МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
ХАРКІВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ ЕКОНОМІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ
ІМЕНІ СЕМЕНА КУЗНЕЦЯ

Індивідуальні завдання
з навчальної дисципліни «Вища математика»
для студентів галузі знань
0305 «Економіка та підприємництво»
денної форми навчання

Укладачі: Железнякова Е.Ю.
Ігначкова А.В.
Широкорад Л.Д.

Відповідальний за випуск: Малярець Л.М.

Харків. Вид. ХНЕУ ім. С. Кузнеця, 2014

Затверджено на засіданні кафедри вищої математики й економіко-математичних методів

Протокол № 2 від 25.09.2013 г.

Укладачі: Железнякова Е. Ю.
Ігначкова А. В.
Широкорад Л. Д.

І – 60 Індивідуальні завдання з навчальної дисципліни «Вища математика» для студентів галузі знань 0305 «Економіка та підприємництво» денної форми навчання / Е. Ю. Железнякова, А. В. Ігначкова, Л. Д. Широкорад. – Х. : Вид. ХНЕУ ім. С. Кузнеця, 2014. – 217 с.

Запропоновано 11 індивідуальних завдань з усіх розділів вищої математики. Кожне індивідуальне завдання складається з певної кількості задач, поданих у 30 варіантах. Кожне індивідуальне завдання супроводжується аналогічними розв'язаними прикладами.

Рекомендовано для студентів економічних напрямів підготовки.

Вступ

Основними завданнями вивчення навчальної дисципліни «Вища математика» є надання студентам знань з основних розділів вищої математики, підвищення рівня фундаментальної математичної підготовки студентів, а також отримання необхідної математичної бази для вивчення інших дисциплін математичного циклу.

У процесі вивчення даної навчальної дисципліни студент отримує аналітично-дослідницькі компетентності, а саме: вміння проводити математичні обчислення, аналізувати та обробляти отримані результати і робити висновки на достатньо високопрофесійному рівні, вміння використовувати отримані знання для подальшого створення відповідних задач економіко-математичного моделювання.

Сучасною тенденцією у вищій освіті є переорієнтація студентів вищих навчальних закладів з процесу навчання на результат, із знань на вміння, на формування певних компетентностей. Отже, велику роль у формуванні навичок студентів щодо застосування теоретичних знань у самостійній роботі відіграє виконання індивідуальних завдань.

Підготовка індивідуального завдання передбачає: систематизацію, закріплення, розширення теоретичних і практичних знань з навчальної дисципліни та їх застосування до розв’язання конкретних задач економіки; розвиток навичок самостійної роботи й оволодіння методикою дослідження та експерименту, які пов’язані з темою індивідуального завдання.

Індивідуальне завдання виконується самостійно при консультуванні викладачем протягом вивчення дисципліни.

У процесі виконання індивідуального завдання разом з теоретичними знаннями і практичними навичками студент повинен продемонструвати вміння творчо мислити.

Даний збірник містить 11 індивідуальних завдань з усіх розділів вищої математики. Кожне індивідуальне завдання складається з певної кількості задач, поданих у 30 варіантах. Кожне індивідуальне завдання супроводжується аналогічними розв’язаними прикладами.

Змістовний модуль 1
Лінійна алгебра. Аналітична геометрія

Індивідуальне завдання № 1
Елементи теорії матриць і визначників
Загальна теорія систем лінійних алгебраїчних рівнянь

Зміст завдання

1. Виконати дії над матрицями.
2. Обчислити визначники.
3. Розв'язати систему рівнянь:
   а) за формулами Крамера;
   б) за допомогою оберненої матриці.
4. Розв'язати систему рівнянь методом Жордана – Гаусса.
5. Дослідити і розв'язати систему рівнянь, якщо вона сумісна.
6. Показати, що вектори $\vec{a}_1$, $\vec{a}_2$, $\vec{a}_3$ і $\vec{a}_4$ утворюють базис та розкласти вектор $\vec{a}$ за цим базисом.

Варіант 1

1. $A\left(A^2-B\right)-2\left(B+A\right)B$, якщо $A=\begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ -1 & 2 & 4 \\ 5 & 3 & 0 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 2 & 7 & 13 \\ -1 & 0 & 15 \\ 5 & 13 & 21 \end{pmatrix}$.

2. а) $\begin{vmatrix} 4 & 3 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 3 & 2 \\ 3 & 2 & 1 & 4 \\ 2 & 4 & 2 & 3 \end{vmatrix}$; б) $\begin{vmatrix} -1 & 1 & 3 & 4 & 0 \\ -1 & 0 & 3 & -2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 & -3 & 1 \\ 1 & 2 & -1 & 1 & 5 \\ 1 & 2 & 3 & -2 & 0 \end{vmatrix}$.

3. $\begin{cases} x_1+x_2-2x_3=6, \\ 2x_1+3x_2-7x_3=16, \\ 5x_1+2x_2+x_3=16. \end{cases}$

4. $\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + 5x_3 + \ \ x_4 = -7, \\ - \ x_1 + \ x_2 + 4x_3 - 2x_4 = \ \ 1, \\ 5x_1 + 2x_2 - 3x_3 + 6x_4 = \ \ 5, \\ -2x_1 + 5x_2 + \ \ x_3 - 7x_4 = \ \ 5. \end{cases}$

5. а) $\begin{cases} x_1 + 2x_2 - \ x_3 + \ \ x_4 = \ \ 1, \\ 3x_1 + \ \ x_2 + 2x_3 - \ x_4 = \ \ 2, \\ 2x_1 + 3x_2 - \ x_3 + 3x_4 = -1, \\ 4x_1 + 2x_2 + 2x_3 + x_4 = \ \ 3. \end{cases}$ б) $\begin{cases} 5x_1 - 4x_2 - 6x_3 = 0, \\ 2x_1 + \ \ x_2 - 3x_3 = 0, \\ -x_1 + 6x_2 \qquad\quad = 0, \\ x_1 - 3x_2 + \ \ x_3 = 0, \\ 2x_1 + \ \ x_2 - 5x_3 = 0, \\ -x_1 + 2x_2 + \ x_3 = 0. \end{cases}$

6. $\vec{a}_1 = (\ 3;1;\ 2;4)$, $\vec{a}_3 = (-2;4;\ 3;-1)$, $\vec{a} = (11;27;-1;-7)$
$\vec{a}_2 = (-1;3;-4;2)$, $\vec{a}_4 = (\ 4;2;-1;-3)$,

Варіант 2

1. $A(2A+B) - B(A-B)$, якщо $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 4 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 9 & 8 & 7 \\ 2 & 7 & 3 \\ 4 & 3 & 5 \end{pmatrix}$.

2. а) $\begin{vmatrix} 1 & 3 & 5 & 7 \\ 3 & 5 & 7 & 1 \\ 5 & 7 & 1 & 3 \\ 7 & 1 & 3 & 5 \end{vmatrix}$; б) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 & 4 & -1 \\ 2 & -1 & 3 & -4 & 2 \\ 3 & 1 & -1 & 2 & -1 \\ 4 & 3 & 4 & 2 & 2 \\ 1 & -1 & -1 & 2 & -3 \end{vmatrix}$

3. $\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 = \ 6, \\ 2x_1 + 3x_2 - 4x_3 = 16, \\ 3x_1 - 2x_2 - 5x_3 = 12. \end{cases}$

4. $\begin{cases} 2x_1+3x_2+4x_3+5x_4=-2, \\ 3x_1+\ \ x_2+2x_3+4x_4=\ \ 1, \\ 4x_1+6x_2+3x_3+7x_4=\ \ 1, \\ 5x_1+2x_2+\ \ x_3+4x_4=\ \ 4. \end{cases}$

5. а) $\begin{cases} 8x_1+6x_2-\ x_3-\ x_4=12, \\ x_1-3x_2+2x_3+2x_4=2, \\ x_1+2x_2+\ x_3-4x_4=0, \\ 6x_1+7x_2-4x_3+\ x_4=0, \\ 6x_1+2x_2-3x_3+7x_4=12. \end{cases}$ б) $\begin{cases} x_1+\ 2x_2-\ x_3+\ 2x_4-\ x_5=0, \\ 5x_1+11x_2-2x_3+\ 8x_4+\ 2x_5=0, \\ 4x_1+10x_2+2x_3+10x_4-\ 3x_5=0, \\ 5x_1+13x_2+4x_3+16x_4-10x_5=0. \end{cases}$

6. $\vec{a}_1=(5;-1;\ 0;-6),\quad \vec{a}_3=(0;6;5;-1),$
$\vec{a}_2=(1;\ 5;-6;\ 0),\quad \vec{a}_4=(6;0;1;\ 5),\quad \vec{a}=(55;47;7;7)$

Варіант 3

1. $2AB-(A+B)(A-B)$, якщо $A=\begin{pmatrix} 4 & -2 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \\ 3 & -2 & 0 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 0 & -2 & 6 \\ 2 & 4 & 3 \\ 0 & -3 & 4 \end{pmatrix}$.

2. а) $\begin{vmatrix} 2 & -3 & 1 & 4 \\ 3 & 1 & 2 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 2 & 4 & 2 \end{vmatrix}$; б) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 0 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & -1 & -1 & 0 \\ 2 & -1 & 2 & 2 & 1 \end{vmatrix}$.

3. $\begin{cases} 2x_1-\ x_2+3x_3=7, \\ x_1+3x_2-2x_3=0, \\ 2x_2-\ x_3=0. \end{cases}$

4. $\begin{cases} 2x_1+3x_2+4x_3+5x_4=14, \\ 3x_1+\ \ x_2+2x_3+4x_4=10, \\ 4x_1+6x_2+3x_3+7x_4=20, \\ 5x_1+2x_2+\ \ x_3+4x_4=12. \end{cases}$

5. а) $\begin{cases} x_1+3x_2-2x_3-\ \ x_4=-1, \\ 5x_1-3x_2-\ \ x_3+3x_4=\ \ 3, \\ 3x_1+2x_2-5x_3-4x_4=\ \ 1, \\ 13x_1-4x_2-7x_3+2x_4=\ \ 7, \\ 2x_1-5x_2+4x_3+7x_4=\ \ 2. \end{cases}$ б) $\begin{cases} 3x_1-2x_2+\ \ x_3-\ \ x_4+2x_5=0, \\ x_1+2x_2+3x_3+4x_4-\ \ x_5=0, \\ -2x_1+3x_2-\ \ x_3+3x_4+\ \ x_5=0, \\ 2x_1-\ \ x_2+4x_3-3x_4+4x_5=0, \\ -\ x_1+\ \ x_2-3x_3+2x_4+\ \ x_5=0. \end{cases}$

6. $\vec{a}_1=(6;-2;-1;-7)$, $\vec{a}_3=(1;7;6;-2)$, $\vec{a}_2=(2;\ 6;-7;\ 1)$, $\vec{a}_4=(7;-1;2;6)$, $\vec{a}=(89;57;11;7)$.

Варіант 4

1. $2A+3B(AB-2A)$, якщо $A=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 5 & 3 & -1 \\ -1 & 2 & 0 \\ -3 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

2. а) $\begin{vmatrix} 2 & 4 & 3 & 5 \\ 3 & -2 & 5 & 4 \\ 5 & 4 & 2 & -3 \\ 4 & 3 & 4 & -2 \end{vmatrix}$; б) $\begin{vmatrix} 4 & 1 & 3 & 2 & 5 \\ 2 & 3 & 0 & 4 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & 3 \\ 1 & 2 & 0 & 3 & 1 \\ 4 & 3 & 1 & 0 & 2 \end{vmatrix}$.

3. $\begin{cases} 2x_1+\ \ x_2+4x_3=20, \\ 2x_1-\ \ x_2-3x_3=\ \ 3, \\ 3x_1+4x_2-5x_3=-8. \end{cases}$

4. $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 7, \\ x_1 + \qquad\quad 2x_3 + 2x_4 = 5, \\ 4x_1 + x_2 - x_3 \qquad\quad = 3, \\ 2x_1 + x_2 + x_3 \qquad\quad = 1. \end{cases}$

5. а) $\begin{cases} 2x_1 + x_2 + 2x_3 - 2x_4 - 3x_5 = 8, \\ x_1 - 2x_2 + 3x_3 - x_4 + 2x_5 = 2, \\ 3x_1 - x_2 + 5x_3 - 3x_4 - x_5 = 6. \end{cases}$ б) $\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 3x_3 + x_4 = 0, \\ 2x_1 - x_2 + x_3 - 2x_4 = 0, \\ 3x_1 + x_2 - 2x_3 + x_4 = 0, \\ -x_1 + 3x_2 - x_3 + 2x_4 = 0. \end{cases}$

6. $\begin{matrix} \vec{a}_1 = (6;-3;2;4), & \vec{a}_3 = (-2;-4;6;-3), \\ \vec{a}_2 = (3;6;4;-2), & \vec{a}_4 = (-4;2;3;6), \end{matrix}$ $\vec{a} = (2;9;100;35).$

Варіант 5

1. $2A - AB(B - A) + B,$ якщо $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \\ 5 & 7 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 3 & -1 \\ 2 & -1 & 2 \\ -3 & 1 & 4 \end{pmatrix}.$

2. а) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & 1 & 2 \\ -2 & -1 & 0 & 1 \end{vmatrix}$; б) $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & 3 & -1 \\ 3 & 4 & 5 & -5 & 3 \\ 1 & 3 & 2 & -4 & 2 \\ 5 & -5 & 6 & 8 & -2 \end{vmatrix}.$

3. $\begin{cases} x_1 + 5x_2 - x_3 = 7, \\ 2x_1 - x_2 - x_3 = 4, \\ 3x_1 - 2x_2 + 4x_3 = 11. \end{cases}$

4. $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 0, \\ 7x_1 + 14x_2 + 20x_3 + 27x_4 = 0, \\ 5x_1 + 10x_2 + 16x_3 + 19x_4 = -2, \\ 3x_1 + 5x_2 + 6x_3 + 13x_4 = 5. \end{cases}$

5. а) $\begin{cases} 3x_1 + x_2 - 2x_3 + 4x_4 - x_5 = 1, \\ x_1 - 3x_2 + x_3 - 2x_4 + 2x_5 = -2, \\ x_1 + 7x_2 - 4x_3 + 8x_4 - 5x_5 = 5, \\ 5x_1 + 5x_2 - 5x_3 + 10x_4 = 4. \end{cases}$ б) $\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - 3x_3 + 2x_4 = 0, \\ 3x_1 + 2x_2 - x_3 + 3x_4 = 0, \\ 2x_1 - x_2 + 5x_3 - x_4 = 0, \\ -x_1 + 2x_2 - 3x_3 + 2x_4 = 0. \end{cases}$

6. $\vec{a}_1 = (8;-5;0;\ ),\quad \vec{a}_3 = (0;-4;8;-5),$
$\vec{a}_2 = (5;8;4;0),\quad \vec{a}_4 = (-4;0;-5;8),\quad \vec{a} = (56;-7;54;63).$

Варіант 6

1. $2AB - (A+B)(A-B)$, якщо $A = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 5 \\ -1 & 0 & 2 \\ -2 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 \\ -1 & 1 & 2 \\ 3 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$

2. а) $\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 & 3 \\ 3 & 2 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & -3 & 3 \\ 4 & 0 & 1 & 2 \end{vmatrix}$; б) $\begin{vmatrix} 5 & 3 & 2 & 6 & -1 \\ 3 & 5 & 2 & 5 & 0 \\ 3 & 9 & 3 & 10 & 2 \\ 10 & 2 & 3 & 7 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 2 & 1 \end{vmatrix}.$

3. $\begin{cases} x_1 + 5x_2 - x_3 = 7, \\ 2x_1 - x_2 - x_3 = 4, \\ 3x_1 - 2x_2 + 4x_3 = 11. \end{cases}$

4. $\begin{cases} 3x_1+4x_2-2x_3+5x_4=10, \\ 2x_1+3x_2+5x_3-4x_4=-2, \\ 4x_1+5x_2-4x_3-3x_4=-7, \\ 5x_1+3x_2+2x_3-5x_4=-1. \end{cases}$

5. а) $\begin{cases} 9x_1-3x_2+5x_3+6x_4=4, \\ 6x_1-2x_2+3x_3+4x_4=5, \\ 3x_1-x_2+3x_3+14x_4=-8. \end{cases}$ б) $\begin{cases} 2x_1+3x_2-3x_3+2x_4=0, \\ 3x_1+2x_2-x_3+3x_4=0, \\ 2x_1-x_2+5x_3-x_4=0, \\ -x_1+2x_2-3x_3+2x_4=0. \end{cases}$

6. $\vec{a}_1=(7;-4;1;3)$, $\vec{a}_3=(-1;-3;7;-4)$, $\vec{a}_2=(4;7;3;-1)$, $\vec{a}_4=(-3;1;4;7)$, $\vec{a}=(35;10;119;42)$.

Варіант 7

1. $A^2-(A+B)(A-3B)$, якщо $A=\begin{pmatrix} 4 & 5 & 6 \\ -1 & 0 & 3 \\ -1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & -2 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

2. а) $\begin{vmatrix} -1 & 2 & 4 & -2 \\ 3 & 1 & 0 & -1 \\ 4 & 3 & 2 & -3 \\ 3 & 0 & 4 & 1 \end{vmatrix}$; б) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 4 \\ 1 & 1 & 3 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$.

3. $\begin{cases} 7x_1+2x_2+3x_3=15, \\ 5x_1-3x_2+2x_3=15, \\ 10x_1-11x_2+5x_3=36. \end{cases}$

4. $\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 + x_3 - x_4 = -11, \\ x_1 + 3x_2 - x_3 + 2x_4 = 14, \\ 5x_1 - x_2 + 3x_3 + x_4 = 1, \\ 4x_1 - 2x_2 + 5x_3 + 2x_4 = 7. \end{cases}$

5. а) $\begin{cases} x_1 + 8x_2 + 2x_3 = 13, \\ x_1 + x_2 + 5x_3 = -7, \\ 2x_1 + 3x_2 - 3x_3 = 14, \\ 2x_1 + x_2 + x_3 = 2, \\ x_1 + 3x_2 + x_3 = 5, \\ 6x_1 + 9x_2 + 13x_3 = -2. \end{cases}$ б) $\begin{cases} 2x_1 + 5x_2 + 9x_3 = 0, \\ 4x_1 - 3x_2 + 2x_3 = 0, \\ -x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 0, \\ x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 0, \\ 3x_1 - x_2 + 2x_3 = 0. \end{cases}$

6. $\vec{a}_1 = (9;-3;2;4)$, $\vec{a}_3 = (-2;-4;9;-3)$, $\vec{a}_2 = (3;9;4;-2)$, $\vec{a}_4 = (-4;2;3;9)$, $\vec{a} = (95;\ 59;\ 55;\ 23)$.

Варіант 8

1. $B(A+2B)-3AB$, якщо $A = \begin{pmatrix} 7 & -3 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -4 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$.

2. а) $\begin{vmatrix} 4 & 3 & 3 & 1 \\ 3 & 4 & 3 & 2 \\ 3 & 2 & 1 & 4 \\ 2 & 4 & 2 & 3 \end{vmatrix}$; б) $\begin{vmatrix} -1 & 1 & 3 & 4 & 0 \\ -1 & 0 & 3 & -2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 & -3 & 1 \\ 1 & 2 & -1 & 1 & 5 \\ 1 & 2 & 3 & -2 & 0 \end{vmatrix}$.

3. $\begin{cases} 7x_1 + 5x_2 + 2x_3 = 18, \\ x_1 - x_2 - x_3 = 3, \\ x_1 + x_2 + 2x_3 = -2. \end{cases}$

4. $\begin{cases} 5x_1+2x_2+\ \ x_3+4x_4=\ \ 4, \\ 4x_1+6x_2-3x_3+7x_4=\ \ 1, \\ 3x_1+\ \ x_2+2x_3+4x_4=\ \ 1, \\ 2x_1+3x_2+4x_3+5x_4=-2. \end{cases}$

5. а) $\begin{cases} 2x_1+x_2-x_3-3x_4=2, \\ 4x_1+x_3-7x_4=3, \\ 2x_2-3x_3+x_4=1, \\ 2x_1+3x_2-4x_3-2x_4=3. \end{cases}$ б) $\begin{cases} 3x_1+x_2-2x_3+x_4=0, \\ -x_1+3x_2-x_3+2x_4=0, \\ 2x_1-x_2+x_3-2x_4=0, \\ x_1+2x_2-3x_3+x_4=0. \end{cases}$

6. $\vec{a}_1=(1;-6;3;5),\quad \vec{a}_3=(-3;-5;1;-6)$
$\vec{a}_2=(6;1;5;-3),\quad \vec{a}_4=(-5;3;6;1)$ $\quad\vec{a}=(-4;-53;40;41)$.

Варіант 9

1. $2(A+B)(2B-A)$, якщо $A=\begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 4 & 5 & 2 \\ -1 & 0 & 7 \end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix} -1 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 3 \\ 2 & -2 & 4 \end{pmatrix}.$

2. а) $\begin{vmatrix} 3 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \end{vmatrix}$; б) $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 4 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 5 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 6 \end{vmatrix}$.

3. $\begin{cases} 5x_1+\ 8x_2-\ x_3=-1, \\ x_1+2x_2+3x_3=\ 9, \\ 2x_1-3x_2+2x_3=13. \end{cases}$

4. $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 - 2x_4 = 6, \\ 2x_1 - x_2 - 2x_3 - 3x_4 = 8, \\ 3x_1 + 2x_2 - x_3 + 2x_4 = 4, \\ 2x_1 - 3x_2 + 2x_3 + x_4 = -8. \end{cases}$

5. а) $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 1, \\ 2x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 0, \\ 5x_1 + 3x_2 - x_3 + x_4 = 0, \\ 7x_1 + 2x_2 - x_3 - x_4 = 0, \\ x_1 - x_2 - 2x_3 = 0. \end{cases}$ б) $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 0, \\ x_1 + x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 0, \\ x_1 + 5x_2 + x_3 + 2x_4 = 0, \\ x_1 + 5x_2 + 5x_3 + 2x_4 = 0. \end{cases}$

6. $\vec{a}_1 = (-2;1;-3;4)$, $\vec{a}_3 = (2;2;-4;-6)$, $\vec{a}_2 = (3;-2;-5;1)$, $\vec{a}_4 = (-1;-8;6;2)$, $\vec{a} = (4;-22;5;-5)$.

Варіант 10

1. $3A - (A + 2B)B$, якщо $A = \begin{pmatrix} 4 & 5 & -2 \\ 3 & -1 & 0 \\ 4 & 2 & 7 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 5 & 7 & 3 \end{pmatrix}$.

2. а) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 6 & 10 \\ 1 & 4 & 10 & 20 \end{vmatrix}$; б) $\begin{vmatrix} 5 & 6 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 5 & 6 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 5 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 5 \end{vmatrix}$.

3. $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 4, \\ 3x_1 + 5x_2 - 7x_3 = 1, \\ 2x_1 + 7x_2 - x_3 = 8. \end{cases}$

4. $\begin{cases} x_1+2x_2+3x_3+4x_4=5, \\ 2x_1+x_2+2x_3+3x_4=1, \\ 3x_1+2x_2+x_3+2x_4=1, \\ 4x_1+3x_2+2x_3+x_4=-5. \end{cases}$

5. а) $\begin{cases} 2x_1-3x_2+4x_3-x_4=1, \\ x_1+x_2+x_3=0, \\ 5x_1-2x_2+x_3-x_4=0. \end{cases}$ б) $\begin{cases} x_1+x_2-3x_4-x_5=0, \\ x_1-x_2+2x_3-x_4=0, \\ 4x_1-2x_2+6x_3+3x_4-4x_5=0, \\ 2x_1+4x_2-2x_3+4x_4-7x_5=0. \end{cases}$

6. $\vec{a}_1=(4;3;3;2)$, $\vec{a}_3=(3;3;1;2)$, $\vec{a}_2=(3;4;2;4)$, $\vec{a}_4=(1;2;4;3)$, $\vec{a}=(23;28;26;28)$.

Варіант 11

1. $2(A-B)(A^2+B)$, якщо $A=\begin{pmatrix} 5 & 1 & 7 \\ -10 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 2 & 4 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \\ 7 & 2 & 1 \end{pmatrix}$.

2. а) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}$; б) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 11 & 12 & 13 & 14 & 15 \\ 16 & 17 & 18 & 19 & 20 \\ 21 & 22 & 23 & 24 & 25 \end{vmatrix}$.

3. $\begin{cases} 3x_1+2x_2+x_3=5, \\ 2x_1+3x_2+x_3=1, \\ 2x_1+x_2-3x_3=11. \end{cases}$

4. $\begin{cases} x_2 - 3x_3 + 4x_4 = -5, \\ x_1 + \quad - 2x_3 + 3x_4 = -4, \\ 3x_1 + 2x_2 \quad - 5x_4 = 12, \\ 4x_1 + 3x_2 - 5x_3 \quad = 5. \end{cases}$

5. а) $\begin{cases} x_1 + x_2 - 3x_3 = -1, \\ 2x_1 + x_2 - 2x_3 = 1, \\ x_1 + x_2 + x_3 = 3, \\ x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 1. \end{cases}$ б) $\begin{cases} 3x_1 + 4x_2 - 5x_3 + 7x_4 = 0, \\ 2x_1 - 3x_2 + 3x_3 - 2x_4 = 0, \\ 4x_1 + 11x_2 - 13x_3 + 16x_4 = 0, \\ 7x_1 - 2x_2 + x_3 + 3x_4 = 0. \end{cases}$

6. $\vec{a}_1 = (4;3;3;1), \quad \vec{a}_3 = (3;2;1;4),$
$\vec{a}_2 = (3;4;2;3), \quad \vec{a}_4 = (2;4;2;3),$ $\quad \vec{a} = (39;46;29;39)$.

Варіант 12

1. $\left(A^2 - B^2\right)\left(A + B\right)$, якщо $A = \begin{pmatrix} 7 & 2 & 0 \\ -7 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & -2 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

2. а) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 9 & 16 \\ 1 & 8 & 27 & 64 \end{vmatrix}$; б) $\begin{vmatrix} 3 & 1 & 5 & 1 & 6 \\ 4 & 0 & 1 & 1 & 4 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & 2 & 3 & -3 & 0 \\ 1 & 6 & 15 & -2 & 8 \end{vmatrix}$.

3. $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 31, \\ 5x_1 + x_2 + 2x_3 = 29, \\ 3x_1 - x_2 + x_3 = 10. \end{cases}$

4. $\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 3x_3 + 2x_4 = 4, \\ 3x_1 + 3x_2 + 3x_3 + 2x_4 = 6, \\ 3x_1 - x_2 - x_3 + 2x_4 = 6, \\ 3x_1 - x_2 + 3x_3 - x_4 = 6. \end{cases}$

5. а) $\begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 = 2, \\ x_1 + 3x_2 + x_3 = 5, \\ x_1 + x_2 + 5x_3 = -7, \\ 2x_1 + 3x_2 - 3x_3 = 14. \end{cases}$ б) $\begin{cases} x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 0, \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 = 0, \\ -3x_1 - 5x_2 + x_3 = 0, \\ x_1 + 17x_2 + 4x_3 = 0. \end{cases}$

6. $\vec{a}_1 = (2;3;1;3), \quad \vec{a}_3 = (1;4;3;4),$
$\vec{a}_2 = (-3;1;2;2), \quad \vec{a}_4 = (4;2;4;2),$ $\quad \vec{a} = (23;45;50;49).$

Варіант 13

1. $\left(A - B^2\right)\left(2A + B\right)$, якщо $A = \begin{pmatrix} 5 & 2 & 0 \\ 10 & 4 & 1 \\ 7 & 3 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 3 & 6 & -1 \\ -1 & -2 & 0 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$

2. а) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ -2 & 1 & -4 & 3 \\ 3 & -4 & -1 & 2 \\ 4 & 3 & -2 & -1 \end{vmatrix}$; б) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}.$

3. $\begin{cases} 4x_1 - 3x_2 + 2x_3 = 9, \\ 2x_1 + 5x_2 - 3x_3 = 4, \\ 5x_1 + 6x_2 - 2x_3 = 18. \end{cases}$

4. $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0, \\ x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 0, \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 1, \\ x_2 + 2x_3 + 3x_4 = -2, \\ x_3 + 2x_4 + 3x_5 = 2. \end{cases}$

5. а) $\begin{cases} x_1 + 3x_2 - 3x_3 = 2, \\ 2x_1 - 3x_2 + 4x_3 = -1, \\ 3x_1 + 2x_2 - x_3 = 4, \\ x_1 - 8x_2 + 9x_3 = -6. \end{cases}$ б) $\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - 3x_3 + 2x_4 = 0, \\ 3x_1 + 2x_2 - x_3 + 3x_4 = 0, \\ 2x_1 - x_2 + 5x_3 - x_4 = 0, \\ -x_1 + 2x_2 - 3x_3 + 2x_4 = 0. \end{cases}$

6. $\vec{a}_1 = (1;0;0;0),\quad \vec{a}_3 = (2;-3;4;5),$
$\vec{a}_2 = (0;1;0;0),\quad \vec{a}_4 = (1;3;0;2),$ $\quad \vec{a} = (23;8;24;44)$.

Варіант 14

1. $(A-B)2A+2B$, якщо $A = \begin{pmatrix} 5 & -1 & 3 \\ 0 & 2 & -1 \\ -2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 5 & 7 & 3 \end{pmatrix}$.

2. а) $\begin{vmatrix} 5 & 1 & 2 & 4 \\ 4 & 6 & 3 & 7 \\ 3 & 1 & 2 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 5 \end{vmatrix}$; б) $\begin{vmatrix} 2 & -4 & 1 & -2 & -1 \\ 5 & 3 & -6 & -1 & -2 \\ 3 & -1 & 1 & 4 & -3 \\ -1 & 2 & 3 & 1 & -5 \\ 1 & 1 & -2 & 3 & 1 \end{vmatrix}$.

3. $\begin{cases} 2x_1 - x_2 - x_3 = 4, \\ 3x_1 + 4x_2 - 2x_3 = 11, \\ 3x_1 - 2x_2 + 4x_3 = 11. \end{cases}$

4. $\begin{cases} x_1+3x_2+5x_3+7x_4=12, \\ 3x_1+5x_2+7x_3+\ \ x_4=0, \\ 5x_1+7x_2+\ \ x_3+3x_4=4, \\ 7x_1+\ \ x_2+3x_3+5x_4=16. \end{cases}$

5. а) $\begin{cases} x_1-2x_2+3x_3-4x_4=4, \\ x_2-x_3+x_4=-3, \\ x_1+3x_2-3x_4=1, \\ -7x_2+3x_3+x_4=-3. \end{cases}$ б) $\begin{cases} x_1-2x_2+x_3+x_4-x_5=0, \\ 2x_1+x_2-x_3-x_4+x_5=0, \\ x_1+7x_2-5x_3-5x_4+5x_5=0, \\ 3x_1-x_2-2x_3+x_4-x_5=0. \end{cases}$

6. $\begin{matrix} \vec{a}_1=(2;-3;1;4), & \vec{a}_3=(1;2;3;-4), \\ \vec{a}_2=(-3;1;4;2), & \vec{a}_4=(3;2;-4;2), \end{matrix}$ $\vec{a}=(23;21;18;20)$.

Варіант 15

1. $(A-B)A+3B$, якщо $A=\begin{pmatrix} 3 & 2 & -5 \\ 4 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} -1 & 2 & 4 \\ 0 & 3 & 2 \\ -1 & -3 & 4 \end{pmatrix}$

2. а) $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 & -1 \\ 3 & -1 & 1 & 1 \\ 4 & 2 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \end{vmatrix}$; б) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 2 & -1 & 2 \\ 2 & 3 & -1 & 3 & -1 \\ 4 & 2 & 2 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 3 & -7 & 1 \end{vmatrix}$.

3. $\begin{cases} x_1+x_2+2x_3=-1, \\ 2x_1-x_2+2x_3=-4, \\ 4x_1+x_2+4x_3=-2. \end{cases}$

4. $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 5, \\ 2x_1 + x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 1, \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 + 2x_4 = 1, \\ 4x_1 + 3x_2 + 2x_3 + x_4 = -5. \end{cases}$

5. а) $\begin{cases} 2x_1 + x_2 + 3x_3 - 7x_4 = 5, \\ x_1 - 2x_2 + 3x_3 - 4x_4 = 4, \\ x_2 - x_3 + x_4 = -3, \\ x_1 + 3x_2 - 3x_4 = 1. \end{cases}$ б) $\begin{cases} x_1 - 4x_2 + 3x_3 + x_4 + 2x_5 = 0, \\ 3x_1 - 2x_2 - x_3 + 5x_4 - x_5 = 0, \\ 2x_1 + 2x_2 - 4x_3 + 4x_4 - 3x_5 = 0. \end{cases}$

6. $\vec{a}_1 = \left(-1;3;4;3\right)$, $\vec{a}_3 = \left(4;0;2;4\right)$,
$\vec{a}_2 = \left(2;1;3;0\right)$, $\vec{a}_4 = \left(-2;-1;-3;1\right)$, $\vec{a} = \left(25;19;40;67\right)$.

Варіант 16

1. $2\left(A - 0,5B\right) + AB$, якщо $A = \begin{pmatrix} 5 & 3 & -1 \\ 2 & 0 & 4 \\ 3 & 5 & -1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 16 \\ -3 & -2 & 0 \\ 5 & 7 & 2 \end{pmatrix}$.

2. а) $\begin{vmatrix} 4 & 5 & 2 & 1 \\ 1 & 4 & 6 & 3 \\ 1 & 3 & 1 & 2 \\ -2 & 2 & 3 & 4 \end{vmatrix}$; б) $\begin{vmatrix} 3 & 1 & 5 & 1 & 6 \\ 4 & 0 & 1 & 1 & 4 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & 2 & 3 & -3 & 0 \\ 1 & 6 & 15 & -2 & 8 \end{vmatrix}$.

3. $\begin{cases} 3x_1 - x_2 = 5, \\ -2x_1 + x_2 + x_3 = 0, \\ 2x_1 - x_2 + 4x_3 = 15. \end{cases}$

4. $\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 1, \\ 3x_1 - x_2 - x_3 - 2x_4 = -4, \\ 2x_1 + 3x_2 - x_3 - x_4 = -6, \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 - 2x_4 = -5. \end{cases}$

5. а) $\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 3x_4 + 2x_5 = 1, \\ x_1 - x_2 - 3x_3 + x_4 - 3x_5 = 2, \\ 2x_1 - 3x_2 + 4x_3 - 5x_4 + 2x_5 = 7, \\ 9x_1 - 9x_2 + 6x_3 - 16x_4 + 2x_5 = 25. \end{cases}$ б) $\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + 4x_3 - 3x_4 = 0, \\ 3x_1 - x_2 + 11x_3 - 13x_4 = 0, \\ 4x_1 + 5x_2 - 7x_3 - 2x_4 = 0, \\ 13x_1 - 25x_2 + x_3 + 11x_4 = 0. \end{cases}$

6. $\vec{a}_1 = (-1;2;4;-2)$, $\vec{a}_3 = (-4;3;2;3)$, $\vec{a}_2 = (3;1;0;-1)$, $\vec{a}_4 = (3;0;-4;1)$, $\vec{a} = (10;43;4;14)$.

Варіант 17

1. $2A - (A^2 + B)B$, якщо $A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 4 & 6 & -2 \\ 4 & 10 & 1 \\ 2 & 4 & -5 \end{pmatrix}$.

2. а) $\begin{vmatrix} -1 & 3 & -1 & 2 \\ 3 & 1 & -2 & 1 \\ 2 & -1 & 1 & -2 \\ 1 & 2 & -3 & 1 \end{vmatrix}$; б) $\begin{vmatrix} 1 & 3 & -2 & -2 & 1 \\ 0 & -2 & 2 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 & -1 & 3 \\ 1 & -1 & 3 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 3 & -2 & 1 \end{vmatrix}$.

3. $\begin{cases} 3x_1 - x_2 + x_3 = 4, \\ 2x_1 - 5x_2 - 3x_3 = -17, \\ x_1 + x_2 - x_3 = 0. \end{cases}$

4. $\begin{cases} 2x_1-3x_2+5x_3+\ \ x_4=-7, \\ -x_1+\ \ x_2+4x_3-2x_4=\ \ 1, \\ 5x_1+2x_2-3x_3+6x_4=\ \ 5, \\ -2x_1+5x_2+\ \ x_3-7x_4=\ \ 5. \end{cases}$

5. а) $\begin{cases} x_1+\ \ x_2+\ \ x_3-2x_4+3x_5=1, \\ 2x_1+2x_2+4x_3-\ \ x_4+3x_5=2, \\ 3x_1+3x_2+5x_3-2x_4+3x_5=1, \\ 2x_1+2x_2+8x_3-3x_4+9x_5=2. \end{cases}$ б) $\begin{cases} 5x_1+6x_2-2x_3+7x_4+4x_5=0, \\ 2x_1+3x_2-\ \ x_3+4x_4+2x_5=0, \\ 7x_1+9x_2-3x_3+5x_4+6x_5=0, \\ 5x_1+9x_2-3x_3+\ \ x_4+6x_5=0. \end{cases}$

6. $\begin{matrix} \vec{a}_1=(0;1;3;4), & \vec{a}_3=(-3;-2;0;-5), \\ \vec{a}_2=(1;0;2;3), & \vec{a}_4=(4;3;-5;0), \end{matrix}$ $\quad \vec{a}=(13;11;37;59)$.

Варіант 18

1. $3\left(A^2-B^2\right)-2AB$, якщо $A=\begin{pmatrix} 4 & 2 & 1 \\ 3 & -2 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}, \quad B=\begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 5 & -7 & -2 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

2. а) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 1 & 2 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{vmatrix}$; б) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}$.

3. $\begin{cases} x_1+\ \ x_2+\ x_3=\ \ 2, \\ 2x_1-\ \ x_2-6x_3=-1, \\ 3x_1-2x_2 \qquad\ \ =\ \ 8. \end{cases}$

4. $\begin{cases} 5x_1 + 2x_2 + x_3 + 4x_4 = 45, \\ 4x_1 + 6x_2 + 3x_3 + 7x_4 = 1, \\ 3x_1 + x_2 + 2x_3 + 4x_4 = 1, \\ 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 + 5x_4 = -2. \end{cases}$

5. а) $\begin{cases} 9x_1 - 3x_2 + 5x_3 + 6x_4 = 4, \\ 6x_1 - 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 5, \\ 3x_1 - x_2 + 3x_3 + 14x_4 = -8. \end{cases}$ б) $\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - x_3 + 5x_4 = 0, \\ 3x_1 - x_2 + 2x_3 - 7x_4 = 0, \\ 4x_1 + x_2 - 3x_3 + 6x_4 = 0, \\ 1x_1 - 2x_2 + 4x_3 - 7x_4 = 0. \end{cases}$

6. $\vec{a}_1 = (1;3;2;1)$, $\vec{a}_3 = (2;-1;-1;3)$, $\vec{a}_2 = (1;-1;3;2)$, $\vec{a}_4 = (3;-2;-1;-1)$, $\vec{a} = (17;22;15;10)$.

Варіант 19

1. $(2A-B)(3A+B)-2AB$, якщо $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ -2 & 0 & 1 \\ -1 & 3 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 7 & 5 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ -3 & -1 & -1 \end{pmatrix}$.

2. а) $\begin{vmatrix} 2 & 4 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 & 4 \\ 3 & 4 & 3 & 2 \\ 4 & 3 & 3 & 1 \end{vmatrix}$; б) $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 5 \end{vmatrix}$.

3. $\begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 = 1, \\ x_1 + x_2 + x_3 = 6, \\ 3x_1 - x_2 + x_3 = 4. \end{cases}$

4. $\begin{cases} 2x_1 + \ \ x_2 + x_3 - x_4 = 1, \\ 3x_1 - \ \ x_2 + x_3 + x_4 = 2, \\ 4x_1 + 2x_2 + x_3 - x_4 = 1, \\ \ \ x_1 \qquad\qquad\quad + x_4 = 2. \end{cases}$

5. а) $\begin{cases} 2x_1 + x_2 + \ \ x_3 + \ \ x_4 = 1, \\ \ \ x_1 - x_2 + \ \ x_3 - 2x_4 = 0, \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 - 7x_4 = 1, \\ \ \ x_1 + x_2 + \ \ x_3 + \ \ x_4 = 2. \end{cases}$ б) $\begin{cases} 2x_1 + \ \ x_2 + \ \ x_3 + x_4 = 0, \\ \ \ x_1 - \ \ x_2 + 2x_3 - x_4 = 0, \\ \ \ x_1 + 2x_2 + 3x_3 + x_4 = 0. \end{cases}$

6. $\vec{a}_1 = (2;-5;1;7)$, $\vec{a}_3 = (-1;-7;2;-5)$, $\vec{a}_2 = (5;2;7;-1)$, $\vec{a}_4 = (-7;1;5;2)$, $\vec{a} = (-18;-9;26;-5)$.

Варіант 20

1. $B(A+2B)-3AB$, якщо $A = \begin{pmatrix} 7 & -3 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -4 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$.

2. а) $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 & 2 \\ 3 & 2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 3 \\ -1 & 2 & 1 & 3 \end{vmatrix}$; б) $\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & 3 & -1 & 2 \\ 4 & -2 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 3 & -1 & 1 & -4 \\ 5 & 3 & 5 & 1 & 2 \end{vmatrix}$.

3. $\begin{cases} 7x_1 + 5x_2 + 2x_3 = 18, \\ \ \ x_1 - \ \ x_2 - \ \ x_3 = \ \ 3, \\ \ \ x_1 + 7x_2 + 2x_3 = -2. \end{cases}$

4. $\begin{cases} 4x_1 - 3x_2 + x_3 + 5x_4 = 7, \\ x_1 - 2x_2 - 2x_3 - 3x_4 = 3, \\ 3x_1 - x_2 + 2x_3 = -1, \\ 2x_1 + 3x_2 + 2x_3 - 8x_4 = -7. \end{cases}$

5. а) $\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + x_3 + 4x_4 + 5x_5 = 3, \\ x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 + 2x_5 = 0, \\ x_1 - 2x_2 + 3x_3 + 2x_4 + x_5 = 3. \end{cases}$ б) $\begin{cases} 2x_1 + 5x_2 + 9x_3 = 0, \\ 4x_1 - 3x_2 + 2x_3 = 0, \\ -x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 0, \\ x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 0, \\ 3x_1 - x_2 + 2x_3 = 0. \end{cases}$

6. $\begin{matrix} \vec{a}_1 = (1;2;3;4), & \vec{a}_3 = (3;2;1;2), \\ \vec{a}_2 = (2;1;2;3), & \vec{a}_4 = (4;3;2;1), \end{matrix}$ $\vec{a} = (5;1;1;-5)$.

Варіант 21

1. $3B + (A+B)B$, якщо $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 4 \\ 0 & 3 & 2 \\ -1 & -3 & 4 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -5 \\ 4 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

2. а) $\begin{vmatrix} -1 & 3 & -1 & 2 \\ 3 & 1 & -2 & 1 \\ 2 & -1 & 1 & -2 \\ 1 & 2 & -3 & 1 \end{vmatrix}$; б) $\begin{vmatrix} 1 & 3 & -2 & -2 & 1 \\ 0 & -2 & 2 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 & -1 & 3 \\ 1 & -1 & 3 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 3 & -2 & 1 \end{vmatrix}$.

3. $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 4, \\ 3x_1 - 5x_2 - 7x_3 = 1, \\ 2x_1 + 7x_2 - x_3 = 8. \end{cases}$

4. $\begin{cases} x_1 \qquad\qquad - 2x_3 + 3x_4 = -45, \\ x_2 \qquad\qquad - 3x_3 + 4x_4 = -5, \\ 3x_1 + 2x_2 \qquad\qquad - 5x_4 = 12, \\ 4x_1 + 3x_2 - 5x_3 \qquad\qquad = 5. \end{cases}$

5. а) $\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + x_3 + 4x_4 + 5x_5 = 3, \\ x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 + 2x_5 = 0, \\ x_1 - 2x_2 + 3x_3 + 2x_4 + x_5 = 3. \end{cases}$ б) $\begin{cases} 2x_1 + 5x_2 + 9x_3 = 0, \\ 4x_1 - 3x_2 + 2x_3 = 0, \\ -x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 0, \\ x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 0, \\ 3x_1 - x_2 + 2x_3 = 0. \end{cases}$

6. $\begin{matrix} \vec{a}_1 = (1;3;5;7), & \vec{a}_3 = (5;7;1;3), \\ \vec{a}_2 = (3;5;7;1), & \vec{a}_4 = (7;1;3;5), \end{matrix}$ $\vec{a} = (12;0;4;16)$.

Варіант 22

1. $2AB - (2A+B)(3A-B)$, якщо $A = \begin{pmatrix} 7 & 5 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ -3 & -1 & -1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ -2 & 0 & 1 \\ -1 & 3 & 1 \end{pmatrix}$.

2. а) $\begin{vmatrix} 2 & 4 & 3 & 5 \\ 3 & -2 & 5 & 4 \\ 5 & 4 & 2 & -3 \\ 4 & 3 & 4 & -2 \end{vmatrix}$; б) $\begin{vmatrix} 4 & 1 & 3 & 2 & 5 \\ 2 & 3 & 0 & 4 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & 3 \\ 1 & 2 & 0 & 3 & 1 \\ 4 & 3 & 1 & 0 & 2 \end{vmatrix}$.

3. $\begin{cases} 7x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 15, \\ 5x_1 - 3x_2 + 2x_3 = 15, \\ 10x_1 - 11x_2 + 5x_3 = 36. \end{cases}$

.

4. $\begin{cases} x_1+2x_2+3x_3+4x_4=11, \\ 2x_1+3x_2+4x_3+\ \ x_4=12, \\ 3x_1+4x_2+\ \ x_3+2x_4=13, \\ 4x_1+\ \ x_2+2x_3+3x_4=-5. \end{cases}$

5. а) $\begin{cases} x_1+8x_2+2x_3=13, \\ x_1+x_2+5x_3=-7, \\ 2x_1+3x_2-3x_3=14, \\ 2x_1+x_2+x_3=2, \\ x_1+3x_2+x_3=5, \\ 6x_1+9x_2+13x_3=-2. \end{cases}$ б) $\begin{cases} 2x_1+5x_2+9x_3=0, \\ 4x_1-3x_2+2x_3=0, \\ -x_1+2x_2+3x_3=0, \\ x_1-2x_2+3x_3=0, \\ 3x_1-x_2+2x_3=0. \end{cases}$

6. $\vec{a}_1=(1;2;3;4)$, $\vec{a}_3=(3;2;1;2)$, $\vec{a}_2=(2;1;2;3)$, $\vec{a}_4=(4;3;2;1)$, $\vec{a}=(5;1;1;-5)$.

Варіант 23

1. $(B-A)2B+2A$, якщо $A=\begin{pmatrix} 3 & 7 & -2 \\ 1 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 5 & -1 & 3 \\ 0 & 2 & -1 \\ -2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$.

2. а) $\begin{vmatrix} -1 & 2 & 4 & -2 \\ 3 & 1 & 0 & -1 \\ 4 & 3 & 2 & -3 \\ 3 & 0 & 4 & 1 \end{vmatrix}$; б) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 4 \\ 1 & 1 & 3 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$.

3. $\begin{cases} 2x_1+5x_2-3x_3=4, \\ 4x_1-3x_2+2x_3=9, \\ 5x_1+6x_2-2x_3=18. \end{cases}$

4. $\begin{cases} 3x_1 + x_2 + 2x_3 + 4x_4 = 1, \\ 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 + 5x_4 = -2, \\ 5x_1 + 2x_2 + x_3 + 4x_4 = 4, \\ 4x_1 + 6x_2 + 3x_3 + 7x_4 = 1. \end{cases}$

5. а) $\begin{cases} 2x_1 + x_2 + 2x_3 - 2x_4 - 3x_5 = 8, \\ x_1 - 2x_2 + 3x_3 - x_4 + 2x_5 = 2, \\ 3x_1 - x_2 + 5x_3 - 3x_4 - x_5 = 6. \end{cases}$ б) $\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 3x_3 + x_4 = 0, \\ 2x_1 - x_2 + x_3 - 2x_4 = 0, \\ 3x_1 + x_2 - 2x_3 + x_4 = 0, \\ -x_1 + 3x_2 - x_3 + 2x_4 = 0. \end{cases}$

6. $\vec{a}_1 = (3;1;5;4)$, $\vec{a}_3 = (1;-1;3;5)$, $\vec{a}_2 = (-2;3;-1;-2)$, $\vec{a}_4 = (-1;2;1;2)$, $\vec{a} = (-11;14;1;7)$

Варіант 24

1. $\left(A^2 - B^2\right) + 3AB$, якщо $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 \\ -1 & 1 & 2 \\ 3 & -1 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 5 \\ -1 & 0 & 2 \\ -2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$.

2. а) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 & 2 \\ -2 & 2 & 2 & 2 \\ -2 & -2 & 3 & 2 \\ -2 & -2 & -2 & 4 \end{vmatrix}$; б) $\begin{vmatrix} 3 & -1 & 2 & -1 & 1 \\ 5 & 1 & -2 & 1 & 2 \\ 9 & -1 & 1 & 3 & 4 \\ 3 & 0 & 6 & -1 & 3 \\ 5 & 2 & 3 & -2 & 1 \end{vmatrix}$.

3. $\begin{cases} 3x_1 - x_2 + x_3 = 12, \\ x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 6, \\ 5x_1 + x_2 + 2x_3 = 3. \end{cases}$

4. $\begin{cases} 2x_1+3x_2+11x_3+5x_4= \ \ 2, \\ \ x_1+\ \ x_2+\ 5x_3+2x_4= \ \ 1, \\ 3x_1+3x_2+\ \ 9x_3+5x_4=-2, \\ 2x_1+x_2+\ \ \ 3x_3+2x_4=-3. \end{cases}$

5. а) $\begin{cases} x_1-2x_2+x_3-4x_4+x_5=2, \\ 3x_1-2x_2-5x_3-6x_4-x_5=3, \\ 2x_1-14x_3+4x_4-6x_5=-2. \end{cases}$ б) $\begin{cases} 5x_1-4x_2-6x_3=0, \\ 2x_1+x_2-3x_3=0, \\ -x_1+6x_2=0, \\ x_1-3x_2+x_3=0, \\ 2x_1+x_2-5x_3=0, \\ -x_1+2x_2+x_3=0. \end{cases}$

6. $\begin{matrix} \vec{a}_1=(1;1;4;2), & \vec{a}_3=(3;2;-1;1), \\ \vec{a}_2=(2;0;1;1), & \vec{a}_4=(4;2;0;0), \end{matrix}$ $\vec{a}=(7;5;3;1).$

Варіант 25

1. $3B+2A(BA-2B)$, якщо $A=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 5 & 3 & 1 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$.

2. а) $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 4 & 3 \\ 5 & 0 & -1 & 0 \\ 2 & -1 & 6 & 3 \\ 1 & 5 & -1 & 2 \end{vmatrix}$; б) $\begin{vmatrix} 1 & 3 & -2 & -2 & 1 \\ 0 & -2 & 2 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 & -1 & 3 \\ 1 & -1 & 3 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 3 & -2 & 1 \end{vmatrix}$.

3. $\begin{cases} 2x_1-x_2+2x_3= \ \ 3, \\ \ x_1+x_2+2x_3=-4, \\ 4x_1+x_2+4x_3=-3. \end{cases}$

4. $\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + 5x_3 + \quad x_4 = -7, \\ -x_1 + \quad x_2 + 4x_3 - 2x_4 = \quad 1, \\ 5x_1 + 2x_2 - 3x_3 + 6x_4 = \quad 5, \\ -2x_1 + 5x_2 + \quad x_3 - 7x_4 = \quad 5. \end{cases}$

5. а) $\begin{cases} x_1 + \quad x_2 + \quad x_3 - 2x_4 + 3x_5 = 1, \\ 2x_1 + 2x_2 + 4x_3 - \quad x_4 + 3x_5 = 2, \\ 3x_1 + 3x_2 + 5x_3 - 2x_4 + 3x_5 = 1, \\ 2x_1 + 2x_2 + 8x_3 - 3x_4 + 9x_5 = 2. \end{cases}$ б) $\begin{cases} 5x_1 + 6x_2 - 2x_3 + 7x_4 + 4x_5 = 0, \\ 2x_1 + 3x_2 - \quad x_3 + 4x_4 + 2x_5 = 0, \\ 7x_1 + 9x_2 - 3x_3 + 5x_4 + 6x_5 = 0, \\ 5x_1 + 9x_2 - 3x_3 + \quad x_4 + 6x_5 = 0. \end{cases}$

6. $\begin{matrix} \vec{a}_1 = (3;7;1;5), & \vec{a}_3 = (7;3;5;1), \\ \vec{a}_2 = (5;1;3;7), & \vec{a}_4 = (1;5;7;3), \end{matrix}$ $\quad \vec{a} = (0;16;12;4).$

Варіант 26

1. $(A+2B)(3A-B)$, якщо $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ -2 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$

2. а) $\begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 & 2 \\ 3 & 3 & 3 & 2 \\ 3 & -1 & -1 & 2 \\ 3 & -1 & 3 & -1 \end{vmatrix}$; б) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 2 & 1 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 2 & 3 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 2 & 1 \end{vmatrix}.$

3. $\begin{cases} 2x_1 - \quad x_2 + 2x_3 = 2, \\ 3x_1 + 2x_2 + \quad x_3 = 15, \\ x_1 + 3x_2 + 3x_3 = 10. \end{cases}$

4. $\begin{cases} x_1 + 4x_2 - 7x_3 + 6x_4 = 0, \\ x_1 - 3x_2 - 6x_4 = 9, \\ 2x_1 + x_2 - 5x_3 + x_4 = 8, \\ 2x_2 - x_3 + 2x_4 = -5. \end{cases}$

5. а) $\begin{cases} -x_1 + 3x_2 + 3x_3 + 2x_4 + 5x_5 = 2, \\ -3x_1 + 5x_2 + 2x_3 + 3x_4 + 4x_5 = 2, \\ -3x_1 + x_2 - 5x_3 - 7x_5 = -2, \\ -5x_1 + 7x_2 + x_3 + 16x_4 + x_5 = 10. \end{cases}$ б) $\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 0, \\ 2x_1 - x_2 - 3x_4 = 0, \\ 3x_1 - x_3 + x_4 = 0, \\ 2x_1 + 2x_2 - 2x_3 + 5x_4 = 0. \end{cases}$

6. $\vec{a}_1 = (2;3;-3;4)$, $\vec{a}_3 = (6;-2;1;0)$, $\vec{a}_2 = (2;1;-1;2)$, $\vec{a}_4 = (2;3;0;-5)$, $\vec{a} = (92;68;-17;-7)$.

Варіант 27

1. $3(B+A)-(A-B)A$, якщо $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 1 \\ -1 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & -1 \end{pmatrix}$.

2. а) $\begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ 3 & -1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 6 & 1 \end{vmatrix}$; б) $\begin{vmatrix} 3 & 1 & 5 & 1 & 6 \\ 4 & 0 & 1 & 1 & 4 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & 2 & 3 & -3 & 0 \\ 1 & 6 & 15 & -2 & 8 \end{vmatrix}$.

