МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ,
МОЛОДЕЖИ И СПОРТА УКРАИНЫ

ХАРЬКОВСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ЭКОНОМИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ

Афанасьева Л. М., Норик Л. А.

ВЫСШАЯ И ПРИКЛАДНАЯ МАТЕМАТИКА

Учебное пособие для студентов – иностранцев отрасли знаний 0306 «Менеджмент и администрирование»

Часть 1

Авторы Л. М. Афанасьева

Л. А. Норик

Ответственный за выпуск Малярец Л.М.

Харьков, 2012

УДК 518 (075)

ББК 22.1я7

А 94

Рецензенты: докт. физ.-мат. наук, профессор, декан факультета прикладной математики и менеджмента Харьковского национального университета радиоэлектроники *Дорошенко В. А.;* докт. экон. наук, профессор, зав. кафедры статистики и экономического прогнозирования Харьковского национального экономического университета *Раевнева Е. В.*

Утверждено на заседании ученого совета ХНЭУ
Протокол № от 16.03.2012 2012 г.

Афанасьева Л. М.

Высшая и прикладная математика : учебное пособие для студентов – иностранцев отрасли знаний 0306 «Менеджмент и администрирование». Часть 1 / Л. М. Афанасьева, Л. А. Норик. – Х. : Изд. ХНЭУ, 2012. – 410 с.

Представлен теоретический и практический материал в соответствии с рабочей программой учебной дисциплины и в объеме, который отвечает требованиям программы.

Рекомендовано для иностранных студентов отрасли знаний «Менеджмент и администрирование» всех форм обучения, а также для преподавателей и аспирантов.

НАВЧАЛЬНЕ ВИДАННЯ

Афанасьєва Лідія Михайлівна
Норік Лариса Олексіївна

Вища та прикладна математика
Навчальний посібник для іноземених студентів галузі знань 0306 «Менеджмент та адміністрування»
Частина 1

Подано теоретичний та практичний матеріал відповідно робочої програми навчальної дисципліни та в обсязі, який відповідає вимогам програми.

Рекомендовано для іноземних студентів галузі знань «Менеджмент та адміністрування» всіх форм навчання, а також для викладачів та аспірантів.

Відповідальний за выпуск **Малярець Л. М.**

Редактор Семенова І. М.
Коректор

План 2012 р. Поз. № 55П

Підп. до друку Формат 60×90 1/16.
Папір MULTICOPY Друк Rizo.
Ум.- друк. арк. 25 Обл.-вид. арк. Тираж прим. 500
Зам. №

Свідоцтво про внесення до Державного реєстру суб'єктів видавничої справи ***Дк №481 від 13.06.2001 р.***

Видавець і виготівник – видавництво ХНЕУ, 61001, м. Харків, просп. Леніна, 9а

Введение

В новых условиях профессиональной деятельности для того, чтобы поддерживать свою квалификацию на необходимом современном уровне, от каждого специалиста требуется стремление к развитию возможности самостоятельного повышения уровня математического образования.

Основой математической подготовки квалифицированного экономиста отрасли знаний «Менеджмент и администрирование» является нормативная учебная дисциплина «Высшая и прикладная математика».

В последнее время акценты процесса формирования личности будущих специалистов все больше переносятся от приобретения репродуктивных знаний на развитие готовности и возможности к творческому труду, способности не только усваивать готовые знания, но и генерировать новые. Внедрение вычислительной техники и методов математического моделирования в экономику, управление, финансовое прогнозирование повысило требования к прикладной направленности математических дисциплин.

Цель изучения данной дисциплины – формирование целостной системы теоретических знаний математического аппарата, необходимого для решения теоретических и практических задач в профессиональной деятельности компетентного специалиста в сфере менеджмента и администрирования, умения аналитического мышления и навыков применения математического аппарата к формализации реальных процессов и явлений, а также к решению экономических задач. При этом основная цель значительно шире, чем возможности практического применения. Это – приобретение фундаментальных классических знаний, развитие математической интуиции, воспитание качествам математической культуры (критичности, системности, логичности, гибкости и др.), формирование стремления и возможности к саморазвитию и самоусовершенствованию. Правильно поставить задачу, выделить и оценить наиболее существенные данные, выбрать (из альтернатив) способ и средства ее решения, оценить полученный результат – все это позволяет развивать названные выше качества математической культуры.

Предмет дисциплины «Высшая и прикладная математика» – фундаментальные положения линейной и векторной алгебры, аналитической геометрии, математического анализа, основные закономерности массовых случайных событий, а также принципы регистрации, описания и анализа результатов статистических наблюдений, решения оптимизационных задач.

Основными **задачами** изучения учебной дисциплины «Высшая и прикладная математика» являются предоставление студентам знаний по основным разделам высшей математики, повышение уровня фундаментальной математической подготовки студентов с усилением ее прикладной направленности, а также получение необходимой математической базы для изучения других дисциплин математического цикла.

