) + C_2(\sin 3x - 3\cos 3x). \bullet$$

Характеристичне рівняння однорідних систем із кількістю невідомих функцій більше двох може мати одночасно і різні дійсні, і кратні, і комплексні корені. Тоді для кожного типу коренів знаходять лінійно незалежну систему розв'язків (як показано вище на прикладах), яка міститиме відповідну кількість довільних сталих; сума таких систем є загальним розв'язком СЛДР-1. Нумерація коренів не є суттєвою.

Зауваження. Якщо кількість диференціальних рівнянь системи більше чотирьох, то основні труднощі полягають у знаходженні точного розв'язку характеристичного рівняння: $P_n(k)=0$, $n>4$, бо не існує формул коренів алгебраїчного рівняння, степінь якого більше чотирьох.

Наближене розв'язання характеристичних рівнянь і разом із тим – систем диференціальних рівнянь вивчається в навчальній дисципліні „Чисельні методи”.

Як підсумок у табл. 19.2.1 наведено вигляд загального розв'язку за методом Ейлера для кожного типу коренів у випадку системи двох рівнянь (див. (19.2.13), (19.2.14) для $n=2$).

Таблиця 19.2.1

Вигляд загальних розв’язків за методом Ейлера

Корені характеристичного рівняння	Загальний розв’язок: $Y=\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$	Опис складових $y_i = s_i e^{kx}$, $i=1,2$
дійсні і різні: $k_1 \neq k_2$ $(k_{1,2} \in \mathbf{R})$	$\begin{pmatrix} s_{11} & s_{12} \\ s_{21} & s_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} C_1 e^{k_1 x} \\ C_2 e^{k_2 x} \end{pmatrix}$	s_{ij} – значення параметра s_i для кореня k_j, $i=1,2$
кратні: $k_1 = k_2 = k^*$	$\begin{pmatrix} M_1(x)e^{k^* x} \\ M_2(x)e^{k^* x} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (a_0 + a_1 x)e^{k^* x} \\ (b_0 + b_1 x)e^{k^* x} \end{pmatrix}$	a_0, a_1; b_0, b_1 – коефіцієнти двочленів, які виражаються через довільні сталі C_1, C_2
комплексні: $k_{1,2} = a \pm bi$	$\begin{pmatrix} \mathrm{Re}(s_1 e^{k_1 x}) & \mathrm{Im}(s_1 e^{k_1 x}) \\ \mathrm{Re}(s_2 e^{k_1 x}) & \mathrm{Im}(s_2 e^{k_1 x}) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix}$	s_1, s_2 – значення параметра s_i для кореня k_1

(*Обміркуйте,* як діяти, якщо кратним буде комплексний корінь.)

19.3. Неоднорідні системи ЛДР-1 зі сталими коефіцієнтами

Структура загального розв’язку

Розв’язання нормальної неоднорідної СЛДР-1: $Y' = AY + F$, тісно пов’язане з розв’язанням однорідної системи: $Y' = AY$, або $Y' - AY = \overline{0}$, відповідної неоднорідній системі ($F \equiv \overline{0}$).

Нехай знайдено загальний розв’язок відповідної однорідної системи (о/с): $\overline{Y} = \overline{Y}(x, C_1, C_2, ..., C_n)$, і установлено один, будь-який, частинний розв’язок $\tilde{Y} = \tilde{Y}(x)$ неоднорідної системи (н/с).

Теорема 19.3.1 (*про структуру загального розв’язку н/с*). Загальний розв’язок неоднорідної системи є сумою загального розв’язку відповідної однорідної системи і будь-якого частинного розв’язку неоднорідної системи:

$$\left.\begin{array}{l} \overline{Y} \text{ – загальний розв’язок о/с} \\ \tilde{Y} \text{ – частинний розв’язок н/с} \end{array}\right] \Rightarrow Y = \overline{Y} + \tilde{Y} \text{ – загальний розв’язок н/с.} \quad (19.3.1)$$

Д о в е д е н н я. Спочатку переконаємося в тому, що сума $\overline{Y}$ і $\tilde{Y}$ задовольняє систему.

Подамо систему у вигляді:

$$Y' - AY = F,$$

і у ліву частину отриманого матричного рівняння замість Y підставимо $\overline{Y} + \tilde{Y}$:

$$(\overline{Y} + \tilde{Y})' - A(\overline{Y} + \tilde{Y}) = \overline{Y}' + \tilde{Y}' - A\overline{Y} - A\tilde{Y} =$$
$$= \underbrace{(\overline{Y}' - A\overline{Y})}_{\overline{0}} + \underbrace{(\tilde{Y}' - A\tilde{Y})}_{F} = F.$$

Для підтвердження загальності розв'язку врахуємо, що $\overline{Y}$ є лінійною комбінацією ФСР: $\overline{Y} = \sum_{j=1}^{n} C_j Y_j(x)$, вронскіан (19.2.1) для якої на проміжку (a,b), де виконуються умови теореми Коші, відмінний від нуля.

Підставляючи у загальний розв'язок початкові умови: $y_{i0} = y_i(x_0)$, $i = \overline{1,n}$, з метою визначити параметри C_1^0, C_2^0, ..., C_n^0, приходимо до неоднорідної СЛАР $n \times n$:

$$Y_0 = \sum_{j=1}^{n} C_j Y_j(x_0) + \tilde{Y}(x_0) \;\Rightarrow\; \sum_{j=1}^{n} C_j Y_j(x_0) = Y_0 - \tilde{Y}(x_0) \;\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\; C_1 \begin{pmatrix} y_{11}(x_0) \\ y_{21}(x_0) \\ \vdots \\ y_{n1}(x_0) \end{pmatrix} + C_2 \begin{pmatrix} y_{12}(x_0) \\ y_{22}(x_0) \\ \vdots \\ y_{n2}(x_0) \end{pmatrix} + \ldots + C_n \begin{pmatrix} y_{1n}(x_0) \\ y_{2n}(x_0) \\ \vdots \\ y_{nn}(x_0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_{10} \\ y_{20} \\ \vdots \\ y_{n0} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \tilde{y}_1(x_0) \\ \tilde{y}_2(x_0) \\ \vdots \\ \tilde{y}_n(x_0) \end{pmatrix},$$

яка має єдиний розв'язок, бо визначник системи – вронскіан $W(x_0)$ – не дорівнює нулю. ■

Висновок. Задача відшукання загального розв'язку неоднорідної СЛДР-1: $Y = \overline{Y} + \tilde{Y}$, потребує розробки методів відшукання будь-якого її частинного розв'язку $\tilde{Y}$, а як знайти складову $\overline{Y}$ відомо – *методом виключення* або *методом Ейлера*.

Способи відшукання розв'язків: частинних і загального

І. Метод Лагранжа (**метод варіації довільних сталих**).

Однойменний метод уже розглядався при розв’язанні неоднорідних лінійних ДР-1 (див. тему 16) і неоднорідних лінійних ДР-n (див. тему 18).

Перший підхід полягає у застосуванні методу виключення до заданої неоднорідної СЛДР-1, у результаті чого отримуємо неоднорідне лінійне ДР-n. Відшукання його загального розв’язку здійснюють за допомогою варіації довільних сталих у загальному розв’язку відповідного однорідного ДР-n.

Наприклад, для неоднорідної системи двох рівнянь:

$$Y' = AY + F, \text{ або } \begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \end{pmatrix},$$

методом виключення отримуємо таке ДР-2:

$$y_1'' + py_1' + qy_1 = f(x), \tag{19.3.2}$$

де

$$p = -(a_{11} + a_{22}), \quad q = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}, \quad f(x) = f_1' - \begin{vmatrix} f_1 & a_{12} \\ f_2 & a_{22} \end{vmatrix}.$$

Загальний розв’язок y_1 рівняння (19.3.2) знаходимо у вигляді суми загального розв’язку $\bar{y}_1 = \sum_{i=1}^{n} C_i y_{1i}$ відповідного однорідного ДР-2, де $\{y_{1i}(x)\}\big|_1^n$ – ФСР, і частинного розв’язку $\tilde{y}_1 = \sum_{i=1}^{n} C_i(x) y_{1i}$ неоднорідного рівняння: $y_1 = \bar{y}_1 + \tilde{y}_1$.

За знайденою функцією $y_1(x)$ відновлюємо другу функцію:

$$y_2(x) = \frac{1}{a_{12}}(y_1'(x) - a_{11}y_1(x)).$$

Приклад. Знайти загальний розв’язок системи:

$$\begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 1 & -4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ -\cos x \end{pmatrix}, \tag{19.3.3}$$

Розв’язання. Здійснюємо згідно з (19.3.2) перехід до одного рівняння – неоднорідного ДР-2:

$$\left(p=-(a_{11}+a_{22})=6,\ q=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}=9,\ f(x)=f_1'-\begin{vmatrix} f_1 & a_{12} \\ f_2 & a_{22} \end{vmatrix}=\cos x\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(y_1''+py_1'+qy_1=f(x) \Rightarrow y_1''+6y_1'+9y_1=\cos x\right).$$

Розв’язуємо відповідне однорідне рівняння:

$$y_1''+6y_1'+9y_1=0 \Rightarrow k^2+6k+9=(k+3)^2=0 \Rightarrow k_{1,2}=-3=k^* \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \{y_{11},\ y_{12}\}=\left\{e^{-3x},\ xe^{-3x}\right\}-\text{ФСР} \Rightarrow \bar{y}_1=e^{-3x}(C_1+C_2x).$$

Відшукуємо частинний розв’язок неоднорідного рівняння у вигляді:

$$\tilde{y}_1=e^{-3x}(C_1(x)+xC_2(x)),$$

для чого знаходимо похідні від функцій ФСР:

$$\{y_{11}',y_{12}'\}=\left\{-3e^{-3x},\ (1-3x)e^{-3x}\right\},$$

складаємо СЛАР 2×2 відносно похідних $C_1'(x)$ і $C_2'(x)$, і розв’язуємо її, спрощуючи попередньо множенням обох частин першого (другого) рівняння на e^{3x} $(-e^{3x})$:

$$\begin{cases} C_1'(x)y_{11}+C_2'(x)y_{12}=0, \\ C_1'(x)y_{11}'+C_2'(x)y_{12}'=f(x) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_1'(x)+xC_2'(x)=0, \\ 3C_1'(x)+(3x-1)C_2'(x)=-e^{3x}\cos x. \end{cases}$$

За правилом Крамера:

$$\Delta=\begin{vmatrix} 1 & x \\ 3 & 3x-1 \end{vmatrix}=-1\neq0;$$

$$\Delta_1=\begin{vmatrix} 0 & x \\ -e^{3x}\cos x & 3x-1 \end{vmatrix}=xe^{3x}\cos x;\quad \Delta_2=\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 3 & -e^{3x}\cos x \end{vmatrix}=-e^{3x}\cos x,$$

тоді

$$C_1'(x)=-xe^{3x}\cos x,\quad C_2'(x)=e^{3x}\cos x.$$

Відновлюємо невизначеним інтегруванням первісні $C_2(x)$, $C_1(x)$, застосовуючи двічі інтегрування частинами (беремо по одній первісній):

$$C_2(x) = \int e^{3x} \cos x dx = \frac{e^{3x}}{10}(\sin x + 3\cos x);$$

$$C_1(x) = -\int xe^{3x} \cos x dx = -\frac{e^{3x}}{10}[(\sin x + 3\cos x)x - 0{,}8\cos x - 0{,}6\sin x].$$

Записуємо частинний і загальний розв'язки ДР-2:

$$\tilde{y}_1 = e^{-3x}(C_1(x) + xC_2(x)) = 0{,}02(4\cos x + 3\sin x);$$

$$y_1 = \bar{y}_1 + \tilde{y}_1 = e^{-3x}(C_1 + C_2 x) + 0{,}02(4\cos x + 3\sin x).$$

За функцією $y_1(x)$ і її похідною:

$$y_1' = e^{-3x}(-3C_1 + C_2 - 3C_2 x) + 0{,}02(3\cos x - 4\sin x),$$

знаходимо другу невідому функцію заданої системи (19.3.3):

$$y_2(x) = a_{12}^{-1}\left(y_1'(x) - a_{11}y_1(x)\right) \;\Rightarrow\; y_2(x) = -\left(y_1'(x) + 2y_1(x)\right) \;\Rightarrow$$

$$y_2(x) = -[e^{-3x}(-3C_1 + C_2 - 3C_2 x) + 0{,}02(3\cos x - 4\sin x) +$$

$$+ e^{-3x}(2C_1 + 2C_2 x) + 0{,}02(8\cos x + 6\sin x)] \;\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\; y_2(x) = e^{-3x}(C_1 - C_2 + C_2 x) - 0{,}02(11\cos x + 2\sin x).$$

Загальний розв'язок системи такий:

$$\left[\begin{array}{l} y_1 = e^{-3x}(C_1 + C_2 x) + 0{,}02(4\cos x + 3\sin x), \\ y_2(x) = e^{-3x}(C_1 - C_2 + C_2 x) - 0{,}02(11\cos x + 2\sin x). \end{array}\right. \quad \bullet$$

(*Пропонуємо* переконатися у правильності знайденого розв'язку.)

Другий підхід полягає у використанні загального розв'язку однорідної СЛДР-1 (як лінійної комбінації ФСР), відповідної неоднорідній системі $Y' = AY + F$.

Нехай знайдено загальний розв'язок $\overline{Y}$ однорідної системи:

$$\overline{Y} = \sum_{j=1}^{n} C_j Y_j(x). \qquad (19.3.4)$$

Частинний розв'язок неоднорідної системи $\tilde{Y}$ будемо шукати у вигляді:

$$\tilde{Y} = \sum_{j=1}^{n} C_j(x) \cdot Y_j(x), \qquad (19.3.5)$$

покладаючи сталі в (19.3.4) невідомими функціями від x: $C_j = C_j(x)$.

Підставимо у систему $Y' - AY = F$ замість Y вираз для $\tilde{Y}$:

$$\Big(\sum_{j=1}^{n} C_j(x) \cdot Y_j(x)\Big)'_x - A\sum_{j=1}^{n} C_j(x) \cdot Y_j(x) = F(x),$$

згрупуємо доданки в лівій частині відповідної рівності:

$$\sum_{j=1}^{n} (C_j'(x) \cdot Y_j(x) + C_j(x) \cdot \underbrace{(Y_j'(x) - AY_j(x))}_{\overline{0}\ \text{(чому?)}}) = F(x),$$

і отримаємо СЛАР $n \times n$ відносно похідних від невідомих функцій $C_j(x)$:

$$\sum_{j=1}^{n} C_j'(x) \cdot Y_j(x) = F(x), \qquad (19.3.6)$$

або (в розгорнутому вигляді):

$$\begin{cases} y_{11}(x)C_1'(x) + \ldots + y_{1n}(x)C_n'(x) = f_1(x), \\ y_{21}(x)C_1'(x) + \ldots + y_{2n}(x)C_n'(x) = f_2(x), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ y_{n1}(x)C_1'(x) + \ldots + y_{nn}(x)C_n'(x) = f_n(x), \end{cases} \qquad (19.3.7)$$

Система (19.3.7) сумісна і визначена (*наведіть підстави*), тобто має єдиний розв'язок. На практиці її звичайно розв'язують за правилом Крамера.

Функції $C_j(x)$, $j=\overline{1,n}$, відновлюють невизначеним інтегруванням:

$$C_j(x)=\int C_j'(x)dx,$$

при цьому беруть найпростішу за виглядом первісну. Підставляючи їх у (19.3.5), отримують один із частинних розв'язків неоднорідної системи, а потім записують загальний розв'язок вихідної системи: $Y=\overline{Y}+\tilde{Y}$.

Зауваження. Якщо функції $C_j(x)$ брати як множину первісних:

$$C_j(x)=\int C_j'(x)dx+\tilde{C}_j,\ \ \tilde{C}_j \text{ – довільна стала,} \qquad (19.3.8)$$

то підставляючи їх вирази у (19.3.5), зразу отримуємо загальний розв'язок заданої системи (*наведіть коментар*):

$$Y=\sum_{j=1}^{n}(C_j(x)+\tilde{C}_j)\cdot Y_j(x)=\underbrace{\sum_{j=1}^{n}C_j(x)\cdot Y_j(x)}_{\tilde{Y}}+\underbrace{\sum_{j=1}^{n}\tilde{C}_j\cdot Y_j(x)}_{\overline{Y}},$$

тобто знаходити окремо частинний розв'язок немає потреби.

Приклад. Розв'язати методом Лагранжа:

$$\begin{cases} y_1'=y_2+1, \\ y_2'=y_1+1. \end{cases}$$

Розв'язання. Запишемо систему в матричній формі:

$$\begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

Застосовуючи метод виключення для однорідного рівняння (див. також (19.2.10)), отримаємо:

$$y_1''-y_1=0. \qquad (19.3.9)$$

Знаходимо загальний розв'язок (19.3.9):

$$(k^2-1=0\ \Rightarrow k_{1,2}=\pm 1)\ \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \overline{y}_1=C_1e^x+C_2e^{-x}, \\ \overline{y}_2=C_1e^x-C_2e^{-x}. \end{array}\right.$$

Загальний розв'язок вихідної системи будемо шукати у вигляді:

$$\left[\begin{array}{l} y_1 = C_1(x)e^{x} + C_2(x)e^{-x}, \\ y_2 = C_1(x)e^{x} - C_2(x)e^{-x}, \end{array}\right.$$

де $C_1(x)$, $C_2(x)$ такі, що їх похідні є розв'язком неоднорідної СЛАР 2×2:

$$\begin{cases} C_1'(x)e^{x} + C_2'(x)e^{-x} = 1, \\ C_1'(x)e^{x} - C_2'(x)e^{-x} = 1 \end{cases}, \text{ або } \begin{pmatrix} e^{x} & e^{-x} \\ e^{x} & -e^{-x} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} C_1'(x) \\ C_2'(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

За правилом Крамера маємо:

$$(\Delta = -2,\ \Delta_1 = -2e^{-x},\ \Delta_2 = 0) \ \Rightarrow\ (C_1'(x) = e^{-x},\ C_2'(x) = 0).$$

Знаходимо самі функції:

$$C_1(x) = \int e^{-x}dx = -e^{-x} + \tilde{C}_1, \quad C_2(x) = \tilde{C}_2,$$

і записуємо загальний розв'язок заданої системи:

$$\left[\begin{array}{l} y_1 = (-e^{-x} + \tilde{C}_1)e^{x} + \tilde{C}_2 e^{-x}, \\ y_2 = (-e^{-x} + \tilde{C}_1)e^{x} - \tilde{C}_2 e^{-x} \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} y_1 = \tilde{C}_1 e^{x} + \tilde{C}_2 e^{-x} - 1, \\ y_2 = \tilde{C}_1 e^{x} - \tilde{C}_2 e^{-x} - 1. \end{array}\right.$$

Той самий результат отримаємо, якщо для кожної із функцій $C_1(x)$, $C_2(x)$ взяти одну, найпростішу, первісну: $C_1(x) = -e^{-x}$, $C_2(x) = 0$, і знайти частинний розв'язок:

$$\left[\begin{array}{l} \tilde{y}_1 = C_1(x)e^{x} + C_2(x)e^{-x}, \\ \tilde{y}_2 = C_1(x)e^{x} - C_2(x)e^{-x} \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \tilde{y}_1 = -e^{-x}e^{x} = -1, \\ \tilde{y}_2 = -e^{-x}e^{x} = -1, \end{array}\right.$$

а потім загальний розв'язок $Y = \overline{Y} + \tilde{Y}$: $\left[\begin{array}{l} y_1 = C_1 e^{x} + C_2 e^{-x} - 1 \\ y_2 = C_1 e^{x} - C_2 e^{-x} - 1 \end{array}\right.$. ●

(*Якому* із двох описаних підходів до отримання загального розв'язку системи слід *віддати перевагу* і *чому?*)

II. Метод невизначених коефіцієнтів (для систем зі спеціальною правою частиною $F(x)$).

Функцію $F = F(x) = \left(f_1(x),\ f_2(x), \ldots, f_n(x) \right)^T$ називають **спеціальною**, якщо її елементи – квазімногочлени (див. п. 18.2):

$$f_i(x) = e^{\alpha_i x}(P_{n_i}(x)\cos\beta_i x + Q_{m_i}(x)\sin\beta_i x), \quad i = \overline{1,n}. \qquad (19.3.10)$$

Як і для одного неоднорідного ЛДР-n, так і для неоднорідної системи лінійних рівнянь: $Y' = AY + F$, відшукання частинних розв'язків можна здійснити не удаючись до операції інтегрування.

Теорема 19.3.2 (*про частинні розв'язки неоднорідних систем*). Якщо права частина системи є спеціальною векторною функцією, то її частинний розв'язок можна знайти у вигляді вектор-функції, складові якої є також квазімногочленами:

$$\tilde{y}_i(x) = x^{r_i} e^{\alpha_i x}(P_{n_i}(x)\cos\beta_i x + Q_{m_i}(x)\sin\beta_i x), \quad i = \overline{1,n}, \qquad (19.3.11)$$

де r_i – кратність $\alpha_i + \beta_i i$, $i = \sqrt{-1}$, як кореня характеристичного рівняння; $M_{s_i}(x)$, $N_{s_i}(x)$ – многочлени степеня $s_i = \max\{n_i, m_i\}$.

Д о в е д е н н я за сутністю не відрізняється від доведення одноіменної тереми для одного ЛДР-n. ■

Теорема 19.3.3 (*про принцип суперпозиції*). Якщо вектор-функція $F(x)$ є сумою квазімногочленів F_j, $j = \overline{1,p}$, з різними параметрами, то частинний розв'язок $\tilde{Y}(x)$ неоднорідної СЛДР-1 дорівнює сумі частинних розв'язків $\tilde{Y}_j(x)$ систем із векторними функціями F_j:

$$F(x) = \sum_{j=1}^{p} F_j \ \Rightarrow\ \tilde{Y}(x) = \sum_{j=1}^{p} \tilde{Y}_j. \qquad (19.3.12)$$

Д о в е д е н н я. Дійсно, якщо функції $\tilde{Y}_j$, $j = \overline{1,p}$, такі, що кожна з них задовольняє систему диференціальних рівнянь $Y' = AY + F_j$, то в силу лінійності диференціального оператора їх сума задовольнятиме вихідну систему $Y' = AY + \sum_{j=1}^{p} F_j$. ■

Зауваження. Принцип суперпозицій можна поширити на випадок $p \to \infty$ за умови, що ряд, складений із $\tilde{Y}_j(x)$, збігається і припускає почленне диференціювання.

Приклад. Знайти загальний розв'язок системи:

$$\begin{cases} y_1' = y_2 + 2e^x, \\ y_2' = y_1 + x^2. \end{cases}$$

Аналіз показує, що в правих частинах рівняння функції $f_1(x) = 2e^x$ і $f_2(x) = x^2$ є квазімногочленами з різними параметрами, а саме:

$$\alpha_1 = 1,\ \beta_1 = 0,\ \ n_1 = m_1 = 0;$$
$$\alpha_2 = 0,\ \beta_2 = 0,\ n_2 = 2,\ m_2 = 0,$$

тому для відшукання частинного розв'язку доведеться застосовувати принцип суперпозиції.

Подамо систему в матричній формі:

$$Y' = AY + F \ \Rightarrow\ \begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} + \underbrace{\begin{pmatrix} 2e^x \\ 0 \end{pmatrix}}_{F_1(x)} + \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ x^2 \end{pmatrix}}_{F_2(x)}.$$

Розв'язуємо відповідну заданій однорідну систему:

$$\begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \ \Rightarrow\ \begin{vmatrix} -k & 1 \\ 1 & -k \end{vmatrix} = 0 \ \Rightarrow\ (k_1 = -1,\ k_2 = 1);$$

$$\begin{cases} s_1 + s_2 = 0, \\ s_1 + s_2 = 0 \end{cases} \ \Rightarrow\ \begin{pmatrix} s_{11} \\ s_{21} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix};$$

$$\begin{cases} -s_1 + s_2 = 0, \\ s_1 - s_2 = 0 \end{cases} \ \Rightarrow\ \begin{pmatrix} s_{12} \\ s_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix};$$

$$\bar{Y} = \begin{pmatrix} s_{11} & s_{12} \\ s_{21} & s_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} C_1 e^{k_1 x} \\ C_2 e^{k_2 x} \end{pmatrix} \ \Rightarrow\ \bar{Y} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} C_1 e^{-x} \\ C_2 e^{x} \end{pmatrix}.$$

Знаходимо методом невизначених коефіцієнтів частинні розв'язки рівнянь із правими частинами F_1, F_2:

$$F_1 = \begin{pmatrix} 2e^x \\ 0e^x \end{pmatrix} \Rightarrow \tilde{Y}_1 = \begin{pmatrix} (Ax+B)e^x \\ Cxe^x \end{pmatrix} \Rightarrow \tilde{Y}_1 = \begin{pmatrix} (x+1)e^x \\ xe^x \end{pmatrix};$$

$$F_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ x^2 \end{pmatrix} \Rightarrow \tilde{Y}_2 = \begin{pmatrix} A_1x^2 + B_1x + C_1 \\ A_2x^2 + B_2x + C_2 \end{pmatrix} \Rightarrow \tilde{Y}_2 = \begin{pmatrix} -x^2 - 2 \\ -2x \end{pmatrix}.$$

Подаємо загальний розв'язок у матричній формі:

$$Y = \bar{Y} + \tilde{Y}_1 + \tilde{Y}_2 = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_1e^{-x} \\ C_2e^x \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} (x+1)e^x - x^2 - 2 \\ x(e^x - 2) \end{pmatrix},$$

або все рівно, що:

$$\left[\begin{aligned} y_1 &= -C_1e^{-x} + C_2e^x + (x+1)e^x - x^2 - 2, \\ y_2 &= C_1e^{-x} + C_2e^x + x(e^x - 2). \end{aligned}\right. \quad \bullet$$

(Чи *відповідає істині* отриманий результат?)

19.4. Деякі задачі застосовного характеру

Спрощена модель національної економіки

Постановка задачі. Визначити динаміку змінювання залежно від часу $t \geq 0$ національного доходу $W = W(t)$ і витрат споживання $S = S(t)$ країни за умов, що:

1) державні витрати є сталими і складають E_0 грошових одиниць;

2) швидкість зміни національного доходу W'_t прямо пропорційна доходові з коефіцієнтом α, і чим більший поточний рівень доходу, тим менша швидкість його зростання на величину, пропорційну витратам споживання з коефіцієнтом β, тобто:

$$W' = \alpha W - \beta S \quad (\alpha > 0,\ \beta > 0);$$

3) швидкість зміни споживання S_t' прямо пропорційна різниці D між доходом і сумарним споживанням: $D = W - (S + E_0)$, з коефіцієнтом $\gamma > 0$, тобто $S' = \gamma D$.

Розв'язання. За даними постановки задачі приходимо до системи двох лінійних диференціальних рівнянь:

$$\begin{cases} W' = \alpha W - \beta S, \\ S' = \gamma (W - S - E_0). \end{cases} \tag{19.4.1}$$

Модель „гонка озброєнь" (Річардсона)

Постановка задачі. Визначити витрати – $x = x(t)$, $y = y(t)$ – країн X, Y на озброєння залежно від часу $t \geq 0$ за умов, що:

1) кожна країна змінює швидкість зростання (або скорочення) озброєнь – $x' = x'(t)$, $y' = y'(t)$ – пропорційно рівню витрат іншої країни відповідно з коефіцієнтом $a_{12} > 0$, $a_{21} > 0$, тобто:

$$x_t' = a_{12} y, \quad y_t' = a_{21} x;$$

2) чим більший поточний рівень витрат країни на оборону, тим менша швидкість його зростання на величину, пропорційну витратам із коефіцієнтом a_{11}, a_{22} відповідно, тобто:

$$x_t' = a_{12} y - a_{11} x, \quad y_t' = a_{21} x - a_{22} y;$$

3) існує стала складова швидкості зростання (або скорочення) озброєнь кожної країни – b_1, b_2 – незалежно від того, загрожує чи не загрожує її існуванню інша країна (якщо $b_1 < 0$, $b_2 < 0$, то числа b_1, b_2 називають *коефіцієнтами доброї волі*).

Розв'язання. Згідно з 1), 2), 3) приходимо до системи двох лінійних неоднорідних диференціальних рівнянь зі сталими коефіцієнтами:

$$\begin{cases} x' = -a_{11} x + a_{12} y + b_1, \\ y' = a_{21} x - a_{22} y + b_2 \end{cases} \text{ – модель Річардсона.} \tag{19.4.2}$$

(Льюїс Річардсон (1881 – 1953 рр.) – англійський математик, пацифіст.)

Модель „хижак-жертва" (Лотки – Вольтерри)

Уже відзначалося, що основним предметом дослідження в екології є еволюція популяцій (див. п. 16.6), і була побудована модель (16.6.2), яка описує динаміку їх кількісного стану. Модель зовсім не враховує, що в реальних обставинах популяція співіснує з іншими популяціями, в тому числі із тими, з якими існує ворожнеча (антагонізм).

Розглянемо антагоністичну пару „хижак-жертва" і з'ясуємо, як може змінюватися з часом чисельність обох взаємодіючих сторін.

Постановка задачі. Визначити динаміку змінення залежно від часу t чисельності популяції жертви: $x = x(t)$, і хижака: $y = y(t)$, за умов, що:

1) при відсутності хижака швидкість зростання чисельності жертв прямо пропорційна чисельності: $x' = a_{11}x$, $a_{11} > 0$, а хижак під час відсутності жертви вимирає за законом: $y' = -a_{21}y$, $a_{21} > 0$;

2) при наявності хижака чим більша чисельність $x(t)$, тим менша швидкість її зростання на величину $-a_{12}xy$, $a_{12} > 0$, а з'їдена кількість жертв сприяє розмноженню хижака на величину $a_{22}xy$, $a_{22} > 0$.

Розв'язання. Синтезуючи дані умов 1), 2), приходимо до системи двох нелінійних диференціальних рівнянь:

$$\begin{cases} x' = a_{11}x - a_{12}xy, \\ y' = -a_{21}y + a_{22}xy \end{cases} \text{– модель Лотки – Вольтерри.} \qquad (19.4.3)$$

(Альфред Джеймс Лотка (1880 – 1949 рр.) – американський математик, фізикохімик, статистик, демограф; Віто Вольтерра (1860 – 1940 рр.) – італійський математик і фізик, член-кореспондент Фізико-математичного відділення Петербурзької академії наук, почесний член АН СРСР.)

Зауваження. У більш досконалих моделях сталі – числові параметри – можуть бути змінними, що ускладнює їх розв'язання.

Аналіз розв'язків наведених лінійних систем-моделей залежно від значень параметрів буде проведено у наступній главі, де вивчаються основи теорії стійкості.

Запитання для самодіагностики засвоєння матеріалу

Відповіді на всі запитання сформулюйте словесно, запишіть у символічній формі, обґрунтуйте (на підставі означень, теорем, правил, формул тощо), наведіть відповідні конкретні приклади.

1. Що називають системою диференціальних рівнянь першого порядку?

2. Яку систему називають системою лінійних диференціальних рівнянь першого порядку (СЛДР-1)?

3. Які системи лінійних диференціальних рівнянь називаються нормальними?

4. У якому вигляді записують нормальну СЛДР-1?

5. Які функції називають векторними (векторами-функціями)?

6. Яка СЛДР-1 називається однорідною (неоднорідною) на деякому проміжку?

7. Яка однорідна система диференціальних рівнянь називається відповідною неоднорідній системі рівнянь?

8. Що називають розв’язком системи диференціальних рівнянь на проміжку (a,b)?

9. Який розв’язок називається загальним розв’язком СЛДР-1?

10. Який розв’язок називають частинним розв’язком СЛДР-1?

11. Що розуміють під початковими умовами для системи диференціальних рівнянь?

12. Яку задачу стосовно систем диференціальних рівнянь називають задачею Коші?

13. Сформулюйте теорему існування та єдиності розв'язку задачі Коші.

14. Яка нормальна СЛДР-1 називається системою зі сталими коефіцієнтами?

15. Визначник якої матриці називають визначником Вронського (вронскіаном)?

16. Що розуміють під лінійною комбінацією розв’язків системи?

17. Сформулюйте і доведіть теорему про лінійну комбінацію розв’язків системи диференціальних рівнянь.

18. Яку множину (систему) розв’язків $Y_j(x)$, $j=\overline{1,n}$, називають лінійно незалежною на (a,b)?

19. Сформулюйте і доведіть теорему про нерівність нулю визначника Вронського.

20. Яка множина розв'язків СЛДР-1 називається фундаментальною системою розв'язків (ФСР) на (a,b)?

21. Сформулюйте і доведіть теорему про структуру загального розв'язку однорідних СЛДР-1.

22. Опишіть основні методи розв'язання однорідних СЛДР-1:
а) метод виключення; б) метод Ейлера.

23. Сформулюйте і доведіть теорему про структуру загального розв'язку неоднорідних СЛДР-1.

24. Опишіть основні методи відшукання частинних розв'язків неоднорідних СЛДР-1: а) метод Лагранжа; б) метод невизначених коефіцієнтів (для спеціальної векторної функції $F(x)$).

25. Яка система двох диференціальних рівнянь є математичною моделлю: а) національної економіки; б) „гонки озброєнь"; в) „хижак-жертва"?

Задачі та вправи

1. Розв'язати задані однорідні системи ЛДР-1 зі сталими коефіцієнтами:

1) $\begin{cases} y_1' = 2y_1 + y_2, \\ y_2' = 4y_1 - y_2; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} y_1' = -2y_1 + y_2, \\ y_2' = -3y_1 + 2y_2; \end{cases}$

3) $\begin{cases} y_1' = 5y_1 + 8y_2, \\ y_2' = 3y_1 + 3y_2; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} y_1' = 6y_1 + 3y_2, \\ y_2' = -8y_1 - 5y_2; \end{cases}$

5) $\begin{cases} y_1' = -y_1 + 8y_2, \\ y_2' = y_1 + y_2; \end{cases}$ 6) $\begin{cases} y_1' = y_1 - y_2, \\ y_2' = y_2 - y_1; \end{cases}$

7) $\begin{cases} y_1' = 2y_1 + y_2, \\ y_2' = -y_1 + 4y_2; \end{cases}$ 8) $\begin{cases} y_1' = y_1 - y_2, \\ y_2' = y_1 + 3y_2; \end{cases}$

9) $\begin{cases} y_1' = 3y_1 - y_2, \\ y_2' = 4y_1 - y_2; \end{cases}$ 10) $\begin{cases} y_1' = y_1 - 2y_2, \\ y_2' = y_1 + 3y_2; \end{cases}$

11) $\begin{cases} y_1' = y_1 - 5y_2, \\ y_2' = 2y_1 - y_2; \end{cases}$ 12) $\begin{cases} y_1' = -7y_1 + y_2, \\ y_2' = -2y_1 - 5y_2; \end{cases}$

13) $\begin{cases} y_1' = 3y_1 - y_2 + y_3, \\ y_2' = -y_1 + 5y_2 - y_3, \\ y_3' = y_1 - y_2 + 3y_3; \end{cases}$ 14) $\begin{cases} y_1' = 2y_1 - y_2 + y_3, \\ y_2' = y_1 + 2y_2 - y_3, \\ y_3' = y_1 - y_2 + 2y_3. \end{cases}$

2. Знайти загальний розв'язок заданих неоднорідних систем ЛДР-1 зі сталими коефіцієнтами:

1) $\begin{cases} y_1' = y_2, \\ y_2' = -y_1 + 1; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} y_1' = -2y_2 + 3, \\ y_2' = 2y_1 - 2x; \end{cases}$

3) $\begin{cases} y_1' = y_1 + y_2 + e^x, \\ y_2' = y_1 + y_2 - e^x; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} y_1' = -y_2 + x^2, \\ y_2' = y_1 + x; \end{cases}$

5) $\begin{cases} y_1' = -y_2 + \sin x, \\ y_2' = y_1 + \cos x; \end{cases}$ 6) $\begin{cases} y_1' = y_1 - 2y_2 + e^x, \\ y_2' = y_1 + 4y_2 + e^{2x}; \end{cases}$

7) $\begin{cases} y_1' = y_1 + 2y_2, \\ y_2' = y_1 - 5\sin x; \end{cases}$ 8) $\begin{cases} y_1' = y_1 + 2y_2 + 16xe^x, \\ y_2' = 2y_1 - 2y_2; \end{cases}$

9) $\begin{cases} y_1' = 2y_1 + y_2 - 2y_3 + 2 - x, \\ y_2' = 1 - y_1, \\ y_3' = y_1 + y_2 - y_3 + 1 - x; \end{cases}$ 10) $\begin{cases} 4y_1' - y_2' = \sin x - 3y_1, \\ y_1' = \cos x - y_2. \end{cases}$

3. Розв'язати задачу Коші для заданих систем ЛДР-1 зі сталими коефіцієнтами:

1) $\begin{cases} y_1' = y_1 + y_2, \\ y_2' = -2y_1 + 4y_2; \end{cases}$ $y_1(0) = 0$, $y_2(0) = -1$;

2) $\begin{cases} y_1' = 4y_1 - 5y_2, \\ y_2' = y_1; \end{cases}$ $y_1(0) = 0$, $y_2(0) = 1$;

3) $\begin{cases} y_1' = 8y_2, \\ y_2' = -2y_3, \\ y_3' = 2y_1 + 8y_2 - 2y_3; \end{cases}$ $y_1(0) = -4$, $y_2(0) = 0$, $y_3(0) = 1$;

4) $\begin{cases} y_1' = 2y_1 - y_2 + y_3, \\ y_2' = y_1 + y_3, \\ y_3' = -3y_1 + y_2 - 2y_3; \end{cases}$ $y_1(0) = 0$, $y_2(0) = 0$, $y_3(0) = 1$;

5) $\begin{cases} y_1' = 4y_1 - 5y_2 + 4x - 1, \\ y_2' = y_1 - 2y_2 + x; \end{cases}$ $y_1(0) = 0$, $y_2(0) = 0$;

6) $\begin{cases} y_1' = 4y_1 + y_2 - 36x, \\ y_2' = -2y_1 + y_2 - 2e^x; \end{cases}$ $y_1(0) = 0$, $y_2(0) = 1$;

7) $\begin{cases} y_1' = -3y_1 - 4y_2 + 2x, \\ y_2' = y_1 + y_2 + x; \end{cases}$ $y_1(0) = 0$, $y_2(0) = 0$;

8) $\begin{cases} y_1' = -y_1 + y_2 + e^x, \\ y_2' = y_1 - y_2 + e^x; \end{cases}$ $y_1(0) = 1$, $y_2(0) = 1$;

9) $\begin{cases} y_1' = y_1 + y_2 - \cos x, \\ y_2' = -2y_1 - y_2 + \cos x + \sin x; \end{cases}$ $y_1(0) = 1$, $y_2(0) = -2$;

10) $\begin{cases} y_1' = -y_1 - 2y_2 + 2e^{-x}, \\ y_2' = -y_2 - y_3 + 1, \\ y_3' = -y_3 + 1; \end{cases}$ $y_1(0) = 1$, $y_2(0) = 1$, $y_3(0) = 1$.

4. Знайти загальний розв'язок заданих неоднорідних систем ЛДР-1 методом варіації довільних сталих:

1) $\begin{cases} y_1' = -2y_1 - 4y_2 + 1 + 4x, \\ y_2' = -y_1 + y_2 + 1{,}5x^2; \end{cases}$

2) $\begin{cases} y_1' = -2y_1 + y_2 - e^{2x}, \\ y_2' = -3y_1 + 2y_2 + 6e^{2x}; \end{cases}$

3) $\begin{cases} y_1' = y_2 + tg^2 x - 1, \\ y_2' = -y_1 + tg\, x; \end{cases}$

4) $\begin{cases} y_1' = -4y_1 - 2y_2 + \dfrac{2}{e^x - 1}, \\ y_2' = 6y_1 + 3y_2 - \dfrac{3}{e^x - 1}; \end{cases}$

5) $\begin{cases} y_1' = y_2, \\ y_2' = -y_1 + \dfrac{1}{\cos x}. \end{cases}$

Відповіді

1. 1) $\left[\begin{array}{l} y_1 = C_1 e^{3x} + C_2 e^{-2x}, \\ y_2 = C_1 e^{3x} - 4C_2 e^{-2x}; \end{array}\right.$ 2) $\left[\begin{array}{l} y_1 = C_1 e^{x} + C_2 e^{-x}, \\ y_2 = 3C_1 e^{x} + C_2 e^{-x}; \end{array}\right.$

3) $\left[\begin{array}{l} y_1 = C_1 e^{-x} + C_2 e^{9x}, \\ y_2 = -\frac{3}{4} C_1 e^{-x} + \frac{1}{2} C_2 e^{9x}; \end{array}\right.$ 4) $\left[\begin{array}{l} y_1 = C_1 e^{-2x} + C_2 e^{3x}, \\ y_2 = -\frac{8}{3} C_1 e^{-2x} - C_2 e^{3x}; \end{array}\right.$

5) $\left[\begin{array}{l} y_1 = 2C_1 e^{3x} - 4C_2 e^{-3x}, \\ y_2 = C_1 e^{3x} + C_2 e^{-3x}; \end{array}\right.$ 6) $\left[\begin{array}{l} y_1 = C_1 + C_2 e^{x}, \\ y_2 = C_1; \end{array}\right.$

7) $\left[\begin{array}{l} y_1 = e^{3x}(C_1 + C_2 x), \\ y_2 = e^{3x}(C_1 + C_2 + C_2 x); \end{array}\right.$ 8) $\left[\begin{array}{l} y_1 = (C_1 + C_2 x)e^{2x}, \\ y_2 = -(C_1 + C_2 + C_2 x)e^{2x}; \end{array}\right.$

9) $\left[\begin{array}{l} y_1 = (C_1 + C_2 x)e^{x}, \\ y_2 = (2C_1 - C_2 + 2C_2 x)e^{x}; \end{array}\right.$

10) $\left[\begin{array}{l} y_1 = [(C_1 - C_2)\cos x - (C_1 + C_2)\sin x]e^{2x}, \\ y_2 = (C_1 \sin x + C_2 \cos x)e^{2x}; \end{array}\right.$

11) $\left[\begin{array}{l} y_1 = 5C_1 \cos 3x + 5C_2 \sin 3x, \\ y_2 = C_1(\cos 3x + 3\sin 3x) + C_2(\sin 3x - 3\cos 3x); \end{array}\right.$

12) $\left[\begin{array}{l} y_1 = (C_1 \cos x + C_2 \sin x)e^{-6x}, \\ y_2 = e^{-6x}((C_1 + C_2)\cos x + (C_2 - C_1)\sin x); \end{array}\right.$

13) $\left[\begin{array}{l} y_1 = C_1 e^{2x} + C_2 e^{3x} + C_3 e^{6x}, \\ y_2 = C_2 e^{3x} - 2C_3 e^{6x}, \\ y_3 = -C_1 e^{2x} + C_2 e^{3x} + C_3 e^{6x}; \end{array}\right.$

14) $\left[\begin{array}{l} y_1 = C_1 e^{2x} - C_2 e^{3x}, \\ y_2 = C_1 e^{2x} - C_3 e^{x}, \\ y_3 = C_1 e^{2x} - C_2 e^{3x} - C_3 e^{x}. \end{array}\right.$

2. 1) $\left[\begin{array}{l} y_1 = C_1\cos x + C_2\sin x + 1, \\ y_2 = -C_1\sin x + C_2\cos x; \end{array}\right.$

2) $\left[\begin{array}{l} y_1 = C_1\cos 2x + C_2\sin 2x + x, \\ y_2 = C_1\sin 2x - C_2\cos 2x + 1; \end{array}\right.$

3) $\left[\begin{array}{l} y_1 = C_1e^{2x} + C_2 + e^x, \\ y_2 = C_1e^{2x} - C_2 - e^x; \end{array}\right.$

4) $\left[\begin{array}{l} y_1 = -C_1\sin x + C_2\cos x + x, \\ y_2 = C_1\cos x + C_2\sin x + x^2 - 2; \end{array}\right.$

5) $\left[\begin{array}{l} y_1 = -C_1\sin x + (C_2 - 1)\cos x, \\ y_2 = C_1\cos x + C_2\sin x; \end{array}\right.$

6) $\left[\begin{array}{l} y_1 = 2C_1e^{2x} + C_2e^{3x} - 1{,}5e^x + 2xe^{2x}, \\ y_2 = -C_1e^{2x} - C_2e^{3x} + 0{,}5e^x - (x+1)e^{2x}; \end{array}\right.$

7) $\left[\begin{array}{l} y_1 = C_1e^{-x} + 2C_2e^{2x} - \cos x + 3\sin x, \\ y_2 = -C_1e^{-x} + C_2e^{2x} + 2\cos x - \sin x; \end{array}\right.$

8) $\left[\begin{array}{l} y_1 = 2C_1e^{2x} + C_2e^{-3x} - (12x + 13)e^x, \\ y_2 = C_1e^{2x} - 2C_2e^{-3x} - (8x + 63)e^x; \end{array}\right.$

9) $\left[\begin{array}{l} y_1 = C_1e^x + C_2\sin x + C_3\cos x, \\ y_2 = -C_1e^x + C_2\cos x - C_3\sin x + x, \\ y_3 = C_2\sin x + C_3\cos x + 1; \end{array}\right.$

10) $\left[\begin{array}{l} y_1 = C_1e^{-x} + C_2e^{-3x}, \\ y_2 = C_1e^{-x} + 3C_2e^{-3x} + \cos x. \end{array}\right.$

3. 1) $\left[\begin{array}{l} y_1 = e^{2x} - e^{3x}, \\ y_2 = e^{2x} - 2e^{3x}; \end{array}\right.$

2) $\left[\begin{array}{l} y_1 = -5e^{2x}\sin x, \\ y_2 = e^{2x}(\cos x - 2\sin x); \end{array}\right.$

3) $\left[\begin{array}{l} y_1 = -4e^{-2x} - 2\sin 4x, \\ y_2 = e^{-2x} - \cos 4x, \\ y_3 = e^{-2x} - 2\sin 4x; \end{array}\right.$

4) $\left[\begin{array}{l} y_1 = 1 - e^{-x}, \\ y_2 = 1 - e^{-x}, \\ y_3 = 2e^{-x} - 1; \end{array}\right.$

5) $\left[\begin{array}{l} y_1 = -x, \\ y_2 = 0; \end{array}\right.$

6) $\left[\begin{array}{l} y_1 = 10e^{2x} - 8e^{3x} - e^{x} + 6x - 1, \\ y_2 = -20e^{2x} + 8e^{3x} + 3e^{x} + 12x + 10; \end{array}\right.$

7) $\left[\begin{array}{l} y_1 = 14(1 - e^{-x}) - 2x(3 + 4e^{-x}), \\ y_2 = -9(1 - e^{-x}) + x(5 + 4e^{-x}); \end{array}\right.$

8) $\left[\begin{array}{l} y_1 = e^{x}, \\ y_2 = e^{x}; \end{array}\right.$

9) $\left[\begin{array}{l} y_1 = (1 - x)\cos x - \sin x, \\ y_2 = (x - 2)\cos x + x\sin x; \end{array}\right.$

10) $\left[\begin{array}{l} y_1 = C_1 e^{x} + C_2 \sin x + C_3 \cos x, \\ y_2 = -C_1 e^{x} + C_2 \cos x - C_3 \sin x + x, \\ y_3 = C_2 \sin x + C_3 \cos x + 1. \end{array}\right.$

4. 1) $\left[\begin{array}{l} y_1 = -C_1 e^{2x} + 4C_2 e^{-3x} + x + x^2, \\ y_2 = C_1 e^{2x} + C_2 e^{-3x} - 0{,}5x^2; \end{array}\right.$

2) $\left[\begin{array}{l} y_1 = 2C_1 e^{x} + C_2 e^{-x} + \dfrac{8}{3} e^{2x}, \\ y_2 = 3C_1 e^{x} + C_2 e^{-x} + \dfrac{29}{3} e^{2x}; \end{array}\right.$

3) $\left[\begin{array}{l} y_1 = C_1 \cos x + C_2 \sin x + tg\, x, \\ y_2 = -C_1 \sin x + C_2 \cos x + 2; \end{array}\right.$

4) $\left[\begin{array}{l} y_1 = C_1 + 2C_2 e^{-x} + 2e^{-x} \ln\left| e^x - 1 \right|, \\ y_2 = -2C_1 - 3C_2 e^{-x} - 3e^{-x} \ln\left| e^x - 1 \right|; \end{array}\right.$

5) $\left[\begin{array}{l} y_1 = C_1 \cos x + C_2 \sin x + \cos x \cdot \ln\left| \cos x \right| + x \sin x, \\ y_2 = -C_1 \sin x + C_2 \cos x - \sin x \cdot \ln\left| \cos x \right| + x \cos x. \end{array}\right.$

Ключові терміни

Система диференціальних рівнянь першого порядку, система лінійних диференціальних рівнянь першого порядку (СЛДР-1), нормальна система, матрична форма, векторна функція (вектор-функція), однорідна (неоднорідна) система, розв’язок системи на (a, b), загальний розв’язок, довільні сталі, частинний розв’язок, початкові умови, задача Коші; нормальна система ЛДР-1 зі сталими коефіцієнтами; структура загального розв’язку, визначник Вронського (вронскіан), лінійна комбінація розв’язків, лінійно незалежна система функцій, фундаментальна система розв’язків (ФСР) на (a, b), метод виключення, метод Ейлера, характеристичне рівняння, характеристичний многочлен, метод Лагранжа, спеціальна вектор-функція, метод невизначених коефіцієнтів, модель.

Резюме

Висвітлюються основні положення теорії систем (звичайних) лінійних диференціальних рівнянь 1-го порядку. Розглянуто означення основних понять теорії названих систем рівнянь. Установлюється структура загального розв’язку і вивчаються основні способи розв'язання однорідних і неоднорідних систем ЛДР-1 зі сталими коефіцієнтами. Наведені приклади побудови математичних моделей задач економічної динаміки.

Література: [2; 6; 7; 14; 16; 17; 24; 28; 31].

20. Теорія стійкості

Все в природі повинно бути виміряне, все може бути пораховано.

М. Лобачевський

Незрівнянний дар – могутня стійкість душі.
З нею в житті нічого не страшно.

Архілох, давньогрецький лірик

Мета: навчити майбутніх фахівців умінню проводити дослідження на стійкість розв'язків диференціальних рівнянь та їх систем, які є математичними моделями різноманітних економічних і природничих процесів.

Питання теми:

20.1. Динамічні системи (ДС): означення основних понять, геометрична інтерпретація.

20.2. Задача стійкості розв'язків ДС. Стійкість розв'язків ДС, що описується одним диференціальним рівнянням.

20.3. Стійкість автономних ДС, що описуються системами нормальних лінійних диференціальних рівнянь зі сталими коефіцієнтами.

20.4. Деякі задачі застосовного характеру.

Компетентності, що формуються після вивчення теми:

Загальнонаукова: володіння основами теорії стійкості, засобами дослідження на стійкість динамічних систем, закон еволюції яких описується диференціальним рівнянням або системою диференціальних рівнянь.

Загальнопрофесійна: підготовленість до аналізу розв'язків систем диференціальних рівнянь як математичних моделей динамічних систем із метою якісної оцінки побудованої моделі.

Спеціалізовано-професійна: уміння впроваджувати засоби дослідження на стійкість динамічних систем у моделювання управління інформаційними системами, давати якісну порівняльну оцінку стійкості обчислювальних процесів та процесів перетворення інформації, які здійснюються за конкретними алгоритмами.

20.1. Динамічні системи (ДС): означення основних понять, геометрична інтерпретація

Під **системою** (від др.-грецьк. sistẽma – ціле, складене з частин; з’єднання) розуміють множину елементів (скінченну чи нескінченну), що знаходяться в тих чи інших відношеннях і зв’язках один з одним, яка утворює певну цілісність, єдність. Поняття „система” вживається в різних галузях знань, наприклад: система числення; система рівнянь; періодична система хімічних елементів; філософська система; Сонячна система; політична система, економічна система тощо.

При математичному підході до вивчення систем, кожній із них ставлять у відповідність певний набір числових характеристик (параметрів, показників, чинників). Якщо відбулася зміна характеристик системи (хоча б однієї), то кажуть, що система перейшла в інший **стан**. Послідовну зміну станів системи називають **процесом** (функціонування).

Система називається **динамічною** (**ДС**), якщо визначено її стан у даний момент часу – **початковий стан** – і заданий закон, який описує зміну (еволюцію) початкового стану з плином часу. Закон, який дозволяє за початковим станом прогнозувати майбутній стан ДС, називають **законом еволюції** або **законом руху** (зміни станів) системи. Закон руху вказує, з якою швидкістю змінюється стан системи.

Прикладами динамічних систем є механічні, фізичні, хімічні та біологічні об’єкти, економічні процеси, обчислювальні процеси та процеси перетворення інформації, що здійснюються відповідно до конкретних алгоритмів. Описи ДС для завдання закону еволюції також різноманітні: за допомогою диференціальних рівнянь, дискретних відображень, теорії графів, теорії марковських ланцюгів і т. ін. Вибір одного із способів опису задає конкретний вид математичної моделі відповідної ДС. Математична модель ДС вважається заданою, якщо введені параметри (координати) системи: y_1, y_2, ..., y_n, що визначають однозначно її стан у момент часу t, тобто $y_i = y_i(t)$, $i = \overline{1,n}$, і відомий відповідний закон еволюції. Залежно від ступеня наближення одній системі можуть бути поставлені у відповідність різні математичні моделі.

Дослідження реальних систем зводиться до вивчення математичних моделей, вдосконалення і розвиток яких визначаються аналізом експериментальних і теоретичних результатів при їх зіставленні.

У подальшому (у викладі) під динамічною системою будемо розуміти саме її математичну модель.

Далі розглядаються ДС, закон еволюції яких описується за допомогою системи диференціальних рівнянь першого порядку, зокрема, одного диференціального рівняння (див. (19.1.4)):

$$y_i' = f_i(t, y_1, y_2, ..., y_n), \quad i = \overline{1,n}, \tag{20.1.1}$$

де $y_i' = y_i'(t)$, $i = \overline{1,n}$, – похідні невідомих функцій за часом;

f_i – функції від змінних t, y_1, y_2, …, y_n, які визначені і неперервні разом зі своїми частинними похідними на множині $\{ t \in [t_0, +\infty),\ y \in \mathbf{R}^n \}$, тобто задовольняють умови теореми Коші, t_0 – початковий момент часу, для якого задаються початкові умови – стан системи: $y_{i0} = y_i(t_0)$.

Системи рівнянь (19.4.1), (19.4.2), (19.4.3) – спрощена модель національної економіки, модель „гонка озброєнь”, модель „хижак-жертва” – є прикладами ДС.

Якщо при фіксованому t величини y_1, y_2, …, y_n розглядати як координати точки $y = (y_1, y_2, ..., y_n)$ в n-вимірному просторі, то отримаємо *геометричне* (наочне при $n \le 3$) зображення стану динамічної системи у вигляді точки, яку називають **фазовою точкою**, а простір – **фазовим простором**.

Зміна стану з часом зображується як рух фазової точки по деякій лінії, яку називають **фазовою траєкторією** (або просто **траєкторією**). (Фаза від грецьк. phasis – поява, виникнення.)

Фазові траєкторії описуються параметричними рівняннями:

$$y_i = y_i(t), \quad i = \overline{1,n}.$$

При $n = 2$ (рис. 20.1.1) – це криві в $\mathbf{R}^2$.

Зображення траєкторій ДС у фазовому просторі системи називається **фазовим портретом**.

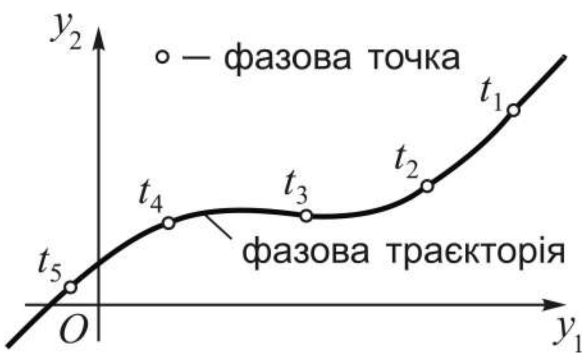


Рис. 20.1.1. **Фазова траєкторія**

Ліві частини системи (20.1.1) є складовими (за осями координат) швидкості змінювання положення фазової точки, тому кажуть, що ця система задає поле швидкостей еволюції ДС.

Якщо праві частини рівнянь у ДС (20.1.1) не містять явним чином незалежну змінну t, то систему називають **автономною** (**стаціонарною**), а процес, що описується такою системою, – **усталеним**:

$$\text{автономна ДС} \quad \rightleftharpoons \quad y_i' = f_i(y_1, y_2, ..., y_n), \quad i = \overline{1, n}. \tag{20.1.2}$$

20.2. Задача стійкості розв'язків ДС. Стійкість розв'язків ДС, що описується одним диференціальним рівнянням

Постановка задачі стійкості. Стійкість за Ляпуновим розв'язків динамічних систем, що описуються ДР-1

Нехай деякий об'єкт (явище, процес) описується ДС (20.1.1) з початковими умовами $y_{i0} = y_i(t_0)$, $i = \overline{1, n}$. У випадку реальних систем початкові умови задаються, як правило, з певною похибкою як результати експерименту, вимірювань, аналізу статистичного матеріалу тощо. У зв'язку з цим постає питання про вплив незначних (малих, несуттєвих) змін початкових умов на розв'язок ДС.

Кожний розв'язок ДС (20.1.1) чи (20.1.2) називають **рухом** системи.

Здатність системи мало відхилятися (в тому чи іншому сенсі) від її руху при малих відхиленнях (збуреннях) початкового положення системи у фазовому просторі називають **стійкістю** ДС.

Постановка задачі стійкості ДС. Знайти умови, за яких досить малі зміни початкових даних викликають як завгодно малі зміни розв'язку системи.

Дослідження розв'язків системи на стійкість проводять, як на порівняно невеликих відрізках часу t: $t_0 \le t \le T$, так і на досить великих проміжках часу, у граничному випадку – при $t \to \infty$.

Розв'язанням поставленої задачі (у різних галузях людської діяльності) займається **теорія стійкості** як сукупність поглядів, уявлень, ідей, понять, міркувань, методів, теорій (зі своїми, специфічними, поняттями, лемами, теоремами та їх доведенням), що виникли і виникають із метою вивчення стійкості руху (що розуміється в найзагальнішому вигляді).

Розглянемо ДС, яка описується одним диференціальним рівнянням:

$$F(t, y, y') = 0, \qquad (20.2.1)$$

де t – незалежна змінна (час);

$y = y(t)$; $y' = y'(t)$ – невідома функція та її похідна відповідно;

F – закон, яким пов'язані змінні t, y, y',

і відомий початковий стан системи – початкова умова – $y(t_0) = y_0$.

Нехай $y = \varphi(t)$ – частинний розв'язок рівняння, який задовольняє початкову умову $\varphi(t_0) = \varphi_0$; $\varepsilon > 0$, $\delta > 0$ – дійсні числа, причому δ залежне від ε: $\delta = \delta(\varepsilon)$.