3. $\begin{cases} 5x_1 + 8x_2 + x_3 = 2, \\ 3x_1 - 2x_2 + 6x_3 = -7, \\ 2x_1 + x_2 - x_3 = -5. \end{cases}$

4. $\begin{cases} 2x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 = 4, \\ 4x_1 + 3x_2 - x_3 + 2x_4 = 6, \\ 8x_1 + 5x_2 - 3x_3 + 4x_4 = 12, \\ 3x_1 + 3x_2 - 2x_3 + 2x_4 = 6. \end{cases}$

5. а) $\begin{cases} 9x_1 - 3x_2 + 5x_3 + 6x_4 = 4, \\ 6x_1 - 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 5, \\ 3x_1 - x_2 + 3x_3 + 14x_4 = -8. \end{cases}$ б) $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 4x_3 - 3x_4 = 0, \\ 3x_1 + 5x_2 + 6x_3 - 4x_4 = 0, \\ 4x_1 + 5x_2 - 2x_3 + 3x_4 = 0, \\ 3x_1 + 8x_2 + 24x_3 - 19x_4 = 0. \end{cases}$

6. $\vec{a}_1 = (1;1;1;-1)$, $\vec{a}_3 = (-1;2;0;-2)$, $\vec{a}_2 = (1;0;-1;3)$, $\vec{a}_4 = (-1;-2;-1;0)$, $\vec{a} = (-4;5;-11;-1)$.

Варіант 28

1. $AB - 2(A+B)A$, якщо $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & -2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & -1 \end{pmatrix}$.

2. а) $\begin{vmatrix} 3 & -1 & 4 & 2 \\ 5 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & -3 \\ 6 & -2 & 9 & 8 \end{vmatrix}$; б) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 2 & 3 & 4 & 1 \\ 3 & 4 & 5 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 2 & 5 & 3 \\ 2 & 5 & 1 & 3 & 4 \end{vmatrix}$.

3. $\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + x_3 = -7, \\ x_1 + 4x_2 + 2x_3 = -1, \\ x_1 - 4x_2 = -5. \end{cases}$

4. $\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + 11x_3 + 5x_4 = 2, \\ x_1 + x_2 + 5x_3 + 2x_4 = 1, \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 + 2x_4 = -3, \\ x_1 + x_2 + 3x_3 + 4x_4 = -3. \end{cases}$

5. а) $\begin{cases} 3x_1 - 5x_2 + 2x_3 + 4x_4 = 2, \\ 7x_1 - 4x_2 + x_3 + 3x_4 = 5, \\ 5x_1 + 7x_2 - 4x_3 - 6x_4 = 3. \end{cases}$ б) $\begin{cases} 5x_1 + 6x_2 - 2x_3 + 7x_4 + 4x_5 = 0, \\ 2x_1 + 3x_2 - x_3 + 4x_4 + 2x_5 = 0, \\ 7x_1 + 9x_2 - 3x_3 + 5x_4 + 6x_5 = 0, \\ 5x_1 + 9x_2 - 3x_3 + x_4 + 6x_5 = 0. \end{cases}$

6. $\vec{a}_1 = (3;2;1;1)$, $\vec{a}_3 = (-5;1;0;-4)$, $\vec{a}_2 = (-2;-3;2;-1)$, $\vec{a}_4 = (1;5;-4;9)$, $\vec{a} = (3;-3;-3;22)$.

Варіант 29

1. $(A+2B)-(3A-B)$, якщо $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ -2 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

2. а) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & -6 & -4 \\ 3 & -1 & -6 & -4 \\ 2 & 3 & 9 & 2 \\ 3 & 2 & 3 & 8 \end{vmatrix}$; б) $\begin{vmatrix} 3 & 2 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & 2 & 5 & 3 \\ 9 & 1 & 4 & -5 & 1 \\ 2 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 7 & 1 & 6 & -1 & 7 \end{vmatrix}$.

3. $\begin{cases} x_1 + x_2 - 2x_3 = 6, \\ 2x_1 + 3x_2 - 7x_3 = 16, \\ 5x_1 + 2x_2 + x_3 = 16. \end{cases}$

4. $\begin{cases} 4x_1 + 4x_2 + 5x_3 + 5x_4 = 0, \\ 2x_1 + 3x_3 - x_4 = 10, \\ x_1 + x_2 - 5x_3 = -10, \\ 3x_2 + 2x_3 = 1. \end{cases}$

5. а) $\begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 - 3x_4 = 2, \\ 4x_1 + x_3 - 7x_4 = 3, \\ 2x_2 - 3x_3 + x_4 = 1, \\ 2x_1 + 3x_2 - 4x_3 - 2x_4 = 3. \end{cases}$ б) $\begin{cases} 3x_1 + 4x_2 + x_3 + 2x_4 = 0, \\ 3x_1 + 5x_2 + 3x_3 + 5x_4 = 0, \\ 6x_1 + 8x_2 + x_3 + 5x_4 = 0, \\ 3x_1 + 5x_2 + 3x_3 + 7x_4 = 0. \end{cases}$

6. $\vec{a}_1 = (2;3;3;3)$, $\vec{a}_3 = (3;3;-1;3)$, $\vec{a}_2 = (-1;3;-1;-1)$, $\vec{a}_4 = (2;2;-2;-1)$, $\vec{a} = (4;6;6;6)$.

Варіант 30

1. $2AB + A(B - A)$, якщо $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 \\ 2 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$.

2. а) $\begin{vmatrix} 1 & 3 & -2 & 1 \\ 2 & 4 & -1 & 2 \\ 3 & 5 & -2 & 1 \\ 2 & 8 & -3 & 2 \end{vmatrix}$; б) $\begin{vmatrix} -1 & 1 & 3 & 4 & 0 \\ -1 & 0 & 3 & -2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 & -3 & 1 \\ 1 & 2 & -1 & 1 & 5 \\ 1 & 2 & 3 & -2 & 0 \end{vmatrix}$.

3. $\begin{cases} 7x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 15, \\ 5x_1 - 3x_2 + 2x_3 = 15, \\ 10x_1 - 11x_2 + 5x_3 = 36. \end{cases}$

4. $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 0, \\ 7x_1 + 14x_2 + 20x_3 + 27x_4 = 0, \\ 5x_1 + 10x_2 + 16x_3 + 19x_4 = -2, \\ 3x_1 + 5x_2 + 6x_3 + 13x_4 = 5. \end{cases}$

5. а) $\begin{cases} 7x_1 - 5x_2 - 2x_3 - 4x_4 = 8, \\ -3x_1 + 2x_2 + x_3 + 2x_4 = -3, \\ 2x_1 - x_2 - x_3 - 2x_4 = 1, \\ -x_1 + x_3 + 24x_4 = 1, \\ - x_2 + x_3 + 2x_4 = 3. \end{cases}$ б) $\begin{cases} 2x_1 + 5x_2 + 4x_3 + x_4 = 0, \\ x_1 + 3x_2 + 2x_3 + x_4 = 0, \\ 2x_1 + 10x_2 + 9x_3 + 9x_4 = 0, \\ 3x_1 + 8x_2 + 9x_3 + 2x_4 = 0. \end{cases}$

6. $\vec{a}_1 = (2;3;4;2)$, $\vec{a}_3 = (-2;1;3;-3)$, $\vec{a}_2 = (1;4;-2;2)$, $\vec{a}_4 = (1;-3;-4;-1)$, $\vec{a} = (1;-7;3;-11)$.

Зразок виконання індивідуального завдання № 1

Приклад 1. Виконати дії над матрицями: $AB - 2(A+B)A$, якщо

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & -2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & -1 \end{pmatrix}.$$

Розв’язання.

Спочатку знайдемо добуток матриць A і B:

$$AB = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4+0-1 & -2+2-3 & 0+1+1 \\ 2+0+1 & -1+0+3 & 0+0-1 \\ 6+0-2 & -3+2-6 & 0+1+2 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 3 & -3 & 2 \\ 3 & 2 & -1 \\ 4 & -7 & 3 \end{pmatrix};$$

тепер обчислимо суму матриць $A+B$ та добуток матриць $(A+B)$ й A:

$$A+B=\begin{pmatrix}2&1&-1\\1&0&1\\3&1&-2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}2&-1&0\\0&2&1\\1&3&-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4&0&-1\\1&2&2\\4&4&-3\end{pmatrix};$$

$$(A+B)A=\begin{pmatrix}4&0&-1\\1&2&2\\4&4&-3\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}2&1&-1\\1&0&1\\3&1&-2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}8+0-3&4+0-1&-4+0+2\\2+2+6&2+0+2&-1+2-4\\8+4-9&4+0-3&-4+4+6\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}5&3&-2\\10&4&-3\\3&1&6\end{pmatrix};$$

остаточно отримаємо:

$$AB-2(A+B)A=\begin{pmatrix}3&-3&2\\3&2&-1\\4&-7&3\end{pmatrix}-2\begin{pmatrix}5&3&-2\\10&4&-3\\3&1&6\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-7&-9&6\\-17&-6&5\\-2&-9&-9\end{pmatrix}.$$

Приклад 2. Обчислити визначник

$$\Delta=\begin{vmatrix}2&-1&3&2\\3&3&3&2\\3&-1&-1&2\\3&-1&3&-1\end{vmatrix}.$$

Розв'язання. Перетворимо визначник до такого вигляду:

$$\Delta=\begin{vmatrix}2&\boxed{-1}&3&2\\3&3&3&2\\3&-1&-1&2\\3&-1&3&-1\end{vmatrix}\overset{\substack{S_2+3S_1\\S_3+(-1)\cdot S_1\\S_4+(-1)\cdot S_1}}{=}\begin{vmatrix}2&\boxed{-1}&3&2\\9&0&12&8\\1&0&-4&0\\1&0&0&-3\end{vmatrix}=(-1)\cdot(-1)^{1+2}\cdot\begin{vmatrix}9&12&8\\1&-4&0\\1&0&-3\end{vmatrix}=$$

$$= \begin{vmatrix} 9 & 12 & 8 \\ 1 & \boxed{-4} & 0 \\ 1 & 0 & -3 \end{vmatrix} \overset{S_1+3S_2}{=} \begin{vmatrix} 12 & 0 & 8 \\ 1 & \boxed{-4} & 0 \\ 1 & 0 & -3 \end{vmatrix} = (-4)(-1)^{2+2} \begin{vmatrix} 12 & 8 \\ 1 & -3 \end{vmatrix} = -4(-36-8) = 176.$$

Відповідь: $\Delta = 176$.

Приклад 3. Розв’язати за формулами Крамера систему рівнянь:

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 1, \\ x_1 - x_2 - x_3 = 2, \\ x_1 + x_3 = 0. \end{cases}$$

Розв’язання. Формули Крамера мають вигляд:

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta},\ x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta},\ x_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta},$$

де $\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -2-3+0+1-3-0 = -7,$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 2 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -1-6 = -7,$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 4-1-2-1 = 0,$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 6+1 = 7.$$

Таким чином, маємо $x_1 = \dfrac{-7}{-7} = 1,\ x_2 = \dfrac{0}{-7} = 0,\ x_3 = \dfrac{7}{-7} = -1.$

Відповідь: $\{1; 0; -1\}$.

Приклад 4. Розв’язати за допомогою оберненої матриці систему рівнянь:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 = 0, \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 = -2, \\ 4x_1 + 3x_2 + 7x_3 = 0. \end{cases}$$

Розв’язання. Представимо систему рівнянь у вигляді матричного рівняння $A \cdot X = B$, де

$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 3 \\ 4 & 3 & 7 \end{pmatrix}$ – матриця системи;

$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ – матриця-стовпець невідомих;

$B = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}$ – матриця-стовпець вільних членів.

Тоді розв’язком системи буде матриця-стовпець $X = A^{-1}B$, де A^{-1} – обернена матриця.

Примітимо, що розв’язати систему за допомогою оберненої матриці можливо тільки у випадку, коли визначник матриці системи не дорівнює нулю. Перевіримо цю умову у даному випадку:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 3 \\ 4 & 3 & 7 \end{vmatrix} = -7 + 12 + 12 + 8 - 14 - 9 = 2 \neq 0.$$

Отже, визначник матриці A не дорівнює нулю, тобто вона є невиродженою й для неї існує єдина обернена матриця A^{-1}.

Складемо обернену матрицю:

$$A^{-1} = \frac{1}{\Delta}\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{pmatrix}$$

Для цього послідовно обчислимо алгебраїчні доповнення A_{ij} елементів a_{ij} матриці A за допомогою формули $A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$, де M_{ij} – відповідні мінори елементів a_{ij}.

$$A_{11} = (-1)^{1+1}\begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 3 & 7 \end{vmatrix} = -16, \quad A_{12} = (-1)^{1+2}\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 7 \end{vmatrix} = -2,$$

$$A_{13} = (-1)^{1+3}\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} = 10, \quad A_{21} = (-1)^{2+1}\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 7 \end{vmatrix} = -1,$$

$$A_{22} = (-1)^{2+2}\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 7 \end{vmatrix} = -1, \quad A_{23} = (-1)^{2+3}\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} = 1,$$

$$A_{31} = (-1)^{3+1}\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} = 5, \quad A_{32} = (-1)^{3+2}\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 1,$$

$$A_{33} = (-1)^{3+3}\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = -3.$$

Таким чином, обернена матриця набуває вигляду:

$$A^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -16 & -1 & 5 \\ -2 & -1 & 1 \\ 10 & 1 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -8 & -\frac{1}{2} & \frac{5}{2} \\ -1 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 5 & \frac{1}{2} & -\frac{3}{2} \end{pmatrix}.$$

Перевіримо, що $A\cdot A^{-1}=E$.

$$A\cdot A^{-1}=\begin{pmatrix}1 & 1 & 2\\ 2 & -1 & 3\\ 4 & 3 & 7\end{pmatrix}\cdot\frac{1}{2}\cdot\begin{pmatrix}-16 & -1 & 5\\ -2 & -1 & 1\\ 10 & 1 & -3\end{pmatrix}=$$

$$=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}-16-2+20 & -1-1+2 & 5+1-6\\ -32+2+30 & -2+1+3 & 10-1-9\\ -64-6+70 & -4-3+7 & 20+3-21\end{pmatrix}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}2 & 0 & 0\\ 0 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}=E.$$

Аналогічно переконуємося, що $A^{-1}\cdot A=E$.

Остаточно отримаємо:

$$X=A^{-1}B=\begin{pmatrix}-8 & -\frac{1}{2} & \frac{5}{2}\\ -1 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2}\\ 5 & \frac{1}{2} & -\frac{3}{2}\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0\\ -2\\ 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\ 1\\ -1\end{pmatrix}.$$

Відповідь: $\{1;\ 1;-1\}$.

Приклад 5. Розв’язати методом Жордана – Гаусса систему рівнянь

$$\begin{cases}x_1-2x_2+x_3-x_4=0,\\ 2x_1+x_2+3x_3+x_4=12,\\ x_1+3x_2+x_3+2x_4=10,\\ 3x_1-x_2-x_3+3x_4=17.\end{cases}$$

Розв’язання. Розв’язання системи зручно надати у вигляді таблиці (табл. 1).

Таблиця 1

Розв'язання системи лінійних рівнянь методом Жордана – Гаусса

Номер рядка	x_1	x_2	x_3	x_4	b_i	Контрольна сума	Примітки	Номер ітерації
1	$\boxed{1}$	-2	1	-1	0	-1		Вихідна система
2	2	1	3	1	12	19		
3	1	3	1	2	10	17		
4	3	-1	-1	3	17	21		
5	1	-2	1	-1	0	-1		Перша
6	0	5	$\boxed{1}$	3	12	21	$[1]\cdot(-2)+[2]$	
7	0	5	0	3	10	18	$[1]\cdot(-1)+[3]$	
8	0	5	-4	6	17	24	$[1]\cdot(-3)+[4]$	
9	1	-7	0	-4	-12	-22	$[6]\cdot(-1)+[5]$	Друга
10	0	5	1	3	12	21	$[6]$	
11	0	$\boxed{5}$	0	3	10	18	$[7]$	
12	0	25	0	18	65	108	$[6]\cdot 4+[8]$	
13	1	0	0	1/5	2	16/5	$[15]\cdot 7+[9]$	Третя
14	0	0	1	0	2	3	$[15]\cdot(-5)+[10]$	
15	0	$\boxed{1}$	0	3/5	2	18/5	$[11]\cdot {}^1\!/_5$	
16	0	0	0	3	15	18	$[15]\cdot(-25)+[12]$	
17	1	0	0	0	1	2	$[20]\cdot\left(-{}^1\!/_5\right)+[13]$	Четверта
18	0	0	1	0	2	3	$[14]$	
19	0	1	0	0	-1	0	$[20]\cdot\left(-{}^3\!/_5\right)+[15]$	
20	0	0	0	$\boxed{1}$	5	6	$[16]\cdot {}^1\!/_3$	

З останніх 17 – 20 рядків табл. 1 одержуємо $x_1 = 1$, $x_2 = -1$, $x_3 = 2$, $x_4 = 5$.

Відповідь: $\{1;\ -1;\ 2;\ 5\}$.

Приклад 6. Дослідити і розв'язати систему рівнянь, якщо вона сумісна:

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 = 3, \\ x_1 + 3x_2 - x_3 = 1, \\ 3x_1 + 4x_2 - x_3 = 5. \end{cases}$$

Розв'язання. Запишемо розширену матрицю системи й перетворимо її до трикутного вигляду:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & -1 & 1 \\ \underbrace{3 \quad 4 \quad -1}_{A} & & & 5 \end{array}\right) \overset{\substack{S_2+S_1\cdot(-1) \\ S_3+S_1\cdot(-3)}}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 3 \\ 0 & 5 & -2 & -2 \\ 0 & 10 & -4 & -4 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 3 \\ 0 & 5 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 3 \\ 0 & 5 & -2 & -2 \end{array}\right)$$

Очевидно, що $rang(A) = 2$ і $rang(B) = 3$, тобто за теоремою Кронекера – Капеллі надана система рівнянь сумісна, а оскільки

$rang(A) = rang(B) = 2 < n = 3$, де $n = 3$ – кількість невідомих, то вона має нескінчену множину розв'язків.

За останньою матрицею запишемо систему рівнянь:

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 = 3, \\ 5x_2 - 2x_3 = -2, \end{cases} \text{ або } \begin{cases} x_1 - 2x_2 = 3 - x_3, \\ 5x_2 = -2 + 2x_3. \end{cases}$$

Звідси $x_2 = \dfrac{-2 + 2x_3}{5}, \quad x_1 = 3 - x_3 + 2x_2 = \dfrac{11 - x_3}{5}$.

Одержано загальний розв'язок системи рівнянь, де x_1 та x_2 – залежні змінні, що виражені через вільну змінну x_3.

Якщо $x_3 = 0$, то буде одержаний базисний розв'язок:

$$x_1 = \frac{11}{5}; \quad x_2 = -\frac{2}{5}; \quad x_3 = 0.$$

Приклад 7. Розв’язати систему однорідних рівнянь:

$$\begin{cases} 2x_1 + 5x_2 + 9x_3 = 0, \\ 4x_1 - 3x_2 + 2x_3 = 0, \\ -x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 0, \\ x_1 - 2x_2 + x_3 = 0, \\ 3x_1 + x_2 + 2x_3 = 0. \end{cases}$$

Розв’язання. Запишемо матрицю системи A та знайдемо її ранг.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 9 \\ 4 & -3 & 2 \\ -1 & 2 & 3 \\ 1 & -2 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} \boxed{1} & -2 & 1 \\ 2 & 5 & 9 \\ 4 & -3 & 2 \\ -1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 9 & 7 \\ 0 & 5 & -2 \\ 0 & 0 & 4 \\ 0 & 7 & -1 \end{pmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 7/9 \\ 0 & 1 & -2/5 \\ 0 & 1 & -1/7 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & \frac{7}{9} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Отже, $rangA = 3 = n$, де $n = 3$ – кількість невідомих.

Система має єдиний розв’язок: $x_1 = x_2 = x_3 = 0$.

Приклад 8. Довести, що вектори $\vec{a}_1 = (1;\ 1;\ 0;\ 1)$, $\vec{a}_2 = (2;\ 1;\ 3;\ 1)$, $\vec{a}_3 = (1;\ 1;\ 0;\ 0)$, $\vec{a}_4 = (0;\ 1; -1; -1)$ утворюють базис і розкласти вектор $\vec{a} = (20;\ 22;\ 8;\ 2)$ за цим базисом.

Розв’язання. Чотири чотиривимірні вектори утворюють базис, якщо визначник Δ, що складений з їхніх координат не дорівнює нулю.

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & \boxed{1} & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & \boxed{1} & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & -1 \end{vmatrix} = 1\cdot\left(-1\right)^{1+3} \begin{vmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 0 & 3 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} = -2 \neq 0.$$

Задані вектори утворюють базис.

Розкладемо вектор $\vec{a} = \left(20;\ 22;\ 8;\ 2\right)$ за цим базисом, тобто запишемо його у вигляді:

$$\vec{a} = \alpha_1\vec{a}_1 + \alpha_2\vec{a}_2 + \alpha_3\vec{a}_3 + \alpha_4\vec{a}_4,$$

або

$$\alpha_1\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \alpha_2\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} + \alpha_3\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \alpha_4\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 20 \\ 22 \\ 8 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

За цією рівністю запишемо систему рівнянь:

$$\begin{cases} \alpha_1 + 2\alpha_2 + \alpha_3 = 20, \\ \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4 = 22, \\ 3\alpha_2 - \alpha_4 = 8, \\ \alpha_1 + \alpha_2 - \alpha_4 = 2. \end{cases}$$

Розв’яжемо цю систему методом Гаусса. Для цього запишемо розширену матрицю системи та за допомогою еквівалентних перетворень зведемо її до одиничної:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} \boxed{1} & 2 & 1 & 0 & 20 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 22 \\ 0 & 3 & 0 & -1 & 8 \\ 1 & 1 & 0 & -1 & 2 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 1 & 0 & 20 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 0 & -1 & 8 \\ 0 & -1 & -1 & -1 & -18 \end{array}\right) \overset{S_4\cdot(-1)}{\sim} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 1 & 0 & 20 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 0 & -1 & 8 \\ 0 & 1 & \boxed{1} & 1 & 18 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & -1 & 0 & \boxed{1} & 2 \\ 0 & 3 & 0 & -1 & 8 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 18 \end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 10 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 16 \end{array}\right)\overset{S_3\cdot\frac{1}{2}}{\sim}\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & \boxed{1} & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 16 \end{array}\right)\sim$$

$$\sim\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 7 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 6 \end{array}\right).$$

З останньої матриці отримуємо: $\alpha_1 = 4$, $\alpha_2 = 5$, $\alpha_3 = 6$, $\alpha_4 = 7$.

Тому $\vec{a} = 4\vec{a}_1 + 5\vec{a}_2 + 6\vec{a}_3 + 7\vec{a}_4$.

Індивідуальне завдання № 2
Елементи векторної алгебри та аналітичної геометрії: пряма лінія на площині. Криві другого порядку

Зміст завдання

1. Задано координати вершин трикутника ABC.

Треба зробити рисунок до задачі та знайти:

а) довжини сторін;

б) рівняння сторін;

в) рівняння і довжину висоти AD;

г) рівняння медіани AM;

д) точку перетину медіан, не знаходячи їх рівнянь;

е) рівняння середньої лінії, яка паралельна стороні AC;

ж) кут при вершині A;

з) площу трикутника;

і) радіус описаного кола.

2. Побудувати криві, які задані рівняннями.

3. Перетворити до канонічного вигляду рівняння кривих і побудувати їх.

Варіант 1

1. $A(-3;-2)$; $B(0;10)$; $C(6;2)$.

2. а) $(x+1)^2+(y-2)^2=4$; б) $25x^2+4y^2=100$;

   в) $25x^2-4y^2=100$; г) $x^2=2(y+1)$.

3. $x^2+y^2+2x-10y+1=0$.

Варіант 2

1. $A(1;1)$; $B(-5;4)$; $C(-2;5)$.

2. а) $(x-2)^2+(y+3)^2=1$; б) $9x^2+36y^2=324$;

   в) $9x^2-36y^2=324$; г) $y^2=3(x+1)$.

3. $2x^2+3y^2-4x+6y-7=0$.

Варіант 3

1. $A(-1;1)$; $B(-7;4)$; $C(-4;5)$.

2. а) $(x-3)^2+(y-1)^2=9$; б) $4x^2+9y^2=36$;

   в) $4x^2-9y^2=36$; г) $x^2=-2(y+1)$.

3. $x^2-y^2-4x+2y-4=0$.

Варіант 4

1. $A(1;-1)$; $B(-5;2)$; $C(-2;3)$.

2. а) $(x+3)^2+(y-4)^2=16$; б) $9x^2+16y^2=144$;

   в) $9x^2-16y^2=144$; г) $y^2=-3(x+1)$.

3. $x^2-10x=4y-13$.

Варіант 5

1. $A(-1;-1); B(-4;-3); C(-7;2)$.

2. а) $(x+3)^2+(y-3)^2=49$; б) $4x^2+9y^2=144$;

в) $4x^2-9y^2=144$; г) $x^2=2(y+2)$.

3. $x^2+4y^2-6x+8y-3=0$.

Варіант 6

1. $A(-3;-5); B(4;3); C(-2;4)$.

2. а) $(x-1)^2+(y+1)^2=36$; б) $x^2+4y^2=16$;

в) $x^2-4y^2=16$; г) $y^2=2(x+2)$.

3. $x^2-4y^2+8x-24y-24=0$.

Варіант 7

1. $A(-4;2); B(2;-5); C(-3;-4)$.

2. а) $(x+2)^2+(y+3)^2=25$; б) $16x^2+25y^2=400$;

в) $16x^2-25y^2=400$; г) $x^2=-2(y-2)$.

3. $x^2-4y^2+6x+5=0$.

Варіант 8

1. $A(3;7); B(1;-2); C(-6;4)$.

2. а) $(x+2)^2+(y-1)^2=1$; б) $4x^2+49y^2=196$;

в) $4x^2-49y^2=196$; г) $y^2=-2(x-2)$.

3. $y^2-6x+14y+49=0$.

Варіант 9

1. $A(-1;-1); B(-3;4); C(-6;-7)$.

2. а) $(x+5)^2+(y-1)^2=4$; б) $25x^2+49y^2=1225$;

   в) $25x^2-49y^2=1225$; г) $x^2=4(y+3)$.

3. $x^2+y^2-2x+6y-5=0$.

Варіант 10

1. $A(3;4); B(-2;5); C(4;-2)$.

2. а) $(x-4)^2+(y+4)^2=9$; б) $9x^2+25y^2=225$;

   в) $9x^2-25y^2=225$; г) $y^2=2(x-3)$.

3. $x^2+4y^2+4x-16y-8=0$.

Варіант 11

1. $A(3;5); B(-4;-3); C(2;-4)$.

2. а) $(x+2)^2+(y+2)^2=16$; б) $4x^2+49y^2=196$;

   в) $4x^2-49y^2=196$; г) $x^2=-5(y+3)$.

3. $x^2-4y^2+2x+16y-7=0$.

Варіант 12

1. $A(-1;-7); B(-3;4); C(-2;-1)$.

2. а) $(x+1)^2+(y-1)^2=25$; б) $25x^2+64y^2=1600$;

в) $25x^2-64y^2=1600$; г) $y^2=-5(x+3)$.

3. $x^2-6x-4y+29=0$.

Варіант 13

1. $A(-3;-4); B(-6;7); C(-1;1)$.

2. а) $(x+3)^2+(y+3)^2=49$; б) $x^2+9y^2=36$;

   в) $x^2-9y^2=36$; г) $x^2=4(y-3)$.

3. $4x^2+3y^2+18y+15=0$.

Варіант 14

1. $A(2;-1); B(3;4); C(1;-7)$.

2. а) $(x+5)^2+(y-4)^2=64$; б) $25x^2+9y^2=225$;

   в) $25x^2-9y^2=225$; г) $y^2=4(x-3)$.

3. $2x^2+5y^2-12x+10y+13=0$.

Варіант 15

1. $A(-1;2); B(6;-4); C(-3;-7)$.

2. а) $(x-3)^2+(y-2)^2=36$; б) $4x^2+25y^2=100$;

   в) $4x^2-25y^2=100$; г) $x^2=-4(y-3)$.

3. $x^2-y^2+6x+4y-4=0$.

Варіант 16

1. $A(1;1); B(7;4); C(4;5)$.

2. а) $(x+2)^2+(y+4)^2=49$; б) $9x^2+4y^2=36$;

   в) $9x^2-4y^2=36$; г) $y^2=-4(x-3)$.

3. $y^2-2x+4y+2=0$.

Варіант 17

1. $A(1;-1); B(-5;2); C(-2;3)$.

2. а) $(x+1)^2+(y-3)^2=16$; б) $16x^2+9y^2=144$;

   в) $16x^2-9y^2=144$; г) $x^2=5(y-2)$.

3. $5x^2-4y^2+16y-36=0$.

Варіант 18

1. $A(-1;-1); B(5;2); C(2;3)$.

2. а) $(x-2)^2+(y-3)^2=25$; б) $4x^2+y^2=16$;

   в) $4x^2-y^2=16$; г) $y^2=5(x-2)$.

3. $x^2+6x-2y+5=0$.

Варіант 19

1. $A(1;1); B(3;4); C(6;7)$.

2. а) $(x+1)^2+(y-1)^2=9$; б) $25x^2+16y^2=400$;

   в) $25x^2-16y^2=400$; г) $x^2=-5(y-1)$.

3. $x^2+y^2+6y-7=0$.

Варіант 20

1. $A(2;1); B(3;-4); C(1;7)$.

2. а) $(x+2)^2+(y-4)^2=16$; б) $49x^2+4y^2=196$;

   в) $49x^2-4y^2=196$; г) $y^2=-5(x-1)$.

3. $x^2+2y^2+8x-4=0$.

Варіант 21

1. $A(-4;3); B(-7;2); C(-1;-1)$.

2. а) $(x-3)^2+(y+1)^2=36$; б) $49x^2+25y^2=1225$;

   в) $49x^2-25y^2=1225$; г) $x^2=2(y-1)$.

3. $5x^2-6y^2+10x-12y-31=0$.

Варіант 22

1. $A(2;5); B(-4;-2); C(-3;4)$.

2. а) $(x+2)^2+(y-4)^2=25$; б) $9x^2+16y^2=144$;

   в) $9x^2-16y^2=144$; г) $y^2=2(x-1)$.

3. $y^2-10x-2y-19=0$.

Варіант 23

1. $A(4;-3); B(-3;5); C(-2;-4)$.

2. а) $(x+1)^2+(y-1)^2=4$; б) $25x^2+36y^2=900$;

   в) $25x^2-36y^2=900$; г) $x^2=3(y+4)$.

3. $3x^2-y^2+12x-4y-4=0$.

Варіант 24

1. $A(2;1); B(-4;-3); C(-7;3)$.

2. а) $(x-5)^2+(y+3)^2=16$; б) $36x^2+25y^2=900$;

   в) $36x^2-25y^2=900$; г) $y^2=2(x-4)$.

3. $9x^2-18x+25y^2+100y-89=0$.

Варіант 25

1. $A(3;2); B(-1;-6); C(-5;4)$.

2. а) $(x+4)^2+(y-1)^2=1$; б) $49x^2+36y^2=1764$;

в) $49x^2-36y^2=1764$; г) $x^2=-2(y+4)$.

3. $16x^2-9y^2-64x-54y-161=0$.

Варіант 26

1. $A(7;-4); B(2;-2); C(4;5)$.

2. а) $(x-2)^2+(y-3)^2=9$; б) $36x^2+49y^2=1764$;

в) $36x^2-49y^2=1764$; г) $y^2=-3(x-4)$.

3. $x^2+8x-20y-24=0$.

Варіант 27

1. $A(-4;-1)$; $B(2;2)$; $C(-1;3)$.

2. а) $(x-1)^2+(y-2)^2=25$; б) $x^2+16y^2=16$;

в) $x^2-16y^2=64$; г) $y^2=2(x-2)$.

3. $x^2+6y^2-6x+12y+13=0$.

Варіант 28

1. $A(-3;1)$; $B(3;4)$; $C(0;5)$.

2. а) $(x+1)^2+(y+3)^2=16$; б) $4x^2+81y^2=324$;

в) $4x^2-81y^2=324$; г) $x^2=3(y-1)$.

3. $x^2+y^2-2x+4y+5=0$.

Варіант 29

1. $A(-1;2)$; $B(5;5)$; $C(2;6)$.

2. а) $(x-2)^2+(y+2)^2=9$; б) $81x^2+4y^2=324$;

   в) $81x^2-4y^2=324$; г) $y^2=3(x+2)$.

3. $3x^2-2y^2+6x+4y+1=0$.

Варіант 30

1. $A(0;3)$; $B(6;6)$; $C(3;7)$.

2. а) $(x-4)^2+(y+1)^2=4$; б) $100x^2+9y^2=900$;

   в) $100x^2-9y^2=900$; г) $x^2=-2(y+3)$.

3. $x^2+2y^2-4x-12y+23=0$.

Зразок виконання індивідуального завдання № 2

Приклад 1. Задані координати вершин трикутника $A(3;-2)$, $B(7;5)$, $C(-3;1)$. Зробити рисунок до задачі та знайти:

а) довжину сторони BC;
б) рівняння сторони BC;
в) рівняння і довжину висоти AD;
г) рівняння медіани AM ;
д) точку перетину медіан, не знаходячи їх рівнянь;
е) рівняння середньої лінії, яка паралельна стороні AC;
ж) кут при вершині A;
з) площу трикутника;
і) радіус описаного кола.

Розв'язання. Побудуємо трикутник ABC в прямокутній системі координат (рис.1), медіану AM (точка *M* ділить *BC* навпіл), висоту AD.

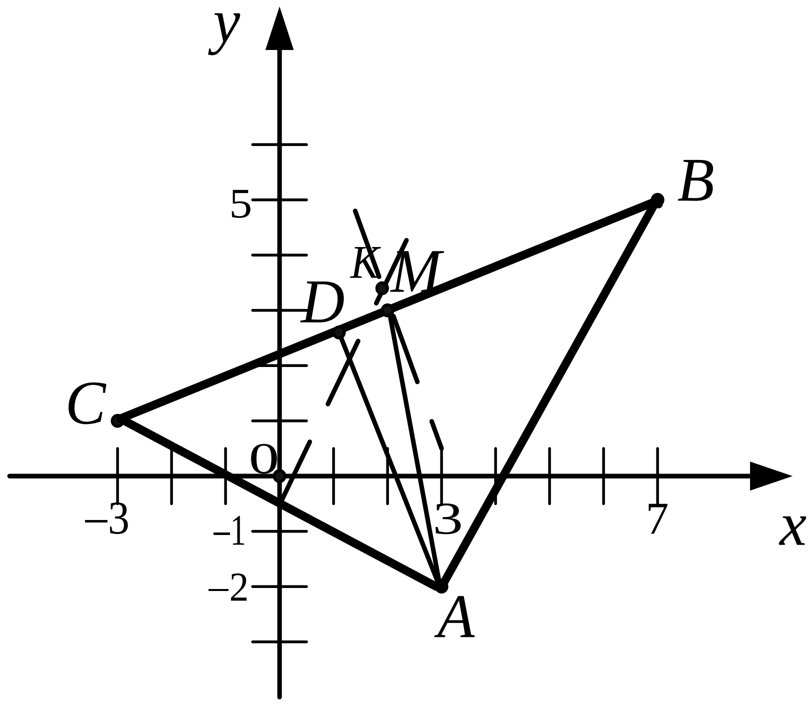

Рис. 1. **Трикутник ABC**

а) для знаходження довжини BC використовуємо формулу

$$d=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$$ – відстань між двома точками.

$$BC=\sqrt{\left(-3-7\right)^2+\left(1-5\right)^2}=\sqrt{116};$$

б) щоб скласти рівняння сторони BC, використовуємо рівняння прямої, що проходить через дві точки

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}.$$

Маємо

$$\frac{x-7}{-3-7}=\frac{y-5}{1-5},$$ або $$\frac{x-7}{-10}=\frac{y-5}{-4},$$ звідки $2x-5y+11=0$;

в) для знаходження рівняння висоти AD використовуємо рівняння прямої, що проходить через задану точку у заданому напрямі

$$y-y_0=k\left(x-x_0\right).$$

Висота AD проходить через точку $A(3;-2)$ перпендикулярно до прямої BC. З рівняння прямої BC: $2x-5y+11=0$ кутовий коефіцієнт k_1 дорівнює $k_1=\frac{2}{5}$. Тоді за умовою перпендикулярності $k_2=-\frac{1}{k_1}$ кутовий коефіцієнт прямої AD дорівнює: $k_2=-\frac{5}{2}$.

Тепер складаємо рівняння AD:

$$y+2=-\frac{5}{2}(x-3),\text{ або } 5x+2y-11=0.$$

Для знаходження довжини AD використовуємо формулу для обчислення відстані від точки до прямої

$$d=\left|\frac{Ax_0+By_0+C}{\pm\sqrt{A^2+B^2}}\right|.$$

Рівняння прямої BC: $2x-5y+11=0$, координати точки $A(3;-2)$. Тоді

$$d_{AD}=\frac{|\ 2\cdot 3-5\cdot(-2)+11\ |}{\sqrt{2^2+(-5)^2}}=\frac{27}{\sqrt{29}};$$

г) спочатку знайдемо координати точки *M*, яка є серединою відрізка BC, за формулами

$$x_M=\frac{x_B+x_C}{2},\quad y_M=\frac{y_B+y_C}{2}.$$

$$x_M=\frac{7-3}{2}=2,\quad y_M=\frac{5+1}{2}=3.$$

Щоб скласти рівняння AM використовуємо рівняння прямої, що проходить через дві точки $A(3;-2)$ і $M(2;3)$.

$$\frac{x-3}{2-3}=\frac{y-(-2)}{3-(-2)},\text{ або }\frac{x-3}{-1}=\frac{y+2}{5},\text{ звідки } 5x+y-13=0;$$

д) точку перетину медіан знаходимо за формулами:

$$x = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1+\lambda}, \quad y = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1+\lambda}.$$

Як відомо, медіани точкою перетину діляться у відношенні $2:1$, рахуючи від вершини, тобто $\lambda = 2$. Тоді координати точки перетину медіан дорівнюють:

$$x = \frac{x_A + \lambda \cdot x_M}{1+\lambda} = \frac{3+2\cdot 2}{1+2} = \frac{7}{3},$$

$$y = \frac{y_A + \lambda \cdot y_M}{1+\lambda} = \frac{-2+2\cdot 3}{1+2} = \frac{4}{3};$$

е) рівняння середньої лінії напишемо як рівняння прямої, що проходить через задану точку у заданому напрямі $y - y_0 = k\left(x - x_0\right)$.

Шукана пряма проходить через точку $M\left(2;3\right)$ і паралельна AC, тому $k = k_{AC}$.

Обчислюємо $k_{AC} = \dfrac{y_C - y_A}{x_C - x_A}$, $k_{AC} = \dfrac{1-\left(-2\right)}{-3-3} = -\dfrac{1}{2}$.

Отже, маємо рівняння середньої лінії:

$$y - 3 = -\frac{1}{2}\left(x-2\right),$$

або

$$x + 2y - 8 = 0;$$

ж) величину кута при вершині Aзнайдемо за формулою

$$tg\varphi = \frac{k_2 - k_1}{1 + k_1 k_2},$$

де $k_2 = k_{AC} = -\dfrac{1}{2}$, $k_1 = k_{AB} = \dfrac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \dfrac{5-\left(-2\right)}{7-3} = \dfrac{7}{4}$.

Отже,

$$tg\varphi = \frac{-\frac{1}{2} - \frac{7}{4}}{1 + \frac{7}{4}\left(-\frac{1}{2}\right)} = -18,$$

звідки $\varphi = \pi - arctg18 \approx 93^\circ$;

з) для обчислення площі трикутника застосовуємо формулу:

$$S_\Delta = \frac{1}{2} a \cdot h.$$

Тоді маємо:

$$S_\Delta = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{116} \cdot \frac{27}{\sqrt{29}} = 27;$$

і) радіус описаного кола визначимо як відстань між двома точками (вершиною трикутника та центром описаного кола).

Центр описаного кола знаходиться в точці перетину перпендикулярів, проведених через середини сторін.

Складемо рівняння перпендикуляра, що проходить через точку $M(2;3)$ з кутовим коефіцієнтом $k = -\frac{5}{2}$, бо $k_{BC} = \frac{2}{5}$:

$$y - 3 = -\frac{5}{2}(x - 2), \text{ або } 5x + 2y - 16 = 0.$$

Знайдемо координати середини відрізка AC:

$$x_N = \frac{x_A + x_C}{2} = \frac{3 - 3}{2} = 0; \; y_N = \frac{y_A + y_C}{2} = \frac{-2 + 1}{2} = -\frac{1}{2}.$$

Тоді рівняння перпендикуляра, що проходить через точку $N\left(0; -\frac{1}{2}\right)$ з кутовим коефіцієнтом $k = 2$, бо $k_{AC} = -\frac{1}{2}$, набуває вигляду:

$y - \left(-\frac{1}{2}\right) = 2(x - 0)$, або $4x - 2y - 1 = 0$.

Для знаходження координат центра описаного кола розв'язуємо систему рівнянь:

$$\begin{cases} 5x+2y-16=0, \\ 4x-2y-1=0, \end{cases}$$

звідки $x=\dfrac{17}{9}$, $y=\dfrac{59}{18}$. Отже, центр описаного кола $K\left(\dfrac{17}{9};\dfrac{59}{18}\right)$.

Радіус описаного кола як відстань між точками $C(-3;1)$ і $K\left(\dfrac{17}{9};\dfrac{59}{18}\right)$: $r=CK=\sqrt{\left(\dfrac{17}{9}-(-3)\right)^2+\left(\dfrac{59}{18}-1\right)^2}=\dfrac{\sqrt{9425}}{18}\approx 5,4$.

Приклад 2. Побудувати криві:

а) $(x-3)^2+(y+2)^2=4$; б) $9x^2+49y^2=441$;

в) $9x^2-49y^2=441$; г) $y^2=4(x-2)$.

Розв'язання. Рівняння а) $(x-3)^2+(y+2)^2=4$ визначає коло з центром у точці $(3;-2)$ і радіусом $r=2$. Побудуємо це коло (рис. 2).

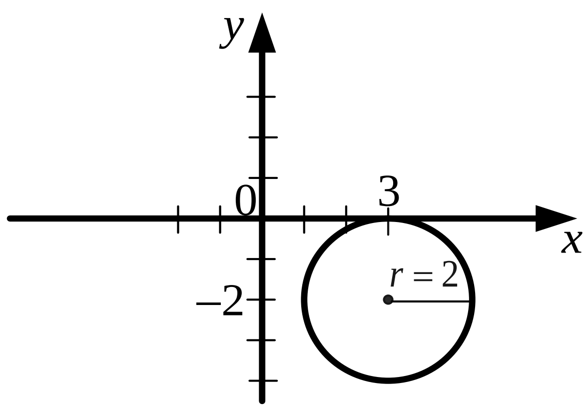

Рис. 2. **Коло**

Розглянемо рівняння б) $9x^2+49y^2=441$.

Поділимо обидві частини рівняння на 441:

$$\frac{x^2}{49}+\frac{y^2}{9}=1.$$

Отримано рівняння еліпса, півосі якого $a=7, b=3$. Побудуємо його (рис. 3).

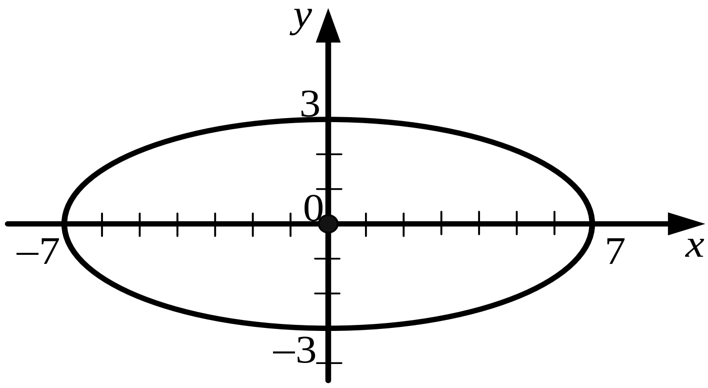

Рис. 3. **Еліпс**

Розглянемо рівняння в) $9x^2-49y^2=441$.

Поділимо обидві частини його на 441:

$$\frac{x^2}{49}-\frac{y^2}{9}=1.$$

Це рівняння визначає гіперболу, дійсна вісь якої дорівнює $a=7$, а уявна – $b=3$. Побудуємо цю гіперболу (рис. 4).

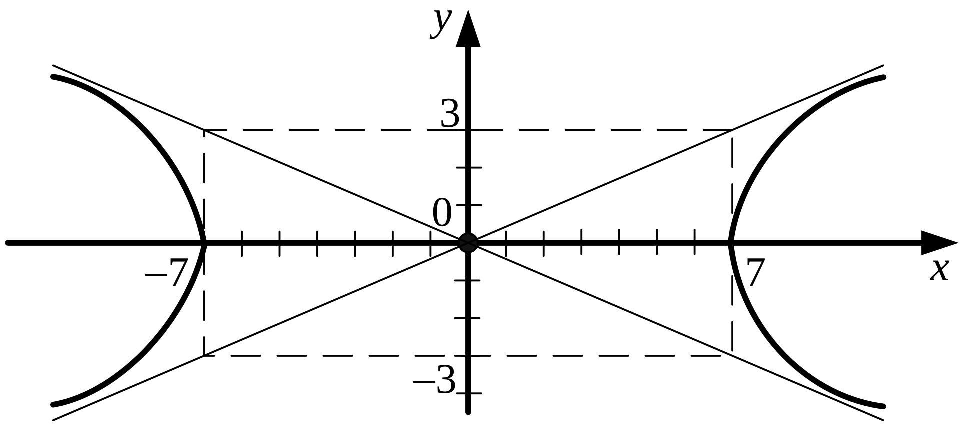

Рис. 4. **Гіпербола**

Розглянемо рівняння г) $y^2 = 4(x-2)$. Це рівняння визначає параболу, яка симетрична відносно осі Ox, вершина та фокус у точках відповідно $(2;0)$, $(3;0)$. Зробимо рисунок (рис. 5).

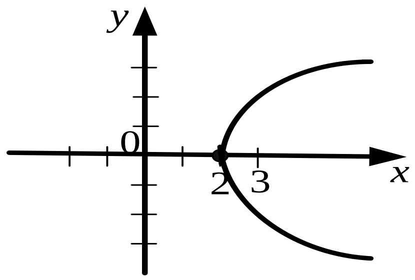

Рис. 5. **Парабола**

Приклад 3. Перетворити до канонічного вигляду рівняння кривої $9x^2 + 4y^2 - 36x - 24y + 36 = 0$ і побудувати її.

Розв'язання. Згрупуємо доданки, які містять змінні x і y, і виділимо в одержаних дужках повні квадрати.

$$\left(9x^2 - 36x\right) + \left(4y^2 - 24y\right) + 36 = 0,$$

$$9\left(x^2 - 4x + 4 - 4\right) + 4\left(y^2 - 6y + 9 - 9\right) + 36 = 0,$$

$$9(x-2)^2 + 4(y-3)^2 - 36 - 36 + 36 = 0,$$

$$9(x-2)^2 + 4(y-3)^2 = 36,$$

$$\frac{(x-2)^2}{4} + \frac{(y-3)^2}{9} = 1.$$

Це рівняння визначає еліпс з центром у точці $(2;3)$, півосі якого дорівнюють $a = 2, b = 3$. Побудуємо цей еліпс (рис. 6).

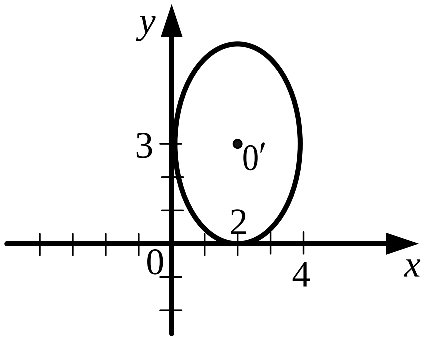

Рис. 6. **Еліпс**

Індивідуальне завдання № 3
Елементи векторної алгебри та аналітичної геометрії: векторна алгебра

Зміст завдання

Завдання 1. Дано вектори $\vec{a} = \alpha\vec{m} + \beta\vec{n}$ і $\vec{b} = \gamma\vec{m} + \delta\vec{n}$, де $|\vec{m}| = \kappa$, $|\vec{n}| = l$, $\left(\widehat{\vec{m},\vec{n}}\right) = \varphi$ (див. табл. 2).

Знайти а) $\left(\lambda\vec{a} + \mu\vec{b}\right)\cdot\left(\nu\vec{a} + \tau\vec{b}\right)$; б) $np_{\vec{b}}\left(\nu\vec{a} + \tau\vec{b}\right)$; в) $\cos\left(\widehat{\vec{a},\tau\vec{b}}\right)$.

Таблиця 2

Вихідні дані

	α	β	γ	δ	κ	l	φ	λ	μ	ν	τ
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
1	3	-5	-2	3	1	6	$3\pi/2$	4	5	1	-2
2	-3	4	5	-6	4	5	π	2	3	-3	-1
3	5	2	-6	-4	3	2	$5\pi/3$	-1	0,5	2	3
4	-2	3	3	-6	6	3	$5\pi/3$	3	-1/3	1	2
5	7	-3	2	6	3	4	$5\pi/3$	3	-0,5	2	1
6	5	-8	-2	3	4	3	$4\pi/3$	2	-3	1	2
7	-2	3	4	-1	1	3	π	3	2	-2	4
8	-3	-2	1	5	3	6	$4\pi/3$	-1	2	1	1
9	-5	3	2	4	5	4	π	-3	0,5	-1	1
10	5	4	-6	2	2	9	$2\pi/3$	3	2	1	-0,,5
11	4	-3	-2	6	4	7	$\pi/3$	2	-0,5	3	2
12	3	2	-4	-2	2	5	$4\pi/3$	1	-3	0	-0,5
13	-2	3	5	1	2	5	2π	-3	4	2	3
14	-5	-6	2	7	2	7	π	-2	5	1	3
15	6	-7	-1	-3	2	6	$5\pi/3$	-2	-0,5	3	2
16	3	-2	-4	5	2	3	$\pi/3$	2	-3	5	1
17	-2	-4	3	1	3	2	$7\pi/3$	-0,5	3	1	2
18	4	-5	-1	3	6	3	$2\pi/3$	2	-5	1	2

Закінчення табл. 2

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
19	-3	5	1	7	4	6	$5\pi/3$	-2	3	3	-2
20	5	-2	-3	-1	4	5	$4\pi/3$	2	3	-1	5
21	5	-3	4	2	4	1	$2\pi/3$	2	-0,5	3	0
22	5	-2	3	4	2	5	$\pi/2$	2	3	1	-2
23	-5	-7	-3	2	2	1	$3\pi/2$	-3	4	-1	2
24	-5	-4	3	6	3	5	$5\pi/3$	-2	1/3	1	2
25	5	2	1	-4	3	2	π	1	-2	3	-4
26	4	-3	5	2	4	7	$4\pi/3$	-3	2	2	-1
27	-7	2	4	6	2	9	$\pi/3$	1	2	-1	3
28	5	3	-4	-2	6	3	$5\pi/3$	-2	-0,5	3	2
29	2	-5	-3	4	2	4	$2\pi/3$	3	-4	2	3
30	4	3	-1	2	4	5	$3\pi/2$	2	-3	1	2

Завдання 2. За даними координатами точок A, B і C для зазначених векторів (табл. 3) знайти: а) модуль (довжину) вектора $\vec{a}$; б) скалярний добуток векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$; в) векторний добуток векторів $\vec{a}$ і $\vec{c}$; г) площу трикутника, побудованого на векторах $\vec{c}$ і $\vec{d}$; д) мішаний добуток векторів $\vec{a}$, $\vec{b}$ і $\vec{c}$; е) перевірити, чи компланарні вектори $\vec{b}$, $\vec{c}$ і $\vec{d}$.