В процессе изучения данной дисциплины студент получает аналитические исследовательские **компетенции**, которые необходимы современному экономисту в любых сферах его деятельности, а именно:

уметь проводить основные математические вычисления, самостоятельно применять полученные знания для решения соответствующих задач и ситуационных упражнений;

уметь анализировать, обрабатывать полученные результаты с учетом полученных данных и делать выводы на достаточно высоком профессиональном уровне;

уметь отслеживать основные тенденции и направления развития математической науки, самостоятельно работать с научно-методической литературой;

уметь использовать полученные знания для дальнейшего формирования соответствующих экономико-математических моделей и их решения (определение балансовых отношений, вычисления коэффициентов расходов, определения зависимости спроса и предложения, сравнения эффективности финансовых операций и др.);

уметь, в случае сложного задания, использовать метод разложения от сложного к простому, то есть приводить отдельные сложные части к более простым с последующим их решением.

Раздел 1. Линейная алгебра. Аналитическая геометрия. Дифференциальное исчисление

1. Предмет и задачи дисциплины

1.1. Введение. Математическое образование как важная составляющая в системе фундаментальной подготовки современного менеджера

Общеизвестно, что математика – это наука о специальных логических структурах, в которых описаны связи между их элементами. Большинство из математических структур могут быть непосредственными моделями реальных явлений, другие – связаны с реальными явлениями лишь через вспомогательные понятия и логические структуры. То есть математика является, фактически, совокупностью знаний о математических структурах со своими проблемами, с собственными путями решения, которые обуславливаются внутренними и внешними факторами и задачами. Она дает удобные способы и средства познания самых разнообразных явлений реального мира, и тем самым выполняет в определенном смысле функцию обобщенного языка науки.

Роль математики в познании и преобразовании окружающего мира в большой мере осознавал Галилей, он считал, что философия бытия написана в грандиозной книге – Вселенная, которая открыта нашему пристальному взгляду. Но понять эту книгу может лишь тот, кто научился понимать ее язык и знаки, которыми она изложена. Написана же она языком математики. Леонардо да Винчи, глубоко осознавая значение и роль математики при изучении природы, писал, что ни одно человеческое исследование не может называться искренней наукой, если оно не прошло через математические доказательства. Дальше он отмечал, что совсем нет достоверности в тех науках, где нельзя применить ни одной из математических теорий, как и в тех, где не существует связи с математикой.

В современных условиях, которые характеризуются сложностью и многоаспектностью экономических и управленческих объектов, вопрос определения, анализа и увеличения эффективности их функционирования является очень нетривиальной задачей. Вооружая будущих специалистов-практиков могучими средствами научного поиска, анализа, прогнозирования, математика развивается и сама.

В последнее время появились и быстро развиваются новые разделы математики. Математическое моделирование экономических, управленческих и экологических процессов все больше становится одним из важнейших и самых эффективных направлений развития экономической теории, совершенствования современных форм хозяйствования. Практическая ценность создания математических моделей и средств математического исследования прикладных задач определяется, в первую очередь, конкретными результатами, значимость которых проверяется на практике. Когда установлено, что соответствующая математическая модель достаточно адекватно описывает определенный круг явлений, необходимость экспериментальной проверки, естественно, отпадает. Однако достичь такого уровня абстрактного анализа может лишь личность, которая владеет достаточной математической культурой.

Переводя экономическую, транспортную, финансовую, управленческую или любую другую задачу на математический язык, современный специалист получает возможность применять для ее решения все многообразие и богатство средств математики. Результаты, полученные с помощью математических методов экономико-финансового анализа, позволяют подтвердить или опровергнуть ту или иную выдвинутую гипотезу, построить прогноз инвестиционной деятельности, составить оптимальный план функционирования финансового института.

Сегодня является заметным поворот к новым сферам применения математических методов в разработке социально-экономических решений, которые будут определять будущее нашего государства: планирование инвестиционной политики, проектирование перестройки городов, путей сообщения, модернизация сельскохозяйственных предприятий, прогнозирование экологических процессов и т. п. При изучении инвестиционных и управленческих проблем стало возможным использовать такое фактически неограниченное количество информации (в частности статистическую, вероятностную), которая накоплена в ресурсах глобальных информационных компьютерных сетей, что человеческий мозг просто не в силах ее охватить. В решении этих проблем существенное место занимают методы и средства вычислительной математики.

Во все времена математика имела бесспорное культурное и практическое значение, играла важную роль в научном, техническом и экономическом развитии социума и отдельной личности. Те, кто на высоком уровне владели математическими методами, всегда составляли стратегический ресурс нации.