Розв'язок $\varphi(t)$ називається **стійким за Ляпуновим,** якщо для якого завгодно $\varepsilon > 0$ існує $\delta(\varepsilon) > 0$ таке, що для розв'язку рівняння $y(t)$, визначеного для всіх $t \geq t_0$, початкове значення якого задовольняє умову:

$$|\, y(t_0) - \varphi(t_0) \,| < \delta, \qquad (20.2.2)$$

для всіх $t \geq t_0$ справедлива нерівність:

$$|\, y(t) - \varphi(t) \,| < \varepsilon. \qquad (20.2.3)$$

Інакше кажучи, розв'язок $y = \varphi(t)$ рівняння (20.2.1) є стійким, якщо кожний розв'язок $y = y(t)$ з початковою умовою з δ-околу точки $\varphi(t_0)$ при $t_0 \leq t < +\infty$ існує і не виходить з ε-околу графіка розв'язку $y = \varphi(t)$.

Якщо при як завгодно малому $\delta > 0$ для розв'язку $y(t)$ нерівність (20.2.3) не виконується, то розв'язок $\varphi(t)$ називається **нестійким**.

Якщо крім виконання нерівності (20.2.3) за умови (20.2.2) виконується також умова:

$$\lim_{t \to \infty} |\, y(t) - \varphi(t) \,| = 0, \qquad (20.2.4)$$

то розв'язок $\varphi(t)$ називається **асимптотично стійким**.

Строге означення стійкості „мовою $\varepsilon - \delta$" запропонував Олександр Михайлович Ляпунов (1857 – 1918 рр.) – російський математик і механік.

Розв'язок ДС $\varphi(t)$, який підлягає дослідженню на стійкість називають **незбуреним**, а розв'язок $y(t)$, що відповідає новим, зміненим, початковим умовам, – **збуреним**.

На рис. 20.2.1, 20.2.2 відповідно наведено схематичне зображення (жирною лінією) стійкого і нестійкого розв'язків. Кажуть, що у разі стійкості, фазові траєкторії не виходять за межі **ε-трубки** (або **ε-чохла**). У противному випадку знайдеться хоча б один розв'язок ДС, який у певний момент часу t_1 (для кожного такого розв'язку свій) виходить за межі **ε-чохла**.

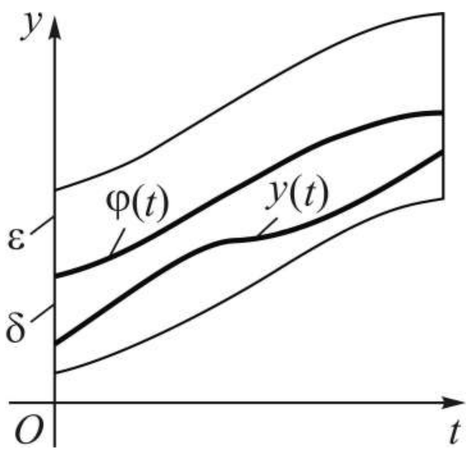


Рис. 20.2.1. **Стійкий розв'язок**

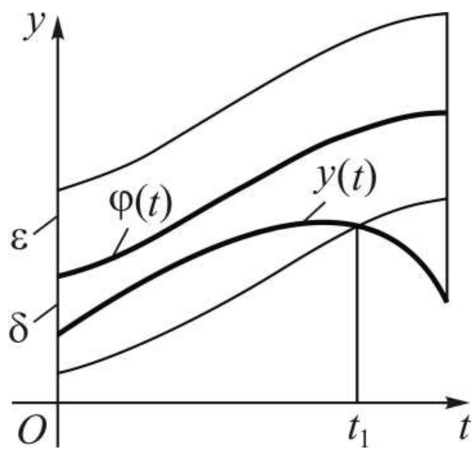


Рис. 20.2.2. **Нестійкий розв'язок**

Дослідження незбуреного розв'язку $\varphi(t)$ на стійкість відносно легко здійснити, якщо відомий загальний розв'язок ДС $y = y(t, C)$, $C \in \mathbf{R}$.

Приклад. Дослідити на стійкість розв'язок ДС: $\varphi(t) = \sin t + \cos t$, $\varphi(0) = 1$, закон еволюції якої описується рівнянням: $y'(t) - y(t) = -2\sin t$.

Знайдемо загальний розв'язок даного ЛДР-1:

$$y(t) = Ce^t + \sin t + \cos t .$$

Задамо новий початковий стан системи: $y(0) = y_0$, *установимо* значення параметра C для збуреного розв'язку: $C_0 = 1 - y_0$, і *запишемо* відповідний частинний розв'язок:

$$y(t) = (1 - y_0)e^t + \sin t + \cos t .$$

Виберемо довільним чином $\varepsilon > 0$ і з'ясуємо, чи існує $\delta(\varepsilon) > 0$ таке, що $\forall t \geq 0$ із нерівності $|y_0 - 1| < \delta$ випливає нерівність (20.2.3) $|y(t) - \varphi(t)| < \varepsilon$:

$$y(t) - \varphi(t) = (y_0 - 1)e^t \;\Rightarrow\; |y_0 - 1|e^t < \varepsilon \;\Rightarrow\; |y_0 - 1| < \frac{\varepsilon}{e^t} \;\Rightarrow\; t < \ln\frac{\varepsilon}{|y_0 - 1|}.$$

Отже, яким би не був модуль різниці $(y_0 - 1)$, з плином часу фазова траєкторія вийде за межі ε-чохла. Таким чином, розв'язок $\varphi(t)$ нестійкий, до того ж $\lim\limits_{t\to\infty}|y_0 - 1|e^t = +\infty$.

На рис. 20.2.3 наведено фазовий портрет, на якому збурений рух відповідає умові: $y_0 = 0{,}99$, тобто початковий стан системи був зсунений вниз на $-0{,}01$: $|y_0 - \varphi_0| = 0{,}01$.

З часом для будь-якого $\varepsilon > 0$ фазова траєкторія $y = y(t)$ вийде за межі ε-околу. ●

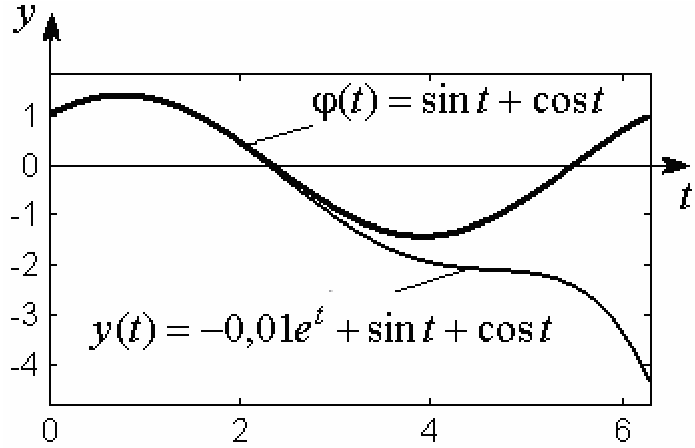


Рис. 20.2.3. **Нестійкий розв'язок**

Приклад. Дослідити на стійкість розв'язок ДС: $\varphi(t) = \sin t$, $\varphi(0) = 0$, закон еволюції якої описується рівнянням: $y'(t) + y(t) = \sin t + \cos t$.

Загальний розв'язок рівняння має вигляд (*переконайтеся*):

$$y(t) = Ce^{-t} + \sin t.$$

Задамо новий початковий стан системи: $y(0) = y_0$, установимо значення параметра C для збуреного розв'язку: $C_0 = y_0$, і запишемо відповідний частинний розв'язок: $y(t) = y_0 e^{-t} + \sin t$.

Далі знайдемо модуль різниці між збуреним і незбуреним розв'язками:

$$|y(t) - \varphi(t)| = \left|y_0 e^{-t}\right| = |y_0| e^{-t} \leq |y_0| \quad \forall t \geq 0.$$

Якщо тепер покласти $|y_0| < \delta = \varepsilon$, то й поготів виконуватиметься співвідношення: $|\,y(t) - \varphi(t)\,| = \left|\,y_0 e^{-t}\right| < \varepsilon$. Отже, розв'язок ДС $\varphi(t) = \sin t$ стійкий за Ляпуновим.

На рис. 20.2.4 наведено фазовий портрет, на якому збурений рух відповідає умові: $y_0 = -0{,}5$, тобто початковий стан системи був зсунений вниз на $-0{,}5$: $|y_0 - \varphi_0| = 0{,}5$.

З часом для будь-якого $\varepsilon > 0$ фазова траєкторія $y = y(t)$ не вийде за межі ε-околу.

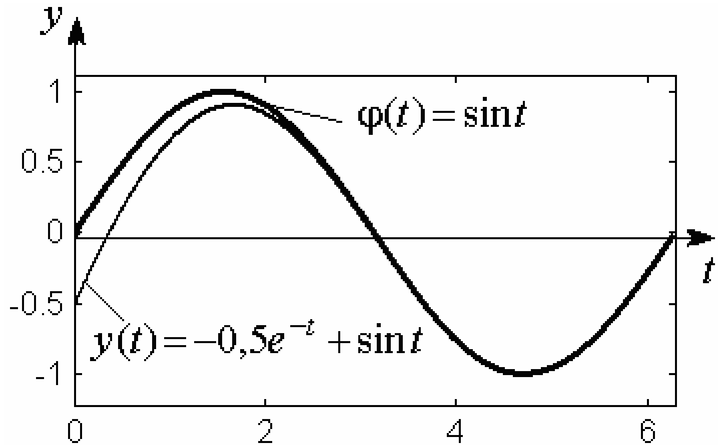


Рис. 20.2.4. **Стійкий розв'язок**

Більше того, $\lim\limits_{t\to\infty} |\,y_0| e^{-t} = 0$, тобто досліджуваний розв'язок асимптотично стійкий. Перший доданок у виразі для $y(t)$ при $t \to +\infty$ прямує до нуля і збурений рух неухильно наближається до синусоїди. ●

Якщо ДС містить числовий параметр, то залежно від його значень поведінка системи (в смислі стійкості її рухів) може бути різною.

Приклад. Дослідити на стійкість розв'язки задачі Коші рівняння: $y' - ay = 0$, $a - const$.

Загальний розв'язок рівняння такий (*переконайтеся*): $y(t) = Ce^{at}$.

Для довільного початкового стану $y(t_0) = y_0$ маємо: $y(t) = y_0 e^{a(t-t_0)}$.

Виберемо частинний розв'язок $\varphi(t) = \varphi_0 e^{a(t-t_0)}$, що відповідає початковій умові: $\varphi(t_0) = \varphi_0$ ($y_0 \ne \varphi_0$), і дослідимо його, перевіряючи виконання умов означення стійкості (20.2.2), (20.2.3):

$$\forall \varepsilon > 0 \ \ \exists \delta(\varepsilon) > 0 : \left|y(t_0) - \varphi(t_0)\right| < \delta \ \ \forall t \ge t_0 \ \Rightarrow \ \left|y(t) - \varphi(t)\right| < \varepsilon \ \ \forall t \ge t_0 .$$

Знайдемо модуль різниці між збуреним $y(t)$ і незбуреним $\varphi(t)$ розв'язками: $\left|y(t) - \varphi(t)\right| = \left|y_0 - \varphi_0\right| e^{a(t-t_0)}$, і оцінимо його залежно від значень параметра a.

Розіб'ємо множину всіх значень a на три класи: $(-\infty, 0)$, $\{0\}$, $(0, +\infty)$, і проаналізуємо розв'язки на кожному з них.

1. $a<0$: $e^{a(t-t_0)} \le 1 \ \forall t \ge t_0 \Rightarrow |y(t)-\varphi(t)| = |y_0 - \varphi_0| e^{a(t-t_0)} \le |y_0 - \varphi_0|$. Якщо покласти $|y_0 - \varphi_0| < \delta$, то $|y(t) - \varphi(t)| < \delta = \varepsilon \ \forall t \ge t_0$. Отже, $\varphi(t)$ – *стійкий* розв'язок. (Чи буде $\varphi(t)$ *асимптотично стійким*?)

2. $a>0$: для всіх $t \ge t_0$ степінь $e^{a(t-t_0)}$ зростає, отже модуль різниці $y(t)-\varphi(t)$ теж зростає, і може з часом стати як завгодно великим $\forall \varepsilon > 0$: $\lim\limits_{t\to+\infty} |y_0 - \varphi_0| e^{a(t-t_0)} = +\infty$, тому при додатних a розв'язок *нестійкий*.

3. $a=0$. (*Обміркуйте*, яким буде розв'язок із точки зору стійкості.) ●

Дослідження на стійкість положення рівноваги системи

Дослідження на стійкість заданого, незбуреного, розв'язку системи звичайно зводять до дослідження на стійкість тривіального (нульового) розв'язку іншої системи заміною: $y(t) = x(t) + \varphi(t)$, або $x(t) = y(t) - \varphi(t)$.

Тобто нові функції $x(t)$ є відхиленнями вихідної функції $y(t)$ від функції $\varphi(t)$, яка досліджується на стійкість. Зрозуміло, що чим менше модуль цього відхилення, тим ближче одна до одної відповідні траєкторії руху. Якщо рівняння (20.2.1) розв'язуване відносно похідної:

$$y' = f(t, y), \tag{20.2.5}$$

то перехід у ньому до нової змінної $x(t)$ дає:

$$x(t) = y(t) - \varphi(t) \ \Rightarrow \ x'(t) = y'(t) - \varphi'(t) \ \Rightarrow$$
$$\Rightarrow x'(t) = f(t, \ x(t) + \varphi(t)) - f(t, \varphi(t)). \tag{20.2.6}$$

Функцію $x(t)$ називають **збуренням** ДС, а диференціальне рівняння (20.2.6) – **рівнянням збуреного руху**.

Кожному рухові ДС $y' = f(t, y)$ відповідає частинний розв'язок рівняння збуреного руху. Зокрема, незбуреному рухові ДС (20.2.5), тобто коли $y(t) = \varphi(t)$, відповідає тривіальний розв'язок (*обґрунтуйте*):

$$x(t) \equiv 0. \tag{20.2.7}$$

Специфіка тривіального розв'язку полягає в тому, що з плином часу t точка $x(t)$ не рухається, а знаходиться на місці. Тривіальний розв'язок рівняння збуреного руху і точку 0 називають **положенням рівноваги** системи (20.2.6) або **точкою спокою**. При $n=1$ точка спокою – фазова точка – є точкою відліку на числовій прямій станів системи.

Висновок. Задача дослідження стійкості (асимптотичної стійкості, нестійкості) положення рівноваги ДС (20.2.6) рівносильна розв'язку рівняння (20.2.5).

Приклад. Установити, чи є розв'язок задачі Коші: $y' = 2y - t$, $y(0) = 1/4$, стійким, дослідивши на стійкість положення рівноваги (точки спокою).

Знаходимо загальний розв'язок заданого ЛДР-1 (методом допоміжних функцій або методом Лагранжа, див. п. 16.4) і відповідний частинний, незбурений, розв'язок:

$$y = (2t+1)/4 + Ce^{2t}, \quad y = \varphi(t) = (2t+1)/4.$$

Виконуємо заміну: $y = x(t) + \varphi(t)$, де $x(t)$ – нова невідома функція, тобто покладаємо: $y = x(t) + (2t+1)/4$, тоді рівняння набуває вигляду:

$$y' = 2y - t \;\Rightarrow\; \left| \begin{array}{c} y' = x'(t) + 1/2 \\ 2y - t = 2x(t) + 1/2 \end{array} \right| \;\Rightarrow\; x'(t) = 2x(t).$$

Отже, отримали рівняння з нульовим розв'язком: $x(t) \equiv 0 \quad \forall t \geq 0$.

Загальний розв'язок рівняння відносно $x(t)$ такий: $x(t) = Ce^{2t}$.

Початковій умові $x(0) = x_0 \neq 0$ відповідає розв'язок: $x(t) = x_0 e^{2t}$.

Досліджуємо тривіальний розв'язок на стійкість.

Експонента e^{2t} – зростаюча функція, тому з часом у деякий момент $t = t_1$ (рис. 20.2.5) при будь-якому $\varepsilon > 0$, рух $x(t) = x_0 e^{2t}$ вийде за межі ε-околу положення рівноваги $x(t) \equiv 0$, тобто умови стійкості не виконуються:

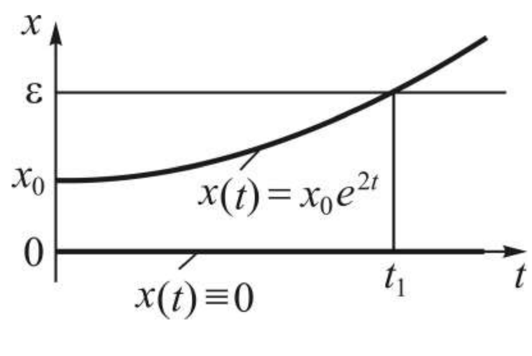


Рис. 20.2.5. **Нестійка рівновага**

$$\forall\varepsilon>0\ \ \exists\delta(\varepsilon)>0:\ |x_0|<\delta\ \Rightarrow\ |x_0|e^{2t}<\varepsilon\quad \forall t\ge 0.$$

Таким чином, стан рівноваги нестійкий, а значить і досліджуваний розв'язок для $y(0)=1/4$ не є стійким. ●

Наведемо в символах, згідно з висновком, означення стійкості та асимптотичної стійкості тривіального розв'язку.

Нехай $y=\varphi(t)\equiv 0$ – точка спокою ДС $y'=f(t,y)$, тобто $f(t,0)=0$, тоді:

$$\begin{gathered}\varphi(t)\equiv 0 \text{ – стійкий розв'язок } \rightleftharpoons \\ \rightleftharpoons\ \forall\varepsilon>0\ \exists\delta(\varepsilon)>0:\ |y(t_0)|<\delta\ \Rightarrow\ |y(t)|<\varepsilon\ \forall t\ge t_0.\end{gathered} \tag{20.2.8}$$

(*Пропонуємо* означення (20.2.8) сформулювати словесно.)

Якщо, крім того, $\lim\limits_{t\to+\infty}|y(t)|=0$, то тривіальний розв'язок $\varphi(t)\equiv 0$ називається **асимптотично стійким**.

Таким чином, стійкість тривіального розв'язку означає, що траєкторія довільного руху, початкова точка якої знаходиться у деякому δ-околі початку координат фазового простору – площини tOy – системи (20.2.5) для $\forall t\ge t_0$ не виходить за межі довільного ε-околу точки спокою. (*Як вправу* покажіть, що це означення стійкості можна сформулювати інакше: для кожного $\varepsilon>0$ знайдеться $\delta>0$ таке, що з нерівності $y^2(t_0)<\delta^2$ випливатиме нерівність $y^2(t)<\varepsilon^2$ для всіх $t\ge t_0$.)

Стійкість динамічних систем, що описуються ОЛДР-n зі сталими коефіцієнтами. Критерій Гурвіца

Нехай ДС описується однорідним лінійним диференціальним рівнянням n-го порядку зі сталими коефіцієнтами (див. (18.3.1)):

$$L(y)=y^{(n)}+p_1y^{(n-1)}+...+p_ny=0, \tag{20.2.9}$$

де p_1, p_2, …, p_n – сталі величини, $y=y(t)$ – невідома функція.

Оскільки рівняння $L(y)=0$ не містить явним чином змінну t, то за аналогією з (20.1.2) така ДС називається **автономною**.

Якщо тривіальний розв'язок ДС: $y = \varphi(t) \equiv 0$, стійкий, її називають **стійкою** динамічною системою.

Установлено, що ДС, закон еволюції якої моделюється неоднорідним ЛДР-n (див. (18.3.8)), буде стійкою при будь-якій правій частині $f(t)$, якщо стійкий нульовий розв'язок відповідного однорідного рівняння, тому вивчатимемо на стійкість тільки автономні системи.

Складемо характеристичне рівняння ДС (див. (18.3.7)):

$$k^n + p_1 k^{n-1} + ... + p_{n-1}k + p_n = 0.$$

Будемо розглядати коефіцієнти при степенях k, включаючи $p_0 = 1$, в якості елементів квадратної $n \times n$-матриці H_n, утвореної таким чином:

по головній діагоналі зліва направо виставимо всі коефіцієнти характеристичного рівняння від p_1 до p_n;

від кожного елемента діагоналі вгору і вниз добудовуємо стовпці матриці так, щоб індекси коефіцієнтів спадали зверху вниз;

на місце коефіцієнтів з індексами менше 0 або більше n записуємо нулі.

Приклади (*проаналізуйте,* чи правильно побудовані матриці):

$$H_3 = \begin{pmatrix} p_1 & p_3 & 0 \\ p_0 & p_2 & 0 \\ 0 & p_1 & p_3 \end{pmatrix}; \quad H_4 = \begin{pmatrix} p_1 & p_3 & 0 & 0 \\ p_0 & p_2 & p_4 & 0 \\ 0 & p_1 & p_3 & 0 \\ 0 & p_0 & p_2 & p_4 \end{pmatrix}; \quad H_5 = \begin{pmatrix} p_1 & p_3 & p_5 & 0 & 0 \\ p_0 & p_2 & p_4 & 0 & 0 \\ 0 & p_1 & p_3 & p_5 & 0 \\ 0 & p_0 & p_2 & p_4 & 0 \\ 0 & 0 & p_1 & p_3 & p_5 \end{pmatrix}.$$

Матриця H_n, складена із коефіцієнтів характеристичного рівняння і нулів за наведеним алгоритмом, називається **матрицею Гурвіца**.

Визначник матриці H_n і його діагональні мінори – мінори k-го порядку ($k = \overline{1, n-1}$), що містять k діагональних елементів матриці, – називаються **визначниками Гурвіца**. (Адольф Гурвіц (1859 – 1919 рр.) – німецький математик.)

Виявляється, що для вирішення питання про стійкість динамічної системи необов'язково розв'язувати саме рівняння, а можна обійтися обчисленням визначників Гурвіца.

Критерій Гурвіца (*стійкості ДС*). Динамічна система стійка тоді і тільки тоді, коли всі визначники Гурвіца, у кількості n, додатні:

$$\text{ДС стійка} \quad \Leftrightarrow \quad \Delta_1 > 0,\ \Delta_2 > 0,\ \ldots,\ \Delta_n > 0. \tag{20.2.10}$$

Наведемо, *наприклад*, всі діагональні мінори для $n = 4$:

$$\Delta_1 = p_1; \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} p_1 & p_3 \\ p_0 & p_2 \end{vmatrix}; \quad \Delta_3 = \begin{vmatrix} p_1 & p_3 & 0 \\ p_0 & p_2 & p_4 \\ 0 & p_1 & p_3 \end{vmatrix}; \quad \Delta_4 = \begin{vmatrix} p_1 & p_3 & 0 & 0 \\ p_0 & p_2 & p_4 & 0 \\ 0 & p_1 & p_3 & 0 \\ 0 & p_0 & p_2 & p_4 \end{vmatrix}.$$

Як наслідок із правила побудови матриці Гурвіца випливає (*наведіть міркування*), що

$$\Delta_n = p_n \Delta_{n-1}, \tag{20.2.11}$$

тому умову $\Delta_n > 0$ можна замінити вимогою: $p_n > 0$.

Якщо p_n або Δ_{n-1} виявиться рівним нулю, то кажуть, що система знаходиться **на межі стійкості**, її рух коливається навколо положення рівноваги або відхиляється від точки спокою за деяким неперіодичним законом. Якщо в (20.2.10) розкрити визначники, то отримаємо критерій Гурвіца у вигляді системи нерівностей відносно коефіцієнтів p_i, $i = \overline{1, n}$.

Достоїнствами критерію є: принципова простота; зручність для реалізації на ЕОМ; недоліками: при великих порядках визначників обчислювальний процес стає трудомістким (як правило, критерій застосовують при $n \le 5$), мала наочність.

З'ясуємо умови стійкості ДС у випадках: $n \le 3$ (табл. 20.2.1).

Таблиця. 20.2.1

Умови стійкості за Гурвіцом для $n = 1, 2, 3$

n	Характеристичне рівняння	Визначники Гурвіца	Умова стійкості
1	$k + p_1 = 0$	$\Delta_1 = p_1 > 0$	$p_1 > 0$ при $p_0 = 1 > 0$
2	$k^2 + p_1 k + p_2 = 0$	$\Delta_1 = p_1 > 0$, $\Delta_2 = p_1 p_2 > 0$	$p_0 > 0$, $p_1 > 0$, $p_2 > 0$
3	$k^3 + p_1 k^2 + p_2 k + p_3 = 0$	$\Delta_1 = p_1 > 0$, $\Delta_2 = p_1 p_2 - p_0 p_3 > 0$, $\Delta_3 = p_3 \Delta_2 > 0$	$p_0 > 0$, $p_1 > 0$, $p_2 > 0$, $p_3 > 0$, $p_1 p_2 - p_0 p_3 > 0$

Висновки:

1) при $n=1,2$ необхідною і достатньою умовою стійкості ДС є додатність коефіцієнтів характеристичного рівняння;

2) при $n>2$ з'являються додаткові умови.

У загальному випадку застосування критерію здійснюють у такому порядку:

1) *складаємо* старший мінор матриці Гурвіца Δ_n;

2) *виписуємо* за ним інші визначники: Δ_1, Δ_2, …, Δ_{n-1}, і послідовно *обчислюємо* Δ_i, $i=\overline{1,n}$.

3) *робимо* відповідний висновок; якщо зустрінеться від'ємний мінор, то система нестійка, подальші розрахунки непотрібні.

Приклад. Дослідити на стійкість тривіальний розв'язок рівняння:

$$y^{(4)}+2y'''+3y''+4y'+5y=0.$$

Згідно з 1), 2), 3) маємо (*наведіть* словесний коментар самостійно):

$$(p_0=1,\ p_1=2,\ p_2=3,\ p_3=4,\ p_4=5)\ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \Delta_4=\begin{vmatrix} 2 & 4 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 5 & 0 \\ 0 & 2 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 5 \end{vmatrix} \Rightarrow \Delta_1=2;\ \Delta_2=\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 3 \end{vmatrix}=2;\ \Delta_3=\begin{vmatrix} 2 & 4 & 0 \\ 1 & 3 & 5 \\ 0 & 2 & 4 \end{vmatrix}=-12.$$

Мінор 3-го порядку виявився від'ємним, отже ДС нестійка. ●

Приклад. Закон еволюції ДС описується рівнянням:

$$y^{(4)}+3y'''+y''+ay'+by=0.$$

При яких значеннях параметрів a, b система буде стійка?

Виписуємо вектор коефіцієнтів, *складаємо* визначники Гурвіца і *розкриваємо* їх:

$$(p_0=1,\ p_1=3,\ p_2=1,\ p_3=a,\ p_4=b)\ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ \Delta_4=\begin{vmatrix} 3 & a & 0 & 0 \\ 1 & 1 & b & 0 \\ 0 & 3 & a & 0 \\ 0 & 1 & 1 & b \end{vmatrix} \Rightarrow\ \Delta_1=3;\ \Delta_2=\begin{vmatrix} 3 & a \\ 1 & 1 \end{vmatrix}=3-a>0;$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 3 & a & 0 \\ 1 & 1 & b \\ 0 & 3 & a \end{vmatrix} = 3a - a^2 - 9b > 0; \quad \Delta_4 = b\Delta_3 > 0.$$

З виразу для Δ_4 зразу дістаємо: $b > 0$, і переходимо до аналізу системи нерівностей:

$$\begin{cases} 3 - a > 0, \\ 3a - a^2 - 9b > 0, \\ 9b > 0. \end{cases}$$

Сума другої і третьої нерівностей дає: $0 < a < 3$.

Якщо другу нерівність розв'язати відносно a, то отримаємо залежність значень параметра a від вибору b: $0 < a < 1{,}5(1 + \sqrt{1-4b})$. Звідки $0 < b < 1/4$. Таким чином, $b \in (0,\ 1/4)$, $a \in \left(0,\ 3/2\,(1 + \sqrt{1-4b})\right)$. ●

(*Покажіть,* що при фіксованих a: $0 < a < 3$, параметр b повинен задовольняти нерівність $0 < b < a(3-a)/9$.)

20.3. Стійкість автономних ДС, що описуються системами нормальних лінійних диференціальних рівнянь зі сталими коефіцієнтами

Основні поняття і теореми

Нехай закон еволюції ДС описується нормальною СЛДР-1 із незалежною змінною t (див. п. 19.2):

$$Y' = AY, \tag{20.3.1}$$

де

$$Y = Y(t) = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}, \quad Y' = Y'(t) = \begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \\ \vdots \\ y_n' \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}, \quad a_{ij} - const.$$

Така система є автономною (див. (20.1.2)), її задовольняє тривіальний розв'язок $Y(t) \equiv 0$, тобто $y_i = y_i(t) = 0 \ \ \forall i = \overline{1, n}$.

Точка $(y_1, y_2, ..., y_n)$, у якій права частина автономної ДС – однорідної системи диференціальних рівнянь (20.3.1) – перетворюється на нульову матрицю-стовпець, називається **точкою спокою** системи.

Установлено, що стійкість автономної ДС (20.3.1) визначається *властивостями* коренів її характеристичного рівняння (див. (19.2.14)):

$$\begin{vmatrix} a_{11}-k & a_{11} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}-k & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn}-k \end{vmatrix} = 0, \tag{20.3.2}$$

або, що те ж саме, рівняння: $k^n + p_1 k^{n-1} + ... + p_{n-1}k + p_n = 0$.

У термінах теорії власних чисел і власних векторів квадратної матриці (див. п. 4.5, ч. 1) розв’язками рівняння є власні числа матриці A.

Стосовно коренів характеристичного рівняння – власних чисел матриці A – вводять поняття алгебраїчної і геометричної кратності.

Алгебраїчною кратністю r_i власного числа k_i матриці A називається кратність числа k_i як кореня характеристичного рівняння.

Геометричною кратністю s_i власного числа k_i матриці A називається кількість лінійно незалежних власних векторів, належних числу k_i. Доведено, що геометрична кратність не перевищує алгебраїчну: $1 \le s_i \le r_i$, $i \in \{1, 2, ..., n\}$. Для однократних коренів $s = r = 1$.

Приклад. Визначити геометричні кратності s власних чисел заданих матриць і порівняти їх з алгебраїчними кратностями r:

$$A_1 = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix},\ a \in \mathbf{R} \setminus \{0\}; \quad A_2 = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix},\ b \in \mathbf{R} \setminus \{0\}.$$

Складаємо характеристичні рівняння і розв’язуємо їх:

$$A_1: \begin{vmatrix} a-k & 0 \\ 0 & a-k \end{vmatrix} = 0 \ \Rightarrow\ (a-k)^2 = 0 \ \Rightarrow\ k = a$$ – двократний корінь.

$$A_2: \begin{vmatrix} a-k & b \\ 0 & a-k \end{vmatrix} = 0 \ \Rightarrow\ (a-k)^2 = 0 \ \Rightarrow\ k = a$$ – двократний корінь.

Алгебраїчна кратність власних чисел обох матриць рівна $r = 2$.

Знайдемо власні вектори обох матриць.

$$A_1:\ k=a \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} 0x_1+0x_2=0, \\ 0x_1+0x_2=0 \end{cases} \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad X^{(1)}=\begin{pmatrix} \tau \\ 0 \end{pmatrix};\ X^{(2)}=\begin{pmatrix} 0 \\ \tau \end{pmatrix} \quad \forall \tau \in \mathbf{R} \setminus \{0\}$$

(A_1 має безліч пар лінійно незалежних власних векторів; *обґрунтуйте*).

$$A_2:\ k=a \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} 0x_1+bx_2=0, \\ 0x_1+0x_2=0 \end{cases} \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad \begin{cases} x_1=u, \\ x_2=0 \end{cases} \Rightarrow X=\begin{pmatrix} u \\ 0 \end{pmatrix} \quad \forall u \in \mathbf{R} \setminus \{0\}$$

(A_2 має один лінійно незалежний власний вектор при кратності $r=2$).

Висновок: геометрична кратність власного числа – кореня характеристичного рівняння – матриці A_1 (A_2) дорівнює (менше) його алгебраїчної кратності: $s=r$ ($s<r$). ●

(*Пропонуємо* проаналізувати випадки: $a=0$ в A_1, $b=0$ в A_2.)

Висновок про стійкість чи нестійкість ДС базується на 3-х теоремах. Дійсні числа k_i розглядаються як комплексні числа з $\operatorname{Im} k_i=0$.

Теорема 20.3.1 (*про стійкість ДС*). Лінійна однорідна система зі сталими коефіцієнтами стійка за Ляпуновим тоді і тільки тоді, коли дійсні частини власних значень k_i, $i=\overline{1,n}$, матриці A не є додатними, причому у власних значень, дійсна частина яких дорівнює нулю, алгебраїчна та геометрична кратність повинні бути однакові:

$$\text{ДС стійка} \quad \Leftrightarrow \quad \forall k_i,\, i=\overline{1,n}:\ \operatorname{Re} k_i \le 0 \ \wedge\ (\operatorname{Re} k_i=0 \ \Rightarrow\ s_i=r_i). \qquad (20.3.3)$$

Теорема 20.3.2 (*про асимптотичну стійкість ДС*). Лінійна однорідна система зі сталими коефіцієнтами асимптотично стійка тоді і тільки тоді, коли всі власні значення k_i мають від’ємні дійсні частини:

$$\text{ДС асимптотично стійка} \quad \Leftrightarrow \quad \forall k_i,\, i=\overline{1,n}:\ \operatorname{Re} k_i<0. \qquad (20.3.4)$$

Теорема 20.3.3 (*про нестійкість ДС*). Лінійна однорідна система зі сталими коефіцієнтами нестійка, якщо виконується хоча б одна з умов:

матриця A має власне число k_i з додатною дійсною частиною;

матриця A має власне значення k_i з нульовою дійсною частиною, а геометрична кратність числа k_i менше його алгебраїчної кратності:

$$\text{ДС нестійка} \;\Leftrightarrow\; \exists k_i \,\big|\, \operatorname{Re} k_i > 0 \;\vee\; (\exists k_i \big|\, \operatorname{Re} k_i = 0 \;\wedge\; s_i < r_i). \qquad (20.3.5)$$

Наведені теореми дозволяють досліджувати стійкість лінійних систем зі сталими коефіцієнтами, знаючи власні значення і власні вектори матриці A. Виявляється, що критерій Гурвіца, як і теорема 21.3.2, визначає асимптотичну стійкість системи: умова $\Delta_i > 0 \;\; \forall i = \overline{1,n}$ рівносильна тому, що всі корені характеристичного рівняння k_i мають від'ємні дійсні частини.

У задачах економічної динаміки часто приходять до систем двох лінійних рівнянь, тому зупинимося детальніше саме на таких ДС.

Стійкість автономних ДС, що описуються системами двох лінійних диференціальних рівнянь зі сталими коефіцієнтами

Нехай закон руху динамічної системи описується системою рівнянь:

$$\begin{cases} x' = a_{11}x + a_{12}y, \\ y' = a_{21}x + a_{22}y \end{cases} \qquad (20.3.6)$$

де $x = x(t)$, $y = y(t)$ – невідомі функції.

Відповідне характеристичне рівняння має вигляд:

$$\begin{vmatrix} a_{11}-k & a_{12} \\ a_{21} & a_{22}-k \end{vmatrix} = 0, \text{ або } k^2 + pk + q = 0, \qquad (20.3.7)$$

де $p = -(a_{11} + a_{22})$, $q = \det A = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$.

Корені характеристичного рівняння визначаються за формулою:

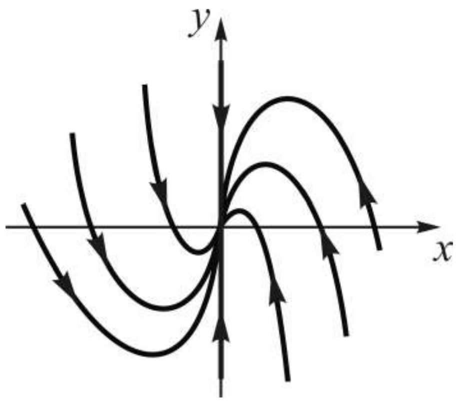
$$k_{1,2} = \frac{1}{2}\left((a_{11}+a_{22}) \pm \sqrt{(a_{11}-a_{22})^2 + 4a_{12}a_{21}}\right). \qquad (20.3.8)$$

У світлі сформульованих теорем розглянемо можливі випадки стану (характеру) точок спокою системи (20.3.6) і поведінку системи в її околі.

I. Матриця неособлива: $\Delta = \det A \neq 0$. Тоді характеристичне рівняння (20.3.7) не матиме коренів, рівних нулю (*обґрунтуйте*). Наведемо можливі співвідношення між коренями і зобразимо фазові портрети еволюції ДС. Стрілочки показують напрям зміни положення фазових точок зі зростанням змінної t.

1^0. Корені дійсні і рівні ($k_1 = k_2$) (рис. 20.3.1):

$$k_1 = k_2 = k < 0$$



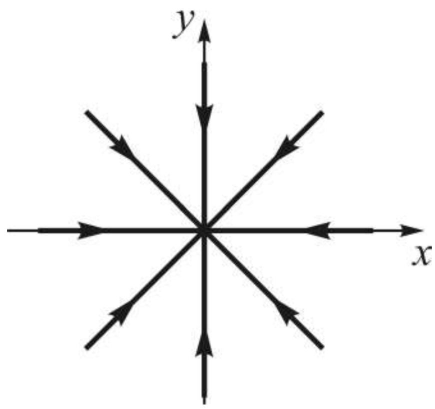


Рис. 20.3.1. **Стійкий вузол** (**асимптотична точка спокою**)

Приклад. Дослідити на стійкість точку спокою динамічної системи:

$$\begin{cases} x' = -5x + y, \\ y' = -5y, \end{cases} \quad A = \begin{pmatrix} -5 & 1 \\ 0 & -5 \end{pmatrix}.$$

Знайдемо власні числа матриці A:

$$\begin{vmatrix} -5-k & 1 \\ 0 & -5-k \end{vmatrix} = 0 \;\Rightarrow\; (k+5)^2 = 0 \;\Rightarrow\; (k_1 = k_2 = k = -5 < 0).$$

Характеристичне рівняння має один двократний від'ємний корінь. Отже, точка спокою асимптотична – стійкий вузол.

Траєкторії рухів ДС знаходять зведенням до одного ДР-1:

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = -5x + y, \\ \dfrac{dy}{dt} = -5y, \end{cases} \;\Rightarrow\; \frac{dy}{dx} = \frac{-5y}{-5x + y} \;\Rightarrow\; (5x - y)dy = 5y dx \text{ – ОДР-1.}$$

Отримане рівняння зводиться до рівняння в повних диференціалах, відповідний інтегрувальний множник $\mu(x,y)=\dfrac{5x-y}{y^2}$:

$$\frac{5}{y}dx=\frac{y-5x}{y^2}dy,$$

а загальний інтеграл рівняння: $ye^{5x/y}=C$, $C\in\mathbf{R}$.

Фазовий портрет зображено на рис. 20.3.2.

При необмеженому зростанні змінної t: $t\to+\infty$, фазові точки невпинно наближаються до точки спокою.

Для початкових умов задач Коші, яким відповідають малі за модулем значення параметра C: $|C|\le 10^{-11}$, фазові траєкторії все більше стають схожими на прямі. ●

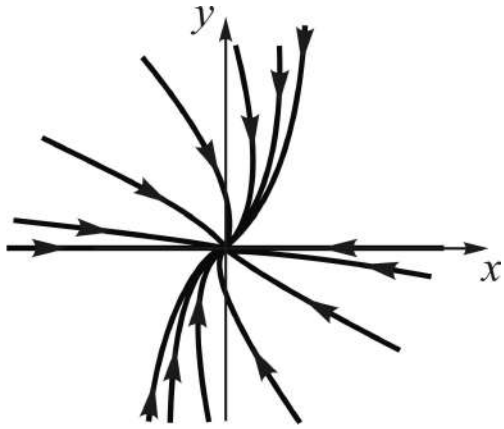


Рис. 20.3.2. **Стійкий вузол**

$k_1=k_2=k>0$ (рис. 20.3.3):

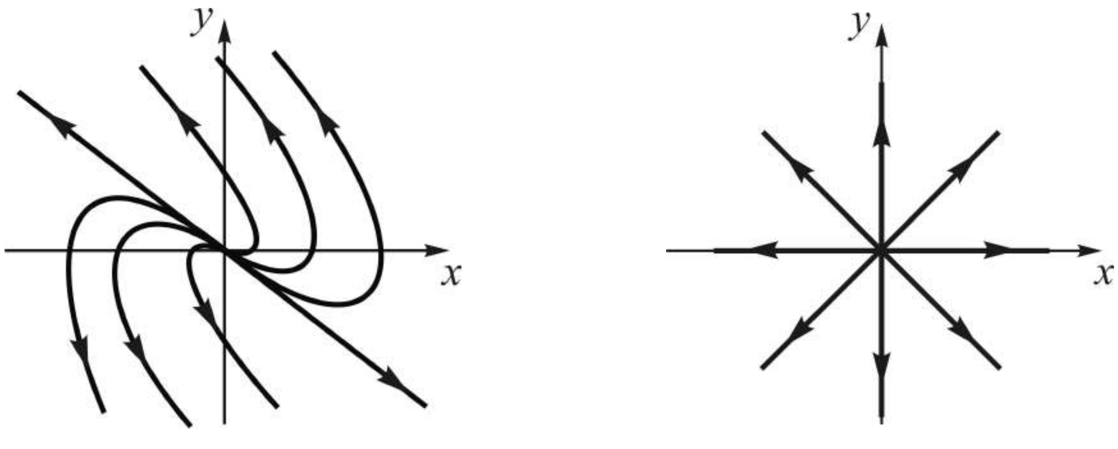


Рис. 20.3.3. **Нестійкий вузол (нестійка точка спокою)**

Приклад. Дослідити на стійкість точку спокою динамічної системи:

$$\begin{cases} x'=4x, \\ y'=3x+4y, \end{cases}\quad A=\begin{pmatrix}4 & 0\\ 3 & 4\end{pmatrix}.$$

Знайдемо власні числа матриці A:

$$\begin{vmatrix} 4-k & 0 \\ 3 & 4-k \end{vmatrix} = 0 \;\Rightarrow\; (k-4)^2 = 0 \;\Rightarrow\; (k_1 = k_2 = k = 4 > 0).$$

Характеристичне рівняння має один двократний додатний корінь. Отже, точка спокою нестійка – нестійкий вузол.

Траєкторії рухів ДС знаходимо зведенням до одного рівняння:

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 4x, \\ \dfrac{dy}{dt} = 3x + 4y \end{cases} \;\Rightarrow\; \frac{dy}{dx} = \frac{3x+4y}{4x} \;\Rightarrow\; y' - \frac{1}{x}y = \frac{3}{4} \text{ – ЛДР-1.}$$

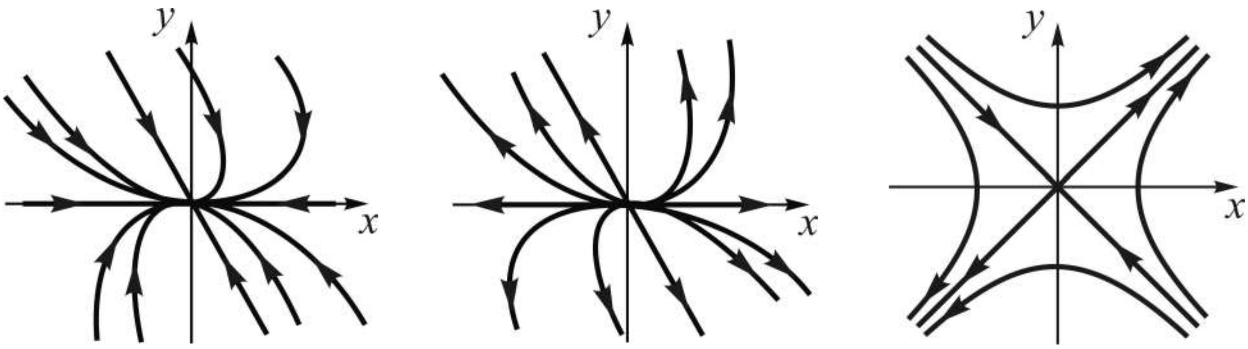
Розв’язуємо рівняння методом допоміжних функцій або методом Лагранжа (див. п. 16.4):

$$y = \frac{3}{4}x\ln|Cx|, \;\; C \neq 0 \text{ – загальний розв’язок.} \;\; \bullet$$

(*Побудуйте* фазовий портрет за допомогою пакета прикладних програм, наприклад, MatLab.)

2^0. Корені дійсні і різні ($k_1 \neq k_2$): у випадку дійсних і різних коренів, як і при $k_1 = k_2$, точкам спокою дають спеціальну назву: *стійкий вузол* – точка спокою асимптотично стійка; *нестійкий вузол* – точка спокою нестійка; *сідло* – точка спокою нестійка (рис. 20.3.4).

$k_1 < 0,\ k_2 < 0$ $\qquad$ $k_1 > 0,\ k_2 > 0$ $\qquad$ $k_1 \cdot k_2 < 0$



а) $\qquad$ б) $\qquad$ в)

Рис. 20.3.4. **Точки спокою:**
а) стійкий вузол; б) нестійкий вузол; в) сідло

Приклад. Дослідити на стійкість точку спокою динамічної системи:

$$\begin{cases} x' = 3y, \\ y' = 3x, \end{cases} \quad A = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}.$$

Знайдемо власні числа матриці A:

$$\begin{vmatrix} -k & 3 \\ 3 & -k \end{vmatrix} = 0 \;\Rightarrow\; k^2 - 9 = 0 \;\Rightarrow\; (k_1 = -3,\; k_2 = 3).$$

Корені характеристичного рівняння дійсні і різні, і серед них є додатний. Отже, точка спокою нестійка – сідло.

Як і в попередніх прикладах, розглядаючи змінну y як функцію змінної x (або навпаки), знаходимо рівняння траєкторій рухів, поточними координатами яких є координати фазових точок:

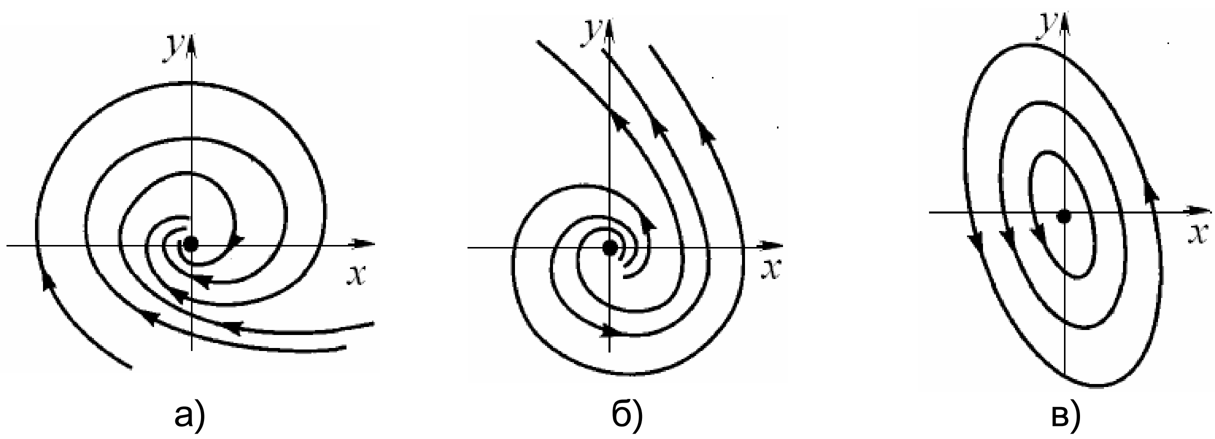
$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 3y, \\ \dfrac{dy}{dt} = 3x \end{cases} \;\Rightarrow\; \frac{dy}{dx} = \frac{3x}{3y} \;\Rightarrow\; ydy = xdx \;\Rightarrow\; y^2 = x^2 + C,\; C \in \mathbf{R}.$$

Таким чином, траєкторіями розв'язків є взаємно спряжені рівнобічні гіперболи разом з асимптотами $y = \pm x$ (при $C = 0$). ●

(*Пропонуємо* зобразити схематично фазовий портрет.)

3⁰. Корені комплексно-спряжені ($k_{1,2} = \alpha \pm \beta i$)(рис. 20.3.5):

$\alpha < 0,\ \beta \neq 0$ $\qquad$ $\alpha > 0,\ \beta \neq 0$ $\qquad$ $\alpha = 0,\ \beta \neq 0$



а) $\qquad$ б) $\qquad$ в)

Рис. 2.3.5. **Точки спокою:**
а) стійкий фокус; б) нестійкий фокус; в) центр

Для динамічної системи, яка описується системою лише двох диференціальних рівнянь, власні числа k_1 і k_2 однократні, тому $s_i = r_i = 1$, $i = 1, 2$, і умови стійкості теореми 20.3.1 задовольняються.

Приклад. Дослідити на стійкість точку спокою динамічної системи:

$$\begin{cases} x' = 2x - y, \\ y' = 8x - 2y, \end{cases} \quad A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 8 & -2 \end{pmatrix}.$$

Не складаючи характеристичне рівняння системи, знайдемо його корені за готовою формулою (20.3.8):

$$k_{1,2} = \frac{1}{2}\left((a_{11} + a_{22}) \pm \sqrt{(a_{11} - a_{22})^2 + 4a_{12}a_{21}}\right) = \pm\frac{1}{2}\sqrt{16 - 32} = \pm 2i.$$

Точка спокою стійка типу центр (див. табл. 20.3.1).

Траєкторії розв'язків описуються рівнянням:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{8x - 2y}{2x - y} \quad \Rightarrow (\underbrace{2y - 8x}_{M})dx + (\underbrace{2x - y}_{N})dy = 0$$

– рівняння в повних диференціалах.

Його загальний розв'язок має вигляд $(y - 2x)^2 + 4x^2 = C^2$ – однопараметрична сім'я еліпсів (див. рис. 20.3.5-в) (*переконайтеся*). ●

(*Пропонуємо* самостійно нанести на фазову площину декілька траєкторій.)

У підсумку відзначимо, що рівняння траєкторій фазового портрета системи (20.3.6) знаходимо як частинні розв'язки ДР-1 відносно змінних x, y, яке отримується із рівнянь системи виключенням параметра t:

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = a_{11}x + a_{12}y, \\ \dfrac{dy}{dt} = a_{21}x + a_{22}y \end{cases} \Rightarrow \quad \frac{dy}{dx} = \frac{a_{21}x + a_{22}y}{a_{11}x + a_{12}y} \quad \left(\frac{dx}{dy} = \frac{a_{11}x + a_{12}y}{a_{21}x + a_{22}y}\right),$$

де $x = x(t)$, $y = y(t)$ – невідомі функції.

Наведемо також (табл. 20.3.1) отримані результати досліджень систем із неособливою матрицею: $\Delta = \det A \neq 0$.

Таблиця. 20.3.1

Характер точок спокою залежно від власних чисел матриці системи

№ п/п	Характер коренів характеристичного рівняння		Назва точки спокою	Характер точки спокою
1	Дійсні і рівні: $k_1 = k_2 = k$	$k < 0$	Стійкий вузол	Асимптотично стійка
2		$k > 0$	Нестійкий вузол	Нестійка
3	Дійсні і різні: $k_1 \neq k_2$	$k_1 < 0,\ k_2 < 0$	Стійкий вузол	Асимптотично стійка
4		$k_1 > 0,\ k_2 > 0$	Нестійкий вузол	Нестійка
5		$k_1 \cdot k_2 < 0$	Сідло	Нестійка
6	Комплексно-спряжені: $k_{1,2} = \alpha \pm \beta i$	$\alpha < 0,\ \beta \neq 0$	Стійкий фокус	Асимптотично стійка
7		$\alpha > 0,\ \beta \neq 0$	Нестійкий фокус	Нестійка
8		$\alpha = 0,\ \beta \neq 0$	Центр	Стійка

ІІ. Матриця особлива: $\boldsymbol{\Delta = \det A = 0}$**.** Тоді система має безліч точок спокою, адже однорідна СЛАР

$$\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y = 0, \\ a_{21}x + a_{22}y = 0 \end{cases}$$

невизначена.

Аналізуючи рівняння (20.3.7) – характеристичне рівняння системи:

$$k^2 - (a_{11} + a_{22})k + \det A = 0,$$

приходимо до трьох можливостей-випадків.

1. $a_{11} + a_{22} \neq 0$ – одне із власних чисел матриці A дорівнює нулю:

$$k_1 = 0,\ k_2 = a_{11} + a_{22}.$$

Для однократного нульового власного числа геометрична і алгебраїчна кратності рівні одиниці: $s_1 = r_1 = 1$.

Висновок. Якщо $k_2 < 0$ $(k_2 > 0)$, то згідно з теоремою 20.3.1 (20.3.3) точки спокою *стійкі* (*нестійкі*).

Приклад. Дослідити на стійкість точки спокою динамічної системи:

$$\begin{cases} x' = 2x + y, \\ y' = 4x + 2y, \end{cases} \quad A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$$ – особлива матриця.

Знайдемо власні числа матриці A:

$$\begin{vmatrix} 2-k & 1 \\ 4 & 2-k \end{vmatrix} = 0 \;\Rightarrow\; (k-2)^2 - 4 = 0 \;\Rightarrow\; (k_1 = 0,\, k_2 = 4).$$

Відмінний від нуля корінь характеристичного рівняння додатний, тому система *нестійка*, положення рівноваги нестійке.

Траєкторії рухів ДС, як і раніше, знаходимо зведенням системи до одного рівняння відносно змінних x і y:

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 2x + y, \\ \dfrac{dy}{dt} = 4x + 2y \end{cases} \;\Rightarrow\; \frac{dy}{dx} = \frac{4x+2y}{2x+y} \;\Rightarrow\; (2x+y)\left(\frac{dy}{dx} - 2\right) = 0.$$

Звідки отримуємо два рівняння:

$$2x + y = 0 \;\Rightarrow\; y = -2x,$$

$$\frac{dy}{dx} - 2 = 0 \;\Rightarrow\; y = 2x + C,\; C \in \mathbf{R}.$$

Перше, алгебраїчне рівняння, яке отримується із умови положення рівноваги, визначає одну пряму, яка називається **власною прямою** системи. Кожна її точка є точкою спокою ДС.

Друге, диференціальне рівняння, своїм загальним розв'язком описує однопараметричну сім'ю прямих.

Таким чином, траєкторіями розв'язків є множина точок прямої $y = -2x$ (її називають **власною** прямою ДС) і промені, які отримуються з прямих $y = 2x + C$ вилученням точок їх перетину з власною прямою.

Напрям руху системи при $k_2 = 4 > 0$ відбувається (рис. 20.3.6) у напрямі від власної прямої.

(При $k_2 < 0$ рух системи – до власної прямої; система *стійка*.) ●

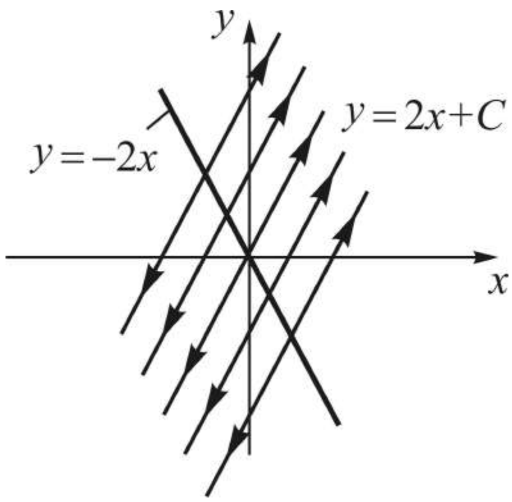


Рис. 20.3.6. **Система нестійка**

2. $a_{11} = -a_{22} \neq 0$ – обидва власних числа матриці A рівні нулю, при цьому виконується співвідношення:

$$a_{11}^2 = a_{22}^2 = -a_{12}a_{21} \text{ (\textit{обґрунтуйте})}.$$

Покладемо $a_{12} = b$, тоді $a_{21} = -a_{11}^2 / b$.

Запишемо характеристичне рівняння і зіставимо алгебраїчну і геометричну кратності кореня:

$$\begin{vmatrix} a_{11} - k & b \\ -\dfrac{a_{11}^2}{b} & -a_{11} - k \end{vmatrix} = 0 \;\Rightarrow\; (k_1 = k_2 = k = 0) \;\Rightarrow\; \begin{cases} a_{11}x_1 + bx_2 = 0, \\ -\dfrac{a_{11}^2}{b}x_1 - a_{11}x_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a_{11}x_1 + bx_2 = 0, \\ \dfrac{a_{11}}{b}x_1 + x_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow\; (a_{11}x_1 + bx_2 = 0) \;\Rightarrow\; s = 1 < r = 2.$$

Висновок. Згідно з теоремою 20.3.3 точки спокою *нестійкі*.

3. $a_{11} = a_{22} = 0$ – обидва власних числа матриці A рівні нулю, при цьому можливі два випадки:

а) один із елементів a_{12}, a_{21} нульовий, тоді $s < r$, і ДС *нестійка*;

б) всі елементи A нульові, тоді $s = r$, і ДС *стійка*.

Нехай у випадку а) коефіцієнт $a_{21} = 0$, тоді система така:

$$\begin{cases} x' = a_{12}y, \\ y' = 0 \end{cases} \Rightarrow\; \frac{dy}{dx} = 0 \;\Rightarrow\; y = C \text{ – рівняння фазових траєкторій.}$$

Висновок. Точками *спокою* є точки прямої $y = 0$ (або $x = 0$).

Якщо матриця A нульова (випадок б)), то отримуємо:

$$\begin{cases} x' = 0, \\ y' = 0 \end{cases} \Rightarrow\; (x = C_1,\, y = C_2).$$

Висновок. Згідно з теоремою 20.3.1 *стійкими* точками спокою є всі точки фазової площини.

Підсумуємо (табл. 20.3.2) отримані результати досліджень систем з особливою матрицею: $\Delta = \det A = 0$.

Таблиця 20.3.2

Характер точок спокою залежно від власних чисел матриці системи

<table>
<tr><th>№ п/п</th><th colspan="2">Характер коренів характеристичного рівняння</th><th>Співвідношення між елементами A</th><th>Характер точок спокою</th></tr>
<tr><td>1</td><td rowspan="2">$k_1 = 0$, $k_2 \neq 0$</td><td>$k_2 < 0$</td><td rowspan="2">$a_{11} + a_{22} \neq 0$</td><td>Стійкі точки власної прямої</td></tr>
<tr><td>2</td><td>$k_2 > 0$</td><td>Нестійкі точки власної прямої</td></tr>
<tr><td>3</td><td rowspan="3">$k_1 = k_2 = k = 0$</td><td>$k = 0$,
$s < r$</td><td>$a_{11} = -a_{22} \neq 0$,
$a_{11}^2 = -a_{12}a_{21}$</td><td>Нестійкі точки власної прямої</td></tr>
<tr><td>4</td><td>$k = 0$,
$s < r$</td><td>$a_{11} = a_{22} = 0$,
$a_{12} = 0 \vee a_{21} = 0$</td><td>Нестійкі точки власної прямої</td></tr>
<tr><td>5</td><td>$k = 0$,
$s = r$</td><td>$a_{11} = a_{22} = 0$,
$a_{12} = 0 \wedge a_{21} = 0$</td><td>Стійкі всі точки фазової площини</td></tr>
</table>

Для систем рівнянь у кількості, більшої ніж два, аналіз ДС на стійкість принципово не відрізняється від проведеного для $n = 2$.