Таблиця 3

Вихідні дані

	A	B	C	$\vec{a}$	$\vec{b}$	$\vec{c}$	$\vec{d}$
1	2	3	4	5	6	7	8
1	$(5, 4, 4)$	$(-5, 2, 3)$	$(4, 2, -5)$	$11\overrightarrow{AC}-6\overrightarrow{AB}$	$\overrightarrow{BC}$	$\overrightarrow{AB}$	$\overrightarrow{AC}$
2	$(6, 5, -4)$	$(-5, -2, 2)$	$(3, 3, 2)$	$6\overrightarrow{AB}-3\overrightarrow{CB}$	$\overrightarrow{AC}$	$\overrightarrow{AC}$	$\overrightarrow{CB}$
3	$(2, 4, 3)$	$(3, 1, -4)$	$(-1, 2, 2)$	$2\overrightarrow{BA}+4\overrightarrow{AC}$	$\overrightarrow{BA}$	$\overrightarrow{BA}$	$\overrightarrow{AB}$
4	$(-2, -3, -4)$	$(2, -4, 0)$	$(1, 4, 5)$	$4\overrightarrow{AC}-8\overrightarrow{BC}$	$\overrightarrow{AB}$	$\overrightarrow{AB}$	$\overrightarrow{BC}$

Продовження табл. 3

1	2	3	4	5	6	7	8
5	$(2, 4, 6)$	$(-3, 5, 1)$	$(4, -5, -4)$	$-6\overrightarrow{BC}+2\overrightarrow{BA}$	$\overrightarrow{CA}$	$\overrightarrow{CA}$	$\overrightarrow{BA}$
6	$(-5, 4, 3)$	$(4, 5, 2)$	$(2, 7, -4)$	$3\overrightarrow{BC}+2\overrightarrow{AB}$	$\overrightarrow{CA}$	$\overrightarrow{CA}$	$\overrightarrow{AB}$
7	$(3, 5, 4)$	$(4, 2, -3)$	$(-2, 4, 7)$	$3\overrightarrow{BA}-4\overrightarrow{AC}$	$\overrightarrow{AB}$	$\overrightarrow{BA}$	$\overrightarrow{AC}$
8	$(-2, 3, -4)$	$(3, -1, 2)$	$(4, 2, 4)$	$7\overrightarrow{AC}+4\overrightarrow{CB}$	$\overrightarrow{AB}$	$\overrightarrow{AB}$	$\overrightarrow{CB}$
9	$(3, 4, 1)$	$(5, -2, 6)$	$(4, 2, -7)$	$-7\overrightarrow{AC}+5\overrightarrow{AB}$	$\overrightarrow{BC}$	$\overrightarrow{BC}$	$\overrightarrow{AC}$
10	$(4, 6, 7)$	$(2, -4, 1)$	$(-3, -4, 2)$	$5\overrightarrow{AB}-2\overrightarrow{AC}$	$\overrightarrow{BC}$	$\overrightarrow{BC}$	$\overrightarrow{AB}$
11	$(1, 3, 2)$	$(-2, 4, -1)$	$(1, 3, -2)$	$2\overrightarrow{AB}+5\overrightarrow{CB}$	$\overrightarrow{AC}$	$\overrightarrow{AC}$	$\overrightarrow{AB}$
12	$(10, 6, 3)$	$(-2, 4, 5)$	$(3, -4, -6)$	$5\overrightarrow{AC}-2\overrightarrow{CB}$	$\overrightarrow{BA}$	$\overrightarrow{BA}$	$\overrightarrow{AC}$
13	$(3, 4, 6)$	$(-4, 6, 4)$	$(5, -2, -3)$	$-7\overrightarrow{BC}+4\overrightarrow{CA}$	$\overrightarrow{BA}$	$\overrightarrow{CA}$	$\overrightarrow{BC}$
14	$(-3, -5, 6)$	$(3, 5, -4)$	$(2, 6, 4)$	$4\overrightarrow{AC}-5\overrightarrow{BA}$	$\overrightarrow{CB}$	$\overrightarrow{BA}$	$\overrightarrow{AC}$
15	$(2, 4, 5)$	$(1, -2, 3)$	$(-1, -2, 4)$	$3\overrightarrow{AB}-4\overrightarrow{AC}$	$\overrightarrow{BC}$	$\overrightarrow{BC}$	$\overrightarrow{AB}$
16	$(-2, -3, -2)$	$(1, 4, 2)$	$(1, -3, 3)$	$2\overrightarrow{AC}-4\overrightarrow{BC}$	$\overrightarrow{AB}$	$\overrightarrow{AB}$	$\overrightarrow{AC}$
17	$(-4, -2, -5)$	$(3, 7, 2)$	$(4, 6, -3)$	$9\overrightarrow{BA}+3\overrightarrow{BC}$	$\overrightarrow{AC}$	$\overrightarrow{AC}$	$\overrightarrow{BC}$
18	$(6, 4, 5)$	$(-7, 1, 8)$	$(2, -2, -7)$	$5\overrightarrow{CB}-2\overrightarrow{AC}$	$\overrightarrow{AB}$	$\overrightarrow{CB}$	$\overrightarrow{AC}$
19	$(-2, -2, 4)$	$(1, 3, -2)$	$(1, 4, 2)$	$2\overrightarrow{AC}-3\overrightarrow{BA}$	$\overrightarrow{BC}$	$\overrightarrow{BC}$	$\overrightarrow{AC}$
20	$(0, 2, 5)$	$(2, -3, 4)$	$(3, 2, -5)$	$-3\overrightarrow{AB}+4\overrightarrow{CB}$	$\overrightarrow{AC}$	$\overrightarrow{AC}$	$\overrightarrow{AB}$
21	$(4, 5, 3)$	$(-4, 2, 3)$	$(5, -6, -2)$	$9\overrightarrow{AB}-4\overrightarrow{BC}$	$\overrightarrow{AC}$	$\overrightarrow{AC}$	$\overrightarrow{AB}$
22	$(4, 3, 2)$	$(-4, -3, 5)$	$(6, 4, -3)$	$8\overrightarrow{AC}-5\overrightarrow{BC}$	$\overrightarrow{BA}$	$\overrightarrow{BA}$	$\overrightarrow{AC}$
23	$(4, 6, 3)$	$(-5, 2, 6)$	$(4, -4, -3)$	$4\overrightarrow{CB}-\overrightarrow{AC}$	$\overrightarrow{AB}$	$\overrightarrow{CB}$	$\overrightarrow{AC}$
24	$(2, -4, 3)$	$(-3, -2, 4)$	$(0, 0, -2)$	$3\overrightarrow{AC}-4\overrightarrow{CB}$	$\overrightarrow{AB}$	$\overrightarrow{AB}$	$\overrightarrow{CB}$
25	$(3, 2, 4)$	$(-2, 1, 3)$	$(2, -2, -1)$	$4\overrightarrow{BC}-3\overrightarrow{AC}$	$\overrightarrow{BA}$	$\overrightarrow{AC}$	$\overrightarrow{BC}$
26	$(-5, -2, -6)$	$(3, 4, 5)$	$(2, -5, 4)$	$8\overrightarrow{AC}-5\overrightarrow{BC}$	$\overrightarrow{AB}$	$\overrightarrow{AB}$	$\overrightarrow{BC}$
27	$(1, 3, 2)$	$(-2, 4, -1)$	$(1, 3, -2)$	$2\overrightarrow{AB}+5\overrightarrow{CB}$	$\overrightarrow{AC}$	$\overrightarrow{AC}$	$\overrightarrow{AB}$

Закінчення табл. 3

1	2	3	4	5	6	7	8
28	$(-1,-2,4)$	$(-1,3,5)$	$(1,4,2)$	$3\overrightarrow{AC}-7\overrightarrow{BC}$	$\overrightarrow{AB}$	$\overrightarrow{AB}$	$\overrightarrow{AC}$
29	$(5,6,1)$	$(-2,4,-1)$	$(3,-3,3)$	$3\overrightarrow{AB}-4\overrightarrow{BC}$	$\overrightarrow{AC}$	$\overrightarrow{AC}$	$\overrightarrow{AB}$
30	$(4,3,-2)$	$(-3,-1,4)$	$(2,2,1)$	$-5\overrightarrow{AC}+2\overrightarrow{CB}$	$\overrightarrow{AB}$	$\overrightarrow{AC}$	$\overrightarrow{CB}$

Зразок розв’язання індивідуального завдання № 3

Приклад 1. Дано два вектори: $\vec{a}=3\vec{m}-2\vec{n}$ і $\vec{b}=5\vec{m}+\vec{n}$, де $|\vec{m}|=2$, $|\vec{n}|=3$, $(\vec{m}\hat{,}\vec{n})=\dfrac{2\pi}{3}$.

Знайти а) $(3\vec{a}-2\vec{b})\cdot(5\vec{a}+3\vec{b})$; б) $np_{\vec{b}}(5\vec{a}+3\vec{b})$; в) $\cos(\vec{a}\hat{,}3\vec{b})$.

Розв’язання.

а) отже, $3\vec{a}-2\vec{b}=3(3\vec{m}-2\vec{n})-2(5\vec{m}+\vec{n})=-\vec{m}-8\vec{n}$,

$5\vec{a}+3\vec{b}=5(3\vec{m}-2\vec{n})+3(5\vec{m}+\vec{n})=30\vec{m}-7\vec{n}$, тоді

$$(3\vec{a}-2\vec{b})\cdot(5\vec{a}+3\vec{b})=(-\vec{m}-8\vec{n})(30\vec{m}-7\vec{n})=-30\vec{m}^2+7\vec{m}\vec{n}-240\vec{n}\vec{m}+$$
$$+56\vec{n}^2=-30|\vec{m}|^2-233|\vec{m}||\vec{n}|\cos\frac{2\pi}{3}+56|\vec{n}|^2=-30\cdot4-233\cdot2\cdot3\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)+$$
$$+56\cdot9=1073;$$

б) застосуємо формулу: $\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}|np_{\vec{a}}\vec{b}$, звідки $np_{\vec{a}}\vec{b}=\dfrac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}|}$.

Отже, $np_{\vec{b}}(5\vec{a}+3\vec{b})=\dfrac{\vec{b}\cdot(5\vec{a}+3\vec{b})}{|\vec{b}|}$. Знайдемо добуток:

$$\vec{b}\cdot(5\vec{a}+3\vec{b})=5\vec{a}\vec{b}+3\vec{b}^2=5(3\vec{m}-2\vec{n})(5\vec{m}+\vec{n})+3(5\vec{m}+\vec{n})^2=5(15\vec{m}^2-$$
$$-7\vec{n}\vec{m}-2\vec{n}^2)+3(25\vec{m}^2+10\vec{m}\vec{n}+\vec{n}^2)=150\vec{m}^2-5\vec{n}\vec{m}-7\vec{n}^2=150|\vec{m}|^2-$$
$$-5|\vec{n}||\vec{m}|\cos\frac{2\pi}{3}-7|\vec{n}|^2=150\cdot4-5\cdot3\cdot2\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)-7\cdot9=552.$$

Обчислимо $\left|\vec{b}\right| = \sqrt{\vec{b}^2} = \sqrt{\left(5\vec{m}+\vec{n}\right)^2} = \sqrt{25\vec{m}^2 + 10\vec{m}\vec{n} + \vec{n}^2} =$

$$= \sqrt{25\cdot 4 + 10\cdot 3\cdot 2\cdot\left(-\frac{1}{2}\right) + 4} = \sqrt{74} \approx 8,60.$$

Таким чином, $np_{\vec{b}}\left(5\vec{a}+3\vec{b}\right) = \frac{552}{\sqrt{74}} \approx 64,2;$

в) застосуємо формулу: $\cos\left(\vec{a}\hat{,}3\vec{b}\right) = \frac{\vec{a}\cdot\left(3\vec{b}\right)}{\left|\vec{a}\right|\left|3\vec{b}\right|}$.

Обчислимо спочатку $\vec{a}\cdot\left(3\vec{b}\right)$.

$$\vec{a}\cdot\left(3\vec{b}\right) = 3\left(3\vec{m}-2\vec{n}\right)\left(5\vec{m}+\vec{n}\right) = 3\left(15\vec{m}^2 - 7\vec{m}\vec{n} - 2\vec{n}^2\right) = 3\left(15\left|\vec{m}\right|^2 - \right.$$

$$\left. -7\left|\vec{m}\right|\left|\vec{n}\right|\cos\frac{2\pi}{3} - 2\left|\vec{n}\right|^2\right) = 3\left(15\cdot 4 - 7\cdot 3\cdot 2\cdot\left(-\frac{1}{2}\right) - 2\cdot 9\right) = 3\cdot 63 = 189.$$

$$\left|\vec{a}\right| = \sqrt{\left(3\vec{m}-2\vec{n}\right)^2} = \sqrt{9\vec{m}^2 - 12\vec{m}\vec{n} + 4\vec{n}^2} = \sqrt{9\cdot 4 - 12\cdot 2\cdot 3\cdot\left(-\frac{1}{2}\right) + 4\cdot 9} =$$

$$= \sqrt{108} \approx 10,39,$$

$$\left|\vec{b}\right| = \sqrt{74} \approx 8,60.$$

Таким чином, $\cos\left(\vec{a}\ \hat{,}\ 3\vec{b}\right) = \frac{189}{10,39\cdot 3\cdot 8,6} = 0,72.$

Приклад 2. Надано координати трьох точок: $A\left(4;2;5\right)$, $B\left(-2;3;4\right)$, $C\left(4;2;-1\right)$.

Знайти:

а) довжину вектора $\vec{a} = 3\overrightarrow{BC} + 2\overrightarrow{AB}$;

б) скалярний добуток векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$, де вектор $\vec{b} = \overrightarrow{BC}$;

в) векторний добуток векторів $\vec{a}$ і $\vec{c}$, де $\vec{c} = \overrightarrow{AB}$;

г) площу трикутника, побудованого на векторах $\vec{c}$ і $\vec{d}$, де $\vec{d} = \overrightarrow{AC}$;

д) мішаний добуток векторів $\vec{a}$, $\vec{b}$ і $\vec{c}$; перевірити, чи компланарні ці вектори.

Розв'язання.

а) за заданими координатами точок A, B і C знайдемо координати векторів $\overrightarrow{BC}$ та $\overrightarrow{AB}$: $\overrightarrow{BC}=(6;-1;-5)$, $\overrightarrow{AB}=(-6;1;-1)$.

Вектор $\vec{a}=3\overrightarrow{BC}+2\overrightarrow{AB}=3(6;-1;-5)+2(-6;1;-1)=(6;-1;-17)$,

модуль вектора $\vec{a}$ дорівнює: $|\vec{a}|=\sqrt{6^2+(-1)^2+(-17)^2}=\sqrt{326}$;

б) $\vec{a}\cdot\vec{b}=(6;-1;-17)\cdot(6;-1;-5)=36+1+85=122$;

в) $\vec{a}\times\vec{b}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 6 & -1 & -17\\ 6 & -1 & -5\end{vmatrix}=\vec{i}\begin{vmatrix}-1 & -17\\ -1 & -5\end{vmatrix}-\vec{j}\begin{vmatrix}6 & -17\\ 6 & -5\end{vmatrix}+\vec{k}\begin{vmatrix}6 & -1\\ 6 & -1\end{vmatrix}=-12\vec{i}-72\vec{j}$;

г) площа трикутника, побудованого на векторах $\vec{c}$ і $\vec{d}$, де $\vec{d}=\overrightarrow{AC}$ обчислимо за допомогою формули $S_\triangle=\frac{1}{2}|\vec{c}\times\vec{d}|$, де $\vec{c}=\overrightarrow{AB}=(-6;1;-1)$ $\vec{d}=\overrightarrow{AC}=(0;0;-6)$,. Спочатку знайдемо векторний добуток $\vec{c}$ і $\vec{d}$.

$$\vec{c}\times\vec{d}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ -6 & 1 & -1\\ 0 & 0 & -6\end{vmatrix}=\vec{i}\begin{vmatrix}1 & -1\\ 0 & -6\end{vmatrix}-\vec{j}\begin{vmatrix}-6 & -1\\ 0 & -6\end{vmatrix}+\vec{k}\begin{vmatrix}-6 & 1\\ 0 & 0\end{vmatrix}=-6\vec{i}-36\vec{j},$$

$$|\vec{c}\times\vec{d}|=\sqrt{(-6)^2+(-36)^2}=\sqrt{36+36^2}=\sqrt{36(36+1)}=6\sqrt{37},$$

$S_\triangle=\frac{1}{2}\cdot 6\sqrt{37}=3\sqrt{37}$ (кв.од);

д) знайдемо мішаний добуток векторів $\vec{a}$, $\vec{b}$ і $\vec{c}$:

$$\vec{a}\cdot\vec{b}\cdot\vec{c}=\begin{vmatrix}6 & -1 & -17\\ 6 & -1 & -5\\ -6 & 1 & -1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}6 & -1 & -17\\ 0 & 0 & 12\\ 0 & 0 & -18\end{vmatrix}=6\begin{vmatrix}0 & 12\\ 0 & -18\end{vmatrix}=0.$$

Оскільки мішаний добуток векторів дорівнює нулю, то можемо зробити висновок, що вектори $\vec{a}$, $\vec{b}$ і $\vec{c}$ компланарні.

Індивідуальне завдання № 4

Елементи векторної алгебри та аналітичної геометрії: аналітична геометрія в просторі

Зміст завдання

Трикутна піраміда $ABCS$ задана координатами вершин (табл. 4).

Застосовуючи формули і методи аналітичної геометрії в просторі, знайти:

1) рівняння прямих AB, AC і AS;
2) рівняння площини ABC;
3) кут між ребром AS і площиною ABC;
4) рівняння та довжину висоти, проведеної з вершини S до площини ABC;
5) проекцію вершини S на площину ABC;
6) об'єм піраміди.

Таблиця 4

Вихідні дані для індивідуального завдання

Номер варіанта	A	B	C	S
1	2	3	4	5
1	$(-2;1;-3)$	$(1;-2;3)$	$(2;1;-1)$	$(3;3;3)$
2	$(2;-1;1)$	$(5;5;4)$	$(3;2;-1)$	$(4;1;3)$
3	$(0;0;1)$	$(2;3;5)$	$(6;2;3)$	$(3;7;2)$
4	$(3;0;6)$	$(1;-3;2)$	$(3;2;5)$	$(2;2;5)$
5	$(3;1;1)$	$(1;4;1)$	$(1;1;6)$	$(3;4;9)$
6	$(0;7;1)$	$(4;1;5)$	$(5;7;8)$	$(6;9;2)$
7	$(2;1;-4)$	$(1;-2;3)$	$(1;-2;-3)$	$(5;-2;1)$
8	$(2;3;-1)$	$(2;-2;4)$	$(-1;1;3)$	$(1;1;2)$
9	$(3;-1;2)$	$(1;1;3)$	$(2;1;3)$	$(3;0;4)$

Закінчення табл. 4

1	2	3	4	5
10	$(4;4;3)$	$(2;1;-1)$	$(-2;2;1)$	$(1;-3;2)$
11	$(1;1;1)$	$(1;3;3)$	$(3;3;1)$	$(3;1;3)$
12	$(2;3;1)$	$(4;1;-2)$	$(6;3;7)$	$(5;4;-8)$
13	$(0;2;-2)$	$(1;1;-3)$	$(5;1;-1)$	$(0;4;0)$
14	$(3;2;5)$	$(-2;0;2)$	$(0;0;4)$	$(-1;3;2)$
15	$(2;-3;1)$	$(-4;4;2)$	$(6;2;7)$	$(-5;9;8)$
16	$(0;3;4)$	$(2;1;3)$	$(-5;1;1)$	$(1;3;-4)$
17	$(3;0;1)$	$(-1;2;1)$	$(3;2;-1)$	$(2;2;1)$
18	$(2;1;-1)$	$(3;0;1)$	$(2;-1;3)$	$(0;8;0)$
19	$(-1;3;0)$	$(2;0;0)$	$(4;-1;2)$	$(3;2;7)$
20	$(-2;3;4)$	$(4;2;-1)$	$(2;-1;4)$	$(1;1;1)$
21	$(0;0;1)$	$(2;3;5)$	$(6;2;3)$	$(3;7;2)$
22	$(5;1;1)$	$(3;5;5)$	$(3;1;-1)$	$(0;1;5)$
23	$(3;1;4)$	$(-1;6;1)$	$(-1;1;6)$	$(0;4;-1)$
24	$(-1;0;1)$	$(1;0;3)$	$(0;2;3)$	$(1;2;2)$
25	$(3;2;-1)$	$(0;1;4)$	$(3;0;2)$	$(-1;2;1)$
26	$(2;-1;1)$	$(5;5;4)$	$(3;2;-1)$	$(4;1;3)$
27	$(2;1;-1)$	$(3;0;2)$	$(2;-1;3)$	$(0;8;0)$
28	$(2;3;1)$	$(4;1;-2)$	$(2;-1;2)$	$(0;6;0)$
29	$(1;5;8)$	$(-2;1;4)$	$(3;-2;-3)$	$(1;-1;0)$
30	$(2;-1;-3)$	$(0;0;0)$	$(5;-1;-1)$	$(-1;-1;-1)$

Зразок виконання індивідуального завдання № 4

Трикутна піраміда $ABCS$ задана координатами вершин:

$$A(1;-2;1),\ B(3;1;-1),\ C(2;1;3),\ S(4;-5;6).$$

Приклад 1. Знайти рівняння прямих AB, AC і AS.

Розв'язання**.** Складемо рівняння прямої AB як рівняння прямої, що проходить через дві точки

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}=\frac{z-z_1}{z_2-z_1},$$

де $x_1,\ y_1,\ z_1$ – координати вершини A, а x_2, y_2, z_2 – координати вершини B.

Підставляємо ці точки в рівняння, і маємо:

$$\frac{x-1}{3-1}=\frac{y-(-2)}{1-(-2)}=\frac{z-1}{-1-1}, \text{ або } \frac{x-1}{2}=\frac{y+2}{3}=\frac{z-1}{-2}.$$

Так само складаємо рівняння прямої AC, де x_1, y_1, z_1 – координати вершини A, а x_2, y_2, z_2 – координати вершини C:

$$\frac{x-1}{2-1}=\frac{y-(-2)}{1-(-2)}=\frac{z-1}{3-1}, \text{ або } \frac{x-1}{1}=\frac{y+2}{3}=\frac{z-1}{2}.$$

Рівняння прямої AS, де x_1, y_1, z_1 – координати вершини A, а x_2, y_2, z_2 – координати вершини S, має вигляд:

$$\frac{x-1}{4-1}=\frac{y-(-2)}{-5-(-2)}=\frac{z-1}{6-1}, \text{ або } \frac{x-1}{3}=\frac{y+2}{-3}=\frac{z-1}{5}.$$

Приклад 2. Знайти рівняння площини ABC.

Розв'язання. Рівняння площини ABC напишемо як рівняння площини, що проходить через три задані точки:

$$\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1 \end{vmatrix} = 0,$$

де x_1, y_1, z_1 – координати вершини A, x_2, y_2, z_2 – координати вершини B, x_3, y_3, z_3 – координати вершини C. Підставляємо координати цих вершин і маємо:

$$\begin{vmatrix} x-1 & y-(-2) & z-1 \\ 3-1 & 1-(-2) & -1-1 \\ 2-1 & 1-(-2) & 3-1 \end{vmatrix} = 0, \text{ або } \begin{vmatrix} x-1 & y+2 & z-1 \\ 2 & 3 & -2 \\ 1 & 3 & 2 \end{vmatrix} = 0,$$

звідки $12(x-1)-6(y+2)+3(z-1)=0$.

Отже, рівняння площини ABC має вигляд: $12x-6y+3z-27=0$.

Приклад 3. Знайти кут між ребром AS і площиною ABC.

Розв'язання. Кут між прямою $\frac{x-x_0}{m} = \frac{y-y_0}{n} = \frac{z-z_0}{p}$ і площиною $Ax+By+Cz+D=0$ визначається за формулою:

$$sin\,\varphi = \frac{Am+Bn+Cp}{\sqrt{A^2+B^2+C^2} \cdot \sqrt{m^2+n^2+p^2}},$$

де m, n, p – координати напрямного вектора прямої, а A, B, C – координати нормального вектора площини.

З рівняння прямої AS (див. приклад 1) $\frac{x-1}{3} = \frac{y+2}{-3} = \frac{z-1}{5}$ маємо: $m=3; n=-3; p=5$.

З рівняння площини ABC (див. приклад 2) $12x-6y+3z-27=0$ маємо: $A=12; B=-6; C=3$.

Тоді кут між прямою AS і площиною ABC дорівнюватиме:

$$\sin\varphi = \frac{12\cdot 3 + 6\cdot 3 + 3\cdot 5}{\sqrt{12^2 + (-6)^2 + 3^2}\cdot\sqrt{3^2 + (-3)^2 + 5^2}} \approx 0,765,$$

звідки $\varphi = \arcsin 0,765 \approx 50^\circ$.

Приклад 4. Знайти рівняння та довжину висоти SD, проведеної з вершини S до площини ABC.

Розв'язання. Рівняння висоти будемо шукати в канонічній формі

$$\frac{x - x_0}{m} = \frac{y - y_0}{n} = \frac{z - z_0}{p},$$

де x_0, y_0, z_0 – координати вершини $S(4;-5;6)$, а m, n, p – координати напрямного вектора прямої.

З рівняння площини ABC (див. приклад 2) $12x - 6y + 3z - 27 = 0$ нормальний вектор $\vec{n} = (12;-6;3)$.

З умови перпендикулярності прямої і площини $\frac{A}{m} = \frac{B}{n} = \frac{C}{p}$ напрямний вектор прямої і нормальний вектор площини паралельні, а тому за напрямний вектор прямої можна взяти вектор $\vec{n} = (12;-6;3)$.

Отже, шукане рівняння висоти SD:

$$\frac{x-4}{12} = \frac{y-(-5)}{-6} = \frac{z-6}{3}, \text{ або } \frac{x-4}{4} = \frac{y+5}{-2} = \frac{z-6}{1}.$$

Довжину висоти SD обчислимо як відстань від точки $S(4;-5;6)$ до площини ABC $12x - 6y + 3z - 27 = 0$ за формулою

$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}.$$

Отже, $d=\dfrac{\left|12\cdot 4+(-6)\cdot(-5)+3\cdot 6\right|}{\sqrt{12^2+(-6)^2+3^2}}=\dfrac{96}{\sqrt{189}}=6{,}98$.

Приклад 5. Знайти проекцію вершини S на площину ABC.

Розв'язання. Проекція точки на площину – це точка перетину перпендикуляра, проведеного з точки S до площини, з площиною. Рівняння цього перпендикуляра знайдено в прикладі 4 – рівняння висоти SD

$$\frac{x-4}{4}=\frac{y+5}{-2}=\frac{z-6}{1},$$

або в параметричному вигляді $x=4t+4,\ y=-2t-5,\ z=t+6$.

Обчислимо точку перетину цієї прямої з площиною ABC, рівняння якої знайдено в прикладі 2: $12x-6y+3z-27=0$.

Для цього розв'яжемо систему рівнянь:

$$\begin{cases}12x-6y+3x-27=0,\\ x=4t+4,\\ y=-2t-5,\\ z=t+6.\end{cases}$$

$$12(4t+4)-6(-2t-5)+3(t+6)-27=0,$$

або $63t+69=0$, звідки $t=-\dfrac{69}{63}$.

Тоді $x=-\dfrac{8}{21},\ y=-\dfrac{59}{21},\ z=\dfrac{103}{21}$.

Отже, $\left(-\dfrac{8}{21};-\dfrac{59}{21};\dfrac{103}{21}\right)$ – проекція точки S на задану площину.

Приклад 6. Знайти об'єм піраміди $ABCS$.

Розв'язання. Об'єм піраміди обчислюється за формулою

$$V_{nip}=\frac{1}{6}\left|\vec{a}\cdot\vec{b}\cdot\vec{c}\right|.$$

Знайдемо мішаний добуток векторів $\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AS}$.

Обчислимо координати цих векторів:

$$\overrightarrow{AB}=(2;3;-2);\ \overrightarrow{AC}=(1;3;2);\ \overrightarrow{AS}=(3;-3;5).$$

Тоді мішаний добуток векторів $\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AS}$:

$$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AS}=\begin{vmatrix}2 & 3 & -2\\ 1 & 3 & 2\\ 3 & -3 & 5\end{vmatrix}=30+6+18+18-15+12=69.$$

Звідки об'єм піраміди $V=\frac{1}{6}\cdot 69=\frac{23}{2}$ (куб. од.)

Змістовний модуль 2.
Елементи математичного аналізу. Функції багатьох змінних

Індивідуальне завдання № 5
Елементи теорії границь

Зміст завдання

1. Побудувати графіки функцій.
2. Знайти границі функцій.
3. Дослідити функцію на неперервність.

Варіант 1

1. а) $y=2-(1-x)\cdot 3x;$ б) $y=2-e^{x}$.

2. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2x^2-3x+1}{5x^2+3x-2};$ б) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{3x^2+4x-2}{4x^3-5x+7};$ в) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{6x^4+x-12}{x^2-15x-2};$

г) $\lim\limits_{x\to1}\frac{x^2+3x-4}{x^3-1};$ д) $\lim\limits_{x\to5}\frac{\sqrt{x-1}-2}{x-5};$ е) $\lim\limits_{x\to5}\frac{\sqrt{x+4}-3}{\sqrt{x-1}-2};$

ж) $\lim\limits_{x\to0}\frac{1-\cos 2x}{1-\cos 6x};$ з) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{2x-1}{2x+3}\right)^{8x+1}$.

3. $y=\frac{2x-1}{x+1}$.

Варіант 2

1. а) $y=\dfrac{x^2(1-2x)}{x}$; б) $y=2-\ln x$.

2. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^2+5x-1}{4x^2-x+5}$; б) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{7x^2+4x+2}{9x^3-15x-2}$; в) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{8x^3+2x-9}{x^2-5x+3}$;

г) $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^2+5x-6}{2x^2-x-1}$; д) $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{\sqrt{2x+5}-3}{x-2}$; е) $\lim\limits_{x\to4}\dfrac{\sqrt{2x+1}-3}{\sqrt{3x+4}-4}$;

ж) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{tg2x}{\sin 3x}$; з) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{3x+1}{3x-2}\right)^{2x-1}$.

3. $y=\dfrac{\cos x}{x}$.

Варіант 3

1. а) $y=\dfrac{x+2x^2}{x}+x^2$; б) $y=2+\dfrac{1}{x+1}$.

2. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{5x^2+4x-1}{6x^2-x+3}$; б) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{4x^2+6x-5}{9x^3+5x+2}$; в) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{8x^4-3x-7}{x^2+25x-6}$;

г) $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{2x^2+3x-5}{x^2-1}$; д) $\lim\limits_{x\to-2}\dfrac{x+2}{\sqrt{x+6}-2}$; е) $\lim\limits_{x\to3}\dfrac{\sqrt{x+6}-3}{\sqrt{3x}-3}$;

ж) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\arcsin 2x}{2x}$; з) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x+5}{2x-7}\right)^{3x+4}$.

3. $y=\dfrac{\sin(x-2)}{x-2}$.

Варіант 4

1. а) $y=2x^2-3(x+1)$; б) $y=2^x-1$.

2. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{4x^2+3x-2}{2x^2+x+4}$; б) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^2+16x-8}{8x^3+9x+3}$; в) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^3-13x+9}{4x^2+5x-2}$;

г) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2+3x-10}{x^2-4}$; д) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x-1}{\sqrt{2x+7}-3}$; е) $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{\sqrt{x+5}-2}{\sqrt{8-x}-3}$;

ж) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{x^2}$; з) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{4x-5}{4x-3}\right)^{3x+1}$.

3. $y=1+2^{\frac{1}{x}}$.

Варіант 5

1. а) $y=2x+\dfrac{x-1}{2-2x}$; б) $y=1-\ln x$.

2. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^2+15x-1}{2x^2-7x+2}$; б) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^3+6x+8}{x^4+9x-2}$; в) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^3+3x-8}{4x^2-5x+2}$;

б) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2+2x-8}{x^2-2x}$; в) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{3x+6}-3}{x-1}$; е) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{5x+4}-3}{\sqrt{8x+1}-3}$;

ж) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{ctg6x}{ctg2x}$; з) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{5x+1}{5x-3}\right)^{3x-1}$.

3. $y=\dfrac{\sin(x-1)}{x^2-1}$.

Варіант 6

1. а) $y=2+x(3-x)$; б) $y=2^{-x}+1$.

2. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^2+3x+1}{6x^3+2x-1}$; б) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^3-6x-2}{4x^4-9x+7}$; в) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^3+7x-3}{4x^2+3x-3}$;

г) $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^2+5x+4}{x^2-1}$; д) $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{\sqrt{2x+6}-2}{x+1}$; е) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{5x+9}-3}{\sqrt{8x+1}-1}$;

ж) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 8x}{1-\cos 2x}$; з) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{3x+7}{3x-5}\right)^{2x-1}$.

3. $y=\dfrac{x^2-4}{x-2}$.

Варіант 7

1. а) $y=2(x-1)+\dfrac{x-1}{1-x}$; б) $y=1+\ln(x-1)$.

2. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^3+2x^2-1}{x^3+5x+1}$; б) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^2+16x-9}{9x^4-9x^2-13}$; в) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{8x^3+17x+9}{4x^2-4x-3}$;

г) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2+2x-15}{x^2-9}$; д) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{x+9}-3}{x}$; е) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sqrt{x+2}-2}{\sqrt{8x}-4}$;

ж) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 6x}{x\sin 3x}$; з) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+2}{x-5}\right)^{2x+3}$.

3. $y=\dfrac{\cos(x-1)}{x\ \ -1}$.

Варіант 8

1. а) $y=\dfrac{x^2-1}{x+1}+2x$; б) $y=3^x-1$.

2. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^3+x^2-x}{2x^3+6x-1}$; б) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{12x^2-3x-8}{7x^4+9x^2-3}$; в) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{9x^3-7x+3}{3x^2+4x-5}$;

г) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^3+2x^2+3x}{x^2-x}$; д) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{8x+1}-3}{x-1}$; е) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{\sqrt{2x+2}-\sqrt{8}}{\sqrt{1+x}-\sqrt{2}}$;

ж) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{tg 2x}{\sin 5x}$; з) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x+3}{2x-4}\right)^{3x+5}$.

3. $y=4^{\frac{1}{x}}+2$.

Варіант 9

1. а) $y=2x\ \ -3(x+2)$; б) $y=2+\ln\dfrac{x}{e}$.

2. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^2-7x+2}{4x^2+7x-1}$; б) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2-6x+8}{8x^4-9x^2+2}$; в) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{6x^3-7x^2+19}{4x^2-4x+3}$;

г) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{3x^2+5x-8}{x^2+3x-4}$; д) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2x}{\sqrt{5x+9}-3}$; е) $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{\sqrt{2x+11}-3}{\sqrt{8-x}-3}$

ж) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 3x}{tg 6x}$; з) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{3x+2}{3x-4}\right)^{2x+3}$.

3. $y=\dfrac{2}{1+2^{\frac{1}{x-1}}}$.

Варіант 10

1. а) $y=\dfrac{2x-4}{x-2}+x-1$; б) $y=1-e^{-x}$.

2. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{5x^2+6x-7}{2x^2+3x-4}$; б) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{4x^2+6x-9}{9x^4-7x^2-2}$; в) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{5x^3-7x^2+7}{5x^2+2x-3}$;

г) $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{3x^2-5x-8}{x^2-1}$; д) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{7x+4}-2}{3x}$; е) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{2x+2}-2}{\sqrt{5x-3}-\sqrt{2}}$;

ж) $\lim\limits_{x\to 0}\sin 2x ctg 5x$; з) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{3x-2}{3x+4}\right)^{4x-1}$.

3. $y=\dfrac{4-x^2}{4x-x^3}$.

Варіант 11

1. а) $y=2+x(x-1)$; б) $y=\lg\dfrac{x-1}{10}$.

2. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^3-3x^2+x}{6x^3+5}$; б) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^2-6x+3}{3x^3-2x^2-12}$; в) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^3+7x^2+17}{15x^2-6x+4}$;

г) $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{2x^2-3x-14}{x^2-4}$; д) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{x^2+3}-2}{x^2-1}$; е) $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{\sqrt{2x+1}-3}{\sqrt{3x-11}-1}$

ж) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x\sin 2x}{1-\cos 8x}$; з) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+5}{x-7}\right)^{6x-1}$.

3. $y=\dfrac{1-x^2}{x-1}-x$.

Варіант 12

1. а) $y = x^2 + \frac{x^2-4}{x-2}$; б) $y = 1 + 2^{2x}$.

2. а) $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{6x^2+4x-1}{3x^2+2x+2}$; б) $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{6x^3-2x+3}{5x^4-12x^2+2}$; в) $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{9x^3+x^2+7}{5x^2-2x-4}$;

г) $\lim\limits_{x\to -1} \frac{3x^2+3x}{2x^2-x-3}$; д) $\lim\limits_{x\to -1} \frac{\sqrt{x^2+8}-3}{x+1}$; е) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sqrt{2x+1}-1}{\sqrt{3x+2}-\sqrt{2}}$

ж) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\arcsin 4x}{2x}$; з) $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\frac{2x+4}{2x-1}\right)^{2x+1}$.

3. $y = x + 3^{\frac{1}{x}}$.

Варіант 13

1. а) $y = x^2 + 2(x-3)$; б) $y = 2 + \ln\frac{x}{e}$.

2. а) $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{2x^2+6x+5}{4x^2-3x+1}$; б) $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{2x^3-12x+5}{x^4-2x^2+12}$; в) $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{4x^3+2x^2-7}{8x^2+2x-3}$;

г) $\lim\limits_{x\to 1} \frac{5x^2+6x-11}{x^2+2x-3}$; д) $\lim\limits_{x\to 2} \frac{\sqrt{2x+5}-3}{3x-6}$; е) $\lim\limits_{x\to 3} \frac{\sqrt{x+1}-2}{\sqrt{3x-2}-\sqrt{7}}$

ж) $\lim\limits_{x\to 0} tg3x ctg6x$; з) $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\frac{2x+5}{2x-3}\right)^{4x-1}$.

3. $y = \frac{x^2-4}{x+2} + x.$

Варіант 14

1. а) $y = x(x+2) - 3$; б) $y = 1 + \sqrt{x-1}$.

2. а) $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{x^3+2x^2-1}{2x^3+x+2}$; б) $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{3x^3-12x^2-5}{2x^4-2x^2+7}$; в) $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{4x^3+2x^2-7}{8x^2+2x-3}$;

г) $\lim\limits_{x\to 2} \frac{3x^2+5x-22}{x^2-4}$; д) $\lim\limits_{x\to 2} \frac{3x-6}{\sqrt{2x}-2}$; е) $\lim\limits_{x\to 5} \frac{\sqrt{2x-1}-3}{\sqrt{5x}-5}$;

ж) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 4x}{1-\cos 8x}$; з) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+3}{x+5}\right)^{4x+1}$.

3. $y=\begin{cases} x+1, & x\le 0, \\ \sin 2x, & x>0. \end{cases}$

Варіант 15

1. а) $y=\dfrac{x-2}{x}$; б) $y=\lg\dfrac{10}{x}-1$.

2. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1+2x-3x^2}{2-2x+3x^2}$; б) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{5x^3-2x^2+5}{2x^4-12x^2+7}$; в) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{7x^3+9x^2-17}{8x^2-3x+3}$;

г) $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{2x^2+3x-2}{x^2+3x+2}$; д) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{4x}{\sqrt{3x+4}-2}$; е) $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{\sqrt{2x+11}-3}{\sqrt{15-x}-4}$;

ж) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3x}{\arcsin 6x}$; з) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x-3}{2x+1}\right)^{3x-3}$.

3. $y=x+\dfrac{\sin(x-2)}{x^2-4}$.

Варіант 16

1. а) $y=\dfrac{x^3+2x^2-3x}{x}$; б) $y=2+e^{2x}$.

2. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^3+x+2}{2x^3-x^2+2}$; б) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{15x^3-8x^2+5}{12x^4-2x^2+7}$; в) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{6x^3+x^2-7}{8x^2+x+3}$;

г) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{2x^2-2}{\sqrt{x+3}-2}$; д) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{\sqrt{x+1}-2}{2x-6}$; е) $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{\sqrt{x+11}-3}{\sqrt{5-2x}-3}$;

ж) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos x-\cos^2 x}{x^2}$; з) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x+1}{2x+5}\right)^{3x+3}$.

3. $y=\begin{cases} x+1, & x\le 0, \\ \dfrac{\sin x}{x}, & x>0. \end{cases}$

Варіант 17

1. а) $y = x^2 + \dfrac{x^2 - 9}{x - 3}$; б) $y = 2 - \sqrt{x - 1}$.

2. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^3 + 3x + 4}{4x^3 + x^2 + 2}$; б) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{12x^3 + 8x^2 - 5x}{2x^4 - 2x^3 + 9}$; в) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^3 + 4x^2 - 7}{2x^2 + 11x + 3}$;

г) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2 + x - 12}{x^2 - 9}$; д) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{2x+1} - 1}{x}$; е) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{x+25} - 5}{\sqrt{15 - 2x} - \sqrt{15}}$;

ж) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{tg 4x}$; з) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x+5}{2x+4}\right)^{3x+1}$.

3. $y = \dfrac{x+1}{x^2 - 1} + x.$

Варіант 18

1. а) $y = \dfrac{x^2 + 2x + 1}{x + 1} + x^2$; б) $y = 1 - e^x$.

2. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{4 + 2x - x^2}{2 - x - 2x^2}$; б) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^3 - 4x^2 + 5x}{2x^4 + 2x^3 - 9x}$; в) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^3 + 4x^2 - 7}{2x^2 + 11x + 3}$;

г) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{4x^2 - 3x - 1}{2x - 2}$; д) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{3x - 6}{\sqrt{3x-2} - 2}$; е) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sqrt{3x+30} - 6}{\sqrt{13 - 2x} - 3}$;

ж) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin^2 2x}{\sin^2 4x}$; з) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+3}{x-6}\right)^{5x-1}$.

3. $y = \dfrac{1}{1 + 3^{\frac{1}{x}}}$.

Варіант 19

1. а) $y = \dfrac{x+2}{x}$; б) $y = \sqrt{x+2} - 1$.

2. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{4x^2 + 4x + 1}{8x^2 - x + 3}$; б) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{4x^3 - 14x^2 + 5x}{12x^4 + 2x^3 - 7x}$; в) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{13x^3 - 4x^2 + 17}{2x^2 - 11x + 4}$;

г) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x^2+4x}{2x}$; д) $\lim\limits_{x\to 2}\frac{\sqrt{3x+3}-3}{4x-8}$; е) $\lim\limits_{x\to -2}\frac{\sqrt{3x+31}-5}{\sqrt{1-2x}-\sqrt{5}}$;

ж) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos 6x}{xtg3x}$; з) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{2x-5}{2x+1}\right)^{7x-1}$.

3. $y=\begin{cases}\frac{\sin x}{x}, & x<0,\\ 2-x, & x\ge 0.\end{cases}$

Варіант 20

1. а) $y=x\left(x^2-2x\right)+2-x^3$; б) $y=1+\log_2\frac{2}{x}$.

2. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{8x^2-x+3}{4x^2+2x-1}$; б) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{7x^3-4x^2+15x}{2x^4+12x^3-9x}$; в) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{5x^3-14x^2+7}{2x^2-6x+4}$;

г) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^3-1}{x^2+3x-4}$; д) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{\sqrt{5x+4}-3}{x-1}$; е) $\lim\limits_{x\to -2}\frac{\sqrt{3x+31}-5}{\sqrt{1-2x}-\sqrt{5}}$;

ж) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x^2}{1-\cos 3x}$; з) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{2x+3}{2x-7}\right)^{6x+1}$.

3. $y=\frac{2x+1}{x-2}+x$.

Варіант 21

1. а) $y=x(2-x)-8$; б) $y=-\frac{1}{x}-1$.

2. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{6x^2+5x-1}{3x^2-x+7}$; б) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{8x^3-14x^2+15x}{x^4+12x^3+9x-1}$; в) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{7x^3-14x^2-3}{2x^2+16x+4}$;

г) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^2-7x+6}{x^2-1}$; д) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt{7x+1}-1}{5x}$; е) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{\sqrt{x+24}-5}{\sqrt{1+4x}-\sqrt{5}}$;

ж) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos 4x}{2x^2}$; з) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{3x+5}{3x-2}\right)^{7x-1}$.

3. $y=\frac{2}{1+2^{\frac{1}{x}}}$.

Варіант 22

1. а) $y=4+2x(x-3)$; б) $y=\log_3(x-1)$.

2. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2+5x+6x^2}{7-3x-2x^2}$; б) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^3-4x^2+15x}{2x^4+12x^3+9x}$; в) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{5x^3-4x^2+13}{4x^2+16x-5}$;

г) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2+7x-18}{x-2}$; д) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{5x-1}-2}{3x-3}$; е) $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{\sqrt{2x+28}-6}{\sqrt{1+x}-\sqrt{5}}$;

ж) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x-\sin 2x}{2x}$; з) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x+9}{2x+7}\right)^{3x+2}$.

3. $y=4^{\frac{2}{x+2}}$.

Варіант 23

1. а) $y=x(4-x)-3$; б) $y=\sqrt{x-4}$.

2. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{5x^2+7x-1}{10x^2+x-2}$; б) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{9x^3-14x^2+5x}{3x^4+2x^3-9x}$; в) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{6x^3+7x^2-13}{2x^2+16x-15}$;

г) $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{2x^2-x-3}{x^3+1}$; д) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3x}{\sqrt{3x+9}-3}$; е) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{2x+25}-5}{\sqrt{1+x}-1}$;

ж) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{tg^2 x}{\sin^2 2x}$; з) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{3x-1}{3x+4}\right)^{x+1}$.

3. $y=\dfrac{4x+1}{x-3}$.

Варіант 24

1. а) $y=4-(x+1)^2$; б) $y=\log_2(x+1)$.

2. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^3+5x^2-3}{2x^3-x^2+3}$; б) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^3-4x^2+5x-1}{3x^4-2x^3-8x+3}$; в) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{8x^3+17x^2-3}{2x^2+6x-1}$;

г) $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x+1}{x^2+5x+4}$; д) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{2x-6}{\sqrt{x+6}-3}$; е) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{\sqrt{3x+16}-5}{\sqrt{3x}-3}$;

ж) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 2x-\sin x}{3x}$; з) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{2x+1}{2x}\right)^{3x-1}$.

3. $y=5^{\frac{1}{x-1}}$.

Варіант 25

1. а) $y=(x-1)^2-3$; б) $y=e^{x-1}$.

2. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{6-5x-2x^3}{1+4x+x^3}$; б) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{9x^3-x^2-11}{3x^4-18x+3}$; в) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{4x^3+17x^2+3}{12x^2-6x-1}$;

г) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{5x^2+7x-12}{x^2+3x-4}$; д) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+3x}-\sqrt{1+x}}{x}$; е) $\lim\limits_{x\to -3}\frac{\sqrt{3x+25}-4}{\sqrt{1-3x}-\sqrt{10}}$;

ж) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x^2 ctg 2x}{\sin 3x}$; з) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{5x-1}{5x+2}\right)^{x+1}$.

3. $y=\frac{x^2-4x}{x-4}$.

Варіант 26

1. а) $y=\frac{4x-8}{x-2}+x-1$; б) $y=2+e^{-x}$.

2. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{6x^2+5x-1}{3x^2-x+7}$; б) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{7x^3-12x^2+15}{3x^4-8x^2+17}$; в) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^3+6x^2-7}{9x^2-3x+13}$;

г) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^2-7x+6}{x^2-1}$; д) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt{7x+1}-1}{5x}$; е) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{\sqrt{3x+22}-5}{\sqrt{1+3x}-2}$;

ж) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos 4x}{2x^2}$; з) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{3x+5}{3x-2}\right)^{7x-1}$.

3. $y=\begin{cases}x+2, & x\le 0,\\ \sin x, & x>0.\end{cases}$

Варіант 27

1. а) $y=\frac{x+4}{x}$; б) $y=\sqrt{x+2}-2$.

2. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2+5x+6x^2}{7-3x-2x^2}$; б) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{7x^3-4x^2+11x}{3x^4+2x^3-9x}$; в) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{5x^3+4x^2-9}{x^2+6x-4}$;

г) $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{x^2+7x-18}{x-2}$; д) $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\sqrt{5x-1}-2}{3x-3}$; е) $\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{\sqrt{3x+19}-4}{\sqrt{1-3x}-2}$;

ж) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin x-\sin 2x}{2x}$; з) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x+9}{2x+7}\right)^{3x+2}$.

3. $y=\dfrac{x^2-1}{x+1}+x.$

Варіант 28

1. а) $y=x(3-x)-2$; б) $y=3^x+1$.

2. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{5x^2+7x-1}{10x^2+x-2}$; б) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{11x^3+8x^2-4}{11x^4-2x^2+x}$; в) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{9x^3+2x^2-7}{2x^2+6x+13}$;

г) $\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{2x^2-x-3}{x^3+1}$; д) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{3x}{\sqrt{3x+9}-3}$; е) $\lim\limits_{x\to-4}\dfrac{\sqrt{3x+28}-4}{\sqrt{1-2x}-3}$;

ж) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{tg^2x}{\sin^2 2x}$; з) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{3x-1}{3x+4}\right)^{x+1}$.

3. $y=4^{\frac{1}{x-2}}$

Варіант 29

1. а) $y=(x+1)^2-2$; б) $y=e^{x-2}$.

2. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^3+5x^2-3}{2x^3-x^2+3}$; б) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{15x^3-8x^2-4x}{x^4-12x^2+3x}$; в) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^3+12x^2-9}{2x^2-6x+15}$;

г) $\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{x+1}{x^2+5x+4}$; д) $\lim\limits_{x\to3}\dfrac{2x-6}{\sqrt{x+6}-3}$; е) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt{3x+25}-5}{\sqrt{1-6x}-1}$;

ж) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin 2x-\sin x}{3x}$; з) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x+1}{2x}\right)^{3x-1}$.

3. $y=\dfrac{4x-1}{x-1}$

Варіант 30

1. а) $y = x - \dfrac{x-1}{2-2x}$; б) $y = 2 - \ln x$

2. а) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{6-5x-2x^3}{1+4x+x^3}$; б) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{6x^3-5x^2-4x}{3x^4-12x^2+5x}$; в) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{7x^3+2x^2-3}{12x^2+8x+5}$;

г) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{5x^2+7x-12}{x^2+3x-4}$; д) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{1+3x}-\sqrt{1+x}}{x}$; е) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\sqrt{x+24}-5}{\sqrt{13+3x}-4}$;

ж) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x^2 ctg 2x}{\sin 3x}$; з) $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\dfrac{5x-1}{5x+2}\right)^{x+1}$.

3. $y = \dfrac{1}{1+2^{\frac{1}{x}}}$

Зразок виконання індивідуального завдання № 5

Приклад 1. Побудувати графіки функцій:

а) $y = \dfrac{x-1}{x-2}$; б) $y = \sqrt{4-x}$.

Розв’язання.

а) Область визначення функції

$$D(y) = (-\infty;2) \cup (2;+\infty).$$

Перетворимо дану функцію:

$$y = \frac{x-1}{x-2} = \frac{(x-2)+1}{x-2} = 1 + \frac{1}{x-2}.$$

Графіком цієї функції є гіпербола з асимптотами $x = 2$ і $y = 1$ (рис. 7).

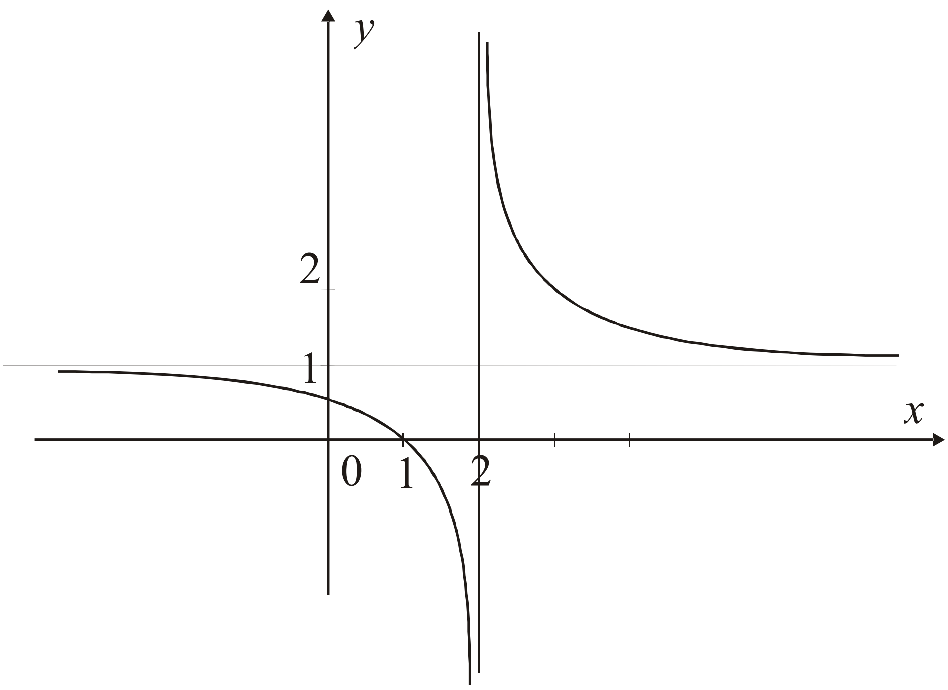

Рис. 7. **Графік функції** $\boldsymbol{y} = \dfrac{\boldsymbol{x} - 1}{\boldsymbol{x} - 2}$

б) Область визначення функції

$$D(y) = (-\infty; 4).$$

Графік зображено на рис. 8.

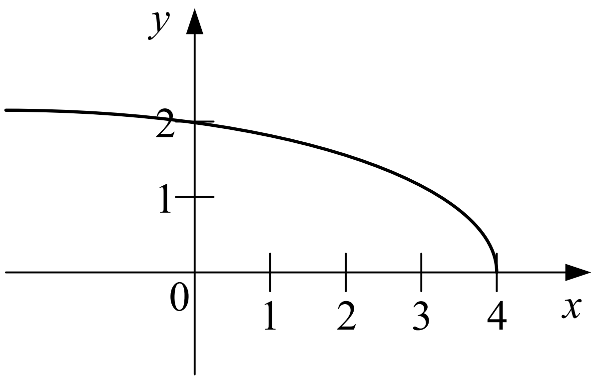

Рис. 8. **Графік функції** $\boldsymbol{y} = \sqrt{4 - \boldsymbol{x}}$

Приклад 2. Знайти границі функцій:

а) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{3x^2 + 7x - 2}{8x^2 - 4x + 5}$; б) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{2x^3 + 3x^2 - 7x}{3x^4 - 2x^2 - 9}$; в) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{4x^3 + 6x^2 - 3}{2x^2 - 5x + 5}$;

г) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2+7x\ \ -18}{x^2-4}$;   д) $\lim\limits_{x\to 6}\dfrac{\sqrt{2x+4}-4}{x-6}$; е) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{x+24}-5}{\sqrt{13+3x}-4}$;

ж) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 10x}{x\sin 2x}$;   з) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{6x-7}{6x+5}\right)^{2x-1}$.

Розв'язання.

а) при $x\to\infty$ маємо невизначеність вигляду $\left|\dfrac{\infty}{\infty}\right|$. Для розкриття цієї невизначеності в чисельнику і знаменнику виносимо за дужки x^2 і скорочуємо.

$$\lim_{x\to\infty}\frac{3x^2+7x-2}{8x^2-4x+5}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2\left(3+\dfrac{7}{x}-\dfrac{2}{x^2}\right)}{x^2\left(8-\dfrac{4}{x}+\dfrac{5}{x^2}\right)}=\lim_{x\to\infty}\frac{3+\dfrac{7}{x}-\dfrac{2}{x^2}}{8-\dfrac{4}{x}+\dfrac{5}{x^2}}=\frac{3}{8}.$$

б) при $x\to\infty$ маємо невизначеність вигляду $\left|\dfrac{\infty}{\infty}\right|$. Для розкриття цієї невизначеності треба поділити чисельник і знаменник на x^n, де n – найвищий із степенів чисельника і знаменника. У даному прикладі ділимо на x^4:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{2x^3+3x^2-7x}{3x^4-2x^2-9}=\lim_{x\to\infty}\frac{\dfrac{2}{x}+\dfrac{3}{x^2}-\dfrac{7}{x^3}}{3-\dfrac{2}{x^2}-\dfrac{9}{x^4}}=\frac{0}{3}=0,$$

оскільки $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2}{x}=0,\ \lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3}{x^2}=0,\ \lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{7}{x^3}=0,\ \lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2}{x^2}=0,\ \lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{9}{x^4}=0$;

в) при $x\to\infty$ маємо невизначеність вигляду $\left|\dfrac{\infty}{\infty}\right|$.

Для розкриття цієї невизначеності треба поділити чисельник і знаменник (як і в попередньому прикладі) на старший ступінь x, а саме на x^3:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{4x^3+6x^2-3}{2x^2-5x+5}=\lim_{x\to\infty}\frac{4+\frac{6}{x}-\frac{3}{x^3}}{\frac{2}{x}-\frac{5}{x^2}+\frac{5}{x^3}}=\infty,$$

оскільки при $x\to\infty$ чисельник $\left(4+\frac{6}{x}-\frac{3}{x^3}\right)\to 4$, а знаменник

$$\left(\frac{2}{x}-\frac{5}{x^2}+\frac{5}{x^3}\right)\to 0;$$

г) при $x\to 2$ маємо невизначеність вигляду $\left|\frac{0}{0}\right|$;

щоб розкрити цю невизначеність розкладаємо чисельник і знаменник на множники, один з яких прямує до нуля, в даному прикладі ($x-2$), і скорочуємо:

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^2+7x-18}{x^2-4}=\lim_{x\to 2}\frac{(x-2)(x+9)}{(x-2)(x+2)}=\lim_{x\to 2}\frac{x+9}{x+2}=\frac{11}{4};$$

д) при $x\to 6$ маємо невизначеність вигляду $\left|\frac{0}{0}\right|$;

для розкриття цієї невизначеності помножимо чисельник і знаменник на вираз, спряжений чисельнику. Після скорочення дробу на $(x-6)$ застосовуємо теорему про границю частки:

$$\lim_{x\to 6}\frac{\sqrt{2x+4}-4}{x-6}=\lim_{x\to 6}\frac{\left(\sqrt{2x+4}-4\right)\left(\sqrt{2x+4}+4\right)}{(x-6)\left(\sqrt{2x+4}+4\right)}=$$

$$=\lim_{x\to 6}\frac{2x+4-16}{(x-6)\left(\sqrt{2x+4}+4\right)}=\lim_{x\to 6}\frac{2(x-6)}{(x-6)\left(\sqrt{2x+4}+4\right)}=$$

$$=\lim_{x\to 6}\frac{2}{\sqrt{2x+4}+4}=\frac{2}{8}=\frac{1}{4}.$$

е) при $x\to 1$ маємо невизначеність вигляду $\left|\frac{0}{0}\right|$.