В последнее время в связи с ростом роли математических исследований социально-экономических процессов чрезвычайно большому числу будущих инженеров, программистов, экономистов, статистиков, организаторов современного производства требуется глубокая математическая подготовка, которая давала бы возможность с помощью математических методов исследовать широкий круг проблем, применять возможности современной компьютерной техники, использовать теоретические достижения в практике социально-экономической деятельности.

Если за годы учебы в высшем учебном заведении студент получит правильное общее представление о прикладных возможностях математических теорий, поймет, в чем заключается математический подход к изучению реального мира, как его нужно применять и на какие результаты надеяться, приобретет крепкий фундамент знаний и необходимую математическую культуру, разовьет в себе умение и возможность самостоятельно пополнять свое образование, то, владея системой основных понятий, на которых основывается его профессионально направленная деятельность, имея необходимую базу навыков для овладения этой системой, он легко адаптируется в современной переменчивой социально-экономической среде, и будет конкурентоспособным как на рынке труда Украины, так и на международных рынках труда.

Важным качеством современного специалиста исследователи считают умение творчески подходить к решению возникающих перед ним проблем. Основой формирования этого важного умения, безусловно, могут стать навыки построения, исследования, оценивания результатов адекватной математической модели.

1.2. Математические методы для решения экономических задач

Математика и экономика – это две науки, которые, с одной стороны, связаны общей методологией исследований, а с другой – далеки одна от другой из-за разных объектов исследования. Несомненной является абстрактность одной и сугубо практическая ориентированность другой. Взаимосвязь между этими науками, роль и место математических методов в анализе экономических процессов, объектов и явлений были отмечены учеными, как математиками, так и экономистами, еще в XVIII веке.

Математические модели использовались с иллюстративными исследованиями еще Ф. Кене («Экономическая таблица», 1758), А. Смитом («Классическая макроэкономическая модель»), Д. Рикардо («Модель международной торговли»). XIX век подарил миру таких выдающихся исследователей, как А. Курно (1801 – 1877) и А. Маршалл (1842 – 1924), которые впервые доказали необходимость применения математического аппарата к изучению проблем рынка. Бесспорно, большой вклад в становление и развитие экономико-математической науки внесли ученые В. Дмитриев (1868 – 1913), Е. Слуцкий (1880 – 1948), А. Чупрунов (1874 – 1926) и др.

XX век можно назвать веком бурного проникновения математических методов в другие науки, в том числе в экономику, экологию, теорию управления и т. п. Это и построение первых балансовых моделей (П. Попов, В. Леонтьев), и создание линейного программирования (Л. Канторович, Дж. Данциг), и открытие в ведущих высших учебных заведениях Украины специальностей и факультетов подготовки специалистов по применению математических методов и электронно-вычислительной техники в экономике, менеджменте, экологии.

Развитие макроэкономики, микроэкономики, прикладных дисциплин связано с все более высоким уровнем их формализации. Основу для этого заложил прогресс в области прикладной математики. Современная экономическая теория включает как естественный, необходимый элемент математические модели и методы.

Можно выделить четыре основные функции применения математических методов и моделей в решении практических проблем.

1. *Усовершенствование системы экономической информации*.

Математические методы и модели позволяют упорядочивать систему экономической информации, обнаруживать недостатки в имеющейся информации и разрабатывать требования к подготовке новой информации или ее коррекции.

Разработка и применение экономико-математических моделей открывает пути совершенствования экономической информации, ориентированной на решение определенной системы задач планирования и управления. Прогресс в информационном обеспечении планирования и управления опирается на технические и программные средства бурно развивающейся информатики.

2. *Интенсификация и повышение точности экономических расчетов*. Формализация экономических задач и применение компьютеров многократно ускоряют типовые, массовые расчеты, повышают точность и сокращают трудоемкость, позволяют проводить многовариантные экономические исследования и обоснования сложных мероприятий, недостижимые при «ручной» технологии.

3. Углубление количественного анализа экономических проблем. Благодаря применению экономико-математического моделирования значительно увеличиваются возможности конкретного количественного анализа, изучения многих факторов, которые влияют на экономические процессы, количественной оценки последствий изменений условий развития экономических объектов и т. п.

4. *Решение принципиально новых экономических задач*. С помощью математического моделирования удается решать такие экономические задачи, которые другими средствами решить практически невозможно. Например, нахождение оптимального варианта народнохозяйственного плана, имитация народнохозяйственных мероприятий, автоматизация контроля за функционированием сложных экономических объектов.