Приклад. Дослідити на стійкість точки спокою динамічної системи:

$$\begin{cases} x' = 3y + 5z, \\ y' = 2y - 4z, \\ z' = -y - 2z, \end{cases} \quad A = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 5 \\ 2 & 0 & -4 \\ -1 & -2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Знаходимо корені характеристичного рівняння – власні числа A:

$$\begin{vmatrix} -k & 3 & 5 \\ 2 & -k & -4 \\ -1 & -2 & -k \end{vmatrix} = -k^3 + 9k - 8 = (k-1)(k^2 + k - 8) = 0.$$

Знаходити корені квадратного тричлена немає потреби: серед коренів є один додатний, тому згідно з (20.3.5) динамічна система нестійка. ●

Більше складними для розв'язання є задачі з параметрами. Відповідні умови, як і для одного рівняння, описуються системою нерівностей.

Приклад. За яких умов стосовно параметрів α, β, γ задана система має стійку власну пряму?

$$\begin{cases} x' = \alpha x - \beta y, \\ y' = \beta x - \gamma y, \end{cases} \quad A = \begin{pmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & -\gamma \end{pmatrix},$$ α, β, γ – дійсні сталі.

Складаємо характеристичне рівняння і аналізуємо його з метою встановлення того, за яких умов залежно від параметрів ДС буде стійка:

$$\begin{vmatrix} \alpha - k & -\beta \\ \beta & -\gamma - k \end{vmatrix} = 0 \;\Rightarrow\; k^2 - (\alpha - \gamma)k - (\alpha\gamma - \beta^2) = 0.$$

Згідно з табл. 20.3.2 повинні виконуватись умови:

$$\begin{cases} \alpha\gamma - \beta^2 = 0, \\ \alpha - \gamma \neq 0, \\ \alpha - \gamma < 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha\gamma - \beta^2 = 0, \\ \alpha - \gamma < 0 \end{cases} \Rightarrow (\alpha < \gamma \wedge \beta = \pm\sqrt{\alpha\gamma}).$$

Наприклад, можна взяти: $\alpha = 3$, $\gamma = 4$, тоді $\beta = \pm 2\sqrt{3}$.

Відповідні корені такі: $k_1 = 0$, $k_2 = -1$ (чи це *правда*?) ●

(*За яких умов* всі точки фазової площини є точками спокою?)

Зауваження. Крім розглянутого підходу до дослідження ДС на стійкість – стійкість за Ляпуновим – є інші формалізації поняття стійкості. Розроблені геометричні і наближені аналітичні методи дослідження ДС.

20.4. Деякі задачі застосовного характеру

Спрощена модель національної економіки

Динамічна система, що відповідає спрощеній моделі національної економіки описується системою двох ДР-1 (19.4.1):

$$\begin{cases} W' = \alpha W - \beta S, \\ S' = \gamma(W - S - E_0). \end{cases}$$

Для дослідження розглядатимемо однорідну систему:

$$\begin{cases} W' = \alpha W - \beta S, \\ S' = \gamma W - \gamma S, \end{cases} \quad A = \begin{pmatrix} \alpha & -\beta \\ \gamma & -\gamma \end{pmatrix}.$$

Корені характеристичного рівняння знаходяться за формулою:

$$k_{1,2} = \frac{1}{2}\left((\alpha - \gamma) \pm \sqrt{(\alpha+\gamma)^2 - 4\beta\gamma}\right).$$

Національний дохід $W = W(t)$ і витрати споживання $S = S(t)$ залежать від співвідношень між коефіцієнтами α, β, γ. З'ясуємо, наприклад, за яких умов національна економіка асимптотично стійка.

Це можливо у трьох випадках (див. табл. 20.3.1). Розглянемо один із них:

$$k_1 < 0,\ k_2 < 0: \begin{cases} \alpha + \gamma > 2\sqrt{\beta\gamma}, & (1) \\ (\alpha - \gamma) + \sqrt{(\alpha+\gamma)^2 - 4\beta\gamma} < 0, & (2) \\ (\alpha - \gamma) - \sqrt{(\alpha+\gamma)^2 - 4\beta\gamma} < 0. & (3) \end{cases}$$

Перша нерівність випливає з умови додатності дискримінанта квадратного рівняння, друга і третя – з умови від'ємності обох коренів характеристичного рівняння.

Із другої нерівності випливає умова: $\alpha - \gamma < 0$, або $\gamma > \alpha$, тоді:

$$(\alpha+\gamma)^2 - 4\beta\gamma < (\gamma - \alpha)^2 \ \Rightarrow\ \alpha - \beta < 0.$$

Висновок: для асимптотичної стійкості національної економіки повинні одночасно виконуватись умови:

$$\alpha + \gamma > 2\sqrt{\beta\gamma},\ \alpha < \gamma,\ \alpha < \beta.$$

Інші випадки аналізуються аналогічно. (*Пропонуємо* здійснити це самостійно.)

Модель „гонка озброєнь" (Річардсона)

Динамічна система, що відповідає моделі Річардсона, описується системою двох ДР-1 (19.4.2):

$$\begin{cases} x' = -a_{11}x + a_{12}y + b_1, \\ y' = \ \ a_{21}x - a_{22}y + b_2, \end{cases}$$

де $x = x(t)$, $y = y(t)$ – витрати країн X, Y на озброєння залежно від часу $t \geq 0$;

a_{12} (a_{21}) – коефіцієнт пропорційності витрат першої (другої) країни залежно від витрат другої (першої) країни;

a_{11} (a_{22}) – коефіцієнт пропорційності зменшення витрат на оборону першої (другої) країни залежно від поточного рівня витрат;

b_1, b_2 – відповідно стала складова швидкості зростання (або скорочення) озброєнь кожної країни, незалежно від того, загрожує чи не загрожує її існуванню інша країна.

Система неоднорідна, бо є вільні члени – b_1, b_2, – але на стійкість можна досліджувати однорідну систему (*чому?*), з точку спокою: $x(t) \equiv 0$, $y(t) \equiv 0$.

Очевидно, що стан ДС залежить від співвідношення між коефіцієнтами a_{ij} для всіх i, j із множини $\{1,2\}$.

Можливі випадки:

стан рівноваги не порушується;

відбувається збурення, яке призводить до необмеженої ескалації гонки озброєнь (точка спокою нестійка);

після збурення з часом настає повне взаємне роззброєння (асимптотична стійкість).

Щодо якісної характеристики багатозначущих міжнародних конфліктів за останні 200 років модель Річардсона більшою мірою себе виправдала. Політологи виявили, що з 30 конфліктів, що супроводжувалися гонкою озброєнь, 25 закінчилися війною. За відсутності гонки озброєнь тільки три з 70-ти конфліктів призвели до війни.

Детальний аналіз моделей економічної динаміки вивчається в дисципліні „Методи математичного моделювання”.

Запитання для самодіагностики засвоєння матеріалу

Відповіді на всі запитання сформулюйте словесно, запишіть у символічній формі, обґрунтуйте (на підставі означень, теорем, правил, формул тощо), наведіть відповідні конкретні приклади.

1. Що розуміють під поняттям „система”?

2. Що таке стан системи, процес (функціонування) системи?

3. Яку систему називають динамічною (ДС)?

4. Що розуміють під законом еволюції або законом руху ДС?

5. За яких умов математична модель ДС вважається заданою?

6. Що називають фазовою точкою, фазовим простором, фазовою траєкторією, фазовим портретом ДС?

7. Яка ДС називається автономною (стаціонарною) і як називається процес, що описується такою системою?

8. У чому полягає постановка задачі стійкості ДС, що вивчає теорія стійкості?

9. Що розуміють під стійкістю ДС за Ляпуновим?

10. Який розв’язок ДР-1 називають стійким, нестійким, асимптотично стійким за Ляпуновим?

10. Який розв’язок ДС називають незбуреним, збуреним?

11. Що таке положенням рівноваги ДС (точка спокою)?

12. У якому випадку тривіальний розв’язок ДС називається стійким, асимптотично стійким?

13. Який вигляд мають ДС, що описуються ОЛДР-n зі сталими коефіцієнтами?

14. Які матриці (визначники) називають матрицями (визначниками) Гурвіца?

15. У чому полягає критерій Гурвіца стійкості ДС?

16. Як виглядають умови стійкості за Гурвіцом для $n=1, 2, 3$?

17. Який загальний порядок застосування критерію Гурвіца?

18. Який вигляд має матрична форма ДС, що описується системою нормальних лінійних диференціальних рівнянь зі сталими коефіцієнтами?

19. Що називають точкою спокою системи?

20. Що називають алгебраїчною кратністю і геометричною кратністю власного числа матриці A системи?

21. Сформулюйте теореми про: стійкість, асимптотичну стійкість, нестійкість ДС.

22. Який вигляд має характеристичне рівняння автономної ДС, що описується системою двох лінійних диференціальних рівнянь зі сталими коефіцієнтами (СЛДР-1)?

23. За якою формулою визначаються корені характеристичного рівняння ДС, що описується двома ЛДР-1?

24. Який характер точок спокою залежно від власних чисел неособливої матриці системи має ДС у разі коренів: дійсних і рівних, дійсних і різних, комплексно-спряжених?

25. Який характер точок спокою має ДС залежно від власних чисел у разі особливої матриці системи?

26. Опишіть дослідження на стійкість спрощеної моделі національної економіки і моделі гонки озброєнь.

Задачі та вправи

1. Дослідити на стійкість розв'язок задачі Коші для ДР-1 двома способами: а) за означенням стійкості за Ляпуновим; б) зведенням до дослідження положення рівноваги $(x(t) \equiv 0)$:

1) $y' = y + t$, $y(0) = 1$;

2) $y' = -y + t^2$, $y(1) = 1$;

3) $y' = 2 + t$, $y(0) = 1$;

4) $y' = t(y - 1)$, $y(0) = 1$;

5) $y' = t - 1$, $y(0) = -1$.

2. Дослідити на стійкість нульовий розв'язок заданих диференціальних рівнянь за критерієм Гурвіца:

1) $y''' + y'' + y' + 2y = 0$;

2) $y''' + 2y'' + 2y' + 3y = 0$;

3) $2y''' + 7y'' + 7y' + 2y = 0$;

4) $y^{\mathrm{IV}} + 2y''' + 4y'' + 3y' + 2y = 0$;

5) $y^{\mathrm{IV}} + 2y''' + 3y'' + 7y' + 2y = 0$;

6) $y^{\mathrm{IV}}+2y'''+6y''+5y'+6y=0$;

7) $y^{\mathrm{IV}}+8y'''+14y''+36y'+45y=0$;

8) $y^{\mathrm{IV}}+13y'''+16y''+55y'+76y=0$;

9) $y^{\mathrm{IV}}+3y'''+26y''+74y'+85y=0$;

10) $y^{\mathrm{IV}}+3{,}1y'''+5{,}2y''+9{,}8y'+5{,}8y=0$;

11) $3y^{\mathrm{IV}}+13y'''+19y''+11y'+2y=0$;

12) $2y^{\mathrm{IV}}+6y'''+9y''+6y'+2y=0$;

13) $y^{\mathrm{V}}+2y^{\mathrm{IV}}+4y'''+6y''+5y'+4y=0$;

14) $y^{\mathrm{V}}+2y^{\mathrm{IV}}+5y'''+6y''+5y'+2y=0$;

15) $y^{\mathrm{V}}+3y^{\mathrm{IV}}+6y'''+7y''+4y'+4y=0$;

16) $y^{\mathrm{V}}+4y^{\mathrm{IV}}+9y'''+16y''+19y'+13y=0$;

17) $y^{\mathrm{V}}+4y^{\mathrm{IV}}+16y'''+25y''+13y'+9y=0$;

18) $y^{\mathrm{V}}+3y^{\mathrm{IV}}+10y'''+22y''+23y'+12y=0$;

19) $y^{\mathrm{V}}+5y^{\mathrm{IV}}+15y'''+48y''+44y'+74y=0$;

20) $y^{\mathrm{V}}+2y^{\mathrm{IV}}+14y'''+36y''+23y'+68y=0$;

21) $y'''+2y''+2y'+y=0$;

22) $2y^{\mathrm{IV}}+13y'''+28y''+23y'+6y=0$;

23) $y^{\mathrm{IV}}+4y'''+16y''+24y'+20y=0$;

24) $y^{\mathrm{V}}+13y^{\mathrm{IV}}+43y'''+51y''+40y'+12y=0$;

25) $y'''+y=0$;

26) $y^{\mathrm{IV}}+y'''+y'+y=0$;

27) $y^{\mathrm{V}}+3y^{\mathrm{IV}}+2y'''+y''+3y'+2y=0$;

28) $y^{\mathrm{V}}+y^{\mathrm{IV}}+y'''+y''+y'+y=0$;

29) $2y^{\mathrm{IV}}+11y'''+21y''+16y'+4y=0$;

30) $6y^{\mathrm{IV}}+29y'''+45y''+24y'+4y=0$.

3. Визначити характер точок спокою для заданих систем диференціальних рівнянь:

1) $\begin{cases} x' = 5x - y, \\ y' = 2x + y; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x' = 3x + y, \\ y' = -2x + y; \end{cases}$

3) $\begin{cases} x' = -x + 2y, \\ y' = x + y; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} x' = -x + 3y, \\ y' = -x + y; \end{cases}$

5) $\begin{cases} x' = -2x - y, \\ y' = 3x - y; \end{cases}$ 6) $\begin{cases} x' = -2x + \dfrac{5}{7}y, \\ y' = 7x - 3y; \end{cases}$

7) $\begin{cases} x' = 3x - y, \\ y' = x + y; \end{cases}$ 8) $\begin{cases} x' = 3x, \\ y' = 3y; \end{cases}$

9) $\begin{cases} x' = 2x, \\ y' = x - 5y; \end{cases}$ 10) $\begin{cases} x' = -2x - 5y, \\ y' = 2x + 2y; \end{cases}$

11) $\begin{cases} x' = -5x + y, \\ y' = x - 7y; \end{cases}$ 12) $\begin{cases} x' = 3x - 4y, \\ y' = x - 4y; \end{cases}$

13) $\begin{cases} x' = 2x, \\ y' = x + y; \end{cases}$ 14) $\begin{cases} x' = -3x + 2y, \\ y' = x - 4y; \end{cases}$

15) $\begin{cases} x' = 3x - 4y, \\ y' = x - 2y; \end{cases}$ 16) $\begin{cases} x' = -2x - 5y, \\ y' = 2x + 5y; \end{cases}$

17) $\begin{cases} x' = x - 2y, \\ y' = 2x - 3y; \end{cases}$ 18) $\begin{cases} x' = x - 2y, \\ y' = 3x + 4y; \end{cases}$

19) $\begin{cases} x' = 4x - y, \\ y' = x + 2y; \end{cases}$ 20) $\begin{cases} x' = 2x - y, \\ y' = 5x; \end{cases}$

21) $\begin{cases} x' = x - 2y, \\ y' = x - y; \end{cases}$ 22) $\begin{cases} x' = x + y, \\ y' = -8x - 5y; \end{cases}$

23) $\begin{cases} x' = 2x - y, \\ y' = 9x - 4y; \end{cases}$ 24) $\begin{cases} x' = -y, \\ y' = 3x + y; \end{cases}$

25) $\begin{cases} x' = 3x - 2y, \\ y' = 2x - 2y; \end{cases}$ 26) $\begin{cases} x' = y, \\ y' = -x. \end{cases}$

4. Дослідити на стійкість нульовий розв'язок системи і знайти загальний розв'язок або інтеграл рівняння, яке описує траєкторії руху ДС:

1) $\begin{cases} x' = y, \\ y' = -x; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x' = -x, \\ y' = y; \end{cases}$

3) $\begin{cases} x' = -2x, \\ y' = -2y; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} x' = x, \\ y' = y; \end{cases}$

5) $\begin{cases} x' = -x, \\ y' = -2y; \end{cases}$ 6) $\begin{cases} x' = x, \\ y' = 2y; \end{cases}$

7) $\begin{cases} x' = -2x, \\ y' = -y; \end{cases}$ 8) $\begin{cases} x' = -x, \\ y' = x - y; \end{cases}$

9) $\begin{cases} x' = 2x + y, \\ y' = 2y; \end{cases}$ 10) $\begin{cases} x' = -2x, \\ y' = 0; \end{cases}$

11) $\begin{cases} x' = 0, \\ y' = 2y; \end{cases}$ 12) $\begin{cases} x' = 0, \\ y' = x; \end{cases}$

13) $\begin{cases} x' = -y, \\ y' = 0. \end{cases}$

5. Дослідити: а) при яких значеннях параметра $a \in \mathbf{R}$ нульовий розв'язок наведених систем є асимптотично стійким, а при яких – стійким; б) при яких значеннях параметра $a \in \mathbf{R}$ особлива точка – сідло (вузол, фокус):

1) $\begin{cases} x' = x + ay, \\ y' = ax + y; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x' = ax + y, \\ y' = ay - (2a+1)x; \end{cases}$

3) $\begin{cases} x' = 2ax + y, \\ y' = ay - 2ax; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} x' = x + (2-a)y, \\ y' = ax - 3y. \end{cases}$

6. Дослідити на стійкість точку спокою $O(0,0,0)$ наступних систем:

1) $\begin{cases} x' = -x + z, \\ y' = -2y - z, \\ z' = y - z; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x' = -x + y + 5z, \\ y' = -2y + z, \\ z' = -3z; \end{cases}$

3) $\begin{cases} x' = x, \\ y' = 2x - y, \\ z' = x + y - z; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} x' = -2x - y, \\ y' = x - 2y, \\ z' = x + 3y - z. \end{cases}$

5) $\begin{cases} x' = -2x + y, \\ y' = -2y, \\ z' = -3z; \end{cases}$ 6) $\begin{cases} x' = 5x - y - 4z, \\ y' = -12x + 5y + 12z, \\ z' = 10x - 3y - 9z. \end{cases}$

Відповіді

1. 1) нестійкий; 2) стійкий; 3) стійкий; 4) нестійкий; 5) стійкий.

2. 1) нестійкий; 2) стійкий; 3) стійкий; 4) стійкий; 5) нестійкий; 6) стійкий; 7) нестійкий; 8) нестійкий; 9) нестійкий; 10) стійкий; 11) стійкий; 12) стійкий; 13) нестійкий; 14) стійкий; 15) нестійкий; 16) нестійкий; 17) стійкий; 18) нестійкий; 19) стійкий; 20) нестійкий; 21) стійкий; 22) стійкий; 23) стійкий; 24) стійкий; 25) нестійкий; 26) нестійкий; 27) нестійкий; 28) нестійкий; 29) стійкий; 30) стійкий.

3. 1) нестійкий вузол; 2) нестійкий фокус; 3) сідло; 4) центр; 5) стійкий фокус; 6) стійкий вузол; 7) нестійкий вузол; 8)нестійкий вузол; 9) нестійкий; 10) стійкий; 11) асимптотично стійкий; 12) нестійкий; 13) нестійкий вузол; 14) стійкий вузол; 15) сідло; 16) центр; 17) стійкий вузол; 18) нестійкий фокус; 19) нестійкий; 20) нестійкий; 21) стійкий; 22) асимптотично стійкий; 23) асимптотично стійкий; 24) нестійкий; 25) нестійкий; 26) стійкий.

4. 1) стійкий, $x^2 + y^2 = C$; 2) нестійкий, $xy = C$; 3) асимптотично стійкий, $y = Cx$; 4) нестійкий; $y = Cx$; 5) асимптотично стійкий, $y = Cx^2$; 6) нестійкий, $y = Cx^2$; 7) асимптотично стійкий, $y^2 = Cx$; 8) асимптотично стійкий, $y = x(C - \ln|x|)$; 9) нестійкий, $x = \frac{1}{2} y\left(C + \ln|y|\right)$; 10) стійкий, $y = C$, $x = 0$ – власна пряма; 11) нестійкий, $x = C$, $y = 0$ – власна пряма; 12) нестійкий, $x = C$, $x = 0$ – власна пряма; 13) нестійкий, $y = C$, $y = 0$ – власна пряма.

5. 1) а) завжди нестійкий; б) сідло, якщо $|a| > 1$, вузол, якщо $|a| < 1$; 2) а) асимптотично стійкий при $a \in (-\infty;-1) \cup (-1;0)$, стійкий при $a \in (-\infty;0]$;

б) вузол при $a \in (-\infty;-1) \bigcup (-1;-1/2]$ (при $a = -1/2$ вироджений); фокус при $a \in (-1/2;0) \bigcup (0;+\infty)$; центр при $a = 0$; 3) а) асимптотично стійкий при $a \in (-\infty;-1)$, стійкий при $a \in (-\infty;-1]$; б) сідло при $a \in (-1;0)$; вузол при $a \in (-\infty;-1) \bigcup (8;+\infty)$; фокус при $a \in (0;8)$; 4) а) асимптотично стійкий при $a \in (-\infty;-1) \bigcup (3;+\infty)$, стійкий при $a \in (-\infty;-1] \bigcup [3;+\infty)$; б) сідло при $a \in (-1;3)$; вузол при $a \in (1-\sqrt{5};-1) \bigcup (3;1+\sqrt{5})$; фокус при $a \in (-\infty;1-\sqrt{5}] \bigcup$ $\bigcup [1+\sqrt{5};+\infty)$.

6. 1) асимптотично стійка; 2) асимптотично стійка; 3) нестійка; 4) асимптотично стійка; 5) асимптотично стійка; 6) нестійка.

Ключові терміни

Система, стан, процес, динамічна система (ДС), закон еволюції (руху) ДС, фазова точка, фазовий простір, фазова траєкторія, фазовий портрет, автономна (стаціонарна) ДС, задача стійкості ДС, стійкість за Ляпуновим, розв'язок (стійкий, нестійкий, асимптотично стійкий за Ляпуновим), незбурений розв'язок, збурений розв'язок, тривіальний розв'язок, положення рівноваги (точка спокою), матриці (визначники) Гурвіца, критерій Гурвіца, алгебраїчна кратність, геометрична кратність, неособлива матриця, особлива матриця, характер точок спокою.

Резюме

Висвітлюються основні положення теорії стійкості динамічних систем (ДС), які описуються одним диференціальним рівнянням або нормальною системою лінійних диференціальних рівнянь 1-го порядку. Розглянуто: стійкість за Ляпуновим, зведення дослідження ДС на стійкість до дослідження точок спокою (для одного рівняння і для названих систем), критерій Гурвіца для одного рівняння.

Проведено детальний аналіз точок спокою залежно від власних чисел для випадків неособливої і особливої матриць системи. Наведено ілюстративні приклади дослідження ДС на стійкість і задачі застосовного характеру.

Література: [15; 17; 21; 23; 24; 25; 27; 33].

Розділ 6. Кратні і криволінійні інтеграли

21. Кратні інтеграли

Нічого немає більш практичного, ніж хороша теорія.

Л. Больцман

Хоч би як добре працювала машина, вона зможе розв'язувати всі задачі, що ставляться перед нею, але сама жодної задачі не придумає.

А. Ейнштейн

Мета: навчити майбутніх фахівців умінню аналізувати плоскі (просторові) області, що описуються лініями (поверхнями), які визначають певні обмеження на припустимі значення числових характеристик різноманітних економічних і природничих процесів; володіти технікою інтегрування функції від двох і трьох змінних.

Питання теми:

21.1. Поверхні другого порядку (П2П).

21.2. Подвійний інтеграл (ПДІ) у декартових координатах.

21.3. Подвійний інтеграл у полярних координатах. Заміна змінних у ПДІ.

21.4. Застосування подвійного інтеграла.

21.5. Потрійний інтеграл (ПТІ) у декартових координатах.

21.6. Потрійний інтеграл у циліндричних і сферичних координатах.

21.7. Застосування потрійного інтеграла.

Компетентності, що формуються після вивчення теми:

Загальнонаукова: володіння основами узагальнення інтегрального числення функцій однієї змінної на випадок функцій двох і трьох змінних, підготовленість до розв’язання застосовних задач.

Загальнопрофесійна: уміння використовувати засоби інтегрального числення в задачах комп’ютерних наук до аналізу числових характеристик різноманітних явищ і процесів, зокрема, випадкових.

Спеціалізовано-професійна: впровадження кратних – подвійних і потрійних – інтегралів у моделювання управління інформаційними системами і, разом із тим, уміння давати кількісну порівняльну оцінку обчислювальним процесам та процесам перетворення інформації.

21.1. Поверхні другого порядку (П2П)

П2П: загальне рівняння, основні задачі

Поверхнею 2-го порядку називається геометричне місце точок (г. м. т.) простору $\mathbf{R}^3$, що описується рівнянням $\Phi(x, y, z) = 0$, ліва частина якого є многочленом другого степеня відносно змінних x, y, z:

$$Ax^2 + Bxy + Cxz + Dy^2 + Eyz + Fz^2 + Gx + Hy + Kz + L = 0, \qquad (21.1.1)$$

де A, B, C, D, E, F, G, H, K, L – дійсні числа (**коефіцієнти** одночленів, що містять **поточні змінні**, і **вільний член** L); A, B, C, D, E, F – такі числа, що $A^2 + B^2 + C^2 + D^2 + E^2 + F^2 \neq 0$ (*стлумачте це*!).

Співвідношення (21.1.1) називають **загальним рівнянням** П2П. Вид поверхні, її розташування відносно координатних площин залежатиме від того, якими будуть коефіцієнти-параметри у загальному рівнянні.

Якщо загальне рівняння при певних значеннях сталих, які в нього входять, не задовольняється жодною точкою $(x, y, z) \in \mathbf{R}^3$, то кажуть, що воно визначає **уявну поверхню**. За певних умов (21.1.1) може визначати пару різних площин або таких, що збігаються, або одну-єдину точку; такі поверхні називаються **виродженими** П2П.

Наприклад:

$x^2 + y^2 + z^2 = 0$ – рівняння точки в $\mathbf{R}^3$;

$z^2 - c^2 = 0$ – рівняння двох площин, паралельних xOy (при $c \neq 0$);

$x^2 - y^2 = 0$ – рівняння двох бісекторних площин.

При вивченні П2П ставляться дві взаємно обернені **основні задачі:**

1) за відомим рівнянням поверхні встановити її геометричні властивості;

2) за відомим властивостями г. м. т. знайти (побудувати, скласти, відшукати) рівняння відповідної поверхні.

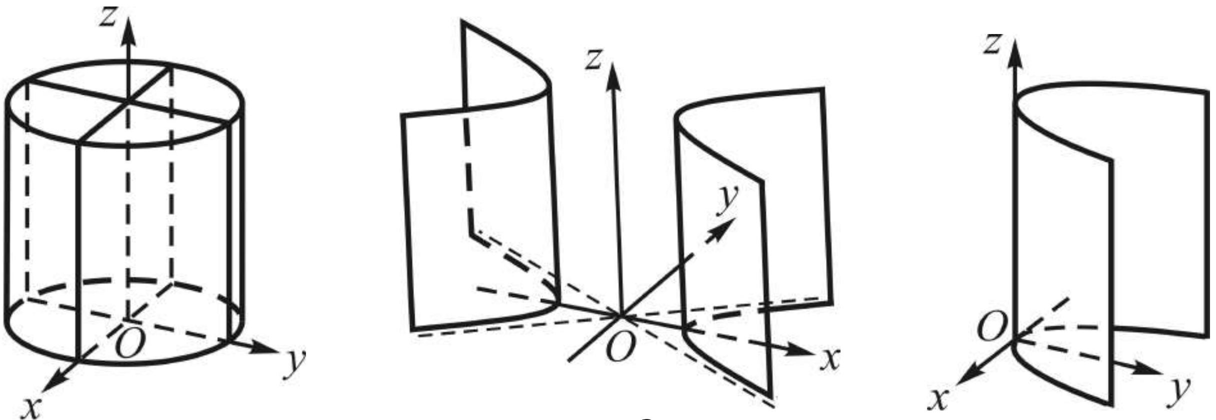
Прикладом розв’язання другої основної задачі є рівняння сфери (див. п. 3.3, ч. 1) Рівняння інших найважливіших поверхонь розглядаються далі.

Циліндричні і конічні П2П

І. Поверхня, яка утворена рухом прямої, що переміщається паралельно самій собі і перетинає фіксовану лінію (криву), називається **циліндричною поверхнею,** або просто **циліндром**. Рухому пряму називають **твірною,** а фіксовану криву – **напрямною** циліндричної поверхні. Напрямною може бути будь-яка зімкнена чи розімкнена лінія. (*Чи можна* площину віднести до циліндричних поверхонь?)

Циліндром 2-го порядку називається циліндрична поверхня, напрямною якої є крива другого порядку: еліпс (коло), гіпербола, парабола. Назва циліндра визначається назвою його напрямної. Якщо твірна паралельна одній із координатних осей, а напрямна лежить у площині, перпендикулярній цій осі, то рівняння циліндра співпадає з рівнянням напрямної.

При геометричній інтерпретації зображується, як правило, частина поверхні між двома перпендикулярними твірній площинами (рис. 21.1.1).



$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ $\qquad$ $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ $\qquad$ $x^2=2py$

а) $\qquad$ б) $\qquad$ в)

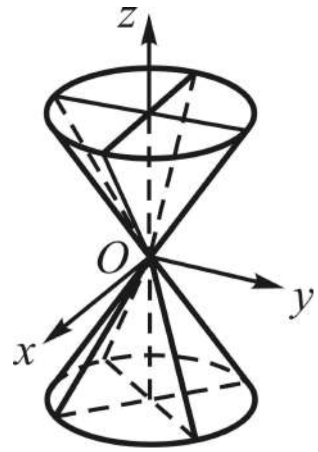
Рис. 21.1.1. **Циліндри 2-го порядку:**
а) еліптичний; б) гіперболічний; в) параболічний

Відсутність змінної z у наведених рівняннях не повинна непокоїти: саме ця обставина підтверджує те, що апліката точок поверхні може бути будь-яким дійсним числом, бо коефіцієнт при змінній z у рівняннях слід вважати рівним нулю. *Наприклад,* рівняння параболічного циліндра можна записати у вигляді: $x^2=2py+0\cdot z$.

Якщо у рівняннях еліпса і гіперболи покласти $a=b,$ то отримаємо відповідно **круговий** і **рівносторонній гіперболічний циліндри**.

(*Наведіть* рівняння циліндрів для випадків, коли твірна паралельна осі Ox, осі Oy, і *зобразіть* їх.)

II. Поверхня, яка утворена рухом прямої, що проходить через задану точку і перетинає фіксовану криву, називається **конічною поверхнею,** або **конусом**. Рухому пряму називають **твірною,** задану точку – **вершиною,** а фіксовану криву – **напрямною конуса**. Якщо твірною є крива другого порядку, то поверхня називається **конусом 2-го порядку**.



$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=0$$

Рис. 21.1.2. **Конус 2-го порядку**

На рис. 21.1.2 зображено конус 2-го порядку з вершиною у початку координат, напрямною якого є еліпс як результат перетину двох поверхонь – еліптичного циліндра (див. рис. 21.1.2) і площини, паралельної xOy:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1,\ z=c.$$

Поверхня симетрична відносно початку координат, а координатні площини суть її площини симетрії.

В окремому випадку, $a=b$, напрямною конічної поверхні буде коло, тоді отримаємо рівняння, яке визначає (знайомий) **круговий конус**.

Найважливіші П2П, дослідження їхньої форми методом перерізів

Накопичені відомості з теорії П2П стосувалися задачі відшукання рівняння поверхні (сфери, циліндрів, конусів) за відомими геометричними властивостями. Далі розв'язуватимемо обернену задачу: за даним рівнянням поверхні визначити її вигляд і разом із тим установити геометричні властивості. Для цього застосовується **„метод перерізів"**, суть якого полягає у такому:

1) *аналізують* поверхню, установлюючи (за рівнянням) лінії перетину даної поверхні із сукупністю площин, тобто перерізи поверхні площинами, зокрема координатними і паралельними їм площинами;

2) *синтезують* визначені на попередньому кроці геометричні властивості поверхні, що дозволяє уявити форму (вигляд) поверхні і зобразити її.

Продемонструємо застосування методу перерізів до дослідження канонічних (найпростіших) рівнянь найважливіших П2П.

Еліптичний параболоїд $\left(\frac{x^2}{p}+\frac{y^2}{q}=2z\,;\ p>0\ ,\ q>0\right)$.

1^0. *Знайдемо* лінії перетину поверхні з площиною xOy та площинами, паралельними їй ($z=h-const$):

$$\begin{cases}\frac{x^2}{p}+\frac{y^2}{q}=2z,\\ z=h\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}\frac{x^2}{p}+\frac{y^2}{q}=2h,\\ z=h.\end{cases} \qquad (21.1.2)$$

Якщо:

1) $h=0$, то рівняння (21.1.2) задовольняються лише координатами точки $(0;0;0)$, тобто площина $z=0$ є дотичною до даної поверхні;

2) $h<0$, то одержуємо „уявну” лінію, оскільки площини $z=h<0$ задану поверхню не перетинають;

3) $h>0$, то рівняння (21.1.2) можна записати у вигляді:

$$\frac{x^2}{2ph}+\frac{y^2}{2qh}=1, \quad z=h, \qquad (21.1.3)$$

тобто перерізами поверхні площинами, паралельними xOy, є еліпси, півосі яких збільшуються разом зі збільшенням h (див. рис. 21.1.3).

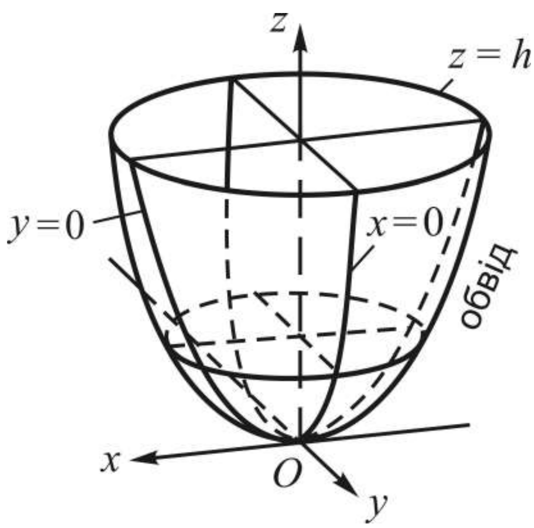


Рис. 21.1.3. **Еліптичний параболоїд**

2^0. *Установимо* лінію перетину поверхні з площиною yOz, рівняння якої $x=0$:

$$\begin{cases}\frac{x^2}{p}+\frac{y^2}{q}=2z,\\ x=0\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}y^2=2qz,\\ x=0.\end{cases}$$

Отже, отримали рівняння параболи, розташованої у площині yOz, з віссю симетрії Oz.

3^0. *Одержуємо* (аналогічним чином) переріз поверхні площиною $y=0$: це парабола, яка описується рівнянням $x^2=2pz$, і розташована у площині xOz (з віссю симетрії Oz).

4^0. *Зображуємо* (згідно з розглянутим у 1^0-3^0) відповідні лінії (див. рис. 21.1.3), що дає змогу скласти уяву про форму досліджуваної поверхні. Насамкінець накреслюємо **обрис** (**обвідну лінію**) – лінію, що одержується як множина точок дотику до поверхні прямих, паралельних обраному напряму проектування.

Аналогічно здійснюється побудова параболоїда, перерізи якого – параболи гілками донизу ($x^2/p+y^2/q=-2z$) і параболоїдів, осі яких співпадають із координатними осями Ox, Oy. Рівняння таких поверхонь отримуються із розглянутих рівнянь за допомогою циклічної перестановки змінних.

Зображення інших П2П не будемо супроводжувати детальним описом, а наведемо лише рівняння ліній-перерізів.

Тривісний еліпсоїд $\left(\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1\right)$**.**

Установимо рівняння ліній-перерізів поверхні площиною xOy та паралельними їй площинами і побудуємо їх (рис. 21.1.4).

$$z=h-const:\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1 \quad\Rightarrow\quad \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1-\frac{h^2}{c^2}=d\right).$$

Рис. 21.1.4. **Тривісний еліпсоїд**

Якщо:

1) $h=0$: $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ – рівняння еліпса в xOy;

2) $|h|<c$: $\dfrac{x^2}{a^2d}+\dfrac{y^2}{b^2d}=1$ – рівняння еліпса у площині, паралельній xOy;

3) $|h| = c$: $(x = y = 0,\ z = \pm c)$ – точки на осі Oz;

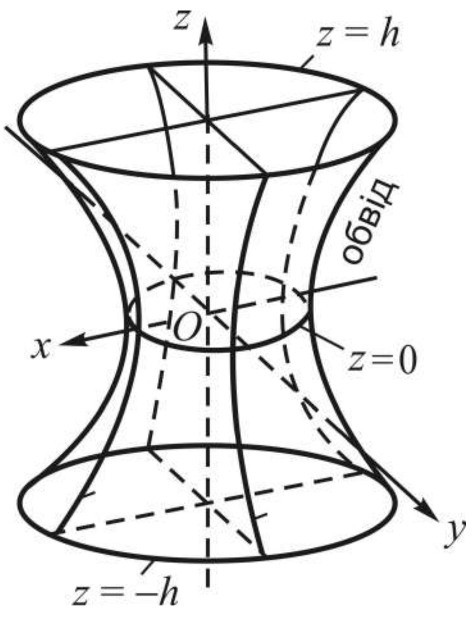
4) $|h| > c \Rightarrow d < 0$: $\dfrac{x^2}{-a^2 d} + \dfrac{y^2}{-b^2 d} = -1$ – рівняння уявного еліпса.

Аналогічно діємо у випадках, коли $x = h$, $y = h$.

Гіперболоїди $\left(\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} - \dfrac{z^2}{c^2} = \pm 1\right)$**.**

Проводячи аналіз, аналогічний попередньому, переконуємося, що при перетині обох поверхонь – однопорожнинного і двопорожнинного гіперболоїдів – площинами yOz, xOz одержуємо відповідно гіперболи (рис. 21.1.5-а, б):

$$x = 0:\ \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = \pm 1, \quad y = 0:\ \frac{x^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = \pm 1. \qquad (21.1.4)$$



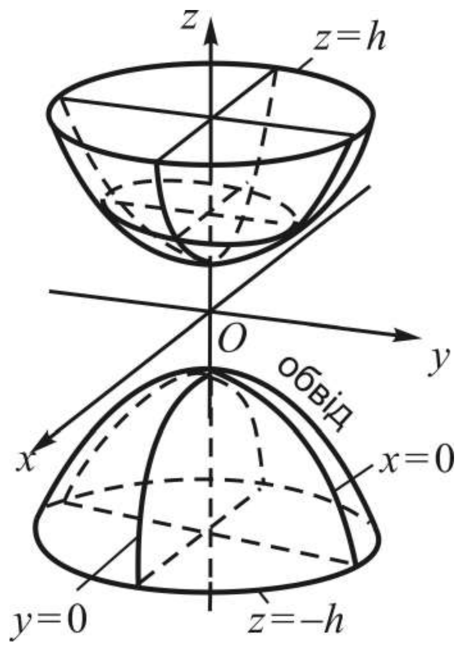


Рис. 21.1.5. **Гіперболоїди: а) однопорожнинний, б) двопорожнинний**

Перетини поверхонь площиною xOy дають відповідно еліпс і уявний еліпс (див. рис. 21.1.5-а, б):

$$z = 0:\ \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = -1. \qquad (21.1.5)$$

Схематичне зображення еліпсів, крім уявного, при $z=0$ і $z=\pm h\neq 0$ накреслено за спряженими діаметрами, а гіпербол (кожної гілки) – за трьома точками.

Гіперболічний параболоїд $\left(\dfrac{x^2}{p}-\dfrac{y^2}{q}=\pm 2z, \quad p>0,\, q>0\right)$.

Аналізуючи рівняння поверхні, права частина якого зі знаком „плюс”, отримаємо, що площина $x=0$ $(y=0)$ перетинає її по параболі $y^2=-2qz$ $(x^2=2pz)$, напрямленій у бік від'ємної (додатної) півосі Oz. Перетин поверхні площинами $x=\pm h$ $(y=\pm h)$ дає таку саму криву, але зсунену на величину $h^2/(2p)$ $(-h^2/(2q))$ по осі Oz.

Площина xOy перетинає поверхню по двох прямих (рис. 21.1.6):

$$z=0:\left(\frac{x}{\sqrt{p}}-\frac{y}{\sqrt{q}}\right)\left(\frac{x}{\sqrt{p}}+\frac{y}{\sqrt{q}}\right)=0\Rightarrow y=\pm\sqrt{\frac{p}{q}}\,x. \tag{21.1.6}$$

При $z=h>0$ $(z=h<0)$ одержуємо гіперболу (див. рис. 21.1.6) з дійсною віссю, паралельною осі Ox (Oy):

$$\frac{x^2}{2ph}-\frac{y^2}{2qh}=1 \quad \left(\frac{x^2}{-2ph}-\frac{y^2}{-2qh}=-1\right). \tag{21.1.7}$$

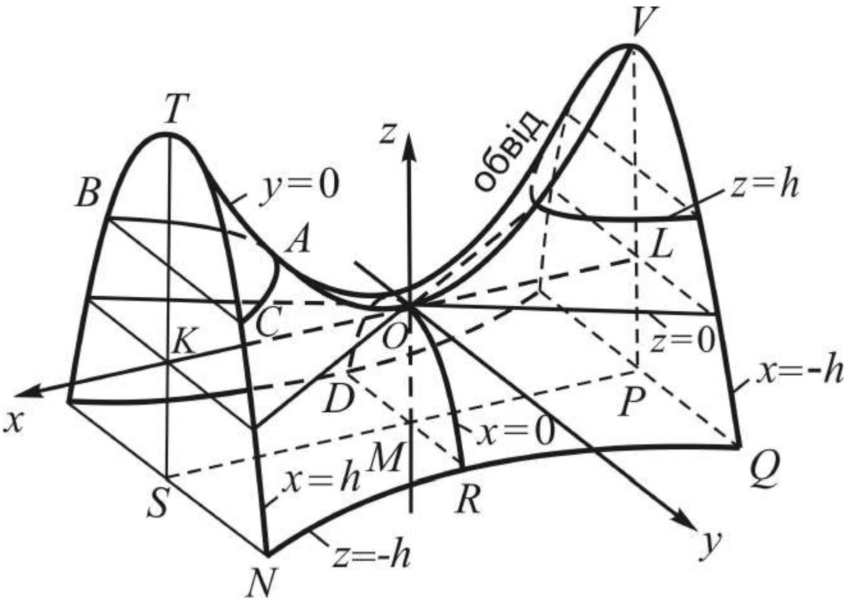


Рис. 21.1.6. **Гіперболічний параболоїд**

Поверхню-параболоїд, яку розглядаємо, можна одержати за допомогою двох парабол паралельним перенесенням однієї з них так, що її вершина ковзає по другій параболі; наприклад, якщо взяти перерізи поверхні площинами yOz і xOz:

$$x = 0:\ \ y^2 = -2qz; \quad y = 0:\ \ x^2 = 2pz.$$

Після вибору системи координат побудову зображення можна починати з перерізу площиною $z = 0$ (див. рис. 21.1.6): провести відповідні прямі (21.1.6), а потім відкласти рівні відрізки OK і OL на Ox.

Через точки K і L проводимо прямі, паралельні осі Oy, і на них від точок K, L – півхорди парабол, що відповідають перерізам $x = h$, $x = -h$. Відкладаючи на прямих KT і LV, паралельних осі Oz, рівні відрізки, одержимо вершини T, V цих парабол. Потім через три точки T, O, V накреслюємо параболу-переріз при $y = 0$.

Для побудови перерізів $x = 0$ і $z = \pm h$ вибираємо точки A, M з відповідними аплікатами і знаходимо, аналогічно описаному, ще по дві точки параболи і гілок гіперболи (зображено одну гілку).

Зауваження:

гіперболічний параболоїд, права частина рівняння якого зі знаком „мінус”, досліджується аналогічно;

якщо поверхня описується рівнянням $z = xy$, то вона проходитиме через осі Ox і Oy, а площини, які включають вісь Oz і бісектриси координатних кутів в xOy, є її площинами симетрії. Це випливає з того, що поворот системи координат на кут 45° відповідає рівнянню $x^2 - y^2 = 2z$; тут $p = q = 1$. Щоб одержати відповідне зображення, треба на рис. 21.1.6 осі координат Ox і Oy сумістити з прямими, які є результатом перетину розглянутої поверхні площиною $z = 0$.

Конічна поверхня (**конус 2-го порядку**) $\left(\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} - \dfrac{z^2}{c^2} = 0 \right)$.

Побудова зображення цієї поверхні, як правило, не викликає утруднень, оскільки для цього достатньо досвіду зображення конуса в середній школі.

Застосовуючи метод перерізу (див. рис. 21.1.2), отримуємо:

1) при $x=0$ – пару прямих у площині yOz:

$$\left(\frac{y}{b}-\frac{z}{c}\right)\left(\frac{y}{b}+\frac{z}{c}\right)=0 \Rightarrow z=\pm\frac{c}{b}y;$$

2) при $y=0$ – пару прямих у площині xOz:

$$\left(\frac{x}{a}-\frac{z}{c}\right)\left(\frac{x}{a}+\frac{z}{c}\right)=0 \Rightarrow z=\pm\frac{c}{a}x;$$

3) при $z=0$ – точку $O(0;0;0)$ – початок координат;

4) $z=\pm h$ визначає еліпси з півосями $\alpha=ah/c$, $\beta=bh/c$, які лежать у площинах, паралельних xOy:

$$\frac{x^2}{\alpha^2}+\frac{y^2}{\beta^2}=1.$$

Побудову поверхні, після вибору системи координат, зручно починати саме з цих перерізів.

Зауваження. Циліндри і конуси є окремими випадками так званих **лінійчатих поверхонь** – поверхонь, утворених рухом прямої. Прямі, які цілком належать поверхні, називаються **прямолінійними твірними**. Серед досліджених на форму П2П до лінійчатих поверхонь відносяться однопорожнинні гіперболоїди і гіперболічні параболоїди.

Поверхні обертання

Круговий конус, як і круговий циліндр, є прикладом **поверхні обертання** – поверхні, утвореної обертанням кривої L – **твірної** – навколо заданої прямої l – **осі обертання**.

Найпростіші рівняння таких поверхонь отримуємо за умови, що віссю обертання є одна із координатних осей, при цьому будемо вважати, що крива не лежить у площині, перпендикулярній осі обертання (*здогадалися чому?*). Відповідні рівняння поверхонь називають **канонічними**.

Сформулюємо ***правило*** формальної побудови рівняння поверхні обертання: щоб отримати рівняння поверхні, утвореної обертанням деякої лінії навколо координатної осі, треба:

у рівнянні кривої поточну координату, однойменну з віссю обертання, залишити без зміни;

другу координату замінити коренем квадратним із суми квадратів координат, не однойменних із віссю обертання, взятим зі знаком $\pm$.

Задача 21.1.1. Скласти рівняння П2П, утвореної обертанням:

а) параболи $y^2 = 2px$ (див. рис. 2.3.5-в, ч. 1) навколо осі Ox;

б) параболи $y^2 = 2pz$ навколо осі Oz;

в) еліпса $x^2 / a^2 + y^2 / b^2 = 1$ (див. рис. 3.2.2, ч. 1) навколо осі Oy.

Розв'язання. При формальній побудові (за правилом) рівнянь поверхонь обертання не будемо вводити різні позначення для поточних координат точок кривої, яка обертається, і точок поверхні, а використаємо однакові звичні символи x, y, z:

а) залишаємо у рівнянні без зміни абсцису x, а змінну y замінимо згідно з правилом на $\pm\sqrt{y^2+z^2}$:

$$y^2 = 2px \;\Rightarrow\; \left| \begin{array}{c} x \leftrightarrow x \\ y \leftrightarrow \pm\sqrt{y^2+z^2} \end{array} \right| \;\Rightarrow\; y^2 + z^2 = 2px, \tag{21.1.8}$$

де $\leftrightarrow$ – знак (символ) взаємно однозначної відповідності (бієкції).

Рівняння (21.1.8) називають **канонічним рівнянням параболоїда обертання** (з віссю Ox) і записують звичайно у вигляді:

$$\frac{y^2}{p} + \frac{z^2}{p} = 2x, \tag{21.1.9}$$

б) аналогічним чином (*прокоментуйте* символічний запис):

$$y^2 = 2pz \;\Rightarrow\; \left| \begin{array}{c} z \leftrightarrow z \\ y \leftrightarrow \pm\sqrt{x^2+y^2} \end{array} \right| \;\Rightarrow\; x^2 + y^2 = 2pz \;\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\; \frac{x^2}{p} + \frac{y^2}{p} = 2z. \tag{21.1.10}$$

Отримали **канонічне рівняння параболоїда обертання** (з віссю Oz).

в) для поверхні, утвореної обертанням еліпса, маємо:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \;\Rightarrow\; \left|\begin{array}{c} y\leftrightarrow y \\ x\leftrightarrow \pm\sqrt{x^2+z^2} \end{array}\right| \;\Rightarrow\; \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{a^2}=1 \qquad (21.1.11)$$

– **канонічне рівняння еліпсоїда обертання** (з віссю Oy). (*Здогадайтеся*, рівняння якої поверхні отримаємо, якщо $a=b$.)

Пропонуємо також самостійно, як вправу, скласти інші варіанти рівнянь поверхонь в а), б), в).

Геометричне зображення поверхонь (21.1.9), (21.1.10), (21.1.11) таке ж саме, як для еліптичного параболоїда (див. рис. 21.1.3) і тривісного еліпсоїда (див. рис. 21.1.4), бо проекцією кола, розташованого у деякій площині, на іншу (непаралельну) площину є еліпс.

Насамкінець зазначимо, що наведені відомості використовуються при вивченні інтегрування функцій двох змінних, і є фундаментом для більш глибокого вивчення теорії П2П.

21.2 Подвійний інтеграл (ПДІ) у декартових координатах

ПДІ: означення, теорема існування, геометричний та фізичний смисли

Поняття „подвійний інтеграл” є природним узагальненням поняття „визначений інтеграл” на випадок функції двох змінних. Тому його означення принципово не відрізняється від означення визначеного інтеграла і вводиться аналогічним чином.

Нехай функція $z=f(x,y)$, або $z=f(M)$, де $M=M(x,y)$, визначена і неперервна в замкненій області D площини xOy, тобто на множині точок координатної площини, яка обмежена зімкненою лінією (або лініями) Γ, з урахуванням точок лінії Γ – межі області.

Виконаємо таку (*стандартну*) процедуру:

– *розіб’ємо* область D довільним чином якими-небудь лініями на n часткових областей із площами Δs_i, $i=\overline{1,n}$ (або просто – на n площинок Δs_i (рис. 21.2.1)) і найбільшу з відстаней між двома точками межі площинки назвемо **діаметром площинки** λ_i, $i=\overline{1,n}$, а максимальний серед них $\lambda=\max\limits_i\{\lambda_i\}$ – **діаметром розбиття** області D;

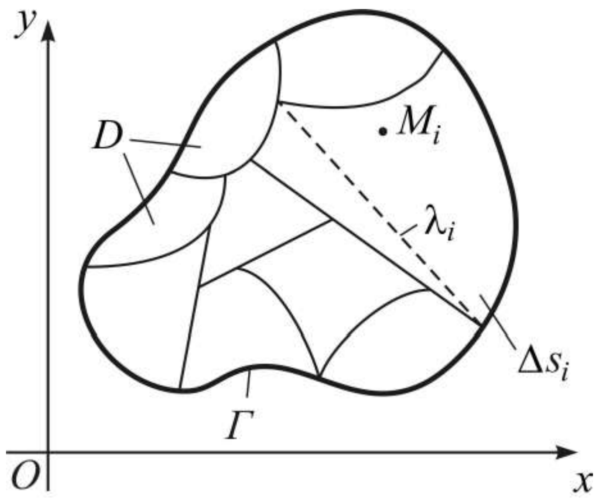


Рис. 21.2.1. **Розбиття області**

– *виберемо* на кожній із площинок довільним чином по точці $M_i(x_i, y_i)$, $i = \overline{1,n}$, обчислимо $f(M_i)$ і знайдемо добутки $f(M_i) \cdot \Delta s_i$;

– *складемо* суму всіх таких добутків

$$I_n = \sum_{i=1}^{n} f(M_i) \cdot \Delta s_i \, ,$$

яку назвемо **інтегральною сумою** для функції $f(x, y)$ в області D;

– *обчислимо* границю (якщо вона існує) інтегральної суми за умови, що діаметр розбиття прямує до нуля при необмеженому зростанні n, тобто $\lambda \to 0$ разом з $n \to \infty$.

Скінченна границя I інтегральної суми I_n, коли діаметр розбиття прямує до нуля ($\lambda \to 0$), а $n \to \infty$, називається **подвійним інтегралом** (від) функції $f(x, y)$ по області D і позначається так:

$$\iint_D f(M)ds, \quad \text{або} \quad \iint_D f(x, y)ds,$$

де $\iint$ – знак (символ) ПДІ;

D – область інтегрування;

$f(M) = f(x, y)$ – підінтегральна функція;

$f(x, y)ds$ – підінтегральний вираз;

x, y – змінні інтегрування;

ds – так званий елемент площі, або диференціал площі.

Отже, за означенням

$$I = \lim_{\substack{\lambda \to 0 \\ (n \to \infty)}} I_n = \lim_{\substack{\lambda \to 0 \\ (n \to \infty)}} \sum_{i=1}^{n} f(M_i)\Delta s_i = \iint_D f(M)ds = \iint_D f(x, y)ds. \qquad (21.2.1)$$

Теорема існування ПДІ, яку наводимо без доведення, формулюється так: якщо задана функція двох змінних неперервна в розглядуваній замкненій області, то існує скінченна границя інтегральної суми (тобто ПДІ), і вона не залежить ні від способу розбиття на площинки, ні від вибору точок у них для складання інтегральної суми.

У світлі цієї теореми розбиття області D здійснюється найпростішим із можливих способом: у декартовій системі координат xOy – прямими, паралельними координатним осям. У цьому випадку площинка – прямокутник зі сторонами Δx, Δy, який утворюється при переході від точки $M(x,y)$ до точки $N(x+\Delta x, y+\Delta y)$, де $\Delta x>0$, $\Delta y>0$. Тому $\Delta s=\Delta x\cdot\Delta y$, а $ds=\Delta s=dx\cdot dy$, бо для незалежних змінних x, y – $\Delta x=dx$, $\Delta y=dy$.

Таким чином, можна записати:

$$I=\iint\limits_D f(x,y)ds=\left|\,ds=dx\cdot dy\,\right|=\iint\limits_D f(x,y)dx\,dy. \qquad (21.2.2)$$

Геометричний смисл ПДІ. Аналізуючи з геометричної точки зору процедуру, яка передувала означенню ПДІ, для невід'ємної в області D функції ($f(x,y)\geq 0\ \ \forall(x,y)\in D$), приходимо до висновку: кожний доданок $f(M_i)\cdot\Delta s_i$ інтегральної суми чисельно дорівнює об'єму прямої призмочки з площею основи Δs_i і висотою $N_iM_i=f(M_i)$ (рис. 21.2.2), а вся інтегральна сума чисельно дає наближене значення V_n об'єму V тіла, обмеженого поверхнею $z=f(x,y)$, площиною $z=0$ і циліндричною поверхнею, твірна якої паралельна осі Oz, а напрямною слугує межа Γ області D; надалі таке тіло коротко будемо називати **циліндричним тілом** для функції $f(x,y)$ на області D.

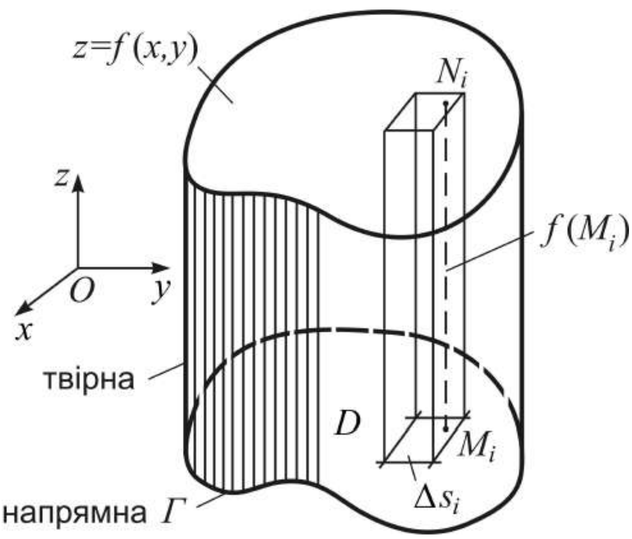


Рис. 21.2.2. **До тлумачення геометричного смислу ПДІ**

Вказане наближення тим краще, чим менше будуть Δs_i, тому природно покласти, що $V=\lim\limits_{\lambda\to 0}V_n$, і кажуть: *у геометричному смислі* ПДІ функції $f(x,y)\geq 0$ по області D чисельно дорівнює об'єму циліндричного тіла для функції $f(x,y)$ на області D, тобто:

$$V=\iint\limits_D f(x,y)dx\,dy. \qquad (21.2.3)$$

Фізичний смисл ПДІ. Нехай D – плоска тонка платівка зі змінною густиною $\sigma=\sigma(x,y)$, товщина якої настільки мала, що густину за товщиною можна вважати незмінною. Тоді вводять поняття поверхневої густини в даній точці $\sigma(M_i)$ як границі відношення маси площинки до її площі Δs_i за умови, що вона – площа – прямує до нуля.

Добуток $\sigma(M_i)\cdot\Delta s_i$ дає наближену масу однієї площинки, а $I_n=\sum\limits_{i=1}^{n}\sigma(M_i)\cdot\Delta s_i$ – наближене значення маси m всієї платівки D. Це наближення тим точніше, чим менше кожне Δs_i, тому покладають $m=\lim\limits_{\lambda\to 0} I_n=\iint\limits_D \sigma(x,y)ds$ і кажуть: *у фізичному смислі* ПДІ від поверхневої густини $\sigma=\sigma(x,y)$ плоскої платівки D чисельно дорівнює її масі, тобто

$$m=\iint\limits_D \sigma(x,y)dx\,dy. \tag{21.2.4}$$

Зауваження. Відзначимо, що основні властивості ПДІ не відрізняються від властивостей визначеного інтеграла.

Наприклад:

1^0. ПДІ від суми будь-якого скінченного числа функцій дорівнює сумі відповідних інтегралів від доданків:

$$\iint\limits_D (f_1+f_2+\ldots+f_k)ds=\iint\limits_D f_1 ds+\iint\limits_D f_2 ds+\ldots+\iint\limits_D f_k ds.$$

2^0. Сталий множник можна виносити за знак (символ) ПДІ:

$$\iint\limits_D cf\,ds=c\iint\limits_D f\,ds,\quad c-const.$$

3^0. Якщо область D розбито на дві підобласті D_1, D_2, які не мають спільних внутрішніх точок, то ПДІ по всій області дорівнює сумі інтегралів по її підобластям:

$$\iint\limits_D f\,ds=\iint\limits_{D_1} f\,ds+\iint\limits_{D_2} f\,ds,\ \text{ де }\ D_1\cup D_2=D,\ D_1\cap D_2=\varnothing.$$

Доведення всіх властивостей ПДІ, як і визначених інтегралів, базується на властивостях границь (у застосуванні до інтегральних сум).