Для розкриття цієї невизначеності помножимо чисельник і знаменник на вирази, які спряжені до них. Після скорочення дробу на $(x-1)$ застосовуємо теорему про границю частки:

$$\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{x+24}-5}{\sqrt{13+3x}-4}=\lim_{x\to 1}\frac{\left(\sqrt{x+24}-5\right)\left(\sqrt{x+24}+5\right)\left(\sqrt{13+3x}+4\right)}{\left(\sqrt{13+3x}-4\right)\left(\sqrt{13+3x}+4\right)\left(\sqrt{x+24}+5\right)}=$$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{(x+24-25)\left(\sqrt{13+3x}+4\right)}{(13+3x-16)\left(\sqrt{x+24}+5\right)}=\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)\left(\sqrt{13+3x}+4\right)}{3(x-1)\left(\sqrt{x+24}+5\right)}=$$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{\left(\sqrt{13+3x}+4\right)}{3\left(\sqrt{x+24}+5\right)}=\frac{8}{3\cdot 10}=\frac{4}{15};$$

ж) при $x\to 0$ маємо невизначеність вигляду $\left\|\frac{0}{0}\right\|$;

щоб розкрити цю невизначеність у чисельнику різницю замінюємо добутком, а далі використовуємо еквівалентність нескінченно малих

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos 10x}{x\sin 2x}=\lim_{x\to 0}\frac{2\sin^2 5x}{x\sin 2x}=\lim_{x\to 0}\frac{2\cdot(5x)^2}{x\cdot 2x}=25;$$

з) при $x\to\infty$ маємо невизначеність вигляду $\left\|1^{\infty}\right\|$.

Для розкриття цієї невизначеності використовуємо другу визначну границю $\left(\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}=e\right)$:

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{6x-7}{6x+5}\right)^{2x-1}=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{6x+5-12}{6x+5}\right)^{2x-1}=\lim_{x\to\infty}\left(1-\frac{12}{6x+5}\right)^{2x-1}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\left(1-\frac{12}{6x+5}\right)^{-\frac{6x+5}{12}\cdot\frac{-12(2x-1)}{6x+5}}=e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{-12(2x-1)}{6x+5}}=e^{-4}.$$

Приклад 3. Дослідити на неперервність функцію $f\left(x\right)=3^{\frac{1}{x}}+2$,

встановити характер точок розриву.

Розв'язання. Для даної функції $x=0$ є точка розриву. Для визначення характеру розриву знайдемо

$$A=\lim_{x\to 0-0}f\left(x\right)=\lim_{x\to 0-0}\left(3^{\frac{1}{x}}+2\right)=2,$$

$$B=\lim_{x\to 0+0}f\left(x\right)=\lim_{x\to 0+0}\left(3^{\frac{1}{x}}+2\right)=\infty.$$

Отже, при $x=0$ дана функція має розрив другого роду (рис. 9). Для побудови ескізу графіка функції знайдемо

$$\lim_{x\to\infty}f\left(x\right)=\lim_{x\to\infty}\left(3^{\frac{1}{x}}+2\right)=3.$$

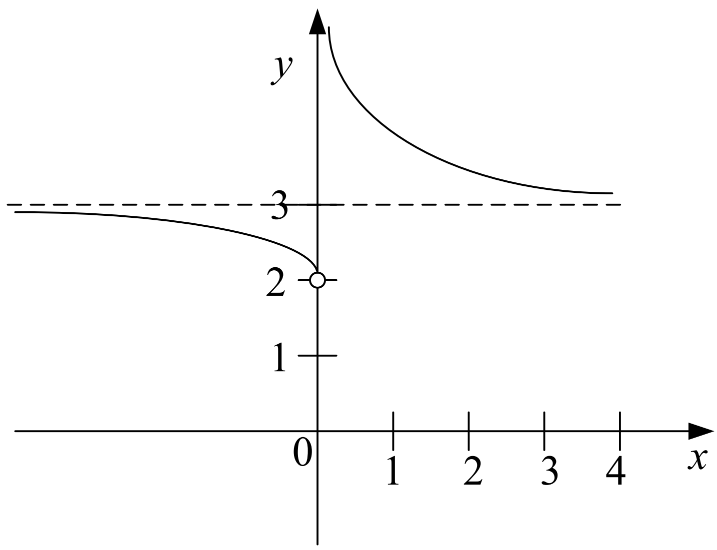

Рис. 9. **Ескіз графіка функції** $\boldsymbol{f\left(x\right)=3^{\frac{1}{x}}+2}$

Індивідуальне завдання № 6
Диференціальне числення. Дослідження функції та побудова її графіка

Зміст завдання

1. Знайти похідну y' для кожної з вказаних функцій.
2. Знайти границі за правилом Лопіталя.
3. Дослідити функцію та побудувати її графік.

Варіант 1

1. а) $y=\left(2+x\right)\sqrt{3-x}$; б) $y=\dfrac{4arctg2x}{\left(x-1\right)^{2}}$;

в) $y=\sqrt{25x^{2}+1}arctg5x-\dfrac{1}{\left(2x+1\right)^{2}}$; г) $y=(x^{2}+1)^{\cos x}$;

д) $y=\dfrac{\sqrt{x+5}\cdot\left(x-5\ \right)^{3}}{\left(x+7\right)^{2}}$; е) $x^{2}+2xy+y^{3}=3$**;** ж) $x=\sqrt{1-t^{2}}$, $y=\dfrac{1}{t}$.

2. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^{2}}{\ln\left(e^{x^{2}}+1\right)}$; б) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\cos x\right)^{\frac{1}{\sin x}}$.

3. а) $y=\dfrac{1}{4}x^{4}-2x^{3}$; б) $y=x\ln x$.

Варіант 2

1. а) $x\sqrt{x^{2}-1}$; б) $y=\dfrac{\arcsin 3x}{\left(x-4\right)^{3}}$; в) $y=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}+\dfrac{x^{3}}{3}\arccos x$;

г) $y=(x^{4}+5)^{\mathrm{c}tgx}$; д) $y=\dfrac{\left(x-6\right)^{3}\cdot\left(x+4\right)^{5}}{\sqrt{\left(x+1\right)^{5}}}$;

е) $y^{2}=x\sin y$; ж) $x=\sqrt{1-t}$, $y=\dfrac{1}{\sqrt{t}}$.

2. а) $\lim\limits_{x\to 0} x\ln^3 x$; б) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\cos 4x\right)^{\frac{1}{x^2}}$.

3. а) $y=2x^3+3x^2-5$; б) $y=\dfrac{3-x^2}{x+2}$.

Варіант 3

1. а) $y=3^{ctgx}$; б) $y=\dfrac{\ln\left(x-1\right)}{\left(x+5\right)^4}$; в) $y=x\sqrt{4-x^2}+4\arcsin\dfrac{x}{2}$;

г) $y=\left(\arcsin x\right)^{\sqrt{x}}$; д) $y=\dfrac{\left(x+2\right)^4\cdot\left(x-7\right)^5}{\sqrt[4]{\left(x-2\right)^3}}$;

е) $xy^2-y\ln x=5$; ж) $x=te^t$, $y=\arcsin t+sin t$.

2. а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{5x}-5x-1}{\sin^2 3x}$; б) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\sin x\right)^{tgx}$.

3. а) $y=\dfrac{1}{4}x^4-x^3$; б) $y=x+\dfrac{1}{x}$.

Варіант 4

1. а) $y=\arcsin\left(\ln x\right)$; б) $y=\dfrac{2\arccos 4x}{\left(x+2\right)^3}$; в) $y=x\sqrt{x^2-1}+\ln(x+\sqrt{x^2-1})$;

г) $y=(x^2+3)^{\sin x}$; д) $y=\dfrac{\sqrt{x+3}\cdot\left(x-4\right)^3}{\left(x+5\right)^6}$;

е) $x+y+e^y arctgx=0$; ж) $x=\sqrt{1+2t}$, $y=3t^2cos^2\sqrt{t}$.

2. а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{5x}-e^{3x}}{\sin 5x-\sin 3x}$; б) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\cos 2x\right)^{\frac{3}{x^2}}$.

3. а) $y=\dfrac{1}{3}x^3-x^2$; б) $y=x-2\ln x$.

Варіант 5

1. а) $y=\ln\left(\arcsin 3x\right)$; б) $y=\dfrac{\ln\left(x-4\right)}{\left(x+15\right)^{2}}$; в) $y=\sqrt{x^{2}+\sqrt{\cos 3x}}-\dfrac{1}{\ln x}$;

г) $y=\left(3x-2\right)^{\frac{2}{x}}$; д) $y=\dfrac{\left(x-5\right)^{3}\cdot\left(x-4\right)^{7}}{\sqrt{\left(x+1\right)^{3}}}$;

е) $arctgy=2x+\sqrt{y}$; ж) $x=2+\sqrt{\sin t}$, $y=t^{2}\cos t$.

2. а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 2x-2\sin x}{x\ln\cos 5x}$; б) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{3}{x}\right)^{2tgx}$.

3. а) $y=\dfrac{1}{3}x^{3}+x^{2}$; б) $y=\dfrac{\ln x}{x}$.

Варіант 6

1. а) $y=\left(1-2\sqrt{x}\right)^{4}$; б) $y=\dfrac{4arctg3x}{\left(x-2\right)^{3}}$; в) $y=\ln\sin\sqrt[3]{arctge^{3x}}+\dfrac{1}{2\left(x+1\right)^{2}}$;

г) $y=(x^{4}+5)^{ctgx}$; д) $y=\dfrac{\left(x+5\right)^{8}\cdot\left(x-4\right)^{4}}{\sqrt[5]{\left(x-2\right)^{2}}}$;

е) $arctg\, y=x\sin y$; ж) $x=t^{3}+5\sin t,\ y=t\cos 3t.$

2. а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 2x}{x\sin 3x}$; б) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{x}\right)^{\sin x}$.

3. а) $y=\dfrac{3}{4}x^{4}-x^{3}$; б) $y=x+2\sqrt{x}.$

Варіант 7

1. а) $y=\sqrt{arctgx}$; б) $y=\dfrac{\ln\left(x+9\right)}{\left(x-3\right)^{4}}$; в) $y=\sqrt{x^{2}+1}\cdot\sin^{2}3x+\dfrac{1}{2x-1}+\ln 2$;

г) $y=(ctgx)^{\frac{1}{\sin x}}$; д) $y=\dfrac{(x-2)^3\cdot\sqrt[3]{(x+4)^4}}{(x+5)^6}$;

е) $y=5-xe^{2y}$; ж) $x=\sqrt{1+3t}$, $y=t^2\cos 5t$.

2. а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2\left(e^x-e^{-x}\right)}{e^{x^2+1}-e}$; б) $\lim\limits_{x\to 1}x^{\frac{3}{x-1}}$.

3. а) $y=-\dfrac{1}{3}x^3-x^2$; б) $y=\dfrac{1}{x}+4x^2$.

Варіант 8

1. а) $y=\sqrt[3]{5+3x^2}$; б) $y=\dfrac{\arcsin 4x}{(x-4)^3}$; в) $y=\dfrac{x}{(x+5)^2}-x^4\cdot tg^2\sqrt{3x}-\log_3 2$;

г) $y=\left(\ln(2x+1)\right)^{2+\cos x}$; д) $y=\dfrac{(x+1)^3\cdot(x-7)^3}{\sqrt{(x+4)^5}}$;

е) $x^3-y^3=3x^2y^2+3$; ж) $x=\ln^3 t$, $y=t^2+ctg\sqrt{t}$.

2. а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{3x}-3x-1}{\sin^2 3x}$; б) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sin\dfrac{3}{x}\right)^x$.

3. а) $y=-\dfrac{1}{9}x^3+x^2$; б) $y=\dfrac{x}{e^x}$.

Варіант 9

1. а) $y=x^4\sqrt{4-x^2}$;б) $y=\dfrac{arctg5x}{(x-12)^4}$;

в) $y=\dfrac{3}{(\sqrt{x}+3)^3}+(x-1)^3\cos^2 2x-\dfrac{1}{5}$; г) $y=(ctgx)^{\sin 3x}$;

д) $y=\dfrac{(x-2)^2\cdot(x+5)^7}{\sqrt{(x+9)^5}}$; е) $2^x+2^y=2^{x+y}$; ж) $x=te^t$, $y=\arcsin t+\sin^2 t$.

2. а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x\cos x-\sin x}{x^3}$; б) $\lim\limits_{x\to 1}x^{\frac{3}{x^2-1}}$.

3. а) $y=\dfrac{1}{4}x^3+x^2$; б) $y=\dfrac{2x^2}{1+x^2}$.

Варіант 10

1. а) $y=x\sqrt{x^2+1}$; б) $y=\dfrac{3arctg4x}{(x-8)^4}$;

в) $y=\dfrac{2}{(x+3)^4}-(2x+5)^3\sin^4\sqrt{2x}+\dfrac{1}{2}$; г) $y=(x^2+1)^{\cos x}$;

д) $y=\dfrac{\sqrt{x+8}\cdot(x-4)^3}{(x+3)^4}$; е) $2y\ln y=x$; ж) $x=3-\sqrt{\sin 2t},\ y=t^2\cos 2t$.

2. а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1+x\sin x-\cos 2x}{\sin^2 x}$; б) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\cos\dfrac{2}{x}\right)^x$.

3. а) $y=-\dfrac{1}{3}x^3+x^2$; б) $y=x\ln x$.

Варіант 11

1. а) $y=x^2\sin x$; б) $y=\dfrac{\ln(5x+9)}{(x-4)^3}$; в) $y=\dfrac{arctg3x}{1+9x^2}-3\sqrt{\cos 2x}$;

г) $y=(tg^2x-x^2)^x$; д) $y=\dfrac{(x-12)^2\cdot\sqrt[4]{(x+4)^3}}{(x+2)^6}$;

е) $2^x+2^y=\sin y$; ж) $x=\cos t+\sin t,\ y=\sin t-t\cos t$.

2. а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x+e^{-x}-2}{\sin^2 x}$; б) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\cos\sqrt{x}\right)^{\frac{1}{x}}$.

3. а) $y=\dfrac{1}{9}x^3+x^2$; б) $y=(x+1)e^{-x}$.

Варіант 12

1. а) $y=\frac{x^2}{\cos x}$; б) $y=2^{2x}\cdot\sqrt{3x^2+1}$; в) $y=\frac{2}{3}\sqrt{(arctge^{2x})^3}-\frac{2}{(x+1)^3}$;

г) $y=\left(\ln 3x\right)^{\cos x}$; д) $y=\frac{\left(x-1\right)^2\cdot\left(x+7\right)^3}{\sqrt{\left(x+4\right)^7}}$;

е) $2^{x+y}=x+10y$; ж) $x=\sqrt{1+3t}$, $y=t^2\sin t$.

2. а) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^{\sin 2x}-e^{\sin x}}{tgx}$; б) $\lim\limits_{x\to 0}x^{\frac{2}{3+\ln x}}$.

3. а) $y=\frac{1}{3}x^3-3x^2$; б) $y=\frac{x}{2}+\frac{2}{x}$.

Варіант 13

1. а) $y=\sqrt{x^3+x}$; б) $y=\frac{\ln\left(x-4\right)}{\left(x+13\right)^5}$; в) $y=\frac{1}{2}\ln(e^{2x}+1)-2arctge^x$;

г) $y=x^{\sqrt{x}}$; д) $y=\frac{\left(x+2\right)^2\cdot\sqrt[3]{\left(x+4\right)^2}}{\left(x-5\right)^4}$;

е) $x+tgy=2^x+y^2$**;** ж) $x=2t-\sin 2t^2$, $y=\sin^2(2t)$.

2. а) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^{2x}-e^x}{\sin\ 2x-\sin x}$; б) $\lim\limits_{x\to 0}\left(ctgx\right)^{\frac{1}{\ln x}}$.

3. а) $y=-\frac{1}{3}x^3-3x^2$; б) $y=\frac{2x}{1+x^2}$.

Варіант 14

1. а) $y=tg^2 3x$; б) $y=\frac{\ln\left(x-5\right)}{\left(x+4\right)^8}$; в) $y=e^{\sin x}+\left(x-\frac{1}{\cos x}\right)^4$;

г) $y=(1+e^x)^{x^2+2}$; д) $y=\frac{\sqrt{x-2}\cdot\left(x+7\right)^3}{\left(x-5\right)^4}$;

е) $x-y+7\cos y=0$; ж) $x=\ln\,(t^5+3),\ y=\dfrac{t^2}{t^5+3}$.

2. а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{3x}-e^{2x}}{\sin\ 3x-tg2x}$; б) $\lim\limits_{x\to 0}\left(e^{3x}+x\right)^{\frac{1}{x}}$.

3. а) $y=\dfrac{1}{3}x^3+2x^2$; б) $y=x^2\ln x$.

Варіант 15

1. а) $y=x^2arctgx$; б) $y=\dfrac{\ln\left(2x-3\right)}{\left(x+2\right)^7}$; в) $y=\sin^4(\sqrt[3]{x}-1)e^{-x^3}$;

г) $y=(arctg\sqrt{x})^{\ln(x^2+1)}$; д) $y=\dfrac{\left(x-10\right)^3\cdot\sqrt[6]{\left(x+4\right)^3}}{\left(x-6\right)^6}$;

е) $x^3y^2+\left(x-y\right)^2=b$; ж) $x=arctgt,\ \ y=\ln\left(1+t^2\right)$.

2. а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{tgx-\sin x}{x-\sin x}$; б) $\lim\limits_{x\to 0}\left(e^{x}+x\right)^{\frac{1}{x}}$.

3. а) $y=\dfrac{1}{4}x^4-x^3$; б) $y=\dfrac{x^2}{x-3}$.

Варіант 16

1. а) $y=x^3\cos x$; б) $y=\dfrac{\arcsin 5x}{\left(x-5\right)^3}$; в) $y=\left(\dfrac{4}{5x^2}-\dfrac{1}{3x}\right)\sqrt{6x+x^2}$;

г) $y=(x^4+4)^{\sin 2x}$; д) $y=\dfrac{\sqrt{x-1}\cdot\left(x-5\right)^8}{\left(x+2\right)^7}$;

е) $\ln y+\dfrac{x^2}{y}=3a$ **;** ж) $x=3t-\sin 3t^2,\ \ y=\sin^2 3t$.

2. а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{3x}-3x-1}{\sin^2 5x}$; б) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(x+2^x\right)^{\frac{1}{x}}$.

3. а) $y=-\dfrac{1}{9}x^3-x^2$; б) $y=\dfrac{x^2-5x}{x-1}$.

Варіант 17

1. а) $y=\dfrac{x^4}{\cos x}$; б) $y=\sqrt{x^2-1}\cdot\arcsin 2x$; в) $y=x^2e^{-x^3}-3^{1-\ln^2 5x}$;

г) $y=(x^2+e^x)^{tg^3 x}$; д) $y=\dfrac{(x+1)^5\cdot(x+7)^4}{\sqrt{(x+14)^3}}$;

е) $y\sin x-\cos(x-y)=a$; ж) $x=\dfrac{1}{t}-t,\ y=\sqrt{t^2+1}$.

2. а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+2x)}{e^x-e^{-x}}$; б) $\lim\limits_{x\to 0}x^{\frac{1}{\ln\left(e^x-1\right)}}$.

3. а) $y=-\dfrac{1}{3}x^3-2x^2$; б) $y=x-e^x$.

Варіант 18

1. а) $y=\sqrt{x+\sqrt{x}}$; б) $y=\dfrac{\ln(4x+3)}{(x-12)^3}$; в) $y=\sqrt[5]{(2-\sqrt{x}\sin 2x)^3}$;

г) $y=(1+2^x)^{x^2+2}$; д) $y=\dfrac{\sqrt[7]{(x+4)^2}\cdot(x-2)^5}{(x+5)^3}$; е) $xy=ctgy$;

ж) $x=3t^2+5,\ y=arctg\sqrt{t}$.

2. а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1-x)}{e^{2x}-e^{-2x}}$; б) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{tgx}{x}\right)^{\frac{1}{x^2}}$.

3. а) $y=-\dfrac{1}{4}x^4+x^3$; б) $y=x^2\ln x$.

Варіант 19

1. а) $y = x^3 \ln x$; б) $y = \dfrac{2\arccos 3x}{(x+4)^3}$; в) $y = \sin^3(\sqrt[3]{x} - x\sqrt{x})$;

г) $y = (\cos 2x)^{\sin x}$; д) $y = \dfrac{(x-3)^2 \cdot (x-4)^4}{\sqrt{(x+6)^3}}$; е) $xy = ctgy$; ж) $\begin{cases} x = e^{-t}, \\ y = e^{3t}. \end{cases}$

2. а) $\lim\limits_{x\to 0} \arcsin x ctgx$; б) $\lim\limits_{x\to 0} (1-\cos x)^x$.

3. а) $y = \dfrac{1}{3}x^3 + 2x^2$; б) $y = \dfrac{x}{\ln x}$.

Варіант 20

1. а) $y = (1+x^2)arctgx$; б) $y = \dfrac{\ln(5x+2)}{(x-8)^6}$; в) $y = (1+ctg^3 3x)e^{-\frac{x}{3}}$;

г) $y = (x^3+1)^{tg^2\frac{x}{2}}$; д) $y = \dfrac{(x-11)^2 \cdot \sqrt[6]{(x+5)^5}}{(x-9)^6}$;

е) $arctgy = x + y^2$; ж) $x = \ln(t^3+2)$, $y = \dfrac{t}{t^3+2}$.

2. а) $\lim\limits_{x\to 0} (1-\cos x)ctgx$; б) $\lim\limits_{x\to \infty} \left(x+2^x\right)^{\frac{1}{x}}$.

3. а) $y = -\dfrac{1}{4}x^4 - x^3$; б) $y = \ln(x^2+4)$.

Варіант 21

1. а) $y = 2^{tgx}$; б) $y = \dfrac{\arcsin 3x}{(x-14)^3}$; в) $y = \dfrac{\sqrt{1-\sin^3 2x}}{1+\cos 4x}$; г) $y = (tgx)^{\sin^2 x}$;

д) $y = \dfrac{\sqrt{x+3} \cdot (x-2)^4}{(x-5)^5}$; е) $e^x \sin y = e^{-y} \cos x$; ж) $\begin{cases} x = \ln(1+t^2), \\ y = t - arctgt. \end{cases}$

2. а) $\lim\limits_{x\to 0} x\,ctg\,\pi x$; б) $\lim\limits_{x\to 1}(1-x)^{\ln x}$.

3. а) $y=\frac{1}{9}x^3-x^2$; б) $y=\frac{1+\ln x}{x}$.

Варіант 22

1. а) $y=x\sin^2 x$; б) $y=\frac{\ln(4x+2)}{(x-6)^6}$; в) $y=\ln(x^3+\sqrt[3]{x^6+3})$;

г) $y=(x^3-1)^{\cos\sqrt{x}}$; д) $y=\frac{(x+6)^5\cdot\sqrt[7]{(x+1)^2}}{(x-9)^4}$;

е) $e^{xy}-x^2+y^2=b$; ж) $x=2\cos t-\cos 2t,\ y=2\sin t-\sin 2t.$

2. а) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln x}{1+2\ln\sin x}$; б) $\lim\limits_{x\to 0} x^{\frac{3}{4+\ln x}}$.

3. а) $y=-\frac{1}{3}x^3-2x^2$; б) $y=x\cdot e^{-\frac{x}{2}}$.

Варіант 23

1. а) $y=x^3\cos 2x$; б) $y=\frac{\ln(2x+2)}{(x+3)^5}$; в) $y=\frac{x^2}{2\sqrt{1-3x^2}}+\ln^5\sin 2x$;

г) $y=(\sin 2x)^{\ln x}$; д) $y=\frac{(x-8)^2\cdot(x+4)^3}{\sqrt{(x+4)^5}}$; е) $2y^2x=\sin(xy)$;

ж) $\begin{cases} x=\cos^2 t, \\ y=tg^2 t. \end{cases}$

2. а) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x-e^{-x}}{\sin x\cos x}$; б) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1}{x}\right)^{tg\,2x}$.

3. а) $y=2x^3-3x^2+1$; б) $y=\frac{x^2}{2}+\frac{1}{x}$.

Варіант 24

1. а) $y=e^{-2x}\cdot\sin x$; б) $y=\dfrac{5arctg3x}{(x+4)^4}$; в) $y=\sqrt{(1+x^2)^3}+\dfrac{1}{\ln^2(2x+1)}$;

г) $y=x^{\arcsin x}$; д) $y=\dfrac{\sqrt[5]{(x+3)^2}\cdot(x+2)^5}{(x+5)^6}$;

е) $\sin(x+y)=\cos(x+y)$; ж) $x=arctgt,\ y=\dfrac{t^2}{2}$.

2. а) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\ln\sin7x}{\ln\sin2x}$; б) $\lim\limits_{x\to0}x^{\sin2x}$.

3. а) $y=2-3x^3+x^4$; б) $y=\dfrac{4}{1+x^2}$.

Варіант 25

1. а) $y=\dfrac{x^3}{\sin x}$; б) $y=e^{-4x}\cdot arctg2x$; в) $y=\sqrt[3]{3x+\cos x}-\ln tg\left(\dfrac{x}{3}\right)$;

г) $y=(\ln x)^{3x}$; д) $y=\dfrac{(x-9)^2\cdot\sqrt[3]{(x+5)^5}}{(x-5)^6}$;

е) $2y^3-5y+3x=b$; ж) $x=\sqrt{t},\ y=\sqrt[3]{t-1}$.

2. а) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^{x^2}-\cos x}{\sin x}$; б) $\lim\limits_{x\to0}(\sin2x)^x$.

3. а) $y=\dfrac{2}{3}x^3+\dfrac{1}{2}x^2$; б) $y=x+e^{-x}$..

Варіант 26

1. а) $y=(1+x)\sqrt{5+2x}$; б) $y=\dfrac{4\arccos2x}{(x-5)^4}$;

в) $\sqrt{1+4x^2}arctg2x+\ln^2\sin4x$; г) $y=(x^3-1)^{\sin x}$;

д) $y=\dfrac{(x+3)^2\cdot(x+4)^4}{\sqrt{(x-1)^5}}$; е) $x^3-3xy+y^2-1$; ж) $x=\sqrt{1+t^2}$, $y=\dfrac{1}{t}$.

2. а) $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^3-1}{\ln x}$; б) $\lim\limits_{x\to0}(tgx)^{\sin 2x}$;

3. а) $y=x^4-3x^3+2$; б) $y=x+e^{-x}$.

Варіант 27

1. а) $y=\sqrt{x+1}\cdot\ln 5x$; б) $y=\dfrac{7arctg2x}{(x+6)^4}$; в) $y=\sin^4 3x+x^2\arccos x$;

г) $y=\left(\sqrt{x}\right)^{ctgx}$; д) $y=\dfrac{(x-8)^2\cdot(x+4)^3}{\sqrt{(x+4)^5}}$;

е) $y^2+x^2=\sin y$; ж) $x=2\cos^2 t,\ y=3\sin^2 t.$

2. а) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^x-1}{\sin 3x}^{3}$; б) $\lim\limits_{x\to0}(\cos 5x)^{ctg^2 x}$.

3. а) $y=2x^3+9x^2+12x$; б) $y=\dfrac{x^2}{2\ln x}$.

Варіант 28

1. а) $y=x\sqrt{9-x^2}$; б) $y=\dfrac{\ln(6x+2)}{(x-3)^4}$; в) $y=e^{-\cos x}\arcsin 2x+tg^3\ln x$;

г) $y=\left(\sqrt{x}\right)^{\arcsin x}$; д) $y=\dfrac{(x-8)^4\cdot\sqrt[6]{(x+5)^5}}{(x-15)^8}$; е) $\sin y=xy^2+4$;

ж) $x=arctgt,\ y=\ln\left(1+t^2\right)$.

2. а) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{tgx-tg2x}{1-\cos x}$; б) $\lim\limits_{x\to0}\left(\ln(1+x)\right)^{tgx}$.

3. а) $y=2x^3+3x^2-5$; б) $y=\dfrac{(x-1)^2}{x+1}$.

Варіант 29

1. а) $y=\dfrac{\arcsin x}{tgx}$; б) $y=x^4\cdot\cos^2 x$; в) $y=arctg\left(\ln x\right)+\sin^3\left(\sqrt{x^2-1}\right)$;

г) $y=\left(tg2x\right)^{\cos 3x}$; д) $y=\dfrac{\left(x-3\right)^6\cdot\left(x+14\right)^5}{\sqrt{\left(x+6\right)^7}}$; е) $x^2+y^2=\sin y$;

ж) $x=\cos^3 t,\ y=\sin^3 t$.

2. а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-arctgx}{x^3}$; б) $\lim\limits_{x\to 0}\left(ctg2x\right)^{\frac{1}{\ln x}}$.

3. а) $y=-x^3+3x+2$; б) $y=\dfrac{\left(x+1\right)^2}{x-2}$.

Варіант 30

1. а) $y=\sqrt{x-1}\ln\left(2x+1\right)$; б) $y=\dfrac{2\arcsin 2x}{\left(x+4\right)^4}$; в) $y=arctgx^2+\sin\sqrt{x-\dfrac{1}{x}}$;

г) $y=\left(\dfrac{x}{x+4}\right)^{2x}$; д) $y=\dfrac{\left(x+2\right)^8\cdot\left(x+14\right)^3}{\sqrt{\left(x+3\right)^9}}$; е) $xy^2=ctgy$; ж) $\begin{cases}x=4\cos^3 t,\\ y=2\sin t.\end{cases}$

2. а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{tgx-x}{2\sin x+x}$; б) $\lim\limits_{x\to 1}\left(1-x\right)^{\ln x}$.

3. а) $y=2x^3+9x^2+12x$; б) $y=\dfrac{x^2}{\ln x}$.

Зразок виконання індивідуального завдання № 6

1. Знайти похідну y' для кожної з вказаних функцій.

2. Знайти границі за правилом Лопіталя.

3. Дослідити функцію та побудувати її графік.

Приклад 1. Знайти похідні y' для кожної з вказаних функцій:

а) $y=\sin\left(5x-2\right)\cdot\ln\left(4x+3\right)$; б) $y=\dfrac{\arcsin x}{x^2}$;

в) $y=\left(\cos 3x+arc\sin^2\sqrt{x}\right)^3$; г) $y=\left(4+x^3\right)^{tg4x}$;

д) $y=\sqrt[7]{\dfrac{(x-3)^5(x+1)^4}{x^3}}$; е) $x^2y^2=tgy$; ж) $x=\dfrac{1+t}{t^3}$, $y=\dfrac{3}{2t^2}+\dfrac{1}{2t}$.

Розв’язання.

а) для знаходження цієї похідної застосовуємо похідну добутку, похідну складеної функції та таблицю похідних, а саме:

$$y'=\left(\sin\left(5x-2\right)\right)'\cdot\ln\left(4x+3\right)+\sin\left(5x-2\right)\cdot\left(\ln\left(4x+3\right)\right)'=$$

$$=5\cos\left(5x-2\right)\cdot\ln\left(4x+3\right)+\sin\left(5x-2\right)\cdot\frac{4}{4x+3};$$

б) використовуючи правило знаходження похідної частки та таблицю похідних, маємо:

$$y'=\left(\frac{\arcsin x}{x^2}\right)'=\frac{\left(\arcsin x\right)'x^2-\left(x^2\right)'\arcsin x}{x^4}=$$

$$=\frac{\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}x^2-2x\arcsin x}{x^4}=\frac{x^2-2x\cdot\sqrt{1-x^2}\arcsin x}{x^4\sqrt{1-x^2}}=$$

$$=\frac{x-2\sqrt{1-x^2}\arcsin x}{x^3\sqrt{1-x^2}};$$

в) для знаходження похідної застосовуємо похідну складеної функції та таблицю похідних, а саме:

$$y'=3\left(\cos 3x+arc\sin^2\sqrt{x}\right)^2\cdot\left(\cos 3x+arc\sin^2\sqrt{x}\right)'=$$

$$=3\left(\cos 3x+arc\sin^2\sqrt{x}\right)^2\cdot\left(-\sin 3x\cdot 3+2arc\sin\sqrt{x}\cdot\frac{1}{\sqrt{1-\left(\sqrt{x}\right)^2}}\cdot\frac{1}{2\sqrt{x}}\right);$$

г) при знаходженні похідних степенево-показникових функцій, а також деяких інших алгебраїчних функцій, доцільно ці функції спочатку прологарифмувати, а потім знаходити похідну.

Знайдемо логарифм заданої функції: $\ln y = tg 4x \cdot \ln\left(4 + x^3\right)$.

Диференціюємо обидві частини цієї рівності:

$$\frac{1}{y} \cdot y' = \frac{4}{\cos^2 4x} \cdot \ln\left(4 + x^3\right) + tg 4x \cdot \frac{1}{4 + x^3} \cdot 3x^2 .$$

Звідси

$$y' = y \cdot \left(\frac{4}{\cos^2 4x} \cdot \ln\left(4 + x^3\right) + tg 4x \cdot \frac{3x^2}{4 + x^3} \right).$$

Отже, $y' = \left(4 + x^3\right)^{tg 4x} \cdot \left(\frac{4}{\cos^2 4x} \cdot \ln\left(4 + x^3\right) + tg 4x \cdot \frac{3x^2}{4 + x^3} \right)$;

д) прологарифмуємо обидві частини:

$$\ln y = \frac{1}{7}\left(5\ln(x-3) + 4\ln(x+1) - 3\ln x\right).$$

Беремо похідну від обох частин:

$$\frac{1}{y} y' = \frac{1}{7}\left(\frac{5}{x-3} + \frac{4}{x+1} - \frac{3}{x} \right).$$

Звідки

$$y' = \frac{1}{7}\sqrt[7]{\frac{(x-3)^5 (x+1)^4}{x^3}} \left(\frac{5}{x-3} + \frac{4}{x-1} - \frac{3}{x} \right);$$

е) диференціюємо обидві частини рівняння, враховуючи, що y є функцією від x:

$$2xy^2 + x^2 \cdot 2y \cdot y' = \frac{1}{\cos^2 y} \cdot y' .$$

Розв'яжемо рівняння відносно y':

$$y'\left(\frac{1}{\cos^2 y}-2x^2y\right)=2xy^2, \text{ або } y'\left(\frac{1-2x^2y\cos^2 y}{\cos^2 y}\right)=2xy^2.$$

Звідки

$$y'=\frac{2xy^2\cos^2 y}{1-2x^2y\cos^2 y};$$

ж) для функції, що задана параметрично, похідну знаходимо за формулою:

$$y_x{}'=\frac{y_t'}{x_t'}.$$

Тоді:

$$y_t'=\frac{3}{2}\left(-2\cdot t^{-3}\right)-\frac{1}{2t^2}=-\frac{3}{t^3}-\frac{1}{2t^2}=\frac{-6-t}{2t^3};$$

$$x_t'=\frac{t^3-(1+t)\cdot 3t^2}{t^6}=\frac{-2t^3-3t^2}{t^6}=\frac{-2t-3}{t^4}.$$

Отже,

$$\frac{dy}{dx}=\frac{(6+t)\cdot t^4}{2t^3(2t+3)}=\frac{(6+t)\cdot t}{2(2t+3)}.$$

Приклад 2. Знайти границі за правилом Лопіталя:

а) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^3-1-\ln x}{e^x-e}$; б) $\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\ln x}$.

Розв'язання.

а) якщо x прямує до 1, то чисельник і знаменник прямують до нуля, тобто маємо невизначеність виду $\left|\frac{0}{0}\right|$. Застосуємо правило Лопіталя, тобто розглянемо границю відношення похідних функцій:

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^3-1-\ln x}{e^x-e}=\lim_{x\to 1}\frac{3x^2-\frac{1}{x}}{e^x}=\frac{2}{e};$$

б) якщо $x \to 0$, то маємо невизначеність вигляду 1^{∞}. Позначимо задану функцію через y і прологарифмуємо:

$$y = (1+x)^{\ln x}, \ \ln y = \ln x \cdot \ln(1+x).$$

Знаходимо границю за правилом Лопіталя, але треба врахувати щоб була невизначеність вигляду $\left|\frac{\infty}{\infty}\right|$ або $\left|\frac{0}{0}\right|$.

$$\lim_{x\to 0} \ln y = \lim_{x\to 0} \ln x \cdot \ln(1+x) = \lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)}{\frac{1}{\ln x}} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{1}{1+x}}{-\frac{1}{x\ln^2 x}} = -\lim_{x\to 0} \frac{x\ln^2 x}{1+x} =$$

$$= -\lim_{x\to 0} \frac{\ln^2 x}{\frac{1}{x}+1} = -\lim_{x\to 0} \frac{2\ln x \cdot \frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x\to 0} \frac{2\ln x}{\frac{1}{x}} = 2\lim_{x\to 0} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = -2\lim_{x\to 0} x = 0.$$

Таким чином, $\lim\limits_{x\to 0} \ln y = 0$.

Далі, $\ln \lim\limits_{x\to 0} y = 0$, та звідки $\lim\limits_{x\to 0} y = e^0 = 1$.

Приклад 3. Дослідити функцію та побудувати її графік:

а) $y = \frac{1}{3}x^3 - \frac{3}{2}x^2 - 4x + 10$, б) $y = \frac{2x^2}{x-1}$.

Розв'язання.

а) розглянемо функцію $y = \frac{1}{3}x^3 - \frac{3}{2}x^2 - 4x + 10$.

1. Область визначення: $x \in R$, бо задана функція – многочлен.

2. Функція не є парною і не є непарною, оскільки:

$$f(x) = \frac{1}{3}x^3 - \frac{3}{2}x^2 - 4x + 10,$$

а $f(-x) = -\frac{1}{3}x^3 - \frac{3}{2}x^2 + 4x + 10.$

3. Точки перетину з осями координат: з віссю Oy: $x=0$, $y=10$;

з віссю Ox: $y=0$, $\frac{1}{3}x^3-\frac{3}{2}x^2-4x+10=0.$

Розв'язання останнього рівняння утруднене, тому точки перетину з віссю Ox знайдемо наближено при побудові графіка.

4. Проміжки монотонності і екстремуми функції.

$$y'=\frac{1}{3}\cdot 3x^2-\frac{3}{2}\cdot 2x-4=x^2-3x-4.$$

Критичні точки знаходимо з рівняння $x^2-3x-4=0$.

Це $x=-1$ і $x=4$.

Тоді похідну можна записати так: $y'=(x+1)(x-4)$.

Наносимо критичні точки на числову вісь (рис. 10). Одержуємо три проміжки. Визначаємо знак похідної і поведінку функції на кожному з проміжків.

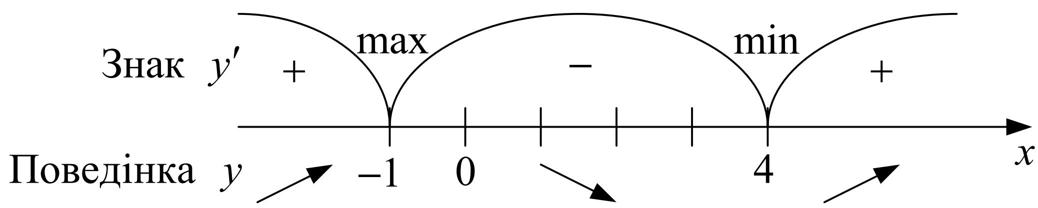

Рис. 10. **Проміжки монотонності та поведінка функції**

$$y_{\max}(-1)=-\frac{1}{3}-\frac{3}{2}+4+10=12\frac{1}{6};$$

$$y_{\min}(4)=\frac{1}{3}\cdot 64-\frac{3}{2}\cdot 16-4\cdot 4+10=-8\frac{2}{3}.$$

5. Проміжки опуклості, угнутості і точки перегину.

$$y''=\left(x^2-3x-4\right)'=2x-3.$$

Якщо $y''=0$, то $x=\frac{3}{2}$.

Знайдемо знак y'' зліва і справа від цієї точки (рис. 11).

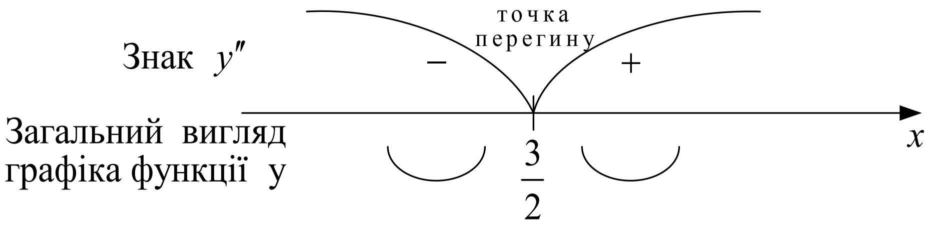

Рис. 11. **Проміжки опуклості графіка функції**

При $x=\frac{3}{2}$ $y=\frac{1}{3}\cdot\frac{27}{8}-\frac{3}{2}\cdot\frac{9}{4}-4\cdot\frac{3}{2}+10=1\frac{3}{4}$.

6. Будуємо графік функції (рис. 12). При цьому використовуємо контрольні обчислення.

$$y(-2)=9\frac{1}{3},\ y(6)=4.$$

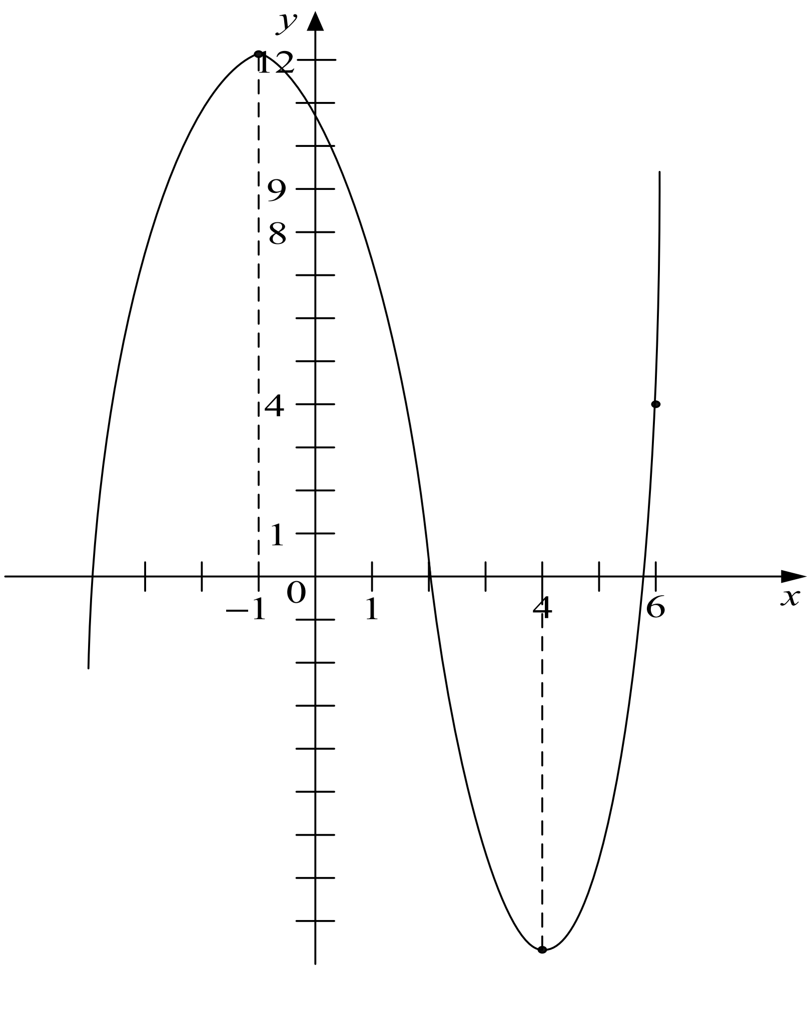

Рис. 12. **Графік функції**

б) розглянемо функцію $y=\dfrac{2x^2}{x-1}$;

1. Область визначення:

$$D(y)=(-\infty;1)\cup(1;+\infty).$$

2. Функція не є ні парною, ні непарною.

3. При $x=0$, $y=0$.

4. Проміжки монотонності і екстремуми функції:

$$y'=\frac{4x(x-1)-2x^2}{(x-1)^2}=\frac{2x(x-2)}{(x-1)^2}.$$

$y'=0$ при $x=0$ і $x=2$.

Досліджуємо ці точки на екстремум (рис. 13).

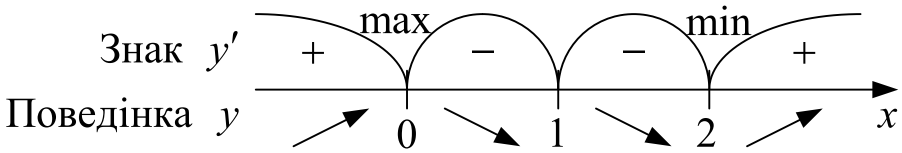

Рис. 13. **Проміжки монотонності і екстремуми функції** $y=\dfrac{2x^2}{x-1}$.

$$y_{\max}(0)=0,\quad y_{\min}(2)=8.$$

5. Проміжки опуклості, угнутості і точки перегину.

$$y''=\frac{(4x-4)(x-1)^2-2(x-1)\left(2x^2-4x\right)}{(x-1)^4}=\frac{4}{(x-1)^3}.$$

Оскільки $y\neq 0$, то точок перегину немає.

При $x>1$ $y''>0$ – графік угнутий, при $x<1$ $y''<0$ – графік опуклий.

6. Асимптоти.

Пряма $x=1$ є вертикальна асимптота, оскільки

$$\lim_{x\to 1-0}\frac{2x^2}{x-1}=-\infty \text{, а } \lim_{x\to 1+0}\frac{2x^2}{x-1}=+\infty .$$

Знайдемо похилі асимптоти $y=kx+b$:

$$k=\lim_{x\to\infty}\frac{y}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{2x^2}{x(x-1)}=2;$$

$$b=\lim_{x\to\infty}(y-kx)=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{2x^2}{x-1}-2x\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{2x}{x-1}=2.$$

Отже, $y=2x+2$ – є похила асимптота.

7. Будуємо графік заданої функції (рис. 14).

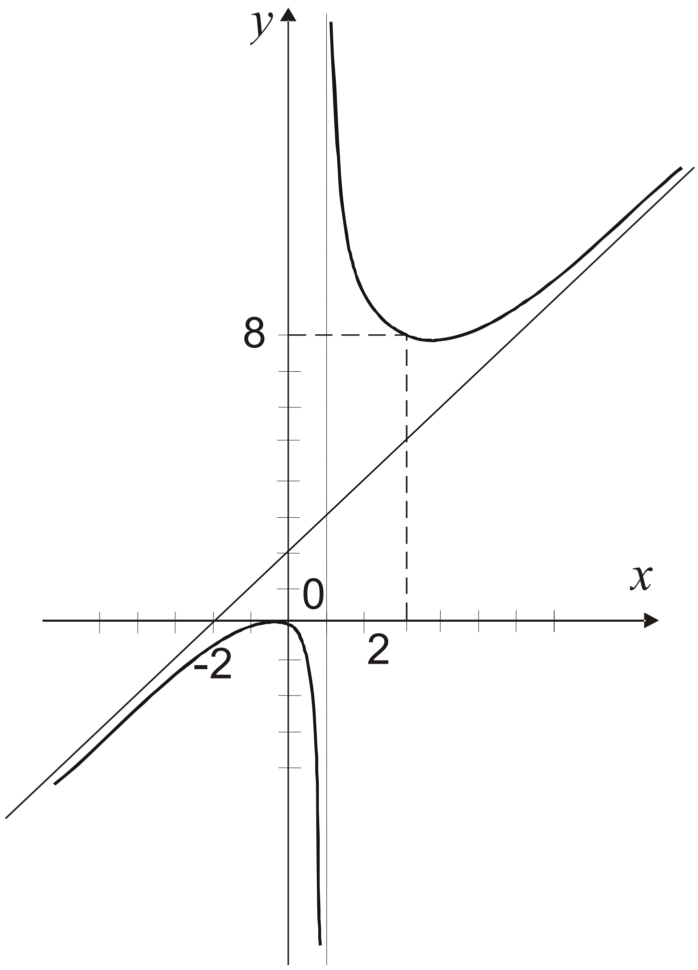

Рис. 14. **Графік функції** $\boldsymbol{y=\frac{2x^2}{x-1}}$

Індивідуальне завдання № 7
Основні поняття функції багатьох змінних та її інтерпретація в економічній теорії. Диференційованість функції багатьох змінних. Екстремум та умовний екстремум функції багатьох змінних.

Зміст завдання

1. Знайти і зобразити геометрично область визначення функції $z = f(x, y)$.

2. Знайти градієнт функції $z = f(x, y)$ у точці M і похідну за напрямом вектора $\overline{a}$.

3. Довести, що функція $z = f(x, y)$ задовольняє задане рівняння.

4. Знайти екстремум функції.

5. Знайти найбільше і найменше значення функції $z = f(x, y)$ у замкненій області D.

Варіант 1

1. $z = \arcsin\left(x^2 + y^2 - 16\right)$.

2. $z = \sqrt{\dfrac{y}{x} + xy}$, $M(1; 2)$, $\overline{a} = (2; 5)$.

3. $z = e^{xy}$, $x^2 \dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2} - y^2 \dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0$.

4. $z = e^{-\frac{y}{2}}(x^2 - y)$.

5. $z = 2x^3 + 4x^2 - y^2 - 2xy$, $D: \left\{y \ge x^2, y \le 4\right\}$.

Варіант 2

1. $z = \sqrt{9 - x^2 - y^2} + \sqrt{x^2 - 4}$.

2. $z = x + y - \sqrt{x^2 + y^2}$, $M(3; 4)$, $\overline{a} = (2; -4)$.

3. $z = \sin^2(x - ay)$, $a^2 \dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}$.

4. $z = xy \ln(x^2 + y^2)$.

5. $z = x^2 + 3y^2 - x + 18y - 4$, $D: \left\{0 \le x \le 4, 0 \le y \le 4\right\}$.

Варіант 3

1. $z = \ln(4 - y) + \sqrt{25 - x^2 - y^2}$.
2. $z = \sin^2(3x + 2y)$, $M(2; -3)$, $\overline{a} = (1; -4)$.
3. $z = e^{-\cos(x + ay)}$, $\quad a^2 \dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}$.
4. $z = e^{-\frac{x}{2}}(y^2 - x)$.
5. $z = (x - y)^2 \cdot \sqrt[3]{(x-1)^2}$, $D: \{y^2 \le x \le 2\}$.

Варіант 4

1. $z = \ln\left(9 - 3x - y^2 + \sqrt{x+1}\right)$.
2. $z = e^{\sqrt{\cos 2x + 3y}}$, $M\left(\dfrac{\pi}{4}; 0\right)$, $\overline{a} = (3; -4)$.
3. $z = e^{\frac{x}{y}}$, $\quad \dfrac{\partial z}{\partial y} - \dfrac{\partial z}{\partial x} = y\dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$.
4. $z = 8x^3 - y^3 - 12xy - 1$.
5. $z = x^2 - y^2 + 18$, $D: \{x^2 + y^2 \le 9\}$.

Варіант 5

1. $z = \log_2(y^2 - 2x + 4) + \dfrac{1}{\sqrt{2 - x}}$..
2. $z = e^{\sin x - 2y^3}$, $M(\pi; 0)$, $\overline{a} = (2; 1)$.
3. $z = yx\ln(x + y)$, $\quad \dfrac{\partial^3 z}{\partial y \partial x^2} = \dfrac{\partial^3 z}{\partial x \partial y \partial z}$.
4. $z = e^{-\frac{x}{2}}(x^2 + y^2)$.
5. $z = x^2 + 2xy - 3y^2 + y$, $D: \{0 \le x \le 1,\ 0 \le y \le 1,\ 0 \le x + y \le 1\}$.

Варіант 6

1. $z=\sqrt{1-\dfrac{x^2}{4}-y^2}+\sqrt{y-x}$.

2. $z=arctg\,\dfrac{y}{x}$, $M(2;1)$, $\bar{a}=(1;-2)$.

3. $z=y^{x^2}+x^{y^2}$, $\qquad \dfrac{\partial^3 z}{\partial y\partial x^2}=\dfrac{\partial^3 z}{\partial x\partial y\partial z}$.

4. $z=2x^3+6xy^2-30x-24y+1$.

5. $z=x^2-2y^2+4xy-6x-1$, $D:\{x\ge 0,\ \ y\ge 0,\ \ x+y\le 3\}$.

Варіант 7

1. $z=\log_{0,3}(3x-4y+12)+\sqrt{x^2-4}$.

2. $z=e^{\sqrt{3y+\sin 2x}}$, $M\left(\dfrac{\pi}{4};0\right)$, $\bar{a}=(2;1)$.

3. $z=e^x(\cos y+x\sin y)$, $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\dfrac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}$.

4. $z=2y\sqrt{x}-y^2-3x+8y$.

5. $z=2x^2+y^2-x$, $D:\left\{\dfrac{y^2}{3}+x^2\le 1\right\}$.

Варіант 8

1. $z=\sqrt{1-x^2}+\dfrac{1}{\sqrt{4-y^2}}$.

2. $z=e^{\sin x-2y^3}$, $M(\pi;0)$, $\bar{a}=(3;1)$.

3. $z=\arccos\sqrt{\dfrac{x}{y}}$, $\qquad \dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\dfrac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}$.

4. $z=e^{-\frac{x}{4}}(5x^2-y^2)$.

5. $z=x^3+y^3-3xy$, $D:\{0\le x\le 2,\ \ -1\le y\le 2\}$.

Варіант 9

1. $z = \ln(xy) + \arcsin x$.
2. $z = \sqrt[3]{x + y^2}$, $M(4;2)$, $\bar{a} = (2;-2)$.
3. $z = \dfrac{x^2 y^2}{x^2 + y^2}$, $\qquad x\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2} + y\dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \dfrac{\partial z}{\partial x}$.
4. $z = 2x^3 + y^2 + 6xy + 12x - 2$.
5. $z = 1 + 3x^2 + 2y^3$, $D: \{x \ge 0,\ \ y \ge 0,\ \ x + y \le 1\}$.