Математические модели, которые используются в экономике, можно разделить на классы по ряду признаков, которые относятся к особенностям моделируемого объекта, цели моделирования и используемого инструментария:

макроэкономические модели описывают экономику как единое целое, связывая между собой обобщенные материальные и финансовые показатели: валовый национальный продукт, потребление, инвестиции, занятость, процентную ставку, количество денег и др.;

микроэкономические описывают взаимодействие структурных и функциональных составляющих экономики, либо поведение отдельной такой составляющей в рыночной среде;

теоретические позволяют изучать общие свойства экономики и ее характерных элементов дедукцией выводов из формальных предпосылок;

прикладные модели дают возможность оценить параметры функционирования конкретного экономического объекта и сформулировать рекомендации для принятия практических решений;

равновесные описывают такие состояния экономики, когда результирующая всех сил, стремящихся вывести ее из данного состояния, равна нулю;

оптимизационные позволяют моделировать ситуацию максимизации полезности или рационального выбора поведения экономическими субъектами;

статические модели описывают состояние экономического объекта в конкретный момент или период времени;

динамические включают взаимосвязи переменных во времени и описывают силу и взаимодействие в экономике, определяющие ход процессов в ней;

детерминированные модели предполагают жесткие функциональные связи между переменными модели;

стохастические, которые допускают наличие случайных воздействий на исследуемые показатели.

В соответствии с современными экономическими представлениями относительно системы разработки и принятия хозяйственных решений она должна совмещать *формальные и неформальные методы*, которые дополняют друг друга. Формальные методы являются, прежде всего, средством научно обоснованной подготовки материала для следующих рациональных действий человека в процессах управления. Это позволяет эффективно использовать опыт, интуицию человека, способность решать трудно формализуемые задачи.

1.3. Начало алгебры. Вещественные числа и действия над ними

Понятие *множества* является одним из основных в математике.

Под **множеством** понимается любая совокупность объектов, называемых *элементами множества*.

Запись $a \in A$ означает, что объект a есть элемент множества A

(принадлежит множеству A); в противном случае пишут $a \notin A$.

Множество, не содержащее ни одного элемента, называется *пустым* и обозначается символом Ø.

Множество B называется *подмножеством* множества A, если каждый элемент множества B является элементом множества A. Символически это обозначают так: $B \subset A$.

Суммой, или **объединением**, двух множеств X и Y называется совокупность элементов, входящих хотя бы в одно из множеств X или Y. Сумма этих множеств обозначается $X \cup Y$.

Пересечением множеств X и Y (или их общей частью) является совокупность элементов, входящих одновременно как во множество X, так и во множество Y; это множество обозначается $X \cap Y$.

Разностью множеств X и Y называется множество Z, содержащее все элементы множества X, не содержащиеся в Y; эта разность обозначается $Z = X \setminus Y$.

В алгебре чаще всего приходится иметь дело с множествами, элементами которых являются числа. Такие множества называются *числовыми.*

Для числовых множеств используются следующие обозначения:

N – множество натуральных чисел;

Z – множество целых чисел;

Q – множество рациональных чисел;

R – множество вещественных чисел.

Между множествами N, Z, Q, R существует соотношение

$$N \subset Z \subset Q \subset R.$$

Всякое неотрицательное *вещественное число* x представляется бесконечной десятичной дробью

$$[x], x_1 x_2 \ldots, \tag{1.1}$$

где $[x]$ – наибольшее целое число, не превосходящее x и называемое **целой частью числа** x, $x_i \in \{0, 1, 2, \ldots, 9\}$.

Вещественное число x **рационально**, то есть представимо в виде отношения $\frac{m}{n}$ (m,n – целые), в том и только в том случае когда дробь (1.1) периодическая. В противном случае число x **иррационально.**

Рациональные и иррациональные числа образуют множество *вещественных чисел*. Вещественные числа лежат в основе фундамента математического анализа. Каждому вещественному числу соответствует единственная точка координатной прямой, которую называют *числовой прямой* (рис.1.1), то есть прямой, на которой выбрано начало отсчета, положительное направление и единица масштаба.

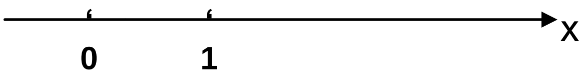


Рис. 1.1

Вещественные числа можно складывать, вычитать, умножать и делить (кроме деления на ноль), и для них выполняются все правила арифметики (коммутативность, ассоциативность, дистрибутивность и т. д.).

Множество вещественных чисел дополняют двумя элементами, обозначаемыми $-\infty$ и $+\infty$ и называемыми **минус бесконечность** и **плюс бесконечность**. На числовой прямой $-\infty$ находится левее всех чисел, а $+\infty$ – правее всех чисел. Множество вещественных чисел является бесконечным.

Множество X, элементы которого удовлетворяют:

неравенству $a \le x \le b$, называется **отрезком** (или **сегментом**) $[a,b]$;

неравенству $a < x < b$ – **интервалом** (a,b);

неравенствам $a \le x < b$ или $a < x \le b$ – **полуинтервалами** соответственно $[a,b)$ и $(a,b]$.