Обчислення ПДІ в декартових координатах

Нехай функції $y=\varphi_1(x)$, $y=\varphi_2(x)$ визначені і неперервні на відрізку $[a,b]$ осі Ox, а $x=\psi_1(y)$, $x=\psi_2(y)$ – на відрізку $[c,d]$ осі Oy.

Область

$$D_y=\{(x,y)\mid a\le x\le b,\ \varphi_1(x)\le y\le\varphi_2(x)\}$$

назвемо **правильною у напрямі осі Oy** (рис. 21.2.3), а область

$$D_x=\{(x,y)\mid c\le y\le d,\ \psi_1(y)\le x\le\psi_2(y)\}$$

– **правильною у напрямі осі Ox** (рис. 21.2.4).

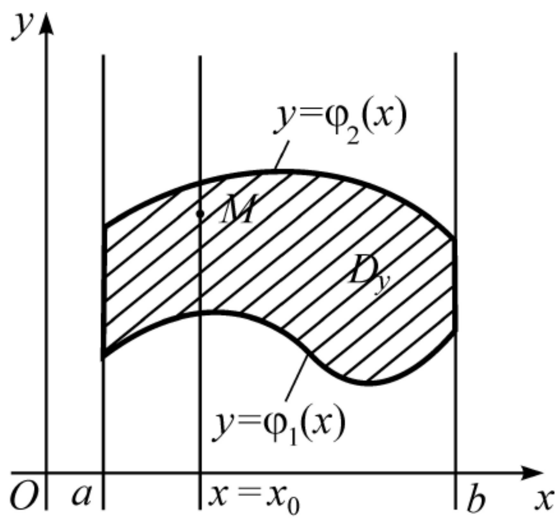


Рис. 21.2.3. **D_y – правильна область у напрямі осі Oy**

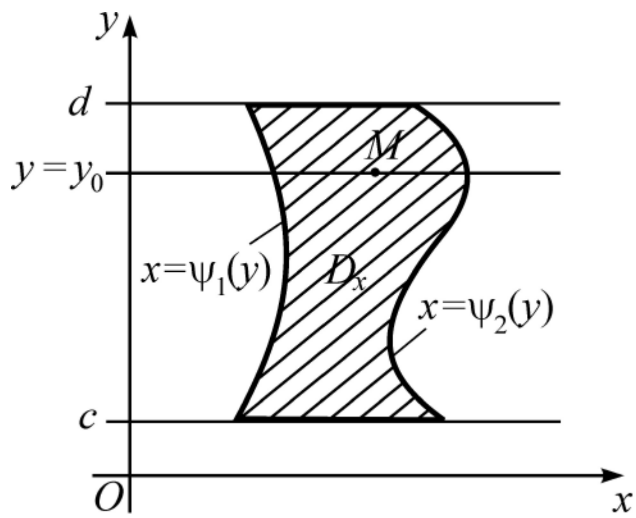


Рис. 21.2.4. **D_x – правильна область у напрямі осі Ox**

Дуги кривих $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x)$ $(\psi_1(y),\ \psi_2(y))$ називаються відповідно **нижньою**, **верхньою (лівою**, **правою) ділянками** межі області.

Межі Γ_y, Γ_x правильних областей D_y, D_x у символах описуються так:

$$\Gamma_y=\{(x,y)\mid x=a,\ x=b;\ y=\varphi_1(x),\ y=\varphi_2(x)\},$$
$$\Gamma_x=\{(x,y)\mid\ y=c,\ y=d;\ x=\psi_1(y),\ x=\psi_2(y)\}.$$

Область, правильну як у напрямі осі Ox, так і в напрямі осі Oy, будемо називати просто **правильною плоскою областю**. Правильними є, наприклад, області, обмежені прямою, паралельною одній із координатних осей, та дугою кривої 2-го порядку, яка описується канонічним рівнянням.

Щоб установити, чи є задана область правильною у напрямі якоїсь з осей координат, треба чітко усвідомити таке: ***характеристичною властивістю*** правильної у напрямі осі Oy (Ox) області є те, що кожна пряма $x = x_0$ $(y = y_0)$, яка проходить через внутрішню точку M області $(M \notin \Gamma)$, перетинає межу області лише у двох точках і кожна з ділянок межі Γ – нижня, верхня (ліва, права) – є дугою лише однієї кривої. По суті D_y (D_x) *як множина точок є різницею двох (знайомих) криволінійних трапецій із рівними основами на осі* Ox (Oy).

Область D, яка не є правильною, легко подати у вигляді об'єднання областей типу D_x, D_y, здійснивши розбиття її на частини прямими, паралельними координатним осям, відповідно до вимог характеристичної властивості. Як правило, це легко зробити, якщо ділянки межі області є дугами графіків елементарних функцій, заданих у явному вигляді. На підставі адитивності ПДІ (властивість 3^0) робимо висновок, що обчислення його по будь-якій замкненій області D зводиться до вміння знаходити подвійні інтеграли по правильним у напрямі осей Ox, Oy областям.

Теорема 21.2.1 (*про обчислення ПДІ зведенням до двократного визначеного інтегрування*). ПДІ по області D_y (D_x) можна знайти обчисленням визначеного інтеграла за змінною x (y) від визначеного інтеграла за змінною y (x) за формулою:

$$I = \iint\limits_{D_y} f(x,y)\,dxdy = \int\limits_a^b \left[\int\limits_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)\,dy \right] dx \tag{21.2.5}$$

$$\left(I = \iint\limits_{D_x} f(x,y)\,dxdy = \int\limits_c^d \left[\int\limits_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x,y)\,dx \right] dy \right). \tag{21.2.6}$$

Д о в е д е н н я проведемо для області D_y і функції $z = f(x,y) \geq 0$ $\forall (x,y) \in D_y$, спираючись на геометричний смисл ПДІ (21.2.3) і формулу обчислення об’єму тіла за відомими площами його паралельних перерізів (див. „Визначений інтеграл”):

$$V=\int_a^b S(x)dx, \tag{21.2.7}$$

де $S(x)$ – неперервна функція, значеннями якої для фіксованого $x_0\in[a,b]$ є площа перерізу тіла площиною $x=x_0$.

Згідно з рис. 21.2.5 у нас $S(x_0)$ – площа криволінійної трапеції $MNPQ$, обмеженої дугою $\overset{\smile}{QP}$ кривої $z=f(x_0,y)$, вертикалями QM, PN і відрізком-основою MN, де $M=M(x_0,\varphi_1(x_0))$, $N=N(x_0,\varphi_2(x_0))$.

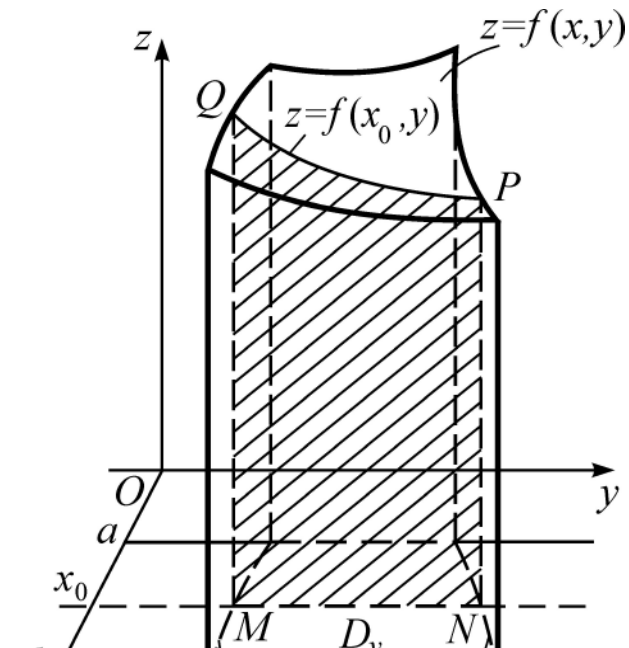


Рис. 21.2.5. **Геометрична інтерпретація формули (21.2.9)**

Цю площу можна знайти за допомогою визначеного інтеграла за змінною y, а саме:

$$S(x_0)=\int_{\varphi_1(x_0)}^{\varphi_2(x_0)} f(x_0,y)dy.$$

Для довільного $x\in[a,b]$ маємо:

$$S(x)=\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)dy. \tag{21.2.8}$$

З урахуванням (21.2.8) формула (21.2.7) набуває вигляду:

$$V=\int_a^b\left[\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)dy\right]dx. \tag{21.2.9}$$

З іншого боку, на підставі геометричного смислу ПДІ:

$$V=\iint_{D_y} f(x,y)dxdy. \tag{21.2.10}$$

Зіставляючи (21.2.9) і (21.2.10), приходимо до співвідношення (21.2.5). Теорему доведено. ■

Загальний випадок, коли ніякі обмеження на знак підінтегральної функції не накладаються, можна звести до розглянутого вибором нової системи координат паралельним перенесенням системи $xOyz$.

У формулах (21.2.5), (21.2.6) інтеграли у квадратних дужках (за змінною y, x відповідно) називають **внутрішніми**, а інтеграли від них (за змінною x, y відповідно) – **зовнішніми**. Праві частини цих формул називаються **двократними**, або **повторними**, інтегралами функції $z = f(x, y)$ по області D_y (D_x).

Застосовують й іншу (без квадратних дужок) форму запису двократних інтегралів, указуючи поруч із символом зовнішнього інтеграла диференціал відповідної змінної, а саме:

$$\iint\limits_{D_y} f(x,y)dxdy = \int\limits_a^b dx \int\limits_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)dy, \tag{21.2.11}$$

$$\iint\limits_{D_x} f(x,y)dxdy = \int\limits_c^d dy \int\limits_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x,y)dx. \tag{21.2.12}$$

Зауважимо також, що:

зовнішній інтеграл завжди має сталі межі інтегрування і береться після обчислення внутрішнього;

при внутрішньому інтегруванні за y (x) інша змінна – x (y) – тлумачиться як параметр (із ним поводяться як із константою);

при обчисленні ПДІ по деякій області D, не обов'язково правильній, можна вибирати будь-який порядок інтегрування (зовнішні інтеграли брати за змінною x, внутрішні – за y, чи навпаки) і це не вплине, звичайно, на остаточний результат, хоча з технічного боку, як правило, один із підходів виявляється більш прийнятним, ніж другий.

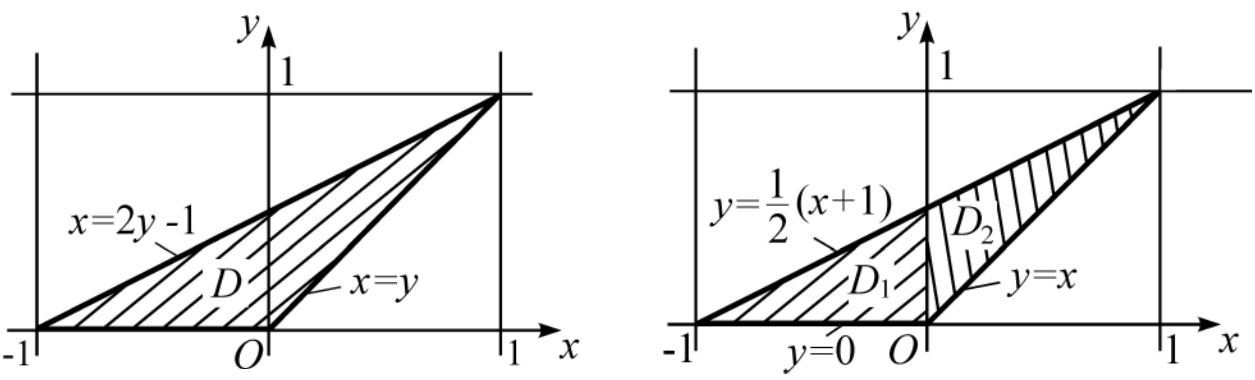
Загальний порядок вираховування повторних інтегралів

Це питання висвітлимо у вигляді коментарю, розв'язуючи конкретний ***приклад:*** обчислити ПДІ від функції $z = f(x, y) = 6(x + y)$ по області D з межею $\Gamma = \{(x, y) \mid y = 0,\ y = x,\ x - 2y + 1 = 0\}$ (після символу | вказано рівняння ліній, які обмежують область D).

1^0. *Зображаємо* (будуємо) область інтегрування й *аналізуємо* її з метою встановлення того, чи буде вона правильною у напрямі якоїсь із координатних осей. Якщо „так”, то застосовують безпосередньо одну з формул – (21.2.11) або (21.2.12); якщо „ні” – розбивають D на правильні підобласті і використовують властивість адитивності ПДІ.

У нашому прикладі область інтегрування є правильною у напрямі Ox (рис. 21.2.6-а), адже виконуються вимоги характеристичної властивості: ліва і права ланки межі області – відрізки двох прямих: $x = 2y - 1$, $x = y$, тому можна записати:

$$D = D_x = \{(x, y) \mid c \le y \le d,\ \psi_1(y) \le x \le \psi_2(y)\} =$$
$$= \{(x, y) \mid 0 \le y \le 1,\ 2y - 1 \le x \le y\}. \tag{21.2.13}$$



а) б)

Рис. 21.2.6. **Зображення області інтегрування ПДІ**

У напрямі осі Oy область D не є правильною (рис. 21.6-б), бо нижня ділянка її межі складається з відрізків двох різних прямих: $y = 0$, $y = x$. Але її можна подати у вигляді об’єднання двох правильних у напрямі Oy областей D_1, D_2, на які D розбивається прямою $x = 0$:

$$D = D_1 \cup D_2,$$

де

$$D_1 = \left\{(x, y) \mid -1 \le x \le 0,\ 0 \le y \le \frac{1}{2}(x + 1)\right\}. \tag{21.2.14}$$

$$D_2 = \left\{(x, y) \mid 0 \le x \le 1,\ x \le y \le \frac{1}{2}(x + 1)\right\}. \tag{21.2.15}$$

2^0. *Установлюємо* межі зовнішнього і внутрішнього інтегрування та *виписуємо* повторні інтеграли.

Для цього область чи підобласть типу D_x (D_y) подумки або графічно проектують на деяку пряму, паралельну осі Oy (Ox), або на саму вісь Oy (Ox), якщо область розташована по один бік від неї. Кінці одержаного відрізка, точніше їхні ординати c, d (абсциси a, b), визначають межі зовнішнього інтегрування. Потім дивимось, якими функціями описуються ліва і права (нижня і верхня) ділянки межі області чи підобластей, тобто встановлюємо вид функцій $x=\psi_1(y)$, $x=\psi_2(y)$ $(y=\varphi_1(x),\ y=\varphi_2(x))$, які і визначають межі внутрішнього інтегрування.

Згідно з рис. 21.2.6-а область D проектується на відрізок $[c,d]=[0,1]$. Для кожного y із $[0,1]$ абсциса x змінюється від $\psi_1(y)=2y-1$ до $\psi_2(y)=y$. Відповідний перехід від ПДІ до повторних інтегралів має вигляд:

$$I=\iint\limits_D 6(x+y)dx\,dy=6\int\limits_0^1 dy\int\limits_{2y-1}^{y}(x+y)dx. \qquad (21.2.16)$$

Для іншого порядку інтегрування, згідно з рис. 21.2.6-б, маємо: D_1 (D_2) проектується на вісь Ox на відрізок $[-1,0]$ $([0,1])$. Ордината y у цих межах змінюється від 0 до $\frac{1}{2}(x+1)$ (для D_1), від x до $\frac{1}{2}(x+1)$ (для D_2). Отже,

$$I=\iint\limits_D 6(x+y)dx\,dy=6\left(\int\limits_{-1}^{0}dx\int\limits_0^{\frac{1}{2}(x+1)}(x+y)dy+\int\limits_0^1 dx\int\limits_x^{\frac{1}{2}(x+1)}(x+y)dy\right). \qquad (21.2.17)$$

Як бачимо, перевагу треба віддати двократному інтегралу із (21.2.16): порівняно з (21.2.17) його відшукання потребує вдвічі менше обчислювальної роботи. Зауважимо, що межі інтегрування ми фактично одержали ще в 1^0, коли описували D, D_1, D_2 (див. (21.2.13), (21.2.14), (21.2.15)).

3[0]. *Обчислюємо* повторні інтеграли функції $z = f(x, y)$ в області D, починаючи з внутрішнього. Якщо внутрішній інтеграл „громіздкий”, то його знаходять окремо; у протилежному випадку обчислення двократного інтеграла проводять „ланцюжком”, що і зробимо в (21.2.16):

$$I = 6\int_0^1 dy \int_{2y-1}^{y} (x+y)\,dx = 6\int_0^1 dy \left(\frac{x^2}{2} + xy\right)\Bigg|_{2y-1}^{y} =$$

$$= 6\int_0^1 \left[\left(\frac{y^2}{2} + y^2\right) - \left(\frac{(2y-1)^2}{2} + (2y-1)y\right)\right] dy = 6\int_0^1 \left(-\frac{5}{2}y^2 + 3y - \frac{1}{2}\right) dy =$$

$$= 6\left(-\frac{5}{6}y^3 + \frac{3}{2}y^2 - \frac{1}{2}y\right)\Bigg|_0^1 = 6\left(-\frac{5}{6} + \frac{3}{2} - \frac{1}{2}\right) = 1.$$

При обчисленні внутрішнього інтеграла враховано, що функція $x + y$ розглядається як функція від x при постійному y, тому для неї первісною буде функція $x^2/2 + xy$. ●

21.3. Подвійний інтеграл у полярних координатах. Заміна змінних у ПДІ

Означення ПДІ й елемент площі в полярних координатах

Нехай у замкненій області D, яку віднесено до полярної системи координат $\rho O \varphi$, де ρ – полярний радіус $(0 \le \rho < \infty)$, φ – полярний кут $(0 \le \varphi \le 2\pi)$, O – полюс (початок координат), задана неперервна функція $z = F(\rho, \varphi)$, або $z = F(M)$, де $M = M(\rho, \varphi)$.

Як і в системі xOy (див. п. 21.2) здійснимо:

– *розбиття* D на площинки Δs_i $(i = \overline{1, n})$ із діаметром λ;

– *вибір* на кожній із них точки $M_i(\rho_i, \varphi_i)$;

– *складання* інтегральної суми $I_n = \sum_{i=1}^{n} F(M_i) \cdot \Delta s_i$;

– *обчислення* границі I інтегральної суми I_n при $\lambda \to 0$ разом із $n \to \infty$: $I = \lim\limits_{\substack{\lambda \to 0 \\ (n \to \infty)}} I_n$.

Число I (за умови його існування) називають **подвійним інтегралом** від функції $z = F(\rho, \varphi)$ по області D у полярній системі координат і пишуть:

$$I = \iint\limits_D F(M)\,ds, \quad \text{або} \quad I = \iint\limits_D F(\rho, \varphi)\,ds. \qquad (21.3.1)$$

Це означення достоту повторює означення ПДІ в декартових координатах (21.2.1), тому і в системі $\rho O \varphi$ достатня умова існування I – неперервність функції $F(M)$ $\forall M \in D$.

Оскільки у випадку існування ПДІ границя I не залежить від способу розбиття області D на площинки, то його здійснюють найпростішим способом – координатними лініями: концентричними колами $(\rho - const)$ і променями $(\varphi - const)$, тобто півпрямими з початком O (рис. 21.3.1-а).

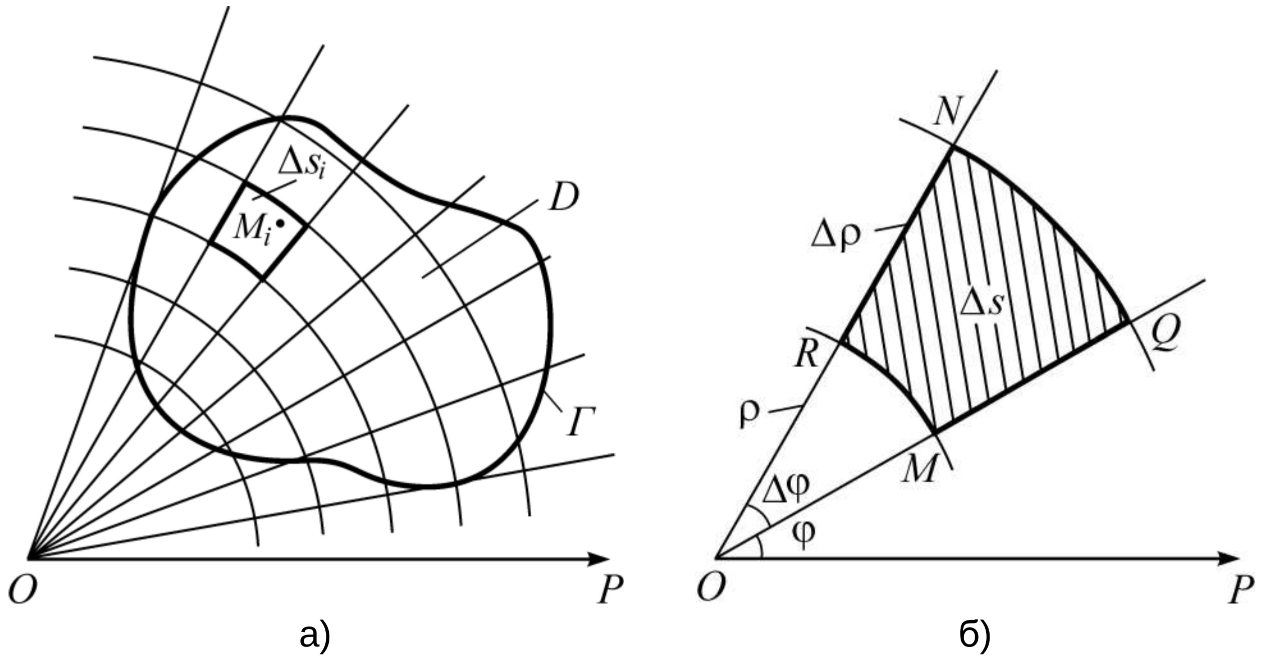


Рис. 21.3.1. **Область D та її площинка Δs у полярних координатах**

Щоб одержати вираз для елемента (диференціала) площі ds у системі $\rho O \varphi$, розглянемо окрему площинку Δs (рис. 21.3.1-б), межа якої не має спільних ділянок із лінією Γ. Її можна розглядати як частину області D, яка одержується при переході від точки $M(\rho, \varphi)$ до точки $N(\rho + \Delta\rho, \varphi + \Delta\varphi)$, коли полярний радіус (полярний кут) набуває приросту

$\Delta\rho$ $(\Delta\varphi)$. У позначенні площинки (Δs) індекс i не пишемо, бо для виведення ds не суттєво, яка за номером площинка такого типу розглядається. Часткові області розбиття, у яких деякі ділянки межі належать лінії Γ, не беруться до уваги, оскільки вони не впливають на границю інтегральної суми; це доводять у більш повних і строгих курсах матаналізу.

Якщо через S_{OMR}, S_{OQN} позначити площі кругових секторів із центральним кутом $\Delta\varphi$ і відповідно з радіусами ρ, $\rho+\Delta\rho$, то чисельно

$$\Delta s = S_{OQN} - S_{OMR} = \frac{1}{2}(\rho+\Delta\rho)^2\Delta\varphi - \frac{1}{2}\rho^2\Delta\varphi = \rho\Delta\rho\Delta\varphi + \frac{1}{2}\Delta\rho^2\Delta\varphi. \quad (21.3.2)$$

При прямуванні приростів $\Delta\rho$ і $\Delta\varphi$ до нуля перший і другий доданки правої частини (21.3.2) теж прямують до нуля, тобто Δs становить суму двох нескінченно малих при $\Delta\rho \to 0$, $\Delta\varphi \to 0$. Головною частиною нескінченно малої Δs, тобто диференціалом ds, є нескінченно мала $\rho\Delta\rho\Delta\varphi$, бо другий доданок $\left(\frac{1}{2}\Delta\rho^2\Delta\varphi\right)$ – нескінченно мала більш високого порядку. Дійсно, порівнюючи нескінченно малі, маємо:

$$\lim_{\substack{\Delta\rho\to 0\\ \Delta\varphi\to 0}} \frac{\frac{1}{2}\Delta\rho^2\Delta\varphi}{\rho\,\Delta\rho\,\Delta\varphi} = \lim_{\substack{\Delta\rho\to 0\\ \Delta\varphi\to 0}} \frac{\Delta\rho}{2\rho} = 0.$$

Висновок. Елемент (диференціал) площі ds у полярних координатах через диференціали незалежних змінних $d\rho = \Delta\rho$, $d\varphi = \Delta\varphi$ описується співвідношенням:

$$ds = \rho\, d\rho\, d\varphi. \quad (21.3.3)$$

Таким чином, (21.3.1) набуває вигляду:

$$I = \iint_D F(\rho,\varphi)\,ds = \iint_D F(\rho,\varphi)\rho\, d\rho\, d\varphi. \quad (21.3.4)$$

Саме таке подання ПДІ в полярних координатах дозволяє звести його обчислення до вираховування повторних інтегралів, за аналогією з обчисленням ПДІ в декартових координатах.

Обчислення ПДІ в полярних координатах

Замкнена область D_ρ у системі $\rho O\varphi$ називається **правильною за ρ**, якщо вона обмежена двома променями $\varphi=\alpha$, $\varphi=\beta$ і дугами двох неперервних кривих $\rho=\rho_1(\varphi)$, $\rho=\rho_2(\varphi)$, і така, що будь-який промінь $\varphi=\varphi_0$, що проходить через внутрішню точку M області ($M \notin \Gamma$), перетинає межу лише у двох точках (рис. 21.3.2). По суті D_ρ як множина точок є різницею двох криволінійних секторів, які зустрічалися при обчисленні площ плоских фігур у полярних координатах.

У символах D_ρ і її межа Γ_ρ описуються так:

$$\begin{gathered} D_\rho=\{(\rho,\varphi) \mid \alpha\le\varphi\le\beta,\ \rho_1(\varphi)\le\rho\le\rho_2(\varphi)\}, \\ \Gamma_\rho=\{(\rho,\varphi) \mid \varphi=\alpha,\ \varphi=\beta;\ \rho=\rho_1(\varphi),\ \rho=\rho_2(\varphi)\}. \end{gathered} \tag{21.3.5}$$

Дуги кривих $\rho_1(\varphi)$, $\rho_2(\varphi)$ будемо називати відповідно **першою**, **другою від полюса O ділянками** межі області.

Замкнена область D_φ у системі $\rho O\varphi$ називається **правильною за φ**, якщо вона обмежена дугами двох концентричних кіл $\rho=\gamma$, $\rho=\delta$ (γ, δ – $const$) і дугами двох неперервних кривих $\varphi=\varphi_1(\rho)$, $\varphi=\varphi_2(\rho)$, і така, що будь-яке коло $\rho=\rho_0$, що проходить через внутрішню точку M області $(M \notin \Gamma)$, перетинає межу лише у двох точках (рис. 21.3.3).

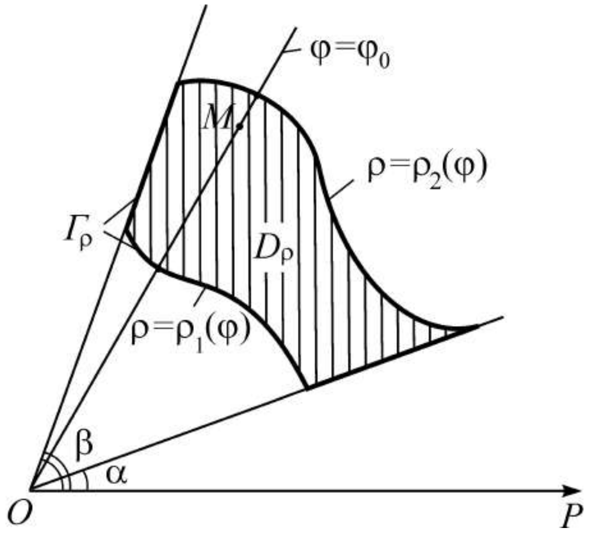


Рис. 21.3.2. **Правильна за ρ область у полярних координатах**

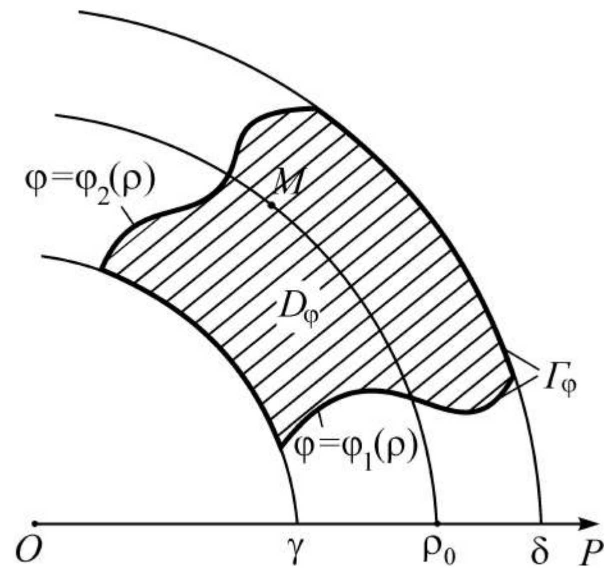


Рис. 21.3.3. **Правильна за φ область у полярних координатах**

У символах D_φ і її межа Γ_φ описуються так:

$$D_\varphi = \{(\rho, \varphi) \mid \gamma \le \rho \le \delta,\ \varphi_1(\rho) \le \varphi \le \varphi_2(\rho)\},$$
$$\Gamma_\varphi = \{(\rho, \varphi) \mid \rho = \gamma,\ \rho = \delta;\ \varphi = \varphi_1(\rho),\ \varphi = \varphi_2(\rho)\}. \quad (21.3.6)$$

Дуги кривих $\varphi_1(\rho)$, $\varphi_2(\rho)$ будемо називати відповідно **першою**, **другою від осі OP ділянками** межі області.

Довільну замкнену область D у полярних координатах можна подати у вигляді об'єднання правильних областей, які одержуються розбиттям D на частини (підобласті) координатними лініями. Завдяки властивості адитивності інтеграл по всій області дорівнюватиме сумі інтегралів по підобластях. Отже, як і в декартових координатах, обчислення ПДІ в полярних координатах зводиться до вміння знаходити його по правильних областях.

Теорема 21.3.1 (*про зведення ПДІ до повторного інтеграла*). ПДІ по правильній області D_ρ (D_φ) можна знайти обчисленням визначеного інтеграла за змінною φ (ρ) від визначеного інтеграла за змінною ρ (φ) за формулою:

$$I = \iint\limits_{D_\rho} F(\rho, \varphi)\rho\, d\rho\, d\varphi = \int\limits_\alpha^\beta \left[\int\limits_{\rho_1(\varphi)}^{\rho_2(\varphi)} F(\rho, \varphi)\rho\, d\rho \right] d\varphi \quad (21.3.7)$$

$$\left(I = \iint\limits_{D_\varphi} F(\rho, \varphi)\rho\, d\rho\, d\varphi = \int\limits_\gamma^\delta \left[\int\limits_{\varphi_1(\rho)}^{\varphi_2(\rho)} F(\rho, \varphi)\, d\varphi \right] \rho\, d\rho \right), \quad (21.3.8)$$

або (у запису повторних інтегралів без квадратних дужок):

$$I = \int\limits_\alpha^\beta d\varphi \int\limits_{\rho_1(\varphi)}^{\rho_2(\varphi)} F(\rho, \varphi)\rho\, d\rho \qquad \left(I = \int\limits_\gamma^\delta \rho\, d\rho \int\limits_{\varphi_1(\rho)}^{\varphi_2(\rho)} F(\rho, \varphi)\, d\varphi \right). \quad (21.3.9)$$

На практиці частіше застосовується такий порядок інтегрування: внутрішній інтеграл береться по ρ, а зовнішній – по φ; тому розбиття області інтегрування D, якщо вона не є правильною, проводять на правильні за ρ підобласті.

Загальний порядок обчислення ПДІ в полярних координатах принципово такий самий, як і для ПДІ в декартових координатах.

Головне утруднення – розпізнати області типу D_ρ, D_φ і встановити правильно межі інтегрування, окрім, звісна річ, обчислення визначених інтегралів. У частинних випадках прямолінійні або криволінійні ділянки межі областей D_ρ, D_φ вироджуються в точки. Так, наприклад, область D_ρ стає просто криволінійним сектором, якщо в точку вироджується перша від O ділянка межі області, і тоді $\rho_1(\varphi)\equiv 0$. Якщо полюс O лежить всередині області інтегрування, обмеженої однією зімкненою лінією $\rho=\rho_2(\varphi)$, то її розглядають як правильну за ρ область:

$$D_\rho=\{0\le\varphi\le 2\pi,\ 0\le\rho\le\rho_2(\varphi)\}.$$

Приклад. Обчислити ПДІ від функції $z=3\rho^2\sin 2\varphi$ по області D, обмеженій лініями: $\rho=2\sin\varphi$, $\rho=2\cos\varphi$.

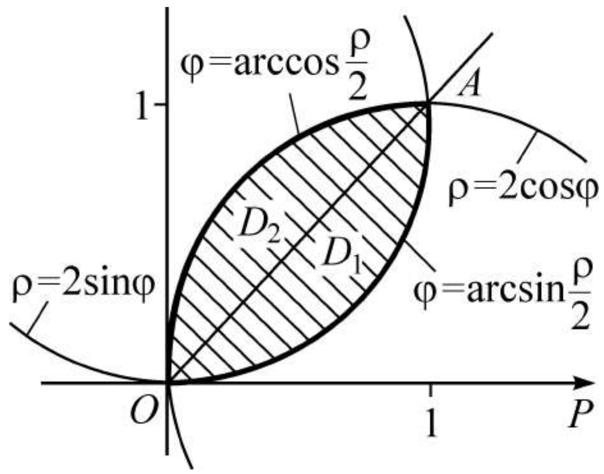


Рис. 21.3.4. **Область інтегрування**

1^0. *Зображуємо* область інтегрування (рис. 21.3.4) як перетин двох кругів із радіусами 1 і центрами на вертикалі й горизонталі, кола яких проходять через точки O, $A(\sqrt{2},\pi/4)$. Ця область є правильною за φ з елементами виродження O, A: точці O відповідає вироджене коло $\rho=0$, а точці A – вироджена дуга кола $\rho=\sqrt{2}$.

Отже,

$$D=D_\varphi=\{(\rho,\varphi)\,|\,0\le\rho\le\sqrt{2},\ \arcsin(\rho/2)\le\varphi\le\arccos(\rho/2)\}. \qquad (21.3.10)$$

Область D не є правильною за ρ, але променем OA її можна розбити на дві правильні за ρ області D_1, D_2, правда, з елементами виродження:

$$\begin{aligned} D_1&=\{(\rho,\varphi)\,|\,0\le\varphi\le\pi/4,\ 0\le\rho\le 2\sin\varphi\},\\ D_2&=\{(\rho,\varphi)\,|\,\pi/4\le\varphi\le\pi/2,\ 0\le\rho\le 2\cos\varphi\}. \end{aligned} \qquad (21.3.11)$$

2^0. *Установлюємо* межі зовнішнього і внутрішнього інтегрування та *виписуємо* подвійні інтеграли.

Аналізуємо D як D_φ і заключаємо, що можливі значення полярного радіуса ρ для точок області лежать від 0 до $\sqrt{2}$, тобто $\rho \in [0, \sqrt{2}]$ – відрізок зовнішнього інтегрування. При відшуканні меж внутрішнього інтеграла враховуємо, що відлік полярного кута від полярної осі OP здійснюється проти ходу годинникової стрілки. У подумках (або фізично) проводимо дугу кола з центром в O, яка перетинає першу і другу від OP ділянки межі області, і дивимось, якими функціями вони описуються, тобто установлюємо вид функцій $\varphi = \varphi_1(\rho)$, $\varphi = \varphi_2(\rho)$; вони і визначають потрібні межі. У нас: $\varphi_1(\rho) = \arcsin(\rho/2)$, $\varphi_2(\rho) = \arccos(\rho/2)$. Отже,

$$I = \iint\limits_D 3\rho^2 \sin 2\varphi \cdot \rho\, d\rho\, d\varphi = 3\int\limits_0^{\sqrt{2}} \rho^3\, d\rho \int\limits_{\arcsin(\rho/2)}^{\arccos(\rho/2)} \sin 2\varphi\, d\varphi. \tag{21.3.12}$$

Якщо після зображення область інтегрування описано відповідним чином у символах (див. (21.3.10), (21.3.11)), то межі інтегрування визначаються „автоматично”. Так, наприклад, із (21.3.11) одержуємо:

$$I = \iint\limits_D F(\rho,\varphi) ds = \iint\limits_{D_1} F(\rho,\varphi)\rho d\rho d\varphi + \iint\limits_{D_2} F(\rho,\varphi)\rho d\rho d\varphi = \left| F(\rho,\varphi) = 3\rho^2 \sin 2\varphi \right| =$$

$$= 3\left(\int\limits_0^{\pi/4} \sin 2\varphi d\varphi \int\limits_0^{2\sin\varphi} \rho^3\, d\rho + \int\limits_{\pi/4}^{\pi/2} \sin 2\varphi d\varphi \int\limits_0^{2\cos\varphi} \rho^3\, d\rho \right). \tag{21.3.13}$$

3^0. *Обчислюємо* повторні інтеграли, починаючи з внутрішнього.

Знайдемо внутрішній інтеграл із (21.3.12):

$$\int\limits_{\arcsin(\rho/2)}^{\arccos(\rho/2)} \sin 2\varphi d\varphi = -\frac{1}{2}\cos 2\varphi \Bigg|_{\arcsin(\rho/2)}^{\arccos(\rho/2)} = -\frac{1}{2}\left[\cos\left(2\arccos\frac{\rho}{2} \right) - \cos\left(2\arcsin\frac{\rho}{2} \right) \right] =$$

$$= \left| \begin{array}{l} \cos 2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1 = 1 - 2\sin^2\alpha; \\ \cos(\arccos\alpha) = \alpha; \quad \sin(\arcsin\alpha) = \alpha \end{array} \right| = -\frac{1}{2}\left[\left(2\left(\frac{\rho}{2}\right)^2 - 1 \right) - \left(1 - 2\left(\frac{\rho}{2}\right)^2 \right) \right] =$$

$= 1 - \rho^2/2$ (між вертикальними рисками вказано довідкову інформацію з тригонометрії).

Тоді

$$I=3\int_0^{\sqrt{2}}\rho^3\left(1-\frac{\rho^2}{2}\right)d\rho=3\int_0^{\sqrt{2}}\left(\rho^3-\frac{\rho^5}{2}\right)d\rho=3\left(\frac{\rho^4}{4}-\frac{\rho^6}{12}\right)\Bigg|_0^{\sqrt{2}}=1.$$

На перший погляд, реалізація (21.3.13) потребує більше обчислювальної роботи, бо містить два повторні інтеграли. Але якщо врахувати симетрію області і поверхні відносно променя OA, то достатньо обчислити лише один повторний інтеграл, наприклад, перший.

Таким чином:

$$I=6\int_0^{\pi/4}\sin 2\varphi\,d\varphi\int_0^{2\sin\varphi}\rho^3\,d\rho=6\int_0^{\pi/4}\sin 2\varphi\,d\varphi\cdot\frac{\rho^4}{4}\Bigg|_0^{2\sin\varphi}=$$

$$=24\int_0^{\pi/4}\sin 2\varphi\,\sin^4\varphi\,d\varphi=\left|\,\sin 2\varphi=2\sin\varphi\cos\varphi\,\right|=48\int_0^{\pi/4}\sin^5\varphi\cos\varphi\,d\varphi=$$

$$=48\int_0^{\pi/4}\sin^5\varphi\,d(\sin\varphi)=48\frac{\sin^6\varphi}{6}\Bigg|_0^{\pi/4}=8\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^6=1.$$

Звичайно, при обчисленні ПДІ не обов'язково розглядати обидва порядки інтегрування (хіба що для контролю правильності розв'язання), а вибирають кращий з точки зору об'єму обчислювальної роботи. ●

Заміна змінних у ПДІ

Як відомо, основним методом обчислення визначених інтегралів є метод заміни змінної (метод підстановки), який дозволяє заданий інтеграл звести чи до табличного, чи до більш „простого" інтеграла. Цей метод поширюється і на ПДІ, але його застосування ускладнюється тим, що треба відшукувати „підхожі" підстановки не для однієї, а для двох змінних.

Розглянемо спочатку частинний випадок методу підстановки у ПДІ, пов'язаний із переходом від декартових координат x, y до полярних – ρ, φ чи навпаки, що зустрічається рідко.

Якщо сумістити системи координат xOy і $\rho O\varphi$ так, що їхні початки O співпадають, а полярна вісь OP лежить на осі Ox, то перехід від декартових координат до полярних описується співвідношеннями:

$$x = \rho\cos\varphi, \quad y = \rho\sin\varphi, \tag{21.3.14}$$

а змінні ρ, φ через x, y виражаються таким чином:

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2}\,,$$
$$\varphi = \arccos\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} = \arcsin\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} = \operatorname{arctg}\frac{y}{x} = \operatorname{arcctg}\frac{x}{y} \tag{21.3.15}$$

($x \neq 0$, $y \neq 0$; у протилежному випадку кут φ невизначений).

Наведені формули і можуть слугувати тим „містком”, який обчислення заданого ПДІ в одних координатах – „старих” – зведе до обчислення більш простого ПДІ в других координатах – „нових”.

Нехай треба обчислити ПДІ від функції $z = f(x, y)$ по області D у декартових координатах:

$$I = \iint\limits_D f(x,y)\,ds = \iint\limits_D f(x,y)\,dx\,dy\,. \tag{21.3.16}$$

Якщо область D є правильною в полярних координатах, то обчислення даного інтеграла можна звести до обчислення ПДІ по D у полярних координатах заміною змінних x, y за формулами (21.3.14) з урахуванням (21.3.3):

$$I = \iint\limits_D f(x,y)\,ds = \iint\limits_D f(\rho\cos\varphi, \rho\sin\varphi)\rho\,d\rho\,d\varphi = \iint\limits_D F(\rho,\varphi)\rho\,d\rho\,d\varphi\,, \tag{21.3.17}$$

де $F(\rho,\varphi) = f(\rho\cos\varphi, \rho\sin\varphi)$.

Зрозуміло, що такий перехід доцільно робити, якщо ПДІ в нових координатах легше обчислити, ніж заданий інтеграл.

Аналіз формул (21.3.15) показує, що у розглядуваному випадку це буде напевне тоді, коли підінтегральна функція $f(x, y)$ містить (як фрагмент) $x^2 + y^2$ або один із виразів, який є правою частиною рівностей у

(21.3.15), наприклад, $\operatorname{arctg}\dfrac{y}{x}$; до того ж область інтегрування правильна (типу D_ρ, D_φ), а її межа містить дуги кіл (краще з центром в O) і відрізки променів, що виходять із O.

Приклад. Обчислити ПДІ від функції $z=\frac{1}{3}(4-x-y)$ по області D, обмеженій лінією $x^2+y^2-2y=0$.

1^0. *Зображаємо* область D, *встановлюємо* межі інтегрування по x і y, *виписуємо* повторний інтеграл (або повторні інтеграли).

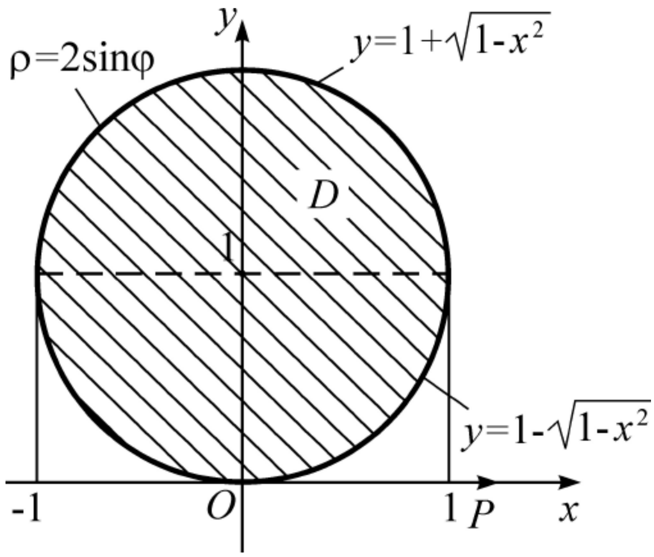


Рис. 21.3.5. **Область інтегрування**

Рівняння $x^2+y^2-2y=0$ описує коло з центром у точці $(0,1)$ і радіусом 1 (рис. 21.3.5):

$$x^2+(y-1)^2=1.$$

Відповідна область – круг – є правильною у напрямі обох осей координат. Розглядаючи її як D_y, знайдемо функції, що описують нижню і верхню ділянки межі області.

Для цього розв'яжемо рівняння межі відносно змінної y:

$$y^2-2y+x^2=0 \;\Rightarrow\; y_{1,2}=1\pm\sqrt{1-x^2}\,.$$

Функція $y=\varphi_1(x)=1-\sqrt{1-x^2}$ $\left(y=\varphi_2(x)=1+\sqrt{1-x^2}\right)$ описує півколо, яке лежить нижче (вище) прямої $y=1$.

Отже,

$$D=D_y=\left\{\,(x,y)\;\middle|\;-1\le x\le 1,\ 1-\sqrt{1-x^2}\le y\le 1+\sqrt{1-x^2}\,\right\},$$

$$I=\iint\limits_D z\,dx\,dy=\frac{1}{3}\int\limits_{-1}^{1}dx\int\limits_{1-\sqrt{1-x^2}}^{1+\sqrt{1-x^2}}(4-x-y)\,dy\,.$$

Видно, що підінтегральна функція зовнішнього інтеграла (по x) міститиме (після взяття внутрішнього інтеграла) ірраціональність $\sqrt{1-x^2}$, раціоналізація якої потребує тригонометричної підстановки. Уникнути ірраціональності можна (було б зразу) за допомогою переходу до полярних координат; що і зробимо.

2^0. *Здійснюємо* перехід до полярних координат, помічаючи, що D є областю типу D_ρ, яка обмежена променями $\varphi=0$, $\varphi=\pi$ (вони дають розгорнутий кут); перша від O ділянка межі вироджена в точку O, а друга – описується рівнянням $\rho=2\sin\varphi$. Воно одержується із рівняння межі заміною x, y на ρ, φ за формулами переходу до полярних координат:

$$x^2+y^2-2y=0 \Rightarrow \left| \begin{array}{c} x=\rho\cos\varphi,\ y=\rho\sin\varphi, \\ x^2+y^2=\rho^2 \end{array} \right| \Rightarrow \rho^2-2\rho\sin\varphi=0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left|\rho\neq 0\right| \Rightarrow \rho=2\sin\varphi.$$

Таким чином, у полярних координатах маємо:

$$D_\rho=\left\{(\rho,\varphi)\ \middle|\ 0\le\varphi\le\pi,\ 0\le\rho\le 2\sin\varphi\right\};$$

$$z=F(\rho,\varphi)=\frac{1}{3}(4-\rho\cos\varphi-\rho\sin\varphi);$$

$$I=\iint\limits_{D_\rho} F(\rho,\varphi)\rho\,d\rho\,d\varphi=\frac{1}{3}\int\limits_0^\pi d\varphi\int\limits_0^{2\sin\varphi}(4-\rho\cos\varphi-\rho\sin\varphi)\rho\,d\rho;$$

підінтегральна функція внутрішнього інтеграла раціонально залежна від ρ, а зовнішнього – від $\cos\varphi$, $\sin\varphi$.

Остаточно отримуємо $I=\pi$. ●

Розглянемо тепер загальний підхід щодо переходу від старих змінних інтегрування x, y до нових – u, v.

Нехай $x=x(u,v)$, $y=y(u,v)$ – функції двох змінних, визначені на області D' площини $uO'v$, які кожній точці із D' ставлять у відповідність одну і тільки одну точку із області інтегрування D на площині xOy, а x'_u, x'_v, y'_u, y'_v – їхні частинні похідні.

Визначник другого порядку

$$J = J(u,v) = \begin{vmatrix} x'_u & x'_v \\ y'_u & y'_v \end{vmatrix}, \qquad (21.3.18)$$

залежний від змінних u і v, називають **функціональним визначником** функцій $x(u,v)$, $y(u,v)$, або **якобіаном** переходу до нових змінних (Карл Якобі (1804 – 1851 рр.) – німецький математик і механік).

Теорема 21.3.2 (*формула перетворення координат у ПДІ*). Якщо:

– функція $f(x,y)$ неперервна на D, а $F(u,v) = f(x(u,v), y(u,v))$ – на D';

– перші частинні похідні x'_u, x'_v, y'_u, y'_v неперервні на D';

– якобіан $J = J(u,v)$ відмінний від нуля всередині D', тобто $J \neq 0$ $\forall (u,v) \in D' \setminus \Gamma'$,

то справедлива формула:

$$\iint\limits_{D} f(x,y)\,dx\,dy = \iint\limits_{D'} F(u,v) \cdot |\,J\,|\,du\,dv, \qquad (21.3.19)$$

де | | – знак (символ) модуля.

Вираз $|J|du dv$ називається **елементом площі в** (криволінійних) **координатах** $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{v}$. Легко показати, що в полярних координатах, тобто коли $u = \rho$, $v = \varphi$: якобіан $J = \rho$, а елемент площі $ds = \rho\, d\rho\, d\varphi$ (див. (21.3.3)).

Вміння вибирати підхожі нові змінні в ПДІ загалом можна віднести не до категорії техніки інтегрування, а до мистецтва інтегрування, і загальні рекомендації в цьому плані давати дуже важко. В окремих випадках, коли Γ описується однотипними кривими двох видів, то в ролі нових змінних u, v вибираються параметри, які визначають сімейства (множини) цих кривих.

Нагадаємо, що за одним із тлумачень, параметри – це величини (у нас – числові), які характеризують однотипні об'єкти (лінії, поверхні, рівняння тощо) в тому смислі, що різним їхнім значенням відповідають конкретні об'єкти (з розглядуваних); наприклад: $y = kx + b$; k, b – параметри, фіксовані значення яких визначають ту чи іншу пряму на площині xOy.

Приклад. Обчислити $\iint\limits_D \frac{8}{7}\,dx\,dy$, D – область із межею Γ, де

$$\Gamma = \{\,(x,y)\mid\ y = x^2,\ y = 2x^2;\ y = x,\ y = 2x\}.$$

1^0. *Вибираємо* нові координати і *встановлюємо* функції $x = x(u,v)$, $y = y(u,v)$, для чого аналізуємо Γ.

Перші дві лінії – параболи сімейства $y = ax^2$ при $a = 1,2$; інші – прямі ансамблю $y = kx$ при $k = 1,2$. Отже, покладаємо: $u = a$, $v = k$, тоді

$$\begin{cases} y = ux^2, \\ y = vx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} v = ux, \\ y = vx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = x(u,v) = \dfrac{v}{u}, \\ y = y(u,v) = \dfrac{v^2}{u}. \end{cases}$$

2^0. *Знаходимо* область D' і якобіан переходу до нових змінних. Рівняння ліній межі Γ набувають вигляду:

$$u = 1,\ u = 2,\ v = 1,\ v = 2.$$

Отже, $D' = \{(u,v)\mid\ 1 \le u \le 2,\ 1 \le v \le 2\}$ – квадрат зі стороною 1, а

$$J = J(u,v) = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial x}{\partial v} \\ \dfrac{\partial y}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -\dfrac{v}{u^2} & \dfrac{1}{u} \\ -\dfrac{v^2}{u^2} & \dfrac{2v}{u} \end{vmatrix} = -\frac{v^2}{u^3} \ne 0 \quad \forall (u,v) \in D'.$$

3^0. *Здійснюємо* перехід до нових змінних за формулою (21.3.19):

$$\iint\limits_D \frac{8}{7}\,dx\,dy = \frac{8}{7}\iint\limits_{D'} \frac{v^2}{u^3}\,du\,dv = \frac{8}{7}\int_1^2 \frac{du}{u^3}\int_1^2 v^2 dv =$$

$$= \frac{-4}{7u^2}\Bigg|_1^2 \frac{v^3}{3}\Bigg|_1^2 = \frac{-4}{21}\left(\frac{1}{4} - 1\right)(8 - 1) = 1.$$

Рекомендуємо побудувати області D, D' і обчислити ПДІ без заміни змінних. ●

21.4. Застосування подвійного інтеграла

Обчислення площ плоских фігур та об'ємів просторових тіл

Матеріал цього пункту будемо викладати в довідковому варіанті, не удаючись до детального розгляду, але з наведенням конкретних прикладів.

Відшукання вказаних числових характеристик геометричних об'єктів базується на геометричному смислі ПДІ (див. п. 21.2) як об'ємі V тіла, обмеженого зверху поверхнею, заданою рівнянням $z = f(x, y)$, де $f(x, y)$ – невід'ємна і неперервна в області D функція, збоків – циліндричною поверхнею з твірною, паралельною осі Oz, і напрямною Γ; знизу – областю D – основою тіла – площини xOy:

$$V = \iint_D f(x, y)\, dx\, dy. \tag{21.4.1}$$

У випадку, коли $f(x, y) \equiv 1 \;\; \forall (x, y) \in D$, одержуємо **формулу площі S_D плоскої фігури D**:

$$S_D = \iint_D dx\, dy. \tag{21.4.2}$$

При розв'язанні задач слід мати на увазі таке:

– якщо D не є правильною областю у напрямі однієї з осей координат, то її, звичайно, розбивають на правильні підобласті;

– поверхня може бути задана рівнянням $y = \psi(x, z)$ або $x = \varphi(y, z)$, тоді область D розташована на площині xOz або yOz і відповідно:

$$V = \iint_D \psi(x, z)\, dx\, dz, \qquad V = \iint_D \varphi(y, z)\, dy\, dz; \tag{21.4.3}$$

– якщо одержаний ПДІ по $D \subset xOy$ складний, то для його спрощення слід здійснити перехід до нових змінних;

– для кращого осмислення того, яке саме циліндричне тіло чи плоска фігура розглядаються, рекомендують давати схематичне зображення тіла або хоча б області D, щоб правильно визначити межі інтегрування.

Приклад. Знайти об’єм тіла, обмеженого поверхнями $x^2+z^2=1$, $x+y-4=0$, $y=0$.

1^0. *Установлюємо* підінтегральну функцію і область інтегрування, аналізуючи рівняння поверхонь:

рівняння $x^2+z^2=1$ описує циліндричну поверхню, напрямна якої – коло на площині xOz з центром у точці O і з радіусом 1, а твірна паралельна осі Oy;

$x+y-4=0$ – рівняння площини, паралельної осі Oz;

$y=0$ – рівняння площини xOz.

Отже, область інтегрування розташована на площині xOz: $D=\{(x,z)\,|\,x^2+z^2\le 1\}$, а підінтегральна функція $y=\psi(x,z)=4-x$, тобто циліндричне тіло зліва обмежене кругом, а справа – фігурою, обмеженою еліпсом (рис. 21.4.1).

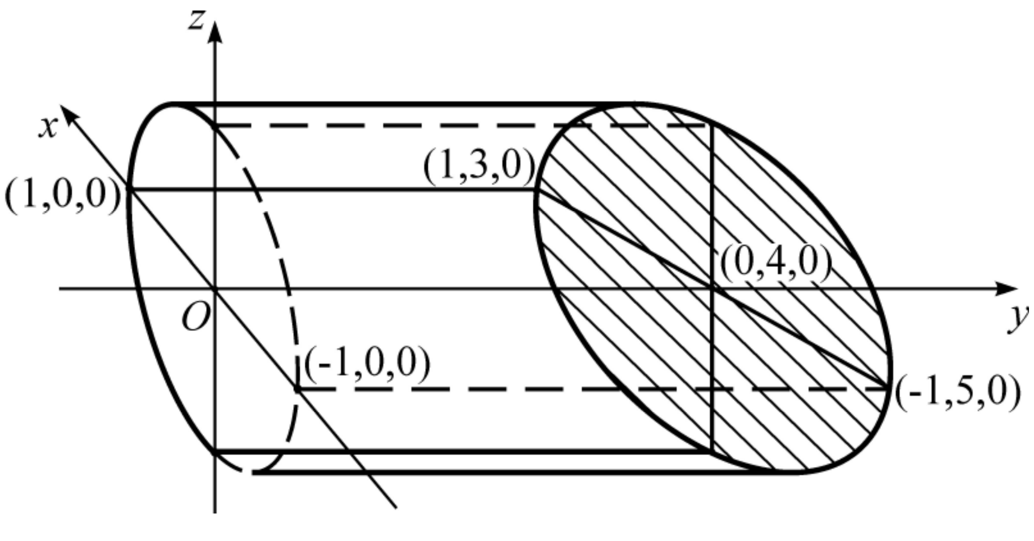


Рис. 21.4.1. **Циліндричне тіло**

Оскільки область D – круг, а підінтегральна функція проста (вона лінійна відносно змінної x), то доцільно ввести полярні координати.

2^0. *Переходимо* до полярних координат і *обчислюємо* відповідний подвійний інтеграл:

$$\left[\begin{array}{l} y=\psi(x,z)=4-x \\ D=\{(x,z)\,|\,x^2+z^2\le 1\} \end{array}\right. \Rightarrow \left|\begin{array}{c} x=\rho\cos\varphi \\ z=\rho\sin\varphi \\ x^2+z^2=\rho^2 \end{array}\right| \Rightarrow \left[\begin{array}{l} y=\Psi(\rho,\varphi)=4-\rho\cos\varphi \\ D=\{(\rho,\varphi)\,|\,0\le\varphi\le 2\pi, 0\le\rho\le 1\} \end{array}\right. \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ V=\iint\limits_D \Psi(\rho,\varphi)\,\rho\,d\rho\,d\varphi=\int\limits_0^{2\pi}d\varphi\int\limits_0^1(4-\rho\cos\varphi)\rho\,d\rho=\int\limits_0^{2\pi}d\varphi\left(2\rho^2-\frac{1}{3}\rho^3\cos\varphi\right)\Bigg|_0^1=$$

$$=\int\limits_0^{2\pi}\left(2-\frac{1}{3}\cos\varphi\right)d\varphi=\left(2\varphi-\frac{1}{3}\sin\varphi\right)\Bigg|_0^{2\pi}=4\pi\ \text{(куб. од.)}.$$

Рекомендуємо знайти V без переходу до нових змінних і порівняти з одержаним результатом. ●

Обчислення площі куска поверхні, обмеженого зімкненою лінією

За допомогою ПДІ можна обчислювати не тільки площі фігур, розташованих на плоскій поверхні (площині), а й таких, які становлять частину кривої (криволінійної) поверхні, обмежену зімкненою лінією.

Розглянемо поверхню, яка описується рівнянням $z=f(x,y)$, де функція $f(x,y)$ неперервна і має неперервні частинні похідні на деякій області площини xOy. Нехай S – площа частини поверхні, обмеженої зімкненою лінією L; через Γ позначимо проекцію цієї лінії на xOy, а через D – область на xOy, обмежену лінією Γ.

За цих умов справедлива така **формула площі куска поверхні**:

$$S=\iint\limits_D\sqrt{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}\,dx\,dy. \qquad (21.4.4)$$

Задачу відшукання площі S куска поверхні $z=f(x,y)$ розв'язують у такому порядку:

1^0. *Установлюють* лінію L (якщо вона явно не задана за умовою задачі), проектують її на xOy і визначають лінію Γ, а за нею – і область інтегрування D.

2^0. *Знаходять* частинні похідні функції $z=f(x,y)$ і підінтегральну функцію в (21.4.4).