Варіант 10

1. $z = \dfrac{\sqrt{y - x}}{\lg(9 - x^2 - y^2)}$.
2. $2tg\left(x - \dfrac{y}{2}\right)$, $M(\pi;0)$, $\bar{a} = (8;-4)$.
3. $z = \dfrac{x^2 + xy}{2y} + \dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{y}$, $\qquad x^2\dfrac{\partial z}{\partial x} + y^2\dfrac{\partial z}{\partial y} = \dfrac{x^2}{y}$.
4. $z = x^2 - 4x\sqrt{y} - 2x + 5y + 3$.
5. $z = x^2 + y^2 - xy + x + y$, $D: \{x \le 0,\ \ y \le 0,\ \ x + y \ge -3\}$.

Варіант 11

1. $z = \ln(x^2 + x - 2 - y) - \sqrt{1 - y^2}$.
2. $z = \ln\left(x + \dfrac{y}{2x}\right)$, $M(1;2)$, $\bar{a} = (-4;3)$.
3. $z = \dfrac{xy}{x - y}$, $\quad \dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2} + 2\dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + \dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \dfrac{2}{x - y}$.
4. $z = x^3 - 8y^3 - 6xy + 5$.
5. $z = 2x^2 - 2y^2$, $D: \{x^2 + y^2 \le 9\}$.

Варіант 12

1. $z=\sqrt{xy}-\sqrt{4-x^2-y^2}$.

2. $z=x^2y+ye^{\frac{x}{y}}$, $M(0;1)$, $\overline{a}=(4;-3)$.

3. $z=y\sin(x^2-y^2)$, $\quad \frac{1}{x}\cdot\frac{\partial z}{\partial x}+\frac{1}{y}\cdot\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{z}{y^2}$.

4. $z=x^3-xy^2+3x^2+y^2-1$.

5. $z=3xy$, $D:\left\{x^2+y^2\le 2\right\}$.

Варіант 13

1. $z=\arcsin(x-1)+\sqrt{y-2x}$.

2. $z=e^{tg\left(y^3-2x\right)}$, $M\left(\frac{1}{2};1\right)$, $\overline{a}=(-5;1)$.

3. $z=x^y$, $\quad y\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=(1+y\ln x)\frac{\partial z}{\partial x}$.

4. $z=-\frac{1}{2}x^2+8xy-y^3-13x-12y$.

5. $z=1+x^2+2y^2$, $\quad D:\left\{x\ge 0,\ \ y\ge 0,\ \ x-y\le 1\right\}$.

Варіант 14

1. $z=\log_2(y^2-4x+8)+\sqrt{5-x}$.

2. $z=\sqrt{\frac{y}{x}+xy}$, $M(1;2)$, $\overline{a}=(2;-6)$.

3. $z=arctg\frac{x+y}{1-xy}$, $\quad \frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=0$.

4. $z=x^2+xy+y^2-4\ln x-10\ln y$.

5. $z=2x^2+3y^2-x-7y$, $D:\left\{x\ge 0,\ \ y\ge 0,\ \ x+y\le 1\right\}$.

Варіант 15

1. $z=\sqrt{1-\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{4}}+\sqrt{1-y^2}$.
2. $z=ytg\left(x+1\right)$, $M\left(-1;1\right)$, $\overline{a}=\left(-4;-4\right)$.
3. $z=x^y$, $\frac{x}{y}\cdot\frac{\partial z}{\partial x}+\frac{1}{\ln x}\cdot\frac{\partial z}{\partial y}=2z$.
4. $z=xy^2+x^3+6xy$.
5. $z=1-x+24y-6x^2+y^2$, $D:\left\{y^2\geq x,\ \ x\leq 1\right\}$.

Варіант 16

1. $z=\sqrt{y-\sqrt{x}}+\sqrt{4-x-y}$.
2. $z=tg\frac{x^2}{y}+y$, $M\left(0;1\right)$, $\overline{a}=\left(-5;-2\right)$.
3. $z=\ln\left(x^2+(y-2)^2\right)$, $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0$.
4. $z=x^2-2xy+2y^3-y^4$.
5. $z=2xy-3x^2-2y^2+10$, $D:\left\{y\geq x,\ \ y\leq 1,\ \ x\geq 0\right\}$.

Варіант 17

1. $z=\sqrt{x-\sqrt{y}}-\sqrt{2-x-y}$.
2. $z=tg\left(x^2y-\ln x\right)$, $M\left(1;\pi\right)$, $\overline{a}=\left(6;8\right)$.
3. $z=\ln\frac{1}{\sqrt{\left(x-a\right)^2-\left(y-b\right)^2}}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0$.
4. $z=e^{-2x^2}\left(x-y^2\right)$.
5. $z=2xy-3x^2-2y^2+10$, $D:\left\{y\geq x,\ \ y\leq 1,\ \ x\geq 0\right\}$.

Варіант 18

1. $z = \sqrt{1 - \frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{9}} + \sqrt{y - 2x}$.

2. $z = \left(1 + \ln\sin\left(xy^2\right)\right)^3$, $M\left(\frac{\pi}{2}; 1\right)$, $\overline{a} = (2; 3)$.

3. $z = \cos^2\left(x - 3y\right)$, $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} + 9\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 0$.

4. $z = e^{\frac{x}{2}}(x + y^2)$.

5. $z = x^3 + 8y^2 - 6xy + 5$, $D: \{x - y + 1 \geq 0, \ \ x \leq 0, \ \ y \geq 0\}$.

Варіант 19

1. $z = \frac{1}{\sqrt{x - y^2}} - 2\sqrt{x + y + 2}$.

2. $z = \sqrt{xy + \frac{x}{y}}$, $M\left(2; 1\right)$, $\overline{a} = \left(7; 1\right)$.

3. $z = \ln\left(\frac{y}{x} - 1\right)$, $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{x^2}{y^2 - 2xy} \cdot \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0$.

4. $z = -2x^3 + 3x\sqrt{y} + 18x - 1{,}5y$.

5. $z = 1 + 6x - x^{2 - xy - y^2}$, $D: \{x + y \geq 1, \ \ x \leq 1, \ \ y \leq 1\}$.

Варіант 20

1. $z = \arccos y + \ln(y - x^2 + 4)$.

2. $z = \frac{x\cos y - y\cos x}{1 + \sin x + \sin y}$, $M\left(0; 0\right)$, $\overline{a} = \left(-2; -5\right)$.

3. $z = 2\cos^2\left(x - \frac{y}{2}\right)$, $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + 2\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0$.

4. $z = x^3 - 5xy + 5y^2 + 7x - 15y + 1$.

5. $z = \left(x - y\right)^2 + \left(y - 1\right)^3$, $D: \{y \geq x, \ \ x \geq 1, \ \ y \leq 2\}$.

Варіант 21

1. $z = \ln\left(3 - x^2 - 2x + y\right) + \sqrt{2 - y}$.
2. $z = \left(\ln\sin\left(x^2 y\right) + 1\right)^5$, $M\left(1; \dfrac{\pi}{2}\right)$, $\overline{a} = (7; 4)$.
3. $z = xe^{-\frac{y}{x}}$, $x\dfrac{\partial z}{\partial x \partial y} + 2\left(\dfrac{\partial z}{\partial x} + \dfrac{\partial z}{\partial y}\right) = y\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}$.
4. $z = x^3 + 6xy + 3y^2 - 18x - 18y + 3$.
5. $z = 4(x - y) - x^2 - y^2$, $D:\{x - y \geq 0,\ x \geq 0,\ 1 \leq y \leq 2\}$.

Варіант 22

1. $z = \arcsin\dfrac{x+2}{3} + \sqrt{y - x}$.
2. $z = e^{tg\left(x^3 - 2y\right)}$, $M\left(1; \dfrac{1}{2}\right)$, $\overline{a} = (-1; -3)$.
3. $z = \ln\left(\dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{y}\right)$, $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + \dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \dfrac{1}{x^2}$.
4. $z = x^3 - 7x^2 + xy - y^2 + 9x + 3y + 12$.
5. $z = x^2 + y^2 - 6x + 4y + 2$, $D:\{1 \leq x \leq 4,\ -3 \leq y \leq 2\}$.

Варіант 23

1. $z = \sqrt{x^2 + y^2 - 1} + \ln\left(4 - x^2 - y^2\right)$.
2. $z = \dfrac{x\cos y - y\cos x}{1 + \sin x + \sin y}$, $M(0; 0)$, $\overline{a} = (-1; -5)$.
3. $z = arctg(2x - y)$, $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2} + 2\dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = 0$.
4. $z = e^{\frac{x}{2}}\left(x + y^2\right)$.
5. $z = (x - 1)^2 - 2y^2$, $D:\{y \leq x,\ x \leq 1,\ y \geq 0\}$.

Варіант 24

1. $z=\sqrt{x+y}\,\ln\left(y^2-x^2\right)$.
2. $z=arctg\left(x-3y\right)$, $M\left(3;1\right)$, $\overline{a}=\left(12;-3\right)$.
3. $z=arctg\dfrac{y}{x}$, $\quad x\dfrac{\partial z}{\partial x}+y\dfrac{\partial z}{\partial y}=0$.
4. $z=3x^2-2y\sqrt{x}+0{,}5y^2-56x+2$.
5. $z=x^3+y^2-3x-3$, $D:\left\{y\le x,\ \ x\le 1,\ \ y\ge 0\right\}$.

Варіант 25

1. $z=\ln\left(y^2-x\right)+\sqrt{2-x-y}$.
2. $z=\dfrac{\cos\left(x-2y\right)}{\cos\left(x+2y\right)}$, $M\left(\dfrac{\pi}{4};\pi\right)$, $\overline{a}=\left(3;-2\right)$.
3. $z=\dfrac{y^2}{3x}+\arcsin\left(xy\right)$, $\qquad x^2\dfrac{\partial z}{\partial x}-xy\dfrac{\partial z}{\partial y}+y^2=0$.
4. $z=3x^3+7xy-3{,}5y^2-60x+3$.
5. $z=x^2+4y^2$, $D:\left\{x^2+y^2\le 1\right\}$.

Варіант 26

1. $z=\dfrac{1}{\sqrt{y-2x}}+\dfrac{1}{\sqrt{y+2x}}$.
2. $z=e^{tg\left(y^3-2x\right)}$, $M\left(\dfrac{1}{2};1\right)$, $\overline{a}=\left(4;-5\right)$.
3. $z=\dfrac{xy}{x-y}$, $\quad \dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}+2\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}+\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}=\dfrac{1}{x-y}$.
4. $z=3x^2-2x\sqrt{y}+y-8x+8$.
5. $z=x^2+xy+y^2-2x-y$, $D:\left\{-1\le x\le 1,\ -2\le y\le 2\right\}$.

Варіант 27

1. $z=\sqrt{y(x-2)}+\ln(x+1)$.
2. $z=xy+x\cdot e^{\sqrt{\frac{y}{x}}}$, $M(1;0)$, $\overline{a}=(-3;2)$.
3. $z=xe^{y}+ye^{x}$, $\dfrac{\partial^3 z}{\partial x^3}+\dfrac{\partial^3 z}{\partial y^3}=x\cdot\dfrac{\partial^3 z}{\partial x\partial y^2}+y\dfrac{\partial^3 z}{\partial x^2\partial y}$.
4. $z=3x+6y-x^2-xy-y^2+7$.
5. $z=x^2+y^2-4y+4$, $D:\{x+y\ge 0,\ \ y\le 1,\ \ x\le 0\}$.

Варіант 28

1. $z=\sqrt{x^2-4}+\sqrt{y^2-4}$.
2. $z=\ln\left(x+\sqrt{x^2+y^2}\right)$, $M(1;0)$, $\overline{a}=(3;-1)$.
3. $z=2\cos^2\left(y-\dfrac{x}{2}\right)$, $2\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=0$.
4. $z=y\sqrt{x}-y^2-x+6y$.
5. $z=2x^3+xy^2+5x^2+y^2$, $D:\{-1\le x\le 0,\ \ 0\le y\le 2\}$.

Варіант 29

1. $z=\arcsin\dfrac{x}{2}+\sqrt{xy}$.
2. $z=\ln\left(y+\dfrac{x}{2y}\right)$, $M(2;1)$, $\overline{a}=(-5;2)$.
3. $z=\ln tg\dfrac{x}{y}$, $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\dfrac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}$.
4. $z=2+(x-y)^2+(y-1)^4$.
5. $z=x^3+y^2-3x-3$, $D:\{y\le x,\ \ y\ge 0,\ \ x\le 1\}$.

Варіант 30

1. $z=\sqrt{x^2+y^2-1}+\ln\left(4-x^2\right)$.

2. $z=\ln\cos\dfrac{y}{x}$, $M\left(1;\dfrac{\pi}{4}\right)$, $\overline{a}=(1;-4)$.

3. $z=\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}$, $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0$.

4. $z=x\sqrt{y}-x^2-y+6x+3$.

5. $z=\dfrac{xy}{2}-\dfrac{x^2y}{3}-\dfrac{xy^2}{2}$, $D:\left\{x\ge 0,\ \ y\le 0,\ \ \dfrac{x}{3}+\dfrac{y}{4}\le 1\right\}$.

Зразок виконання індивідуального завдання № 7

Приклад 1. Знайти і зобразити геометрично область визначення функції

$$z=\frac{\sqrt{2x-y^2}}{\log_3\left(4-x^2-y^2\right)}.$$

Розв'язання. Область визначення заданої функції зводиться до графічного розв'язання системи нерівностей:

$$\begin{cases}2x-y^2\ge 0,\\ 4-x^2-y^2>0,\\ 4-x^2-y^2\ne 1,\end{cases}\text{ або }\begin{cases}y^2\le 2x,\\ x^2+y^2<4,\\ x^2+y^2\ne 3.\end{cases}$$

Побудуємо графіки функцій: $y^2=2x$ (парабола), $x^2+y^2=4$ (коло), а далі знайдемо області, які задовольняють кожну з нерівностей та їх перетин (рис. 15).

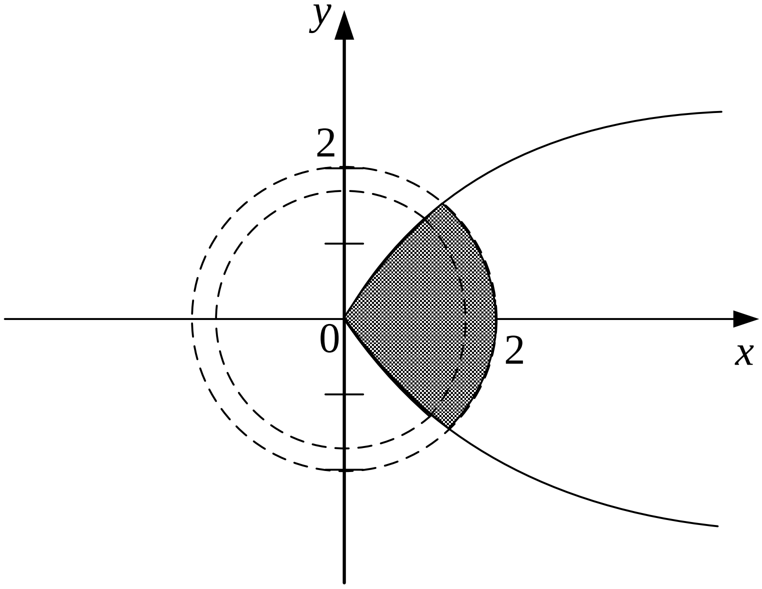

Рис 15. **Графічне розв'язання системи нерівностей**

Приклад 2. Знайти градієнт функції $z = xtg\left(y+1\right)$ в точці $M\left(1;-1\right)$ та похідну за напрямом вектора $\overline{a} = \left(-5;4\right)$.

Розв'язання. Знайдемо спочатку частинні похідні даної функції:

$\frac{\partial z}{\partial x} = tg\left(y+1\right)$, $\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{x}{\cos^2\left(y+1\right)}$ та обчислимо їх значення в точці $M\left(1;-1\right)$.

$$\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_M = tg\left(-1+1\right) = tg0 = 0; \qquad \left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_M = \frac{1}{\cos^2\left(-1+1\right)} = \frac{1}{\cos^2 0} = 1.$$

Отже, $\left.gradz\right|_M = 0\cdot\overline{i} + 1\cdot\overline{j} = \left(0;1\right)$.

Похідна за напрямом обчислюється за формулою

$$\left.\frac{\partial z}{\partial l}\right|_M = \left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_M \cdot\cos\alpha + \left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_M \cdot\cos\beta,$$

де $\cos\alpha = \frac{a_x}{\left|\overline{a}\right|} = \frac{-5}{\sqrt{25+16}} = \frac{-5}{\sqrt{41}}$, $\cos\beta = \frac{a_y}{\left|\overline{a}\right|} = \frac{4}{\sqrt{25+16}} = \frac{4}{\sqrt{41}}$.

Тоді, $\left.\frac{\partial z}{\partial l}\right|_M = 0\cdot\left(\frac{-5}{\sqrt{41}}\right) + 1\cdot\frac{4}{\sqrt{41}} = \frac{4}{\sqrt{41}}$.

Приклад 3. Довести, що функція $z = \ln\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{y}\right)$ задовольняє рівняння $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{1}{x^2}$.

Розв’язання. Перетворимо функцію $z = \ln\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{y}\right)$ до вигляду:

$$z = \ln\frac{y-x}{xy} = \ln(y-x) - \ln x - \ln y.$$

Знайдемо частинні похідні цієї функції:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{-1}{y-x} - \frac{1}{x}, \qquad \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{-1}{(y-x)^2} + \frac{1}{x^2}; \qquad \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{1}{(y-x)^2}.$$

$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{1}{(y-x)^2} - \frac{1}{(y-x)^2} + \frac{1}{x^2} = \frac{1}{x^2}$, що й треба було довести.

Приклад 4. Знайти екстремуми функції $z = x^3 + 3xy^2 - 15x - 12y$.

Розв’язання. Знаходимо частинні похідні першого порядку:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 3x^2 + 3y^2 - 15; \qquad \frac{\partial z}{\partial y} = 6xy - 12.$$

Критичні точки одержуємо з системи рівнянь:

$$\begin{cases} 3x^2 + 3y^2 - 15 = 0, \\ 6xy - 12 = 0, \end{cases} \quad \text{або} \quad \begin{cases} x^2 + y^2 = 5, \\ xy = 2. \end{cases}$$

Розв’язуючи цю систему, отримуємо чотири критичні точки:

$M_1(1; 2)$, $M_2(2; 1)$, $M_3(-1; -2)$, $M_4(-2; -1)$.

Дослідимо ці точки на екстремум. Для цього спочатку знаходимо частинні похідні другого порядку й обчислюємо їх значення в критичних точках:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 6x, \qquad \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = 6y, \qquad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 6x.$$

Позначимо $A_1 = \left.\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}\right|_{M_1} = 6$, $B_1 = \left.\dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}\right|_{M_1} = 12$, $C_1 = \left.\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}\right|_{M_1} = 6$.

Для цієї точки $\Delta_1 = A_1 C_1 - B_1^2 = 36 - 12^2 = -108 < 0$, що означає, що екстремуму в точці $M_1(1;2)$ немає.

Аналогічно знаходимо для точки $M_2(2;1)$:

$A_2 = 12$, $B_2 = 6$, $C_2 = 12$, тоді $\Delta_2 = A_2 C_2 - B_2^2 = 144 - 36 = 108 > 0$ і точка $M_2(2;1)$ – це точка мінімуму, бо $A_2 = 12 > 0$.

$z_{\min}(2;1) = 8 + 6 - 30 - 12 = -28$.

Для точки $M_3(-1;-2)$: $A_3 = -6$, $B_3 = -12$, $C_3 = -6$,

$\Delta_3 = A_3 C_3 - B_3^2 = (-6)\cdot(-6) - (-12)^2 = -108 < 0$ і в точці $M_3(-1;-2)$ екстремуму немає.

Для точки $M_4(-2;-1)$: $A_4 = -12$, $B_4 = -6$, $C_4 = -12$,

$\Delta_4 = A_4 C_4 - B_4^2 = (-12)\cdot(-12) - (-6)^2 = 108 > 0$ і точка $M_4(-2;-1)$ є точкою максимуму, бо $A_4 = -12 < 0$.

$z_{\max}(-2;-1) = -8 - 6 + 30 + 12 = 28$.

Таким чином, задана функція має два екстремуми: мінімум у точці $M_2(2;1)$ $(z_{\min} = -28)$ та максимум у точці $M_4(-2;-1)$ $(z_{\max} = 28)$.

Приклад 5. Знайти найбільше та найменше значення функції $z = (x-1)^2 + 2y^2$ у трикутнику з вершинами в точках $A(1;0)$, $B(0;1)$, $C(1;1)$.

Розв'язання. Побудуємо трикутник ABC (рис. 16). Область D (трикутник ABC) обмежена прямими:

$y = 1$ (BC), $x = 1$ (AC), $x + y = 1$ (AB).

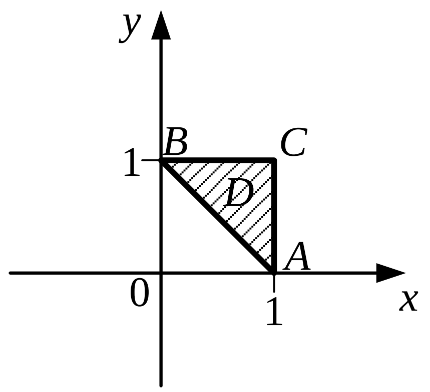

Рис. 16. **Графічне зображення області**

Знайдемо критичні точки в області D та на її границі.
Розв'яжемо систему рівнянь:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial z}{\partial x} = 0, \\ \dfrac{\partial z}{\partial y} = 0, \end{cases} \quad \begin{cases} 2(x-1) = 0, \\ 4y = 0, \end{cases} \quad \begin{cases} x = 1, \\ y = 0. \end{cases}$$ — це точка $A(1;0)$, а $z(1;0) = 0$.

Дослідимо функцію z на границі області.

а) пряма AC: $x = 1$, тоді $z = 2y^2$, де $y \in [0;1)$.

$$z\left(\underset{x=1}{y=0}\right) = 0; \quad z\left(\underset{x=1}{y=1}\right) = 2,$$ або $z(A) = 0$, $z(C) = 2$;

б) пряма BC: $y = 1$, тоді $z = (x-1)^2 + 2$, де $x \in [0;1]$.

$z' = 2(x-1)$, $z' = 0$ при $x = 1$,

$$z\left(\underset{y=1}{x=0}\right) = 3; \quad z\left(\underset{y=1}{x=1}\right) = 2,$$ або $z(B) = 3$, $z(C) = 2$;

в) пряма AB: $x + y = 1$, $y = 1 - x$

тоді $z = (x-1)^2 + 2(1-x)^2 = 3(x-1)^2$, де $x \in [0;1]$.

$$z' = 6(x-1), \quad z\left(\underset{y=1}{x=0}\right) = 3; \quad z\left(\underset{y=0}{x=1}\right) = 0,$$ або $z(B) = 3$, $z(A) = 0$.

З усіх одержаних значень обираємо найбільше та найменше:
$z_{наиб}(0;1) = 3$, $z_{найм}(1;0) = 0$.

Змістовний модуль 3. Інтегральне числення

Індивідуальне завдання № 8

Невизначений інтеграл

Зміст завдання

1. Знайти інтеграли, користуючись основною таблицею інтегралів та правилами інтегрування.
2. Знайти інтеграли методом заміни змінної.
3. Знайти інтеграли методом інтегрування частинами.
4. Знайти інтеграли від функцій, що містять квадратний тричлен.
5. Знайти інтеграли від раціональних дробів.
6. Знайти інтеграли від ірраціональних функцій.
7. Знайти інтеграли від тригонометричних функцій.

Варіант 1

1. $\int \cos 7x dx$; $\int (3x-5)^6 dx$; $\int \sqrt{2x+3}\, dx$; $\int e^{-2x} dx$; $\int \frac{dx}{9x^2+4}$; $\int \frac{dx}{4x^2-9}$; $\int \frac{dx}{\sqrt{4x^2-9}}$; $\int \frac{dx}{\sqrt{9-4x^2}}$.

2. $\int \frac{dx}{x(5+\ln x)}$; $\int \frac{\sin x dx}{2+7\cos x}$; $\int \frac{dx}{\cos^2 x(3-2tg\, x)}$; $\int \frac{x^2 dx}{5-x^3}$; $\int \frac{x dx}{9-4x^4}$; $\int \frac{x dx}{\sqrt{4x^2+5}}$; $\int \frac{e^x dx}{\sqrt{e^x+2}}$; $\int \frac{2x+7}{x^2+7x-3} dx$; $\int \frac{x^3 dx}{9+x^8}$; $\int \frac{7\cos x dx}{2+4\sin x}$; $\int \frac{x^3 dx}{\sqrt{9+x^8}}$; $\int \frac{e^x dx}{81+e^{2x}}$; $\int \frac{dx}{x(1+\ln x)}$; $\int e^{\sin x} \cos x dx$; $\int \frac{\sqrt{5+tg\, x}\, dx}{\cos^2 x}$; $\int \frac{dx}{\sin^2 x\left(4+ctg^2 x\right)}$; $\int \frac{dx}{\sin^2 x\sqrt{4+ctg^2 x}}$; $\int \frac{dx}{\sin^2 x\sqrt{4-ctg^2 x}}$; $\int x e^{-5x^2} dx$.

3. $\int (x+2)\cos x dx$; $\int x^2 e^{-x} dx$; $\int x \ln x dx$; $\int e^{2x} \sin 2x dx$.

4. $\int\frac{3x+7}{x^2+2x-8}dx$; $\int\frac{3x+7}{x^2+2x+8}dx$; $\int\frac{3x+7}{\sqrt{8-2x-x^2}}dx$; $\int\frac{3x+7}{\sqrt{x^2+2x-8}}dx$.

5. $\int\frac{(3x+5)dx}{x(x-1)(x+2)}$; $\int\frac{x^3dx}{(x+1)(x+2)}$; $\int\frac{(5x-7)dx}{x^2(x-2)}$; $\int\frac{dx}{x^3+1}$; $\int\frac{dx}{x^4-1}$.

6. $\int\sqrt{16-x^2}dx$; $\int\frac{x^2dx}{\sqrt{16-x^2}}$; $\int\sqrt{16+x^2}dx$; $\int\frac{x^2dx}{\sqrt{16+x^2}}$; $\int\frac{\sqrt{x}\,dx}{2+3\sqrt{x}}$.

7. $\int\sin^5 xdx$; $\int\cos^3 x\sin^2 xdx$; $\int\sin^4 xdx$; $\int\frac{dx}{3+\cos x}$.

Варіант 2

1. $\int(2x-5)^7dx$; $\int\sqrt[5]{2x+1}\,dx$; $\int e^{-7x}dx$; $\int \mathrm{tg}3x\,dx$; $\int\frac{dx}{9x^2+16}$; $\int\frac{dx}{9x^2-16}$; $\int\frac{dx}{\sqrt{9x^2+16}}$; $\int\frac{dx}{\sqrt{16-9x^2}}$.

2. $\int\frac{dx}{x\ln^2 x}$; $\int\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}\arcsin^3 x}$; $\int\frac{dx}{\cos^2 x(3+2\,tgx)}$; $\int\frac{14x+6}{7x^2+6x-1}dx$;

$\int\frac{xdx}{9x^4+1}$; $\int\frac{xdx}{\sqrt{9+4x^2}}$; $\int e^{3x}\left(5+e^{3x}\right)^3dx$; $\int\frac{e^{-x}dx}{1+e^{-2x}}$; $\int\frac{xdx}{4-2x^2}$;

$\int x^2\sqrt{3+8x^3}dx$; $\int xe^{-x^2}dx$; $\int\frac{\cos xdx}{\sqrt{4-9\sin^2 x}}$; $\int\frac{x^3dx}{4+5x^4}$; $\int\frac{\sin xdx}{7+2\cos x}$;

$\int\frac{\sin x}{\sqrt{5+\cos x}}dx$; $\int\frac{arctg^5 xdx}{1+x^2}$; $\int\frac{dx}{x\left(9+\ln^2 x\right)}$; $\int\frac{dx}{x\left(9-\ln^2 x\right)}$; $\int\frac{dx}{x\sqrt{9+\ln^2 x}}$;

$\int\frac{dx}{x\sqrt{9-\ln^2 x}}$.

3. $\int\arcsin xdx$; $\int\ln(x+1)dx$; $\int x\cos 2x\,dx$; $\int e^{2x}\cos 3xdx$.

4. $\int\frac{5x-2}{x^2+4x+5}dx$; $\int\frac{3x+1}{x^2+4x-5}dx$; $\int\frac{x+2}{\sqrt{1-x-x^2}}dx$; $\int\frac{3x+2}{\sqrt{x^2+4x+5}}dx$.

5. $\int\frac{(2x-3)dx}{x(x+1)(x-2)}$; $\int\frac{\left(x^2+x-1\right)dx}{x(x+1)(x-2)}$; $\int\frac{\left(3x^2+1\right)dx}{(x-1)\left(x^2-4x+5\right)}$; $\int\frac{dx}{x^3-27}$; $\int\frac{dx}{x^4-16}$.

6. $\int\sqrt{4-x^2}dx$; $\int\frac{x^2dx}{\sqrt{4+x^2}}$; $\int\sqrt{4+x^2}dx$; $\int\frac{x^2dx}{\sqrt{4-x^2}}$; $\int\frac{\sqrt{x}dx}{7-3\sqrt{x}}$.

7. $\int\sin^7 xdx$; $\int\cos^7 x\sin^2 xdx$; $\int\frac{\cos^2 x}{\sin^4 x}dx$; $\int\frac{dx}{3-5\sin x}$.

Варіант 3

1. $\int\cos(4x-1)dx$; $\int(7x+1)^9 dx$; $\int e^{-3x+1}dx$; $\int\frac{dx}{6x+7}$; $\int\frac{dx}{4x^2-25}$; $\int\frac{dx}{4x^2+25}$; $\int\frac{dx}{\sqrt{4x^2+25}}$; $\int\frac{dx}{\sqrt{25-4x^2}}$.

2. $\int\frac{x^8dx}{7+3x^9}$; $\int\frac{dx}{x(\ln x+8)}$; $\int\frac{(2x+6)dx}{x^2+6x-9}$; $\int\frac{e^{5x}dx}{e^{5x}+5}$; $\int\frac{x^2dx}{9+4x^6}$; $\int\frac{dx}{x\ln^3 x}$;

$\int\frac{\sin xdx}{\sqrt{8+3\cos x}}$; $\int e^{2x}\sqrt{7+3e^{2x}}dx$; $\int x\cdot 3^{x^2}dx$; $\int\frac{e^{tg\,x}dx}{\cos^2 x}$; $\int 2^{\cos x}\sin xdx$;

$\int\cos x\cdot(2+\sin x)^5dx$; $\int x^4\sqrt{7+x^5}dx$; $\int x\left(12+3x^2\right)^3dx$; $\int\frac{e^{2x}dx}{e^{4x}+9}$;

$\int\frac{dx}{x\left(4+\ln^2 x\right)}$; $\int\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}\sqrt{4+\arccos^2 x}}$; $\int\frac{dx}{\left(1+x^2\right)\sqrt{4+arctg^2 x}}$; $\int\frac{e^{\sqrt{x}}dx}{\sqrt{x}}$;

$\int e^x\left(1+e^x\right)^7dx$.

3. $\int 3x\cos 2xdx$; $\int xe^{-5x}dx$; $\int\frac{\ln x}{\sqrt{x}}dx$; $\int e^{2x}\cos 4xdx$.

4. $\int\frac{(2x+5)dx}{x^2+6x-7}$; $\int\frac{(5x-2)dx}{x^2+6x+7}$; $\int\frac{3x-5}{\sqrt{x^2+4x+5}}dx$; $\int\frac{6x+1}{\sqrt{5-4x-x^2}}dx$.

5. $\int\frac{(2x+3)dx}{(x+1)^2(x-2)}$; $\int\frac{(x^2+x-1)dx}{x(x+1)(x+2)}$; $\int\frac{dx}{x^3+1}$; $\int\frac{dx}{x^4-1}$; $\int\frac{(4x+3)dx}{x(x^2+2x+5)}$.

6. $\int\sqrt{16-x^2}dx$; $\int\frac{x^2dx}{\sqrt{16-x^2}}$; $\int\sqrt{16+x^2}dx$; $\int\frac{x^2dx}{\sqrt{16+x^2}}$; $\int\frac{\sqrt{x}\,dx}{5+3\sqrt{x}}$.

7. $\int\sin^3 x\cos^6 xdx$; $\int tg^4xdx$; $\int\frac{\sin^4 xdx}{\cos^2 x}$; $\int\frac{dx}{5+3\cos x}$.

Варіант 4

1. $\int\sin(7x+1)dx$; $\int(5x-7)^{10}dx$; $\int e^{3x}dx$; $\int\frac{dx}{(4x+1)^5}$; $\int\frac{dx}{\sqrt{16-9x^2}}$;

$\int\frac{dx}{16x^2+9}$; $\int\frac{dx}{\sqrt{9x^2+16}}$; $\int\frac{dx}{16x^2-9}$.

2. $\int\frac{dx}{\sin^2 x(1+ctg\,x)^2}$; $\int\frac{dx}{(1+x^2)arcctg^3x}$; $\int\frac{(3x^2+4x)dx}{x^3+2x^2+5}$; $\int\frac{\ln^3 xdx}{x}$;

$\int\frac{xdx}{x^4+9}$; $\int\frac{xdx}{\sqrt{9+4x^2}}$; $\int\frac{e^{5x}dx}{e^{10x}+4}$; $\int\frac{e^{5x}dx}{\sqrt{e^{10x}+9}}$; $\int\frac{x^2dx}{\sqrt{9+8x^3}}$; $\int\frac{xdx}{(9+x^2)^2}$;

$\int e^x\cos(e^x)dx$; $\int e^{\sin x}\cos xdx$; $\int x^3e^{-x^4}dx$; $\int\frac{\cos xdx}{4+\sin^2 x}$; $\int\frac{\cos xdx}{\sqrt{5+4\sin x}}$;

$\int\frac{arcctg^5xdx}{1+x^2}$; $\int\frac{dx}{x(16-\ln^2 x)}$; $\int\frac{dx}{x\sqrt{9\ln^2 x+16}}$; $\int\frac{dx}{x\sqrt{16-9\ln^2 x}}$.

3. $\int x\cdot 3^x dx$; $\int x\cdot arcctgxdx$; $\int\ln^2 xdx$; $\int e^x\sin 2xdx$.

4. $\int\frac{(3x+5)dx}{x^2-2x+10}$; $\int\frac{(3x+4)dx}{x^2-2x-8}$; $\int\frac{(2x+3)dx}{\sqrt{x^2-2x+10}}$; $\int\frac{(3x-4)dx}{\sqrt{3-2x-x^2}}$.

5. $\int\frac{\left(x^2+3\right)dx}{x^2\left(x+2\right)}$; $\int\frac{\left(2x^2+x-1\right)dx}{(x-1)(x+1)(x-2)}$; $\int\frac{\left(x^2+x-1\right)dx}{x\left(x^2-2x+10\right)}$; $\int\frac{dx}{x^3-8}$; $\int\frac{dx}{x^4-16}$.

6. $\int\sqrt{81-x^2}\,dx$; $\int\frac{x^2dx}{\sqrt{81-x^2}}$; $\int\frac{x^2dx}{\sqrt{81+x^2}}$; $\int\sqrt{81+x^2}\,dx$; $\int\frac{dx}{\sqrt{x}\left(1+\sqrt[3]{x}\right)}$.

7. $\int tg^6xdx$; $\int\sin^2x\cos^4xdx$; $\int\frac{\sin^2xdx}{\cos^3x}$; $\int\frac{dx}{4+5\cos x}$.

Варіант 5

1. $\int(7-9x)^{12}dx$; $\int\sin 4xdx$; $\int e^{1-6x}dx$; $\int\frac{dx}{6-5x}$; $\int\frac{dx}{4x^2+9}$; $\int\frac{dx}{16-25x^2}$; $\int\frac{dx}{\sqrt{4x^2-9}}$; $\int\frac{dx}{\sqrt{16-25x^2}}$.

2. $\int\frac{dx}{x\left(2+3\ln x\right)^2}$; $\int\frac{dx}{\left(1+x^2\right)arcctg^5x}$; $\int\frac{(4x+3)dx}{2x^2+3x-7}$; $\int\frac{\cos xdx}{4+3\sin x}$; $\int\frac{x^2dx}{x^6-9}$; $\int\cos 3x\left(5+7\sin 3x\right)^5dx$; $\int x^3e^{-x^4}dx$; $\int\frac{dx}{x\ln^2x}$; $\int e^{4x}\sqrt{3+e^{4x}}\,dx$; $\int x\cdot 4^{x^2}dx$; $\int x^3\sqrt{1+7x^4}\,dx$; $\int\frac{(1+2tg\,x)^2dx}{\cos^2x}$; $\int e^{\sin 2x}\cos 2xdx$; $\int\frac{x^5dx}{\sqrt{9+x^6}}$; $\int\frac{dx}{x\left(12+3\ln^2x\right)}$; $\int\frac{dx}{\cos^2x\left(4+tg^2x\right)}$; $\int\frac{e^xdx}{\sqrt{16-e^{2x}}}$; $\int\frac{e^{2x}dx}{144+e^{4x}}$; $\int\frac{e^xdx}{\sqrt{e^{2x}-16}}$; $\int\frac{e^xdx}{e^{2x}-81}$.

3. $\int xe^{-3x}dx$; $\int(x+3)\cos 2xdx$; $\int\frac{\ln x}{x^2}dx$; $\int e^{2x}\sin 2xdx$.

4. $\int\frac{(5x+2)dx}{x^2-6x+10}$; $\int\frac{(3x-2)dx}{x^2-6x-7}$; $\int\frac{(3x+1)dx}{\sqrt{x^2-6x+10}}$; $\int\frac{(2x+1)dx}{\sqrt{10+6x-x^2}}$.

5. $\int\frac{\left(x^2+x-1\right)dx}{x(x+2)(x-3)}$; $\int\frac{x^4dx}{(x-1)^2(x+2)}$; $\int\frac{xdx}{(x+1)\left(x^2+4x+85\right)}$; $\int\frac{dx}{x^3+125}$;

$\int\frac{dx}{x^4-16}$.

6. $\int\sqrt{81-x^2}dx$; $\int\frac{x^2dx}{\sqrt{4+x^2}}$; $\int\sqrt{4+x^2}dx$; $\int\frac{x^2dx}{\sqrt{81-x^2}}$; $\int\frac{dx}{\sqrt{x}\left(\sqrt{x}-1\right)}$.

7. $\int\sin^3 xdx$; $\int\cos^4 xdx$; $\int\frac{dx}{\sin^2 x\cos^2 x}$; $\int\frac{dx}{4-3\cos x}$.

Варіант 6

1. $\int\sqrt[3]{3+5x}\,dx$; $\int e^{-5x}dx$; $\int\sin(5x-1)dx$; $\int\frac{dx}{3-2x}$; $\int\frac{dx}{3x^2+2}$; $\int\frac{dx}{3x^2-2}$;

$\int\frac{dx}{\sqrt{16x^2-1}}$; $\int\frac{dx}{\sqrt{1-16x^2}}$.

2. $\int\frac{dx}{x(7+3\ln x)^2}$; $\int\frac{arcctg\,3xdx}{1+9x^2}$; $\int\frac{(10x-8)dx}{5x^2-8x+7}$; $\int\frac{\sin 3xdx}{3\cos 3x+4}$; $\int\frac{x^3dx}{4-x^8}$;

$\int\cos 2x(5+7\sin 2x)^4\,dx$; $\int\frac{dx}{x\ln^3 x}$; $\int e^{5x}\sqrt{1+3e^{5x}}dx$; $\int x^2\cdot 4^{x^3}\,dx$;

$\int x^2\sqrt{5+4x^3}dx$; $\int\frac{dx}{x\left(1-\ln^2 x\right)}$; $\int\frac{x^8dx}{\sqrt{5-x^9}}$; $\int\frac{e^{3x}dx}{e^{3x}-4}$; $\int e^{\cos 3x}\sin 3xdx$;

$\int\frac{(1+3ctg\,x)^4\,dx}{\sin^2 x}$; $\int\frac{dx}{\sin^2 x\sqrt{1-ctg^2x}}$; $\int x^2e^{-x^3}dx$; $\int\frac{e^xdx}{e^{2x}+4}$; $\int\frac{e^xdx}{\sqrt{4-e^{2x}}}$;

$\int\frac{e^xdx}{\sqrt{e^{2x}-4}}$.

3. $\int xe^{-2x}dx$; $\int arcctgxdx$; $\int(x-4)\sin xdx$; $\int e^{2x}\cos xdx$.

4. $\int\frac{(5x+4)dx}{x^2+4x+13}$; $\int\frac{(3x-2)dx}{x^2-4x-5}$; $\int\frac{(2x-1)dx}{\sqrt{x^2+4x+13}}$; $\int\frac{(3x+2)dx}{\sqrt{12-4x-x^2}}$.

5. $\int\frac{\left(x^2+2\right)dx}{x(x+3)(x-1)}$; $\int\frac{x^3dx}{(x+1)(x-2)}$; $\int\frac{\left(x^2+x-1\right)dx}{x^2(x+4)}$; $\int\frac{xdx}{x^3-1}$; $\int\frac{x^2dx}{x^4-16}$.

6. $\int\sqrt{100-x^2}\,dx$; $\int\frac{x^2dx}{\sqrt{100-x^2}}$; $\int\sqrt{100+x^2}\,dx$; $\int\frac{x^2dx}{\sqrt{100+x^2}}$; $\int\frac{dx}{\sqrt{x}\left(\sqrt{x}+1\right)}$.

7. $\int\sin^4 x\,dx$; $\int\cos^5 x\,dx$; $\int\frac{\sin^2 x}{\cos^5 x}dx$; $\int\frac{dx}{3-7\sin x}$.

Варіант 7

1. $\int\sin(3x+1)dx$; $\int(2x-1)^5dx$; $\int e^{2-3x}dx$; $\int\frac{dx}{3x+4}$; $\int\frac{dx}{9x^2-1}$; $\int\frac{dx}{9x^2+1}$;

$\int\frac{dx}{\sqrt{9x^2-1}}$; $\int\frac{dx}{\sqrt{1-9x^2}}$.

2. $\int\frac{x^5dx}{4+5x^6}$; $\int\frac{dx}{\cos^2 x(1+4tg\,x)}$; $\int\frac{\left(6x^2+8\right)dx}{x^3+4x-2}$; $\int\frac{\sin xdx}{5-3\cos x}$; $\int\frac{e^xdx}{e^{2x}-9}$;

$\int\sin 2x(3+2\cos 2x)^4dx$; $\int\frac{dx}{x\ln^4 x}$; $\int\frac{xdx}{x^4+16}$; $\int\frac{\cos xdx}{2-3\sin x}$; $\int x\left(3x^2+2\right)^5dx$;

$\int e^{2x}\sqrt{7+8e^{2x}}dx$; $\int\frac{\sqrt{2+3tg\,x}\,dx}{\cos^2 x}$; $\int\frac{e^{tg\,x}dx}{\cos^2 x}$; $\int\frac{x^2dx}{15-2x^3}$; $\int\frac{x^4dx}{\sqrt{\left(2+x^5\right)^3}}$;

$\int x^2e^{-2x^3}dx$; $\int\frac{e^{2x}dx}{e^{2x}-4}$; $\int\frac{e^xdx}{e^{2x}+4}$; $\int\frac{e^xdx}{\sqrt{e^{2x}-1}}$; $\int\frac{e^{2x}dx}{\sqrt{4-e^{4x}}}$.

3. $\int x2^x dx$; $\int\ln\left(x^2+3\right)dx$; $\int x\cos 2xdx$; $\int e^{2x}\sin 2xdx$.

4. $\int\frac{(2x+3)dx}{x^2+8x+17}$; $\int\frac{(2x-5)dx}{x^2+4x-5}$; $\int\frac{(4x-3)dx}{\sqrt{x^2+8x+17}}$; $\int\frac{(x+1)dx}{\sqrt{5-4x-x^2}}$.

5. $\int\frac{\left(3x^2+x+2\right)dx}{x(x+1)(x-1)}$; $\int\frac{3xdx}{(x+1)^2(x+2)}$; $\int\frac{(5x-6)dx}{\left(x^2+6x+18\right)(x-1)}$; $\int\frac{dx}{x^3+8}$;

$\int\frac{x^2dx}{x^4-16}$.

6. $\int\sqrt{4-x^2}dx$; $\int\frac{x^2dx}{\sqrt{4-x^2}}$; $\int\sqrt{16+x^2}dx$; $\int\frac{x^2dx}{\sqrt{16+x^2}}$; $\int\frac{\sqrt{x}\,dx}{5-7\sqrt{x}}$.

7. $\int tg^4xdx$; $\int\sin^4x\cos^2xdx$; $\int\cos^7xdx$; $\int\frac{dx}{5+3\cos x}$.

Варіант 8

1. $\int(6-7x)^7dx$; $\int e^{-6x}dx$; $\int\sin(4x+1)dx$; $\int\frac{dx}{5+2x}$; $\int\frac{dx}{4x^2+49}$;

$\int\frac{dx}{4x^2-49}$; $\int\frac{dx}{\sqrt{4x^2-49}}$; $\int\frac{dx}{\sqrt{49-4x^2}}$.

2. $\int\frac{dx}{x(5+6\ln x)^2}$; $\int\frac{\arcsin^5xdx}{\sqrt{1-x^2}}$; $\int\frac{\sin xdx}{5+7\cos x}$; $\int\frac{(8x-7)dx}{4x^2-7x+8}$; $\int\frac{x^2dx}{4+x^6}$;

$\int\sin 2x(3+5\cos 2x)^3dx$; $\int\frac{dx}{x\ln^7x}$; $\int e^{\sin 2x}\cos 2xdx$; $\int\frac{e^{5x}dx}{\sqrt{1+e^{5x}}}$; $\int x8^{x^2}dx$;

$\int\frac{x^2dx}{\sqrt{1+5x^3}}$; $\int\frac{(2+5tg\,x)^4dx}{\cos^2x}$; $\int\frac{dx}{x(5+6\ln x)}$; $\int x^3e^{-x^4}dx$;$\int\frac{dx}{\cos^2x\sqrt{9-tg^2x}}$;

$\int x^5\sqrt{8-4x^6}dx$; $\int\frac{e^{3x}dx}{e^{6x}+9}$; $\int\frac{e^xdx}{\sqrt{e^{2x}-4}}$; $\int\frac{e^xdx}{\sqrt{8-e^{2x}}}$; $\int\frac{e^{2x}dx}{e^{4x}-4}$.

3. $\int(x+1)\cos 2xdx$; $\int\ln(x+2)dx$; $\int x^2e^xdx$; $\int e^{3x}\sin xdx$.

4. $\int\frac{(2x+3)dx}{x^2-2x+8}$; $\int\frac{(5x-1)dx}{x^2+2x-3}$; $\int\frac{(2x-3)dx}{\sqrt{x^2+6x+13}}$; $\int\frac{(x+5)dx}{\sqrt{1-4x-x^2}}$.

5. $\int\frac{(x^3+x-1)dx}{(x+1)(x+2)}$; $\int\frac{(3x+7)dx}{x(x-1)(x+2)}$; $\int\frac{(2x-3)dx}{x^2(x+1)}$; $\int\frac{dx}{x^3+1}$; $\int\frac{dx}{x^4-16}$.

6. $\int\sqrt{81-x^2}dx$; $\int\frac{x^2dx}{\sqrt{81-x^2}}$; $\int\sqrt{81+x^2}dx$; $\int\frac{x^2dx}{\sqrt{81+x^2}}$; $\int\frac{(1+\sqrt{x})dx}{4+\sqrt{x}}$.

7. $\int\sin^5xdx$; $\int\frac{\sin^4x}{\cos^2x}dx$; $\int\frac{\sin x}{\cos^2x}dx$; $\int\frac{dx}{3+5\cos x}$.

Варіант 9

1. $\int \sqrt{4x+1}\,dx$; $\int e^{-7x+1}dx$; $\int \frac{dx}{\cos^2 2x}$; $\int \frac{dx}{(3x-7)^2}$; $\int \frac{dx}{3x^2+1}$; $\int \frac{dx}{\sqrt{3x^2+1}}$;

$\int \frac{dx}{\sqrt{1-3x^2}}$; $\int \frac{dx}{3x^2-1}$.

2. $\int \frac{dx}{(1+x^2)arcctg^2 x}$; $\int \frac{dx}{\cos^2 x(3+5tg\,x)}$; $\int \frac{(12x-16)dx}{3x^2-8x+1}$; $\int \frac{\ln^4 x\,dx}{x}$;

$\int \frac{x^3dx}{x^8+4}$; $\int \frac{xdx}{\sqrt{16+25x^2}}$; $\int e^{3x}\left(3e^{3x}+4\right)^2 dx$; $\int \frac{e^{-2x}dx}{1-e^{-4x}}$; $\int x^2\sqrt{3+x^3}\,dx$;

$\int x^2 e^{-4x^3}dx$; $\int \frac{dx}{\cos^2 x\sqrt{1-tg^2 x}}$; $\int \frac{x^3dx}{2-9x^4}$; $\int \frac{xdx}{4-x^4}$; $\int \frac{dx}{\sin^2 x(2-ctg\,x)}$;

$\int \frac{\sqrt{5-ctg\,x}\,dx}{\sin^2 x}$; $\int \frac{\arcsin^3 xdx}{\sqrt{1-x^2}}$; $\int \frac{dx}{x\left(25+\ln^2 x\right)}$; $\int \frac{dx}{x\left(25-\ln^2 x\right)}$;

$\int \frac{dx}{x\sqrt{4+\ln^2 x}}$; $\int \frac{dx}{x\sqrt{4-\ln^2 x}}$.

3. $\int \frac{\arcsin x}{\sqrt{x+1}}dx$; $\int x^2e^{4x}dx$; $\int (3x+1)\cos 2xdx$; $\int e^{3x}\sin 2xdx$.

4. $\int \frac{(5x-1)dx}{x^2+4x+1}$; $\int \frac{(4x+3)dx}{x^2-6x+10}$; $\int \frac{(3x+1)dx}{\sqrt{x^2+4x+20}}$; $\int \frac{(2x-1)dx}{\sqrt{-x^2+2x+4}}$.

5. $\int \frac{(4x^2+5)dx}{x^2(x-2)}$; $\int \frac{(7x+2)dx}{x\left(x^2+6x+18\right)}$; $\int \frac{(x+3)dx}{(x-1)(x-2)}$; $\int \frac{x^3dx}{x^3-1}$; $\int \frac{dx}{x^4-1}$.

6. $\int \sqrt{1-x^2}\,dx$; $\int \frac{x^2dx}{\sqrt{1-x^2}}$; $\int \sqrt{1+x^2}\,dx$; $\int \frac{x^2dx}{\sqrt{1+x^2}}$; $\int \frac{\left(\sqrt{x}-1\right)dx}{2x+\sqrt{x}}$.

7. $\int \sin^6 xdx$; $\int \sin^2 x\cos^4 xdx$; $\int tg^5 xdx$; $\int \frac{dx}{5-\cos x}$.

Варіант 10

1. $\int(2x-7)^8\,dx$; $\int e^{-3x+2}dx$; $\int\cos 2x dx$; $\int 2^{-x}\,dx$; $\int\frac{dx}{6x^2+9}$; $\int\frac{dx}{25x^2-4}$;

$\int\frac{dx}{\sqrt{49x^2-4}}$; $\int\frac{dx}{\sqrt{4-49x^2}}$.

2. $\int\frac{x^6dx}{3+x^7}$; $\int\frac{dx}{\cos^2 x(4-3tg\,x)}$; $\int\frac{(2x-2)dx}{(x^2-2x+3)^2}$; $\int\frac{\cos x dx}{4+\sin x}$; $\int\frac{e^x dx}{e^{2x}+16}$;

$\int\sin x(7-3\cos x)^2dx$; $\int\frac{dx}{x\ln^5 x}$; $\int\frac{e^x dx}{\sqrt{e^x+3}}$; $\int\frac{xdx}{25+x^4}$; $\int xe^{-3x^2}\,dx$; $\int\frac{e^{tg\,x}dx}{\cos^2 x}$;

$\int\frac{7\sin x dx}{5\cos x+12}$; $\int\frac{e^x dx}{2e^x+1}$; $\int\frac{x^3dx}{\sqrt{2+x^4}}$; $\int x(3x^2+2)^5\,dx$; $\int\frac{dx}{\sin^2 x\sqrt{1-ctg\,x}}$;

$\int\frac{e^{2x}dx}{e^{2x}+3}$; $\int\frac{e^x dx}{\sqrt{e^{2x}-4}}$; $\int\frac{e^x dx}{\sqrt{e^{2x}+9}}$; $\int\frac{e^x dx}{\sqrt{25-e^{2x}}}$.

3. $\int xarctgx dx$; $\int(3x-2)\sin x dx$; $\int\ln(3x+1)dx$; $\int e^{2x}\cos 4x dx$.

4. $\int\frac{(2x-1)dx}{x^2-3x+2}$; $\int\frac{(3x+4)dx}{x^2-2x-17}$; $\int\frac{(5x-1)}{\sqrt{x^2-2x+17}}dx$; $\int\frac{(2x+1)}{\sqrt{8-2x-x^2}}dx$.

5. $\int\frac{(x^2+x-1)dx}{(x-1)(x+1)(x-2)}$; $\int\frac{x^2dx}{(x-1)^2(x+2)}$; $\int\frac{(x^3+1)dx}{x(x^2+4x+20)}$; $\int\frac{x^3dx}{x^3+8}$;

$\int\frac{dx}{x^4-81}$.

6. $\int\sqrt{64-x^2}dx$; $\int\frac{x^2dx}{\sqrt{64-x^2}}$; $\int\sqrt{100+x^2}dx$; $\int\frac{x^2dx}{\sqrt{100+x^2}}$; $\int\frac{(\sqrt{x}+1)dx}{7+2\sqrt{x}}$.

7. $\int tg^5 x dx$; $\int\frac{\sin^2 x}{\cos^3 x}dx$; $\int\cos^4 x dx$; $\int\frac{dx}{7+9\cos x}$.

Варіант 11

1. $\int 3^{2x}dx$; $\int e^{6-2x}dx$; $\int \sin(5+2x)dx$; $\int \frac{dx}{3x-1}$; $\int \frac{dx}{2x^2+6}$; $\int \frac{dx}{2x^2-6}$;

$\int \frac{dx}{\sqrt{4x^2-1}}$; $\int \frac{dx}{\sqrt{1-4x^2}}$.