Абсолютной величиной, или **модулем**, вещественного числа x называется само число x, если оно положительно, и $-x$, если оно отрицательно, то есть:

$$|x| = \left[\begin{array}{l} x,\ x \ge 0, \\ -x,\ x < 0. \end{array} \right. \tag{1.2}$$

Для любого вещественного числа x выполняются неравенства:

$$|x| \geq 0; \; |x| \geq x; \; |x| \geq -x.$$

Свойства абсолютных величин:

1. $|x| \leq a$ равнозначно неравенствам $-a \leq x \leq a$.

2. Абсолютная величина суммы не больше суммы абсолютных величин

$$|x+y| \leq |x| + |y|. \tag{1.3}$$

3. Абсолютная величина разности величин не меньше разности абсолютных величин

$$|x-y| \geq |x| - |y|. \tag{1.4}$$

4. Абсолютная величина произведения равна произведению абсолютных величин

$$|x \cdot y| = |x| \cdot |y|. \tag{1.5}$$

5. Абсолютная величина частного равна частному абсолютных величин

$$\left|\frac{x}{y}\right| = \frac{|x|}{|y|} \quad (y \neq 0). \tag{1.6}$$

1.4. Уравнение с одной переменной. Неравенства

Понятие уравнения относится к одному из важнейших математических понятий.

Логико-математическое определение уравнения можно привести в такой форме: пусть на множестве X зафиксирован набор алгебраических операций, x – переменная на множестве X*;* тогда **уравнением** на множестве X относительно x называется предложение вида $a(x) = b(x)$, где $a(x)$ и $b(x)$ – переменные относительно заданных операций, в запись которых входит символ x*.*

Следовательно, **уравнением с одной переменной** x (или с одной неизвестной x) называют равенство выражений, которые определены соответственно на множестве X, и для которого поставлена задача найти множество всех x, таких, чтобы выражения имели одинаковые числовые значения. Аналогично определяется уравнение с двумя переменными и т. д.

Уравнение трактуют как равенство, которое содержит неизвестное. Решить уравнение, значит найти все его корни.

Два уравнения называются **равносильными** (или эквивалентными), если все решения первого уравнения являются решениям второго и, наоборот, все решения второго уравнения являются решениями первого. К равносильным уравнениям принадлежат также уравнения, которые не имеют решений.

Теоремы о равносильных уравнениях

Теорема 1. Если к обеим частям уравнения прибавить любое выражение, которое имеет смысл при всех допустимых значениях неизвестного, то полученное уравнение равносильно данному.

Следствие из теоремы 1: любой член уравнения можно перенести из одной части уравнение в другую, изменив его знак на противоположный.

Теорема 2. Если обе части уравнения можно умножить на любое выражение, имеющее смысл и не равное нулю при всех допустимых значениях неизвестной; то полученное уравнение равносильно данному.

В частности, если обе части уравнения умножить на то же число, которое не равно нулю, то получим уравнение, равносильно данному.

Деление на любое число, отличающееся от нуля, можно рассматривать как умножение на число, обратное данному. Поэтому обе части уравнения можно также и разделить на одно и то же число, отличающееся от нуля.

Следствия из теоремы 2:

знаки всех членов уравнения можно изменить на противоположные;

уравнение, в котором числовые коэффициенты всех или некоторых членов – дробные числа, можно заменить равносильным к нему уравнением с целыми коэффициентами (для этого обе части уравнения нужно умножить на наименьшее общее кратное знаменателей дробных коэффициентов).

Общий вид **линейного уравнения** $ax+b=0$, где a и b – некоторые вещественные числа.

Решение этого уравнения находят по формуле: $x=-\frac{b}{a}$.

Квадратным уравнением называют уравнение вида:

$$ax^2+bx+c=0,$$

где a,b,c – вещественные числа, коэффициенты уравнения.

Решения этого уравнения находят по формуле:

$$x_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}. \tag{1.7}$$

Если выражение $D=b^2-4ac$, которое стоит под знаком квадратного корня, будет положительным вещественным числом, тогда из формулы (1.7) получим два разных решения.

Если $D=0$, тогда получим два равных действительных корня.

Если $D<0$, тогда получим пару сопряженных комплексных решений квадратного уравнения.

Биквадратным уравнением называют уравнение вида:

$$ax^4+bx^2+c=0.$$

Такое уравнение подстановкой $x^2=t, \quad t>0$ приводят к квадратному уравнению относительно переменной t.

После нахождения корней полученного квадратного уравнения возвращаются к искомой неизвестной x.

Рациональными уравнениями называют такие уравнения, которые содержат отношение многочленов, зависимых от неизвестного.

В начале решения таких уравнений нужно определить область допустимых значений решений, то есть тех значений неизвестных, при которых знаменатель дроби не равен нулю. При решении таких уравнений целесообразно свободные от неизвестного члены уравнения перенести в правую часть уравнения, а все члены, которые содержат неизвестное, перенести в левую часть уравнения и привести к общему знаменателю. Потом обе части уравнения умножить на знаменатель, перенести правую часть уравнения в левую часть и решить полученное уравнение.