3^0. *Обчислюють* відповідний подвійний інтеграл. При застосуванні формули (21.4.4) залишаються в силі рекомендації щодо обчислення площ і об'ємів.

Приклад. Знайти площу поверхні тієї частини параболоїда обертання $x^2+z^2+y=4$, яка вирізається круговим циліндром $x^2+z^2=1$ (див. рис. 21.4.1).

1^0. Оскільки лінія перетину заданих поверхонь – коло – проектується на xOz на коло $x^2+z^2=1$, то $D=\{(x,z)\,|\,x^2+z^2\le 1\}$ (як і на рис. 21.4.1.)

2^0. Рівняння поверхні $x^2+z^2+y=4$ визначає функцію $y=\psi(x,z)=$ $=4-x^2-z^2$, для якої $y'_x=-2x$, $y'_z=-2z$. Таким чином,

$$S=\iint\limits_D \Psi(x,z)\,dx\,dz=\iint\limits_D \sqrt{1+4x^2+4z^2}\,dx\,dz.$$

3^0. Обчислюємо ПДІ переходом до полярних координат:

$$\left[\begin{array}{l}\Psi(x,z)=\sqrt{1+4(x^2+z^2)}\\ D=\{(x,z)|\ x^2+z^2\le 1\}\end{array}\right.\Rightarrow\left|\begin{array}{c}x=\rho\cos\varphi\\ z=\rho\sin\varphi\\ x^2+z^2=\rho^2\end{array}\right|\Rightarrow\left[\begin{array}{l}F(\rho,\varphi)=\sqrt{1+4\rho^2}\\ D=\{(\rho,\varphi)\,|\,0\le\varphi\le 2\pi, 0\le\rho\le 1\}\end{array}\right.\Rightarrow$$

$$\Rightarrow S=\iint\limits_D F(\rho,\varphi)\rho\,d\rho\,d\varphi=\int\limits_0^{2\pi}d\varphi\int\limits_0^1\sqrt{1+4\rho^2}\,\rho\,d\rho=\frac{1}{8}\int\limits_0^{2\pi}d\varphi\int\limits_0^1(1+4\rho^2)^{1/2}d(1+4\rho^2)=$$

$$=\frac{1}{8}\varphi\Big|_0^{2\pi}\cdot\frac{2}{3}(1+4\rho^2)^{3/2}\Big|_0^1=\frac{1}{12}\cdot 2\pi\left(5^{3/2}-1\right)=\frac{\pi}{6}\left(5\sqrt{5}-1\right)\approx 5{,}5\ (\text{кв. од.})$$

Рекомендуємо знайти S без переходу до нових змінних і порівняти з одержаним результатом. ●

Відшукання маси, моментів (статичних і інерції) та координат центра тяжіння плоскої платівки

Маса платівки. Якщо поверхнева густина $\sigma=\sigma(x,y)$ плоскої платівки D є неперервною функцією, то її маса (згідно з фізичним смислом ПДІ) обчислюється за формулою:

$$m=\iint\limits_D \sigma(x,y)\,dx\,dy. \tag{21.4.5}$$

Інші фізичні характеристики платівки визначаються через масу, тому інтеграл із (21.4.5) або підінтегральна функція входять як складові частини до формул, за якими ці характеристики обчислюються.

Статичні моменти платівки та координати її центра тяжіння. Нагадаємо, що **статичним моментом** матеріальної точки з масою m відносно осі (прямої) l називають добуток маси m на відстань d від точки до осі: $M_l = m \cdot d$.

Якщо точку віднесено до площини xOy, то, як правило, обчислюють статичні моменти відносно координатних осей: $M_x = m \cdot y$, $M_y = m \cdot x$, де x, y – координати точки, які і вказують на відстань її від осей координат (зі знаком $+$ чи –).

Розглядаючи платівку D як *множину (систему) матеріальних точок*, приходять (за стандартною схемою (див. п. 21.2)) до **формул статичних моментів**:

$$M_x = \iint_D \sigma(x, y)\, y \, dx\, dy, \qquad M_y = \iint_D \sigma(x, y)\, x \, dx\, dy. \qquad (21.4.6)$$

Якщо зосередити всю масу в центрі тяжіння $C(x_c, y_c)$, тоді $M_x = m \cdot y_c$, $M_y = m \cdot x_c$, звідси:

$$x_c = \frac{M_y}{m}, \qquad y_c = \frac{M_x}{m}, \qquad (21.4.7)$$

або в розгорнутому вигляді:

$$x_c = \frac{\iint_D \sigma(x, y)\, x \, dx\, dy}{\iint_D \sigma(x, y)\, dx\, dy}, \qquad y_c = \frac{\iint_D \sigma(x, y)\, y \, dx\, dy}{\iint_D \sigma(x, y)\, dx\, dy}. \qquad (21.4.8)$$

Формули (21.4.8) називають **формулами координат центра тяжіння**.

Моменти інерції платівки. **Моментом інерції** матеріальної точки з масою m відносно осі l називають добуток маси m на квадрат відстані d від точки до осі: $J = m \cdot d^2$.

У системі координат xOy розглядають моменти інерції відносно координатних осей: $J_x = m \cdot y^2$, $J_y = m \cdot x^2$, а також центральний (полярний) момент відносно точки O: $J_0 = m(x^2 + y^2) = J_x + J_y$.

Розглядаючи платівку як *систему матеріальних точок*, за відомою процедурою (див. п. 21.2) одержують розрахункові **формули моментів інерції**:

$$J_x = \iint\limits_D \sigma(x, y) y^2 \, dx\, dy, \qquad J_y = \iint\limits_D \sigma(x, y) x^2 \, dx\, dy,$$
$$J_0 = \iint\limits_D \sigma(x, y)(x^2 + y^2)\, dx\, dy. \qquad (21.4.9)$$

Формули (21.4.5) – (21.4.9) значно спрощуються, якщо $\forall(x, y) \in D$ $\sigma = \sigma(x, y) - const$; при $\sigma \equiv 1$ маса платівки чисельно дорівнює її площі S і тоді про статичні моменти та моменти інерції говорять як про характеристики не фізичної (наділеної масою) платівки, а плоскої (геометричної) фігури. При нагоді для обчислення відповідних ПДІ вводять нові змінні.

Приклад. Знайти M_x, M_y; x_c, y_c; J_x, J_y, J_0 плоскої фігури, обмеженої аркою синусоїди $y = \sin x$, $x \in [0, \pi]$ і віссю Ox.

1^0. *Покладаємо* $\sigma(x, y) \equiv 1$ і знаходимо $m = S = \iint\limits_D dx\, dy$, де

$$D = \{(x, y) \mid 0 \le x \le \pi,\ 0 \le y \le \sin x\} \quad \text{(рис. 21.4.2):}$$

$$S = \int_0^{\pi} dx \int_0^{\sin x} dy = \int_0^{\pi} dx \cdot y \Big|_0^{\sin x} = \int_0^{\pi} \sin x\, dx = -\cos x \Big|_0^{\pi} = -(-1-1) = 2.$$

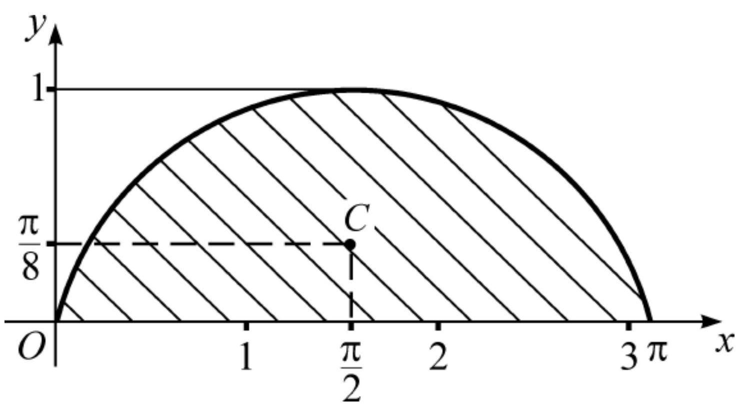


Рис. 21.4.2. **Область інтегрування**

Для статичних моментів, згідно з (21.4.6) при $\sigma \equiv 1$, маємо:

$$M_x = \iint\limits_D y\,dx\,dy = \int\limits_0^{\pi} dx \int\limits_0^{\sin x} y\,dy = \int\limits_0^{\pi} dx \cdot \frac{y^2}{2}\Bigg|_0^{\sin x} = \frac{1}{2}\int\limits_0^{\pi} \sin^2 x\,dx =$$

$$= \left| \sin^2 x = \frac{1}{2}(1-\cos 2x) \right| = \frac{1}{4}\int\limits_0^{\pi}(1-\cos 2x)dx = \frac{1}{4}\left(x - \frac{1}{2}\sin 2x \right)\Bigg|_0^{\pi} = \frac{1}{4}\pi;$$

$$M_y = \iint\limits_D x\,dx\,dy = \int\limits_0^{\pi} x\,dx \int\limits_0^{\sin x} dy = \int\limits_0^{\pi} x\,dx \cdot y\Big|_0^{\sin x} = \int\limits_0^{\pi} x\sin x\,dx =$$

$$= \begin{vmatrix} u = x, & du = dx \\ dv = \sin x\,dx, & v = -\cos x \end{vmatrix} = -x\cos x\Big|_0^{\pi} + \int\limits_0^{\pi}\cos x\,dx = \pi + \sin x\Big|_0^{\pi} = \pi.$$

2^0. *Знаходимо* координати центра тяжіння:

$$x_c = \frac{M_y}{S} = \frac{\pi}{2}; \quad y_c = \frac{M_x}{S} = \frac{\pi}{8}$$

(абсцису x_c в силу симетрії D відносно прямої $x = \pi/2$ можна було б вказати без обчислень).

3^0. *Обчислюємо* моменти інерції (21.4.9):

$$J_x = \iint\limits_D y^2\,dx\,dy = \int\limits_0^{\pi} dx \int\limits_0^{\sin x} y^2 dy = \int\limits_0^{\pi} dx \cdot \frac{y^3}{3}\Bigg|_0^{\sin x} = \frac{1}{3}\int\limits_0^{\pi}\sin^3 x\,dx =$$

$$= \begin{vmatrix} \sin^2 x = 1-\cos^2 x \\ \sin x\,dx = -d(\cos x) \end{vmatrix} = -\frac{1}{3}\int\limits_0^{\pi}\left(1-\cos^2 x\right)d(\cos x) = -\frac{1}{3}\left(\cos x - \frac{\cos^3 x}{3}\right)\Bigg|_0^{\pi} = \frac{4}{9};$$

$$J_y = \iint\limits_D x^2\,dx\,dy = \int\limits_0^{\pi} x^2 dx \int\limits_0^{\sin x} dy = \int\limits_0^{\pi} x^2 dx \cdot y\Big|_0^{\sin x} = \int\limits_0^{\pi} x^2 \sin x\,dx.$$

Цей інтеграл береться інтегруванням частинами (двічі):

$$J_y = \int\limits_0^{\pi} x^2 \sin x\,dx = \begin{vmatrix} u = x^2, & du = 2x\,dx \\ dv = \sin x\,dx, & v = -\cos x \end{vmatrix} = -x^2\cos x\Big|_0^{\pi} +$$

$$+ 2\int\limits_0^{\pi} x\cos x\,dx = \pi^2 + 2I_1,$$

де

$$I_1=\int\limits_0^{\pi} x\cos x\,dx=\left|\begin{matrix} u=x, & du=dx \\ dv=\cos x\,dx, & v=\sin x\end{matrix}\right|=x\sin x\Big|_0^{\pi}-\int\limits_0^{\pi}\sin x\,dx=\cos x\Big|_0^{\pi}=-2.$$

Остаточно:

$$J_y=\pi^2-4\approx 5{,}86,\quad \text{а}\quad J_0=J_x+J_y\approx 6{,}30. \bullet$$

Зауваження. Крім подвійних, або двовимірних, інтегралів у матаналізі вивчають також багатовимірні (m-вимірні, $m\geq 3$) інтеграли. Означення відповідних понять вводяться аналогічно тому, як це робилося для ПДІ (п. 21.2), і обчислення їх зводиться до обчислення m-кратних визначених інтегралів. Поруч з ПДІ найбільш застосовним у практиці є потрійний (тривимірний) інтеграл, до розгляду якого і перейдемо.

21.5. Потрійний інтеграл (ПТІ) у декартових координатах

Означення, теорема існування, геометричний та фізичний смисли

Поняття „потрійний інтеграл” є природним узагальненням поняття „подвійний інтеграл” на випадок функції трьох змінних. Тому його означення принципово не відрізняється від означення подвійного інтеграла.

Нехай функція $u=f(x,y,z)$, або $u=f(M)$, де $M=M(x,y,z)$, визначена і неперервна в замкненій області V тривимірного простору $xOyz$, тобто – на множині точок, яка обмежена замкненою поверхнею S, з урахуванням точок цієї поверхні як межі області V.

Виконаємо таку (*стандартну*) процедуру:

– *розіб’ємо* область (тіло) V довільним чином за допомогою сітки поверхонь на скінченне число n часткових областей із об’ємами Δv_i, $i=\overline{1,n}$ (або просто – на n часткових тіл Δv_i, (рис. 21.5.1)) і найбільшу з відстаней між двома точками межі частки Δv_i назвемо **діаметром частки** λ_i, $i=\overline{1,n}$, а максимальний серед них $\lambda=\max\limits_i\{\lambda_i\}$ – **діаметром розбиття** області V;

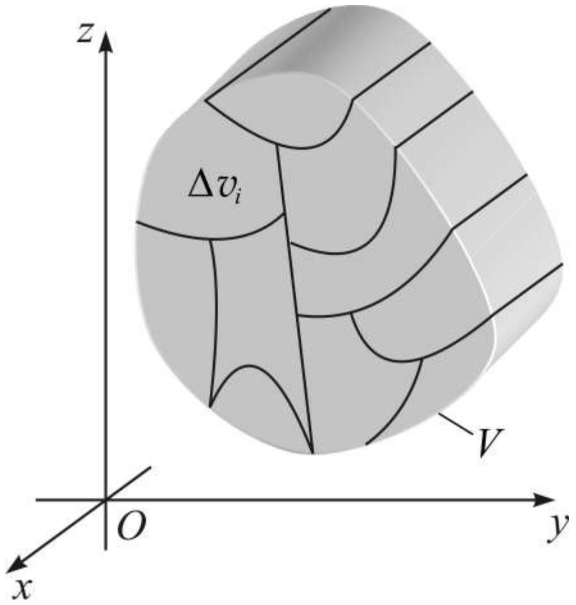


Рис. 21.5.1. **Розбиття тіла V на часткові області**

– *виберемо* на кожній із часток довільним чином по точці $M_i(x_i, y_i, z_i)$, $i = \overline{1, n}$, *обчислимо* $f(M_i)$ і *знайдемо* добутки $f(M_i) \cdot \Delta v_i$;

– *складемо* суму всіх таких добутків

$$I_n = \sum_{i=1}^{n} f(M_i) \cdot \Delta v_i , \quad (21.5.1)$$

яку назвемо **інтегральною сумою** для функції $f(x, y, z)$ в області V;

– *обчислимо* границю (якщо вона існує) інтегральної суми за умови, що діаметр розбиття прямує до нуля при необмеженому зростанні n, тобто $\lambda \to 0$ разом з $n \to \infty$.

Скінченна границя I інтегральної суми I_n, коли діаметр розбиття прямує до нуля ($\lambda \to 0$), а $n \to \infty$, називається **потрійним інтегралом** (**від) функції $f(x, y, z)$ по області V** і позначається так:

$$\iiint\limits_V f(M)\,dv, \quad \text{або} \quad \iiint\limits_V f(x, y, z)\,dv,$$

де $\iiint$ – знак (символ) ПТІ;

V – область інтегрування;

$f(M) = f(x, y, z)$ – підінтегральна функція;

$f(x, y, z)dv$ – підінтегральний вираз;

x, y, z – змінні інтегрування;

dv – так званий елемент об’єму, або диференціал об’єму.

Отже, за означенням

$$I = \lim_{\substack{\lambda \to 0 \\ (n \to \infty)}} I_n = \lim_{\substack{\lambda \to 0 \\ (n \to \infty)}} \sum_{i=1}^{n} f(M_i)\Delta v_i = \iiint\limits_V f(M)\,dv = \iiint\limits_V f(x, y, z)\,dv. \quad (21.5.2)$$

Теорема існування ПТІ, яку наводимо без доведення, формулюється так: якщо задана функція трьох змінних неперервна в розглядуваній замкненій області, то існує скінченна границя інтегральної суми (тобто ПТІ), і вона не залежить ні від способу розбиття тіла на частки, ні від вибору точок у них для складання інтегральної суми.

У світлі цієї теореми розбиття області V на частки Δv_i, $i=\overline{1,n}$, здійснюється найпростішим із можливих способом (нижче, для спрощення записів, у позначенні частки Δv_i індекс i пропустимо). У декартовій системі координат $xOyz$ найпростішим є розбиття тіла V площинами, паралельними координатним площинам. У цьому випадку частка Δv – прямокутний паралелепіпед (призмочка) з вимірами Δx, Δy, Δz, який утворюється внаслідок переходу від точки $M(x,y,z)$ до точки $N(x+\Delta x, y+\Delta y, z+\Delta z)$, де $\Delta x>0$, $\Delta y>0$, $\Delta z>0$. Тому отримуємо $\Delta v=\Delta x\cdot\Delta y\cdot\Delta z$, а $dv=\Delta v=dx\cdot dy\cdot dz$, бо для незалежних змінних x, y, z – $\Delta x=dx$, $\Delta y=dy$, $\Delta z=dz$. Таким чином, можна записати:

$$I=\iiint\limits_V dv=\left|\, dv=dx\cdot dy\cdot dz \,\right|=\iiint\limits_V f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz. \qquad (21.5.3)$$

Геометричний смисл ПТІ. Покладемо $f(x,y,z)\equiv 1$, тоді кожний доданок $f(M_i)\cdot\Delta v_i$ інтегральної суми чисельно дорівнює об'єму прямокутного паралелепіпеда (рис. 21.5.2) з додатними вимірами Δx_i, Δy_i, Δz_i.

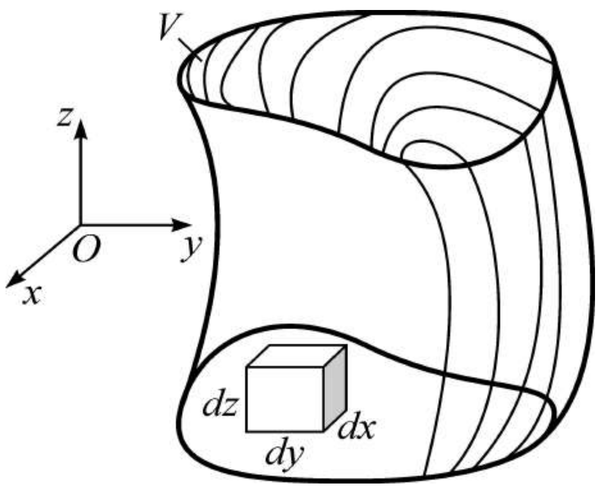


Рис. 21.5.2. **До тлумачення геометричного смислу ПТІ**

Інтегральна сума чисельно дає наближене значення V_n об'єму V усього тіла (об'єм тіла і саме тіло позначено однією і тією ж літерою).

Указане наближення тим краще, чим менше будуть Δv_i, тому природно покласти, що

$$V=\lim_{\substack{\lambda\to 0\\(n\to\infty)}} V_n,$$

а це і дає (за означенням) потрійний інтеграл.

Таким чином, *у геометричному смислі* ПТІ від функції $f(x,y,z)\equiv 1$ по області V чисельно дорівнює об'єму тіла, яке є областю інтегрування:

$$V=\iiint\limits_V dv=\iiint\limits_V dx\,dy\,dz\,. \qquad (21.5.4)$$

Фізичний смисл ПТІ. Нехай тіло V заповнене матеріальними точками, і відома функція $\mu=\mu(x,y,z)$ – густина розподілу мас. Добуток $\mu(M_i)\cdot\Delta v_i$ – доданок інтегральної суми I_n – дає наближену масу однієї частки розбиття, а $I_n=\sum\limits_{i=1}^{n}\mu(M_i)\cdot\Delta v_i$ – наближене значення маси m усього тіла V. Це наближення тим точніше, чим менше кожне Δv_i, тому покладають $m=\lim\limits_{\substack{\lambda\to 0\\(n\to\infty)}} I_n=\iiint\limits_V \mu(x,y,z)dv$ і кажуть: *у фізичному смислі* ПТІ від густини тіла $\mu=\mu(x,y,z)$ чисельно дорівнює його масі, тобто

$$m=\iiint\limits_V \mu(x,y,z)\,dxdydz\,. \qquad (21.5.5)$$

Зауваження. Відзначимо, що основні властивості ПТІ не відрізняються від властивостей визначеного інтеграла і ПДІ.

1^0. ПТІ від суми будь якого скінченного числа функцій дорівнює сумі відповідних інтегралів від доданків:

$$\iiint\limits_V (f_1+f_2+...+f_k)dv=\iiint\limits_V f_1dv+\iiint\limits_V f_2dv+\ldots+\iiint\limits_V f_kdv\,.$$

2^0. Сталий множник можна виносити за знак (символ) ПТІ:

$$\iiint\limits_V cf\,dv=c\iiint\limits_V f\,dv\,,\quad c-const\,.$$

3^0. Якщо область V розбито на дві підобласті V_1, V_2, які не мають спільних внутрішніх точок, то ПТІ по всій області дорівнює сумі інтегралів по підобластям:

$$\iiint\limits_V f\,dv=\iiint\limits_{V_1} f\,dv+\iiint\limits_{V_2} f\,dv\,.$$

Властивість *адитивності* 3^0 узагальнюється на довільне скінченне число підобластей.

Обчислення ПТІ в декартових координатах

Обчислення ПТІ (21.5.3) здійснюється шляхом послідовного обчислення інтегралів меншої кратності: визначеного інтеграла (ВІ) зі змінною інтегрування z і змінними межами інтегрування (залежними від x і y) та подвійного інтеграла (ПДІ) по області, яка є проекцією V_{xy} тіла V на площину xOy.

Нехай область V є тілом, обмеженим знизу і зверху відповідно поверхнями $z=h(x,y)$ і $z=H(x,y)$, де $h(x,y)$, $H(x,y)$ неперервні в замкненій області $D\in xOy$ функції; D – проекція V_{xy} тіла V на площину xOy, тобто $D=V_{xy}$.

Відштовхуючись від фізичного смислу ПТІ як маси тіла з густиною $f(x,y,z)$ $m=\iiint\limits_{V} f(x,y,z)dv$ та спираючись на теорему існування ПТІ, складемо дещо інакше інтегральну суму, що також дає наближене значення маси тіла, як і інтегральна сума (21.5.1). Здійснюючи відповідні граничні переходи, отримаємо інше подання маси всього тіла.

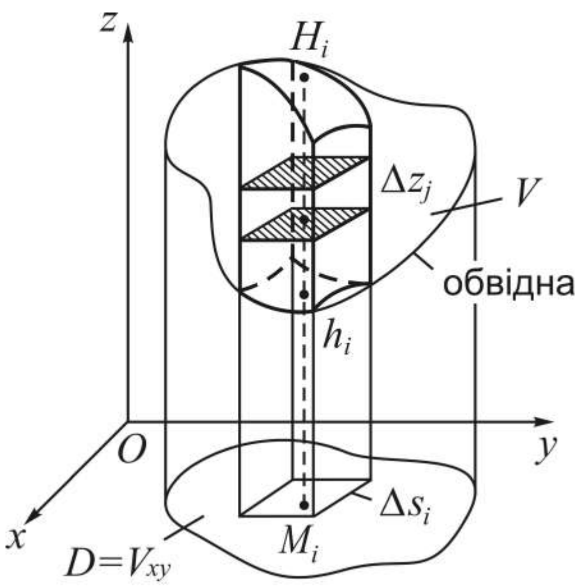


Рис. 21.5.3. **Область інтегрування V та її проекція V_{xy} на xOy**

На рис. 21.5.3, для його спрощення, зображено лише обвідну лінію поверхонь, що обмежують тіло V.

Розіб'ємо область D довільним чином на n часток Δs_i з діаметрами λ_i і *виберемо* на кожній із них довільну точку $M_i(x_i,y_i)$. Площинці Δs_i $(i=\overline{1,n})$ відповідає частина області V у вигляді призмочки-стовпчика з криволінійними основами, а точці M_i – відрізок із кінцями $h_i=h(x_i,y_i)$, $H_i=H(x_i,y_i)$.

Розіб'ємо довільним чином кожну призмочку площинами, паралельними xOy на k частин з аплікатами Δz_j $(j=\overline{1,k})$ і в елементі розбиття *виберемо* довільну точку $f(x_i,y_i,z_j)$.

Будемо брати Δz_j настільки малими, що густину розподілу мас за аплікатою можна вважати сталою. Тоді маса частки $\Delta v_i = \Delta s_i \cdot \Delta z_j$ дорівнюватиме добутку $f(x_i, y_i, z_j)\Delta z_j \Delta s_i$, а їхня сума дає наближене значення маси всієї призмочки: $\sum_{j=1}^{k} f(x_i, y_i, z_j)\Delta z_j \Delta s_i$. У разі фіксованого i це є інтегральна сума для функції $f(x_i, y_i, z)$ від змінної z на проміжку $[h_i, H_i]$, границя якої за умови, що $k \to \infty$ і $\max_j\{\Delta z_j\} \to 0$, визначає масу стовпчика:

$$\Delta m_i = \int_{h_i}^{H_i} f(x_i, y_i, z)dz \cdot \Delta s_i, \tag{21.5.6}$$

де $h_i = h(x_i, y_i)$, $H_i = H(x_i, y_i)$.

Складемо тепер суму всіх Δm_i, $i = 1,2,\ldots,n$, і таким чином отримаємо наближену масу всього тіла: $m_n = \sum_{i=1}^{n} \Delta m_i$, а разом з тим – інтегральну суму для функції змінних x, y. Її границя за умови, що $n \to \infty$ і діаметр розбиття $\lambda = \max_i\{\lambda_i\} \to 0$, дає подвійний інтеграл по області D і визначає масу всього тіла V:

$$m = \iint_D \left(\int_{h(x,y)}^{H(x,y)} f(x, y, z)dz \right) ds = \iint_D \left(\int_{h(x,y)}^{H(x,y)} f(x, y, z)dz \right) dxdy. \tag{21.5.7}$$

Таким чином, в декартових координатах має місце формула:

$$\iiint_V f(x, y, z)dx\,dy\,dz = \iint_D \left(\int_{h(x,y)}^{H(x,y)} f(x, y, z)dz \right) dx\,dy \tag{21.5.8}$$

– **формула зведення обчислення ПТІ до обчислення ПДІ від ВІ**.

Якщо область D є правильною у напрямі осі Oy (див. рис. 21.2.3), тобто $D = D_y = \{(x, y) \mid a \le x \le b,\ \varphi_1(x) \le y \le \varphi_2(x)\}$, то

$$\iiint\limits_V f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz = \int\limits_a^b dx \int\limits_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} dy \int\limits_{h(x,y)}^{H(x,y)} f(x,y,z)\,dz. \qquad (21.5.9)$$

Якщо область D є правильною у напрямі осі Ox (див. рис. 21.2.4), тобто $D = D_x = \{(x,y) \mid c \le y \le d,\ \psi_1(y) \le x \le \psi_2(y)\}$, то

$$\iiint\limits_V f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz = \int\limits_c^d dy \int\limits_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} dx \int\limits_{h(x,y)}^{H(x,y)} f(x,y,z)\,dz. \qquad (21.5.10)$$

Співвідношення (21.5.9), (21.5.10) є **формулами зведення обчислення ПТІ до послідовного обчислення трьох ВІ**, або – **до трикратного інтегрування**. ВІ зі сталими межами інтегрування називаються **зовнішніми**, інші – **внутрішніми** інтегралами.

Оскільки визначені і подвійні інтеграли вже „бралися”, то обчислення ПТІ не повинно викликати утруднення.

Стосовно тривимірної області V, як і двовимірної D, вводять поняття „правильна область”. Зокрема, область V називається **правильною у напрямі осі Oz**, якщо кожна пряма, проведена через внутрішню точку області, перетинає межу S лише у двох точках і кожна з ділянок межі S – нижня і верхня – є куском поверхні, яка описується єдиним аналітичним виразом. Якщо область V є правильною у напрямі осі Oz і проектується на площину xOy у правильну двовимірну область $D = V_{xy}$, то вона називається просто **правильною тривимірною областю**:

$$V = \{(x,y,z) \mid \underbrace{a \le x \le b, \varphi_1(x) \le y \le \varphi_2(x)}_{D_y}, h(x,y) \le z \le H(x,y)\} \qquad (21.5.11)$$

або

$$V = \{(x,y,z) \mid \underbrace{c \le y \le d, \psi_1(y) \le x \le \psi_2(y)}_{D_x}, h(x,y) \le z \le H(x,y)\}. \qquad (21.5.12)$$

Якщо розглядувана область не є правильною, то, спираючись на властивість адитивності ПТІ, її розбивають площинами, паралельними координатним площинам, на правильні тривимірні області.

У частинному випадку, коли область V є прямокутним паралелепіпедом із гранями, паралельними координатним площинам, тобто

$$V = \{(x, y, z) \mid a \le x \le b, c \le y \le d, e \le z \le q\}, \; a, b, c, d, e, q - const,$$

обчислення ПТІ зводиться до обчислення трьох (звичайних) ВІ зі сталими межами інтегрування:

$$\iiint\limits_V f(x, y, z) dx\, dy\, dz = \int_a^b dx \int_c^d dy \int_e^q f(x, y, z) dz.$$

При цьому порядок інтегрування не має суттєвого значення. Якщо до того ж $f(x, y, z) = k - const$, то ПТІ можна розглядати як добуток k і трьох ВІ:

$$\iiint\limits_V f(x, y, z) dx\, dy\, dz = k \cdot \int_a^b dx \cdot \int_c^d dy \cdot \int_e^q dz.$$

Зауваження. Межа S правильної області V може описуватись рівняннями виду $x = h(y, z)$, $x = H(y, z)$ або $y = h(x, z)$, $y = H(x, z)$. У цих випадках для переходу від ПТІ до трикратного інтеграла доцільно проектувати тіло V відповідно на площини yOz або xOz і тоді області інтегрування опишуться так:

$$V = \{(x, y, z) \mid V_{yz}, \; h(y, z) \le x \le H(y, z)\}, \qquad (21.5.13)$$

або

$$V = \{(x, y, z) \mid V_{xz}, \; h(x, z) \le y \le H(x, z)\}, \qquad (21.5.14)$$

де V_{yz}, V_{xz} – правильні (у напрямі хоча б однієї з осей координат) плоскі області.

Для побудови більш наочного зображення областей (21.5.13), (21.5.14) часто буває зручним відхід від традиційного розташування осей координат у просторі: наприклад, вісь Ox чи Oy розташувати вертикально або змінити напрям осей на протилежний та ін.

Далі наведено приклад обчислення ПТІ і, разом із тим, загальний порядок їх вираховування.

Приклад. Обчислити ПТІ $I=\iiint\limits_V x(y-z)dxdydz$ по області V, яка обмежена трьома поверхнями другого порядку: $x=2-y^2-z^2$, $x=-\sqrt{1-y^2-z^2}$, $y^2+z^2=1$.

1^0. *Аналізуємо* задані рівняння з метою встановлення того, які поверхні вони описують, і *зображуємо* (будуємо) область інтегрування або принаймні її проекцію на одну з координатних площин.

У нашому прикладі: $x=2-y^2-z^2$ – рівняння кругового параболоїда з віссю симетрії Ox і вершиною в точці $A(2{,}0{,}0)$, порожнина якого містить початок O; $x=-\sqrt{1-y^2-z^2}$ – рівняння півсфери радіуса 1 з центром у початку координат $O(0{,}0{,}0)$, розташованої нижче площини xOy (рівняння $x^2+y^2+z^2=1$ описує всю сферу); $y^2+z^2=1$ – рівняння кругового циліндра з твірною, паралельною осі Ox, і напрямною – колом $y^2+z^2=1$ радіуса 1 з центром у початку координат, розташованим на площині yOz.

На рис. 21.5.4 схематично зображено поверхні, що обмежують тіло V: обвідні лінії параболоїда, сфери і циліндра та кола з центрами в точках O, O_1 – лінії перетину сфери і параболоїда з циліндром.

2^0. *Установлюємо* межі інтегрування (зовнішнього і внутрішнього) та *виписуємо* трикратний інтеграл.

Для цього подумки (або графічно) проектують тіло V на одну з координатних площин (бажано, щоб відповідна плоска область була правильною у напрямі хоча б однієї з осей координат). У нашому випадку (див. (21.5.12)) краще проектувати область інтегрування на yOz:

$V=\{(x,y,z)\,|\,V_{yz},\ h(y,z)\le x\le H(y,z)\}$ – правильна тривимірна область, бо поверхні $h(y,z)=-\sqrt{1-y^2-z^2}$, $H(y,z)=2-y^2-z^2$ і плоска область $V_{yz}=D=\{(y,z)\,|\,y^2+z^2\le 1\}$ – круг, межею якого є напрямна циліндра (рис. 21.5.5-а), задовольняють умови означення правильної тривимірної області. Область D є правильною двовимірною областю у напрямі обох осей: і Oy, і Oz. На рис. 21.5.5-б зображено проекцію V на площину yOx; вона є правильною тільки у напрямі осі Ox.

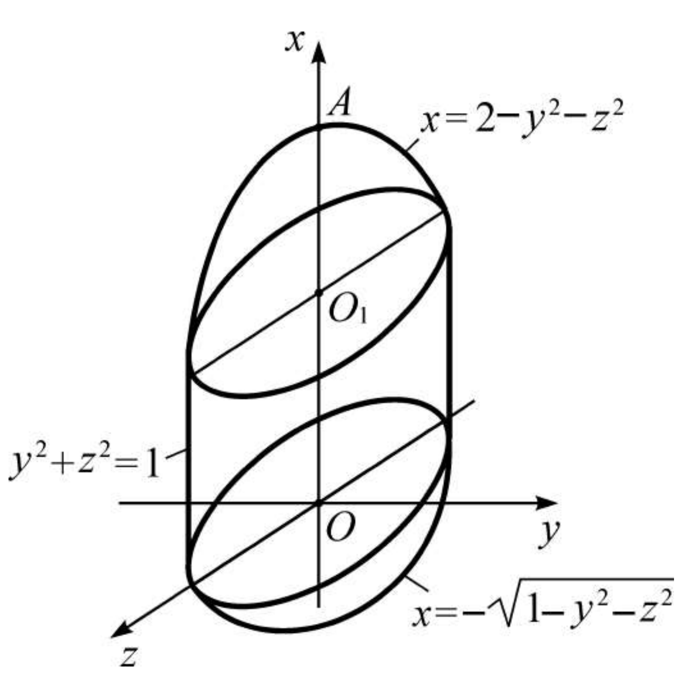


Рис. 21.5.4. **Каркаси поверхонь, що обмежують область інтегрування V**

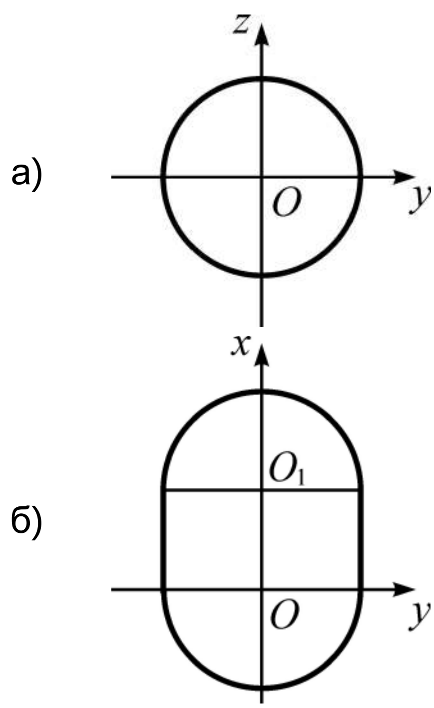


Рис. 21.5.5. **Проекції області V на площини: а) yOz; б) yOx**

Вибираємо простішу область – круг – і здійснюємо, вже знайомий по ПДІ, перехід до полярних координат у площині yOz:

$$\left|\begin{array}{l} y=\rho\sin\varphi \\ z=\rho\cos\varphi \end{array}\right| \Rightarrow D_\rho=\{(\rho,\varphi)|\ 0\le\varphi\le 2\pi,\ 0\le\rho\le 1\}.$$

Оскільки $y^2+z^2=\rho^2$, то область інтегрування опишеться так:

$$V=\left\{(x,\rho,\varphi)\middle|\ 0\le\varphi\le 2\pi,\ 0\le\rho\le 1,\ -\sqrt{1-\rho^2}\le x\le 2-\rho^2\right\},$$

де подвійні нерівності у фігурних дужках дають межі інтегрування за відповідними змінними.

Для підінтегрального виразу, з урахуванням що $dydz=\rho d\rho d\varphi$, маємо:

$$f(x,y,z)dxdydz=x(y-z)dxdydz\Rightarrow F(x,\rho,\varphi)=x\rho^2(\sin\varphi-\cos\varphi)dxd\rho d\varphi.$$

Тепер можна виписати трикратний інтеграл:

$$I=\int_0^{2\pi}(\sin\varphi-\cos\varphi)d\varphi\int_0^1\rho^2 d\rho\int_{-\sqrt{1-\rho^2}}^{2-\rho^2}xdx.$$

3^0. *Обчислюємо* трикратний інтеграл, починаючи узагалі з другого внутрішнього ВІ.

У розглядуваному прикладі – спочатку за змінною x, а потім – за змінною ρ:

$$I_x = \int_{-\sqrt{1-\rho^2}}^{2-\rho^2} x dx = \frac{1}{2} x^2 \Big|_{-\sqrt{1-\rho^2}}^{2-\rho^2} = \frac{1}{2}\Big[(2-\rho^2)^2 - (1-\rho^2)\Big] = \frac{1}{2}\left(3 - 3\rho^2 + \rho^4\right);$$

$$I_\rho = \frac{1}{2}\int_0^1 \left(3\rho^2 - 3\rho^4 + \rho^6\right) d\rho = \frac{1}{2}\left(\rho^3 - \frac{3}{5}\rho^5 + \frac{1}{7}\rho^7\right)\Bigg|_0^1 = \frac{19}{70}.$$

Тепер вираховуємо зовнішній інтеграл:

$$I_\varphi = \int_0^{2\pi} (\sin\varphi - \cos\varphi)\, d\varphi = -(\cos\varphi + \sin\varphi)\Big|_0^{2\pi} = 0.$$

(*Пропонуємо* переконатися, що обчислення ПТІ згідно з рисунком 21.5.5-б, дає той самий результат.)

Якщо внутрішні інтеграли „громіздкі”, то їх знаходять окремо, як це і було зроблено; у протилежному випадку обчислення трикратного інтеграла проводять „ланцюжком”.

Буває так, що якийсь із ВІ (внутрішній чи зовнішній) має сталі межі інтегрування і його підінтегральна функція залежить від змінної, яка не фігурує в інших складових трикратного інтеграла. Тоді його можна обчислювати незалежно від інших ВІ – автономно. Якщо зважити на цю обставину з самого спочатку, то можна ураз отримати відповідь.

У разі, коли просторове тіло обмежене кусками циліндричних або/і сферичних поверхонь, то використовують спеціальні координати.

21.6. Потрійний інтеграл у циліндричних і сферичних координатах

Якщо в декартовій системі координат $xOyz$ в одній із координатних площин здійснити перехід до полярних координат, то кожній точці простору відповідатиме трійка чисел, два з яких є координатами ρ, φ, а третя залишається декартовою: (ρ, φ, z), (ρ, y, φ), (x, ρ, φ). Зазначені трійки чисел називаються **циліндричними координатами** точки, а система координат – відповідно **циліндричною**. На рис. 21.6.1 зображено циліндричні координати ρ, φ, z. Вони пов'язані з декартовими координатами співвідношеннями:

$$x = \rho\cos\varphi,\ \ y = \rho\sin\varphi,\ \ z = z, \qquad (21.6.1)$$

де $0 \le \rho < +\infty$, $0 \le \varphi \le 2\pi$, $-\infty < z < +\infty$.

Елемент об'єму в координатах ρ, φ, z зображено на рис. 21.6.2.

Формула переходу в ПТІ від декартових до циліндричних координат, з урахуванням того, що $ds = dxdy = \rho d\rho d\varphi$ (див. (21.3.3)), така:

$$\iiint\limits_V f(x, y, z)dxdydz = \iiint\limits_{V_c} f(\rho\cos\varphi, \rho\sin\varphi, z)\rho d\rho d\varphi dz, \qquad (21.6.2)$$

де V_c – область простору $\rho O\varphi\theta$, яка відповідає V в $xOyz$.

При розв'язуванні прикладу (див рис. 21.5.4) вже, власне, було використано циліндричні координати x, ρ, φ.

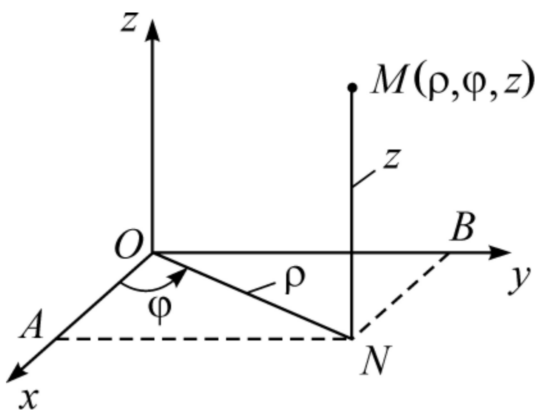


Рис. 21.6.1. **Циліндричні координати** ρ, φ, z

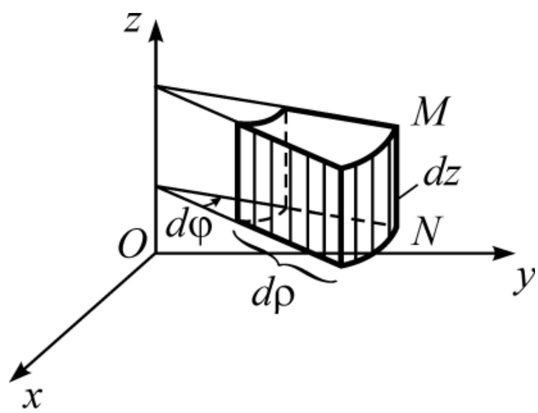


Рис. 21.6.2. **Елемент об'єму в циліндричних координатах**

Сферичним координатами точки $M(x, y, z)$ простору $xOyz$ називаються числа ρ, φ, θ, де ρ – довжина радіуса-вектора $\overline{OM}$ точки M; φ – кут нахилу до осі Ox проекції $\overline{OM}$ на площину xOy; θ – кут відхилення радіуса-вектора точки M від площини xOy (рис. 21.6.3).

Сферичні координати ρ, φ, θ точки M пов'язані з її декартовими координатами x, y, z формулами:

$$x = \rho\cos\varphi\cos\theta,\ \ y = \rho\sin\varphi\cos\theta,\ \ z = \rho\sin\theta, \qquad (21.6.3)$$

де $0 \le \rho < +\infty$, $0 \le \varphi \le 2\pi$, $-\pi/2 \le \theta \le \pi/2$ (див. рис. 21.6.3).

Неважко переконатися у справедливості рівності $x^2 + y^2 + z^2 = \rho^2$. Наявність у рівняннях поверхонь, що описують тіло, виразу $x^2 + y^2 + z^2$ „підказує” перехід до сферичних координат.

Елемент об’єму $dv = dxdydz$ (рис. 21.6.4) у сферичних координатах описується так: $dv = \rho^2\cos\theta d\rho d\theta$, а **формула переходу** в ПТІ від декартових до сферичних координат має вигляд:

$$\iiint\limits_V f(x, y, z)dxdydz = \iiint\limits_{V_s} F(\rho, \varphi, \theta)\rho^2\cos\theta d\rho\, d\varphi\, d\theta, \qquad (21.6.4)$$

де V_s – область простору $\rho O\varphi\theta$, яка відповідає V в $xOyz$;

$F(\rho, \varphi, \theta) = f(\rho\cos\varphi\cos\theta, \rho\sin\varphi\cos\theta, \rho\sin\theta)$.

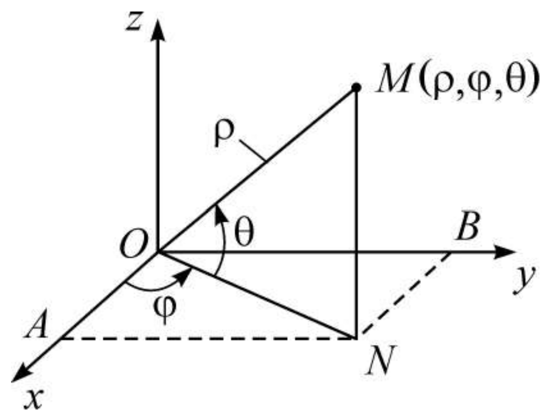


Рис. 21.6.3. **Сферичні координати ρ, φ, θ**

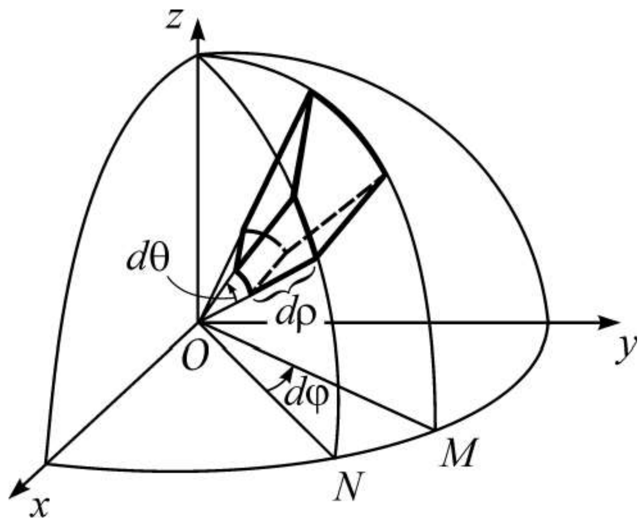


Рис. 21.6.4. **Елемент об’єму у сферичних координатах**

Приклад. Обчислити об’єм тіла V, обмеженого поверхнею, що описується рівнянням $(x^2 + y^2 + z^2)^2 = 16z$.

1^0. *Аналізуємо* рівняння заданої поверхні та *зображуємо* її.

Оскільки x і y входять у рівняння тільки у квадратах, то відповідне тіло симетричне відносно площин xOz та yOz. Далі, оскільки ліва частина завжди додатна, необхідно покласти і $z \ge 0$, тобто все тіло розташоване вище площини xOy. Це дозволяє обмежитись обчисленням об'єму чверті нашого тіла, яка лежить у першому октанті.

Рівняння межі області інтегрування можна подати у вигляді:

$$x^2+y^2+z^2=4\sqrt{z} \quad \text{або} \quad x^2+y^2=4\sqrt{z}-z^2,$$

а це означає, що лініями рівня поверхні (при $z=c-const$) є кола з центрами на осі Oz і радіусами $R=\sqrt{4\sqrt{c}-c^2}$. Саме ця обставина дозволяє встановити проекцію V_{xy} тіла на площину xOy: нею буде круг радіуса $\sqrt{3}$ з центром у початку координат – проекція перерізу тіла площиною $z=1$.

Узагалі „незнайому" поверхню досліджуємо методом перерізів. Накопичена інформація дає можливість зобразити схематично тіло V, яке нагадує „морську гальку" (рис. 21.6.5).

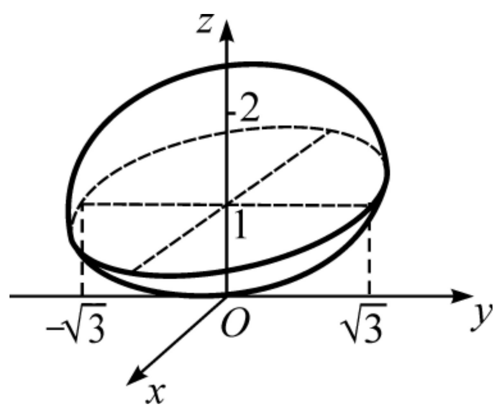


Рис. 21.6.5. **Область інтегрування – „морська галька"**

2^0. *Установлюємо* межі внутрішнього і зовнішнього інтегрування та *виписуємо* трикратний інтеграл.

Наявність у рівнянні поверхні виразу $x^2+y^2+z^2$ дає підстави для переходу до сферичних координат (див. (21.6.3)).

Подаємо рівняння поверхні в цих координатах:

$$(x^2+y^2+z^2)^2=16z \Rightarrow \left| \begin{array}{l} x^2+y^2+z^2=\rho^2 \\ z=\rho\sin\theta,\ 0\le\theta\le\pi/2 \end{array} \right| \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (\rho^2)^2=16\rho\sin\theta \Rightarrow \rho^3=16\sin\theta \Rightarrow \rho=\sqrt[3]{16\sin\theta}, \qquad (21.6.5)$$

і разом із тим отримуємо межі внутрішнього інтегрування за змінною ρ: $0\le\rho\le\sqrt[3]{16\sin\theta}$.

Межі інтегрування визначає теоретико-множинний опис чверті області V (з урахуванням симетрії тіла):

$$V=\left\{(\rho,\varphi,\theta)\,|\,0\le\varphi\le\pi/2,\ 0\le\theta\le\pi/2,\ 0\le\rho\le\sqrt[3]{16\sin\theta}\right\}.$$

Зважаючи на (21.6.3), виписуємо трикратний інтеграл:

$$V=\iiint\limits_{V} dv = \iiint\limits_{V_S} \rho^2 \cos\theta \, d\rho d\varphi d\theta = 4\int\limits_0^{\pi/2} d\varphi \int\limits_0^{\pi/2} d\theta \int\limits_0^{\sqrt[3]{16\sin\theta}} \rho^2 \cos\theta \, d\rho .$$

3^0. *Обчислюємо* трикратний інтеграл „ланцюжком”, починаючи з зовнішнього ВІ, і разом зінтегруємо за змінною ρ:

$$V = 4\int\limits_0^{\pi/2} d\varphi \int\limits_0^{\pi/2} d\theta \int\limits_0^{\sqrt[3]{16\sin\theta}} \rho^2 \cos\theta \, d\rho = 4\varphi\Big|_0^{\pi/2} \cdot \int\limits_0^{\pi/2} \cos\theta \, d\theta \cdot \frac{\rho^3}{3}\Big|_0^{\sqrt[3]{16\sin\theta}} =$$

$$= \frac{32\pi}{3}\int\limits_0^{\pi/2} \sin\theta\cos\theta \, d\theta = \frac{32\pi}{3}\left(-\frac{1}{4}\cos 2\theta\right)\Big|_0^{\pi/2} = \frac{16}{3}\pi \text{ (куб. од.).} \ \bullet$$

21.7. Застосування потрійного інтеграла

Матеріал цього пункту будемо викладати в довідковому варіанті, не удаючись до детального розгляду, спираючись на вже розглянутий матеріал, зокрема, на застосування ПДІ.

На геометричному смислі ПТІ базується **обчислення об’ємів просторових тіл**, а саме, якщо тіло V є правильною просторовою областю, то його об’єм обчислюється за формулою (21.5.4):

$$V = \iiint\limits_{V} dv = \iiint\limits_{V} dx\, dy\, dz .$$

У разі неправильної області, тіло розбивають на частини, які задовольняють умови правильної області, і залучають, при нагоді, циліндричні або сферичні координати.

Обчислення маси тіла. Якщо густина розподілу мас $\mu = \mu(x, y, z)$ просторового тіла V є неперервною функцією, то його маса (згідно з фізичним смислом ПТІ) визначається за формулою (21.5.5):

$$m = \iiint\limits_{V} \mu(x, y, z)\, dx\, dy\, dz .$$

Інші фізичні характеристики тіла V визначаються через масу, тому цей інтеграл або його підінтегральна функція входять як складові частини до формул, за якими ці характеристики обчислюються.

Означення і формули для обчислення **статичних моментів тіла відносно координатних площин** отримаємо, міркуючи так само, як і у двовимірному випадку:

$$M_{xy} = \iiint\limits_V z \cdot \mu(x, y, z)dv,\ M_{yz} = \iiint\limits_V x \cdot \mu(x, y, z)dv,$$
$$M_{xz} = \iiint\limits_V y \cdot \mu(x, y, z)dv \qquad (21.7.1)$$

Координати центра тяжіння визначаються за допомогою співвідношень, аналогічних формулам (21.4.7), а саме:

$$x_C = \frac{M_{yz}}{m}, \quad y_C = \frac{M_{xz}}{m}, \quad z_C = \frac{M_{xy}}{m}. \qquad (21.7.2)$$

Формули (21.7.2) легко подати у розгорнутому вигляді – через інтеграли.

Серед моментів інерції розрізняють:

моменти інерції відносно координатних осей:

$$J_x = \iiint\limits_V (y^2 + z^2) \cdot \mu(x, y, z)dv,\ J_y = \iiint\limits_V (x^2 + z^2) \cdot \mu(x, y, z)dv,$$
$$J_z = \iiint\limits_V (x^2 + y^2) \cdot \mu(x, y, z)dv; \qquad (21.7.3)$$

моменти інерції відносно координатних площин:

$$J_{xy} = \iiint\limits_V z^2 \cdot \mu(x, y, z)dv,\ J_{yz} = \iiint\limits_V x^2 \cdot \mu(x, y, z)dv,$$
$$J_{zx} = \iiint\limits_V y^2 \cdot \mu(x, y, z)dv; \qquad (21.7.4)$$

полярний момент інерції:

$$J_0 = J_{xy} + J_{yz} + J_{xz} = \iiint\limits_V (x^2 + y^2 + z^2) \cdot \mu(x, y, z)dv. \qquad (21.7.5)$$

Розрахункові формули (21.7.1) – (21.7.5) значно спрощуються, якщо густина $\mu = \mu(x, y, z) = const \ \ \forall (x, y, z) \in V$; при $\mu \equiv 1$ маса тіла чисельно дорівнює його об'ємові і тоді про статичні моменти та моменти інерції говорять як про характеристики не фізичного тіла, а просторової геометричної фігури.

Приклад. Знайти об'єм, статичні моменти і координати центра тяжіння геометричної фігури, обмеженої поверхнями: $x^2+z^2=1$, $x+y-4=0$, $y=0$ (див. приклад п. 21.4 з рис. 21.4.1).

Спроектуємо циліндричне тіло не на площину xOz, а на площину xOy (рис. 21.7.1) і будемо брати відповідні ПТІ в декартових, а не в циліндричних координатах.

1^0. *Покладемо* в розрахункових формулах $\mu(x,y,z)\equiv 1$ і *обчислимо* об'єм тіла. Звичайно, можна знайти всі характеристики, крім об'єму, за допомогою ПТІ в циліндричних координатах, порівняти результати і зробити висновок, який підхід виявився менш обтяжливим у технічному плані та більше сподобався.

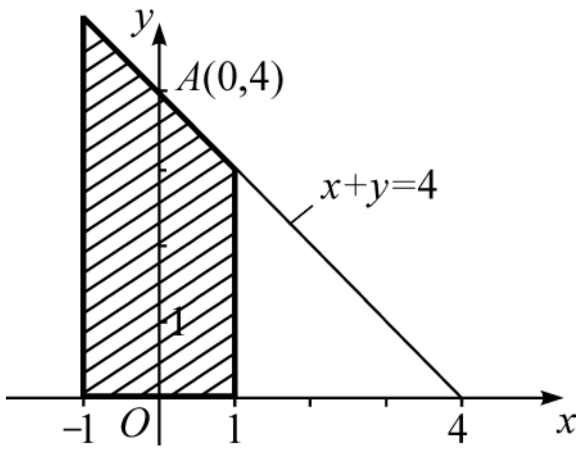


Рис. 21.7.1. **Проекція циліндричного тіла на площину xOy**

Згідно з рис. 21.7.1 та вихідними даними подаємо в символах область інтегрування, виписуємо трикратний інтеграл і обчислюємо його:

$$\left|\begin{array}{c} x^2+z^2=1 \\ x+y=4 \\ y=0 \end{array}\right| \Rightarrow \left[\begin{array}{l} z=h(x,y)=-\sqrt{1-x^2}, \quad z=H(x,y)=\sqrt{1-x^2} \\ V_{xy}=D=\{(x,y)\,|\,-1\le x\le 1,\ 0\le y\le 4-x\} \end{array}\right. \Rightarrow$$

$$V=\iiint\limits_V dx\,dy\,dz=\int\limits_{-1}^{1}dx\int\limits_{0}^{4-x}dy\int\limits_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}}dz=\int\limits_{-1}^{1}dx\int\limits_{0}^{4-x}dy\, z\Big|_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}}=$$

$$=2\int\limits_{-1}^{1}\sqrt{1-x^2}\,dx\int\limits_{0}^{4-x}dy=2\int\limits_{-1}^{1}(4-x)\sqrt{1-x^2}\,dx=\left|\begin{array}{l} x=\sin t \Rightarrow t=\arcsin x \\ dx=\cos t\,dt,\ t\in[-\pi/2,\pi/2] \end{array}\right|=$$

$$=2\int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2}(4-\sin t)\cos^2 t\,dt=2\int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2}\left[2(1+\cos 2t)dt+\int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2}\cos^2 t\,d(\cos t)\right]=$$

$$=2\left[\left(2t+\sin 2t\right)+\frac{\cos^3 t}{3}\right]\Bigg|_{-\pi/2}^{\pi/2}=4\pi$$

(результат співпадає з раніше знайденим $V=4\pi$ (куб. од.)).

2^0. *Знаходимо* статичні моменти M_{xy}, M_{yz}, M_{xz} і *підраховуємо* координати центра тяжіння:

$$M_{xy}=\iiint\limits_V z\,dxdydz=\int\limits_{-1}^{1}dx\int\limits_{0}^{4-x}dy\int\limits_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}}zdz=\int\limits_{-1}^{1}dx\int\limits_{0}^{4-x}dy\,\frac{z^2}{2}\Bigg|_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}}=0.$$

Аналогічним чином отримуємо:

$$M_{yz}=\iiint\limits_V x\,dxdydz=-\frac{\pi}{4},\qquad M_{xz}=\iiint\limits_V y\,dxdydz=\frac{65}{8}\pi.$$

Отже, маємо:

$$x_c=\frac{M_{yz}}{V}=-\frac{1}{16},\quad y_c=\frac{M_{xz}}{V}=\frac{65}{32},\quad z_c=\frac{M_{xy}}{V}=0.$$

Остаточно:

$$V=4\pi,\ M_{xy}=0,\ M_{yz}=-\frac{\pi}{4},\ M_{zx}=\frac{65}{8}\pi,$$

$$\left(x_c,y_c,z_c\right)=\left(-1/16,\,65/32,\,0\right).\ \bullet$$

Обчислення моментів інерції просторових тіл не викликає принципових труднощів, але відповідні формули, що включають в себе ПТІ, більш складні. Це викликає утруднення в плані вираховування інтегралів, і тому виникає потреба в більш глибокому і детальному аналізі підінтегрального виразу з метою знайти ефективний підхід до реалізації інтегрування.

Окрім розглянутих застосувань ПТІ, які, так би мовити, „навпрямки" випливають із геометричного і фізичного смислів ПТІ, існують інші, пов'язані з аналізом полів різноманітної природи: електричних, магнітних, електромагнітних, гідромеханічних, теплових, інформаційних тощо.