2. $\int \frac{\arcsin^7 x dx}{\sqrt{1-x^2}}$; $\int \frac{dx}{(1+x^2)arcctg^2 x}$; $\int \frac{(6x+8)dx}{3x^2+8x-5}$; $\int \frac{\cos 2x dx}{1-\sin 2x}$; $\int \frac{x^2 dx}{x^6+16}$;

$\int \frac{(5+3tg\,x)^{10}dx}{\cos^2 x}$; $\int \frac{dx}{x\ln^7 x}$; $\int e^{-2x}\sqrt{2+e^{-2x}}dx$; $\int x^2 e^{-2x^3}dx$; $\int x^3\sqrt{5+8x^4}dx$;

$\int \frac{\sqrt{\ln x+2}dx}{x}$; $\int \frac{dx}{x(2\ln x+3)}$; $\int \frac{x^3 dx}{\sqrt{10-x^4}}$; $\int e^{\sin 3x}\cos 3x dx$; $\int \frac{arcctg^5 x dx}{1+x^2}$;

$\int \frac{dx}{\sin^2 x\sqrt{1-ctg^2 x}}$; $\int \frac{e^x dx}{\sqrt{e^{2x}+4}}$; $\int \frac{e^x dx}{e^{2x}-4}$; $\int \frac{2^x dx}{2^{2x}-4}$; $\int \frac{e^x dx}{e^{2x}+4}$.

3. $\int x\sin 4x dx$; $\int x\ln^2 x dx$; $\int xe^{-4x}dx$; $\int e^{-x}\cos 2x dx$.

4. $\int \frac{(3x+4)dx}{x^2+5x-6}$; $\int \frac{(2x-7)dx}{x^2-4x+5}$; $\int \frac{(5x-2)}{\sqrt{x^2+2x+17}}dx$; $\int \frac{(x+4)}{\sqrt{15-2x-x^2}}dx$.

5. $\int \frac{(x^2+4)dx}{x(x+2)(x-3)}$; $\int \frac{x^3 dx}{(x-2)(x+3)}$; $\int \frac{(3x^2+x-1)dx}{x^2(x+4)}$; $\int \frac{dx}{x^3-64}$; $\int \frac{dx}{x^4-1}$.

6. $\int \sqrt{1-x^2}dx$; $\int \frac{x^2 dx}{\sqrt{1-x^2}}$; $\int \sqrt{4+x^2}dx$; $\int \frac{x^2 dx}{\sqrt{4+x^2}}$; $\int \frac{dx}{\sqrt{x}(\sqrt{x}-4)}$.

7. $\int tg^3 x dx$; $\int \sin 3x \sin 2x dx$; $\int \sin^2 3x dx$; $\int \frac{dx}{1-\sin x}$.

Варіант 12

1. $\int (5x+7)^2 dx$; $\int 3^{-x}dx$; $\int \sqrt{6x-1}dx$; $\int \frac{dx}{7-2x}$; $\int \frac{dx}{4x^2+81}$; $\int \frac{dx}{8x^2-32}$;

$\int \frac{dx}{\sqrt{16x^2-9}}$; $\int \frac{dx}{\sqrt{9-16x^2}}$.

2. $\int\frac{dx}{(7+\ln x)x}$; $\int\frac{\sin x dx}{15+7\cos x}$; $\int\frac{(4+ctg\,x)dx}{\sin^2 x}$; $\int\frac{xdx}{x^2+6}$; $\int\frac{xdx}{4x^4-9}$;

$\int\frac{xdx}{\sqrt{8x^2+5}}$; $\int\frac{e^x dx}{\sqrt{e^x+1}}$; $\int\frac{e^x dx}{e^{2x}+4}$; $\int\frac{dx}{x(2+\ln x)^2}$; $\int\frac{x^2dx}{9+x^6}$; $\int\frac{4\cos xdx}{2+3\sin x}$;

$\int\frac{\sqrt{3+tg\,x}\,dx}{\cos^2 x}$; $\int e^{\sin 2x}\cos 2xdx$; $\int\frac{dx}{\cos^2 x\left(4-tg^2 x\right)}$; $\int\frac{dx}{\sin^2 x\left(4+ctg^2 x\right)}$;

$\int\frac{e^{2x}dx}{e^{4x}+4}$; $\int\frac{dx}{x\left(2-\ln^2 x\right)}$; $\int x^2 e^{-x^3}dx$; $\int\frac{dx}{\cos^2 x\sqrt{1-tg^2 x}}$; $\int\frac{dx}{\sin^2 x\sqrt{4+ctg^2 x}}$.

3. $\int x^5\ln xdx$; $\int \arcsin xdx$; $\int xe^{-3x}dx$; $\int e^{2x}\sin 4xdx$.

4. $\int\frac{(5x+1)dx}{x^2-2x+10}$; $\int\frac{(6x-5)dx}{x^2+2x-15}$; $\int\frac{3x+2}{\sqrt{x^2-2x+10}}dx$; $\int\frac{4x-1}{\sqrt{9-2x-x^2}}dx$.

5. $\int\frac{\left(2x^2+x-1\right)dx}{x(x+1)(x-3)}$; $\int\frac{x^2dx}{(x+2)(x+1)^2}$; $\int\frac{x^3dx}{(x-1)(x+1)}$; $\int\frac{x^3dx}{x^3+1}$; $\int\frac{dx}{x^4-16}$.

6. $\int\sqrt{49-x^2}dx$; $\int\frac{x^2dx}{\sqrt{49-x^2}}$; $\int\sqrt{16+x^2}dx$; $\int\frac{x^2dx}{\sqrt{16+x^2}}$; $\int\frac{\left(\sqrt{x}-1\right)dx}{2\sqrt{x}+x}$.

7. $\int\sin^4 xdx$; $\int\cos^2 x\sin^3 xdx$; $\int\frac{\cos^4 x}{\sin^2 x}dx$; $\int\frac{dx}{3-2\sin x}$.

Варіант 13

1. $\int\sin(3x+1)dx$; $\int\sqrt[5]{(2x-1)^2}dx$; $\int e^{-6x}dx$; $\int\frac{dx}{5x-1}$; $\int\frac{dx}{6x^2+9}$; $\int\frac{dx}{6x^2-9}$;

$\int\frac{dx}{\sqrt{4-9x^2}}$; $\int\frac{dx}{\sqrt{9x^2-4}}$.

2. $\int\frac{x^5dx}{6+5x^6}$; $\int\frac{dx}{\sin^2 x(4-3ctg\,x)}$; $\int\frac{(2x-3)dx}{x^2-3x+5}$; $\int\frac{\sin xdx}{3-5\cos x}$; $\int\frac{e^{2x}dx}{e^{2x}+46}$;

$\int \cos x(8-5\sin x)^4 dx$; $\int \frac{dx}{x\ln^9 x}$; $\int e^x\sqrt{8-7e^x}dx$; $\int \frac{xdx}{x^4+1}$; $\int \frac{6\sin xdx}{15-\cos x}$;

$\int \frac{e^{ctg\,x}}{\sin^2 x}dx$; $\int \frac{x^2dx}{15-3x^3}$; $\int \frac{x^3dx}{\sqrt[3]{x^4+2}}$; $\int x\left(6x^2+5\right)^9 dx$; $\int \frac{\sqrt{1+3ctg\,x}}{\sin^2 x}dx$;

$\int xe^{-3x^2}dx$; $\int \frac{e^{2x}dx}{e^{4x}+4}$; $\int \frac{e^{2x}dx}{\sqrt{e^{4x}-9}}$; $\int \frac{e^{2x}dx}{\sqrt{e^{4x}+9}}$; $\int \frac{e^{2x}dx}{\sqrt{9-e^{4x}}}$.

3. $\int(3x-2)\sin 3xdx$; $\int xarctgxdx$; $\int \ln^2 xdx$; $\int e^x\cos 2xdx$.

4. $\int \frac{(x+5)dx}{x^2-5x+6}$; $\int \frac{(5x-4)dx}{x^2-6x+10}$; $\int \frac{(2x-3)dx}{\sqrt{x^2-3x-7}}$; $\int \frac{(x+5)dx}{\sqrt{2-3x-x^2}}$.

5. $\int \frac{\left(x^2+5\right)dx}{x(x-1)(x+2)}$; $\int \frac{\left(x^2+3\right)dx}{(x+2)^2(x+1)}$; $\int \frac{(6x-7)dx}{x\left(x^2+4x+20\right)}$; $\int \frac{x^4dx}{x^4-1}$;

$\int \frac{dx}{x^3-125}$.

6. $\int \sqrt{81-x^2}dx$; $\int \frac{x^2dx}{\sqrt{1-x^2}}$; $\int \sqrt{81+x^2}dx$; $\int \frac{x^2dx}{\sqrt{1+x^2}}$; $\int \frac{\sqrt{x}\,dx}{2\sqrt{x}+3}$.

7. $\int ctg^5 xdx$; $\int \sin 4x\sin xdx$; $\int \sin^4 xdx$; $\int \frac{dx}{7+9\cos x}$.

Варіант 14

1. $\int(2x-3)^6 dx$; $\int \frac{dx}{\cos^2 4x}$; $\int e^{-6x+2}dx$; $\int \frac{dx}{2x+5}$; $\int \frac{dx}{2x^2+8}$; $\int \frac{dx}{2x^2-18}$;

$\int \frac{dx}{\sqrt{9x^2-49}}$; $\int \frac{dx}{\sqrt{1-9x^2}}$.

2. $\int \frac{dx}{x(4-\ln x)}$; $\int \frac{\cos 2xdx}{5+3\sin 2x}$; $\int \frac{(2+5ctg\,x)dx}{\sin^2 x}$; $\int \frac{xdx}{6+x^2}$; $\int \frac{xdx}{16-9x^4}$;

$\int \frac{x^3dx}{x^8+16}$; $\int x2^{x^2}dx$; $\int \frac{xdx}{\sqrt{16x^2+1}}$; $\int \frac{e^xdx}{\sqrt{e^x-3}}$; $\int \frac{e^xdx}{e^{2x}+81}$; $\int \frac{x^2dx}{x^6+16}$;

$\int \frac{(2x-3)dx}{x^2-3x+7}$; $\int e^{\cos x}\sin x dx$; $\int \frac{6\sin 2x dx}{(8-5\cos 2x)^2}$; $\int \frac{dx}{\cos^2 x(9+tg^2 x)}$;

$\int \frac{\sqrt{4-tg\,x}\,dx}{\cos^2 x}$; $\int \frac{dx}{\cos^2 x(16-tg^2 x)}$; $\int \frac{dx}{x(1-\ln x)^3}$; $\int \frac{dx}{\cos^2 x\sqrt{16+tg^2 x}}$;

$\int \frac{dx}{\cos^2 x\sqrt{16-tg^2 x}}$.

3. $\int \arcsin x dx$; $\int \ln x dx$; $\int (x+1)\sin 2x dx$; $\int e^{2x}\cos 5x dx$.

4. $\int \frac{3x-7}{x^2-2x-8}dx$; $\int \frac{3x+7}{x^2-2x+10}dx$; $\int \frac{3x-7}{\sqrt{x^2-2x-8}}dx$; $\int \frac{3x-7}{\sqrt{8+2x-x^2}}dx$.

5. $\int \frac{(2x+5)dx}{x(x-2)(x+4)}$; $\int \frac{(x^3+4)dx}{(x-2)(x+1)}$; $\int \frac{(3x-2)dx}{x^2(x-1)}$; $\int \frac{xdx}{x^3+8}$; $\int \frac{3x^2dx}{x^4-1}$.

6. $\int \sqrt{4-x^2}dx$; $\int \frac{x^2dx}{\sqrt{1-x^2}}$; $\int \sqrt{4+x^2}dx$; $\int \frac{x^2dx}{\sqrt{1+x^2}}$; $\int \frac{(\sqrt{x}+1)dx}{5-6\sqrt{x}}$.

7. $\int tg^6 x dx$; $\int \cos^2 x\sin^3 x dx$; $\int \frac{\cos^4 x}{\sin^2 x}dx$; $\int \frac{dx}{3+\sin x}$.

Варіант 15

1. $\int \cos(7x-1)dx$; $\int \sqrt[3]{2x+3}dx$; $\int \frac{dx}{\sin^2 2x}$; $\int 2^{3x}dx$; $\int \frac{dx}{25x^2+4}$; $\int \frac{dx}{25x^2-4}$;

$\int \frac{dx}{\sqrt{25x^2+4}}$; $\int \frac{dx}{\sqrt{4-25x^2}}$.

2. $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}\arcsin^3 x}$; $\int \frac{(3+4ctg\,x)^2 dx}{\sin^2 x}$; $\int \frac{(10x-8)dx}{5x^2-8x-1}$; $\int \frac{dx}{(x+1)\ln(x+1)}$;

$\int \frac{xdx}{4x^2+16}$; $\int \frac{xdx}{\sqrt{9x^2+4}}$; $\int e^{4x}(7+e^{4x})^3dx$; $\int \frac{e^{-2x}dx}{e^{-2x}+2}$; $\int x^2\sqrt{8-5x^3}dx$;

$\int xe^{-4x^2}dx$; $\int \frac{\sin x}{\sqrt{9-4\cos^2 x}}dx$; $\int \frac{x^2dx}{14-9x^3}$; $\int \frac{xdx}{9-2x^2}$; $\int \frac{\cos 2xdx}{6-7\sin 2x}$;

$\int \cos 2x\sqrt{(5-\sin 2x)^5}dx$; $\int \frac{arctg^3 xdx}{1+x^2}$; $\int \frac{dx}{x(49+\ln^2 x)}$; $\int \frac{dx}{x(49-\ln^2 x)}$;

$\int \frac{dx}{x\sqrt{49+\ln^2 x}}$; $\int \frac{dx}{x\sqrt{49-4\ln^2 x}}$.

3. $\int (3x+2)\sin 2xdx$; $\int \ln(x-1)dx$; $\int \frac{\arcsin xdx}{\sqrt{x+1}}$; $\int e^{3x}\cos xdx$.

4. $\int \frac{(3x-2)dx}{x^2+5x+4}$; $\int \frac{6x-7}{\sqrt{x^2+4x+5}}dx$; $\int \frac{2x+7}{\sqrt{1-x-x^2}}dx$; $\int \frac{(2x+5)dx}{x^2-6x+10}$.

5. $\int \frac{(x^2-3x+1)dx}{x(x+1)(x-3)}$; $\int \frac{(2x^2+x-1)dx}{(x-1)^2(x+1)}$; $\int \frac{(2x-1)dx}{x(x^2-4x+5)}$; $\int \frac{xdx}{x^3-8}$;

$\int \frac{dx}{x^4-81}$.

6. $\int \sqrt{121-x^2}dx$; $\int \frac{x^2dx}{\sqrt{121-x^2}}$; $\int \sqrt{121+x^2}dx$; $\int \frac{x^2dx}{\sqrt{121+x^2}}$; $\int \frac{dx}{(\sqrt{x}-9)\sqrt{x}}$.

7. $\int tg^5 xdx$; $\int \cos x\sin^7 xdx$; $\int \sin 2x\cos 5xdx$; $\int \frac{dx}{3-5\cos x}$.

Варіант 16

1. $\int 3^{4x+1}dx$; $\int (3x+5)^7dx$; $\int e^{-7x}dx$; $\int \frac{dx}{2x+3}$; $\int \frac{dx}{\sqrt{1-25x^2}}$; $\int \frac{dx}{1+25x^2}$;

$\int \frac{dx}{\sqrt{25x^2+1}}$; $\int \frac{dx}{25x^2-1}$.

2. $\int \frac{dx}{\cos^2 x(1+tg\,x)^2}$; $\int \frac{\arcsin^3 xdx}{\sqrt{1-x^2}}$; $\int \frac{\sin 2xdx}{\cos 2x}$; $\int \frac{\ln^7 xdx}{x}$; $\int \frac{xdx}{4x^4+1}$;

$\int\frac{xdx}{\sqrt{4-9x^2}}$; $\int\frac{e^{5x}dx}{\sqrt{e^{5x}+5}}$; $\int\frac{e^x dx}{e^{2x}+81}$; $\int\frac{x^2dx}{\sqrt{3-8x^3}}$; $\int\frac{\sin xdx}{\sqrt{7+2\cos x}}$; $\int\frac{xdx}{\left(4+9x^2\right)^2}$;

$\int\frac{\sin xdx}{13-2\cos x}$; $\int\frac{arctg^7 xdx}{\left(1+x^2\right)}$; $\int x^2e^{-x^3}dx$; $\int e^x\sin\left(e^x\right)dx$; $\int 5^{\sin x}\cos xdx$;

$\int\frac{dx}{\left(4-\ln^2 x\right)x}$; $\int\frac{dx}{x\left(9+\ln^2 x\right)}$; $\int\frac{dx}{x\sqrt{9-\ln^2 x}}$; $\int\frac{dx}{x\sqrt{\ln^2 x+4}}$.

3. $\int x2^x dx$; $\int x^2\ln(x+1)dx$; $\int x\,\mathrm{arcctg}\,x\,dx$; $\int e^{-x}\cos 2xdx$.

4. $\int\frac{3x-4}{x^2-2x+5}dx$; $\int\frac{3x+4}{\sqrt{x^2-2x+5}}dx$; $\int\frac{2x-3}{\sqrt{3-2x-x^2}}dx$; $\int\frac{5x+7}{x^2-5x+10}dx$.

5. $\int\frac{(2x-5)dx}{(x-2)(x+1)(x+3)}$; $\int\frac{\left(x^2+5\right)dx}{x^2(x-1)}$; $\int\frac{\left(x^2+5x-1\right)dx}{x\left(x^2+2x+17\right)}$; $\int\frac{\left(2-x^2\right)dx}{x^3+64}$;

$\int\frac{x^2dx}{x^4-16}$.

6. $\int\sqrt{100-x^2}dx$; $\int\frac{x^2dx}{\sqrt{1-x^2}}$; $\int\sqrt{100+x^2}dx$; $\int\frac{x^2dx}{\sqrt{1+x^2}}$; $\int\frac{\left(2-\sqrt{x}\right)dx}{2\sqrt{x}-x}$.

7. $\int\cos^7 xdx$; $\int\frac{\sin^3 x}{\cos^4 x}dx$; $\int\sin^4 x\cos^2 xdx$; $\int\frac{dx}{4+5\cos x}$.

Варіант 17

1. $\int 2^{-2x}dx$; $\int\sqrt[3]{(2-3x)^5}dx$; $\int\frac{dx}{1-3x}$; $\int\sin 5xdx$; $\int\frac{dx}{6x^2+12}$; $\int\frac{dx}{6x^2-12}$;

$\int\frac{dx}{\sqrt{25x^2-9}}$; $\int\frac{dx}{\sqrt{9-25x^2}}$.

2. $\int\frac{dx}{x(7-2\ln x)}$; $\int\frac{dx}{\left(1+x^2\right)arctg^3 x}$; $\int\frac{(2x+8)dx}{x^2+8x-1}$; $\int\frac{\cos xdx}{6-5\sin x}$; $\int 9\frac{x^3dx}{10+x^8}$;

$\int\sin 2x(3-\cos 2x)^2dx$; $\int\frac{dx}{x\ln x}$; $\int e^{4x}\sqrt{7-e^{4x}}dx$; $\int x3^{x^2}dx$; $\int x^2e^{-x^3}dx$;

$\int \frac{x^6 dx}{\sqrt{5+x^7}}$; $\int x^2 \sqrt{7+3x^3}\,dx$; $\int \frac{dx}{x(5-3\ln x)^2}$; $\int \frac{dx}{\sin^2 x\sqrt{1-ctg^2 x}}$;

$\int e^{\sin 3x}\cos 3x dx$; $\int \frac{(1+5tg\,x)^6\,dx}{\cos^2 x}$; $\int \frac{e^x dx}{e^{2x}-25}$; $\int \frac{e^{3x}dx}{e^{6x}+25}$; $\int \frac{e^{2x}dx}{\sqrt{e^{4x}-25}}$;

$\int \frac{e^{3x}dx}{\sqrt{25-e^{6x}}}$.

3. $\int x\cdot 5^x\,dx$; $\int \frac{\ln x dx}{x^2}$; $\int (2x-3)\sin 3x dx$; $\int e^{-3x}\sin x dx$.

4. $\int \frac{7x-2}{x^2+4x+29}dx$; $\int \frac{(3x-2)dx}{\sqrt{x^2-8x+15}}$; $\int \frac{5x-7}{\sqrt{65+8x-x^2}}dx$; $\int \frac{(4x-7)dx}{x^2+8x+159}$.

5. $\int \frac{(5x-3)dx}{x(x-1)(x-2)}$; $\int \frac{x^5 dx}{(x-3)(x-1)}$; $\int \frac{(x+3)dx}{x^2\left(x^2-4x-5\right)}$; $\int \frac{dx}{x^3-8}$; $\int \frac{2x^2dx}{x^4-81}$.

6. $\int \sqrt{4-x^2}\,dx$; $\int \frac{x^2dx}{\sqrt{9+x^2}}$; $\int \sqrt{4+x^2}\,dx$; $\int \frac{x^2dx}{\sqrt{9-x^2}}$; $\int \frac{3\sqrt{x}\,dx}{7-\sqrt{x}}$.

7. $\int \cos^4 x dx$; $\int \sin 2x \sin 6x dx$; $\int \sin^3 x \cos^4 x dx$; $\int \frac{dx}{3+7\cos x}$.

Варіант 18

1. $\int (7x-1)^8\,dx$; $\int e^{-5x+1}dx$; $\int \cos(4x-1)dx$; $\int \frac{dx}{5x+1}$; $\int \frac{dx}{4x^2+1}$; $\int \frac{dx}{4x^2-1}$;

$\int \frac{dx}{\sqrt{4x^2+1}}$; $\int \frac{dx}{\sqrt{4x^2-1}}$.

2. $\int \frac{x^6dx}{4+7x^7}$; $\int xe^{-x^2}dx$; $\int \frac{dx}{\sin^2 x(6+3ctg\,x)}$; $\int \frac{\cos 2x dx}{3+5\sin 2x}$; $\int \frac{(2x+7)dx}{x^2+7x-8}$;

$\int \frac{e^x dx}{e^x-1}$; $\int \cos 3x\cdot(5+8\sin 3x)^2dx$; $\int \frac{dx}{x\ln^2 x}$; $\int e^x\sqrt{8+5e^x}\,dx$; $\int \frac{xdx}{x^4+1}$;

$\int \frac{e^{tg\,x}dx}{\cos^2 x}$; $\int \frac{2\cos x dx}{(15+4\sin x)^2}$; $\int \frac{x^2dx}{10-x^3}$; $\int \frac{x^3dx}{\sqrt{9+x^4}}$; $\int \frac{dx}{\sin^2 x\sqrt{1+ctg\,x}}$;

$\int x\left(2x^2-5\right)^5 dx$; $\int \frac{dx}{\cos^2 x\sqrt{1-tg^2 x}}$; $\int \frac{dx}{\cos^2 x\left(1+tg^2 x\right)}$; $\int \frac{dx}{\sin^2 x\left(ctg^2 x-1\right)}$; $\int \frac{dx}{\sin^2 x\sqrt{ctg^2 x+1}}$.

3. $\int (2x-1)\sin 4x dx$; $\int x^2 \ln x dx$; $\int \ln^2 x dx$; $\int e^{-2x}\cos 3x dx$.

4. $\int \frac{(2x+9)dx}{x^2-6x+10}$; $\int \frac{(2x+9)dx}{\sqrt{x^2-6x+10}}$; $\int \frac{(x-3)dx}{\sqrt{1+6x-x^2}}$; $\int \frac{(4x+5)dx}{x^2+8x+17}$.

5. $\int \frac{\left(x^2+5\right)dx}{x(x+1)(x+3)}$; $\int \frac{x^2 dx}{(x-2)^2(x-1)}$; $\int \frac{(9x-2)dx}{x^2\left(x^2+4x+13\right)}$; $\int \frac{xdx}{x^3+27}$; $\int \frac{2x^2 dx}{x^4-1}$.

6. $\int \sqrt{9-x^2}dx$; $\int \frac{x^2 dx}{\sqrt{1+x^2}}$; $\int \sqrt{9+x^2}dx$; $\int \frac{x^2 dx}{\sqrt{4-x^2}}$; $\int \frac{dx}{\sqrt{x}\left(\sqrt{x}-2\right)}$.

7. $\int \frac{dx}{\sin^4 x\cos^4 x}$; $\int ctg^5 x dx$; $\int \frac{\sin^2 x}{\cos^3 x}dx$; $\int \frac{dx}{1+\sin x}$.

Варіант 19

1. $\int \sin(3x+7)dx$; $\int \sqrt[3]{1-4x}\,dx$; $\int \frac{dx}{3-8x}$; $\int \frac{dx}{\cos^2 3x}$; $\int \frac{dx}{6x^2+5}$; $\int \frac{dx}{4x^2-81}$; $\int \frac{dx}{\sqrt{4x^2+81}}$; $\int \frac{dx}{\sqrt{4x^2-81}}$.

2. $\int \frac{dx}{(x-1)\left(7+2\ln(x-1)\right)}$; $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}\arcsin x}$; $\int \frac{e^x dx}{\left(e^x+3\right)^2}$; $\int \frac{dx}{x\ln^2 x}$; $\int \frac{x^3 dx}{1-x^8}$; $\int \frac{7x-2}{7x^2-4x+1}dx$; $\int \frac{x^4 dx}{9+x^{10}}$; $\int \frac{\sin 2x dx}{3+\cos 2x}$; $\int \frac{1}{x^2}\sqrt{1+\frac{1}{x}}dx$; $\int x7^{x^2}dx$;

$\int \frac{x^2dx}{\sqrt{5+3x^3}}$; $\int \frac{(1+2tg\,x)^4\,dx}{\cos^2 x}$; $\int e^{\cos 3x}\sin 3xdx$; $\int \frac{\cos xdx}{1+\sin^2 x}$; $\int \frac{dx}{x(2+5\ln x)^3}$;

$\int \frac{dx}{\cos^2 x(1-tg^2x)}$; $\int \frac{2^x dx}{1+2^{2x}}$; $\int \frac{2^x dx}{\sqrt{1+2^{2x}}}$; $\int \frac{2^x dx}{\sqrt{1-2^{2x}}}$; $\int \frac{2^x dx}{2^{2x}-1}$.

3. $\int x3^x dx$; $\int x^2e^{-2x}dx$; $\int \frac{\ln xdx}{x^2}$; $\int e^{-5x}\cos xdx$.

4. $\int \frac{(5x-1)dx}{x^2+4x+29}$; $\int \frac{2x+5}{\sqrt{x^2-8x+15}}dx$; $\int \frac{3x-1}{\sqrt{15+8x-x^2}}dx$; $\int \frac{(4x-7)dx}{x^2+8x+15}$.

5. $\int \frac{(x^2+2)dx}{x(x-1)(x-4)}$; $\int \frac{(x^4+2)dx}{(x+3)(x+1)}$; $\int \frac{(2x+1)dx}{x^2(x^2-4x+5)}$; $\int \frac{x^3dx}{x^3-1}$; $\int \frac{dx}{x^4-16}$.

6. $\int \sqrt{16-x^2}dx$; $\int \frac{x^2dx}{\sqrt{16+x^2}}$; $\int \sqrt{16+x^2}dx$; $\int \frac{x^2dx}{\sqrt{16-x^2}}$; $\int \frac{(2\sqrt{x}-1)dx}{\sqrt{x}-x}$.

7. $\int \sin 2x\sin 8xdx$; $\int \cos 4xdx$; $\int \frac{\cos^2 x}{\sin^3 x}dx$; $\int \frac{dx}{3-7\cos x}$.

Варіант 20

1. $\int (2x-1)^5 dx$; $\int \frac{dx}{\sin^2 3x}$; $\int 2^{-5x}dx$; $\int \frac{dx}{7-4x}$; $\int \frac{dx}{\sqrt{1-49x^2}}$; $\int \frac{dx}{1+3x^2}$;

$\int \frac{dx}{\sqrt{1+49x^2}}$; $\int \frac{dx}{2x^2-9}$.

2. $\int \frac{(1+tg\,x)^3\,dx}{\cos^2 x}$; $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}\arcsin^4 x}$; $\int \frac{dx}{(x+3)\ln(x+3)}$; $\int \frac{(2x+7)dx}{1-7x-x^2}$;

$\int \frac{xdx}{x^4+49}$; $\int \frac{xdx}{\sqrt{16-x^2}}$; $\int \frac{e^{2x}dx}{\sqrt{e^{2x}+4}}$; $\int \frac{e^{3x}dx}{e^{3x}+1}$; $\int \frac{x^2dx}{\sqrt{3-5x^3}}$; $\int x^3e^{-x^4}dx$;

$\int e^{2x}\sin(e^{2x})dx$; $\int 3^{\cos x}\sin xdx$; $\int \frac{xdx}{(4+3x^2)^2}$; $\int \frac{\sin 2xdx}{\sqrt{2-5\cos 2x}}$; $\int \frac{arctg^6 xdx}{1+x^2}$;

$\int\frac{dx}{x\sqrt{\ln^2 x+9}}$; $\int\frac{dx}{x\left(81-\ln^2 x\right)}$; $\int\frac{dx}{x\sqrt{4-\ln^2 x}}$; $\int\frac{dx}{x\left(9+\ln^2 x\right)}$.

3. $\int x^2\sin xdx$; $\int\ln^2 2xdx$; $\int x4^x dx$; $\int e^{6x}\sin 3xdx$.

4. $\int\frac{2x-5}{x^2-2x+26}dx$; $\int\frac{(4x+3)dx}{\sqrt{x^2-2x+26}}$; $\int\frac{(x+4)dx}{x^2+4x+17}$; $\int\frac{(3x+4)dx}{\sqrt{8+2x-x^2}}$.

5. $\int\frac{\left(x^2+x-1\right)dx}{x(x-1)(x+2)}$; $\int\frac{\left(x^3+x-12\right)dx}{x(x+2)}$; $\int\frac{xdx}{(x+1)^2\left(x^2+1\right)}$; $\int\frac{xdx}{x^3+64}$;

$\int\frac{x^2dx}{x^4-1}$.

6. $\int\sqrt{144-x^2}dx$; $\int\frac{x^2dx}{\sqrt{1-x^2}}$; $\int\sqrt{144+x^2}dx$; $\int\frac{x^2dx}{\sqrt{1+x^2}}$; $\int\frac{\sqrt{x}\,dx}{2\sqrt{x}-3}$.

7. $\int tg^6 xdx$; $\int\sin^4 xdx$; $\int\frac{\sin^3 x}{\cos^4 x}dx$; $\int\frac{dx}{4-5\cos x}$.

Варіант 21

1. $\int(3x+7)^{10}dx$; $\int\sqrt[3]{(4x-5)^2}dx$; $\int e^{4x}dx$; $\int\frac{dx}{7x-8}$; $\int\frac{dx}{4x^2+1}$; $\int\frac{dx}{9x^2-4}$;

$\int\frac{dx}{\sqrt{9x^2-4}}$; $\int\frac{dx}{\sqrt{9-4x^2}}$.

2. $\int\frac{x^3dx}{5+3x^4}$; $\int\frac{dx}{\sin^2 x(2-5ctg\,x)}$; $\int\frac{\cos xdx}{4\sin x+7}$; $\int\frac{(2x+6)dx}{x^2+6x-7}$; $\int\frac{e^{2x}dx}{e^{2x}+4}$;

$\int e^x\sqrt{8+7e^x}dx$; $\int\frac{e^{ctg\,x}dx}{\sin^2 x}$; $\int\frac{e^x dx}{e^x+5}$; $\int\frac{xdx}{x^4+9}$; $\int tg(2x+1)dx$; $\int\frac{dx}{x\sqrt[5]{\ln x}}$;

$\int\frac{2\sin xdx}{3+2\cos x}$; $\int\frac{x^3dx}{\sqrt[3]{x^4+4}}$; $\int x\left(9x^2+2\right)^8dx$; $\int\frac{\sqrt{1+3ctg\,x}\,dx}{\sin^2 x}$; $\int xe^{-2x^2}dx$;

$\int\frac{e^x dx}{e^{2x}+4}$; $\int\frac{e^x dx}{\sqrt{e^{2x}+4}}$; $\int\frac{e^x dx}{\sqrt{e^{2x}-4}}$; $\int\frac{e^x dx}{\sqrt{4-e^{2x}}}$.

3. $\int (x-2)\sin 3x dx$; $\int xe^{-2x}dx$; $\int x^6 \ln x dx$; $\int e^x \cos 3x dx$.

4. $\int \frac{(2x-5)dx}{x^2-3x-7}$; $\int \frac{2x+3}{\sqrt{x^2-3x-7}}dx$; $\int \frac{x-2}{\sqrt{2-3x-x^2}}dx$; $\int \frac{(2x+5)dx}{x^2-6x+10}$.

5. $\int \frac{(x^2+5)dx}{x(x+1)(x-2)}$; $\int \frac{x^2 dx}{(x-1)^2(x+2)}$; $\int \frac{(5x+7)dx}{x(x^2+4x+20)}$; $\int \frac{dx}{x^3-8}$;

$\int \frac{dx}{x^4-16}$.

6. $\int \sqrt{9-x^2}dx$; $\int \frac{x^2 dx}{\sqrt{9-x^2}}$; $\int \sqrt{9+x^2}dx$; $\int \frac{x^2 dx}{\sqrt{9+x^2}}$; $\int \frac{\sqrt{x}\,dx}{3+4\sqrt{x}}$.

7. $\int \sin^5 x dx$; $\int \frac{dx}{\sin^4 x \cos^4 x}$; $\int \frac{\cos^3 x}{\sin^2 x}dx$; $\int \frac{dx}{8+7\cos x}$.

Варіант 22

1. $\int \sin(1-2x)dx$; $\int \sqrt{7x-1}\,dx$; $\int \frac{dx}{9x+7}$; $\int e^{1-x}dx$; $\int \frac{dx}{4x^2+121}$;

$\int \frac{dx}{4x^2-121}$; $\int \frac{dx}{\sqrt{4x^2-121}}$; $\int \frac{dx}{\sqrt{121-4x^2}}$.

2. $\int \frac{dx}{x(10+\ln x)}$; $\int \frac{\cos 7x dx}{3+5\sin 7x}$; $\int \frac{dx}{\cos^2 x(2-5tgx)}$; $\int \frac{xdx}{10+x^2}$; $\int \frac{xdx}{25-9x^4}$;

$\int \frac{x\,dx}{\sqrt{16x^2+7}}$; $\int \frac{e^x dx}{\sqrt{e^x-8}}$; $\int \frac{2x+1}{1-x-x^2}dx$; $\int \frac{x^3 dx}{x^8+27}$; $\int \frac{5\sin x dx}{2\cos x+17}$;

$\int \frac{\sqrt{2-tg\,x}\,dx}{\cos^2 x}$; $\int e^{\sin 3x}\cos 3x dx$; $\int \frac{x^3 dx}{100+x^8}$; $\int \frac{dx}{x(10+\ln x)^2}$; $\int \frac{e^{3x}dx}{100+e^{6x}}$;

$\int xe^{-3x^2}dx$; $\int \frac{\sin x dx}{\cos^2 x+16}$; $\int \frac{\cos x dx}{16-\sin^2 x}$; $\int \frac{\cos x dx}{\sqrt{16+\sin^2 x}}$; $\int \frac{\sin x dx}{\sqrt{16-\cos^2 x}}$.

3. $\int \ln 2x dx$; $\int arctg\frac{x}{2}dx$; $\int x^5 \ln x dx$; $\int e^{-4x}\cos x dx$.

4. $\int\frac{(4x+5)dx}{x^2-2x-8}$; $\int\frac{4x-3}{\sqrt{x^2-2x-8}}dx$; $\int\frac{3x+5}{\sqrt{8+2x-x^2}}dx$; $\int\frac{(x-7)dx}{x^2-2x+17}$.

5. $\int\frac{(3x^2+5)dx}{x(x+4)(x-2)}$; $\int\frac{(x^3+x-1)dx}{(x-1)(x+2)}$; $\int\frac{(3x+2)dx}{(x-2)x^2}$; $\int\frac{x^3dx}{x^3+8}$; $\int\frac{x^2dx}{x^4-1}$.

6. $\int\sqrt{100-x^2}\,dx$; $\int\frac{x^2dx}{\sqrt{100-x^2}}$; $\int\sqrt{49+x^2}dx$; $\int\frac{x^2dx}{\sqrt{49+x^2}}$; $\int\frac{\sqrt{x+1}\,dx}{5-7\sqrt{x+1}}$.

7. $\int\cos^3 xdx$; $\int\sin^2 x\cos^4 xdx$; $\int\sin x\sin 2xdx$; $\int\frac{dx}{4+\sin x}$.

Варіант 23

1. $\int \text{ctg}(5x-1)dx$; $\int(7-3x)^7dx$; $\int 2^{3x-7}dx$; $\int\frac{dx}{8-3x}$; $\int\frac{dx}{16x^2-121}$;

$\int\frac{dx}{16x^2+121}$; $\int\frac{dx}{\sqrt{16x^2-121}}$; $\int\frac{dx}{\sqrt{121-16x^2}}$.

2. $\int\frac{x^7dx}{4+5x^8}$; $\int\frac{dx}{\cos^2 x(4-7tg\,x)}$; $\int\frac{\cos xdx}{7+8\sin x}$; $\int\frac{(x+2)dx}{x^2+4x-9}$; $\int\frac{e^{ctg\,x}dx}{\sin^2 x}$;

$\int\sin x(8-3\cos x)^4dx$; $\int\frac{dx}{x\ln^7 x}$; $\int e^x\sqrt{1-2e^x}dx$; $\int\frac{e^xdx}{e^{2x}-1}$; $\int\frac{dx}{1+x^4}$;

$\int\frac{3\sin xdx}{(15-4\cos x)^2}$; $\int 2^{-3x^2}xdx$; $\int\frac{x^2dx}{13+4x^3}$; $\int\frac{x^3dx}{\sqrt[3]{x^4+4}}$; $\int x(3x^2-5)^9dx$;

$\int\frac{dx}{\sin^2 x\sqrt{1+2ctg\,x}}$; $\int\frac{\cos 2xdx}{1+\sin^2 2x}$; $\int\frac{\cos 2xdx}{\sqrt{\sin^2 2x+4}}$; $\int\frac{\cos 2xdx}{\sqrt{4-\sin^2 2x}}$;

$\int\frac{\cos 2xdx}{4-\sin^2 2x}$.

3. $\int x\,arctg\,xdx$; $\int\ln^2 xdx$; $\int(2x+3)\cos 4xdx$; $\int e^{-4x}\sin 2xdx$.

4. $\int\frac{(7x-2)dx}{x^2-3x+2}$; $\int\frac{(7x+1)dx}{\sqrt{x^2-3x+2}}$; $\int\frac{(2x-3)dx}{\sqrt{2-3x-x^2}}$; $\int\frac{(x+7)dx}{x^2+6x+10}$.

5. $\int\frac{\left(x^2+4\right)dx}{(x+2)^2(x+1)}$; $\int\frac{\left(x^2+x-1\right)dx}{x(x-1)(x+3)}$; $\int\frac{(2x-5)dx}{\left(x^2+4x+25\right)x}$; $\int\frac{xdx}{x^3-1}$;

$\int\frac{dx}{x^4-81}$.

6. $\int\sqrt{81-x^2}\,dx$; $\int\frac{x^2dx}{\sqrt{81-x^2}}$; $\int\sqrt{x^2+1}\,dx$; $\int\frac{x^2dx}{\sqrt{x^2+1}}$; $\int\frac{\sqrt{x+1}\,dx}{5+2\sqrt{x+1}}$.

7. $\int\sin^4 xdx$; $\int\frac{dx}{\sin^4 x\cos^4 x}$; $\int ctg^5 xdx$; $\int\frac{dx}{7+9\cos x}$.

Варіант 24

1. $\int(7-5x)^9\,dx$; $\int\cos(1-4x)dx$; $\int e^{-4x}dx$; $\int\frac{dx}{10-3x}$; $\int\frac{dx}{9x^2+100}$;

$\int\frac{dx}{9x^2-100}$; $\int\frac{dx}{\sqrt{9x^2+100}}$; $\int\frac{dx}{\sqrt{100-9x^2}}$.

2. $\int\frac{\arcsin^3 xdx}{\sqrt{1-x^2}}$; $\int\frac{dx}{\sin^2 x(7-8ctg\,x)}$; $\int\frac{(5x+4)dx}{5x^2+8x-1}$; $\int\frac{\ln^5 dx}{x}$; $\int\frac{xdx}{x^4+100}$;

$\int\frac{xdx}{\sqrt{x^4+100}}$; $\int e^{3x}\left(3+5e^{3x}\right)^4dx$; $\int\frac{e^{-x}dx}{e^{-2x}+4}$; $\int x^2\sqrt{6-7x^3}\,dx$; $\int xe^{-7x^2}dx$;

$\int\frac{\sin xdx}{\sqrt{100-9\cos^2 x}}$; $\int\frac{x^2dx}{5-9x^3}$; $\int\frac{\cos 3xdx}{4-5\sin 3x}$; $\int\sin 2x\sqrt{2+\cos 2x}\,dx$; $\int\frac{2^x dx}{1+2^{2x}}$;

$\int\frac{e^x arctg\,e^x dx}{1+e^{2x}}$; $\int\frac{dx}{(x+1)\ln^2(x+1)}$; $\int\frac{dx}{x\left(4-\ln^2 x\right)}$; $\int\frac{\cos 2xdx}{\sqrt{4-\sin^2 2x}}$;

$\int\frac{\sin 3xdx}{\sqrt{9\cos^2 3x+4}}$.

3. $\int\frac{\ln xdx}{x^2}$; $\int\frac{\arcsin xdx}{\sqrt{1+x}}$; $\int(x+4)\sin 4xdx$; $\int e^{-5x}\cos 3xdx$.

4. $\int\frac{(2x-3)dx}{x^2+5x+4}$; $\int\frac{7x-1}{\sqrt{x^2+4x+5}}dx$; $\int\frac{4x+9}{\sqrt{1-x-x^2}}dx$; $\int\frac{(2x+7)dx}{x^2-6x+58}$.

5. $\int\frac{(2x^2+1)dx}{(x-1)(x^2-4x+5)}$; $\int\frac{(x^2-3x+1)dx}{x(x-2)(x+3)}$; $\int\frac{(x+3)dx}{(x+1)(x-1)^2}$; $\int\frac{(1-x^2)dx}{x^3+8}$;

$\int\frac{x^4dx}{x^4-1}$.

6. $\int\sqrt{49-x^2}\,dx$; $\int\frac{x^2dx}{\sqrt{49-x^2}}$; $\int\sqrt{x^2+100}\,dx$; $\int\frac{x^2dx}{\sqrt{x^2+100}}$; $\int\frac{\sqrt{x+1}\,dx}{9+5\sqrt{x+1}}$.

7. $\int tg^4xdx$; $\int\sin^7x\cos xdx$; $\int\frac{\sin^2xdx}{\cos^4x}$; $\int\frac{dx}{7-5\cos x}$.

Варіант 25

1. $\int 7^{-2x}dx$; $\int\sqrt{2-3x}\,dx$; $\int e^{4x-1}dx$; $\int\frac{dx}{4x+7}$; $\int\frac{dx}{49x^2-100}$; $\int\frac{dx}{49x^2+100}$;

$\int\frac{dx}{\sqrt{49x^2+100}}$; $\int\frac{dx}{\sqrt{100-49x^2}}$.

2. $\int\frac{x^6dx}{5+x^7}$; $\int\frac{dx}{x\sqrt[3]{2+\ln x}}$; $\int\frac{e^{2x}dx}{e^{2x}+2}$; $\int\frac{\sin xdx}{\cos x-1}$; $\int\frac{x^2dx}{4x^6+1}$; $\int\frac{\cos xdx}{\sqrt{3+5\sin x}}$;

$\int e^{2x}\sqrt{3-7e^{2x}}\,dx$; $\int\frac{\ln^5(x+1)dx}{x+1}$; $\int x\cdot 5^{-x^2}dx$; $\int\frac{e^{tg\,2x}dx}{\cos^2 2x}$; $\int\frac{e^{3\sqrt{x}}\,dx}{\sqrt{x}}$;

$\int 5^{\cos 2x}\sin 2xdx$; $\int x(11-3x^2)^7dx$; $\int x^3(9-2x^4)^4dx$; $\int\frac{\arcsin^2 2x\,dx}{\sqrt{1-4x^2}}$;

$\int\frac{\cos 2x}{\sqrt{(4-\sin^2 2x)}}\cdot dx$; $\int\frac{\cos 2x}{\sqrt{(4+\sin^2 2x)}}\cdot dx$; $\int\frac{dx}{(1+4x^2)(9+arctg^2 2x)}$;

$\int\frac{dx}{(1+4x^2)(9-arctg^2 2x)}$; $\int\frac{e^{2x}dx}{(e^{2x}+1)^2}$.

3. $\int x^2\sin xdx$; $\int \ln(x+2)dx$; $\int x\cdot arctgxdx$; $\int e^{-x}\cos 5xdx$.

4. $\int\frac{(4x-7)dx}{x^2+4x-5}$; $\int\frac{(6x-1)dx}{x^2+4x+5}$; $\int\frac{3x-7}{\sqrt{x^2+4x-5}}dx$; $\int\frac{7x+1}{\sqrt{5-4x-x^2}}dx$.

5. $\int\frac{(3x^2-5)dx}{(x-1)(x+4)(x+5)}$; $\int\frac{(x-1)dx}{(x-1)^2(x+2)}$; $\int\frac{(7x+4)dx}{(x^2-2x+5)(x-1)}$;

$\int\frac{x^3dx}{x^3-27}$; $\int\frac{dx}{x^4-16}$.

6. $\int\sqrt{49-x^2}\,dx$; $\int\frac{x^2dx}{\sqrt{49-x^2}}$; $\int\sqrt{x^2+144}\,dx$; $\int\frac{x^2dx}{\sqrt{x^2+144}}$; $\int\frac{\sqrt{x+1}\,dx}{5-6\sqrt{x+1}}$.

7. $\int\cos^4 xdx$; $\int\sin^5 x\cos xdx$; $\int\frac{\cos^6 xdx}{\sin^2 x}$; $\int\frac{dx}{3+8\cos x}$.

Варіант 26

1. $\int\frac{dx}{3x+5}$; $\int e^{5-3x}dx$; $\int 3^{\frac{x}{2}+5}dx$; $\int\sin(7-x)dx$; $\int\frac{dx}{2x^2+16}$; $\int\frac{dx}{\sqrt{2x^2-16}}$;

$\int\frac{dx}{\sqrt{16-2x^2}}$; $\int\frac{dx}{16-2x^2}$.

2. $\int\frac{11x^5dx}{13+10x^6}$; $\int\frac{2\cos xdx}{3+4\sin^2 x}$; $\int\frac{dx}{x(11\ln^2 x-16)}$; $\int\frac{5dx}{(2+tg^2x)\cos^2 x}$;

$\int\frac{x^3dx}{9+x^8}$; $\int\sin 7x(\cos 7x-8)^2dx$; $\int\frac{\sqrt{arctgx}\,dx}{1+x^2}$; $\int\frac{(7-8x)dx}{-4x^2+7x-10}$;

$\int\frac{e^xdx}{\sqrt{3+e^x}}$; $\int x^2e^{x^3}dx$; $\int(3x^2-8)xdx$; $\int e^{\cos 3x}\sin 3xdx$; $\int x^3\sqrt{3x^4-8}\,dx$;

$\int 8^{x^4}x^3dx$; $\int\frac{x^3dx}{\sqrt[5]{x^4+1}}$; $\int\frac{dx}{x(4-6\ln x)^5}$; $\int\frac{e^{2x}dx}{\sqrt[3]{e^{2x}+5}}$; $\int\frac{e^{3x}dx}{9-5e^{6x}}$; $\int\frac{e^{2x}dx}{4+5e^{6x}}$;

$\int\frac{e^{2x}dx}{\sqrt{e^{4x}-1}}$.

3. $\int (x+1)2^x dx$; $\int (2x-3)\sin 3x dx$; $\int \ln(x-3)dx$; $\int 2^x \sin x dx$.

4. $\int \frac{3-5x}{x^2-2x+8}dx$; $\int \frac{3x+1}{\sqrt{x^2-2x+8}}dx$; $\int \frac{3x+4}{\sqrt{3-2x-x^2}}dx$; $\int \frac{2x-3}{x^2+4x+17}dx$.

5. $\int \frac{(x^2+x-1)dx}{x(x+2)(x-3)}$; $\int \frac{(x^2+5x-1)dx}{x(x^2+2x+1)}$; $\int \frac{(3x-2)dx}{x^2(x-1)}$; $\int \frac{(1-x^2)dx}{1+x^3}$;

$\int \frac{dx}{x^4-81}$.

6. $\int \sqrt{9-x^2}\,dx$; $\int \frac{x^2dx}{\sqrt{1-x^2}}$; $\int \sqrt{x^2+16}\,dx$; $\int \frac{x^2dx}{\sqrt{x^2+1}}$; $\int \frac{2+\sqrt{x}\,dx}{3-2\sqrt{x}}$.

7. $\int \sin^2 3x dx$; $\int \frac{dx}{\sin^2 x \cos^2 x}$; $\int \frac{\cos^2 x dx}{\sin^3 x}$; $\int \frac{dx}{1+2\cos x}$.

Варіант 27

1. $\int \frac{dx}{(4-7x)^5}$; $\int (9x-2)^2 dx$; $\int e^{-6x-8}dx$; $\int \cos(4-2x)dx$; $\int \frac{dx}{10-20x}$;

$\int \frac{dx}{\sqrt{20-9x^2}}$; $\int \frac{dx}{9x^2+20}$; $\int \frac{dx}{9x^2-20}$; $\int \frac{dx}{\sqrt{9x^2+20}}$.

2. $\int \frac{\arccos^5 x dx}{\sqrt{1-x^2}}$; $\int \frac{2x-3}{x^2+3x-10}dx$; $\int \frac{\sin 4x dx}{(\cos 4x-5)^3}$; $\int \frac{x^2dx}{\sqrt{9x^3+2}}$; $\int \frac{e^{2x}dx}{(e^{2x}+5)^4}$;

$\int \frac{e^x dx}{\sqrt{e^{2x}+5}}$; $\int x\cdot e^{x^2}dx$; $\int \frac{\sqrt[3]{(6+\ln x)}\,dx}{x}$; $\int \frac{\cos 5x dx}{\sqrt[3]{\sin 5x-3}}$; $\int \frac{x^3dx}{x^8-25}$; $\int \frac{x^3dx}{x^8+25}$;

$\int \frac{x^3dx}{\sqrt{25-x^8}}$; $\int \frac{(2tg\, x+5)^2\,dx}{\cos^2 x}$; $\int \frac{4^{\ln 2x}}{x}dx$; $\int \frac{2ctg\, x+1}{\sin^2 x}dx$; $\int \frac{\sqrt[4]{arctg^3 x}}{1+x^2}dx$;

$\int 3^{\sin x}\cos x\, dx$; $\int \frac{7e^{tg\, x}}{\cos^2 x}dx$; $\int x\cdot 8^{x^2}\,dx$; $\int x\sqrt[4]{2-x^2}\,dx$.

3. $\int (x^2+3)\cdot arcctg\, 2x dx$; $\int (8x-7)\cos 2x dx$; $\int x^2 e^{3x+2}dx$; $\int e^{3x}\sin 3x dx$.

4. $\int \frac{9-2x}{\sqrt{x^2-3x-7}}dx$; $\int \frac{x-7}{x^2+x-4}dx$; $\int \frac{2x+5}{x^2-3x+4}dx$; $\int \frac{1}{\sqrt{9-x^2-2x}}dx$.

5. $\int \frac{x^2-3x+4}{x(x-2)^2}dx$; $\int \frac{x^2-x-10}{x^3-9x+x^2-9}dx$; $\int \frac{dx}{x^4-16}dx$; $\int \frac{3x+1}{x(x-2)(x-1)}dx$; $\int \frac{dx}{x^3-125}dx$.

6. $\int \frac{xdx}{\sqrt{x^2+49}}$; $\int \frac{\sqrt{x^2-16}}{x^2}dx$; $\int \sqrt{49-x^2}\,dx$; $\int \sqrt{49+x^2}\,dx$; $\int \frac{24}{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}}dx$.

7. $\int \frac{\sin^2 3x}{\cos 3x}dx$; $\int tg^7 xdx$; $\int \cos 7x \sin 5xdx$; $\int \cos^4 2xdx$.

Варіант 28

1. $\int (3x+6)^4\,dx$; $\int \frac{dx}{(6x-3)^5}$; $\int \frac{dx}{20x-10}$; $\int \cos(4+2x)dx$; $\int \frac{dx}{\sqrt{18-9x^2}}$; $\int \frac{dx}{\sqrt{9x^2+18}}$; $\int \frac{dx}{9x^2+18}$; $\int \frac{dx}{9x^2-18}$.

2. $\int \frac{x^2dx}{(9x^3+2)^4}$; $\int \frac{\sqrt{\arcsin x}\,dx}{\sqrt{1-x^2}}$; $\int \frac{(6x-4)dx}{3x^2-4x+1}$; $\int \sin x\sqrt[4]{(1-3\cos x)}\,dx$;

$\int xe^{-x^2}dx$; $\int \frac{(3tg\,x-8)^3\,dx}{\cos^2 x}$; $\int \frac{x^2dx}{8+x^6}$; $\int \frac{dx}{x(5+6\ln x)^2}$; $\int \frac{\cos xdx}{\sqrt[3]{2\sin x+3}}$;

$\int \frac{e^{8x}dx}{e^{8x}-1}$; $\int \frac{x^2dx}{\sqrt[3]{7+5x^3}}$; $\int \frac{e^x dx}{\sqrt{8-e^{2x}}}$; $\int \frac{x^3dx}{x^4+21}$; $\int \sin 2x\cdot 12^{\cos 2x}dx$;

$\int \frac{2x}{16+x^2}dx$; $\int \frac{ctg(\ln x)}{x}dx$; $\int \frac{x\,dx}{\sqrt{10-x^2}}$; $\int \frac{\sqrt{tg^3 x}}{\cos^2 x}dx$; $\int \frac{e^x dx}{\sqrt{e^{2x}-16}}$; $\int x\cdot 8^{x^2-2}dx$.

3. $\int x^2 \arccos xdx$; $\int (3-2x)\ln 2xdx$; $\int arcctg(1-2x)dx$; $\int e^{2x}\sin 2xdx$.

4. $\int\frac{x}{x^2+x-2}dx$; $\int\frac{7+4x}{\sqrt{x^2+6x-8}}dx$; $\int\frac{1}{\sqrt{-x^2-2x+4}}dx$; $\int\frac{x}{x^2+4x+5}dx$.

5. $\int\frac{(x-24)dx}{x^3+x^2-12x}$; $\int\frac{(16x-27)dx}{(x-2)^2(x+3)}$; $\int\frac{2x+5}{x(1+1)(3+x)}dx$; $\int\frac{dx}{x^3+8}dx$; $\int\frac{dx}{x^4-81}dx$.

6. $\int\sqrt{25-x^2}\,dx$; $\int\sqrt{100+x^2}\,dx$; $\int\frac{x^2}{\sqrt{x^2+100}}dx$; $\int\frac{x^2}{\sqrt{25-x^2}}dx$; $\int\frac{\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}-2}dx$.

7. $\int tg^3 3xdx$; $\int\sin^2 9xdx$; $\int\sin 7x\cos 5xdx$; $\int\frac{\sin^2 x}{\cos^4 x}dx$.

Варіант 29

1. $\int\frac{dx}{(9x-5)^8}$; $\int(1-9x)^6\,dx$; $\int\sin(4-x)dx$; $\int e^{-7x-8}dx$; $\int\frac{dx}{\sqrt{18-15x^2}}$; $\int\frac{dx}{\sqrt{15x^2+18}}$; $\int\frac{dx}{15x^2+18}$; $\int\frac{dx}{15x^2-18}$.