Иррациональными называют такие уравнения, в которых неизвестное содержится под знаком корня.

При нахождении области допустимых значений решений следует руководствоваться тем, что выражение под корнем четной степени должно быть ≥ 0. Если область допустимых значений найти трудно, то после решения уравнения делают проверку путем подстановки найденного решения в заданное уравнение.

Показательными уравнениями называют такие уравнения, которые содержат неизвестное в показателе степени.

При решении показательных уравнений используют свойства показательных выражений и специальные приемы: приведение обеих частей уравнения к одинаковому основанию; вынесение за скобки общего множителя, введение новой переменной, деление обеих частей уравнения на одинаковое выражение, логарифмирование обеих частей.

Логарифмическими называют такие уравнения, которые содержат неизвестное под знаком логарифма.

При решении логарифмических уравнений используют основные свойства логарифмов.

Любое конечное множество уравнений называется *системой уравнений.* **Решением системы уравнений** называется упорядоченный набор чисел, который является решением каждого из уравнений системы.

Наряду с уравнениями существует много разновидностей *неравенств*: линейные, квадратные, рациональные, иррациональные, показательные, логарифмические, показательно-логарифмические, с модулями.

При решении неравенств используют такие их свойства:

1) неравенство не изменится, если добавить или вычесть одинаковое вещественное число из обеих его частей;

2) неравенство не изменяется, если обе его части умножить или разделить на одинаковое положительное число;

3) при умножении и делении неравенства на отрицательное число неравенство изменяет свой знак на противоположный.

В общем случае решение неравенств вида $f(x)>0$ и $f(x)<0$ для любого выражения целесообразно проводить методом интервалов. Суть этого метода состоит в том, что корни уравнения $f(x)=0$ делят всю область определения функции $f(x)$ на интервалы, на которых $f(x)$ имеет постоянный знак. Поэтому можно определить знак функции на каждом интервале путем подстановки в функцию вместо x любой точки x_0 из рассматриваемого интервала, а потом выбрать те интервалы, на которых функция имеет знак заданного неравенства.

Вопросы для самодиагностики

1. Какова роль математики в развитии экономических наук?

2. Какие функции применения математических методов в решении практических задач? Охарактеризуйте математические модели, которые используются в экономике.

3. Какие используются множества и их классификация?

4. Что такое вещественные числа?

5. Что называется абсолютной величиной числа?

6. Какие свойства абсолютных величин?

7. Какие виды уравнений и неравенств вы знаете? Опишите методы их решения.

Упражнения

Решить уравнения:

1.1. $2x(x-3)=7(x-3)$.

1.2. $(2x-1)(x-9)=100$.

1.3. $(x-3)^2=25$.

1.4. $11x-3x^2+70=0$.

1.5. $(x^2-9)(\sqrt{3-2x}-x)=0$.

1.6. $\sqrt{3x^2+7x-4}=-4$.

1.7. $\dfrac{x^2+2x+7}{x^2+2x+3}=4+2x+x^2.$

1.8. $2\sqrt[3]{x^2}-\sqrt[3]{x}=3.$

1.9. $|x-2|+|x-3|+|2x-8|=9.$

1.10. $|2x-3|+|2x+3|=14.$

1.11. $2^{2x+1}+4^{x+1}+16^{x/2}=28.$

1.12. $7\cdot 3^{x+1}-5^{x+2}=3^{x+4}-5^{x+3}.$

1.13. $2^{2x+1}-33\cdot 2^{x-1}+4=0.$

1.14. $8^x+18^x=2\cdot 27^x.$

1.15. $4^x+10^x=6{,}25^x.$

1.16. $\log_2\log_3(x-1)=0.$

1.17. $\log_2^2 x-\log_2 x-3=0.$

1.18. $\log_{1/2}x+\log_2 x=3.$

Решить неравенства:

1.19. $(2x-1)(x-9)<20.$

1.20. $11x-3x^2+70\geq 0.$

1.21. $(x+3)^{-5x^2+3x+2}<1$**.**

1.22. $\left(\dfrac{3}{\sqrt{10}}\right)^{3x^2-3}>\left(\dfrac{10}{9}\right)^{-4x}$**.**

1.23. $4^x\leq 3\cdot 2^{x+\sqrt{x}}+4^{1+\sqrt{x}}$**.**

1.24. $\log_4(x+7)>\log_2(x+1)$**.**

2. Система линейных уравнений

2.1. Определение системы линейных уравнений. Решение системы линейных уравнений

При решении экономических задач и при рассмотрении частных проблем наиболее употребительными в аппарате исследования являются системы линейных уравнений.

Системой линейных уравнений называется конечная совокупность линейных уравнений относительно неизвестных $x_j\ (j=\overline{1,n})$.