Запитання для самодіагностики засвоєння матеріалу

Відповіді на всі запитання сформулюйте словесно, запишіть у символічній формі, обґрунтуйте (на підставі означень, теорем, правил, формул тощо), наведіть відповідні конкретні приклади.

1. Які дії передують означенню подвійного інтеграла?
2. Що називають подвійним інтегралом у декартових координатах?
3. Як формулюється теорема існування подвійного інтеграла?
4. У чому полягає геометричний та фізичний смисл подвійного інтеграла?
5. Якими основними властивостями володіє подвійний інтеграл?
6. Які області називаються правильними у напрямі осі: Ox, Oy (наведіть відповідні символічні зображення)?
7. За якими формулами обчислюються подвійні інтеграли по правильним областям інтегрування?
8. Чим принципово відрізняються означення подвійного інтеграла в декартових і полярних координатах?
9. У яких випадках доцільно здійснювати перехід у подвійному інтегралі до полярних координат?
10. Як здійснюється перехід у подвійному інтегралі від декартових координат до полярних?
11. У чому полягає метод заміни змінної у подвійному інтегралі?
12. Які геометричні та фізичні застосування подвійного інтеграла ви знаєте?
13. Які дії передують означенню потрійного інтеграла?
14. Що називають потрійним інтегралом у декартових координатах?
15. Як формулюється теорема існування потрійного інтеграла?
16. У чому полягає геометричний та фізичний смисл потрійного інтеграла?
17. Якими основними властивостями володіє потрійний інтеграл?
18. Які просторові області називаються правильними у напрямі осей координат: Ox, Oy, Oz (наведіть відповідні символічні зображення)?
19. За якими формулами обчислюють потрійні інтеграли з правильною областю інтегрування?
20. Яку просторову систему координат називають циліндричною, сферичною?

21. За якими формулами здійснюється перехід у потрійному інтегралі від декартових координат до циліндричних, до сферичних?

22. Які геометричні та фізичні застосування потрійного інтеграла ви знаєте?

23. За якої умови об'єм області інтегрування потрійний інтеграл і його значення однакові за величиною?

Задачі та вправи

Розв'язування всіх задач і виконання вправ слід супроводжувати геометричними ілюстраціями.

1. Установити межі інтегрування по області D функції $z = f(x, y)$ та подати ПДІ у вигляді повторних інтегралів або їхньої суми:

1) D: $x = -1,\ x = 2,\ y = 2,\ y = 4$;

2) D: $y = 0,\ y = 1 - x^2$;

3) D: $x^2 + y^2 = a^2$;

4) D: $y = x^2,\ y = \dfrac{2}{1 + x^2}$;

5) D: $y = 0,\ y = a,\ y = x,\ x - y = 2a$.

2. Установити область інтегрування та обчислити задані повторні інтеграли:

1) $\int\limits_0^1 dx \int\limits_1^2 (x^2 + y^2) dy$;

2) $\int\limits_1^2 dx \int\limits_x^{\sqrt{3} \cdot x} xy dy$;

3) $\int\limits_3^4 dy \int\limits_1^2 (x + y)^{-2} dx$;

4) $\int\limits_0^a dx \int\limits_{y-a}^{2y} xy\, dy$;

5) $\int\limits_0^a dy \int\limits_{x/a}^{x} \dfrac{x}{x^2 + y^2} dx$;

6) $\int\limits_0^1 dy \int\limits_{1-y}^{\sqrt{1-y^2}} dx$.

3. Змінити порядок інтегрування в заданих ПДІ:

1) $\int\limits_1^2 \int\limits_3^4 f(x, y) dy dx$;

2) $\int\limits_0^1 \int\limits_{x^3}^{\sqrt{x}} f(x, y) dy dx$;

3) $\int\limits_{-1}^{1}\int\limits_{0}^{\sqrt{1-x^2}} f(x,y)dydx$; 4) $\int\limits_{0}^{a}\int\limits_{0}^{\sqrt{y(2a-y)}} f(x,y)dxdy$;

5) $\int\limits_{0}^{1}\int\limits_{-\sqrt{1-y^2}}^{1-y} f(x,y)dxdy$; 6) $\int\limits_{0}^{2\pi}\int\limits_{0}^{\sin x} f(x,y)dxdy$.

4. Обчислити ПДІ, здійснюючи перехід до полярних координат:

1) $\int\limits_{0}^{a}\int\limits_{0}^{\sqrt{a^2-x^2}} \sqrt{a^2-x^2-y^2}dydx$; 2) $\int\limits_{0}^{a}\int\limits_{0}^{\sqrt{a^2-y^2}} (x^2+y^2)dxdy$;

3) $\int\limits_{0}^{\infty}\int\limits_{0}^{\infty} e^{-(x^2+y^2)}dydx$; 4) $\int\limits_{0}^{2a}\int\limits_{0}^{\sqrt{x(2a-x)}} dydx$.

5. Обчислити ПДІ, здійснивши заміну змінних так, щоб область інтегрування перетворилася на прямокутник:

1) $I=\int\limits_{0}^{e}\int\limits_{\alpha x}^{\beta x} x^3y^2dydx$;

2) $I=\iint\limits_{D} dxdy$, $D: xy=a^2,\ xy=2a^2,\ y=x,\ y=2x\ \left(x>0,\ y>0\right)$;

3) $I=\iint\limits_{D}\dfrac{dxdy}{\sqrt{x^2+y}}$, $D: y+x^2=1,\ y+x^2=2,\ y=x^2,\ y=4x^2\ \left(x>0\right)$.

6. Обчислити площу S фігури-області D, обмеженої лініями (лінією):

1) D: $y^2=2x,\ y=x$;

2) D: $y^2=4ax,\ y+x=3a,\ y=0$;

3) D: $\sqrt{y}+\sqrt{x}=\sqrt{a},\ y+x=a$;

4) D: $y=\sin x,\ y=\cos x,\ x=0$;

5) D: $\rho=a\sin 2\varphi$;

6) D: $\rho^2=a^2\cos 2\varphi$;

7) D: $(x^2/a^2+y^2/b^2)^2=2xy/c^2$.

7. Обчислити об’єм V тіла, обмеженого поверхнями S:

1) $S: \frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1$, $x=0$, $y=0$, $z=0$;

2) $S: x+y+z=3$, $x^2+y^2=1$, $z=0$;

3) $S: xy=z$, $(x-1)^2+(y-1)^2=1$, $z=0$;

4) $S: x^2+y^2=z^2$, $x^2+y^2-2ax=0$, $z=0$;

5) $S: y=x^2$, $x=y^2$, $z=12+y-x^2$, $z=0$;

6) $S: x^2+y^2=a^2$, $x/a+z/c=1$, $x=0$, $y=0$, $z=0$;

7) $S: x^2+y^2=a^2$, $x^2+z^2=a^2$;

8) $S: y^2+z^2=x$, $x=y$, $z=0$;

9) $S: x^2+y^2+z^2=a^2$, $x^2+y^2=R^2$ $(a>R)$;

10) $S: x^2+y^2=az$, $x^2+y^2=2ax$, $z=0$;

11) S: $\rho^2=a^2\cos 2\varphi$, $x^2+y^2+z^2=a^2$, $z=0$. (Розглянути тіло, що визначається внутрішністю циліндра.)

8. Обчислити площу куска поверхні S, який визначається (обмежується) поверхнями S_0:

1) $S: x^2+y^2=z^2$; S_0: $x^2+y^2=2ax$;

2) $S: x+y+z=2a$; S_0: $x^2+y^2=a^2$ $(x\ge 0, y\ge 0, z\ge 0)$;

3) $S: x^2+y^2+z^2=a^2$; S_0: $z=b$ $(a>b, z>b>0)$;

4) $S: x^2+y^2+z^2=a^2$; S_0: $x^2/a^2+y^2/b^2=1$ $(a>b)$;

5) $S: S: x^2+y^2=2ax$; S_0: $x^2+y^2=z^2$, $z=0$;

6) $S: x^2+y^2=a^2$; S_0: $z=mx$, $z=0$ $(m>0)$;

7) $S: y^2+z^2=2ax$; S_0: $y^2=ax$, $x=a$.

9. Знайти координати центра тяжіння, вважаючи поверхневу густину сталою і рівною одиниці:

1) рівностороннього трикутника зі стороною a, одна з вершин якого є початком координат, а висота лежить на осі Ox;

2) кругового сектора радіуса a, з бісектрисою на осі Ox і центральним кутом 2α;

3) нижньої половини круга $x^2 + y^2 = a^2$;

4) фігури, обмеженої віссю Ox та аркою циклоїди $x = a(t - \sin t)$, $y = a(1 - \cos t)$;

5) фігури, обмеженої петлею $\rho^2 = a^2 \cos 2\varphi$;

6) фігури, обмеженої кардіоїдою $\rho = a(1 + \cos\varphi)$.

10. Обчислити момент інерції:

1) фігури, обмеженої еліпсом $x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$, відносно осі Oy і початку координат;

2) фігури, обмеженої кардіоїдою $\rho = a(1 - \cos\varphi)$, відносно полюса;

3) круга $\rho = 2a\cos\varphi$ відносно полюса;

4) круга $(x-a)^2 + (y-b)^2 = 2a^2$ відносно осі Oy;

5) фігури, обмеженої параболою $y^2 = ax$ і прямою $x = a$, відносно прямої $y = -a$.

11. Обчислити наведені потрійні інтеграли по просторовій області, обмеженій заданими поверхнями:

1) $\iiint\limits_V \frac{dxdydz}{(x+y+z+1)^2}$, де V: $x+y+z=1$, $x=0$, $y=0$, $z=0$;

2) $\iiint\limits_V y\cos(x+z)dxdydz$, де V: $y=\sqrt{x}$, $y=0$, $z=0$, $x+z=\pi/2$;

3) $\iiint\limits_V xdxdydz$, де V: $x^2+y^2=1$, $z=0$, $z=3$;

4) $\iiint\limits_V \frac{dxdydz}{\sqrt{z}}$, де V: $z=x^2+y^2$, $z=1$;

5) $\iiint\limits_V xyzdxdydz$, де V: $y=x^2$, $x=y^2$, $z=xy$, $z=0$;

6) $\iiint\limits_V zdxdydz$, де V: $z=\sqrt{4-x^2-y^2}$, $z=0$;

7) $\iiint\limits_V xy^2z^3dxdydz$, де V: $z=xy$, $y=x$, $x=1$, $z=0$;

8) $\iiint\limits_V dxdydz$, де V: $x^2+y^2+z^2=2Rz$ $(R>0)$, $x^2+y^2-z^2=0$ $((0,0,R)\in V)$.

12. Обчислити об’єм тіла, обмеженого сферою $x^2+y^2+z^2=4$ і параболоїдом $x^2+y^2=3z$.

13. Знайти координати центра тяжіння і моменти інерції піраміди, обмеженої площинами $x=0$, $y=0$, $z=0$, $x/a+y/b+z/c=1$.

14. Обчислити момент інерції кругового прямого конуса відносно його осі.

15. Обчислити момент інерції кругового прямого конуса відносно діаметра його основи.

16. Знайти об’єм тіла, обмеженого поверхнею $x^2+y^2+z^2=\sqrt{a^3x}$.

Відповіді

1. 1) $\int\limits_{-1}^{2}dx\int\limits_{2}^{4}z\,dy$ або $\int\limits_{2}^{4}dy\int\limits_{-1}^{2}z\,dx$;

2) $\int\limits_{-1}^{1}dx\int\limits_{0}^{1-x^2}z\,dy$ або $\int\limits_{0}^{1}dy\int\limits_{-\sqrt{1-y}}^{\sqrt{1-y}}z\,dx$;

3) $\int\limits_{-a}^{a}dx\int\limits_{-\sqrt{a^2-x^2}}^{\sqrt{a^2-x^2}}z\,dy$ або $\int\limits_{-a}^{a}dy\int\limits_{-\sqrt{a^2-y^2}}^{\sqrt{a^2-y^2}}zdx$;

4) $\int\limits_{-1}^{1}dx\int\limits_{x^2}^{2/(1+x^2)}z\,dy$ або $\int\limits_{0}^{1}dy\int\limits_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}}z\,dx+\int\limits_{1}^{2}dy\int\limits_{-\sqrt{2/y-1}}^{\sqrt{2/y-1}}z\,dx$;

5) $\int\limits_{0}^{a}dy\int\limits_{y}^{y+2a}z\,dx$ або $\int\limits_{0}^{a}dx\int\limits_{0}^{x}z\,dy+\int\limits_{a}^{2a}dx\int\limits_{0}^{a}z\,dy+\int\limits_{2a}^{3a}dx\int\limits_{x-2a}^{a}z\,dy$.

2. 1) $\frac{8}{3}$; 2) $\frac{15}{4}$; 3) $\ln\frac{25}{24}$; 4) $\frac{11}{24}a^4$;

5) $\frac{\pi a}{4}-a\cdot arctg\,\frac{1}{a}$; 6) $\frac{1}{4}(\pi-2)$.

3. 1) $\int_3^4\int_1^2 f(x,y)dxdy$; 2) $\int_0^1\int_{y^2}^{\sqrt[3]{y}} f(x,y)dxdy$;

3) $\int_0^1\int_{-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}} f(x,y)dxdy$; 4) $\int_0^a\int_{a-\sqrt{a^2-x^2}}^{a} f(x,y)dydx$;

5) $\int_{-1}^{0}\int_0^{\sqrt{1-x^2}} f(x,y)dydx+\int_0^1\int_0^{1-x} f(x,y)dydx$;

6) $\int_0^1 dy\int_{\arcsin y}^{\pi-\arcsin y} f(x,y)dx+\int_{-1}^{0} dy\int_{\pi-\arcsin y}^{2\pi+\arcsin y} f(x,y)dx$.

4. 1) $\int_0^{\pi/2}\int_a^0\sqrt{a^2-\rho^2}\rho d\rho d\varphi=\frac{\pi}{6}a^3$; 2) $\int_0^{\pi/2}\int_0^a\rho^3 d\rho d\varphi=\frac{\pi}{8}a^4$;

3) $\int_0^{\pi/2}\int_a^{\infty}e^{-\rho^2}\rho d\rho d\varphi=\frac{\pi}{4}$; 4) $\int_0^{\pi/2}\int_0^{2a\cos\varphi}\rho d\rho d\varphi=\frac{\pi}{2}a^2$.

5. 1) $x=u$, $y=uv$; $I=\frac{1}{21}(\beta^3-\alpha^3)$;

2) $y=ux$, $xy=v$; $I=\frac{a^2}{2}\ln 2$;

3) $y=-x^2+u$, $y=vx^2$; $I=\frac{2}{3}\left(\frac{\sqrt{5}}{25}-\frac{\sqrt{2}}{4}\right)-\frac{3}{10}+\ln\frac{5}{2}$.

6. 1) $S=2/3$; 2) $S=10a^2/3$;

3) $S=a^2/3$; 4) $S=\sqrt{2}-1$;

5) $S=\pi a^2/8$; 6) $S=a^2$;

7) $S=a^2b^2/c^2$.

7. 1) $V = abc/6$; 2) $V = 3\pi$;

3) $V = \pi$; 4) $V = 32a^3/9$;

5) $V = 569/140$; 6) $V = a^3(\pi/4 - 1/3)$;

7) $V = 16a^3/3$; 8) $V = \pi/64$;

9) $V = 4\pi/3 \cdot [a^3 - (\sqrt{a^2 - R^2})^3]$; 10) $V = 3\pi a^3/2$;

11) $V = a^3/9 \cdot (3\pi + 20 - 16\sqrt{2})$.

8. 1) $S = 2\pi a^2 \sqrt{2}$; 2) $S = \pi a^2 \sqrt{3}/4$;

3) $S = 2\pi\left(a^2 - a\sqrt{a^2 - b^2}\right)$;

4) $S = 4\pi a^2 - 8a^2 \arcsin\left(\sqrt{a^2 - b^2}/a\right)$;

5) $S = 8a^2$; 6) $S = 2ma^2$;

7) $S = \pi a^2(\sqrt{3} - 1/3)$.

9. 1) $x_c = a\sqrt{3}/3$, $y_c = 0$; 2) $x_c = 2a\sin\alpha/3\alpha$, $y_c = 0$;

3) $x_c = 0$, $y_c = -4a/3\pi$; 4) $x_c = a\pi$, $y_c = 5a/6$;

5) $x_c = \pi a\sqrt{2}/8$, $y_c = 0$; 6) $x_c = 5a/6$, $y_c = 0$.

10. 1) $I_y = \pi a^2 b/4$, $I_o = \pi ab\left(a^2 + b^2\right)/4$;

2) $I_o = 35\pi a^4/16$; 3) $I_o = 3\pi a^4/2$;

4) $I_y = 3\pi a^4$; 5) $I = 8a^4/5$.

11. 1) $\ln 2/2 - 5/16$; 2) $\frac{1}{16}(\pi^2 - 8)$;

3) 0; 4) $2\pi/3$;

5) $1/96$; 6) 4π;

7) $1/364$; 8) πR^3.

12. $I = 19\pi/6$.

13. $(x_c, y_c, z_c) = \left(\frac{a}{4}, \frac{b}{4}, \frac{c}{4}\right)$, $I_x = \frac{a^3bc}{60}$, $I_y = \frac{b^3ac}{60}$, $I_z = \frac{c^3ab}{60}$, $I_o = \frac{abc(a^2+b^2+c^2)}{60}$.

14. $I = \frac{\pi h r^4}{10}$, h – висота, r – радіус основи конуса.

15. $I = \frac{\pi h r^2(2h^2+3r^2)}{60}$.

16. $I = \pi a^3 / 3$.

Ключові терміни

Область, розбиття, діаметр розбиття, інтегральна сума, границя, подвійний інтеграл, потрійний інтеграл, теорема існування, циліндричне тіло, геометричний смисл, фізичний смисл, повторний інтеграл, заміна змінних, якобіан, циліндричні координати, сферичні координати, площа, об'єм, маса, статичний момент, момент інерції, центр мас.

Резюме

Розглядаються основні положення інтегрального числення функцій двох і трьох змінних. Висвітлено: означення основних понять; геометричний і фізичний смисл подвійного і потрійного інтеграла; отримання розрахункових формул – формул переходу до повторних інтегралів – для обчислення інтегралів від функцій двох і трьох змінних; метод заміни змінних; перехід до циліндричних і сферичних координат у потрійному інтегралі; обчислення площі і маси плоскої фігури, об'єму просторового тіла, статичних моментів і моментів інерції плоских фігур і тіл. Виклад теоретичного матеріалу супроводжується ілюстративними прикладами.

Література: [3; 4; 6; 8; 13; 14; 28 – 30; 34].

22. Криволінійні інтеграли (КРІ)

Глибока думка дає відповідь, але ніхто не знає, як поставити запитання таким чином, щоб відповідь могла б бути зрозуміла.

Дуглас Адамс

Головна сила математики полягає в тому, що разом з розв'язанням однієї конкретної задачі вона створює загальні прийоми і способи, застосовні в багатьох ситуаціях, які навіть не завжди можна передбачити.

М. Башмаков

Мета: розширити кругозір майбутніх фахівців щодо операції інтегрування функцій кількох змінних; навчити володіти технікою інтегрування функцій від двох і трьох змінних на областях, які є множиною точок плоскої або просторової кривої, для різних форм завдання підінтегральної функції: параметричної, явної, у полярних координатах, і застосовувати теоретичні знання для розв'язання задач практичного змісту.

Питання теми:

22.1. Криволінійний інтеграл за довжиною дуги (1-го роду) – КРІ-1.
22.2. Застосування криволінійного інтеграла 1-го роду.
22.3. Криволінійний інтеграл за координатами (2-го роду) – КРІ-2.
22.4. Застосування криволінійного інтеграла 2-го роду.
22.5. Поняття про поверхневі інтеграли.

Компетентності, що формуються після вивчення теми:

Загальнонаукова: володіння основами узагальнення інтегрального числення функцій однієї змінної на випадок функцій двох і трьох змінних, і підготовленість до розв'язання застосовних задач.

Загальнопрофесійна: уміння використовувати засоби інтегрального числення в задачах комп'ютерних наук до аналізу числових характеристик різноманітних явищ і процесів, зокрема, випадкових.

Спеціалізовано-професійна: впровадження криволінійних інтегралів 1-го і 2-го роду в моделювання управління інформаційними системами і, разом із тим, давати кількісну порівняльну оцінку обчислювальних процесів та процесів перетворення інформації.

22.1. Криволінійний інтеграл за довжиною дуги (1-го роду) – КРІ-1

КРІ-1: означення, теорема існування, основні властивості

Поняття „криволінійний інтеграл” є узагальненням, як і ПДІ, поняття „визначений інтеграл” на випадок, коли область інтегрування – не відрізок осі Ox, а дуга кривої на площині xOy (або у просторі $xOyz$).

Нехай $\breve{AB}$ (або просто AB) – дуга неперервної кривої L на площині xOy, а $z = f(x, y)$, або $z = f(M)$, де $M(x, y) \in xOy$, – визначена на AB функція.

Проробимо наступне (аналогічне тому, що ми робили при розгляді визначеного, подвійного і потрійного інтегралів):

– *розіб'ємо* дугу AB довільним чином на n частинних дуг із довжинами Δl_i, $i = \overline{1, n}$ (або просто – на дужечки Δl_i), і найбільшу з довжин дужечок $\lambda = \max\limits_i \{\Delta l_i\}$ назвемо **діаметром розбиття** дуги AB на частини, (рис. 22.1.1);

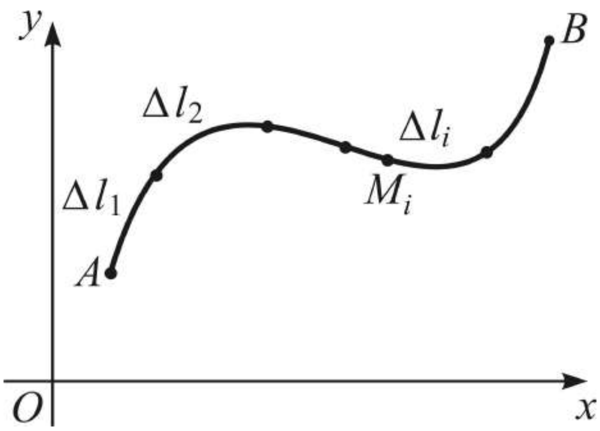


Рис. 22.1.1. **Розбиття дуги на дужечки**

– *виберемо* на кожній із дужечок довільним чином по точці $M_i(\xi_i, \eta_i)$, $i = \overline{1, n}$, обчислимо $f(M_i)$ і знайдемо добутки $f(M_i) \cdot \Delta l_i$;

– *складемо суму* всіх таких добутків

$$I_n = \sum_{i=1}^{n} f(M_i) \cdot \Delta l_i , \qquad (22.1.1)$$

яку назвемо **інтегральною сумою для функції $f(x, y)$ на дузі AB**;

– *обчислимо* границю (якщо вона існує) інтегральної суми за умови, що діаметр розбиття λ прямує до нуля разом із $n \to \infty$.

Скінченна границя I інтегральної суми I_n, коли діаметр розбиття прямує до нуля $(\lambda \to 0)$, а $n \to \infty$, називається **криволінійним інтегралом від функції $f(x, y)$ за довжиною дуги AB у напрямі від A до B** або **криволінійним інтегралом першого роду** (**КРІ-1**), і позначається символом:

$$\int\limits_{AB} f(x,y)dl, \quad \text{або} \quad \int\limits_{(A)}^{(B)} f(x,y)dl, \qquad (22.1.2)$$

де $\int$ – знак (символ) КРІ-1;

AB – шлях інтегрування;

(A), (B) – межі інтегрування (A, B беруться в дужки, бо це не числа, як у визначеному інтегралі, а кінцеві точки дуги AB);

$f(x,y)$ – підінтегральна функція;

$f(x,y)\,dl$ – підінтегральний вираз;

dl – диференціал дуги (диференціал змінної інтегрування l).

Отже, за означенням:

$$I = \lim_{\substack{\lambda\to 0\\(n\to\infty)}} I_n = \lim_{\substack{\lambda\to 0\\(n\to\infty)}} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i,\eta_i)\Delta l_i = \int\limits_{AB} f(x,y)dl = \int\limits_{(A)}^{(B)} f(x,y)dl. \qquad (22.1.3)$$

Наведене означення КРІ-1 залишається в силі у випадку, коли точки A, B співпадають, тобто AB – зімкнена лінія Γ.

Замість словосполучення „*за довжиною дуги* AB” вживають інше – „*по дузі* AB”.

Після означення поняття природно постає питання: які умови повинні задовольняти підінтегральні функції та функції, що описують шляхи інтегрування, щоб інтегральні суми мали скінченні границі, тобто щоб існували відповідні КРІ-1?

У застосовних задачах рівняння кривої L, по дузі якої береться КРІ, чи контур Γ, як правило, подають у параметричній формі: $x = x(t)$, $y = y(t)$, $t_1 \le t \le t_2$ (явно задану функцію $y = y(x)$ завжди можна представити в параметричній формі: $x = t$, $y = y(t)$). Якщо функції $x(t)$, $y(t)$ неперервно диференційовні на інтервалі (t_1, t_2), то відповідна крива називається **гла́дкою**. Криву називають **кусково-гладкою**, якщо її можна розбити на скінченне число гладких дуг.

Відповідь на поставлене запитання дає теорема існування.

Теорема 22.1.1 (*існування КРІ за довжиною дуги*). Якщо:

− дуга AB кусково-гладка;

− функція $z = f(x,y)$ неперервна на AB, то КРІ-1 $\int\limits_{AB} f(x,y)dl$ існує (тобто існує скінченна границя інтегральної суми і вона – границя – не залежать ні від способу розбиття AB на частини, ні від вибору точок на них для складання інтегральної суми).

Поняття КРІ-1 поширюється на випадок функції від трьох змінних: $u=f(x,y,z)$, тоді шляхом інтегрування є дуга (контур) просторової кривої $AB\subset xOyz$:

$$I=\int\limits_{AB} f(x,y,z)dl\ .$$

Геометричний і фізичний смисл КРІ-1

Якщо функція $z=f(x,y)\geq 0$ розглядається не на плоскій області D, як у подвійному інтегралі, а на лінії L, то цій лінії буде відповідати в свою чергу деяка лінія L_1 поверхні $f(x,y)$ (рис. 22.1.2).

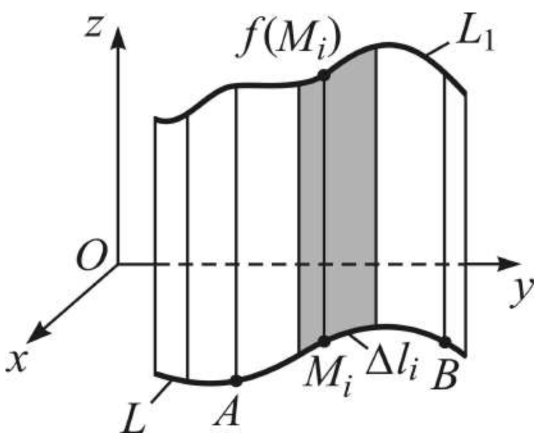


Рис. 22.1.2. **Геометричний смисл КРІ-1**

Кожний доданок інтегральної суми $f(M_i)\cdot\Delta l_i$ є наближеним значенням площі куска циліндричної поверхні, твірна якої паралельна осі Oz, а напрямною є дуга AB. Інтегральна сума $I_n=\sum\limits_{i=1}^{n} f(M_i)\cdot\Delta l_i$ визначає наближено площу всієї поверхні S_n на AB. Указане наближення тим краще, чим менше будуть Δl_i, тому природно покласти, що $S=\lim\limits_{\lambda\to 0} S_n$, і кажуть: *у геометричному смислі* КРІ-1 функції $f(x,y)\geq 0$ чисельно дорівнює площі циліндричної поверхні з твірною, паралельною осі Oz, і напрямною AB, яка розташована між площиною xOy і поверхнею $z=f(x,y)$:

$$S=\int\limits_{(A)}^{(B)} f(x,y)dl \qquad (22.1.4)$$

– **формула площі циліндричної поверхні для $f(x,y)$ на AB**.

У окремому випадку: $f(x, y) = 1$, із (22.1.4) отримуємо формулу довжини дуги AB:

$$l = \int\limits_{(A)}^{(B)} dl. \tag{22.1.5}$$

Нехай L – матеріальна крива, а функція $z = f(x, y)$ визначає в кожній точці (x, y) її лінійну густину: $\sigma = \sigma(x, y)$, тоді інтегральна сума $I_n = \sum\limits_{i=1}^{n} \sigma(M_i) \cdot \Delta l_i$ на AB дає наближено масу дуги m_n, а КРІ-1 приймають за її істинне значення і кажуть: *у фізичному смислі* криволінійний інтеграл першого роду чисельно дорівнює масі m дуги AB з густиною $\sigma(x, y)$:

$$m = \int\limits_{(A)}^{(B)} \sigma(x, y) dl. \tag{22.1.6}$$

Основні властивості КРІ за довжиною дуги

Аналіз інтегральних сум для КРІ-1 показує, що за структурою (будовою) вони нагадують інтегральні суми для визначених інтегралів, тому їхні властивості у більшості збігаються з властивостями визначеного інтеграла. Наведемо основні з них, які випливають безпосередньо з означення КРІ-1. Тут і надалі для стислості символічних записів аргументи підінтегральної функції або навіть самі функції будемо пропускати, якщо це не призводить до колізій.

1^0 (*про незміну знака*). При зміні напряму інтегрування КРІ-1 не змінює знак:

$$\int\limits_{(B)}^{(A)} = \int\limits_{(A)}^{(B)}. \tag{22.1.7}$$

2^0 (*про сталий множник*). Сталий множник виносять за знак КРІ-1:

$$\int\limits_{AB} k \cdot f \, dl = k \int\limits_{AB} f \, dl, \quad k - const. \tag{22.1.8}$$

3^0 (*про інтегрування суми*). КРІ-1 від суми двох функцій f_1, f_2 дорівнює сумі відповідних інтегралів від доданків:

$$\int_{AB} \left(f_1 + f_2 \right) dl = \int_{AB} f_1 \, dl + \int_{AB} f_2 \, dl . \qquad (22.1.9)$$

Властивості 2^0, 3^0 об'єднуються спільною назвою – властивість *лінійності* КРІ-1: для будь-яких дійсних k_1, k_2 і функцій $f_1(x,y)$, $f_2(x,y)$ справедлива рівність:

$$\int_{(A)}^{(B)} (k_1 f_1(x,y) + k_2 f_2(x,y))\, dl = k_1 \int_{(A)}^{(B)} f_1(x,y) dl + k_2 \int_{(A)}^{(B)} f_2(x,y) dl . \qquad (22.1.10)$$

4^0 (*адитивність*). Якщо дугу AB точкою C розбити на частини, то КРІ за довжиною AB дорівнює сумі інтегралів за довжинами її частин:

$$\int_{AB} = \int_{AC} + \int_{CB} , \quad C \in AB . \qquad (22.1.11)$$

Властивості 3^0, 4^0 мають місце для будь-якого скінченного числа доданків і частин розбиття.

Помічаємо, що властивості 2^0 – 4^0 аналогічні властивостям, якими володіють визначені інтеграли. Справедливість усіх властивостей базується на означенні КРІ-1 і на властивостях границі послідовностей стосовно інтегральних сум I_n.

Д о в е д е м о першу із них. Оскільки прирости Δl_i – довжини дужечок – додатні, то інтегральна сума I_n не зміниться від того, як її складати, рухаючись по дузі від A до B чи від B до A. В обох випадках відповідні границі будуть однакові. ■

Нагадаємо, що на відміну від КРІ-1 зміна порядку підсумовування доданків інтегральної суми для ВІ на зворотний приводить до зміни його знака. Ця обставина виявляється суттєвою при обчисленні КРІ-1.

Обчислення КРІ-1 зведенням до визначеного інтеграла

Будемо виходити з того, що всі розглядувані функції і шлях інтегрування задовольняють теорему існування КРІ-1. Висвітлення питання про обчислення КРІ-1 проведемо для різних форм завдання дуги AB і наведемо ілюстративні приклади на тлі одного інтеграла.

І. Параметричне завдання шляху інтегрування. Нехай дуга (крива) AB описується рівняннями $x = x(t)$, $y = y(t)$, де $x(t)$, $y(t)$ – функції параметра t, який змінюється в межах від $t = \alpha$ до $t = \beta$, і точці A (B) відповідає значення параметра, рівне α, β. Залежно від розташування точок A, B на xOy може бути $\alpha > \beta$ або $\alpha < \beta$.

Знайдемо диференціали змінних x, y:

$$dx = x_t' \, dt, \quad dy = y_t' \, dt, \tag{22.1.12}$$

тоді диференціал дуги набуде вигляду:

$$dl = \sqrt{dx^2 + dy^2} = \sqrt{(x_t')^2 + (y_t')^2} \, dt. \tag{22.1.13}$$

Диференціал dl при ненульових $dx = \Delta x$, $dy = \Delta y$ має бути додатним, тому у правій частині (22.1.13) додатним повинен бути і диференціал $dt = \Delta t$.

Здійснимо під знаком КРІ-1

$$I = \int_{(A)}^{(B)} f(x, y) dl$$

перехід до змінної t. Внаслідок цього підінтегральна функція стане функцією однієї змінної, і під знаком диференціала фігуруватиме змінна t, тобто приходимо до визначеного інтеграла.

Незважаючи на те, що точці A відповідає число α, а точці B – число β, межі інтегрування ВІ можуть бути не від α до β, а від β до α.

Якщо рухові по L від A до B відповідають додатні прирости змінної інтегрування: $\Delta t = dt > 0$, то ВІ береться на $[\alpha, \beta]$, у противному разі – на $[\beta, \alpha]$:

$$\int_{(A)}^{(B)} f(x, y) dl = \pm \int_{\alpha}^{\beta} f(x(t), y(t)) \sqrt{(x_t')^2 + (y_t')^2} \, dt, \tag{22.1.14}$$

де знак $+(-)$ береться, якщо $\alpha < \beta$ $(\alpha > \beta)$.

Формула (22.1.14) є **формулою зведення КРІ-1 до визначеного інтеграла**. Вигляд цієї формули підказує послідовність переходу від КРІ до визначеного інтеграла; цей перехід, власне, і описано.

Висновок: при зведенні КРІ-1 до визначеного інтеграла нижня межа інтегрування у ВІ повинна бути завжди менше верхньої.

Аналогічно обчислюються інтеграли для функцій від трьох змінних за довжиною просторової дуги (кривої) $x = x(t)$, $y = y(t)$, $z = z(t)$:

$$\int\limits_{(A)}^{(B)} f(x, y, z)\, dl = \pm\int\limits_{\alpha}^{\beta} f(x(t), y(t), z(t))\sqrt{(x_t')^2 + (y_t')^2 + (z_t')^2}\, dt. \qquad (22.1.15)$$

Приклад. Обчислити $\int\limits_{AB}(x+\sqrt{y})\, dl$ від точки $A(0,0)$ до точки $B(2,1)$ по дузі кривої L: $x = t$, $y = t^2/4$.

1[0]. *Установлюємо* межі визначеного інтегрування. Оскільки $A \in L$, $B \in L$, то їхні координати задовольняють рівняння кривої; підставляємо їх в одне з рівнянь і одержуємо: $\alpha = 0$, $\beta = 2$.

2[0]. *Здійснюємо* перехід до змінної t:

$$\left|\begin{array}{c} x_t' = 1,\ \ y_t' = t/2 \\ \dfrac{x}{t}\left|\dfrac{0 \quad 2}{0 \quad 2}\right., \text{ або } \dfrac{y}{t}\left|\dfrac{0 \quad 1}{0 \quad 2}\right. \end{array}\right| \Rightarrow\ dl = \frac{1}{2}\sqrt{4+t^2}\, dt \ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ I = \int\limits_{(A)}^{(B)}(x+\sqrt{y})dl = \int\limits_{0}^{2}(t+t/2)\frac{1}{2}\sqrt{4+t^2}\, dt = \frac{3}{4}\int\limits_{0}^{2} t\sqrt{4+t^2}\, dt.$$

3[0]. *Обчислюємо* одержаний визначений інтеграл методом заміни змінної:

$$\left| u = 4+t^2 \Rightarrow du = 2t dt,\quad \frac{t}{u}\left|\frac{0 \quad 2}{4 \quad 8}\right. \right| \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ I = \frac{3}{8}\int\limits_{4}^{8} t\sqrt{4+t^2}\, dt = \frac{3}{8}\int\limits_{4}^{8}\sqrt{u}\, du = \frac{3}{8}\cdot\frac{2}{3}u\sqrt{u}\Big|_4^8 = 2(2\sqrt{2}-1) \approx 3{,}6. \ \bullet$$

(*Як вправу* рекомендуємо дати геометричне зображення дуги AB.)

II. Явне завдання шляху інтегрування – це коли дуга AB описується рівнянням $y = y(x)$, де аргумент x змінюється в межах від $x=a$ до $x=b$, тобто $x \in [a, b]$, і точці A (B) відповідає значення x, рівне a (b).

У цьому випадку диференціала дуги маємо:

$$dl = \sqrt{dx^2 + dy^2} = \sqrt{1 + (y'_x)^2}\,, \tag{22.1.16}$$

а КРІ-1 набуває вигляду:

$$\int\limits_{(A)}^{(B)} f(x, y)\,dl = \int\limits_{a}^{b} f(x, y(x))\sqrt{1 + (y'_x)^2}\;dx \quad (a<b) \tag{22.1.17}$$

– **формула зведення КРІ-1 до визначеного інтеграла**.

Приклад. Обчислити $I = \int\limits_{AB} (x + \sqrt{y})\,dl$ від точки $A(0{,}0)$ до точки $B(2{,}1)$ по дузі кривої L: $y = x^2/4$.

Згідно з (22.1.16), (22.1.17) отримуємо:

$$\left|\begin{array}{c} 0 \le x \le 2 \Rightarrow (a=0, b=2) \\ dl = \sqrt{1 + x^2/4}\;dx \end{array}\right| \Rightarrow\; I = \int\limits_{(A)}^{(B)} (x + \sqrt{y})\,dl = \int\limits_{0}^{2} (x + x/2)\sqrt{1 + x^2/4}\;dx =$$

$$= \frac{3}{2}\int\limits_{0}^{2} x\sqrt{1 + x^2/4}\;dx = \frac{3}{8}\int\limits_{0}^{2} \sqrt{4 + x^2}\;d(4 + x^2) = \frac{3}{8}\sqrt{(4 + x^2)^3}\,\Big|_{0}^{2} \approx 3{,}6\,.$$

Як бачимо, при явному завданні шляху інтегрування в ролі параметра виступає змінна x (див. попередній приклад), тобто формула (22.1.16) є по суті частинним випадком (22.1.14), якщо покласти $x = t$, $y = y(t)$. ●

Аналогічно поступають, коли AB задається рівнянням $x = x(y)$, $y \in [c, d]$, і тоді приходять до формули:

$$\int\limits_{(A)}^{(B)} f(x, y)\,dl = \int\limits_{c}^{d} f(x(y), y)\sqrt{1 + (x'_y)^2}\;dy \quad (c < d). \tag{22.1.18}$$

Із (22.1.15), (22.1.17), (22.1.18) випливає відповідний порядок обчислення КРІ-1 (*наведіть* його самостійно).

ІІІ. Завдання шляху інтегрування у полярних координатах (**полярна форма**) – це коли дуга AB описується рівнянням $\rho=\rho(\varphi)$, де аргумент φ змінюється в межах від $\varphi=\alpha$ до $\varphi=\beta$ і точці A (B) відповідає значення φ, рівне α (β).

За формулами переходу від декартових координат до полярних маємо:

$$\begin{bmatrix} x=\rho\cos\varphi, \\ y=\rho\sin\varphi \end{bmatrix} \Rightarrow \left|\rho=\rho(\varphi)\right| \Rightarrow \begin{bmatrix} x=\rho(\varphi)\cos\varphi, \\ y=\rho(\varphi)\sin\varphi \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} x=x(\varphi), \\ y=y(\varphi), \end{bmatrix}$$

тобто приходимо до параметричного завдання шляху інтегрування: в ролі параметра t виступає полярний кут φ. Таким чином, одержуємо формулу, аналогічну формулі (22.1.14):

$$\int_{(A)}^{(B)} f(x,y)\,dl=\int_{\alpha}^{\beta} f\left(x(\varphi),y(\varphi)\right)\sqrt{\rho^2+(\rho'_\varphi)^2}\,d\varphi \quad (\alpha<\beta) \qquad (22.1.18)$$

– **формула зведення КРІ-1 до визначеного інтеграла**.

Приклад. Обчислити $I=\int\limits_{AB}(x+\sqrt{y})\,dl$ від точки $A(0,0)$ до точки $B(1/2,\,1/2)$ по дузі кривої L: $\rho=\sin\varphi$.

Згідно з формулою (22.1.18) переходимо до полярних координат і обчислюємо визначений інтеграл за змінною φ:

$$\left|\begin{array}{ll} x=\rho\cos\varphi=\sin\varphi\cos\varphi, & \\ y=\rho\sin\varphi=\sin^2\varphi, & \begin{array}{c|cc} x & 0 & 0{,}5 \\ \hline \varphi & 0 & \pi/4 \end{array} \\ \rho_A=0,\ \rho_B=1/\sqrt{2}; & \end{array}\right| \Rightarrow I=\int\limits_{AB}(x+\sqrt{y})\,dl=$$

$$=\int_0^{\pi/4}(\sin\varphi\cos\varphi+\sin\varphi)\,d\varphi=\left(\frac{1}{2}\sin^2\varphi-\cos\varphi\right)\Bigg|_0^{\pi/4}=1/4-1/\sqrt{2}+1\approx 0{,}6. \ \bullet$$

(*Зобразіть* шлях інтегрування у суміщених системах $\rho O\varphi$ і xOy.)

Як підсумок наведемо ключові відомості (табл. 22.1.1) щодо переходу від КРІ-1 до ВІ.

Таблиця 22.1.1

Диференціал дуги для різних форм завдання шляху інтегрування

№ п/п	Форма завдання шляху інтегрування	Вигляд диференціала дуги
1	Параметрична: $x = x(t)$, $y = y(t)$	$dl = \sqrt{(x'_t)^2 + (y'_t)^2}\,dt$
2	Явна: $y = y(x)$ $(x = x(y))$	$dl = \sqrt{1 + (y'_x)^2}dx$ $\left(dl = \sqrt{1 + (x'_y)^2}\,dy\right)$
3	Полярна: $\rho = \rho(\varphi)$	$dl = \sqrt{\rho^2 + (\rho'_\varphi)^2}\,d\varphi$

Зауваження: у випадку просторової кривої – шляху інтегрування – використовують виключно параметричне завдання лінії L: $x = x(t)$, $y = y(t)$, $z = z(t)$.

22.2. Застосування криволінійного інтеграла 1-го роду

Геометричні застосування КРІ-1

Згідно з геометричним смислом КРІ-1 (див. (22.1.4), (22.1.5)) можна обчислювати відповідно площу циліндричної поверхні для $f(x,y)$ на AB, і довжину дуги AB:

$$S = \int_{(A)}^{(B)} f(x,y)dl, \quad l = \int_{(A)}^{(B)} dl.$$

Приклад. Знайти довжину дуги l кривої від точки $A(2,0)$ до точки $B(1,1)$ в системі координат xOy, якщо вона описується рівнянням:

а) $\rho = 2\cos\varphi$; б) $x^2 + y^2 - 2x = 0$; в) $\begin{cases} x = 1 + \cos t, \\ y = \sin t. \end{cases}$

Сумістимо декартову і полярну системи координат і побудуємо криву а): $\rho = 2\cos\varphi$ (рис. 22.2.1).

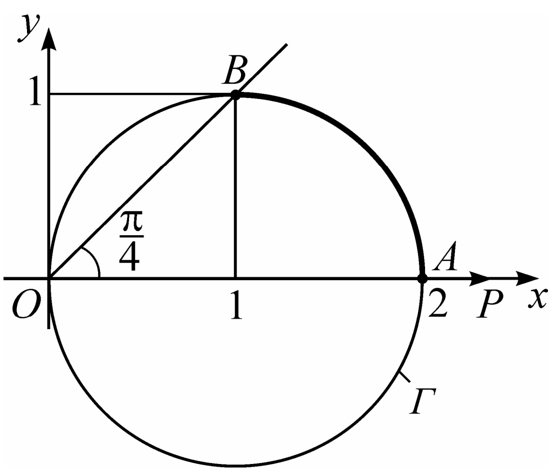


Рис. 22.2.1. **Шлях інтегрування**

Знаходимо диференціал дуги:

$$\left|\begin{array}{c}\rho=2\cos\varphi\Rightarrow\rho^2=4\cos^2\varphi\\ \rho'_\varphi=-2\sin\varphi\Rightarrow(\rho'_\varphi)^2=4\sin^2\varphi\end{array}\right|\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ dl=2d\varphi.$$

Точкам A, B відповідають кути $\alpha=0$, $\beta=\pi/4$. Отже,

$$l=\int\limits_{(A)}^{(B)}dl=\int\limits_0^{\pi/4}2d\varphi=2\varphi\Big|_0^{\pi/4}=\frac{\pi}{2}\ \text{(лін. од.)}$$

(*Знайдіть* кути α і β аналітично, не звертаючись до рисунка.)

У випадку б) рівняння $x^2+y^2-2x=0$ описує ту ж саму криву – коло радіуса 1 з центром у точці $(1,0)$: $(x-1)^2+y^2=1$. Дійсно:

$$\rho=2\cos\varphi\ \Rightarrow\ \left|\begin{array}{c}\rho=\sqrt{x^2+y^2}\\ \cos\varphi=x/\rho\end{array}\right|\ \Rightarrow\ \sqrt{x^2+y^2}=\frac{2x}{\sqrt{x^2+y^2}}\ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ x^2+y^2=2x\ \Rightarrow\ x^2+y^2-2x=0.$$

Знаходимо диференціал дуги:

$$y^2=1-(x-1)^2\ \Rightarrow\ y=\sqrt{1-(x-1)^2}\ \Rightarrow\ y'_x=-\frac{x-1}{\sqrt{1-(x-1)^2}}\ \Rightarrow$$

$$1+(y'_x)^2=1+\frac{(x-1)^2}{1-(x-1)^2}=\frac{1}{1-(x-1)^2}\ \Rightarrow\ dl=\frac{dx}{\sqrt{1-(x-1)^2}}.$$

Обчислюємо довжину дуги:

$$l=\int\limits_{(A)}^{(B)}dl=\int\limits_2^1\frac{dx}{\sqrt{1-(x-1)^2}}=\arcsin(x-1)\Big|_2^1=\arcsin 0-\arcsin 1=-\frac{\pi}{2}<0.$$

Отримали від'ємну довжину (!), тому що нижня межа інтегрування більше верхньої.

У випадку в): $\begin{cases} x = 1+\cos t, \\ y = \sin t, \end{cases}$ згідно з (22.1.18) маємо:

$$\left| \begin{array}{ll} x'_t = -\sin t, & \dfrac{x}{t}\left|\dfrac{2 \quad\quad 1}{\pi/2 \quad 0}\right. \\ y'_t = \cos t; & \end{array} \right| \Rightarrow \ dl = dt \ \Rightarrow \ l = \int_0^{\pi/2} dt = \frac{\pi}{2} \text{ (лін. од.)} \ \bullet$$

Приклад. Знайти довжину дуги l просторової кривої: $x = 2t^3$, $y = 3t^2$, $z = 3t$, від точки $O(0,0,0)$ до точки $A(2,3,3)$.

Застосовуємо (22.1.15) при $f(x,y,z) \equiv 1$:

$$\left| \begin{array}{c} x'_t = 6t^2, \ y'_t = 6t, \ z'_t = 3 \\ \dfrac{x}{t}\left|\dfrac{0 \quad 2}{0 \quad 1}\right., \text{ або } \dfrac{y}{t}\left|\dfrac{0 \quad 3}{0 \quad 1}\right., \text{ або } \dfrac{z}{t}\left|\dfrac{0 \quad 3}{0 \quad 1}\right. \end{array} \right| \Rightarrow \ dl = \int_{(O)}^{(A)} dl \ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \ l = \int_0^1 \sqrt{36t^4 + 36t^2 + 9}\, dt = 3\int_0^1 (2t^2 + 1)\, dt = (2t^3 + 3t)\Big|_0^1 = 5 \text{ (лін. од.)} \ \bullet$$

Приклад. Знайти площу циліндричної поверхні для $z = 3x + 4y + 5$ на відрізку між точками $A(-1,\ 1)$, $B(1,\ 2)$.

Будуємо рівняння шляху інтегрування як рівняння прямої, що проходить через дві задані точки:

$$\frac{x - x_A}{x_B - x_A} = \frac{y - y_A}{y_B - y_A} \ \Rightarrow \ \frac{x+1}{2} = \frac{y-1}{1} \ \Rightarrow \ \begin{cases} x = -1 + 2t, \\ y = 1 + t \end{cases} \quad (x = 2y - 3).$$

Обчислюємо площу циліндричної поверхні:

$$S = \int_{(A)}^{(B)} f(x,y)\, dl \ \Rightarrow \ \left| \begin{array}{c} x = 2y - 3, \ x'_y = 2 \\ dl = \sqrt{5}\, dy \end{array} \right| \ \Rightarrow \ S = 2\sqrt{5}\int_1^2 (5y - 2)\, dy =$$

$$= 2\sqrt{5}(5y^2/2 - 2y)\Big|_1^2 = 2\sqrt{5}(6 - 0{,}5) = 11\sqrt{5} \approx 24{,}2 \text{ (кв. од.)} \ \bullet$$

(*Обміркуйте*, площу якої, знайомої зі школи, фігури знайдено; *пропонуємо* самостійно обчислити площу за параметричним рівнянням AB.)

Фізичні застосування КРІ-1

Згідно з фізичним смислом КРІ-1 (див. (22.1.6)) можна обчислювати масу дуги m кривої L: $l = AB$. Крім того, як і в застосуваннях ПДІ і ТРІ, – статичні моменти відносно координатних осей: M_x, M_y, моменти інерції відносно осей координат і центральний момент: J_x, J_y, J_0, і центр мас: (x_c, y_c), якщо відома її лінійна густина $\sigma(x, y)$.

Наведемо відповідні розрахункові формули:

$$m = \int_l \sigma(x, y)dl;$$

$$M_x = \int_l y\sigma(x, y)dl, \quad M_y = \int_l x\sigma(x, y)dl; \tag{22.2.1}$$

$$x_c = \frac{M_y}{m} = \frac{\int_l x\sigma(x,\ y)dl}{m}, \quad y_c = \frac{M_x}{m} = \frac{\int_l y\sigma(x,\ y)dl}{m}; \tag{22.2.2}$$

$$J_x = \int_l y^2\sigma(x,\ y)dl, \quad J_y = \int_l x^2\sigma(x,\ y)dl,$$
$$J_0 = \int_l (x^2 + y^2)\sigma(x,\ y)dl. \tag{22.2.3}$$

Приклади на обчислення перелічених величин.

1. Знайти масу дуги кривої $4x^3 - 9y^2 = 0$ від точки $O(0,0)$ до точки $A(3, 2\sqrt{3})$, якщо її лінійна густина у кожній точці $M(x,y)$ дорівнює довжині частини дуги OM: $\sigma(x, y) = l_{OM}$.

Перейдемо від неявної форми завдання кривої до явної, розв'язуючи задане рівняння відносно змінної y (або x): $y = 2/3 \cdot x^{3/2}$, $(x = (3/2 \cdot y)^{2/3})$.

Візьмемо простіше за виглядом рівняння, і знайдемо густину кривої:

$$\left| \begin{array}{c} y'_x = \frac{2}{3}\cdot\frac{3}{2}x^{1/2} = \sqrt{x}, \\ dl = \sqrt{1+x}\,dx \end{array} \right| \Rightarrow \ \sigma(x,\ y) = \int_{(O)}^{M} dl = \int_0^x \sqrt{1+x}\,dx = \frac{2}{3}(1+x)^{3/2}\Big|_0^x =$$

$= \frac{2}{3}[(1+x)^{3/2} - 1]$ (не слід плутати x як змінну інтегрування зі змінною верхньою межею ВІ).

Тепер можна обчислити масу дуги:

$$m = \int_l \sigma(x,y)dl = \frac{2}{3}\int_0^3 \left[(1+x)^{3/2} - 1\right]\sqrt{1+x}\,dx = \frac{2}{3}\int_0^3 \left[(1+x)^2 - (1+x)^{1/2}\right]dx =$$

$$= \frac{2}{9}\left[(1+x)^3 - 2(1+x)^{3/2}\right]\Big|_0^3 = \frac{2}{9}\cdot 49 \approx 10{,}9 \text{ (од. маси). } \bullet$$

(*Спробуйте* записати рівняння кривої в параметричній формі.)

2. Знайти координати центра маси дуги циклоїди – кривої з параметричним рівнянням $\begin{cases} x = 1-\cos t, \\ y = t - \sin t \end{cases}$ – від точки $O(0,0)$ до точки $A(0,2\pi)$, якщо лінійна густина прямо пропорційна ординаті поточної точки кривої.

Установимо межі змінювання параметра t, аналізуючи рівняння лінії. При $x=0$ маємо: $\cos t = 1 \Rightarrow$ ($\alpha = 0$, $\beta = 2\pi$). Відповідні значення ігрека 0 і 2π, що узгоджується з умовою задачі і рис. 22.2.2.

Знайдемо вираз для диференціала дуги:

$$\left| \begin{matrix} x'_t = \sin t \\ y'_t = 1+\cos t \end{matrix} \quad \begin{array}{c|cc} y & 0 & 2\pi \\ \hline t & 0 & 2\pi \end{array} \right| \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ dl = \sqrt{\sin^2 t + (1+\cos t)^2}\,dt \ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ dl = 2\sqrt{(1+\cos t)/2}\,dt = \pm 2\cos(t/2)\,dt.$$

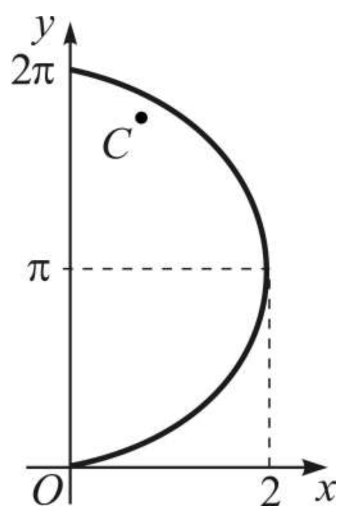


Рис. 22.2.2. **Циклоїда**

Знак $\pm$ обумовлюється тим, що $\cos(t/2)$ для $t \in (\pi, 2\pi]$ від'ємний.

За умовою густина $\sigma(x,y) = ky$, де k – коефіцієнт пропорційності, тоді:

$$m = \int_l \sigma(x,y)dl = k\int_l y\,dl = 2k\int_0^{2\pi} (t - \sin t)\left|\cos(t/2)\right|dt.$$

Обчислюємо ВІ як суму двох інтегралів на проміжках $[0,\pi]$, $[\pi,2\pi]$ з урахуванням знака $\cos(t/2)$:

$$\int_0^{2\pi} = \int_0^{\pi} + \left(-\int_{\pi}^{2\pi} \right).$$

Спочатку знайдемо одну із первісних:

$$F(t) = \int (t-\sin t)\cos\frac{t}{2}\,dt = \int \left(t\cos\frac{t}{2} - \sin t\cos\frac{t}{2} \right) dt =$$

$=\Big|$ зменшуване інтегруємо частинами, а від'ємник зводимо до суми синусів $\Big| =$

$$= \int t\cos\frac{t}{2}dt - \int \sin t\cos\frac{t}{2}\,dt = 5\cos\frac{t}{2} + 2t\sin\frac{t}{2} + \frac{1}{3}\cos\frac{3t}{2}.$$

Обчислюємо масу, виконуючи подвійну підстановку:

$$m = 2kF(t)\Big|_0^{2\pi} = 2k\Big(F(t)\Big|_0^{\pi} - F(t)\Big|_{\pi}^{2\pi}\Big) = 2k\cdot 4\pi = 8\pi k \text{ (од. маси)}$$

Знаходимо статичні моменти (зважаючи на громіздкість ВІ, детальний виклад їх обчислення пропускається):

$$M_x = \int_l y\sigma(x,y)\,dl = k\int_l y\,dl = 2k\int_0^{2\pi} (t-\sin t)^2 \left|\cos(t/2)\right| dt =$$

$$= 2k(64\pi/3 + 4\pi^2 - 1664/45) \approx 139{,}04k;$$

$$M_y = \int_l x\sigma(x,y)dl = k\int_l xy\,dl = 2k\int_0^{2\pi} (1-\cos t)(t-\sin t)\left|\cos(t/2)\right| dt =$$

$$= 2k\frac{8\pi}{3} \approx 16{,}76k.$$

Підраховуємо координати центра маси (див. рис. 22.2.2):

$$x_c = \frac{M_y}{m} = \frac{8\pi/3}{4\pi} = \frac{2}{3} \approx 0{,}67, \quad y_c = \frac{M_x}{m} = \frac{64\pi/3 + 4\pi^2 - 1664/45}{4\pi} \approx 5{,}53. \ \bullet$$

(*Поясніть*, куди подівся коефіцієнт пропорційності k?)

3. Знайти координати центра маси дуги кривої (рис. 22.2.3) $\rho = 2\sin\varphi$ від точки $O(0,0)$ до точки $A(1,1)$, лінійна густина якої $\sigma(x, y) = \sigma - const$.

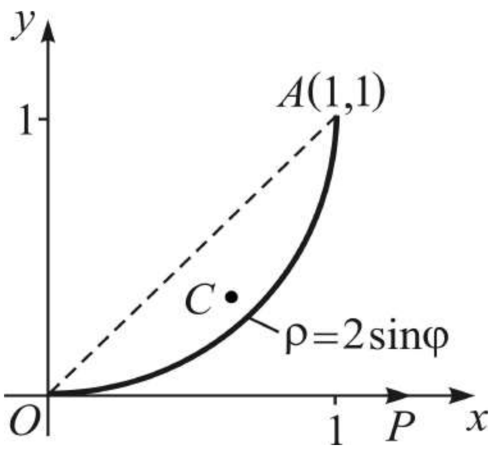


Рис. 22.2.3. **Дуга кривої $\rho = 2\sin\varphi$**

Сумістимо декартову і полярну системи координат і установимо межі змінювання полярного кута φ:

$$\rho = OA = \sqrt{2} \;\Rightarrow\; y = \sqrt{2}\sin\varphi \;\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{array}{c|c|c} y & 0 & 1 \\ \varphi & 0 & \pi/4 \end{array}.$$

Знаходимо диференціал дуги і її масу:

$$dl = \sqrt{\rho^2 + (\rho'_\varphi)^2}\, d\varphi \;\Rightarrow\; dl = 2d\varphi;$$

$$m = \int_l \sigma dl = \sigma \int_0^{\pi/4} 2d\varphi = 2\sigma\varphi\Big|_0^{\pi/4} = \frac{1}{2}\sigma\pi.$$

Для статичних моментів маємо:

$$M_x = \sigma \int_l y dl \;\Rightarrow\; \left| y = \rho\sin\varphi = 2\sin^2\varphi \right| \;\Rightarrow$$

$$\Rightarrow M_x = 4\sigma \int_0^{\pi/4} \sin^2\varphi d\varphi = 4\sigma \int_0^{\pi/4} \frac{1-\cos 2\varphi}{2} d\varphi = 2\sigma\left(\varphi - \frac{\sin 2\varphi}{2}\right)\Bigg|_0^{\pi/4} = \frac{\sigma}{2}(\pi - 2);$$

Аналогічно (*прослідкуйте*):

$$M_y = \sigma \int_l x\, dl \;\Rightarrow\; \left| x = \rho\cos\varphi = 2\sin\varphi\cos\varphi = \sin 2\varphi \right| \;\Rightarrow$$

$$M_y = 2\sigma \int_0^{\pi/4} \sin 2\varphi d\varphi = -\sigma\cos 2\varphi\Big|_0^{\pi/4} = \sigma.$$

Таким чином,

$$x_c = \frac{M_y}{m} = \frac{\sigma}{\sigma\pi/2} = \frac{2}{\pi} \approx 0{,}64, \quad y_c = \frac{M_x}{m} = \frac{\sigma(\pi-2)/2}{\sigma\pi/2} = \frac{\pi-2}{\pi} \approx 0{,}36. \;\bullet$$

Помічаємо: $x_c + y_c = 1$; що це означає з точки зору геометрії?