2. $\int x\cdot 3^{-x^2}\,dx$; $\int\frac{dx}{\arcsin^5 x\sqrt{1-x^2}}$; $\int\frac{(8x-9)dx}{4x^2-9x+2}$; $\int\frac{\sin 5xdx}{\sqrt[3]{\cos 5x-3}}$; $\int\frac{x^2dx}{\sqrt[5]{9x^3-4}}$; $\int\sin 2x(3+5\cos 2x)dx$; $\int\frac{(3-2tg\,x)^2\,dx}{\cos^2 x}$; $\int\frac{dx}{x(5-6\ln x)^2}$: $\int x\cdot\sqrt[5]{5+x^2}\,dx$; $\int x\sin\left(1+x^2\right)dx$; $\int\frac{(arcctg\,x)^3}{1+x^2}dx$; $\int\frac{e^{4x}dx}{e^{8x}+8}$; $\int\frac{e^{2x}dx}{\sqrt{e^{4x}-16}}$; $\int\frac{e^x dx}{\sqrt{10-e^{2x}}}$; $\int\frac{e^{3x}dx}{e^{6x}-25}$; $\int\sin x\cdot tg(\cos x)dx$; $\int x^3\sin\left(1-x^4\right)dx$; $\int\frac{e^{ctg\,x}}{\sin^2 x}dx$; $\int\frac{\sqrt[3]{arctg\,x+1}\,dx}{1+x^2}$; $\int\frac{1}{x\ln^3 x}dx$.

3. $\int\left(7-2x^2\right)arctg\,2xdx$; $\int(3-2x)\ln 2xdx$; $\int(3x-2)\sin xdx$; $\int e^{-\frac{x}{5}}\sin xdx$.

4. $\int\frac{x}{x^2+3x+2}dx$; $\int\frac{7x+5}{x^2-x-1}dx$; $\int\frac{3x-7}{\sqrt{x^2-4x-1}}dx$; $\int\frac{3x-7}{\sqrt{1-4x-x^2}}dx$.

5. $\int\frac{\left(x^2-x-6\right)dx}{(x-1)\left(x^2+6x+5\right)}$; $\int\frac{(x+4)dx}{\left(x^2-x-6\right)(x+2)}$; $\int\frac{x^2dx}{(x-1)(x+2)^2}$; $\int\frac{dx}{x^3-8}$;

$\int\frac{dx}{x^4-16}$.

6. $\int\sqrt{x^2-121}\,dx$; $\int\sqrt{x^2+121}\,dx$; $\int\frac{x^2dx}{\sqrt{x^2-81}}$; $\int\frac{x^2dx}{\sqrt{x^2+81}}$; $\int\frac{\sqrt{x}\,dx}{2x-1}$.

7. $\int\sin^4 4x\cos^3 4xdx$; $ctg^{-4}2xdx$; $\int\cos 4x\cos 5xdx$; $\int\sin^2 7xdx$.

Варіант 30

1. $\int\frac{dx}{(7x-9)^4}$; $\int 3^{1-x}dx$; $\int(6+3x)^3dx$; $\int\frac{dx}{20x+10}$; $\int\frac{dx}{\sqrt{15-9x^2}}$;

$\int\frac{dx}{\sqrt{9x^2+15}}$; $\int\frac{dx}{9x^2+15}$; $\int\frac{dx}{9x^2-15}$.

2. $\int\sin x\cdot(1-3\cos x)^4dx$; $\int\frac{(8x-7)dx}{4x^2-7x+8}$; $\int\frac{\arcsin^4 xdx}{\sqrt{1-x^2}}$; $\int\frac{2^{\sqrt[3]{x^2}}}{\sqrt[3]{x}}dx$;

$\int x\cdot 8^{3-x^2}dx$; $\int\frac{\sqrt[4]{2+tg\,x}}{\cos^2 x}dx$; $\int x\left(3+x^2\right)^{15}dx$; $\int\frac{\sin 2x}{\cos^3 2x}dx$; $\int\frac{x^4dx}{\sqrt{x^5-1}}$;

$\int\frac{\left(\sqrt{x}+1\right)^2}{2\sqrt{x}}dx$; $\int\frac{5e^{2tg\,x}}{\cos^2 x}dx$; $\int\frac{arctg^6 x}{1+x^2}dx$; $\int x^2\sqrt[3]{5+x^3}dx$; $\int\frac{\sqrt[3]{ctg\,x}}{\sin^2 x}dx$;

$\int x^3e^{x^4+3}dx$; $\int\frac{\sqrt[4]{\ln x}}{x}dx$; $\int\frac{e^{8x}dx}{e^{8x}-1}$; $\int\frac{dx}{2x(5-6\ln x)^3}$; $\int\frac{\arcsin 3xdx}{\sqrt{1-9x^2}}$; $\int\frac{x^4dx}{9+x^{10}}$.

3. $\int(x+1)\sin 4xdx$; $\int(x+3)\cdot\mathrm{arctg}\,xdx$; $\int(x-2)e^{3x-1}dx$; $\int\cos 2xe^{2x}dx$.

4. $\int\frac{(x+2)dx}{x^2+3x-4}$; $\int\frac{2x-1}{x^2+4x+5}dx$; $\int\frac{x}{\sqrt{x^2-2x+4}}dx$; $\int\frac{x+2}{\sqrt{4+2x-x^2}}dx$.

5. $\int\frac{3x+2}{x(x+1)^3}dx$; $\int\frac{(4x+1)dx}{x^3+4x}$; $\int\frac{x+8}{x(x-4)(x+1)}dx$; $\int\frac{dx}{x^3+27}$; $\int\frac{dx}{x^4-1}$.

6. $\int\sqrt{x^2+9}\,dx$; $\int\sqrt{x^2-9}\,dx$; $\int\frac{dx}{x^2\sqrt{1-x^2}}$; $\int\frac{\sqrt{9-x^2}}{x^2}dx$; $\int\frac{\sqrt{x}}{x+1}dx$.

7. $\int ctg^3 2xdx$; $\int\cos^3 2x\sin^5 2xdx$; $\int\sin 2x\cos 4xdx$; $\int\frac{\cos^2 2x}{\sin 2x}dx$.

Зразок виконання індивідуального завдання № 8

Наведемо приклади обчислення невизначених інтегралів.

Завдання 1 передбачає застосування методу безпосереднього інтегрування, тобто використання таблиці інтегралів та властивостей інтегралів.

$$\int\sin(2x-12)dx=-\frac{1}{2}\cos(2x-12)+c;$$

$$\int\frac{dx}{5-9x}=-\frac{1}{9}\ln|5-9x|+c;$$

$$\int e^{4x+3}dx=\frac{1}{4}e^{4x+3}+c;$$

$$\int\frac{dx}{\sqrt{3-6x^2}}=\int\frac{dx}{\sqrt{6\left(\frac{1}{2}-x^2\right)}}=\frac{1}{\sqrt{6}}\int\frac{dx}{\sqrt{\left(\frac{1}{2}-x^2\right)}}=\frac{1}{\sqrt{6}}\arcsin\sqrt{2}x+c.$$

Для обчислення наведених прикладів застосовується властивість інтегралів: якщо відомий інтеграл $\int f(x)dx=F(x)+c$, то інтеграл $\int f(ax+d)dx=\frac{1}{a}F(ax+b)+c$.

Обчислення інтегралів **завдання 2** потребує застосування методу заміни змінної.

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{4-\ln^2 x}} = \left| \begin{array}{l} t = \ln x \\ dt = (\ln x)' \, dx = \dfrac{1}{x} dx \end{array} \right| = \int \frac{dt}{\sqrt{4-t^2}} = \arcsin\frac{t}{2} + c =$$

$$= \arcsin\frac{\ln x}{2} + c;$$

$$\int \frac{\sin x dx}{\cos^5 x} = \left| \begin{array}{l} t = \cos x \\ dt = -\sin x dx \end{array} \right| = -\int \frac{dt}{t^5} = \frac{1}{4t^4} + c = \frac{1}{4\cos x^4} + c;$$

$$\int \frac{x^5 dx}{\sqrt{x^{12}-5}} = \left| \begin{array}{l} t = x^6 \\ dt = 6x^5 dx \end{array} \right| = \frac{1}{6}\int \frac{dt}{\sqrt{t^2-5}} = \frac{1}{6}\ln\left| t + \sqrt{t^2-5} \right| + c =$$

$$= \frac{1}{6}\ln\left| x^6 + \sqrt{x^{12}-5} \right| + c;$$

$$\int \frac{x^3 dx}{6x^4+5} = \left| \begin{array}{l} t = 6x^4+5 \\ dt = 24x^3 dx \end{array} \right| = \frac{1}{24}\int \frac{dt}{t} = \frac{1}{24}\ln|t| + c = \frac{1}{24}\ln\left|6x^4+5\right| + c;$$

$$\int x \cdot 10^{x^2} dx = \left| \begin{array}{l} t = x^2 \\ dt = 2x dx \end{array} \right| = \frac{1}{2}\int 10^t dt = \frac{1}{2} \cdot \frac{10^t}{\ln 10} + c = \frac{10^{x^2}}{2\ln 10} + c.$$

У **завданні 3** невизначені інтеграли обчислюються за допомогою інтегрування частинами.

$$\int (2x+5)\sin 4x dx = \left| \begin{array}{ll} u = 2x+5 & du = 2dx \\ dv = \sin 4x dx & v = -\dfrac{1}{4}\cos 4x \end{array} \right| =$$

$$= -\frac{1}{4}(2x+5)\cos 4x + \frac{1}{2}\int \cos 4x dx = -\frac{1}{4}(2x+5)\cos 4x + \frac{1}{8}\sin 4x + c;$$

$$\int (x^2+2)\ln x dx = \begin{vmatrix} u=\ln x & du=\dfrac{1}{x}dx \\ dv=(x^2+2)dx & v=\dfrac{x^3}{3}+2x \end{vmatrix} =$$

$$= \left(\frac{x^3}{3}+2x\right)\ln x - \int\left(\frac{x^3}{3}+2x\right)\frac{1}{x}dx = \left(\frac{x^3}{3}+2x\right)\ln x - \int\left(\frac{x^2}{3}+2\right)dx =$$

$$= \left(\frac{x^3}{3}+2x\right)\ln x - \frac{x^3}{9} - 2x + c.$$

$$\int e^x\cos\frac{x}{3}dx = \begin{vmatrix} u=e^x & du=e^x dx \\ dv=\cos\dfrac{x}{3}dx & v=3\sin\dfrac{x}{3} \end{vmatrix} = 3e^x\sin\frac{x}{3} - 3\int e^x\sin\frac{x}{3}dx =$$

$$= \begin{vmatrix} u=e^x & du=e^x dx \\ dv=\sin\dfrac{x}{3}dx & v=-3\cos\dfrac{x}{3} \end{vmatrix} = 3e^x\sin\frac{x}{3} - 3\left(-3e^x\cos\frac{x}{3} + 3\int e^x\cos\frac{x}{3}dx\right)$$

Позначимо $I=\int e^x\cos\frac{x}{3}dx$ та перепишемо останній вираз у такому вигляді:

$$I = 3e^x\sin\frac{x}{3} + 9e^x\cos\frac{x}{3} - 9I.$$

Виразивши з останнього рівняння невідому I, остаточно отримаємо:

$$I=\int e^x\cos\frac{x}{3}dx = \frac{3}{10}\left(e^x\sin\frac{x}{3} + 3e^x\cos\frac{x}{3}\right) + c.$$

У **завданні 4** необхідно обчислити інтеграли від раціональних функцій та виразів, які містять квадратний тричлен.

$$\int\frac{(7-8x)dx}{x^2-6x+2} = \int\frac{(7-8x)dx}{(x-3)^2-7} = \begin{vmatrix} t=x-3 \\ dt=dx \\ x=t+3 \end{vmatrix} = \int\frac{(7-8(t+3))dt}{t^2-7} =$$

$$= \int \frac{(-17-8t)dt}{t^2-7} = -17\int \frac{dt}{t^2-7} - 8\int \frac{tdt}{t^2-7} = -\frac{17}{2\sqrt{7}}\ln\left|\frac{t-\sqrt{7}}{t+\sqrt{7}}\right| -$$

$$-\frac{8}{2}\ln\left|t^2-7\right| + c = -\frac{17}{2\sqrt{7}}\ln\left|\frac{x-3-\sqrt{7}}{x-3+\sqrt{7}}\right| - 4\ln\left|x^2-6x+2\right| + c.$$

Аналогічним методом розв'язують інтеграли, які містять квадратний тричлен у знаменнику під знаком кореня.

У **завданні 5** необхідно обчислити інтеграли від раціональних дробів.

Обчислити інтеграл $\int \frac{(x-1)dx}{(x-2)(x+3)}$.

Підінтегральний правильний раціональний дріб можна розкласти на суму елементарних дробів першого типу, тобто подати у вигляді:

$$\frac{(x-1)}{(x-2)(x+3)} = \frac{A}{(x-2)} + \frac{B}{(x+3)}$$

Для визначення коефіцієнтів A та B треба привести останній вираз до спільного знаменника:

$$\frac{(x-1)}{(x-2)(x+3)} = \frac{A(x+3)+B(x-2)}{(x-2)(x+3)}.$$

Порівнюючи початковий дріб і отриманий на останньому етапі, зазначимо, що дроби будуть дорівнювати, якщо будуть дорівнювати чисельники. Тобто прирівнюємо чисельники, і за теоремою про рівність двох многочленів одержуємо систему для визначення невідомих коефіцієнтів A та B.

$$x-1 = x(A+B)+3A-2B.$$

$$\begin{array}{l|l} x^1 & \quad 1 = A+B \\ x^0 & \quad -1 = 3A-2B \end{array}$$

Розв'язавши систему, отримаємо: $A = \frac{1}{5}; B = \frac{4}{5}$.

Таким чином:

$$\frac{(x-1)}{(x-2)(x+3)}=\frac{1/5}{x-2}+\frac{4/5}{x+3};$$

$$\int\frac{(x-1)dx}{(x-2)(x+3)}=\frac{1}{5}\int\frac{dx}{x-2}+\frac{4}{5}\int\frac{dx}{x+3}=\frac{1}{5}\ln|x-2|+\frac{4}{5}\ln|x+3|+c\,.$$

Завдання 6 відноситься до теми інтегрування ірраціональних функцій. У кожному прикладі треба обрати заміну змінної таким чином, щоб позбавитися ірраціональності.

$$\int\frac{dx}{\sqrt{x}\left(\sqrt{x}-1\right)}=\left|\begin{matrix}x=t^2\\ dx=2tdt\end{matrix}\right|=2\int\frac{tdt}{t(t-1)}=2\int\frac{dt}{t-1}=2\ln|t-1|+c=$$

$$=2\ln\left|\sqrt{x}-1\right|+c.$$

$$\int\frac{\sqrt{9-x^2}dx}{x^4}=\left|\begin{matrix}x=3\sin t,\ t=\arcsin\dfrac{x}{3}\\ dx=3\cos tdt\end{matrix}\right|=\frac{3}{81}\int\frac{\sqrt{9-9\sin^2 t}\cos tdt}{\sin^4 t}=$$

$$=\frac{1\cdot 3}{27}\int\frac{\cos^2 tdt}{\sin^4 t}=\frac{1}{9}\int\frac{ctg^2tdt}{\sin^2 t}=\left|\begin{matrix}y=ctgt\\ dy=-\dfrac{1}{\sin^2 t}dt\end{matrix}\right|=-\frac{1}{9}\int y^2dy=$$

$$=-\frac{1}{9}\cdot\frac{y^3}{3}+c=-\frac{1}{27}ctg^3t+c=-\frac{1}{27}ctg^3\arcsin\frac{x}{3}+c.$$

.

Завдання 7 відноситься до теми інтегрування тригонометричних виразів.

Розглянемо інтеграл вигляду: $\int\sin^n x\cos^m x\,dx$, якщо хоча б один зі степенів непарний.

$$\int\cos^4 x\sin^5 xdx=\int\cos^4 x\sin^4 x\sin xdx=\left|\begin{matrix}t=\cos x\\ dt=-\sin xdx\end{matrix}\right|=$$

$$=-\int t^4\left(1-t^2\right)^2dt=-\int\left(t^4-2t^6+t^8\right)dt=-\frac{t^5}{5}+2\frac{t^7}{7}-\frac{t^9}{9}+c=$$

$$= -\frac{cox^5 x}{5} + 2\frac{\cos^7 x}{7} - \frac{\cos^9 x}{9} + c.$$

Наступний приклад відноситься до інтегрування того ж вигляду функцій, але для випадку парних і невід'ємних степенів n, m.

$$\int \cos^4 5x dx = \int \left(\cos^2 5x\right)^2 dx = \int \left(\frac{1+\cos 10x}{2}\right)^2 dx =$$

$$= \frac{1}{4}\int \left(1 + 2\cos 10x + \cos^2 10x\right) dx = \frac{1}{4}x + \frac{1}{20}\sin 10x + \frac{1}{8}\int \left(1 + \cos 20x\right) dx =$$

$$= \frac{1}{4}x + \frac{1}{20}\sin 10x + \frac{1}{8}x + \frac{1}{160}\sin 20x + c = \frac{3}{8}x + \frac{1}{20}\sin 10x + \frac{1}{160}\sin 20x + c.$$

Розглянемо приклад інтегрування за допомогою універсальної тригонометричної підстановки.

$$\int \frac{1+\sin x}{\sin x\left(1+\cos x\right)} dx = \left| \begin{array}{ll} t = tg\dfrac{x}{2}; & \sin x = \dfrac{2t}{1+t^2} \\ dx = \dfrac{2dt}{1+t^2}; & \cos x = \dfrac{1-t^2}{1+t^2} \end{array} \right| = \int \frac{\left(1 + \dfrac{2t}{1+t^2}\right)\dfrac{2dt}{1+t^2}}{\dfrac{2t}{1+t^2}\left(1 + \dfrac{1-t^2}{1+t^2}\right)} =$$

$$= \int \frac{\left(t^2 + 2t + 1\right) dt}{2t} = \frac{1}{2}\int \left(t + 2 + \frac{1}{t}\right) dt = \frac{t^2}{4} + t + \frac{\ln|t|}{2} + c = \frac{tg^2 \dfrac{x}{2}}{4} + tg\frac{x}{2} +$$

$$+ \frac{\ln\left|tg\dfrac{x}{2}\right|}{2} + c.$$

Індивідуальне завдання № 9
Визначений інтеграл

Зміст завдання

1. Обчислити визначені інтеграли.
2. Знайти площу фігури, обмеженої заданими функціями. Зробити рисунок.
3. Знайти об'єм тіла, утвореного обертанням навколо осі Ox, фігури, що обмежена заданими лініями. Зробити малюнок.

4. Знайти довжину дуги кривої, що задана рівняннями в прямокутній системі координат.

Варіант 1

1. а) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{5-3\cos x}$; б) $\int_{-1}^{1} \frac{xdx}{\sqrt{5-4x}}$; в) $\int_1^3 \ln x dx$.

2. $y = 2\sqrt{x}, \quad 6 - y = 0, \quad x = 0.$

3. $xy = 3, \quad x + y = 4.$

4. $y = \sqrt{1-x^2} + \arcsin x, \;\; 0 \le x \le \frac{7}{9}.$

Варіант 2

1. а) $\int_0^{\frac{7}{3}} \frac{x+1}{\sqrt[3]{3x+1}} dx$; б) $\int_{-\pi}^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 2x dx$; в) $\int_2^3 \frac{dx}{2x^2+3x-2}$;

2. $y = 0, \quad y = 4(x-2), \;\; y = (x-1)^2.$

3. $y = 0, \;\; y = 2 - x, \;\; y = \sqrt{x}.$

4. $y = 2 + \arcsin\sqrt{x} + \sqrt{x - x^2}, \;\; \frac{1}{4} \le x \le 1.$

Варіант 3

1. а) $\int_0^1 \frac{x^3 dx}{x^2+1}$; б) $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{\sin^3 x} dx$; в) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\cos x dx$.

2. $y = \ln x, \quad x = e, \quad x = e^2, \quad y = 0.$

3. $y = x^2, \quad x = 2, \quad y = 0.$

4. $y = \sqrt{1-x^2} + \arccos x, \;\; 1 \le x \le \frac{8}{9}.$

Варіант 4

1. а) $\int\limits_0^1 \frac{4arctgx - x}{1+x^2}dx;$ б) $\int\limits_1^4 \frac{1+\sqrt{x}}{x^2}dx;$ в) $\int\limits_1^2 x\ln x dx.$

2. $y = \sqrt{4-x^2}, \quad y = 0, \quad x = 0, \quad x = 1.$

3. $y = 5\cos x, \quad y = \cos x, \quad 0 \le x \le \frac{\pi}{2}.$

4. $y = -\arccos\sqrt{x} + \sqrt{x-x^2}, \ 0 \le x \le \frac{1}{4}.$

Варіант 5

1. а) $\int\limits_{-1}^{15} \frac{dx}{\sqrt{x+10}-\sqrt{x+1}};$ б) $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin 4x \sin 5x dx;$ в) $\int\limits_1^2 \ln(x+1)dx.$

2. $y = x^2 - 2x + 3, \quad y - 3x + 1 = 0.$

3. $y + x = 2, \quad x^2 = y.$

4. $y = \arcsin x - \sqrt{1-x^2}, \ 0 \le x \le \frac{5}{16}.$

Варіант 6

1. а) $\int\limits_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} (tgx + ctgx)^{-1} dx;$ б) $\int\limits_1^2 \frac{\sqrt{x^2-1}}{x}dx;$ в) $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} x\sin x dx.$

2. $y = x^2 - x, \quad y = 3x.$

3. $y = 0, \quad y = 2x^2 + 1, \quad x = -1, \ x = 1.$

4. $y = \sqrt{x-x^2} - \arccos\sqrt{x} + 5, \ \frac{1}{9} \le x \le 1.$

Варіант 7

1. а) $\int_{-1}^{0} \frac{tg(x+1)}{\cos^2(x+1)}dx$; б) $\int_{2}^{9} \sqrt[3]{x-1}dx$; в) $\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{1+2\sin x}$.

2. $y=\ln x, \quad y=0, \quad x=2.$

3. $y=x^3, \quad y=\sqrt{x}.$

4. $y=\sqrt{1-x^2}-\arccos x+1, \ 0\le x\le \frac{9}{16}.$

Варіант 8

1. а) $\int_{1}^{3} \frac{1-\sqrt{x}}{\sqrt{x}(x+1)}dx$; б) $\int_{0}^{1} \frac{dx}{e^x+e^{-x}}$; в) $\int_{1}^{2} \ln(x+2)dx.$

2. $y=(x-4)^2, \quad y=16-x^2, \quad y=0.$

3. $y=x^3, \quad y=x.$

4. $y=\ln\sin x, \ \frac{\pi}{3}\le x\le \frac{\pi}{2}.$

Варіант 9

1. а) $\int_{1}^{e} \frac{\sqrt{1+\ln x}}{x}dx$; б) $\int_{0}^{4} \frac{dx}{1+\sqrt{2x+1}}$; в) $\int_{0}^{1} arctgx dx.$

2. $y=2x-x^2, \ y+x=0.$

3. $y=x^3, \quad y=x^2.$

4. $y=1+\arcsin x-\sqrt{1-x^2}, \ 0\le x\le \frac{3}{4}.$

Варіант 10

1. а) $\int\limits_4^9 \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1}dx;$ б) $\int\limits_0^1 \frac{dx}{x^2+4x+5};$ в) $\int\limits_0^1 x\ln(x+1)dx.$

2. $y+x^2=0, \quad x+y+2=0.$

3. $y=e^{1-x}, \ y=0, \ x=0, \ x=1.$

4. $y=-\ln\cos x, \ \ 0\le x\le\frac{\pi}{6}.$

Варіант 11

1. а) $\int\limits_1^{e^2} \frac{dx}{x\sqrt{1+\ln x}};$ б) $\int\limits_3^8 \frac{xdx}{\sqrt{x+1}};$ в) $\int\limits_0^1 xe^{2x}dx.$

2. $y=2x-x^2+3, \ y=x^2-4x+3.$

3. $y=2x-x^2, \ y=x.$

4. $y=\frac{e^x+e^{-x}}{2}+3, \ \ 0\le x\le 2.$

Варіант 12

1. а) $\int\limits_1^e \frac{dx}{x\left(1-\ln^2 x\right)};$ б) $\int\limits_0^1 \frac{\sqrt{x}}{1+x}dx;$ в) $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} x\cos xdx.$

2. $y=(x+1)^2, \quad y^2=x+1.$

3. $y=2x-x^2, \ y=2x, \quad y=1.$

4. $y=\arccos\sqrt{x}-\sqrt{x-x^2}+4, \ \ 0\le x\le\frac{1}{2}.$

Варіант 13

1. а) $\int\limits_{e+1}^{e^2+1} \frac{1+\ln(x-1)}{x-1}dx;$ б) $\int\limits_0^8 \left(\sqrt{2x}+\sqrt[3]{x}\right)dx;$ в) $\int\limits_1^3 (x+1)e^x dx.$

2. $y = 4 - x^2, \quad y = x^2 - 2x.$

3. $y = 3\sin x,\ y = \sin x,\ 0 \le x \le \pi.$

4. $y = \frac{e^{2x} + e^{-2x}}{4},\ 0 \le x \le 2.$

Варіант 14

1. а) $\int\limits_{\pi}^{2\pi} \frac{1-\cos x}{(x-\sin x)^2}dx;$ б) $\int\limits_{\ln 3}^{\ln 8} \frac{dx}{\sqrt{e^x+1}};$ в) $\int\limits_1^e (x+1)\ln x dx.$

2. $y = \frac{5}{x},\ y + x = 6.$

3. $y = \cos x,\ y = 2\cos x,\ y = 0,\ 0 \le x \le \frac{\pi}{2}.$

4. $y = 1 - \ln\cos x,\ 0 \le x \le \frac{\pi}{6}.$

Варіант 15

1. а) $\int\limits_0^{\sqrt{3}} \frac{arctgx + x}{1+x^2}dx;$ б) $\int\limits_0^1 \frac{xdx}{\sqrt{x}+1};$ в) $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} (x+1)\cos x dx.$

2. $y = \frac{x^2}{2} - x + 2, \quad y = x,\ x = 0.$

3. $x^2 = 8y,\ 2y - 3x + 8 = 0.$

4. $y = 1 - \ln\left(x^2 - 1\right),\ 3 \le x \le 4.$

Варіант 16

1. а) $\int\limits_{2}^{9} \frac{xdx}{\sqrt[3]{x-1}}$; б) $\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{3+2\cos x}$; в) $\int\limits_{0}^{1} x\ln(x+1)dx$.

2. $y = x^2,\ y = 2x - x^2$.

3. $y = \sin 2x,\ y = 0,\ 0 \le x \le \frac{\pi}{2}$.

4. $y = \ln\left(x^2 - 1\right),\ \ 2 \le x \le 3$.

Варіант 17

1. а) $\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{4}} \sin^2 4xdx$; б) $\int\limits_{0}^{1} \frac{xdx}{\sqrt{9+16x}}$; в) $\int\limits_{0}^{1} xe^{2x}dx$.

2. $y = x^2 - x,\ y = 3x$.

3. $x^2 = 4y,\ x + y = 3,\ x = 0$.

4. $y = 5 - \ln\left(1 - x^2\right),\ \ 0 \le x \le \frac{1}{4}$.

Варіант 18

1. а) $\int\limits_{0}^{\sqrt{3}} \frac{x + arctg^2 x}{1+x^2}dx$; б) $\int\limits_{0}^{5} \frac{dx}{2x + \sqrt{3x+1}}$; в) $\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}} x\sin 2xdx$.

2. $y = x^2,\ \ y = \frac{x^2}{2},\ y = 2x$.

3. $y = x^2,\ \ y = 1,\ \ x = 2$.

4. $y = \frac{x^2}{4} - \frac{\ln x}{2},\ 1 \le x \le 2$.

Варіант 19

1. а) $\int_0^1 x\sqrt{1+2x^2}dx$; б) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^3 x \sin 2x dx$; в) $\int_0^{\pi} x^2 sinxdx$.

2. $y^2 = 2x+1,\ x-y-1=0$.

3. $y = 2\sqrt{x-1}, \quad y = 4\sqrt{x-1}, \quad x = 2$.

4. $y = \dfrac{e^{2x}+e^{-2x}+3}{4},\ \ 0 \le x \le 2$.

Варіант 20

1. а) $\int_{-2}^{-1} \dfrac{dx}{(11+5x)^3}$; б) $\int_3^8 \dfrac{xdx}{\sqrt{1+x}}$; в) $\int_0^1 xe^{-2x}dx$.

2. $y = e^{2x},\ \ y = e^{-2x}, \quad x = 1$.

3. $y + x^2 = 1, \quad y - x - 1 = 0$.

4. $y = 1 + \ln\cos x,\ \ 0 \le x \le \dfrac{\pi}{3}$.

Варіант 21

1. а) $\int_1^e \dfrac{dx}{x\sqrt{\ln^2 x - 1}}$; б) $\int_4^9 \dfrac{\sqrt{x}dx}{\sqrt{x}-1}$; в) $\int_0^{\pi} x\sin\dfrac{x}{2}dx$.

2. $y = e^x,\ \ y = e^{-x}, \quad x = 1$.

3. $y = x^3, \quad y = 4x$.

4. $y = 2 + \ln x,\ \ \sqrt{3} \le x \le \sqrt{15}$.

Варіант 22

1. а) $\int\limits_0^{\frac{1}{2}} \frac{3-2x}{x^2-1}dx$; б) $\int\limits_1^9 x\sqrt[3]{1-x}dx$; в) $\int\limits_1^e x\ln x dx$.

2. $y^2 = 4x$; $x^2 = \frac{1}{2}y$, $x = 0$.

3. $y = \frac{1}{2}x^2 - 2x$, $y = 0$.

4. $y = \ln\frac{5}{2x}$, $\sqrt{3} \le x \le \sqrt{8}$.

Варіант 23

1. а) $\int\limits_0^{\ln 3} \frac{e^{3x}dx}{1+e^{3x}}$; б) $\int\limits_3^8 \frac{xdx}{\sqrt{1+x}}$; в) $\int\limits_0^{\ln 2} xe^x dx$.

2. $y = (x-1)^2$, $y^2 = x-1$.

3. $y = x^3$, $y = \sqrt{x}$.

4. $y = \frac{x^2}{2}$, $0 \le x \le 1$.

Варіант 24

1. а) $\int\limits_4^5 x\sqrt{x^2-16}dx$; б) $\int\limits_0^1 \frac{xdx}{1+\sqrt{x}}$; в) $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} (x+3)\sin x dx$.

2. $y = 5\cos x$, $y = 2\cos x$, $0 \le x \le \frac{\pi}{2}$.

3. $y = \sin 2x$, $y = 0$, $0 \le x \le \frac{\pi}{2}$.

4. $y = \ln\left(1-x^2\right)$, $0 \le x \le \frac{1}{2}$.

Варіант 25

1. а) $\int\limits_{-2}^{1} x^2\sqrt{1-x^3}dx;$ б) $\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{4}} tg^3xdx;$ в) $\int\limits_{-\pi}^{2\pi} x\sin 2xdx.$

2. $y=(x-2)^2, \quad y=4x-8.$

3. $xy=4, \quad x=1, \quad x=4, \quad y=0.$

4. $y=\frac{1}{2}\left(x\sqrt{x^2-1}-\ln\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)\right), \ 1\le x\le 2.$

Варіант 26

1. а) $\int\limits_{e}^{e^2+1}\frac{1+\ln(x-1)}{x-1}dx;$ б) $\int\limits_{-1}^{0}\frac{dx}{1+\sqrt[3]{x+1}};$ в) $\int\limits_{0}^{2\pi}(2x-5)\cos 2xdx.$

2. $y=-x^2-2x+3, \quad y=0, \ x=0, \ x=2.$

3. $y=2-x, \quad x^2+y^2=4.$

4. $y=\frac{e^{2x}+e^{-2x}}{4}, \ 0\le x\le 2.$

Варіант 27

1. а) $\int\limits_{\pi}^{2\pi}\frac{x+\cos x}{\left(x^2+2\sin x\right)^3}dx;$ б) $\int\limits_{0}^{5}\frac{xdx}{\sqrt{1+3x}};$ в) $\int\limits_{1}^{9}x\ln^2 xdx.$

2. $y=3x-x^2, \quad 5x-y-8=0.$

3. $y=\sqrt{4-x^2}, \quad y=0, \ x=0, \ x=1.$

4. $y=3+\arcsin x-\sqrt{1-x^2}, \ 0\le x\le\frac{3}{4}.$

Варіант 28

1. а) $\int_{0}^{\frac{\pi}{4}} \frac{2\cos x + 3\sin x}{(2\sin x - 3\cos x)^3} dx;$ б) $\int_{3}^{8} \frac{xdx}{\sqrt{x+1}};$ в) $\int_{0}^{\frac{\ln 2}{3}} (5x-2)e^{3x} dx.$

2. $y^2 = 16x, \quad y = x.$

3. $y = \cos x, \quad y = 0, \; -\frac{\pi}{4} \le x \le \frac{\pi}{2}.$

4. $y = 3 + \ln\cos x, \; 0 \le x \le \frac{\pi}{6}.$

Варіант 29

1. а) $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{x\cos x + \sin x}{(x\sin x)^2} dx;$ б) $\int_{4}^{9} \frac{\sqrt{x}dx}{\sqrt{x}-1};$ в) $\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} (4-16x)\sin 4x dx.$

2. $y = \frac{1}{2}x^2, \quad 4x - 2y + 5 = 0.$

3. $y = \frac{4}{x}, \quad y = 0, \; x = 3, \; x = 12.$

4. $y = 4 - \arccos x + \sqrt{1-x^2}, \; 0 \le x \le \frac{9}{16}.$

Варіант 30

1. а) $\int_{0}^{1} \frac{(x^2+1)dx}{(x^3+3x^2+1)^2};$ б) $\int_{-1}^{1} \frac{xdx}{\sqrt{5-4x}};$ в) $\int_{\frac{1}{2}}^{1} arctg(4x-1)dx.$

2. $y = -4x^3, \quad y = -x.$

3. $y = x^2, \quad x = y^2.$

4. $y = 5 + \arcsin\sqrt{x} + \sqrt{x-x^2}, \; \frac{1}{4} \le x \le 1.$

Зразок виконання індивідуального завдання № 8.

Приклад 1. Обчислити визначені інтеграли:

а) $\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{2+\sqrt{tgx}}{\cos^2 x}dx$; б) $\int\limits_9^{16} \frac{3^{\sqrt{x}}-1}{2\sqrt{x}}dx$; в) $\int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \left(x-\frac{\pi}{2}\right)\cos 2xdx$.

Розв'язання.

а) застосуємо нову змінну $tgx = t^2$, тоді $\frac{dx}{\cos^2 x} = 2tdt$ і нові границі інтегрування набувають значень: якщо $x = 0$, то $t = 0$ та якщо $x = \frac{\pi}{4}$, то $t = 1$.

Отже,

$$\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{2+\sqrt{tgx}}{\cos^2 x}dx = \int\limits_0^1 (2+t)2tdt = 2\int\limits_0^1 \left(t^2+2t\right)dt = 2\left(\frac{t^3}{3}+t^2\right)\Bigg|_0^1 = \frac{8}{3};$$

б) нехай $\sqrt{x} = t$, тоді $\frac{1}{2\sqrt{x}}dx = dt$ та при $x = 9$ $t = 3$, при $x = 16$ $t = 4$.

$$\int\limits_9^{16} \frac{3^{\sqrt{x}}-1}{2\sqrt{x}}dx = \int\limits_3^4 \left(3^t-1\right)dt = \left(\frac{3^t}{\ln 3}-t\right)\Bigg|_3^4 = \left(\frac{3^4}{\ln 3}-4\right)-\left(\frac{3^3}{\ln 3}-3\right) = \frac{54-\ln 3}{\ln 3};$$

в) застосуємо формулу інтегрування частинами $\int\limits_a^b udv = uv\Big|_a^b - \int\limits_a^b vdu$.

$$\int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \left(x-\frac{\pi}{2}\right)\cos 2xdx = \left\|\begin{array}{l|l} u = x-\frac{\pi}{2} & dv = \cos 2xdx \\ du = dx & v = \int \cos 2xdx = \frac{1}{2}\sin 2x \end{array}\right\| =$$

$$= \left(x-\frac{\pi}{2}\right)\cdot\frac{\sin 2x}{2}\Bigg|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} - \frac{1}{2}\int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \sin 2xdx = \left(x-\frac{\pi}{2}\right)\frac{\sin 2x}{2}\Bigg|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} + \frac{\cos 2x}{4}\Bigg|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi-2}{8}.$$

Приклад 2. Знайти площу фігури, обмеженої лініями $y = 5 - x^2$ і $y = x - 1$.

Розв’язання. Спочатку знайдемо точки перетину заданих ліній. Для цього розв’яжемо систему рівнянь:

$$\begin{cases} y = 5 - x^2, \\ y = x - 1, \end{cases} \Rightarrow 5 - x^2 = x - 1 \Rightarrow x^2 + x - 6 = 0 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x_1 = -3, \\ x_2 = 2. \end{array} \right.$$

Зробимо рисунок за умовами задачі (рис. 17).

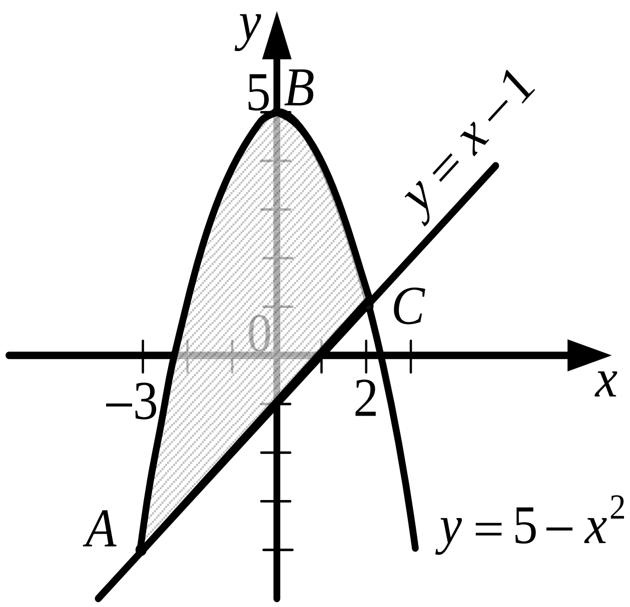

Рис. 17. **Фігура, що обмежена лініями $y = 5 - x^2$ та $y = x - 1$**

Площа фігури ABC знаходиться за формулою:

$$S = \int_{-3}^{2} \left(\left(5 - x^2 \right) - \left(x - 1 \right) \right) dx = \int_{-3}^{2} \left(6 - x - x^2 \right) dx = \left(6x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} \right) \Bigg|_{-3}^{2} = 20\frac{5}{6} (\text{кв.од}).$$

Приклад 3. Знайти об’єм тіла, утвореного обертанням фігури,що обмежена лініями $y = e^x$, $y = e^{2x}$ та $x = 2$ навколо осі OX.

Розв’язання. Зробимо рисунок за умовами задачі (рис. 18).

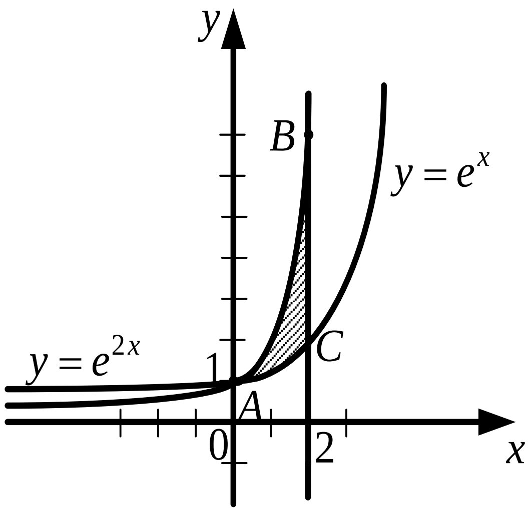

Рис. 18. **Фігура, що обмежена лініями $y=e^x$, $y=e^{2x}$ та $x=2$**

Об'єм тіла обертання V_x знаходимо за формулою:

$$V_x=\pi\int_0^2\left(e^{4x}-e^{2x}\right)dx=\pi\left(\frac{e^{4x}}{4}-\frac{e^{2x}}{2}\right)\Bigg|_0^2=\pi\left(\frac{e^4}{4}-\frac{e^2}{2}\right)-\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{2}\right)=$$

$$=\frac{\pi\left(e^2-1\right)^2}{4}\text{(куб. од.)}.$$

Приклад 4. Знайти довжину дуги кривої, що задана рівнянням $y^2=x^3$, $0\le x\le 4$.

Розв'язання. У прямокутних координатах довжина дуги $y=f\left(x\right)$ для $a\le x\le b$ знаходиться за формулою $l=\int_a^b\sqrt{1+\left(y'\right)^2}dx$.

Із рівняння $y^2=x^3$ маємо $y=x^{\frac{3}{2}}$, а $y'=\frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}}$, $1+\left(y'\right)^2=1+\frac{9}{4}x$.

Отже,

$$l=\int_0^4\sqrt{1+\frac{9}{4}x}dx=\int_0^4\left(1+\frac{9}{4}x\right)^{\frac{1}{2}}dx=\frac{4}{9}\cdot\frac{2}{3}\cdot\left(1+\frac{9}{4}x\right)^{\frac{3}{2}}\Bigg|_0^4=\frac{8}{27}\left(10^{\frac{3}{2}}-1\right)=\frac{8}{27}\left(10\sqrt{10}-1\right).$$

Змістовний модуль 4. Диференціальні та різницеві рівняння. Ряди. Елементи фінансової математики

Індивідуальне завдання № 10
Економічна динаміка та її моделювання: диференціальні та різницеві рівняння

Зміст завдання

Знайти загальний розв’язок (завдання 1; 3; 5; 8; 9) та частинний розв’язок (завдання 2; 4; 6; 7; 10) диференціальних рівнянь.

Варіант 1

1. $e^y\left(1+x^2\right)dy-2x\left(1+e^y\right)dx=0$.
2. $x\ln y\cdot y'=x^3y;\quad y(0)=e$.
3. $\left(x-y\cos\frac{y}{x}\right)dx+x\cos\frac{y}{x}dy=0$.
4. $\left(\sqrt{xy}-x\right)y'=0;\quad y(1)=1$.
5. $y'+y=3x$.
6. $y'-3y=e^{-2x};\qquad y(0)=0$.
7. $2(y'+xy)=(x-1)e^xy^2;\ y(0)=2$
8. $y'^2+yy''=0$.
9. $y''+3y'=3xe^{-3x}$.
10. $y''-6y'+9y=x^2-x+3;\ y(0)=\frac{4}{3};\ y'(0)=\frac{1}{27}$.

Варіант 2

1. $2xy^2dx-ydy=yx^2dy-6xdx$.
2. $x^3y'+y=7;\quad y(1)=5$.

3. $x(x+2y)dy+\left(x^2-y^2\right)dx=0$.

4. $y'=e^{-\frac{y}{x}}+\dfrac{y}{x};\quad y(1)=0$.

5. $y'+y=\ln\left(e^x+1\right)$.

6. $y'-\dfrac{1}{x}y=x^2;\ y(1)=0{,}5$.

7. $2(xy'+y)=y^2\ln x;\ y(1)=2$.

8. $y''=\sin^2 x\cos x$.

9. $y''+16y=-24\sin 4x$.

10. $y''-4y'+4y=e^{2x};\ y(0)=2;\ y'(0)=8$.

Варіант 3

1. $ye^{2x}dx+\left(1+e^{2x}\right)dy=0$.

2. $(2xy+y)y'=3-y^2;\quad y(0)=2$.

3. $xy'=2\sqrt{3x^2+y^2}+y$.

4. $y'=e^{\frac{y}{x}}+\dfrac{y}{x};\quad y(1)=1$.

5. $y'+\dfrac{x}{x^2+1}y=\left(x^2+1\right)^{\frac{3}{2}}$.

6. $y'+\dfrac{1}{x}y=e^{x^2};\qquad y(1)=\dfrac{e}{2}$.

7. $y'-xy+y^3e^{-x^2}=0;\ y(0)=\dfrac{1}{2}$.

8. $2yy''=y^2+\left(y'\right)^2$.

9. $y''-8y'+12y=-65\cos 4x$.

10. $y''-y=8e^x;\ y(0)=2;\ y'(0)=4$.

Варіант 4

1. $3e^x \, tgy \, dx + \left(1 + e^x\right) \dfrac{dy}{\cos^2 y} = 0$.

2. $xy' + y = y^2; \quad y(1) = 0{,}5$.

3. $x \cos \dfrac{y}{x} \left(ydx + xdy \right) = y \sin \dfrac{y}{x} \left(xdy - ydx \right)$.

4. $xdy = \left(y + \sqrt{x^2 + y^2} \right) dx; \quad y(1) = 0$.

5. $y' - y \, tg \, x = \sin^2 x$.

6. $y' + \dfrac{1}{x} y = \dfrac{1}{x^2 + 1}; \quad y(1) = \ln \sqrt{2}$.

7. $y' + xy = x^3 y^3; \; y(0) = 1$

8. $y'' = \dfrac{2}{x}$.

9. $y'' - 2y' + y = x^3$.

10. $y'' - 5y' + 6y = (12x - 7) e^{-x}; \; y(0) = 0; \; y'(0) = 0$.

Варіант 5

1. $\sqrt{x} dy = \left(\sqrt{1 - x} + \sqrt{x} \right) dx$.

2. $\left(2 - e^x\right) \sin y y' = e^x \cos^3 y; \quad y(0) = \dfrac{\pi}{4}$.

3. $xdy = \left(y + \sqrt{y^2 - 4x^2} \right) dx$.

4. $y' = \dfrac{y}{x} \ln \dfrac{y}{x}; \quad y(e) = 1$.

5. $y' + \dfrac{y}{\cos^2 x} = \dfrac{1}{1 - \sin^2 x}$.

6. $y' + \dfrac{1}{x} y = \dfrac{1}{\sqrt{1 - x^2}}; \; y(1) = 2$.

7. $\left(1-x^2\right)y'-xy-2xy^2=0$; $y(0)=1$

8. $y''+\dfrac{y'}{x}=x$.

9. $y''-10y'+25y=e^{5x}$.

10. $y''-2y'+y=4(\sin x+\cos x)$; $y(0)=1$; $y'(0)=0$

Варіант 6

1. $y^2e^xdx-\left(e^x+2\right)dy=0$.

2. $xy'\ln y-y=0$; $y(1)=e^2$.

3. $y'=-\dfrac{x+y}{x}$.

4. $3xy'=x+4y$; $y(1)=1$.

5. $y'+\dfrac{y}{x+1}=\sin 2x$.

6. $y'-\dfrac{1}{x}y=\ln x$; $y(1)=5$.

7. $xy'=x^5y^2-2y$; $y(1)=1$.

8. $xy''\ln x=y'$.

9. $y''+y'+y=\left(x+x^2\right)e^x$.

10. $y''-3y'=3\left(2-x^2\right)$ $y(0)=0$; $y'(0)=1$.

Варіант 7

1. $y\sin xdx+(\cos x-1)dy=0$; $y\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=1$.

2. $x\cos 2ydx-x^2\sin 2ydy=0$.

3. $xy'-y=x\,tg\dfrac{y}{x}$.

4. $\left(y^2-2xy\right)dx+x^2dy=0;\quad y(1)=2$.

5. $y'+\dfrac{y}{3+x}=\ln 5x$.

6. $y'-\dfrac{1}{x}y=x\sin x;\quad y(\pi)=0$.

7. $yy'+\dfrac{1}{2}y^2=1;\ y(0)=1$.

8. $y''+y'tgx=\sin 2x$.

9. $y''-y'+4y=-4\sin 2x$.

10. $y''-4y'+5y=2x^2e^x;\ y(0)=2,\ y'(0)=1$.

Варіант 8

1. $6xdx-2x^2ydy=6ydy-3xy^2dx$.

2. $y'=(2y-3)tg\,x;\quad y(2\pi)=6$.

3. $xy'-y=(x+y)\ln\dfrac{x+y}{x}$.

4. $2x^3y'=y\left(2x^2-y^2\right);\quad y(1)=1$.

5. $y'ctg\,x-y=2\cos^2 x\cdot ctg\,x$.

6. $y'-\dfrac{1}{x}y=x^3+2;\quad y(1)=\dfrac{1}{3}$.

7. $y'+4x^3y=4\left(x^3+1\right)e^{-4x}y^2;\ y(0)=1$.

8. $y''=x\ln x$.

9. $y''+2y'+5y=4\sin x+22\cos x$.

10. $y''+6y'+9y=9xe^{-3x};\ y(0)=2;\ y'(0)=1$.

Варіант 9

1. $xy^2dx-ydy=yx^2dy-xdx$.

2. $y'=2^{x-y};\quad y(1)=1$.

3. $\left(x^2+xy\right)y'=x\sqrt{x^2-y^2}+xy+y^2$.

4. $xy'\left(\ln y-\ln x\right)=y; \quad y\left(e\right)=1$.

5. $y'-\dfrac{2y}{x}=x^2e^x$.

6. $y'-\dfrac{1}{x}y=x\,tg\,x; \quad y\left(\pi\right)=1$.

7. $y'-y\,tg\,x=-\dfrac{2}{3}y^4\sin x; \; y\left(0\right)=1$.

8. $y''\sin 2x=\sin 4x$.

9. $y''+5y'-14y=e^{2x}\left(2x^2-3x+1\right)$.

10. $y''-y'=2x; \; y\left(0\right)=0; \; y'\left(0\right)=2$.

Варіант 10

1. $\left(e^x+5\right)dy-y^2e^xdx=0$.

2. $y'=xy+e^xy; \quad y\left(0\right)=3$.

3. $xy'=y\ln\dfrac{y}{x}$.

4. $2y'=\dfrac{y^2}{x^2}+8\dfrac{y}{x}+8; \quad y\left(1\right)=1$.

5. $y'-y\,tg\,x=\sin 2x$.

6. $y'-\dfrac{1}{x}y=2x^2\sqrt{x^2+5}; \quad y\left(2\right)=36$.

7. $y'=y\,ctg\,x+\dfrac{y^3}{\sin x}; \; y\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=1$.

8. $yy''=\left(y'\right)^2+1$.

9. $y''-2y'+y=16e^x$.

10. $y''+4y'-12y=8\sin 2x; \; y\left(0\right)=0; \; y'\left(0\right)=0$.

Варіант 11

1. $y\left(2+e^{x}\right)dy=e^{x}dx$.
2. $y'\cos x=y\sin x;\quad y(\pi)=3$.
3. $xy'=3\sqrt{x^2+y^2}+y$.
4. $(xy'-y)\,arctg\,\dfrac{y}{x}=x;\quad y(1)=0$.
5. $y'+y\,tg\,x=\cos^3 x$.
6. $y'-\dfrac{1}{x}y=e^{x^3}x^3;\quad y(1)=\dfrac{e}{2}$.
7. $2xy'-3y=-\left(5x^2+3\right)y^3;\ y(1)=1$.
8. $y''tg\,5x=5y'$.
9. $y''-y'-y=(3x+7)e^{2x}$.
10. $y''+5y'+6y=12\cos 2x;\ y(0)=1;\ y'(0)=3$.

Варіант 12

1. $\cos^2 x(1+tg\,x)\,y'=y;\ y(0)=3$.
2. $3yx^2(1+\ln y)dx=dy$.
3. $xy'=\sqrt{2x^2+y^2}+y$.
4. $y(\ln y-\ln x)dx-xdy=0;\quad y(e)=1$.
5. $y'-y\,ctg\,x=3\sin^4 x$.
6. $y'-\dfrac{1}{x}y=x^2e^{x};\quad y(1)=2$.
7. $4xy'+3y=-x^4y^5e^{x};\ y(1)=2$.
8. $xy''\ln x=y'+1$.
9. $y''-3y'-10y=\sin x+3\cos x$.
10. $y''-4y'=6x^2+1;\ y(0)=2;\ y'(0)=3$.

Варіант 13

1. $x\sqrt{x^2+1}\,dx-\sqrt{y}\;dy=0$.
2. $y'ctg\,x+y=2;\quad y(\pi)=0$.
3. $(2x-y)y'=x+2y$.
4. $xy'=y\left(1+\ln\dfrac{x}{y}\right);\quad y(1)=\dfrac{1}{\sqrt{e}}$.
5. $y'+y\,ctg\,x=2\sin 3x$.
6. $y'-\dfrac{1}{x}y=x\ln x;\;\; y(2)=2$.
7. $\left(y'+y^2\right)(x+1)=-y;\; y(0)=1$.
8. $xy''+y'+x=0$.
9. $y''+4y'+4y=8e^{-2x}$.
10. $y''+3y'=3\left(2-x^2\right)\; y(0)=1;\; y'(0)=1$

Варіант 14

1. $\left(1-x^2\right)dy-\left(2xy^2+xy\right)dx=0$.
2. $xy'=\dfrac{x-1}{y}e^{2x}+y';\quad y(1)=e$.
3. $3x^2y'=y^2+10xy+10x^2$.
4. $y^2+x^2y'=xyy';\quad y(3)=4$.
5. $y'+yctg\,x=\dfrac{\cos^2 x}{\sin^3 x}$.
6. $y'-\dfrac{1}{x}y=e^x x;\quad y(1)=2$.
7. $2\sin xy'+y\cos x=y^3(\cos x-\sin x);\; y(\pi/2)=1$.
8. $y''=4^x+\dfrac{1}{e^x}$.

9. $y''+121y=11\sin x$.

10. $y''+2y'+y=-2\sin x$; $y\left(\frac{\pi}{2}\right)=0$; $y'\left(\frac{\pi}{2}\right)=0$.

Варіант 15

1. $2x^2ydy=\left(3+y^2\right)dx$.
2. $y'+e^x=yy'$; $y(0)=2$.
3. $\left(3x^2-2xy\right)y'=x^2+3xy-y^2$.
4. $ydx+\left(2\sqrt{xy}-x\right)dy=0$; $y(1)=1$.
5. $y'+tg\,xy=\frac{1}{4}\cos x\sin 2x$.
6. $y'-\frac{2}{x+1}y=(x+1)^3$; $y(0)=0$.
7. $xy'+y=\frac{1}{2}xy^3$; $y(1)=2$.
8. $(1+\cos 2x)y''=-2\sin 2x\cdot y'$.
9. $y''-6y'+9y=3x-1$.
10. $y''-10y'+25y=10e^{5x}$; $y(0)=5$; $y'(0)=1$.

Варіант 16

1. $\sqrt{y^2+1}\,dx=xydy$.
2. $y'-\frac{4xy}{x^2-1}=0$; $y\left(\sqrt{2}\right)=1$.
3. $xy'\sin\frac{y}{x}+x=y\sin\frac{y}{x}$.
4. $y'=4+\frac{y}{x}+\left(\frac{y}{x}\right);^2$ $y(1)=2$.
5. $y'-ctg\,xy=\sin^3 x$.