Система m линейных уравнений с n неизвестными имеет вид:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n = b_2, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ... + a_{mn}x_n = b_m, \end{cases} \tag{2.1}$$

где $x_j\ (j=\overline{1,n})$ – неизвестные;

$a_{ij}, b_i\ (i=\overline{1,m},\ j=\overline{1,n})$ – соответственно коэффициенты при неизвестных и свободные члены системы линейных уравнений.

Приведенная форма записи называется *канонической.*

Решением системы линейных уравнений называется совокупность чисел $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n$, при подстановке которых в эту систему каждое уравнение данной системы превращается в тождество.

Система уравнений, которая имеет хотя бы одно решение, называется **совместной**, в противном случае система **несовместна***.*

2.2. Определенные и неопределенные системы линейных уравнений. Метод последовательного исключения неизвестных

Если система имеет только одно решение, она является **определенной**, а если система имеет множество решений, то она называется **неопределенной**.

Системы уравнений называются *эквивалентными*, если они имеют одно и то же множество решений.

Исходную систему можно привести к эквивалентной системе с помощью элементарных преобразований. К *элементарным преобразованиям* относятся: перестановка уравнений или слагаемых в уравнениях, умножение уравнения на число, которое $\neq 0$, сложение уравнений системы.

Среди известных методов решения систем линейных уравнений следует отметить **метод исключения Гаусса** и его модификацию, в частности метод Жордана – Гаусса полного исключения неизвестных.

Суть метода Гаусса заключается в том, что с помощью элементарных преобразований от исходной системы переходят к эквивалентной системе, в которой, начиная со второго уравнения, последовательно исключаются неизвестные.

Пусть в системе уравнений $a_{11} \neq 0$. Разделим первое уравнение системы на a_{11}.

Далее умножим первое уравнение последовательно на $-a_{i1}$ $(i=\overline{2,n})$ и прибавим ко всем остальным уравнениям системы.

Система уравнений при этом будет иметь вид:

$$\begin{cases} x_1 + a_{12}^{(1)} x_2 + \ldots + a_{1n}^{(1)} x_n = b_1^{(1)}, \\ \qquad a_{22}^{(1)} x_2 + \ldots + a_{2n}^{(1)} x_n = b_2^{(1)}, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \qquad a_{m2}^{(1)} x_2 + \ldots + a_{mn}^{(1)} x_n = b_m^{(1)}. \end{cases} \tag{2.2}$$

С помощью аналогичных преобразований систему приводят к треугольному виду:

$$\begin{cases} x_1 + a_{12}^{(n)} x_2 + \ldots + a_{1n}^{(n)} x_n = b_1^{(n)}, \\ \qquad\qquad x_2 + \ldots + a_{2n}^{(n)} x_n = b_2^{(n)}, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \qquad\qquad\qquad\qquad x_n = b_m^{(n)}. \end{cases} \tag{2.3}$$

или трапециеподобному виду:

$$\begin{cases} x_1 + a_{12}^{(r)}x_2 + a_{13}^{(r)}x_3 + \ldots + a_{1r}^{(r)}x_r + a_{1r+1}^{(r)}x_{r+1} + \ldots + a_{1n}^{(r)}x_n = b_1^{(r)}, \\ \qquad x_2 + a_{21}^{(r)}x_3 + \ldots + a_{2r}^{(r)}x_r + a_{2r+1}^{(r)}x_{r+1} + \ldots + a_{2n}^{(r)}x_n = b_2^{(r)}, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \qquad\qquad x_r + a_{rr+1}^{(r)}x_{r+1} + \ldots + a_{rn}^{(r)}x_n = b_r^{(r)}. \end{cases} \quad (2.4)$$

Переход от исходной системы к эквивалентной (2.3) или (2.4) называется *прямым ходом метода Гаусса*, а нахождение неизвестных из полученной системы называют *обратным ходом метода Гаусса*.

Если в результате преобразований система уравнений имеет треугольный вид, то она имеет единственное решение.

В случае трапециеподобного вида – система неопределенная (уравнение вида $0 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 + \ldots + 0 \cdot x_n = 0$ отбрасываем).

Следует отметить, что исследование системы проводится параллельно с исключением неизвестных.

Пример 2.1. Решить систему уравнений методом Гаусса:

$$\begin{cases} 4x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 33, \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 23, \\ x_1 + x_2 + 2x_3 = 12. \end{cases}$$

Решение.