22.3. Криволінійний інтеграл за координатами (2-го роду) – КРІ-2

КРІ-2: основні означення, теорема існування

Поняття „криволінійний інтеграл за координатами” є узагальненням, як і КРІ-1, поняття „визначений інтеграл” на випадок, коли область інтегрування – не відрізок осі Ox, а дуга кривої на площині xOy (або у просторі $xOyz$).

Нехай $\breve{AB}$ (або просто AB) – дуга неперервної кривої L на площині xOy, а $z = f(x, y)$, або $z = f(M)$, де $M(x, y) \in xOy$, – визначена на AB функція.

Проробимо наступне (аналогічне тому, що ми робили при розгляді визначеного, подвійного, потрійного інтегралів і КРІ-1)):

– *розіб'ємо* дугу AB довільним чином на n частинних дуг із довжинами Δl_i, $i = \overline{1, n}$ (або просто – на дужечки Δl_i), і найбільшу з довжин дужечок $\lambda = \max\limits_i \{\Delta l_i\}$ назвемо **діаметром розбиття** дуги AB на частини, а проекції дужечок на вісь Ox позначимо через Δx_i: $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$ (рис. 22.3.1);

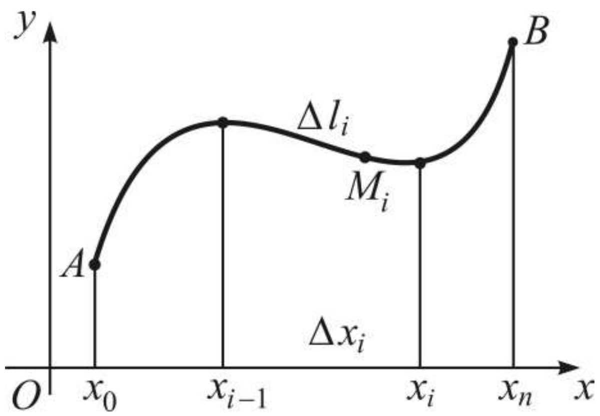


Рис. 22.3.1. **Розбиття дуги на дужечки**

– *виберемо* на кожній із дужечок довільним чином по точці $M_i(\xi_i, \eta_i)$, $i = \overline{1, n}$, обчислимо $f(M_i)$ і знайдемо добутки $f(M_i) \cdot \Delta x_i$;

– *складемо* суму всіх таких добутків

$$I_n = \sum_{i=1}^{n} f(M_i) \cdot \Delta x_i,$$

яку назвемо **інтегральною сумою за змінною x для функції $f(x, y)$ на дузі AB**;

– *обчислимо* границю (якщо вона існує) інтегральної суми за умови, що діаметр розбиття λ прямує до нуля разом із $n \to \infty$.

Скінченна границя I інтегральної суми I_n, коли діаметр розбиття прямує до нуля $(\lambda \to 0)$, а $n \to \infty$, називається **криволінійним інтегра-**

лом за координатою (змінною) x від функції $f(x,y)$ по дузі AB у напрямі від A до B і позначається символом:

$$\int\limits_{AB} f(x,y)dx, \quad \text{або} \quad \int\limits_{(A)}^{(B)} f(x,y)dx,$$

де $\int$ – знак (символ) КРІ-2;

AB – шлях інтегрування;

(A), (B) – межі інтегрування (A, B беруться в дужки, бо це не числа, як у визначеному інтегралі, а кінцеві точки дуги AB);

$f(x,y)$ – підінтегральна функція;

$f(x,y)dx$ – підінтегральний вираз;

x – змінна інтегрування (змінна, яка стоїть під знаком диференціала).

Отже, за означенням

$$I = \lim_{\substack{\lambda\to 0\\(n\to\infty)}} I_n = \lim_{\substack{\lambda\to 0\\(n\to\infty)}} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i,\eta_i)\Delta x_i = \int\limits_{AB} f(x,y)dx = \int\limits_{(A)}^{(B)} f(x,y)dx. \quad (22.3.1)$$

Якщо розглядати проекції Δl_i на вісь Oy, аналогічно одержимо **КРІ-2 за змінною y**:

$$\int\limits_{AB} f(x,y)dy = \lim_{\substack{\lambda\to 0\\(n\to\infty)}} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i,\eta_i)\Delta y_i, \quad (22.3.2)$$

де $\Delta y_i = y_i - y_{i-1}$ є проекцією дужечки Δl_i на вісь Oy.

Як *вправу* на розуміння означення КРІ-2 доведіть:

$$\left(AB \text{ – прямолінійний відрізок і } AB\perp Ox\ (AB\perp Oy)\right) \Rightarrow \int\limits_{AB} f\,dx = 0\ \left(\int\limits_{AB} f\,dy = 0\right).$$

Якщо вздовж дуги AB визначені дві функції $P = P(x,y)$, $Q = Q(x,y)$ (або $P = P(M)$, $Q = Q(M)$, де $M(x,y)\in AB$) і існують відповідно КРІ за змінними x, y, то їхню суму називають **криволінійним інтегралом за координатами загального вигляду** і пишуть:

$$I=\int\limits_{AB} P(x,y)dx+Q(x,y)dy=\int\limits_{AB} P(x,y)dx+\int\limits_{AB} Q(x,y)dy. \qquad (22.3.3)$$

Підінтегральний вираз як суму двох доданків домовились у дужки не брати; такі КРІ-2 часто зустрічаються в застосовній математиці.

Наведені означення КРІ за координатами залишаються в силі у випадку, коли точки A, B співпадають, тобто коли AB – зімкнена лінія Γ; такі КРІ-2 називаються **інтегралами по (зімкненому) контуру**, або **контурними інтегралами**. Контурні КРІ за змінною x позначаються так:

$$\oint\limits_{\Gamma} f(x,y)dx, \qquad \oint\limits_{\Gamma} f(x,y)dx,$$

де „стрілочка" вказує на напрям обходу контуру Γ. Кажуть, що **напрям обходу контуру додатний (від'ємний)**, якщо він відбувається проти руху (за рухом) годинникової стрілки, тобто так, що обмежена контуром частина площини залишається ліворуч (праворуч). Зрозуміло, що

$$\oint\limits_{\Gamma} f(M)dx+\oint\limits_{\Gamma} f(M)dx=0, \quad \text{або} \quad \oint\limits_{\Gamma} f(M)dx=-\oint\limits_{\Gamma} f(M)dx, \qquad (22.3.4)$$

оскільки зі зміною напряму обходу контуру знаки проекцій Δx_i, $i=\overline{1,n}$, змінюються на протилежні.

При відсутності додаткових вказівок щодо напряму обходу контуру домовимось мати на увазі додатний напрям і стрілочку в символі КРІ опускати. Легко показати, що КРІ по контуру в обраному напрямі не залежить від вибору точки, з якої починається обхід контуру (це так звана початкова точка). Усе зазначене стосовно КРІ по контуру за змінною x справедливе і для КРІ по контуру за змінною y (22.3.2), за змінними x, y (22.3.3).

Після означення основних понять природно постає питання: які умови повинні задовольняти підінтегральні функції та функції, що описують шляхи інтегрування, щоб інтегральні суми мали скінченні границі, тобто щоб існували відповідні КРІ-2? Відповідь на поставлене запитання дає теорема 22.3.1.

Теорема 22.3.1 (*існування КРІ за координатами*). Якщо:

– дуга AB кусково-гладка;

– функції $P=P(x,y)$, $Q=Q(x,y)$ неперервні на AB, то КРІ-2

$$\int\limits_{AB} P\,dx\,,\quad \int\limits_{AB} Q\,dy\,,\quad \int\limits_{AB} P\,dx + Q\,dy$$

існують (тобто існують скінченні границі відповідних інтегральних сум і вони – границі – не залежать ні від способу розбиття AB на частини, ні від вибору точок на них для складання інтегральних сум).

Усе розглянуте у п. 22.3 без принципових змін поширюється на випадок, коли розглядаються дуга (контур) у просторі $xOyz$ і задані на ній (на ньому) функції трьох змінних: $P=P(x,y,z)$, $Q=Q(x,y,z)$, $R=R(x,y,z)$. Позначаються відповідні КРІ так:

$$\int\limits_{AB} Pdx\,,\quad \int\limits_{AB} Qdy\,,\quad \int\limits_{AB} Rdz\,,\quad \int\limits_{AB} Pdx + Qdy + Rdz\,; \tag{22.3.5}$$

для контурних інтегралів замість символу $\int\limits_{AB}$ пишуть $\oint\limits_{\Gamma}$.

Основні властивості КРІ за координатами

Аналіз інтегральних сум для КРІ-2 показує, що за структурою (будовою) вони нагадують інтегральні суми для визначених інтегралів, тому їхні властивості у більшості збігаються з властивостями визначеного інтеграла. Наведемо основні з них, які випливають безпосередньо з означення КРІ-2. Тут і надалі для стислості символічних записів аргументи підінтегральної функції або навіть самі функції будемо пропускати, якщо це не призводить до колізій. Формули запишемо тільки для КРІ-2 за змінною x, але при загальному формулюванні властивостей:

1^0(*про зміну знака*). При зміні напряму інтегрування КРІ змінює знак:

$$\int\limits_{(B)}^{(A)} = -\int\limits_{(A)}^{(B)}\,,\qquad \oint\limits_{\Gamma} = -\oint\limits_{\Gamma} \quad \text{(див. (22.3.4)).} \tag{22.3.6}$$

Властивості лінійності КРІ:

2^0. Сталий множник виносять за знак інтеграла:

$$\int\limits_{AB} k\cdot f\,dx = k\int\limits_{AB} f\,dx\,,\qquad k - const\,. \tag{22.3.7}$$

3^0. КРІ від суми двох функцій f_1, f_2 дорівнює сумі відповідних інтегралів від доданків:

$$\int\limits_{AB}(f_1+f_2)\,dx=\int\limits_{AB}f_1\,dx+\int\limits_{AB}f_2\,dx. \qquad (22.3.8)$$

4^0 (*адитивність*). Якщо дугу AB точкою C розбити на частини, то КРІ по всій дузі AB дорівнює сумі інтегралів по її частинах:

$$\int\limits_{AB}=\int\limits_{AC}+\int\limits_{CB}, \quad C\in AB \qquad (22.3.9)$$

(властивості 3^0, 4^0 мають місце відповідно для будь-якого скінченного числа доданків і частин розбиття).

5^0 (*про вибір початкової точки*). КРІ по контуру в обраному напрямі не залежить від точки, з якої починається обхід контуру.

Справедливість усіх властивостей базується на означенні КРІ і на властивостях границі послідовностей у застосуванні до інтегральних сум I_n. Помічаємо, що властивості $1^0 - 4^0$ аналогічні властивостям, якими володіють визначені інтеграли.

Обчислення КРІ зведенням до визначеного інтеграла

Основні викладки, не вдаючись до строгих обґрунтувань, дамо для КРІ за координатами по дузі $AB\subset xOy$ вигляду:

$$I=\int\limits_{(A)}^{(B)}P\,dx+Q\,dy, \qquad P=P(x,y),\ Q=Q(x,y), \qquad (22.3.10)$$

і будемо виходити з того, що всі розглядувані функції задовольняють теорему існування. Висвітлення питання про обчислення КРІ проведемо для різних форм завдання дуги AB і наведемо ілюстративні приклади на тлі одного інтеграла.

І. Параметричне завдання шляху інтегрування. Нехай дуга (крива) AB описується рівняннями $x=x(t)$, $y=y(t)$, де $x(t)$, $y(t)$ – функції параметра t, який змінюється в межах від $t=\alpha$ до $t=\beta$, і точці A (B) відповідає значення параметра, рівне α (β). Залежно від розташування точок A, B на xOy може бути $\alpha>\beta$ або $\alpha<\beta$.

Знайдемо диференціали змінних x, y:

$$dx = x'_t\,dt\,, \quad dy = y'_t\,dt \qquad (22.3.11)$$

і під знаком КРІ здійснимо перехід до змінної t, тоді підінтегральна функція стане функцією однієї змінної, а під знаком диференціала фігуруватиме змінна t. З урахуванням того, що точці A відповідає число α, а точці B – число β, одержимо:

$$\int_{(A)}^{(B)} P(x,y)dx + Q(x,y)dy = \int_{\alpha}^{\beta}\left[P(x(t),y(t))x'_t + Q(x(t),y(t))y'_t\right]dt\,. \qquad (22.3.12)$$

Формула (22.3.12) є **формулою зведення КРІ до визначеного інтеграла**. Вигляд цієї формули підказує послідовність переходу від КРІ до визначеного інтеграла; цей перехід, власне, і було описано.

Аналогічним чином обчислюються інтеграли для функцій від трьох змінних (див. (22.3.5)) по просторовій дузі (кривій), заданій рівняннями: $x = x(t),\ y = y(t),\ z = z(t)$. Пропонуємо записати відповідні формули самостійно.

Приклад. Обчислити $\int\limits_{AB} x\,dy + y\,dx$ від точки $A(0,0)$ до точки $B(2,1)$ по дузі кривої L: $x = 2t$, $y = \sqrt{t}$.

1⁰. *Установлюємо* межі визначеного інтегрування. Оскільки $A \in L$, $B \in L$, то їхні координати задовольняють рівняння кривої; підставляємо їх в одне з рівнянь і одержуємо: $\alpha = 0$, $\beta = 1$.

2⁰. *Здійснюємо* в КРІ перехід до змінної t:

$$I = \int_{(A)}^{(B)} xdy + ydx = \left| \begin{array}{c} x = 2t \Rightarrow dx = 2\,dt \\ y = \sqrt{t} \Rightarrow dy = \dfrac{1}{2\sqrt{t}}\,dt \end{array} \right| = \int_0^1 \left(2t\cdot\frac{1}{2\sqrt{t}} + \sqrt{t}\cdot 2\right)dt = \int_0^1 3\sqrt{t}dt\,.$$

3⁰. *Обчислюємо* одержаний визначений інтеграл:

$$I = 3\int_0^1 t^{1/2}dt = 2t^{3/2}\Big|_0^1 = 2\,. \ \bullet$$

Як *вправу* рекомендуємо дати геометричне зображення дуги AB.

ІІ. Явне завдання шляху інтегрування – це коли дуга AB описується рівнянням $y = y(x)$, де аргумент x змінюється в межах від $x = a$ до $x = b$, тобто $x \in [a, b]$, і точці A (B) відповідає значення x, рівне a (b).

Здійснимо в підінтегральному виразі перехід до змінної x, відшукавши попередньо dy: $dy = y'_x dx$, з урахуванням того, що точкам A, B відповідатимуть числа a, b – абсциси цих точок. У результаті такого переходу одержуємо співвідношення:

$$\int_{(A)}^{(B)} P(x, y)dx + Q(x, y)dy = \int_a^b [P(x, y(x)) + Q(x, y(x))y'_x]dx. \qquad (22.3.13)$$

Формула (22.3.13) є по суті частинним випадком (22.3.12), якщо покласти $x = t$, $y = y(t)$.

Аналогічно поступають, коли AB задається рівнянням $x = x(y)$, $y \in [c, d]$, і тоді приходять до формули:

$$\int_{(A)}^{(B)} P(x, y)dx + Q(x, y)dy = \int_c^d \left[P(x(y), y)x'_y + Q(x(y), y)\right]dy. \qquad (22.3.14)$$

Із (22.3.13), (22.3.14) випливає відповідний порядок обчислення КРІ.

Приклад. Обчислити $\int\limits_{AB} y\,dx + x\,dy$, якщо AB – дуга кривої $y = x^2$, де $x \in [-1, 1]$.

Межі визначеного інтегрування вже відомі, так що згідно з (22.3.13) маємо:

$$I = \int_{(A)}^{(B)} ydx + x\,dy = \left| \begin{array}{c} y = x^2 \\ dy = 2x\,dx \end{array} \right| = \int_{-1}^{1} (x^2 + x \cdot 2x)\,dx = 3\int_{-1}^{1} x^2 dx = x^3 \Big|_{-1}^{1} = 2. \; \bullet$$

ІІІ. Завдання шляху інтегрування у полярних координатах – це коли дуга AB описується рівнянням $\rho = \rho(\varphi)$, де аргумент φ змінюється в межах від $\varphi = \alpha$ до $\varphi = \beta$ і точці A (B) відповідає значення φ, рівне α (β).

За формулами переходу від декартових координат до полярних маємо:

$$\begin{cases} x=\rho\cos\varphi, \\ y=\rho\sin\varphi \end{cases} \Rightarrow \left|\,\rho=\rho(\varphi)\,\right| \Rightarrow \begin{cases} x=\rho(\varphi)\cos\varphi, \\ y=\rho(\varphi)\sin\varphi \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=x(\varphi), \\ y=y(\varphi), \end{cases}$$

тобто приходимо до параметричного завдання шляху інтегрування: в ролі параметра t виступає полярний кут φ. Таким чином, одержуємо формулу, аналогічну формулі (22.3.12):

$$\int\limits_{AB} P\,dx+Q\,dy=\int\limits_{\alpha}^{\beta}\Big(P_1(\varphi)\,x'_{\varphi}+Q_1(\varphi)\,y'_{\varphi}\Big)d\varphi, \qquad (22.3.15)$$

де $P_1(\varphi)=P\big(\rho(\varphi)\cos\varphi,\rho(\varphi)\sin\varphi\big)$, $Q_1(\varphi)=Q\big(\rho(\varphi)\cos\varphi,\rho(\varphi)\sin\varphi\big)$.

Приклад. Обчислити $\int\limits_{AB} y\,dx+x\,dy$ вздовж кривої $\rho=2\cos\varphi$ від точки $A(2,0)$ до точки $B(\sqrt{2},\pi/4)$.

Розв'язання. Сумістимо декартову і полярну системи координат і побудуємо криву $\rho=2\cos\varphi$ (рис. 22.3.2).

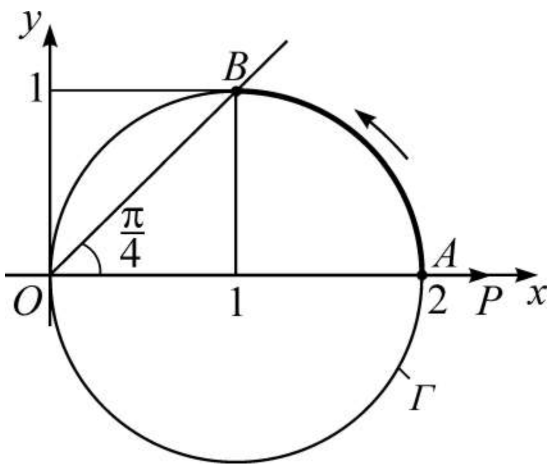


Рис. 22.3.2. **Шлях інтегрування**

Точкам A, B відповідають кути $\alpha=0$, $\beta=\pi/4$, а перехід до полярних координат дає:

$$\begin{cases} x=\rho\cos\varphi, \\ y=\rho\sin\varphi \end{cases} \Rightarrow \left|\,\rho=2\cos\varphi\,\right| \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x=2\cos^2\varphi, \\ y=\sin 2\varphi \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x'_{\varphi}=-2\sin 2\varphi, \\ y'_{\varphi}=2\cos 2\varphi \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow I=\int\limits_{(A)}^{(B)} y\,dx+x\,dy=\int\limits_{0}^{\pi/4}(-2\sin^2 2\varphi+4\cos^2\varphi\cdot\cos 2\varphi)\,d\varphi=$$

$$=\left|\begin{matrix} 2\cos^2\varphi=1+\cos2\varphi \\ \cos^2 2\varphi-\sin^2 2\varphi=\cos4\varphi \end{matrix}\right|=2\int\limits_{0}^{\pi/4}(\cos2\varphi+\cos4\varphi)d\varphi=\left(\sin2\varphi+\frac{\sin4\varphi}{2}\right)\Bigg|_{0}^{\pi/4}=1.$$

Якщо брати все коло Γ, то φ змінюється в межах одного оберту $(\varphi \in [0, 2\pi])$, а $\oint_{\Gamma} = 0$, і не суттєво, яку точку взяти за початкову: 0, $\pm\pi$ чи якусь іншу, тобто $\int_0^{2\pi} = \int_{\pi}^{3\pi} = \int_{-\pi}^{\pi} = \int_{\pi/2}^{5\pi/2} = 0$. ●

Зауваження. Якщо розглядати КРІ тільки за змінною x (y), тобто в (22.3.10) покласти $Q \equiv 0$ $(P \equiv 0)$, то, розглядаючи послідовно завдання контура в параметричній ($x = x(t)$, $y = y(t)$) і в явних формах ($y = y(x)$ або $x = x(y)$), одержимо:

– із (22.3.12):

$$\int_{AB} P(x, y)dx = \int_{\alpha}^{\beta} P(x(t), y(t))x_t' \, dt, \quad \int_{AB} Q(x, y)dy = \int_{\alpha}^{\beta} Q(x(t), y(t))y_t' \, dt; \qquad (22.3.16)$$

– із (22.3.13):

$$\int_{AB} P(x, y)dx = \int_{a}^{b} P(x, y(x))dx, \quad \int_{AB} Q(x, y)dy = \int_{a}^{b} Q(x, y(x))y_x' \, dx; \qquad (22.3.17)$$

– із (22.3.14):

$$\int_{AB} P(x, y)dx = \int_{c}^{d} P(x(y), y)x_y' \, dy, \quad \int_{AB} Q(x, y)dy = \int_{c}^{d} Q(x(y), y)dy. \qquad (22.3.18)$$

Наведені формули разом із тими, з яких вони одержуються, об’єднаємо загальною назвою – **формули зв’язку між КРІ-2 і визначеним інтегралом**.

Властивості КРІ, пов’язані з ПДІ та формою шляху інтегрування

Розглянемо плоску замкнену область D, обмежену кусково-гладким контуром Γ. Розіб’ємо її на дві підобласті D_1, D_2 (рис. 22.3.3) з кусково-гладкими межами Γ_1, Γ_2 відповідно і нехай Γ_{12} – спільна ланка цих меж

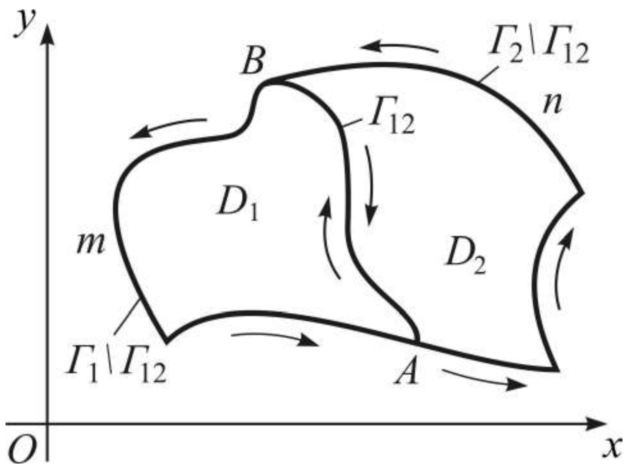


Рис. 22.3.3. **Розбиття області D на частини D_1, D_2**

як множина внутрішніх точок із області D: $\Gamma=(\Gamma_1\backslash\Gamma_{12})\bigcup(\Gamma_2\backslash\Gamma_{12})$.

Лема (*про КРІ по контурах зі спільною ділянкою*). Сума КРІ по зімкнених кусково-гладких контурах Γ_1 і Γ_2 зі спільною ділянкою Γ_{12} дорівнює КРІ по контуру Γ:

$$\oint_{\Gamma_1} + \oint_{\Gamma_2} = \oint_{\Gamma}, \qquad (22.3.19)$$

де $\Gamma=(\Gamma_1\backslash\Gamma_{12})\bigcup(\Gamma_2\backslash\Gamma_{12})$, або $\Gamma=(\Gamma_1\bigcup\Gamma_2)\backslash\Gamma_{12}$.

Д о в е д е н н я. Справедливість леми випливає з *адитивності* (4^0) КРІ і властивості *про зміну знака* (1^0). Згідно з рис. 22.3.3 маємо:

$$\oint_{\Gamma_1} + \oint_{\Gamma_2} = \left(\int_{AB} + \int_{BmA}\right) + \left(\int_{AnB} + \int_{BA}\right) = \oint_{\Gamma}, \quad \text{бо} \quad \int_{AB} + \int_{BA} = 0.$$

Цю властивість можна стлумачити як *адитивність КРІ-2 по контурах зі спільною ділянкою.* ■

Нехай $P=P(x,y)$, $Q=Q(x,y)$ – функції, задані на замкненій області D площини xOy, обмеженій лінією (контуром) Γ.

Теорема 22.3.2 (*формула Гріна*). Якщо функції $P(x,y)$, $Q(x,y)$, область D, контур Γ задовольняють умови теорем існування ПДІ і КРІ, до того ж частинні похідні $P'_y=\dfrac{\partial P}{\partial y}$, $Q'_x=\dfrac{\partial Q}{\partial x}$ неперервні в області D, то справедлива **формула зв'язку між ПДІ і КРІ**:

$$\iint_D \left(Q'_x - P'_y\right) dx\,dy = \oint_{\Gamma} P dx + Q dy. \qquad (22.3.20)$$

Д о в е д е н н я. Спочатку розглянемо випадки, коли D − область типу D_x чи D_y (див. рис. 21.2.3, 21.2.4). Нехай для визначеності це буде область $D_x=\{(x,y)\,|\, c\le y\le d,\ \psi_1(y)\le x\le \psi_2(y)\}$ (рис. 22.3.4), тоді

$$\Gamma = MN \bigcup \overset{\smile}{NT} \bigcup TS \bigcup \overset{\smile}{SM} = \left\{(x,y)\,\middle|\; x=\psi_1(y), x=\psi_2(y); y=c, y=d\right\}.$$

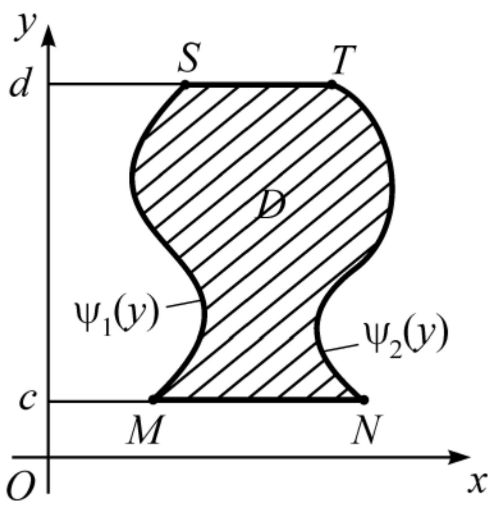


Рис. 22.3.4. **Область інтегрування**

Зразу зауважимо: за змінною y

$$\oint_{\Gamma} = \int_{MN} + \int_{NT} + \int_{TS} + \int_{SM} =$$

$$= \int_{NT} + \int_{SM}, \qquad (22.3.21)$$

бо відрізки MN і TS перпендикулярні до осі Oy.

Покажемо, що

$$I = \iint_D Q'_x \, dx \, dy = \oint_{\Gamma} Q dy. \quad (22.3.22)$$

Перехід у ПДІ до повторного інтеграла з зовнішнім інтегруванням за змінною y дає:

$$I = \int_c^d dy \int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} Q'_x \, dx.$$

У внутрішньому інтегралі змінна y, як відомо, тимчасово розглядається як стала, тому вираз $Q'_x \, dx$ є диференціалом функції $Q(x, y)$ за змінною x, а значить однією з первісних буде сама функція $Q(x, y)$.

Отже,

$$I = \int_c^d dy \int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} dQ(x, y) = \int_c^d dy \cdot Q(x, y)\Big|_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} = \int_c^d [Q(\psi_2(y), y) - Q(\psi_1(y), y)] dy =$$

$$= \int_c^d Q(\psi_2(y), y) dy - \int_c^d Q(\psi_1(y), y) dy. \qquad (22.3.23)$$

Враховуючи другу в (22.3.18) формулу зв’язку між КРІ і визначеним інтегралом при $x(y) = \psi_2(y)$, $x(y) = \psi_1(y)$ на шляхах NT, SM відповідно, маємо:

$$I = \int_{NT} Q(x, y) dy - \int_{MS} Q(x, y) dy = \int_{NT} Q(x, y) dy + \int_{SM} Q(x, y) dy. \qquad (22.3.24)$$

Права частина в (22.3.24) визначає, згідно з (22.3.21), контурний інтеграл $\int\limits_{\Gamma} Q(x,y)dy$. Таким чином, має місце (22.3.22).

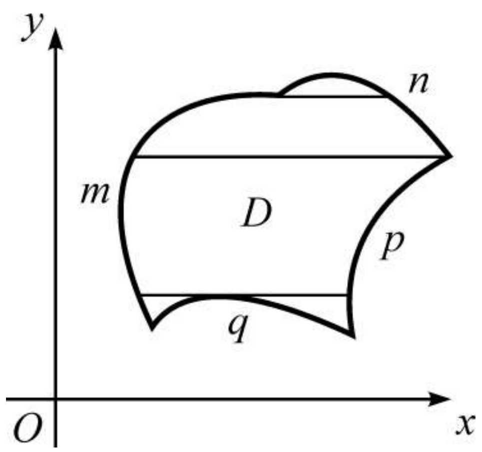
Для області $D_y = \{(x,y) \mid a \le x \le b,\ \varphi_1(x) \le y \le \varphi_2(x)\}$, правильної у напрямі осі Oy, аналогічним чином можна переконатися, що:

$$\iint\limits_{D_y} P'_y\, dx\, dy = -\oint\limits_{\Gamma} P dx, \quad \text{або} \quad -\iint\limits_{D_y} P'_y\, dx\, dy = \oint\limits_{\Gamma} P dx. \qquad (22.3.25)$$

Завдяки адитивності КРІ формули (22.3.22), (22.3.25) узагальнюються на випадок областей D, обмежених кусково-гладкими контурами, для яких можливе розбиття на скінченне число підобластей типу D_x, D_y прямими, паралельними відповідно осям Ox, Oy.

Нарешті, якщо область D одночасно задовольняє умови обох випадків, тобто розкладається (розбивається) як на області, правильні у напрямі Ox, так і (незалежно від цього) на області, правильні у напрямі Oy, то для неї справедливі обидві формули (22.3.22) і (22.3.25).

Така область D зображена на рис. 22.3.5. Її межа складається з чотирьох дуг гладких кривих (m, n, p, q). На рис. 22.3.5-а кожна частка розбиття обмежена зліва і справа дугою тільки однієї кривої, а на рис. 22.3.3-б кожна з ділянок − нижня і верхня − межі частки D є дугою однієї кривої.



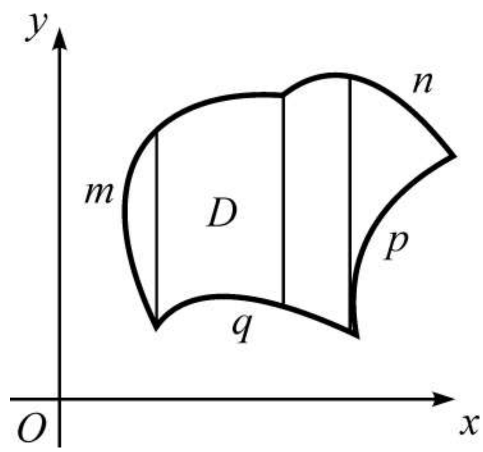


Рис. 22.3.5. **Ілюстрація розбиття D на частини, правильні у напрямі осі: а) Ox; б) Oy**

Згідно з лемою (22.3.19) обчислення КРІ на спільних ділянках контурів суміжних частин (підобластей) D не впливають на кінцевий результат. Склавши ліві і праві частини формул (22.3.22), (22.3.25), одержимо **формулу Гріна** (Джордж Грін (1793 – 1841 рр.) – англійський математик і фізик). Формула справедлива і для областей, які обмежені декількома кусково-гладкими контурами, наприклад, для кругового кільця; її можна читати і справа наліво:

$$\oint_{\Gamma} Pdx + Qdy = \iint_{D} (Q'_x - P'_y)\, dxdy\,. \blacksquare \tag{22.3.26}$$

Умови (критерій) рівності нулю контурного інтеграла

Критерій – необхідні і достатні умови – вказаної властивості КРІ виведемо, спираючись на формулу Гріна, тому всі розглядувані об’єкти – функції, лінії, області – повинні задовольняти теореми існування ПДІ і КРІ.

Теорема 22.3.3 (*критерій рівності нулю контурного інтеграла*). Якщо в усіх точках області D з межею Γ функції $P = P(x, y)$, $Q = Q(x, y)$ неперервні разом із частинними похідними Q'_x, P'_y, то КРІ по будь-якому (зімкненому) контуру Γ_0, який лежить у цій області, дорівнює нулю тоді і тільки тоді, коли на всій області D частинні похідні Q'_x і P'_y рівні між собою:

$$\left(\forall \Gamma_0 \subset D:\ \oint_{\Gamma_0} Pdx + Qdy = 0\right) \Leftrightarrow \left(Q'_x = P'_y\ \ \forall (x, y) \in D\right). \tag{22.3.27}$$

Достатність $(\Leftarrow)$ доводиться дуже легко.

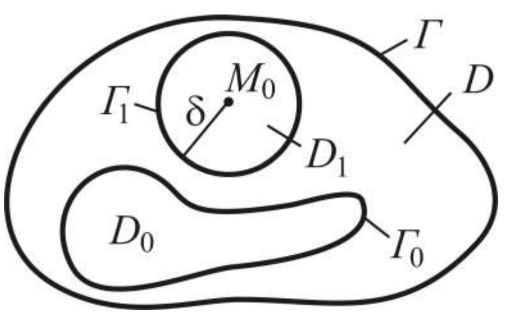


Рис. 22.3.6. **Контури $\boldsymbol{\Gamma_0}$, $\boldsymbol{\Gamma_1}$, які лежать в області $\boldsymbol{D}$**

Якщо умова $Q'_x = P'_y$ виконується в усіх точках із D, то вона матиме місце і в області D_0 − частині області D − з довільною межею Γ_0 (рис. 22.3.6).

Залучаючи формулу Гріна (для області D_0 і межі Γ_0), маємо:

$$\left(\oint_{\Gamma_0} Pdx + Qdy = \iint_{D_0} \left(Q'_x - P'_y\right) dx\, dy\right) \Rightarrow \left|\ Q'_x = P'_y\ \right| \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(\oint_{\Gamma_0} Pdx + Qdy = \iint_{D_0} 0 \cdot dx\, dy = 0\right).$$

Необхідність $(\Rightarrow)$ доведемо методом „від супротивного”. Нехай $\oint_{\Gamma_0} = 0$, де Γ_0 − довільний контур на D. Треба показати: $Q'_x = P'_y$ для всіх точок із D. Припустимо, що існує точка $M_0(x_0, y_0) \in D$, в якій $Q'_x(M_0) \neq P'_y(M_0)$, тобто $(Q'_x - P'_y)\big|_{M_0} > 0$ або $(Q'_x - P'_y)\big|_{M_0} < 0$. Розглянемо для визначеності другий випадок (перший розглядається аналогічно). Оскільки різниця $Q'_x - P'_y$ як різниця неперервних функцій є неперервною функцією (позначимо її через $\Phi(x, y)$), то вона (за властивостями неперервних функцій) зберігає свій знак у деякому δ-околі точки M_0 (див. рис. 22.3.4). Якщо позначити відповідний контур околу – коло з центром у точці M_0 і з радіусом δ − через Γ_1, а відповідну замкнену область – через D_1, то виходить: $\Phi(x, y) < 0 \ \ \forall (x, y) \in D_1$. Крім того, $\Phi(x, y)$ як неперервна на D_1 функція приймає в цій області свої найменше (m) і найбільше (M) значення: $m \le \Phi(x, y) \le M \ \ \forall (x, y) \in D_1$. У нас $m \le M < 0$, бо $\Phi(x, y) < 0$. З урахуванням цієї обставини за формулою Гріна (для області D_1 і межі Γ_1) маємо:

$$\oint_{\Gamma_1} Pdx + Qdy = \iint_{D_1} \Phi(x, y) dxdy \le \iint_{D_1} M dxdy = M \iint_{D_1} dxdy = M S_1 < 0,$$

де S_1 − площа області D_1.

Виходить, що $\oint_{\Gamma_1} < 0$, але це суперечить умові: $\oint_{\Gamma_0} = 0$, де Γ_0 − довільний контур на D, якщо взяти $\Gamma_0 = \Gamma_1$. Отже, припущення, що $(Q'_x - P'_y)\big|_{M_0} < 0$, невірне. Звідси випливає: $Q'_x - P'_y = 0 \ \ \forall (x, y) \in D$.

Таким чином, теорема повністю доведена. ■

Тепер, повертаючись до *прикладу* (див. рис. 22.3.2), де треба було обчислити $\int\limits_{AB} y\,dx + x\,dy$, цілком зрозуміло, чому $\oint\limits_{\Gamma} = 0$, де Γ − коло:

$$(P = y,\ Q = x) \ \Rightarrow\ (P'_y = Q'_x = 1).$$

Більше того, нулю дорівнюватимуть контурні КРІ по будь-якій зімкненій кривій площини xOy, бо $P'_y = Q'_x\ \forall (x, y) \in xOy$.

Умови незалежності КРІ від форми шляху інтегрування

Будемо говорити, що інтеграл $\int\limits_{AB} P\,dx + Q\,dy$ в області D **не залежить від форми шляху інтегрування**, якщо його значення по всіх можливих кусково-гладких кривих, які лежать у даній області і мають спільний початок (A) і спільний кінець (B), однакові, і писати:

$$\int\limits_{AB} P\,dx + Q\,dy = C(A, B), \tag{22.3.28}$$

де $C(A, B)$ − значення КРІ – стала C, яка визначається точками A, B.

Символічний запис підкреслює: КРІ-2 від заданих функцій залежить тільки від розташування початкової і кінцевої точок A і B на області D.

Виявляється, що означена незалежність КРІ-2 еквівалентна (рівносильна) рівності його нулю по будь-якому зімкненому контуру $\Gamma_0 \subset D$.

Теорема 22.3.4 (*критерій незалежності КРІ „мовою контурного інтеграла*”). Для того щоб інтеграл $\int\limits_{AB} P\,dx + Q\,dy$ в області D не залежав від форми шляху інтегрування, необхідно і достатньо, щоб інтеграл $\oint\limits_{\Gamma_0} Pdx + Qdy$ по будь-якому контуру $\Gamma_0 \subset D$ дорівнював нулю:

$$\begin{gathered}\forall (A \in D,\ B \in D): \int\limits_{AB} Pdx + Qdy = C(A, B) \ \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \forall \Gamma_0 \subset D: \oint\limits_{\Gamma_0} Pdx + Qdy = 0.\end{gathered} \tag{22.3.29}$$

Д о в е д е н н я спочатку проведемо для будь-яких двох кусково-гладких шляхів від A до B − AmB, AnB, − які не мають інших спільних точок, крім A та B (рис. 22.3.7), а потім покажемо, що це не порушує загальності твердження.

Необхідність $(\Rightarrow)$. Нехай $\int\limits_{AB}$ не залежить від форми шляху інтегрування, тобто $\int\limits_{AmB} = \int\limits_{AnB}$. Але, за властивістю про зміну знака, $\int\limits_{AnB} = -\int\limits_{BnA}$. Тоді $\int\limits_{AmB} = -\int\limits_{BnA}$, або $\int\limits_{AmB} + \int\limits_{BnA} = 0$. Оскільки шляхи AmB і BnA утворюють зімкнений контур (позначимо його через Γ_0), то виходить, що $\oint\limits_{\Gamma_0} = 0$.

Достатність $(\Leftarrow)$. Нехай $\oint\limits_{\Gamma_0} = 0$ для будь-якого $\Gamma_0 \subset D$. Виберемо Γ_0 так, щоб він утворювався дугами AmB і BnA, тобто $\Gamma_0 = AmBnA$, тоді:

$$\oint\limits_{\Gamma_0} = 0 \;\Rightarrow\; \int\limits_{AmB} + \int\limits_{BnA} = 0 \;\Rightarrow\; \int\limits_{AmB} - \int\limits_{AnB} = 0 \;\Rightarrow\; \int\limits_{AmB} = \int\limits_{AnB},$$

що і треба було довести.

Для стислості записів надалі дуги (криві) AmB, AnB позначимо через m, n відповідно. Якщо криві m, n перетинаються в точках, відмінних від A і B (рис. 22.3.8), розглянемо третю криву p, яка перетинається з m, n тільки в точках A, B. За доведеним $\int\limits_{m} = \int\limits_{p}$ і $\int\limits_{n} = \int\limits_{p}$, значить $\int\limits_{m} = \int\limits_{n}$.

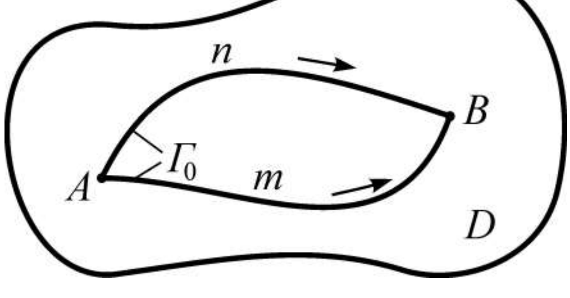


Рис. 22.3.7. **Шляхи інтегрування від A до B**

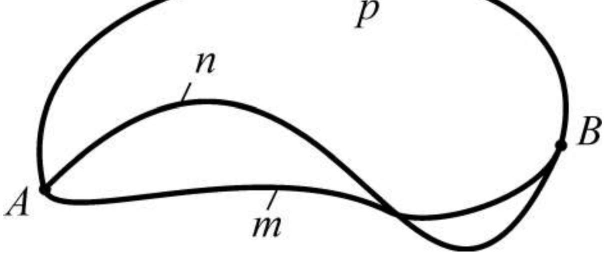


Рис. 22.3.8. **Шляхи від A до B різної форми**

Якщо залучити, як це робили з p, шлях будь-якої іншої форми і розглянути його в парі з одним із уже задіяних шляхів, то одержимо, що КРІ по цьому шляху буде такий же, як і по всіх інших шляхах.

Теорема доведена повністю. ■

Висновок із теорем 22.3.3, 22.3.4 можна записати стисло у вигляді ланцюжка еквівалентних тверджень:

$$\int\limits_{AB} = C(A,B) \Leftrightarrow \oint\limits_{\Gamma_0} = 0 \Leftrightarrow Q'_x = P'_y. \tag{22.3.30}$$

Пропонуємо дати його словесне формулювання.

Для просторового інтеграла $\int\limits_{AB} P\,dx + Q\,dy + R\,dz$ перша умова незалежності КРІ залишається без змін ($\oint\limits_{\Gamma_0} = 0$), а друга виглядає так:

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}; \quad \frac{\partial P}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial x}; \quad \frac{\partial Q}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial y}. \tag{22.3.31}$$

Ці співвідношення формально можна одержати, якщо покласти послідовно $R \equiv 0$, $Q \equiv 0$, $P \equiv 0$ і розглядати КРІ зі шляхом інтегрування в площинах xOy, xOz, yOz відповідно.

Існує ще один критерій незалежності КРІ, пов'язаний із поняттям повного диференціала (ПД) функції двох змінних і „ходовою" умовою: $Q'_x = P'_y$, яку надалі позначатимемо зірочкою $(*)$.

Нагадаємо, що ПД функції $u = u(x, y)$, згідно з означенням, має вигляд:

$$du = u'_x dx + u'_y dy, \quad \text{або} \quad du = \frac{\partial u}{\partial x} dx + \frac{\partial u}{\partial y} dy.$$

„Містком" для цього критерію слугує наступна теорема.

Теорема 22.3.5 (*критерій повного диференціала*). Вираз $P\,dx + Q\,dy$ в області D становить ПД деякої функції $u = u(x, y)$ тоді і тільки тоді, коли для всіх точок із D виконується умова $(*)$:

$$\exists u(x, y) : P\,dx + Q\,dy = du \Leftrightarrow Q'_x = P'_y \;\; \forall (x, y) \in D. \tag{22.3.32}$$

Необхідність $(\Rightarrow)$. Якщо $P\,dx+Q\,dy$ – ПД функції $u=u(x,y)$, тобто $P\,dx+Q\,dy=u'_x\,dx+u'_y\,dy$, то справедливі співвідношення: $P=u'_x \Rightarrow P'_y=u''_{xy}$, $Q=u'_y \Rightarrow Q'_x=u''_{yx}$.

За умовою P'_y, Q'_x – неперервні в області D функції, значить неперервні другі похідні u''_{xy}, u''_{yx}, тому вони (за теоремою про мішані частинні похідні) рівні між собою. Отже, $P'_y=Q'_x$.

Достатність $(\Leftarrow)$. Треба показати, що при виконанні умови $(*)$ можна знайти функцію $u=u(x,y)$, для якої $Pdx+Qdy=du$ – повний диференціал, тобто виконуються рівності:

$$u'_x=P\,,\qquad u'_y=Q\,. \tag{22.3.33}$$

Будемо шукати $u(x,y)$ у вигляді:

$$u=\int Pdx+\int \psi(y)dy\,,$$

де $\psi(y)$ – допоміжна (невідома поки що) функція тільки змінної y.

Досить встановити існування однієї функції $u(x,y)$, яка задовольняє умови (22.3.33), тому, розглядаючи невизначені інтеграли, будемо мати на увазі не всі первісні, а лише одну.

Перша умова із (22.3.33) виконується $(u'_x=P)$, бо похідна невизначеного інтеграла за змінною інтегрування дає підінтегральну функцію, а похідна другого доданка, незалежного від x, дорівнює нулю. За вимогою виконання другої умови маємо:

$$u'_y=\left(\int Pdx\right)'_y+\psi(y)=Q \;\Rightarrow\; \psi(y)=Q-\left(\int Pdx\right)'_y. \tag{22.3.34}$$

Вираз для $\psi(y)$ можна записати дещо інакше, якщо скористатися властивістю так званих інтегралів із параметрами (які ми детально не вивчаємо):

$$\left(\left(\int Pdx\right)'_y=\int P'_y\,dx\right) \;\Rightarrow\; \psi(y)=Q-\int P'_y\,dx\,, \tag{22.3.35}$$

де $P=P(x,y)$, y – параметр – змінна, яка „не бере участі в інтегруванні”.

Як бачимо, формально $\psi(y)$ як різниця функцій двох змінних теж повинна бути функцією двох змінних, адже $P = P(x, y)$, $Q = Q(x, y)$. Але завдяки умові (*) по суті вона буде тільки функцією від y, тобто $\psi'_x(y) = 0 \ \forall (x, y) \in D$. Дійсно,

$$Q'_x = P'_y \ \Rightarrow \ Q'_x = \left(\int P'_y\, dx\right)'_x \ \Rightarrow \ Q'_x - \left(\int P'_y\, dx\right)'_x = 0 \ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \ \left(Q - \int P'_y\, dx\right)'_x = 0 \ \Rightarrow \ \psi'_x(y) = 0.$$

Таким чином, шукана функція має вигляд: $u = \int P dx + \int \psi(y) dy$, де $\psi(y) = Q - \left(\int P dx\right)'_y$, або

$$u = \int P dx + \int \left[Q - \left(\int P dx\right)'_y \right] dy. \qquad (22.3.36)$$

Легко переконайтеся, що умови (22.3.33) виконуються. ■

Зауваження. Можна брати функцію $u = u(x, y)$ у вигляді:

$u = \int Q dy + \int \varphi(x) dx$, де $\varphi(x) = P - \left(\int Q dy\right)'_x$, або

$$u = \int Q dy + \int \left[P - \left(\int Q dy\right)'_x \right] dx, \qquad (22.3.37)$$

бо і в цьому випадку $u'_x = P$, $u'_y = Q$.

Загалом, якщо функції $u = u(x, y)$, про які йдеться, існують, то їх нескінченно багато, бо вони подаються через невизначені інтеграли.

Теорема 22.3.6 (*критерій незалежності КРІ „мовою повного диференціала”*). Для того щоб інтеграл $\int\limits_{AB} P dx + Q dy$ в області D не залежав від форми шляху інтегрування, необхідно і достатньо, щоб у цій області вираз $P dx + Q dy$ був повним диференціалом деякої функції $u = u(x, y)$:

$$\forall (A \in D,\ B \in D): \int\limits_{AB} P dx + Q dy = C(A, B) \ \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \ \exists u = u(x, y): \ P dx + Q dy = du. \qquad (22.3.38)$$

Д о в е д е н н я вельми лаконічне: справедливість (22.3.38) випливає як наслідок із теорем:

22.3.3: $\oint\limits_{\Gamma_0} = 0 \;\Leftrightarrow\; Q'_x = P'_y$;

22.3.4: $\int\limits_{AB} = C(A,B) \;\Leftrightarrow\; \oint\limits_{\Gamma_0} = 0$;

22.3.5: $P\,dx + Q\,dy = du \;\Leftrightarrow\; Q'_x = P'_y$. ■

Висновок з усього розглянутого стосовно незалежності КРІ подається ланцюжком рівносильних тверджень:

$$\int\limits_{AB} = C(A,B) \;\Leftrightarrow\; \oint\limits_{\Gamma_0} = 0 \;\Leftrightarrow\; Q'_x = P'_y \;\Leftrightarrow\; P\,dx + Q\,dy = du, \qquad (22.3.39)$$

які відповідають наведеним теоремам.

Тепер порушимо питання (в загальному аспекті) про те, як визначається в (22.3.28) стала $C(A,B)$, яка, звичайно буде різною (при фіксованих A, B) для різних підінтегральних функцій.

Задача 22.3.1. Показати, що

$$\int\limits_{AB} P\,dx + Q\,dy = C(A,B) = u(B) - u(A), \qquad (22.3.40)$$

тобто якщо КРІ не залежить від форми шляху інтегрування, який з'єднує точки A і B, то він дорівнює різниці значень у точках B і A функції $u = u(x,y)$ такої, що $du = P\,dx + Q\,dy$.

Розв'язання. Будемо виходити з того, що функція $u = u(x,y)$ відома (у протилежному випадку звернемося до (22.3.36) чи (22.3.37)), тоді

$$I = \int\limits_{AB} P\,dx + Q\,dy = \int\limits_{AB} du = \int\limits_{AB} u'_x\,dx + u'_y\,dy.$$

Нехай дуга AB описується рівняннями $x = x(t)$, $y = y(t)$, де параметр t змінюється в межах від α до β і точці A (B) відповідає значення t, рівне α (β). Здійснимо перехід від КРІ до визначеного інтеграла (див. (22.3.12)) і обчислимо його:

$$(u = u(x,y) = u(x(t),y(t)) = U(t),\quad U_t'(t) = u_x' \cdot x_t' + u_y' \cdot y_t') \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left| \begin{matrix} dx = x_t'\,dt \\ dy = y_t'\,dt \end{matrix} \right| \Rightarrow I = \int_{(A)}^{(B)} du = \int_{\alpha}^{\beta} U_t'(t)\,dt = U(t)\Big|_{\alpha}^{\beta} = U(\beta) - U(\alpha) =$$

$$= u\,(x(\beta),y(\beta)) - u\,(x(\alpha),y(\alpha)) = u(B) - u(A).$$

Отже, $C(A,B) = u(B) - u(A)$.

Приклад. З'ясувати, чи залежить КРІ-2

$$I = \int_{A(0,0)}^{B(1,1)} xy^2dx + \left(x^2y + y^3\right)dy$$

від форми шляху інтегрування. Якщо „ні", обчислити його.

1^0. *Перевіряємо* виконання умови $(*)$:

$$\left.\begin{matrix} P = xy^2 & \Rightarrow & P_y' = 2xy \\ Q = x^2y + y^3 & \Rightarrow & Q_x' = 2xy \end{matrix}\right] \Rightarrow P_y' = Q_x' \;\; \forall (x,y) \in xOy;$$

отже, КРІ визначається тільки точками A, B.

2^0. *Знаходимо* функцію $u = u(x,y)$, для якої підінтегральний вираз є ПД, за формулою (22.3.36):

$$u = \int P\,dx + \int \left[Q - \left(\int P\,dx \right)_y' \right] dy.$$

За умовою прикладу установлюємо компоненти формули:

$$\int P\,dx = \int xy^2dx = y^2 \int x\,dx = \frac{x^2y^2}{2};\quad \left(\int P\,dx \right)_y' = \left(\frac{x^2y^2}{2} \right)_y' = x^2y;$$

$$\int \left[Q - \left(\int P\,dx \right)_y' \right] dy = \int \left(x^2y + y^3 - x^2y \right) dy = \int y^3\,dy = \frac{y^4}{4}.$$

Таким чином, одна з функцій, ПД якої – підінтегральний вираз, така:

$$u = \frac{x^2y^2}{2} + \frac{y^4}{4}.$$

3^0. *Обчислюємо* КРІ-2: $I = u(B) - u(A) = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$; таким буде значення КРІ, яким би за формою шляхом не йшли від A до B.

Виходить, що для обчислення КРІ можна було б і не знаходити функцію $u = u(x, y)$, а вибрати довільну форму шляху від A до B; зокрема, взяти відрізок прямої від A до B або ще простіше – ламану з ланками, паралельними осям координат. Наприклад, ламану AA_1B, де $A_1 = A_1(1,0)$, або ламану AA_2B, де $A_2 = A_2(0,1)$. ●

Насамкінець викладу основ теорії криволінійних інтегралів коротко торкнемося питання про зв'язок КРІ-1 і КРІ-2.

Установимо на $AB \subset \mathbf{R}^2$ напрям від A до B і виберемо в якості параметра довжину s дуги AM, де $M(x, y)$ – поточна точка кривої. При цьому $s_A = 0$, $s_B = l$ (l – довжина дуги AB) і параметричне рівняння кривої запишеться у вигляді:

$$x = x(s),\ y = y(s),\ 0 \le s \le l .$$

Якщо позначити через α, β кути нахилу до осей координат дотичної до кривої, напрямленої у бік зростання параметра s, виявляється, що:

$$\cos\alpha = x'(s),\ \cos\beta = y'(s) .$$

Ураховуючи ці співвідношення і формули, які виражають КРІ-1 і КРІ-2 через визначені інтеграли, отримаємо:

$$\int\limits_{AB} P(x, y)\,dx = \int\limits_{AB} P(x, y)\cos\alpha\,ds ,$$
$$\int\limits_{AB} Q(x, y)\,dy = \int\limits_{AB} Q(x, y)\cos\beta\,ds .$$

Для КРІ-2 загального вигляду формула має вигляд:

$$\int\limits_{AB} P(x, y)\,dx + Q(x, y)\,dy = \int\limits_{AB} (P(x, y)\cos\alpha + Q(x, y)\cos\beta)\,ds .$$

Аналогічні співвідношення, за тією ж логікою, можна отримати і у випадку просторової кривої.

22.4. Застосування криволінійного інтеграла 2-го роду

Геометричні застосування КРІ-2

Задача (*обчислення площі плоскої фігури).* За допомогою КРІ-2 знайти площу фігури (області) D, обмеженої зімкненою кусково-глáдкою лінією Γ.

Розв'язання задачі достатньо дати для областей типу D_x, D_y (див. рис. 21.2.3, 21.2.4), правильних відповідно у напрямі осі Ox, Oy (як чинити з більш складними областями, вже відомо).

До формул для обчислення площі за допомогою КРІ-2 можна прийти, спираючись на їх зв'язок із визначеним інтегралом (див. (22.3.16), (22.3.17), (22.3.18)), який у геометричному смислі виражає площу криволінійної трапеції. Проте, для цього можна використати формулу Гріна (22.3.20):

$$\iint\limits_D \left(Q'_x - P'_y\right) dx\, dy = \oint\limits_\Gamma P dx + Q dy .$$

Вона є джерелом нескінченного числа формул для обчислення площі за допомогою КРІ. Дійсно, подвійний інтеграл по області D з підінтегральною функцією $f(x, y) \equiv 1$, як відомо, дає чисельно площу області D (21.4.2):

$$\iint\limits_D dx\, dy = S_D .$$

Отже, якщо у формулі Гріна підінтегральні функції під знаком контурного інтеграла вибрати так, що в усій області $Q'_x - P'_y = 1$, то контурний інтеграл, як і ПДІ, виражатиме площу (писатимемо просто S) області D:

$$Q'_x - P'_y = 1 \quad \forall (x, y) \in D \;\Rightarrow\; S = \oint\limits_\Gamma P\, dx + Q\, dy . \qquad (22.4.1)$$

Для відшукання відповідних функцій: $P = P(x, y)$, $Q = Q(x, y)$, у загальному випадку діють таким чином: одну з функцій (P або Q) вибирають довільно, а іншу визначають згідно зі співвідношенням $Q'_x - P'_y = 1$.

При довільному виборі $P = P(x, y)$ інтегруванням за змінною x відновлюємо функцію (точніше, одну із функцій) $Q = Q(x, y)$:

$$Q'_x - P'_y = 1 \Rightarrow Q'_x = P'_y + 1 \Rightarrow Q = \int (P'_y + 1)\, dx = \int P'_y\, dx + x.$$

З урахуванням того, що $\int P'_y\, dx = \left(\int P\, dx\right)'_y$ (див. (22.3.35)), отримаємо:

$$S = \oint_{\Gamma} P dx + \left(\left(\int P\, dx\right)'_y + x\right) dy. \qquad (22.4.2)$$

Аналогічно діємо при довільному виборі $Q = Q(x, y)$:

$$Q'_x - P'_y = 1 \Rightarrow P'_y = Q'_x - 1 \Rightarrow P = \int \left(Q'_x - 1\right) dy = \int Q'_x\, dy - y \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left| \int Q'_x\, dy = \left(\int Q\, dy\right)'_x \right| \Rightarrow S = \oint_{\Gamma} \left(\left(\int Q\, dy\right)'_x - y\right) dx + Q dy. \qquad (22.4.3)$$

Задачу розв’язано.

Приклад. Знайти формулу для обчислення площі за допомогою КРІ-2, якщо $P(x, y) = x^2 + y$.