6. $y'+\frac{1-2x}{x^2}y=1;\quad y(1)=0$.

7. $3(xy'+y)=y^2\ln x;\ y(1)=3$.

8. $xy''+y'=0$.

9. $y''+y'-2y=x^2e^{4x}$.

10. $y''+9y=\cos 3x\quad y\left(\frac{\pi}{2}\right)=0;\ y'\left(\frac{\pi}{2}\right)=0$.

Варіант 17

1. $y^2dy+ctg\,xdx=y^3ctg\,xdx$.

2. $(y'+1)e^{2y}=4;\quad y(1)=0$.

3. $(xy'-y)ctg\frac{y}{x}=x$.

4. $\left(x^2+6xy+y^2\right)dx=4xydy;\quad y(1)=0$.

5. $y'-ctg\,xy=\frac{\cos^2 x}{\sin x}$.

6. $y'+y\cos x=\cos x;\quad y(0)=3$.

7. $y'-\frac{2xy}{1+x^2}=4\frac{\sqrt{y}}{\sqrt{1+x^2}}arctg\,x;\ y(0)=1$.

8. $y''=2(y'-1)tg\,x$.

9. $y''+2y'+y=(18x+21)e^{-x}$.

10. $y''-13y'+12y=18x^2-39;\quad y(0)=2;\ y'(0)=3$.

Варіант 18

1. $x\left(y^2+1\right)dx-ye^{x^2}dy=0$.

2. $xy'-y^2=y;\quad y(2)=1$.

3. $\dfrac{xy' + y}{x + yy'} = 2$.

4. $3x\sin\dfrac{3y}{x}dy + \left(x - 3y\sin\dfrac{3y}{x}\right)dx = 0; \quad y(1) = 1.$

5. $y' + \dfrac{4xy}{x^2+1} = \dfrac{1}{x^2+1}; \quad y(0) = 1.$

6. $y'x\ln x - y = x^2\ln^3 x$

7. $(y' + xy)e^{-x} = (x-1)y^2; \; y(0) = 1.$

8. $y'' = \ln x + 1$.

9. $y'' + 2y' + y = -2\sin x$.

10. $y'' + 4y' + 4y = e^{-2x}(12x + 16); \;\; y(0) = 0; \; y'(0) = 2$.

Варіант 19

1. $xdy = x^2e^{-y}dx + 2dy$.

2. $y' = 2\sqrt{y}\ln x; \quad y(e) = 1.$

3. $(2x + y)dx + (x + 2y)dy = 0$.

4. $\left(x^2 + xy\right)y' = x\sqrt{x^2 - y^2} + xy + y^2; \quad y(1) = 1$.

5. $y'x\ln x + y = x^3$.

6. $y' + \dfrac{y}{x+1} + x^2 = 0; \quad y(0) = 2$.

7. $\dfrac{2y' + y\cos x}{4 + \sin x} = y^{-1}\cos x; \; y(0) = 1.$

8. $y''\,tg\,x = 2y'$.

9. $y'' + 2y' + 5y = -17\sin 2x$.

10. $y'' - 6y' + 9y = 4xe^x \;\; y(1) = 3; \; y'(1) = 0$.

Варіант 20

1. $dy - 3xdy - \sqrt{y}\ dx = 0$.
2. $\left(x^2 - 1\right)y' + 2xy^2 = 0; \quad y(0) = 1.$
3. $x^2 y' = y^2 + 6xy + 6x^2$.
4. $xy' - y = xe^{\frac{y}{x}}; \quad y(e) = 1$.
5. $y' + x^2 y = 3x^2$.
6. $y' - \dfrac{1}{x}y = \dfrac{x}{x-3}; \quad y(4) = 2$.
7. $3y' + 2xy = 2xy^{-2}e^{-2x^2};\ y(1) = 1$.
8. $yy'' + (y')^2 = 2$.
9. $y'' + y' - 2y = 8\sin 2x$.
10. $y'' - 13y' + 12y = x - 1\ \ y(0) = 3;\ y'(0) = 2$.

Варіант 21

1. $2xdy + ydx + xy(ydy + dx) = 0$
2. $\left(1 + x^2\right)y' + xy = 0; \quad y(0) = 2$.
3. $2xy'\left(x^2 + y^2\right) = y\left(2x^2 + y^2\right)$.
4. $xy'\sin\dfrac{y}{x} = y\sin\dfrac{y}{x} - x; \quad y(1) = \dfrac{\pi}{4}$.
5. $y'\cos x - y\sin x = \cos^5 x$.
6. $y' - \dfrac{1}{x}y = x\sin^3 x; \quad y(\pi/2) = 1$.
7. $y' + y = e^{\frac{x}{2}}\sqrt{y};\ y(0) = 9/4$.
8. $xy'' + y' = 1$.
9. $y'' + 2y' + 5y = -\cos x$.
10. $y'' - 3y' + 2y = -4e^x\ \ y(0) = 1;\ y'(0) = 1$.

Варіант 22

1. $\left(\sqrt{xy}-\sqrt{x}\right)dy = ydx$.
2. $\left(x+1\right)y' - x = 0; \quad y\left(0\right) = 0$.
3. $y'x = 2y\ln\frac{2y}{x}$.
4. $xy' = y + x\sin\frac{y}{x}; \quad y\left(1\right) = \frac{\pi}{4}$.
5. $y'\sin x - y\cos x = \sin^4 x$.
6. $y' - \frac{1}{x}y = x\frac{\sin^3 x}{\cos x}; \quad y\left(\pi\right) = \frac{\pi}{2}$.
7. $y'\left(x-1\right) - y = y^2$; $y\left(2\right) = 1$.
8. $xy''\ln x + y' = 2$.
9. $y'' - 4y' + 4y = 2e^{2x} + \frac{x}{2}$.
10. $y'' - 25y = 25\left(\sin 5x + \cos 5x\right); y\left(\frac{\pi}{10}\right) = 0$; $y'\left(\frac{\pi}{10}\right) = 0$.

Варіант 23

1. $x\left(dy - 2ydx\right) + xy^2dx = 0$.
2. $3y' - x^2y' + x = 0; \quad y\left(5\right) = 0$.
3. $xy' - y = \frac{x}{arctg\,\frac{2y}{x}}$.
4. $xy'\sin\frac{3y}{x} + x = y\sin\frac{3y}{x}; \quad y\left(1\right) = \frac{\pi}{6}$.
5. $y'\cos x + y\sin x = \cos^4 x$.
6. $y' - \frac{1}{x}y = x\frac{\sin x}{\cos^3 x}; \quad y\left(\pi\right) = \frac{\pi}{2}$.
7. $xy' + y = y^2\ln 3x$; $y\left(1\right) = 1$.

8. $y''y^3+25=0$.

9. $y''+y'-2y=4\sin x$.

10. $y''+6y'+9y=e^x(16x+24)$ $y(0)=3$; $y'(0)=2$.

Варіант 24

1. $x\sqrt{3+y^2}\,dx+y\sqrt{2+x^2}\,dy=0$.

2. $(2x^2y-3y)y'=6x-2xy$; $y(1)=0$.

3. $xy+y^2=(2x^2+xy)y'$.

4. $(x^2+2xy-2y^2)dy+xydx=(x^2+y^2)dx$; $y(1)=1$.

5. $y'\sin x+y\cos x=tg^2x$.

6. $y'-\frac{1}{x}y=x\sin^2x\cos^2x$; $y(\pi)=1$.

7. $y'+2xy=2x^3y^3$; $y(0)=1$.

8. $y''(e^x+1)+y'=0$.

9. $y''+2y'+5y=-\sin 2x$.

10. $y''+4y=x$; $y(0)=1$; $y'(0)=\frac{\pi}{2}$.

Варіант 25

1. $y(1+e^x)dy=e^xdx$.

2. $y'\cos x=y\ln y$; $y(0)=e$.

3. $\frac{xy'-y}{x+y}=\ln\frac{x+y}{x}$.

4. $xy'=y+x\cos\frac{y}{x}$; $y(1)=\frac{\pi}{2}$.

5. $y'\sin x+y\cos x=\sin^2 2x$.

6. $y' - \frac{1}{x} y = \frac{x}{(x-2)^2}$; $\quad y(1) = 0$.

7. $xy' - y = -y^2(\ln x + 2)\ln x$; $\quad y(1) = 1$.

8. $xy' - y' = -y^2(\ln x + 2)\ln x$;.

9. $x^2 y'' + xy' = 1$.

10. $\quad y'' + 2y' + y = 2 - 3x^2$.

10. $y'' - 4y' + 5y = \sin x + 2\cos x$; $y(0) = 0$; $y'(0) = 0$.

Варіант 26

1. $e^y\left(1 + x^2\right)dy - 2x\left(1 + e^y\right)dx = 0$.

2. $x^3 y' + y = 7$; $\quad y(1) = 6$.

3. $xy' = 2\sqrt{3x^2 + y^2} + y$.

4. $xdy = \left(y + \sqrt{x^2 + y^2}\right)dx$; $\quad y(1) = 0$.

5. $y' + \frac{y}{\cos^2 x} = \frac{1}{1 - \sin^2 x}$.

6. $y' - \frac{1}{x} y = \ln x$; $\qquad y(1) = 5$.

7. $y' + 4x^3 y = 4\left(x^3 + 1\right)e^{-4x} y^2$; $y(0) = 1$.

8. $y''\left(e^x + 1\right) + y' = 0$.

9. $y'' + 100y = 20\sin 10x - 30\cos 10x$.

10. $y'' + 11y' = 11xe^{-11x}$; $y(0) = 0$; $y'(0) = 11$.

Варіант 27

1. $2xy^2 dx - ydy = yx^2 dy - 6xdx$.

2. $(2xy + y)y' = 3 - y^2$; $\quad y(0) = 2$.

3. $x\cos\frac{y}{x}(ydx+xdy)=y\sin\frac{y}{x}(xdy-ydx)$.

4. $y'=\frac{y}{x}\ln\frac{y}{x};\quad y(e)=1$.

5. $y'+\frac{y}{x+1}=\sin 2x$.

6. $y'+\frac{y}{x+1}+x^2=0;\quad y(0)=2$.

7. $y'-y\,tg\,x=-\frac{2}{3}y^4\sin x;\ y(0)=1$.

8. $xy''+y'-x^2=0$.

9. $y''+2y'-3y=(8x+6)e^x$.

10. $y''-13y'+12y=x-1;\ y(1)=3;\ y'(1)=2$.

Варіант 28

1. $ye^{2x}dx+\left(1+e^{2x}\right)dy=0$.

2. $xy'+y=y^2;\quad y(1)=0{,}5$.

3. $(xy'-y)ctg\frac{y}{x}=x$.

4. $2y'=\frac{y^2}{x^2}+8\frac{y}{x}+8;\quad y(1)=1$.

5. $y'-ctg\,xy=\frac{\cos^2 x}{\sin x}$.

6. $y'-\frac{1}{x}y=e^x x;\quad y(1)=2$.

7. $2xy'-3y=-\left(5x^2+3\right)y^3;\ y(1)=1$.

8. $y''+(y')^2=2e^{-y}$.

9. $y''+2y'+5y=4\sin x+22\cos x$.

10. $y''+y'=e^x;\ y(0)=1;\ y'(0)=1$.

Варіант 29

1. $3e^x tg\, y dx + \left(1 + e^x\right)\dfrac{dy}{\cos^2 x} = 0$.

2. $\left(1 - e^x\right)\sin y y' = e^x \cos^3 y; \quad y(0) = \dfrac{\pi}{4}$.

3. $4x - 3y + y'(2x - 3y) = 0$.

4. $\left(y^2 - 2xy\right)dx + x^2 dy = 0; \quad y(1) = 2$.

5. $y' + \dfrac{y}{x-1} = \dfrac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}$.

6. $y' - \dfrac{1}{x}y = x\, tg\, x; \quad y(\pi) = \pi$.

7. $2xy' - 3y = -\left(5x^2 + 3\right)y^3; \; y(1) = 1$.

8. $xy'' = (y')^2$.

9. $y'' - 6y' + 9y = x^2 - x + 3; \; y(0) = \dfrac{4}{3}; \; y'(0) = \dfrac{1}{27}$

10. $y'' - y' + 4y = 3e^{2x} - 4\sin 2x.$

Варіант 30

1. $\sqrt{x}\, dy = \left(\sqrt{1-x} + \sqrt{x}\right)dx$.

2. $xy' \ln y - y = 0; \quad y(1) = e^2$.

3. $xy' - y = x\, tg\, \dfrac{y}{x}$.

4. $2x^3 y' = y\left(2x^2 - y^2\right); \quad y(1) = 1$.

5. $y' + \dfrac{y}{x+2} = \dfrac{arctg\, x}{1+x^2}$.

6. $y' - \dfrac{1}{x}y = 2x^2\sqrt{x^2+5}; \quad y(2) = 36$.

7. $xdy = \left(x^5y^2 - 2y\right)dx$; $y(1) = 1$.

8. $y'' - 2y\left(y'\right)^2 = 0$.

9. $y'' + y' - 2y = 4\sin x$.

10. $y'' + 6y' + 9y = 9xe^{-3x}$; $y(0) = 2$; $y'(0) = 1$.

Зразок виконання індивідуального завдання № 10

Приклади індивідуального завдання містять диференціальні рівняння з відокремлюваними змінними (1; 2), однорідні рівняння (3; 4), лінійні диференціальні рівняння першого порядку (5; 6), рівняння Бернуллі (7) та диференціальні рівняння другого порядку (8; 9; 10). При розв'язанні обмежимося наведенням розв'язання одного диференціального рівняння кожного типу.

Приклад 1. Знайти частинний розв'язок диференціального рівняння $y'\sin x = y\ln y$, який задовольняє початкову умову $y\left(\frac{\pi}{2}\right) = e$.

Розв'язання. Це рівняння є диференціальним рівнянням з відокремлюваними змінними. Спочатку визначимо загальний розв'язок рівняння. Для цього розв'яжемо його відносно y' та замінимо y' на $\frac{dy}{dx}$:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y\ln y}{\sin x}.$$

Відокремимо змінні: $\frac{dy}{y\ln y} = \frac{dx}{\sin x}$.

Після інтегрування маємо: $\ln\left|\ln y\right| = \ln\left|tg\,\frac{x}{2}\right| + \ln c$.

Пропотенціюємо останній вираз: $\ln y = c \cdot tg\,\frac{x}{2}$ або $y = e^{c\cdot tg\frac{x}{2}}$ – загальний розв'язок.

Використовуючи початкову умову $y\left(\frac{\pi}{2}\right)=e$, знаходимо значення довільної сталої c: $e=e^{c\cdot tg\frac{\pi}{4}} \Rightarrow c\cdot tg\frac{\pi}{4}=1 \Rightarrow c=1.$

Для отримання частинного розв'язку рівняння значення сталої c підставимо у загальний розв'язок $y=e^{tg\frac{x}{2}}$.

Приклад 2. Знайти частинний інтеграл диференціального рівняння $xdy-ydx=-ydy$, який задовольняє початкову умову $y(0)=1.$

Розв'язання. Згрупуємо доданки, які містять диференціали dx і dy: $(x+y)dy-ydx=0$.

Відокремити змінні неможливо завдяки наявності множника $(x+y)$ перед dy. Перейдемо від рівняння у диференціалах до рівняння в похідних. Для цього поділимо обидві частини рівняння на dx: $(x+y)y'-y=0$. Поділивши тепер обидві частини рівняння на x, $\left(1+\frac{y}{x}\right)y'-\frac{y}{x}=0$ будемо мати рівняння, загальний вигляд якого $y'=f\left(\frac{y}{x}\right)$ – це загальний вигляд однорідного відносно змінних x та y рівняння. Для його розв'язання застосуємо заміну $\frac{y}{x}=t$; $y'=t'x+t \Rightarrow$ $(1+t)(t'x+t)-t=0$. Після перемноження виразів у дужках та згрупування відповідним чином, отримаємо рівняння з відокремлюваними змінними: $t'x(1+t)=-t^2$.

Далі, як у попередньому прикладі, замінимо t' на $\frac{dt}{dx}$, відокремимо змінні та інтегруємо для отримання загального розв'язку диференціального рівняння.

Остаточно отримаємо: $\frac{1}{t} - \ln|t| = \ln|x| + \ln c.$

Зробивши зворотну підстановку (замість t підставимо $\frac{y}{x}$) і використавши властивості логарифмів, запишемо загальний інтеграл: $\frac{x}{y} = \ln|cy|$.

Використовуючи початкову умову $y(0)=1$, отримаємо: $0 = \ln c \Rightarrow c = 1$.

Остаточно маємо частинний інтеграл: $\frac{x}{y} = \ln|y|$.

Приклад 3. Розв'язати рівняння $y' + 2xy = xe^{-x^2}$.

Розв'язання. Дане рівняння є лінійним неоднорідним диференціальним рівнянням першого порядку. Розв'яжемо його за допомогою методу Бернуллі.

Зробимо заміну $y = uv$. Тоді $y' = u'v + v'u$. Підставимо вирази для y та y' в вихідне рівняння: $u'v + v'u + 2xuv = xe^{-x^2}$.

Згрупуємо члени рівняння, які містять u, і винесемо u за дужки:

$$u'v + u\left(v' + 2xv\right) = xe^{-x^2}.$$

Нехай функція v є частинним інтегралом рівняння $v' + 2xv = 0$. Тоді функція u буде розв'язком рівняння $u'v = xe^{-x^2}$. Розв'яжемо обидва рівняння, які є рівняннями з відокремлюваними змінними.

$v' + 2xv = 0$,	$u'v = xe^{-x^2}$,
$\frac{dv}{dx} = -2xv$,	$\frac{du}{dx}e^{-x^2} = xe^{-x^2}$,
$\frac{dv}{v} = -2xdx$,	$\frac{du}{dx} = x$,
$\ln\|v\| = -x^2$,	$\int du = \int xdx$,
$v = e^{-x^2}$.	$u = \frac{x^2}{2} + c$.

Остаточно отримаємо загальний розв'язок $y = e^{-x^2} \cdot \left(\frac{x^2}{2} + c \right)$.

Зауваження: рівняння Бернуллі, що має загальний вигляд:

$$y' + p(x)y = g(x)y^n,$$

також можна розв'язати методом Бернуллі, застосовуючи заміну $y = uv$.

Розв'язання диференціальних рівнянь другого порядку. Розглянемо деякі типи рівнянь, які допускають зниження порядку, тобто такі рівняння, які зводяться до диференціальних рівнянь першого порядку.

Приклад 4. Знайти частинний розв'язок рівняння $y'' = xe^{-x}$, який задовольняє початкові умови $y(0) = 1, \quad y'(0) = 0$.

Розв'язання. Загальний вигляд рівнянь цього типу: $y'' = f(x)$. Загальний розв'язок знайдемо послідовним інтегруванням, кожного разу знижуючи порядок рівняння.

$$y' = \int xe^{-x}dx = -xe^{-x} - e^{-x} + c_1;$$

$$y = \int \left(-xe^{-x} - e^{-x} + c_1 \right) dx = xe^{-x} + 2e^{-x} + c_1x + c_2.$$

Для отримання частинного розв'язку скористаємося початковими умовами: $\begin{cases} 0 = -1 + c_1 \\ 1 = 2 + c_2 \end{cases}, \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} c_1 = 1 \\ c_2 = -1 \end{cases}.$

Остаточно отримаємо: $y = xe^{-x} + 2e^{-x} + x - 1$.

Приклад 5. Знайти загальний розв'язок рівняння $xy'' = y'$.

Розв'язання. Це рівняння другого порядку, в якому в явному вигляді немає функції y. Загальний вигляд таких рівнянь $y'' = f(x, y')$. Зробивши заміну $y' = p(x)$, $y'' = p' = \frac{dp}{dx}$, отримаємо рівняння першого порядку відносно невідомої функції $p(x)$, розв'язавши яке із другого рівняння першого порядку $y' = p(x)$ знайдемо невідому функцію $y(x)$.

$$xp' = p \quad \Rightarrow \quad \frac{dp}{p} = \frac{dx}{x} \quad \Rightarrow \quad \ln|p| = \ln|x| + \ln|c_1| \quad \Rightarrow \quad p = c_1 x.$$

$y' = c_1 x \quad \Rightarrow \quad y = \int c_1 x dx = c_1 \frac{x^2}{2} + c_2$ – загальний розв'язок.

Приклад 6. Знайти загальний розв'язок рівняння $1 + (y')^2 = 2yy''$.

Розв'язання. Це рівняння другого порядку, в якому у явному вигляді немає x. Загальний вигляд таких рівнянь $y'' = f(y, y')$. Для розв'язання доцільно зробити заміну $y' = p(y)$, тоді $y'' = p'p$. Дане рівняння набуває вигляду: $1 + p^2 = 2yp'p$.

Отримали рівняння першого порядку з відокремлюваними змінними. Розв'язуючи його відповідним методом, отримаємо:

$$\frac{dy}{y} = 2\frac{pdp}{1+p^2} \quad \Rightarrow \quad \ln|y| + \ln|c_1| = \ln\left(1 + p^2\right),$$

$$\left(1 + p^2\right) = c_1 y \quad \Rightarrow \quad p = \pm\sqrt{c_1 y - 1}.$$

Розв'яжемо друге рівняння першого порядку $y' = p(y)$:

$$\frac{dy}{dx} = \pm\sqrt{c_1 y - 1}.$$

Відокремлюючи змінні та інтегруючи рівняння, знаходимо загальний розв'язок: $\dfrac{dy}{\pm\sqrt{c_1 y - 1}} = dx \quad \Rightarrow \quad \pm\dfrac{2}{c_1}\sqrt{c_1 y - 1} = x + c_2 \quad \Rightarrow$

$$y = \frac{1}{c_1}\left(\frac{c_1^2\left(x + c_2\right)^2}{4} + 1\right).$$

Приклад 7. Знайти загальний розв'язок рівняння

$$y'' - 3y' + 2y = (3 - 4x)e^x.$$

Розв'язання. Це рівняння відноситься до неоднорідних рівнянь другого порядку зі сталими коефіцієнтами. Загальний розв'язок шукаємо у вигляді $y_{он} = y_{чн} + y_{оо}$.

Знаходимо y_{oo} – загальний розв'язок однорідного рівняння $y'' - 3y' + 2y = 0$. Для цього складемо характеристичне рівняння: $k^2 - 3k + 2 = 0$. Його корені $k_1 = 1, k_2 = 2$. Отже, $y_{oo} = c_1 e^x + c_2 e^{2x}$, бо $k_1 \neq k_2$. Права частина, а саме, $f(x) = (3 - 4x)e^x$ є функцією вигляду

$$f(x) = P_n(x) e^{ax},$$

де $n = 1, a = 1$, тому $y_{чн} = x(Ax + B)e^x$, бо $a = 1 = k_1 \neq k_2$.
Невідомі A і B знайдемо за методом невизначених коефіцієнтів. Для цього диференціюючи $y_{чн}$, знайдемо $y'_{чн}$ та $y''_{чн}$.

З

$$y_{чн} = \left(Ax^2 + Bx\right)e^x$$

$$y'_{чн} = (2Ax + B)e^x + \left(Ax^2 + Bx\right)e^x$$

$$y''_{чн} = 2Ae^x + (2Ax + B)e^x + (2Ax + B)e^x + \left(Ax^2 + B\right.$$

Підставимо $y_{чн}$, $y'_{чн}$, $y''_{чн}$ у вихідне диференціальне рівняння:

$$2\left(Ax^2 + Bx\right)e^x - 3\left((2Ax + B)e^x + \left(Ax^2 + Bx\right)e^x\right) +$$

$$+2Ae^x + (2Ax + B)e^x + (2Ax + B)e^x + \left(Ax^2 + Bx\right)e^x = (3 - 4x)e^x$$

У лівій частині отриманої тотожності зведемо подібні:

$$(-2Ax - B + 2A)e^x = (3 - 4x)e^x.$$

Прирівнюючи коефіцієнти при e^x та враховуючи теорему про рівність двох багаточленів, отримаємо систему для визначення невідомих коефіцієнтів:

$$\begin{cases} -2A = -4, \\ -B + 2A = 3. \end{cases}$$

Звідки $A = 2; \quad B = 1$.

Таким чином, $y_{чн} = x(2x + 1)e^x$ – деякий частинний розв'язок неоднорідного рівняння. І остаточно маємо загальний розв'язок: $y_{чн} = c_1 e^x + c_2 e^{2x} + x(2x + 1)e^x$.

Індивідуальне завдання № 11
Ряди та їх застосування

Зміст завдання

1. Дослідити на збіжність ряди.
2. Дослідити на абсолютну збіжність ряди.
3. Знайти область збіжності ряду.
4. Обчислити наближено:

а) значення функції з точністю ε;

б) інтеграл, взявши указане число n членів розкладання в ряд підінтегральної функції, знайти похибку.

Варіант 1

1. а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)!}$; в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\sqrt{\frac{2n+1}{3n+2}}$.

2. а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n n}{2^n}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n+2}$.

3. а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}x^n$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(x-1)^n}{n\cdot 5^n}$.

4. а) $e^{-0,5}$, $\varepsilon=0,0001$; б) $\int\limits_0^{0,1}\frac{sinx}{x}dx$, $n=3$.

Варіант 2

1. а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+3)}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{n!}$; в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{10n+3}{20n+15}$.

2. а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n n}{n!}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\sqrt{n+1}}$.

3. а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(x+1)^n}{n\cdot 3^n}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}n\cdot x^n$.

4. а) $\sqrt[3]{1,012}$, $\varepsilon=0,001$; б) $\int\limits_0^1 e^{-x^2}dx$, $n=5$.

Варіант 3

1. а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{(n+1)\sqrt{n}}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n}{4^n}$; в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\sqrt[3]{\dfrac{n+3}{n+2}}$.

2. а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}n\sin\dfrac{\pi}{3^n}$; $\sqrt{}$ б) $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{\ln n}$.

3. а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{x^n}{n!}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(x-2)^n}{n}$.

4. а) $\sin 0{,}2$, $\varepsilon = 0{,}0001$; б) $\int\limits_{0}^{0,5}\dfrac{dx}{\sqrt{1+x^4}}$, $n=5$.

Варіант 4

1. а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1+n}{2+n^3}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}tg\,\dfrac{\pi}{2^n}$; в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(n+1)}{(n+2)n}$.

2. а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\sin n}{n^2}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n^2+4}}$.

3. а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{x^n}{\sqrt{n}}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(x-3)^n}{n^2}$.

4. а) $\sqrt[3]{28}$, $\varepsilon = 0{,}001$; б) $\int\limits_{0}^{0,5}\dfrac{arctgx}{x}dx$, $n=4$.

Варіант 5

1. а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n}{5+n^2}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n!}{2^{n+1}}$; в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\sin\dfrac{\pi}{3^n}$.

2. а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\cos n}{n^4}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{n\cdot 5^n}$.

3. а) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{x^n}{(n+1)^2}$; б) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{(x+2)^n}{\sqrt{n+2}}$.

4. а) $\sqrt[4]{15}$, $\varepsilon = 0{,}001$; б) $\int\limits_{0}^{0,4}x^3 arctgx dx$, $n=2$.

Варіант 6

1. а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{n^4+3}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{n^2}$; в) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2+1}{(n+1)^2}$.

2. а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{(2n+1)^2}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\ln(n+3)}$.

3. а) $\sum_{n=1}^{\infty}\sqrt{n}x^n$; б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x-1)^n}{n!}$.

4. а) $\frac{1}{\sqrt[5]{e}}$, $\varepsilon=0,0001$; б) $\int_0^{\frac{1}{4}}e^{-x^2}dx$, $n=3$.

Варіант 7

1. а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\ln 2}{n+3}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(\sqrt{3})^n}{n!}$; в) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2+1}{2n^2+4}$.

2. а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n n}{\ln(n+4)}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin n}{n^4+1}$.

3. а) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{x}{2}\right)^n$; б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x+1)^n}{n^2+n}$.

4. а) $\frac{1}{\sqrt{e}}$, $\varepsilon=0,001$; б) $\int_0^{\frac{1}{4}}\frac{dx}{\sqrt{1+x^6}}$, $n=2$.

Варіант 8

1. а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2+n^2}{3+n^3}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n!}}$; в) $\sum_{n=1}^{\infty}(\sqrt{n+1}-\sqrt{n-1})$.

2. а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin n}{n^2+2}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\ln(n^2+2)}$.

3. а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n^2+n}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{x+3}{3}\right)^n$.

4. а) $\sqrt[5]{1,2}$, $\varepsilon=0,01$; б) $\int_0^1\frac{\sin x^2}{x^2}dx$, $n=4$.

Варіант 9

1. а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^3+8}{n^4+16}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n}{\sqrt{n}}$; в) $\sum_{n=2}^{\infty}(\sqrt{n+2}-\sqrt{n-2})$.

2. а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{3n+2}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin n}{\pi^n}$.

3. а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n^2+2n+3}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x-1)^n}{\sqrt{n+2}}$.

4. а) $\sqrt[4]{16{,}02}$, $\varepsilon=0{,}001$; б) $\int_0^{\sqrt{0{,}5}} e^{-x^2}dx$, $n=5$.

Варіант 10

1. а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2+2n}{3n^2+1}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{4^n}$; в) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n+2}{\sqrt{n^6+2n+4}}$.

2. а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n+4}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin n}{n^2+5}$.

3. а) $\sum_{n=1}^{\infty}(ex)^n$; б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x+3)^n}{n(n+2)}$.

4. а) $\sin 5^\circ$, $\varepsilon=0{,}0001$; б) $\int_0^{0{,}4} x^8\sin x dx$, $n=4$.

Варіант 11

1. а) $\sum_{n=1}^{\infty}\sqrt{\frac{1}{2+n^3}}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n+2}{n!}$; в) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2+n+1}{n^2+n+4}$.

2. а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n n^2}{n^2+1}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{4^n}$.

3. а) $\sum_{n=1}^{\infty}(2x)^n$; б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x+5)^n}{\sqrt{n+4}}$.

4. а) $\cos 10^\circ$, $\varepsilon=0{,}0001$; б) $\int_0^{0{,}2} x^4 arctgx dx$, $n=4$.

Варіант 12

1. а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n+2}{2n+5}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{n\cdot 3^n}$; в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(n+2)^2}{(2n+1)^4}$.

2. а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2^n}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\sqrt{3n+2}}$.

3. а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{x}{3}\right)^n$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(x+1)^n}{n!}$.

4. а) $\sqrt[4]{66}$, $\varepsilon=0,001$; б) $\int\limits_{0}^{0,1}e^{-2x^2}dx$, $n=3$.

Варіант 13

1. а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(n+1)^2}{(n+2)^3}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n^2+1}{4^n}$; в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2n+3}{n+5}$.

2. а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{3n+1}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{4^n}$.

3. а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(2x)^n$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n(x-3)^n}{n+1}$.

4. а) $arctg\,0{,}1$, $\varepsilon=0,001$; б) $\int\limits_{0,1}^{1}\frac{e^x}{x}dx$, $n=5$.

Варіант 14

1. а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n+100}{2n+101}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{e^n}$; в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n}{5n^2+3}$.

2. а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{3n+2}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\sin 2n}{n^2+n}$.

3. а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(-\frac{x}{4}\right)^n$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(x-4)^n}{(n+1)!}$.

4. а) $\sqrt[3]{124}$, $\varepsilon=0,001$; б) $\int\limits_{0}^{0,1}\frac{dx}{1+x^6}$, $n=4$.

Варіант 15

1. а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{5^{n+1}}{n!}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(n-1)^2}{(n+2)^2}$; в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{3n+5}{2n^2+5n}$.

2. а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\sin\pi n}{\pi^n}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+3}$.

3. а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(-\frac{x}{3}\right)^{n+1}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(x+2)^n}{n^2+2n}$.

4. а) $\cos 0{,}2$, $\varepsilon=0{,}001$; б) $\int\limits_0^1\frac{dx}{\sqrt{1+x^3}}$, $n=4$.

Варіант 16

1. а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+1)\sqrt{n+1}}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2n-1}{2n+1}$; в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(n-1)^3}{(n+3)^3}$.

2. а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{\ln(n+1)}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\sin 3n}{n^2+9}$.

3. а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{(n+1)!}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(x-2)^n}{\sqrt{n+2}}$.

4. а) $\sin 0{,}3$, $\varepsilon=0{,}001$; б) $\int\limits_0^{0{,}2}\frac{dx}{1+x^4}$, $n=4$.

Варіант 17

1. а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2n+3}{4n+5}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n^2+1}{3^n}$; в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\sqrt{\frac{1}{n^2+3}}$.

2. а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{e^{n+1}}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{3n+2}$.

3. а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(2x)^n$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}n^2(x+2)^n$.

4. а) $e^{-0{,}4}$, $\varepsilon=0{,}001$; б) $\int\limits_0^{0{,}4}\frac{dx}{1+x^6}$, $n=4$.

Варіант 18

1. а) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n+1}{n}\right)^3$; б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n+2)^2}{n^3}$; в) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2+3n}{3^n}$.

2. а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin 4^n}{4^n}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+5}$.

3. а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{(n+1)(n+2)}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n(x-3)^n}{n}$.

4. а) $\sqrt[5]{1,25}$, $\varepsilon=0,01$; б) $\int_0^{0,6}\frac{\sin x^3}{x^3}dx$, $n=3$.

Варіант 19

1. а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n}{n^2+1}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty}\sqrt[3]{\frac{4}{n^6+5n}}$; в) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{e^n}{n!}$.

2. а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\sqrt{n^2+n}}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos\pi n}{e^n}$.

3. а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n^2+2n}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x+3)^n}{3^n}$.

4. а) $\sin 5^\circ$, $\varepsilon=0,0001$; б) $\int_0^{0,1}\frac{dx}{1+16x^4}$, $n=3$.

Варіант 20

1. а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{e^n}{n^3+5}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty}(\sqrt{n+3}-\sqrt{n+1})$; в) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n+2)!}{n\cdot 4^n}$.

2. а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\ln(n+3)}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n^2+16}}$.

3. а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{\sqrt{n^2+2n}}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n(x+1)^n}{3^n}$.

4. а) $\sqrt[5]{31}$, $\varepsilon=0,001$; б) $\int_0^{0,2}x^2 arctgx dx$, $n=3$.

Варіант 21

1. а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{2^n}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2}\frac{1}{3^n}$; в) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{n^2+1}}{2n}$.

2. а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n+1}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n\cdot n}{3^n}$.

3. а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n^2}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x-5)^n}{n}$.

4. а) $\frac{1}{e}$, $\varepsilon=0{,}001$; б) $\int_0^{0,5}\frac{arctgx}{x}dx$, $n=4$.

Варіант 22

1. а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n!}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2n+1}{2n}\right)^{n^2}$; в) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n+2}{n^2+3n+1}$.

2. а) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{n+2}{n^2+2}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{3^n}{2^n}$.

3. а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n(n+2)}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x+2)^n}{n!}$.

4. а) $\sqrt[3]{1{,}015}$, $\varepsilon=0{,}001$; б) $\int_{0,1}^{1}\frac{e^x}{x^2}dx$, $n=5$.

Варіант 23

1. а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n+2}{n^3+3n}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{5^n}{n!}$; в) $\sum_{n=1}^{\infty}\sqrt{\frac{2n+1}{3n+2}}$.

2. а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{4n-1}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\sqrt[3]{n+1}}$.

3. а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n\cdot x^n}{7^n}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x+1)^n}{3^n}$.

4. а) $\cos 10^\circ$, $\varepsilon=0{,}001$; б) $\int_0^{0,1}\frac{\ln(1+x)}{x}dx$, $n=5$.

Варіант 24

1. а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n^2+1}{n^3+2n+2}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n^3}{3^n}$; в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\dfrac{n+1}{2n+1}\right)^{3n}$.

2. а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\dfrac{\sqrt{n+1}}{n+\sqrt{2}}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\dfrac{n}{\sqrt{n^3}}$.

3. а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{x^n}{2n\cdot 4^n}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(x-1)^n}{2n-1}$.

4. а) $\sqrt[4]{80}$, $\varepsilon=0{,}001$; б) $\int\limits_{0,1}^{0,3}\dfrac{e^{-x}}{x^3}dx$, $n=3$.

Варіант 25

1. а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{3n}{2^n}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\sin^n\left(\dfrac{1}{2n}\right)$; в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{0{,}1n^2+3n+1}{10n^2+10000}$.

2. а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\dfrac{n^2+1}{n^3+1}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\dfrac{2n+1}{n(n+1)}$.

3. а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{x^n}{\sqrt{n+1}}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(x-1)^n}{n\cdot 9^n}$.

4. а) $\ln 1{,}2$, $\varepsilon=0{,}001$; б) $\int\limits_{0}^{\frac{\sqrt{3}}{3}}x^3 arctg x dx$, $n=2$.

Варіант 26

1. а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{5^n}{3^n(2n+1)}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{\sqrt{n(n-1)}}$; в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{2^n}\left(\dfrac{n+1}{n}\right)^{n}$.

2. а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\dfrac{n}{3n^2-2}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\dfrac{2n-1}{3n}$.

3. а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{x^n}{n\cdot 10^{n-1}}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\sqrt[3]{n}(x-2)^n}{n+1}$.

4. а) $\ln 1{,}04$, $\varepsilon=0{,}0001$; б) $\int\limits_{0,1}^{0,4}\dfrac{e^{-x}}{x^2}dx$, $n=4$.

Варіант 27

1. а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{4n-3}{\sqrt{n\cdot 3^n}}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n}{(2n+1)^2-1}$; в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\dfrac{n+2}{3n-1}\right)^{n^2}$.

2. а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\dfrac{n}{7^n}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n n}{2^n\sqrt{n+1}}$.

3. а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{10x^n}{\sqrt{n}}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(x-1)^n}{2^n(n+3)!}$.

4. а) $\sqrt[10]{1027}$, $\varepsilon=0{,}001$; б) $\int\limits_0^2 e^{-x^2}dx$, $n=5$.

Варіант 28

1. а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{5^n}{4^n(n+1)^2}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n}{(n+1)^3}$; в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\dfrac{1+n}{n}\right)^{\frac{n}{3}}$.

2. а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\dfrac{1}{\sqrt{n(n+1)}}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\dfrac{4^n}{(2^n+1)^2}$.

3. а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n^2x^n}{n+1}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\sqrt{n+1}(x+3)^n}{3^n}$.

4. а) $\cos 18^0$, $\varepsilon=0{,}001$; б) $\int\limits_0^{\frac{1}{2}}\dfrac{\sin x}{x}dx$, $n=4$.

Варіант 29

1. а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{2n+1}{n^2(n+2)}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{5^n(n+1)^2}{3^n}$; в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}3^n\left(\dfrac{n-1}{n}\right)^{n^2}$.

2. а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\dfrac{2n+1}{3n^2+4}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\dfrac{n}{2^n}$.

3. а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{7^nx^n}{5^n+3^n}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(x-7)^n}{(2n^2-5n)\cdot 4^n}$.

4. а) $\dfrac{1}{e}$ $\varepsilon=0{,}001$; б) $\int\limits_0^{0{,}5}x^2 arctgx dx$, $n=4$.

Варіант 30

1. а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{3^n}{n\cdot 2^n}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(3n-2)(3n+1)}$; в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2n+1}{5n+4}\right)^{2n}$.

2. а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{n^2}{6^n+2}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n}\frac{1}{(2n-1)^2}$.

3. а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x^n(n+1)}{3^n(n+2)}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{n}(x-2)^n}{n^2+1}$.

4. а) $\sqrt[3]{130}$ $\varepsilon=0,0001$; б) $\int\limits_0^{0,5}x^3\cos x dx$, $n=4$.

Зразок виконання індивідуального завдання № 11

Приклад 1. Дослідити збіжність числових рядів:

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{3n^3+4}{\sqrt{n^{10}-1}}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{3^n}{(2n)!}$; в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n+3}{3n-1}\right)^{n}$; г) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{3n-1}{5n^2+2}$;

д) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{3n^3+4}{\sqrt{n^{10}-1}}$.

а) Перевіримо виконання необхідної умови збіжності ряду: $\lim\limits_{n\to\infty}u_n=0$.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{3n^3+4}{\sqrt{n^{10}-1}}=\lim_{n\to\infty}\frac{3n^3+4}{n^5\sqrt{1-\frac{1}{n^{10}}}}=0.$$

Для перевірки достатньої умови збіжності ряду використаємо ознаку порівняння. В якості еталонного оберемо узагальнений гармонійний ряд, загальний член якого дорівнює $v_n=\frac{1}{n^2}$, цей ряд є збіжним.

Згідно з формулюванням ознаки порівняння, якщо $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{u_n}{v_n}\neq 0$, обидва ряди одночасно збігаються або розбігаються.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\left(3n^3+4\right)n^2}{\sqrt{n^{10}-1}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\left(3n^3+4\right)n^2}{n^5\sqrt{1-\frac{1}{n^{10}}}}=3\neq 0.$$

Відповідь: ряд є збіжним.

б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n}{(2n)!}$.

Використаємо достатню ознаку збіжності Даламбера: $\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=q$, якщо $q<1$ – ряд є збіжним, $q>1$ – ряд є розбіжним.

$$u_n=\frac{3^n}{(2n)!};\qquad u_{n+1}=\frac{3^{n+1}}{\left(2(n+1)\right)!}=\frac{3^{n+1}}{(2n+2)!}.$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{3^{n+1}(2n)!}{(2n+2)!3^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{3}{(2n+1)(2n+2)}=0<1.$$

Відповідь: ряд є збіжним.

в) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n+3}{3n-1}\right)^n$.

Згідно з необхідною умовою збіжності ряду, маємо:

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+3}{3n-1}\right)^n=\left[\frac{1}{3}\right]^{\infty}=0.$$

Ряд може бути збіжним.

Використаємо радикальну ознаку Коші як достатню умову збіжності ряду: $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n}=q$, якщо $q<1$ – ряд є збіжним, $q>1$– ряд є розбіжним.

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left(\frac{n+3}{3n-1}\right)^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{n+3}{3n-1}=\frac{1}{3}<1.$$

Відповідь: ряд є збіжним.

г) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{3n-1}{5n^2+2}$.

Даний ряд є знакопереміжним, загальний вигляд якого $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n u_n$.

Складемо ряд з модулів членів вихідного ряду: $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3n-1}{5n^2+2}$.

Якщо ряд, складений із модулів, є збіжним, то знакопереміжний ряд є абсолютно збіжним.

Дослідимо останній ряд на збіжність за достатньою умовою порівняння, як еталонний оберемо гармонійний ряд ($v_n=\frac{1}{n}$), який є розбіжним.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{u_n}{v^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{(3n-1)n}{5n^2+2}=\frac{3}{5}\neq 0.$$

Тобто ряд, складений із модулів є розбіжним, тому для подальшого дослідження на умовну збіжність застосуємо ознаку Лейбніца. Перевіримо виконання двох умов:

1) $\lim_{n\to\infty}u_n=0$;

2) починаючи з деякого номера n, члени ряду утворюють монотонно спадаючу послідовність:

$u_n>u_{n+1}>u_{n+2}>...$

Перша умова ознаки Лейбніца вже перевірена (необхідна ознака збіжності ряду). Другу умову можна перевірити декількома способами.

Найбільш наочною ілюстрацією монотонного спадання числової послідовності є диференціювання функції $f(x)=\frac{3x-1}{5x^2+2}$ у припущенні, що члени послідовності є значеннями функції при натуральних значеннях незалежної змінної $x=1,2,3,\ ...$

Якщо функція монотонно спадає, то її похідна від'ємна на інтервалі монотонності функції.

Обчислимо похідну: $f'(x)=\left(\frac{3x-1}{5x^2+2}\right)'=\frac{-15x^2+10x+6}{\left(5x^2+2\right)^2}$.

Як бачимо з останньої формули, $f'(x) < 0$ при $x \geq 1$.

Тобто при $n \geq 1$ члени ряду утворюють монотонно спадаючу послідовність.

Друга умова ознаки Лейбніца доведена, тому ряд збігається умовно.

Відповідь: ряд є умовно збіжним.

Приклад 2. Визначити області збіжності таких степеневих рядів:

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{4^n (n+3)!}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{(2n+1)^2}$; в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(x-3)^{2n}}{n\sqrt{n+1}}$.

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{4^n (n+3)!}$.

Дослідження області збіжності степеневого ряду почнемо з визначення радіусу збіжності: $R = \lim\limits_{n \to \infty} \left| \frac{c_n}{c_{n+1}} \right|$,

де c_n – коефіцієнт членів ряду, $c_n = \frac{1}{4^n (n+3)!}$.

$$R = \lim_{n \to \infty} \left| \frac{4^{n+1} (n+4)!}{4^n (n+3)!} \right| = \lim_{n \to \infty} \left| 4(n+4) \right| = \infty.$$

Цей ряд є абсолютно збіжним на всій чисельній осі.

б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{(2n+1)^2}$.

Визначимо радіус збіжності, $c_n = \frac{1}{(2n+1)^2} : R = \lim\limits_{n \to \infty} \left| \frac{(2n+3)^2}{(2n+1)^2} \right| = 1.$

Ряд є абсолютно збіжним на інтервалі $(-1;1)$.

Дослідимо збіжність ряду на границях інтервалу.

При $x=1$ маємо ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)^2}$. Це ряд з додатними членами і за достатньою умовою порівняння з еталонним узагальненим рядом $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$, який є збіжним, отримаємо, що при $x=1$ ряд є збіжним.

При $x=-1$ ряд набуває вигляду: $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)^2}$. Ряд, складений із модулів, співпадає з рядом при $x=1$, притому він є збіжним.

Таким чином, знакопереміжний ряд є абсолютно збіжним.

Відповідь: областю збіжності вихідного ряду є відрізок $[-1;1]$.

в) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x-3)^{2n}}{n\sqrt{n+1}}$.

Зробимо заміну змінної $z=x-3$. Отримаємо неповний степеневий ряд: $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{z^{2n}}{n\sqrt{n+1}}$.

Знайдемо область збіжності цього ряду за ознакою Даламбера збіжності числових рядів:

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{z^{2n+2}}{(n+1)\sqrt{n+2}}\frac{n\sqrt{n+1}}{z^{2n}}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{z^2n\sqrt{n+1}}{(n+1)\sqrt{n+2}}\right|=$$

$$=z^2\lim_{n\to\infty}\frac{n\sqrt{n+1}}{(n+1)\sqrt{n+2}}=z^2\cdot 1=z^2=q.$$

За ознакою Даламбера цей ряд є збіжним, якщо $q<1$.

Тобто $z^2<1 \quad \Leftrightarrow \quad -1<z<1$ – область збіжності.

Зробимо зворотний перехід до змінної x.

$-1<x-3<1 \quad \Rightarrow \quad 2<x<4$.

Вихідний ряд є абсолютно збіжним на інтервалі $(2,4)$.

Дослідимо граничні точки.

При $x=4$ маємо ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(4-3)^{2n}}{n\sqrt{n+1}}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\sqrt{n+1}}$.

Цей ряд є збіжним, як еталонний $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{3/2}}$ (за ознакою порівняння).

При $x=2$ маємо ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2-3)^{2n}}{n\sqrt{n+1}}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{2n}}{n\sqrt{n+1}}$.

Якщо скласти ряд з модулів останнього знакопереміжного ряду, отримаємо ряд, як і при $x=4$. Тобто при $x=2$ ряд є абсолютно збіжним.

Відповідь: областю збіжності вихідного ряду є відрізок $[2;\,4]$.

Обчислити $\sqrt[3]{30}$ з точністю до 0,001.

Розв'язання.

Наближене обчислення коренів здійснюється за допомогою біноміального ряду.

$$(1+x)^m=1+mx+\frac{m(m-1)}{2!}x^2+\frac{m(m-1)(m-2)}{3!}x^3+\dots,$$

$(-1<x<1)$.

Отже,

$$\sqrt[3]{30}=\sqrt[3]{27+3}=\sqrt[3]{27\left(1+\frac{1}{9}\right)}=3\left(1+\frac{1}{9}\right)^{\frac{1}{3}}=$$

$$=3\left(1+\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{9}+\frac{\frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}-1\right)}{2!}\frac{1}{9^2}+\frac{\frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}-1\right)\left(\frac{1}{3}-2\right)}{3!}\frac{1}{9^3}+\dots\right)=$$

$$=3\left(1+\frac{1}{27}-\frac{1}{729}+\frac{5}{9^5}-\dots\right)=3+\frac{1}{9}-\frac{1}{243}+\frac{5}{9^4}-\dots$$

Одержаний ряд – знакозмінний.

Його похибка менша за модулем, ніж перший відкинутий член.

Оскільки $\frac{5}{9^4}<0{,}001$, то $\sqrt[3]{30}\approx 3+\frac{1}{9}-\frac{1}{243}=\frac{755}{243}=3{,}107$ з точністю до 0,001.

Знайти наближене значення e^2 обмежуючись першими вісьмома членами ряду Маклорена для e^x та обчислити похибку.

Розв'язання.

Застосуємо формулу

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots , \quad (-\infty < x < \infty).$$

При $x = 2$ маємо

$$e^2 \approx 1 + 2 + \frac{2^2}{2!} + \frac{2^3}{3!} + \frac{2^4}{4!} + \frac{2^5}{5!} + \frac{2^6}{6!} + \frac{2^7}{7!}.$$

Припустима при цьому похибка оцінюється таким чином:

$$R_8 = \frac{2^8}{8!} + \frac{2^9}{9!} + \ldots = \frac{2^8}{8!} + \frac{2^9}{8!9} + \frac{2^{10}}{8!9\cdot 10} + \ldots =$$

$$= \frac{2^8}{8!}\left(1 + \frac{2}{9} + \frac{2^2}{9\cdot 10} + \frac{2^3}{9\cdot 10\cdot 11} + \ldots\right) < \frac{2^8}{8!}\left(1 + \frac{2}{9} + \frac{2^2}{9\cdot 9} + \frac{2^3}{9\cdot 9\cdot 9} + \ldots\right) =$$

$$= \frac{2^8}{8!}\left(1 + \frac{2}{9} + \left(\frac{2}{9}\right)^2 + \left(\frac{2}{9}\right)^3 + \ldots\right) = \frac{2^8}{8!}\cdot\frac{1}{1-\frac{2}{9}} = \frac{2^8\cdot 9}{8!\cdot 7} < 0,008 < 0,01.$$

Отже,

$$e^2 \approx 1 + 2 + 2 + 1,333 + 0,667 + 0,267 + 0,089 + 0,025 \approx 7,38$$

з точністю до 0,01.

Обчислити $\int\limits_0^{\frac{1}{4}} e^{-x^2}dx$ з точністю до 0,0001.

Розв'язання.

Цей інтеграл, як і багато інших необхідних інтегралів, не можна обчислити за формулою Ньютона – Лейбніца.

Але його можна обчислити наближено.

$$e^{-x^2} = 1 - x^2 + \frac{x^4}{2!} - \frac{x^6}{3!} + \ldots , \quad (-\infty < x < \infty).$$

Інтегруючи почленно цей ряд, одержуємо

$$\int_0^{\frac{1}{4}} e^{-x^2}dx = \int_0^{\frac{1}{4}}\left(1 - x^2 + \frac{x^4}{2!} - \frac{x^6}{3!} + \ldots\right)dx =$$

$$= \left(x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{2!\cdot 5} - \frac{x^7}{3!\cdot 7} + \ldots\right)\Bigg|_0^{\frac{1}{4}} = \frac{1}{4} - \frac{1}{3\cdot 4^3} + \frac{1}{2!\cdot 5\cdot 4^5} - \ldots =$$

$$= 0,25 - 0,00521 + 0,000098 - \ldots$$

Одержано знакопереміжний ряд. Оскільки його третій член за абсолютною величиною менший заданої похибки 0,0001, то

$$\int_0^{\frac{1}{4}} e^{-x^2}dx \approx 0,25 - 0,0052 = 0,2448 .$$

Використана література

1. Анохіна О. Д. Збірник індивідуальних завдань з навчальної дисципліни «Вища математика» для студентів усіх спеціальностей всіх форм навчання / укл. О. Д. Анохіна, Г. В. Усіна. – Х. : Вид. ХНЕУ, 2006. – 144 с.
2. Барковський В. В. Математика для економістів : навч. посібн. / В. В. Барковський, Н. В. Барковська. – К. : НАУ, 1997.
3. Берман Г. Н. Сборник задач по курсу математического анализа / Г. Н. Берман – М. : Наука, 2000.
4. Вища математика : навч. посібн. для самост. вивч. дисц. / під ред. Валуєва К. Г. – К. : КНЕУ, 1999.
5. Высшая математика для экономистов / под ред. Н. Ш. Кремера. – М. : "ЮНИТИ", 2002.
6. Высшая математика : Сборник задач / под ред. П. Ф. Овчинникова. – К. : Вища школа, 1999.
7. Вища математика у прикладах та задачах. Ч. 4. Аудиторні контрольні роботи. Індивідуальні завдання / А. Д. Тевяшев, О. Г. Литвин, О. М. Титаренко та ін. – К. : Кондор, 2006. – 556 с.
8. Клетеник А. В. Сборник задач по аналитической геометрии / А. В. Клетеник. – М. : Наука, 2001.
9. Малярець Л. М. Вища математика для економістів у прикладах, вправах і задачах : навч. посібн. / Л. М. Малярець, А. В. Ігначкова. – Х. : Вид. дім «ІНЖЕК», 2006. – 544 с.
10. Малярець Л. М. Математика для економістів : навч. посібн.: в 2-х ч. / Л. М. Малярець, Л. М. Афанасьєва, А. В. Ігначкова. – Х. : Вид. ХНЕУ, 2011. – Ч. 1. – 348 с.; Ч. 2 – 308 с.
11. Минорский В. П. Сборник задач по высшей математике / В. П. Минорский. – М. : Наука, 1999.
12. Общий курс высшей математики для экономистов / под ред. В. И. Ермакова. – М., 1999.
13. Сборник индивидуальных заданий по высшей математике / под ред. А.П. Рябушко : В 3-х ч. – Мн. : Вышейш. шк., 1990 – 1991. Ч 1. – 270 с.; Ч. 2. – 352 с.; Ч.3. – 288 с.
14. Тевяшев А. Д. Высшая математика. Сборник задач и упражнений. / А. Д. Тевяшев, А. Г. Литвин. – Х. : ХТУРЭ, 1999.

Зміст

НАВЧАЛЬНЕ ВИДАННЯ

Індивідуальні завдання з навчальної дисципліни «Вища математика»

**для студентів галузі знань
0305 «Економіка та підприємництво»
денної форми навчання**

Укладачі: **Железнякова Еліна Юріївна**
Ігначкова Алла Вікторівна
Широкорад Ліна Данилівна

Відповідальний за випуск: **Маляреця Л.М.**

Редактор **Пушкар І.П.**
Коректор

План 2014 г. Поз. №
Підп. до друку Формат 60 x 90/16 Папір Multicopy. Друк Riso.
Умовно.-друк. лист. Обл.-вид. арк. Тираж екз.

Свідоцтво про внесення до Державного реєстру суб'єктів видавничої справи
Дк №481 від 13.06.2001 р.

Видавець і виготівник – видавництво ХНЕУ ім. С. Кузнеця, 61001, м. Харків, просп. Леніна, 9а