Знаходимо компоненту при dy формули (22.4.2) і записуємо шукану формулу:

$$P = x^2 + y \Rightarrow \int P\, dx = \int (x^2 + y)\, dx = \frac{x^3}{3} + xy \Rightarrow \left(\int P\, dx\right)'_y = x \Rightarrow$$

$$\Rightarrow S = \oint_{\Gamma} (x^2 + y) dx + 2x dy;$$

Неважко переконатися, що $Q'_x - P'_y = 1$: $(P = x^2 + y,\ Q = 2x) \Rightarrow$
$\Rightarrow (P'_y = 1,\ Q'_x = 2)$. ●

У частинних випадках із (22.4.1) маємо:

$$(P = 0,\ Q = x) \Rightarrow S = \oint_{\Gamma} x\, dy, \qquad (22.4.4)$$

$$\left(P = -y,\ Q = 0\right) \Rightarrow S = -\oint_{\Gamma} y dx, \qquad (22.4.5)$$

$$\left(P=-\frac{y}{2},\ Q=\frac{x}{2}\right) \ \Rightarrow\ S=\frac{1}{2}\oint\limits_{\Gamma} xdy-ydx. \qquad (22.4.6)$$

Формулу (22.4.6) можна одержати на основі (22.4.4), (22.4.5) за допомогою середнього арифметичного.

Наведені формули слушно застосовувати відповідно, коли D – правильна область у напрямі осі Ox, Oy, осей Ox і Oy.

Приклад. Обчислити за допомогою КРІ-2 площу фігури, обмеженої астроїдою $x=a\cos^3 t$, $y=b\sin^3 t$.

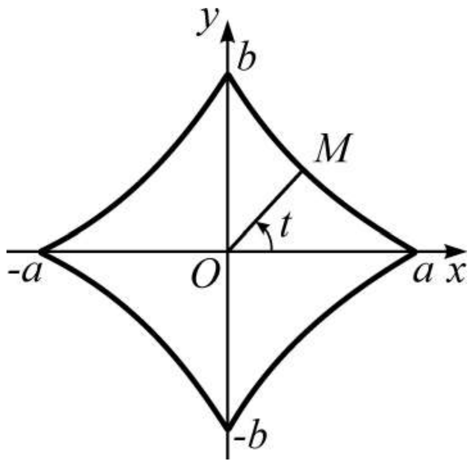


Рис. 22.4.1. **Область, обмежена астроїдою**

Задана область є правильною відносно обох осей координат, тому застосовуємо формулу (22.4.6).

Параметр t означає кут нахилу довільного радіуса-вектора OM до осі Ox (рис. 22.4.1): $0\le t\le 2\pi$.

Здійснимо в підінтегральному виразі перехід до змінної t:

$$\left.\begin{array}{l} x=a\cos^3 t \Rightarrow dx=-3a\cos^2 t\sin t\,dt \\ y=b\sin^3 t \Rightarrow dy=3b\sin^2 t\cos t\,dt \end{array}\right]\Rightarrow$$

$$\Rightarrow xdy-ydx=(3ab\cos^4 t\sin^2 t+3ab\sin^4 t\cos^2 t)\,dt=3ab\sin^2 t\cos^2 t\,dt=$$

$$=3ab\left(\frac{1}{2}\sin 2t\right)^2 dt=\frac{3}{4}ab\sin^2 2t\,dt=\frac{3}{8}ab(1-\cos 4t)\,dt,$$

тоді

$$S=\frac{3}{16}ab\int_0^{2\pi}(1-\cos 4t)\,dt=\frac{3}{16}ab\left(t-\frac{1}{4}\sin 4t\right)\Big|_0^{2\pi}=\frac{3\pi}{8}ab \text{ (кв. од.).}$$

Можна переконатися, що застосування (22.4.4) чи (22.4.5) приводять до більш складних визначених інтегралів. ●

Задача (*обчислення об'єму циліндричного тіла*). За допомогою КРІ-2 знайти об'єм V тіла, обмеженого: зверху – поверхнею, заданою рівнянням $z=f(x,y)$, де $f(x,y)\ge 0$, знизу – областю $D\subset xOy$ з межею Γ, з боків – циліндричною поверхнею, твірна якої паралельна осі Oz, а напрямною є лінія Γ.

Розв’язання. За умови, що розглядувані геометричні об’єкти задовольняють формулу Гріна, діємо аналогічно тому, як це робилося при розв’язанні попередньої задачі. Відомо (див. (21.4.1)), що через ПДІ об’єм подається формулою:

$$V = \iint\limits_D f(x, y)\, dx\, dy .$$

Отже, якщо у формулі Гріна підінтегральні функції під знаком контурного інтеграла вибрати так, що $Q'_x - P'_y = f(x, y) \;\; \forall (x, y) \in D$, то КРІ, як і ПДІ, виражатиме об’єм циліндричного тіла:

$$Q'_x - P'_y = f(x, y) \;\; \forall (x, y) \in D \;\; \Rightarrow \;\; V = \oint\limits_\Gamma P dx + Q dy . \tag{22.4.7}$$

У загальному випадку, за аналогією з (22.4.2), (22.4.3), одержуємо:

– при довільному виборі $P(x, y)$:

$$V = \oint\limits_\Gamma P dx + \Big(\big(\int P dx \big)'_y + \int f(x, y) dx \Big) dy ; \tag{22.4.8}$$

– при довільному виборі $Q(x, y)$:

$$V = \oint\limits_\Gamma \Big(\big(\int Q dy \big)'_x - \int f(x, y) dy \Big) dx + Q dy . \tag{22.4.9}$$

Задачу розв’язано.

У частинних випадках отримуємо формули, які, за звичаєм, і застосовуються на практиці:

$$\big(P = 0,\; Q'_x = f(x, y) \big) \;\Rightarrow\; Q = \int f(x, y)\, dx \;\Rightarrow$$
$$\Rightarrow\; V = \oint\limits_\Gamma \Big(\int f(x, y)\, dx \Big)\, dy ; \tag{22.4.10}$$

$$\big(Q = 0,\; P'_y = -f(x, y) \big) \;\Rightarrow\; P = -\int f(x, y) dy \;\Rightarrow$$
$$\Rightarrow\;\; V = -\oint\limits_\Gamma \Big(\int f(x, y)\, dy \Big)\, dx ; \tag{22.4.11}$$

$$\left(P = -\frac{1}{2} \int f(x, y) dy,\;\; Q = \frac{1}{2} \int f(x, y) dx \right) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow\; V = \frac{1}{2} \oint\limits_\Gamma \Big(\int f\, dx \Big)\, dy - \Big(\int f\, dy \Big) dx . \tag{22.4.12}$$

Наведені формули значно спрощуються для випадку, коли $f(x,y) \equiv C - const$ $(C \neq 0,\ C \neq 1)$, тобто коли верхня основа тіла, як і нижня, – кусок площини.

Якщо область D – нижня основа фігури – розташована не у площині xOy, а в xOz чи yOz, то відповідно приходимо до контурних інтегралів: $\oint\limits_{\Gamma} Pdx + Rdz$ або $\oint\limits_{\Gamma} Qdy + Rdz$, де P, Q, R – функції двох відповідних змінних.

Приклад. Обчислити за допомогою КРІ-2 об'єм тіла, обмеженого поверхнями $x^2 + z^2 = 1$, $x + y - 4 = 0$, $y=0$ (див. рис. 21.4.1).

Для розглядуваного тіла:

$$D = \left\{(x,z) \middle| x^2 + z^2 \leq 1\right\},\quad \Gamma = \left\{(x,z) \middle| x^2 + z^2 = 1\right\},\quad y = f(x,z) = 4 - x.$$

У цьому випадку краще скористатися формулою типу (22.4.11):

$$V = -\oint\limits_{\Gamma} \left(\int f(x,z)\,dz\right) dx,$$

у якій $\int f(x,z)dz = \int (4-x)dz = 4z - xz$ (беремо одну первісну), тобто:

$$V = -\oint\limits_{\Gamma} (4z - xz)\,dx.$$

Здійснюємо перехід до визначеного інтеграла з урахуванням того, що Γ у параметричній формі описується рівняннями: $x = \cos t$, $z = \sin t$, де $t \in [0,2\pi]$, а $dx = -\sin t\,dt$:

$$V = -\int\limits_0^{2\pi} (4\sin t - \cos t \sin t)(-\sin t\,dt) = \int\limits_0^{2\pi} \left(4\sin^2 t - \cos t \sin^2 t\right) dt =$$

$$= 2\int\limits_0^{2\pi} (1 - \cos 2t)\,dt - \int\limits_0^{2\pi} \sin^2 t\, d(\sin t) = 2\left(t - \frac{1}{2}\sin 2t\right)\Bigg|_0^{2\pi} - \frac{\sin^3 t}{3}\Bigg|_0^{2\pi} = 4\pi \text{ (куб. од.)}.$$

При застосуванні КРІ-2 фактично теж приходимо, як і при використанні ПДІ, до повторного інтегрування: перший раз – невизначеного $\left(\int f(x,z)dz\right)$, другий – визначеного (за параметром t). ●

Фізичні застосування КРІ-2

Задача (*відшукання роботи змінної сили*). Обчислити роботу, яка виконується силою $\overline{F}$ при переміщенні матеріальної точки $M \in xOy$ вздовж кривої L від точки A до точки B, якщо величина і напрям сили припускаються залежними тільки від положення точки $M(x, y)$, тобто $\overline{F} = \overline{F}(M) = \overline{F}(x, y)$.

Розв'язання. За умовою $\overline{F}$ визначається координатами (x, y) точки M, тоді її проекції $F_x = P$, $F_y = Q$ на осі координат є функціями від x і y: $P = P(x, y)$, $Q = Q(x, y)$, тобто:

$$\overline{F}(x, y) = P(x, y) \cdot \overline{i} + Q(x, y) \cdot \overline{j}, \qquad (22.4.13)$$

де $\overline{i}$, $\overline{j}$ – одиничні вектори (орти) на осях Ox, Oy.

Із механіки відомо: якщо діюча сила $\overline{F}$ постійна за величиною і напрямом, а переміщення $\overline{\Delta s} = \Delta x \cdot \overline{i} + \Delta y \cdot \overline{j}$ прямолінійне (рис. 22.4.2), то робота $\mathscr{A}$ визначається як скалярний добуток сили $\overline{F}$ на вектор переміщення $\overline{\Delta s}$:

$$\mathscr{A} = \overline{F} \cdot \overline{\Delta s} = P \cdot \Delta x + Q \cdot \Delta y; \qquad P,\ Q - const. \qquad (22.4.14)$$

У випадку непрямолінійного шляху (рис. 22.4.3) і змінної сили величину виконаної роботи можна підрахувати так:

– *розіб'ємо* AB на дужечки Δl_i, $i = \overline{1, n}$, і нехай $\lambda = \max\limits_i \{\lambda_i\}$ – діаметр розбиття;

– *виберемо* на кожній із дужечок довільним чином по точці $M_i(\xi_i, \eta_i)$, $i = \overline{1, n}$, і *припустимо*: в точках Δl_i діюча сила $\overline{F_i}$ стала і рівна її значенню в точці M_i, під дією цієї сили матеріальна точка рухається не по Δl_i, а по вектору $\overline{\Delta s_i} = \Delta x_i \cdot \overline{i} + \Delta y_i \cdot \overline{j}$; робота сили $\overline{F_i} = \overline{F}(M_i)$ вздовж $\overline{\Delta s_i}$ є наближеним значенням роботи $\mathscr{A}_i$ вздовж дужечки Δl_i: $\mathscr{A}_i \approx \overline{F}(M_i) \cdot \overline{\Delta s_i}$;

– *знайдемо* наближено роботу $\mathscr{A}$ на всьому шляху AB як суму робіт $\mathscr{A}_i$:

$$\mathscr{A} \approx \sum_{i=1}^{n} \mathscr{A}_i = \sum_{i=1}^{n} P(M_i)\cdot \Delta x_i + \sum_{i=1}^{n} Q(M_i)\cdot \Delta y_i\,. \tag{22.4.15}$$

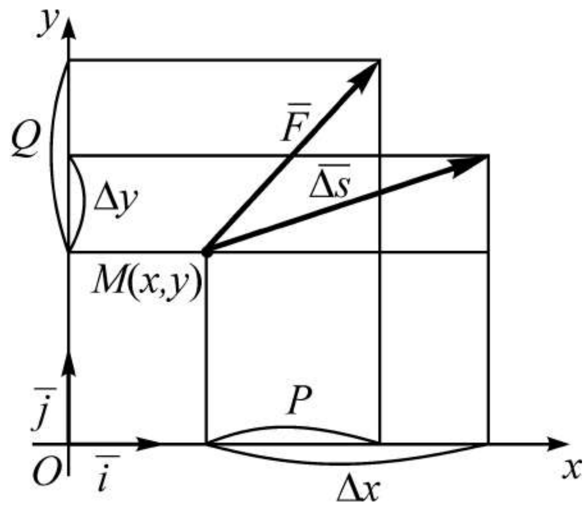


Рис. 22.4.2. **Сила $\overline{F}$, переміщення $\overline{\Delta s}$ та їхні проекції на осі координат**

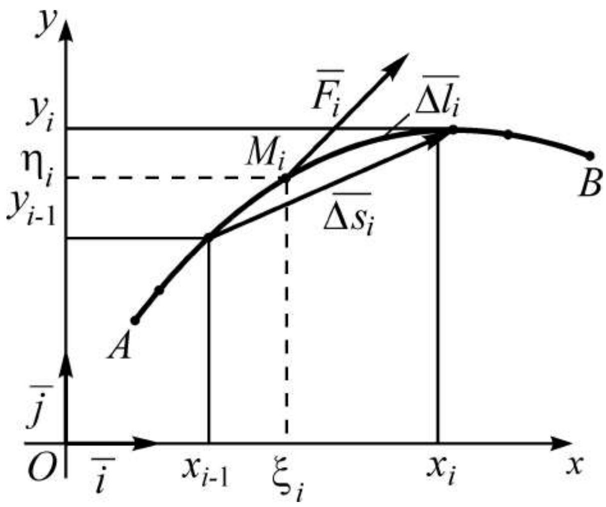


Рис. 22.4.3. **Розбиття AB на дужечки Δl_i**

Це наближення буде тим краще, чим менші за довжиною будуть дужечки Δl_i, тому природно за точне значення роботи $\mathscr{A}$ по переміщенню матеріальної точки $M(x, y)$ вздовж кривої L із точки A до точки B прийняти границю, до якої прямує знайдене наближене значення при прямуванні до нуля діаметра розбиття λ (разом з $n \to \infty$):

$$\mathscr{A} = \lim_{\substack{\lambda\to 0\\(n\to\infty)}} \sum_{i=1}^{n} \mathscr{A}_i = \lim_{\substack{\lambda\to 0\\(n\to\infty)}} \left(\sum_{i=1}^{n} P(M_i)\cdot \Delta x_i + \sum_{i=1}^{n} Q(M_i)\cdot \Delta y_i \right). \tag{22.4.16}$$

Зіставляючи наведені кроки з процедурою введення абстрактного поняття КРІ-2 (див. (22.3.1) – (22.3.3)), робимо ***висновок***: робота $\mathscr{A}$ змінної сили $\overline{F}$ на криволінійному шляху AB чисельно дорівнює КРІ-2 загального вигляду по дузі AB від функцій $P = P(x, y)$, $Q = Q(x, y)$ – проекцій сили $\overline{F}$ на координатні осі. Задача розв'язана:

$$\mathscr{A} = \int_{AB} P\,dx + Q\,dy\,. \tag{22.4.17}$$

Якщо матеріальна точка рухається у тривимірному просторі $xOyz$, то формула для обчислення роботи сили $\overline{F} = (F_x, F_y, F_z)$ на шляху AB має вигляд:

$$\mathscr{A} = \int\limits_{AB} P\,dx + Q\,dy + R\,dz, \tag{22.4.18}$$

де P, Q, R – проекції сили $\overline{F}$ на координатні осі – функції змінних x, y, z.

Приклад. Знайти роботу сили $\overline{F}(x,y) = -yz\cdot\overline{i} + xz\cdot\overline{j} + xy\cdot\overline{k}$ при переміщенні матеріальної точки з точки $A(1,0,0)$ до точки $B(1,0,2)$ вздовж першого витка гвинтової лінії (рис. 22.4.4) – лінії, яка перетинає всі твірні циліндра $x^2 + y^2 = 1$ під одним і тим самим кутом.

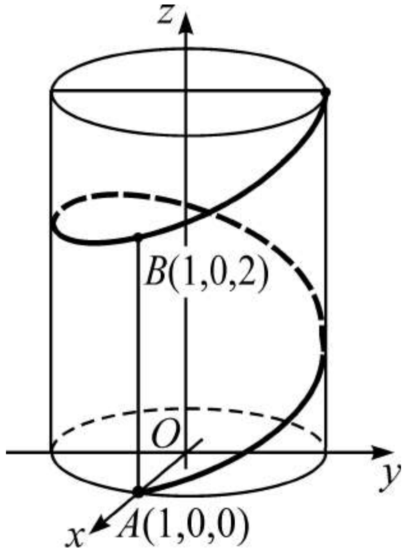


Рис. 22.4.4. **Гвинтова лінія**

Загальні параметричні рівняння гвинтової лінії такі:

$$x = a\cos t,\ y = a\sin t,\ z = bt.$$

Неважко установити, що у нашому випадку ($a = 1,\ b = 1/\pi$):

$$x = \cos t \ \Rightarrow\ dx = -\sin t\,dt,$$
$$y = \sin t \ \Rightarrow\ dy = \cos t\,dt,$$
$$z = t/\pi \ \Rightarrow\ dz = dt/\pi;$$
$$0 \le t \le 2\pi.$$

Переходимо до визначеного інтеграла і обчислюємо його:

$$\mathscr{A} = \int\limits_{AB} -yz\,dx + xz\,dy + xy\,dz = \int\limits_0^{2\pi}\left(\frac{1}{\pi}t\sin^2 t + \frac{1}{\pi}t\cos^2 t + \frac{1}{\pi}\cos t\sin t\right)dt =$$

$$= \frac{1}{\pi}\int\limits_0^{2\pi}\left(t + \frac{1}{2}\sin 2t\right)dt = \frac{1}{\pi}\left(\frac{t^2}{2} - \frac{1}{4}\cos 2t\right)\Bigg|_0^{2\pi} = 2\pi.$$

(*Перевірте*, чи залежить розглянутий КРІ-2 від форми шляху інтегрування).

Звичайно, траєкторією руху матеріальної точки може бути і зімкнена лінія (це залежить від природи і характеру діючої сили).

Насамкінець зазначимо, що КРІ-2 широко застосовуються до обчислення інтегральних характеристик так званих векторних полів.

22.5. Поняття про поверхневі інтеграли

Поверхневі інтеграли за площею поверхні (першого роду – ПВІ-1)

Поняття „поверхневий інтеграл за площею поверхні” являє собою узагальнення поняття „подвійний інтеграл” на випадок, коли задана область є частиною не плоскої поверхні – площини, – а деякої криволінійної поверхні в просторі $xOyz$.

Нехай деяка поверхня описується рівнянням $z = f(x, y)$, а S – кусок поверхні, обмежений замкненою лінією L, який проектується на область S_{xy} площини xOy; $u = F(x, y, z)$ – функція трьох змінних, визначена в точках куска S.

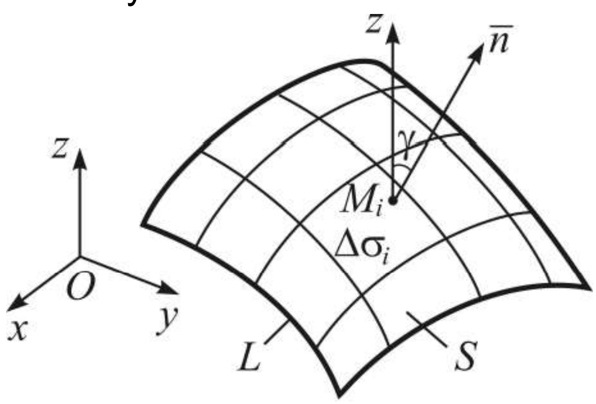


Рис. 22.5.1. **Розбиття куска поверхні на частини**

Для введення поняття „ПВІ-1” проробимо такі ж дії, як і при розгляді ПДІ (рис. 22.5.1):

– *розіб’ємо* ... ($\Delta\sigma_i$, $i = \overline{1, n}$);

– *виберемо* ... $(M_i(x_i, y_i, z_i))$;

– *складемо* ... ($I_n = \sum\limits_{i=1}^{n} F(M_i) \cdot \Delta\sigma_i$);

– *обчислимо* ... ($I = \lim\limits_{\substack{\lambda \to 0 \\ (n \to \infty)}} I_n$).

Скінченна границя I інтегральної суми I_n (якщо вона існує) при $\lambda \to 0$ (разом з $n \to \infty$) називається **поверхневим інтегралом від функції** $F(x, y, z)$ **за площею поверхні** S і позначається так:

$$I = \iint\limits_S F(x, y, z) d\sigma, \tag{22.5.1}$$

де $\iint$ – знак (символ) ПВІ-1;

S – область інтегрування;

$F(x, y, z)$ – підінтегральна функція;

$d\sigma$ – диференціал (елемент) площі поверхні;

$F(x, y, z) \, d\sigma$ – підінтегральний вираз.

Основні властивості ПВІ-1 аналогічні властивостям подвійних інтегралів (див. п. 21.2).

Поверхневі інтеграли за координатами (другого роду – ПВІ-2)

Поверхневі інтеграли другого роду можна розглядати як узагальнення ПДІ, подібне до того, яким криволінійні інтеграли другого роду є відносно визначеного інтеграла. При вивченні КРІ-2 розглядалась напрямлена крива, а у відповідних інтегральних сумах значення функції в точках кривої помножались на взяті з певним знаком довжини проекцій дужечок на координатні осі (див. п. 22.3). У випадку поверхневого інтеграла поняття напряму кривої заміняється поняттям сторони поверхні, а при складанні інтегральних сум значення функції в точках поверхні помножаються на взяті з певним знаком площі проекцій поверхонь поділу на координатні площини. Наведемо формалізацію означення поняття поверхневого інтеграла другого роду.

Нехай S: $z = f(x, y)$ – гладка двостороння поверхня, яка обмежена зімкненою лінією L, S_{xy} – її проекція на площину xOy, $R = R(x, y, z)$ – функція трьох змінних, яка визначена в точках куска S. Виберемо одну зі сторін поверхні, наприклад, верхню (як це показано на рис. 22.5.1) і відповідний напрям вектора нормалі $\overline{n} = (\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)$ в кожній її точці. Відповідно до вибраної сторони поверхні кут $\gamma = (n, z)$ буде гострим або тупим, що і визначатиме знак, з яким треба брати проекцію елемента поверхні на xOy (для побудови інтегральної суми). Складання інтегральної суми здійснюється за стандартною схемою (див. рис. 22.5.1.):

– *розіб'ємо* ... $\left(\Delta\sigma_i,\ i = \overline{1, n}\right)$;

– *виберемо* ... $(M_i(x_i, y_i, z_i))$;

– *складемо* ... $\left((I_n)_{xy} = \sum\limits_{i=1}^{n} R(M_i)(\Delta\sigma_i)_{xy}\right.$, де $(\Delta\sigma_i)_{xy}$ – проекція $\Delta\sigma_i$ на xOy з урахуванням вибору сторони поверхні;

– *обчислимо* ... $\left(I_{xy} = \lim\limits_{\substack{\lambda\to 0\\(n\to\infty)}} (I_n)_{xy}\right)$.

Скінченна границя I_{xy} інтегральної суми $(I_n)_{xy}$ при $\lambda \to 0$ (разом з $n \to \infty$) називається **поверхневим інтегралом** по вибраній стороні поверхні S від функції $R(x, y, z)$ за координатами x, y і позначається так:

$$I_{xy} = \iint\limits_S R(x, y, z)\,dx\,dy. \qquad (22.5.2)$$

Запитання для самодіагностики засвоєння матеріалу

Відповіді на всі запитання сформулюйте словесно, запишіть у символічній формі, обґрунтуйте (на підставі означень, теорем, правил, формул тощо), наведіть відповідні конкретні приклади.

1. Наведіть кроки (дії), які передують означенню криволінійного інтеграла за довжиною дуги (КРІ-1).

2. Дайте означення КРІ-1 (словесне і в символах).

3. У чому полягає: а) геометричний смисл; б) фізичний смисл КРІ-1?

4. Наведіть основні властивості КРІ-1, аналогічні властивостям визначеного інтеграла (сформулюйте і запишіть у символах); укажіть, на чому базується загальний підхід доведення цих властивостей.

5. Сформулюйте теорему існування КРІ-1.

6. Якою властивістю не володіє визначений інтеграл на відміну від КРІ-1?

7. Опишіть, як обчислюється КРІ-1, якщо шлях інтегрування задано: а) у параметричній формі; б) явно; в) у полярних координатах (до кожного випадку наведіть аналітичні викладки та конкретні приклади на обчислення).

8. Які геометричні застосування має КРІ-1?

9. Які фізичні застосування має КРІ-1?

10. Наведіть кроки (дії), які передують означенню криволінійного інтегралу за координатою x (КРІ-2).

11. Дайте означення (словесне і в символах) криволінійного інтеграла за координатою x (y, загального вигляду); розтлумачте складові символічного позначення КРІ-2.

12. Наведіть основні властивості КРІ-2, аналогічні властивостям визначеного інтеграла (сформулюйте і запишіть у символах); укажіть, на чому базується загальний підхід доведення цих властивостей.

13. Сформулюйте теорему існування КРІ за координатами.

14. Опишіть, як обчислюється КРІ-2, якщо шлях інтегрування задано: а) явно; б) у параметричній формі; в) у полярних координатах (до кожного випадку наведіть аналітичні викладки та конкретні приклади на обчислення).

15. Запишіть та доведіть формулу зв’язку КРІ-2 з ПДІ; розтлумачте її складові частини; сформулюйте, при виконанні яких умов вона справедлива.

16. Сформулюйте критерій рівності нулю контурного інтеграла та доведіть його.

17. Сформулюйте і доведіть теорему про незалежність КРІ-2 від форми шляху інтегрування; наведіть приклад виконання відповідних умов.

18. Укажіть, за яких умов підінтегральний вираз КРІ-2 загального вигляду є повним диференціалом деякої функції двох змінних. Наведіть конкретний приклад виконання цих умов.

19. Виведіть формулу Ньютона – Лейбніца для КРІ від повного диференціала; наведіть конкретний приклад її застосування.

20. Опишіть, як знайти функцію $u(x, y)$ за її повним диференціалом.

21. Запишіть формулу для обчислення площі плоскої фігури за допомогою КРІ-2; проілюструйте застосування на прикладі).

22. Яка формула є джерелом виведення нескінченного числа формул для обчислення площі плоскої фігури? Запишіть відповідну формулу; укажіть, яку умову вона повинна задовольняти і чому саме таку. Наведіть конкретний приклад виконання цієї умови.

23. Запишіть формулу для обчислення об'єму циліндричного тіла за допомогою КРІ-2 (наведіть міркування щодо її виведення; проілюструйте застосування на прикладі).

24. Як за допомогою КРІ-2 обчислити роботу змінної сили по переміщенню матеріальної точки вздовж заданої кривої? Запишіть відповідну формулу; наведіть міркування щодо її виведення; проілюструйте застосування на прикладі).

Задачі та вправи

Розв'язування всіх задач і виконання вправ слід супроводжувати геометричними ілюстраціями.

1. Обчислити задані криволінійні інтеграли 1-го роду вздовж кривої L від точки A до точки B або – усієї кривої у додатному напрямі обходу:

1) $\int\limits_L \frac{y+2x^2}{2\sqrt{5}}\,dl$, де L – відрізок прямої між точками $A(1,2)$ і $B(2,4)$;

2) $\int\limits_L \frac{y+2x^2}{\sqrt{3x^2-y+4}}\,dl$, де L: $y=3-x^2$, $A(0,3), B(2,-1)$;

3) $\int\limits_L \frac{y\sin x}{\sqrt{1+\cos^2 x}}\,dl$, де $L:\ y=\sin x$, $A(0,0)$, $B(\pi,0)$;

4) $\int\limits_L \frac{y}{4x+1}\,dl$, де $L:\ y=\sqrt{x}$, $A(0,0)$, $B(4,2)$;

5) $\int\limits_L \frac{x+0{,}5}{\sqrt{4x-y^2+1}}\,dl$, де $L:\ y^2=2x$, $A(0,0)$, $B(2,2)$;

6) $\int\limits_L \frac{x^3}{\sqrt{1+x^2}}\,dl$, де $L:\ y=\ln x$, $A(1,0)$, $B(e,1)$;

7) $\int\limits_L \frac{8x^4}{y}\,dl$, де $L:\ xy=2$, $A(1,2)$, $B(2,1)$;

8) $\int\limits_L (x^2+y^2)^3\,dl$, де $L:\ x^2+y^2=R^2$, $A(R,0)$, $B(0,R)$;

9) $\int\limits_L \sqrt{x^2+y^2}\,dl$, де $L:\ x^2+y^2=2y$;

10) $\int\limits_L \frac{dl}{\sqrt{8-x^2-y^2}}$, де L – відрізок прямої, що з'єднує точки $A(0,0)$ і $B(2,2)$;

11) $\int\limits_L x^4\cdot\sqrt[4]{y}\,dl$, де $L:\ y=x^4$, $A(0,0)$, $B(1,1)$;

12) $\int\limits_L y^2\,dl$, де $L:\ x=a(t-\sin t)$, $y=a(1-\cos t)$ $(0\le t\le 2\pi)$;

13) $\int\limits_L xy\,dl$, де $L:\ \frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{9}=1$ $(x\ge 0,\ y\ge 0)$;

14) $\int\limits_L arctg\frac{y}{x}\,dl$, де L – частина спіралі Архімеда $\rho=2\varphi$, що міститься всередині круга радіуса R з центром у полюсі;

15) $\int\limits_L (x^{4/3}+y^{4/3})\,dl$, де $L:\ x^{2/3}+y^{2/3}=a^{2/3}$;

16) $\int\limits_L (x+2y^2-3z)\,dl$, де L – відрізок прямої, що з'єднує точки $A(0,1,2)$ і $B(2,-1,0)$;

17) $\int\limits_L \frac{z^2}{y^2+x^2}\,dl$, де L – перший виток гвинтової лінії $x = a\cos t$, $y = a\sin t$, $z = at$;

18) $\int\limits_L xyz\,dl$, де L – чверть кола: $x^2+y^2+z^2=R^2$, $x^2+y^2=R^2/4$ ($x\ge 0$, $y\ge 0$, $z\ge 0$).

2. Знайти довжину дуги заданої кривої L (або усієї кривої):

1) L: $y = 1-\ln\cos x$ $(0\le x\le \pi/4)$;

2) L: $y=\frac{a}{2}(e^{x/a}+e^{-x/a})$ $(0\le x\le a)$;

3) L: $x^{2/3}+y^{2/3}=a^{2/3}$;

4) L: $\rho = 1+\cos\varphi$ $(0\le\varphi\le 2\pi)$;

5) L: $x=a(t-\sin t)$, $y=a(1-\cos t)$ $(0\le t\le 2\pi)$;

6) L: $ay^2=x^3$ $(0\le x\le 5a)$.

3. Знайти масу дуги заданої кривої L (або усієї кривої), якщо відома її лінійна густина $\gamma=\gamma(x,y)$:

1) L: $y=\ln x$ $(1\le x\le 3)$; $\gamma(x,y)=x^2$;

2) L: $\rho=\sqrt{\sin 2\varphi}$ $(0\le\varphi\le\pi/2)$; $\gamma(x,y)=x+y$;

3) L: $x^2+y^2=6y$; $\gamma(x,y)=y$;

4) L: $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}=1$ $(x\ge 0,\ y\ge 0)$; $\gamma(x,y)=y$;

5) L: $x=3\cos t$, $y=3\sin t$, $z=4t$ $(0\le t\le 2\pi)$; $\gamma(x,y)=4z$;

6) L – дуга OA кривої $y^2=2x$, де $O(0{,}0)$, $A(1,\sqrt{2})$; $\gamma(x,y)=xy$.

4. Знайти статичний момент відносно осі Ox чверті еліпса $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1$, розташованої в першій координатній чверті, якщо її лінійна густина $\gamma(x,y)=x$.

5. Знайти статичний момент відносно осі Oy правого пелюстка лемніскати Бернуллі $(x^2+y^2)^2=4(x^2-y^2)$, якщо його лінійна густина $\gamma(x,y)=1$.

6. Знайти моменти інерції відносно координатних осей відрізка прямої $y=1-2x$ ($x\ge 0$, $y\ge 0$), якщо його лінійна густина $\gamma(x,y)=\sqrt{5}$.

7. Знайти момент інерції відносно початку координат дуги кола $x^2+y^2=4$ ($x\ge 0$, $y\ge 0$), якщо її лінійна густина $\gamma(x,y)=1$.

8. Знайти координати центра маси дуги кривої L (або усієї кривої), якщо відома її лінійна густина $\gamma=\gamma(x,y)$:

1) L: $x^2+y^2=1$ ($y\ge 0$); $\gamma(x,y)=y$;

2) L: $x=a(t-\sin t)$, $y=a(1-\cos t)$ $(0\le t\le \pi)$; $\gamma(x,y)=const$;

3) L: $x^{2/3}+y^{2/3}=a^{2/3}$ ($y\ge 0$); $\gamma(x,y)=const$;

4) L: $\rho=a(1+\cos\varphi)$ $(0\le\varphi\le 2\pi)$; $\gamma(x,y)=const$;

5) L: $x=a\cos t$, $y=a\sin t$, $z=bt$ $(0\le t\le\pi)$; $\gamma(x,y)=const$;

6) L: $y^2=ax^3-x^4$; $\gamma(x,y)=const$.

9. Обчислити площу циліндричної поверхні, обмеженої знизу площиною xOy, а зверху – поверхнею $z=f(x,y)$, якщо відомо рівняння напрямної L цієї циліндричної поверхні:

1) $f(x,y)=\sqrt{2x-4x^2}$, L: $y^2=2x$;

2) $f(x,y)=\dfrac{xy}{2R}$, L: $x^2+y^2=R^2$;

3) $f(x,y)=2-\sqrt{x}$, L: $y^2=\dfrac{4}{9}(x-1)^3$;

4) $f(x,y)=R+\dfrac{x^2}{R}$, L: $x^2+y^2=R^2$;

5) $f(x,y)=x$, L: $y=\dfrac{3}{8}x^2$ $(0\le x\le 4)$.

10. Обчислити площу бічної поверхні параболічного циліндра $y=x^2$, обмеженого площинами $z=0$, $z=2x$, $x=0$, $x=1$.

11. Обчислити наступні криволінійні інтеграли 2-го роду вздовж заданих ліній інтегрування L:

1) $\int\limits_L y^2dx + 2xydy$, L: $x = a\cos t$, $y = a\sin t$;

2) $\int\limits_L ydx - xdy$, L: $x = a\cos t$, $y = b\sin t$;

3) $\int\limits_L \frac{xdx}{x^2 + y^2} - \frac{ydy}{x^2 + y^2}$, L: $x^2 + y^2 = R^2$;

4) $\int\limits_L \frac{ydx + xdy}{x^2 + y^2}$, L: $y = x \quad (1 \le x \le 2)$;

5) $\int\limits_L yzdx + xzdy + xydz$, L: $x = a\cos t$, $y = a\sin t$, $z = kt$, $t \in [0.2\pi]$;

6) $\int\limits_L xdy - ydx$, L: $x = a\cos^3 t$, $y = a\sin^3 t$;

7) $\int\limits_L xdy - ydx$, L: $x = \frac{3at}{1+t^3}$, $y = \frac{3at^2}{1+t^3}$;

8) $\int\limits_L y^2dx + 2xydy$, L: $y = \sqrt[3]{x} \quad (0 \le x \le 1)$;

9) $\int\limits_L \frac{xdx + ydy + zdz}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2 - x - y + 2z}}$, L – відрізок прямої, що з'єднує точки $A(1,1,1)$ і $B(4,4,4)$;

10) $\int\limits_L y^2dx + z^2dy + x^2dz$, L: $\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = R^2, \\ x^2 + y^2 = Rx \end{cases}$ $(R > 0,\ z \ge 0)$ (додатний напрям обходу, якщо дивитися з початку координат).

12. Переконатися, що наведені криволінійні інтеграли 2-го роду не залежать від форми шляху інтегрування, і обчислити їх:

1) $\int\limits_{(-1,-1)}^{(2,2)} (x^2 + 2xy - y^2)dx + (x^2 - 2xy + y^2)dy$;

2) $\int\limits_{(0,1)}^{(1,2)} \frac{2x}{y^3}dx + \frac{y^2 - 3x^2}{y^4}dy$;

3) $\int\limits_{(1,\pi)}^{(2,\pi)}\left(1-\frac{y^2}{x^2}\cos\frac{y}{x}\right)dx+\left(\sin\frac{y}{x}+\frac{y}{x}\cos\frac{y}{x}\right)dy$;

4) $\int\limits_{(1,0)}^{(0,1)}\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}+y\right)dx+\left(\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}+x\right)dy$;

5) $\int\limits_{(0,0)}^{(1,\pi)} e^x(\cos y dx-\sin y dy)$;

6) $\int\limits_{(-2,-1)}^{(3,0)}(x^4+4xy^3)dx+(6x^2y^2-5y^4)dy$;

7) $\int\limits_{(1,-1,2)}^{(2,1,3)} xdx-y^2dy+zdz$;

8) $\int\limits_{(7,2,3)}^{(5,3,1)}\frac{zxdy+xydz-yzdx}{(x-yz)^2}$.

13. Обчислити наведені криволінійні інтеграли 2-го роду за допомогою формули Гріна:

1) $\oint\limits_L xdy$, де L – контур трикутника, утвореного осями координат і прямою $3x+2y-6=0$;

2) $\oint\limits_L (x^2+y^2)dy$, де L – контур чотирикутника з вершинами в точках $O(0,0)$, $A(2,0)$, $B(4,4)$, $C(0,4)$;

3) $\oint\limits_L (1-x^2)ydx+(1+y^2)xdy$, де L – коло $x^2+y^2=R^2$;

4) $\oint\limits_L y\cos x\,dx+(\cos y+\sin x)dy$, де L – еліпс $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$;

5) $\oint\limits_L e^x\left[(1-\cos y)\,dx-(y-\sin y)dy\right]$, де L – контур, який обмежує область $0\le x\le\pi$, $0\le y\le\sin x$.

6) $\oint\limits_L \sqrt{x^2+y^2}dx+y(xy+\ln(x+\sqrt{x^2+y^2}))$, де L – контур прямокутника $ABCD$ з вершинами в точках $A(1,1)$, $B(7,1)$, $C(7,4)$, $D(1,4)$.

14. Обчислити площу фігур, обмежених заданими лініями:

1) $y=x^4$, $y=1$;

2) $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$;

3) $x^{2/3}+y^{2/3}=a^{2/3}$;

4) $(x^2+y^2)^2=2a^2(x^2-y^2)$;

5) $(x+y)^3=xy$;

6) $x=a(2\cos t-\cos 2t)$, $y=a(2\sin t-\sin 2t)$ $(0\le t\le 2\pi)$.

15. Знайти роботу сили $\overline{F}=F_x\cdot\overline{i}+F_y\cdot\overline{j}+F_z\cdot\overline{k}$ в $\mathbf{R}^3$ ($\overline{F}=F_x\cdot\overline{i}+F_y\cdot\overline{j}$ в $\mathbf{R}^2$) вздовж кривої L від точки A до точки B або – усієї кривої у додатному напрямі обходу:

1) $\overline{F}=xy\cdot\overline{i}+(x+y)\cdot\overline{j}$, L: $y=x^3$, $A(0,0)$, $B(1,1)$;

2) $\overline{F}=x^2\cdot\overline{i}-\overline{j}-yz\cdot\overline{k}$, L – відрізок прямої між точками $A(1,-1,2)$ і $B(2,0,3)$;

3) $\overline{F}=\dfrac{x+2y}{(x+y)^2}\cdot\overline{i}+\dfrac{y}{(x+y)^2}\cdot\overline{j}$, L: $y=1$, $A(1,1)$, $B(3,1)$;

4) $\overline{F}=-4y\cdot\overline{i}+(4y-3x)\cdot\overline{j}$, L – контур прямокутника з вершинами $A(2,-6)$, $B(2,6)$, $C(-2,6)$, $D(-2,-6)$;

5) $\overline{F}=(y^2-z^2)\cdot\overline{i}+2yz\cdot\overline{j}-x^2\cdot\overline{k}$, L: $x=t$, $y=t^2$, $z=t^3$, $A(0,0,0)$ і $B(1,1,1)$;

6) $\overline{F}=\dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\cdot\overline{i}-\dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\cdot\overline{j}+\dfrac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\cdot\overline{k}$, L – контур, який утворюється перетином частини сфери $x^2+y^2+z^2=1$ ($x\ge 0$, $y\ge 0$, $z\ge 0$) з координатними площинами.

Відповіді

1. 1) $23/6$; 2) $26/3$; 3) $\pi/2$;

4) $\frac{1}{4}(\sqrt{17}-1)$; 5) $7/3$; 6) $\frac{1}{3}(e^3-1)$;

7) $70\sqrt{5}/3$; 8) $\pi R^7/2$; 9) 8;

10) $\pi/2$; 11) $\frac{1}{144}(17\sqrt{17}-1)$; 12) $\frac{256}{15}a^3$;

13) $148/7$; 14) $\frac{1}{12}((R^2+4)^{3/2}-8)$; 15) $4a^{7/3}$;

16) $-8\sqrt{3}/3$; 17) $\frac{8\sqrt{2}}{3}a\pi^3$; 18) $\sqrt{3}R^4/32$.

2. 1) $\ln(1+\sqrt{2})$; 2) $\frac{a}{2}(e+e^{-1})$; 3) $6a$;

4) 8; 5) $8a$; 6) $335/27$.

3. 1) $\frac{1}{3}(10\sqrt{10}-2\sqrt{2})$; 2) 2; 3) 18π;

4) $8+\frac{50}{3}\arcsin\frac{3}{5}$; 5) $8\pi^2$; 6) $\frac{1}{3}(3\sqrt{3}-1)$.

4. $M_x = 38/5$.

5. $M_y = 4\sqrt{2}$.

6. $I_x = 5/6$, $I_y = 5/24$.

7. $I_o = 4\pi$.

8. 1) $x_c = 0$, $y_c = \pi/4$; 2) $x_c = 4a/3$, $y_c = 4a/3$;

3) $x_c = 0$, $y_c = 2a/5$; 4) $x_c = 5a/6$, $y_c = 0$;

5) $x_c = 0$, $y_c = 2a/\pi$, $z_c = b\pi/2$; 6) $x_c = 5a/8$, $y_c = 0$.

9. 1) $\pi/4$; 2) R^2; 3) $11/3$;

4) $3\pi R^2$; 5) $\frac{16}{27}(10\sqrt{10}-1)$.

10. $\frac{1}{6}(\sqrt{8}-1)$.

11. 1) 0; 2) $-2\pi ab$; 3) 0;

4) $\ln 2$; 5) 0; 6) $3\pi a^2/4$;

7) $3a^2$; 8) 1; 9) $3\sqrt{3}$;
10) $-\pi R^3/4$.

12. 1) 6; 2) $5/8$; 3) $\pi+1$;
4) 0; 5) $-1-e$; 6) 64;
7) $10/3$; 8) $-9/2$.

13. 1) 3; 2) $112/3$; 3) $\pi R^4/2$;
4) 0; 5) $\frac{1}{5}(1-e^{\pi})$; 6) 147 .

14. 1) $8/5$; 2) πab; 3) $\frac{3}{8}\pi a^2$;
4) $2a^2$; 5) $1/60$; 6) $6\pi a^2$.

15. 1) $17/12$; 2) $5/2$; 3) $\frac{1}{4}+\ln 2$;
4) 48; 5) $1/35$; 6) 0.

Ключові терміни

Дуга кривої, розбиття, інтегральна сума, границя, криволінійний інтеграл за довжиною дуги (за координатами), шлях інтегрування, теорема існування, циліндрична поверхня, геометричний смисл, фізичний зміст, властивості, обчислення, форма завдання (параметрична, явна, полярна), застосування (геометричні, фізичні), довжина дуги, площа, об'єм, маса, статичний момент, момент інерції, центр мас.

Резюме

Висвітлюються основні положення теорії криволінійних інтегралів. Розглядаються криволінійні інтеграли за довжиною дуги (першого роду) і криволінійні інтеграли за координатами (другого роду); виклад теоретичного матеріалу супроводжується ілюстративними прикладами.

Установлюється геометричний і фізичний смисл інтегралів, і відповідно до цього розв'язуються задачі застосовного характеру.

Література: [3; 6; 9; 14; 24; 28 – 30; 35].

Використана література

1. Антонова А. О. Математичні методи економічної динаміки: теорія та методичні вказівки / А. О. Антонова. – К. : НАУ, 2006. – 38 с.

2. Берман Г. Н. Сборник задач по курсу математического анализа / Г. Н. Берман. – М. : Наука, 2002. – 384 с.

3. Кратні і криволінійні інтеграли. Теорія поля. Ряди. Теорія функцій комплексного змінного і елементи операційного числення. Ч. 4. : робочий зошит / укл. І. В. Брисіна, О. В. Головченко, В. Ф. Деменко та ін. – Х. : ХАІ, 2000. – 286 с.

4. Васильченко І. П. Вища математика для економістів : підручник / І. П. Васильченко. – К. : Знання-Прес, 2002. – 454 с.

5. Вища математика: основні означення, приклади і задачі : навч. посібн. Кн. 2 / І. П. Васильченко, В. Я. Данилов, А. І. Лобанов та ін. – К. : Либідь, 1994. – 480 с.

6. Вища математика. Збірник задач : навч. посібн. / В. П. Дубовик, І. І. Юрик, І. П. Вовкодав та ін. ; за ред. В. П. Дубовика, І. І. Юрика. – К. : Вид. А.С.К., 2003. – 480 с.

7. Высшая математика для экономистов / под ред. проф. Н. Ш. Кремера. – М. : Банки и биржи, ЮНИТИ-ДАНА, 1997. – 440 с.

8. Вища математика: основні означення, приклади і задачі. Ч. 2 / за ред. проф. І. П. Васильченка. – К. : Либідь, 1994. – 280 с.

9. Вища математика. Розв'язання задач та варіанти типових розрахунків. Ч. 2. : навч. посібн. / за ред. Л. В. Курпи. – Х. : ХДПУ, 1999. – 280 с.

10. Давыдов А. Г. Сигналы и линейные системы: тематические лекции / А. Г. Давыдов. – Екатеринбург : УГГУ ; ИГиГ ; Фонд электронных документов, 2005. – 262 с.

11. Данко П. Е. Высшая математика в упражнениях и задачах : учебн. пособ. для вузов : в 2-х ч. / П. Е. Данко, А. Г. Попов, Т. Я. Кожевникова. – 6-е изд. – М. : Издательский дом „ОНИКС 21 век" ; Мир и Образование, 2003. – Ч. 1. – 304 с. ; Ч. 2. – 416 с.

12. Денисова Т. В. Тексти лекцій „Криволінійні і кратні інтеграли. Векторне поле" з курсу „Вища математика" / Т. В. Денисова, В. Ф. Сенчуков. – Х. : Вид. ХНЕУ, 2004. – 112 с.

13. Дороговцев А. Я. Математичний аналіз : підручник : у 2-х ч. Ч. 2 / А. Я. Дороговцев. – К. : Либідь, 1994. – 304 с.

14. Дубовик В. П. Вища математика : навч. посібн. / В. П. Дубовик, І. І. Юрик. – К. : Вид. А.С.К., 2004 – 648 с.

15. Ефимов А. И. Сборник задач по математике для втузов : учебное пособие для втузов : в 4 ч. Ч. 2 / под общ. ред. А. В. Ефимова, А. С. Поспелова. – 4-е изд. перераб. и доп. – М. : Изд. Физико-математической литературы, 2001. – 432 с.

16. Игнатьева А. В. Курс высшей математики / А. В. Игнатьева, Т. И. Краснощекова, В. Ф. Смирнов. – М. : Высшая школа, 1968. – 692 с.

17. Киселев А. И. Сборник задач по обыкновенным дифференциальным уравнениям / А. И. Киселев, М. Л. Краснов, Г. И. Макаренко. – М. : Высшая школа, 1965. – 236 с.

18. Корн Г. Справочник по математике для научных работников и инженеров / Г. Корн, Т. Корн ; под ред. И. Г. Арамановича ; пер. с англ. ; – М. : Наука, 1970. – 720 с.

19. Кудрявцев В. А. Краткий курс высшей математики / В. А. Кудрявцев, В. П. Демидович. – М. : Наука, 1978. – 656 с.

20. Кудрявцев Л. Д. Современная математика и ее преподавание / Л. Д. Кудрявцев. – М. : Наука, 1985. – 176 с.

21. Матвеев Н. М. Сборник задач и упражнений по обыкновенным дифференциальным уравнениям : сборник задач для втузов. – 6-е изд., испр. и доп. – Мн. : Вышейшая школа, 1987. – 319 с.

22. Мочерний С. В. Економічна теорія / С. В Мочерний. – К. : ВЦ „Академія”, 1999. – 656 с.

23. Петровский И. Г. Лекции по теории обыкновенных дифференциальных уравнений / И. Г. Петровский. – М. : Наука, 1964. – 272 с.

24. Пискунов Н. С. Дифференциальное и интегральное исчисления. Т. 1, 2 / Н. С. Пискунов. – М. : Наука, 1972. – Т. 1. – 456 с. ; Т. 2. – 576 с.

25. Понтрягин Л. С. Обыкновенные дифференциальные уравнения / Л. С. Понтрягин. – М. : Наука, 1965. – 332 с.

26. Робоча програма навчальної дисципліни „Вища математика” для студентів напряму підготовки „Комп’ютерні науки” всіх форм навчання / укл. В. Ф. Сенчуков, Т. В. Денисова. – Х. : Вид. ХНЕУ, 2011. – 60 с.

27. Самойленко А. М. Диференціальні рівняння у прикладах і задачах / А. М. Самойленко, С. А. Кривошея, М. О. Перестюк. – К. : Вища школа, 1994. – 456 с.

28. Сборник задач по высшей математике. 1 курс / К. Н. Лунгу, Д. Т. Письменный, С. Н. Федин и др. – М. : Айрис- пресс, 2004. – 576 с.

29. Сенчуков В. Ф. Індивідуальні завдання та методичні рекомендації до їх виконання з навчальної дисципліни „Вища математика" для студентів напряму підготовки „Комп'ютерні науки" всіх форм навчання / В. Ф. Сенчуков, Т. В. Денисова. – Х. : Вид. ХНЕУ, 2008. – 104 с.

30. Сенчуков В. Ф. Вища математика. Спеціальні розділи : навч. посібн. / В. Ф. Сенчуков, Т. В. Денисова. – Х. : Вид. ХНЕУ, 2010. – 408 с.

31. Тевяшев А. Д. Высшая математика : сборник задач и упражнений / А. Д. Тевяшев, А. Г. Литвин. – Х. : ХТУРЭ, 1999. – 192 с.

32. Травкін Ю. І. Математика для економістів : підручник / Ю. І. Травкін, Л. М. Малярець. – Х. : ВД „ІНЖЕК", 2005. – 816 с.

33. Филиппов А. Ф. Сборник задач по дифференциальным уравнениям / А. Ф. Филиппов. – Ижевск : НИЦ „Регулярная и хаотическая динамика", 2000. – 176 с.

34. Фихтенгольц Г. М. Курс дифференциального и интегрального исчисления : в 3 т. Т. 2 / Г. М. Фихтенгольц. – М. : Физматгиз, 1962. – 808 с.

35. Фихтенгольц Г. М. Курс дифференциального и интегрального исчисления : в 3 т. Т. 3 / Г. М. Фихтенгольц. – М. : Физматгиз, 1963. – 656 с.

Покажчик позначень

y' ($y' = dy/dx$) – похідна функції $y = y(x)$ за змінною x, 6 (10)

$\forall$ – квантор загальності (для всіх …), 6

$\rightleftharpoons$ – знак еквіваленції за означенням, 6

$\in$ ($\notin$) – знак належності (неналежності), 6 (241)

$\mathbf{R}$ ($\mathbf{Z}$) – множина дійсних (цілих) чисел, 6 (11)

$\mathbf{R}^2$, $\mathbf{R}^3$, $\mathbf{R}^n$ – дво-, три-, n-вимірні простори, 7, 218, 182

$\{x \mid P(x)\}$ – множина елементів x із властивістю $P(x)$, 7

$f'_y(x, y) = \partial f/\partial y$, ($f'_x(x, y) = \partial f/\partial x$) – частинна похідна функції $f(x, y)$ за змінною y (x), 8 (29)

$\Rightarrow$ – логічний наслідок (якщо …, то …), 8

$:$ – „таке (такі), що”, „маємо”, 8

$\wedge$ – кон’юнкція (… і …), 8

$\exists!$ – „існує і єдине”, 8

$\mathbf{C}(D)$ – множина функцій, неперервних в області D, 8

$\big|_{x=x_0}$ – знак одиничної підстановки („у точці x_0”), 8

$\Leftrightarrow$ – еквіваленція (якщо і тільки якщо), 10

dy (dx) – диференціал змінної y (x), 10

$\int f(x)dx$ – невизначений інтеграл (від) функції $f(x)$, 10

● – символ кінця прикладу, 12

$\setminus$ – різниця множин, 14

$\leftrightarrow$ – символ бієкції, 20

$\Delta = \det A$ – визначник матриці A, 21

$\mathbf{N}$ – множина натуральних чисел, 27

$u''_{xy} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}$ – частинна похідна 2-го порядку ФЗ2 $u = u(x, y)$ за змінними x і y, 29

$du(x, y)$ – повний диференціал ФЗ2 $u = u(x, y)$, 30

■ – символ закінчення доведення теореми, 31

$\int_a^b f(x)dx$ – визначений інтеграл від функції $f(x)$ на відрізку $[a, b]$, 32

$\big|_a^b$ – символ дворазової підстановки, 34

$\mu = \mu(x, y)$ – інтегрувальний множник, 35
$\mathbf{E}$ – напруженість електричного поля, 41
c – швидкість світла у вакуумі, 41
$y^{(n)}, \dfrac{d^n y}{dx^n}$ – похідна функції $y = y(x)$ n-го порядку ($n \in \mathbf{N}$), 55
$n!$ – факторіал числа n, 63
γ – гравітаційна стала, 69
$\ddot{x}$ ($\ddot{y}$) – друга похідна параметрично заданої функції $x = x(t)$ ($y = y(t)$), 70
$\{y_i(x)\}\big|_1^n$ – множина (система) функцій, 84
$W[y_1, y_2, ..., y_n] = W(x)$ – визначник Вронського (вронскіан), 85
$\Gamma[y_1, y_2, ..., y_n]$ – визначник Грама, 86
$\subseteq$ ($\subset$) – знак нестрогого (строгого) включення, 87 (251)
$y_{\text{т}}(x) \equiv 0$ – тривіальний розв'язок рівняння, 87
$i = \sqrt{-1}$ – уявна одиниця, 92
$\tilde{y}$ ($\bar{y}$) – частинний розв'язок неоднорідного ЛДР зі сталими коефіцієнтами (загальний розв'язок відповідного однорідного рівняння), 95
$P_n(x)$ – многочлен степеня n від x, 99
D – диференціальний оператор, 106
$Df(x) = f'(x)$ – образ диференціального оператора, 106
L – лінійний диференціальний оператор, 106
$T_n(x)$ – многочлени Чебишева, 121
Y (Y') – матриця-стовпець функцій $y_i = y_i(x)$ (похідних $y_i' = y_i'(x)$), $i = \overline{1, n}$, 143
$\exists$ – квантор існування (існує …), $\overline{\exists}$ – не існує, 144
$\tilde{Y}$ ($\bar{Y}$) – частинний розв'язок неоднорідної системи ЛДР (загальний розв'язок відповідної однорідної системи), 159
H_n (Δ_i, $i = \overline{1, n}$) – матриця (визначники) Гурвіца, 191
r_i (s_i) – алгебраїчна (геометрична) кратність власного числа k_i матриці, 195
$\operatorname{Re} k$, $\operatorname{Im} k$ – дійсна, уявна частина числа k, 196
D (Γ) – замкнена область на xOy (межа області), 228

λ – діаметр розбиття, 228, 258, 286

I_n – інтегральна сума, 229, 238, 259, 286

$\iint\limits_D f(x,y)\,ds$ – подвійний інтеграл по області D, 229

$ds\,(dv, dl)$ – диференціал площі (об'єму, дуги), 229 (259, 291)

Δx, Δy – прирости змінних x, y при переході від точки (x, y) до точки $(x+\Delta x, y+\Delta y)$, 230

D_x (D_y) – правильна у напрямі осі Ox (Oy) область, 232

ρ, φ – полярні координати точки, 238

D_ρ (D_φ) – правильна за змінною ρ (φ) область, 241

$J = J(u, v)$ – якобіан переходу до нових змінних u і v, 249

$\sigma = \sigma(x, y)$ – поверхнева густина платівки (лінійна густина кривої), 254 (289)

$\mu = \mu(x, y, z)$ – густина розподілу мас, 261

M_x, M_y – статичні моменти відносно координатних осей, 255, 298

x_c, y_c, z_c – координати центра мас (тяжіння), 255, 273, 298

J_x, J_y, J_z (J_0) – моменти інерції відносно координатних осей (початку координат), 256, 273, 298

$\iiint\limits_V f(x,y,z)\,dv$ – потрійний інтеграл по області V, 259

V_{xy}, V_{xz}, V_{yz} – проекції області V на координатні площини, 262, 265

ρ, φ, z, (ρ, φ, θ) – циліндричні (сферичні) координати точки, 269

M_{xy}, M_{yz}, M_{zx} – статичні моменти тіла відносно координатних площин, 273

J_{xy}, J_{xz}, J_{yz} – моменти інерції тіла відносно координатних площин, 273

$\int\limits_{AB} f(x,y)\,dl$ – криволінійний інтеграл по дузі AB за довжиною дуги, 286

$\int\limits_{AB} f(x,y)\,dx$ – криволінійний інтеграл по дузі AB за змінною x, 302

$\int\limits_{AB} Pdx+Qdy+Rdz$ – криволінійний інтеграл загального вигляду, 305

$\mathscr{A}$ – робота змінної сили $\overline{F}$, 329

Предметний покажчик

Зміст

НАВЧАЛЬНЕ ВИДАННЯ

Сенчуков Віктор Федорович
Денисова Тетяна Володимирівна

ВИЩА МАТЕМАТИКА. ЗАГАЛЬНІ РОЗДІЛИ

Навчальний посібник
для студентів напряму підготовки 6.050101
"Комп'ютерні науки"

Частина 3

Відповідальний за випуск **Малярець Л. М.**

Відповідальний редактор **Сєдова Л. М.**

Редактор **Хижняк Т. М.**

Коректор **Маркова Т. О.**

План 2014 р. Поз. № 23-П.
Підп. до друку Формат 60 х 90 1/16. Папір MultiCopy. Друк Riso.
Ум.-друк. арк. 22,25. Обл.-вид. арк. 27,81. Тираж прим. Зам. №

Видавець і виготівник – видавництво ХНЕУ ім. С. Кузнеця, 61166, м. Харків, пр. Леніна, 9-А

Свідоцтво про внесення до Державного реєстру суб'єктів видавничої справи
Дк № 481 від 13.06.2001 р.