Элементарные преобразования системы уравнений удобно проводить в таблице (схема Гаусса) с контролем вычислений. Вычисление будем выполнять в табл. 2.1. Над контрольными суммами в каждой строке выполняются те же операции, что над всеми другими элементами этой строки. При отсутствии ошибок вычисления элементы столбца $\sum$ равны суммам элементов, соответствующих преобразованных строк. В результате преобразований получили треугольный вид системы. По данным табл. 2.1 запишем эквивалентную систему уравнений:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 = 12, \\ x_2 + 5x_3 = 13, \\ x_3 = 2. \end{cases}$$

Таблица 2.1

Схема Гаусса

№ п/п	x_1	x_2	x_3	Правые части уравнений	$\sum$	Примечания
I	4	3	2	33	42	
II	3	2	1	23	29	
III	1	1	2	12	16	
IV	1	1	2	12	16	III
V	0	–1	–5	–13	–19	IV $\cdot$ $(-3)+II$
VI	0	–1	–6	–15	–22	IV $\cdot$ $(-4)+I$
VII	1	1	2	12	16	IV
VIII	0	1	5	13	19	$V\cdot(-1)+VI$
IX	0	0	–1	–2	–3	
X	1	1	2	12	16	VII
XI	0	1	5	13	19	VII
XII	0	0	1	2	3	IX$\cdot(-1)$

Выполняем обратный ход метода Гаусса. Из последнего уравнения эквивалентной системы определяем $x_3 = 2$, из второго – $x_2 = 13 - 5x_3 = 3$, из первого – $x_1 = 12 - x_2 - 2x_3 = 5$.

Ответ: $x_1 = 5; x_2 = 3; x_3 = 2$.

Вопросы для самодиагностики

1. Какая система уравнений называется линейной?
2. Записать систему m линейных уравнений с n неизвестными.
3. Что называется решением системы линейных уравнений?
4. Какие системы называются эквивалентными?
5. Какие преобразования называются элементарными? Наховите их виды.
6. В чем заключается метод Гаусса? Описать прямой и обратный ход метода.
7. Какая система линейных уравнений называется определенной?
8. Какая система называется несовместной?

Упражнения

Решить методом Гаусса системы уравнений:

2.1. $\begin{cases} x_1 & +x_2 & +x_3 & =22 \\ 3x_1 & +2x_2 & +x_3 & =47 \\ x_1 & +3x_2 & -x_3 & =18 \end{cases}.$ **2.2.** $\begin{cases} x_1 & +x_2 & -2x_3 & =6 \\ 2x_1 & +3x_2 & -7x_3 & =16 \\ 5x_1 & +2x_2 & +x_3 & =16 \end{cases}.$

2.3. $\begin{cases} 2x_1 & +3x_2 & -4x_3 = 5 \\ x_1 & +2x_2 & -3x_3 = 3 \\ 3x_1 & -x_2 & +2x_3 = 2 \end{cases}.$ **2.4.** $\begin{cases} 3x_1 + x_2 + 2x_3 = 5 \\ 2x_1 + x_2 - 2x_3 = 7 \\ -x_1 - x_2 + 2x_3 = -4 \end{cases}.$

2.5. $\begin{cases} x_1 + 4x_2 - 2x_3 = 2 \\ x_1 - 3x_2 + 2x_3 = -3 \\ x_1 + 11x_2 - 6x_3 = 7 \end{cases}.$ **2.6.** $\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - 3x_3 = 7 \\ -x_1 + 4x_2 - x_3 = 6 \\ x_1 - x_2 + 2x_3 = -2 \end{cases}.$

2.7. $\begin{cases} x_1 & +2x_2 & +3x_3 & +4x_4 & =7 \\ x_1 & & +2x_3 & +2x_4 & =5 \\ 4x_1 & +x_2 & -x_3 & & =3 \\ 2x_1 & +x_2 & +x_3 & & =1 \end{cases}.$

3. Определители

3.1. Определители второго порядка и третьего порядков. Определители n-го порядка

Рассмотрим самую простую систему уравнений, которая состоит из двух линейных уравнений с двумя неизвестными:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1, \\ a_{21}x_2 + a_{22}x_3 = b_2. \end{cases}$$

Решим эту систему методом последовательного исключения неизвестных. С этой целью исключим сначала неизвестное x_2. Для этого найдем произведение первого уравнения на a_{22}, а второго – на $(-a_{12})$.

После сложения первого и второго уравнений имеем:

$$x_1 = \frac{b_1 a_{22} - b_2 a_{12}}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}.$$

Исключив аналогично переменную x_1, получим:

$$x_2 = \frac{b_2 a_{11} - b_1 a_{21}}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}, \text{ если } a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \neq 0.$$

Число

$$\Delta = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \tag{3.1}$$

это определитель второго порядка таблицы чисел $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$.

Следовательно, **определитель** – это число, которое ставится в соответствие квадратной таблице чисел и вычисляется по определенному правилу. *Порядок определителя* устанавливается числом строк (столбцов) квадратной таблицы чисел.

Самыми простыми определителями являются определители второго и третьего порядков:

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21},$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} =$$

$$= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - (a_{13}a_{22}a_{31} + a_{14}a_{23}a_{32} + a_{112}a_{21}a_{33}).$$

3.2. Свойства определителей

1. Свойство равноправия строк и столбцов.

Если заменить строки определителя соответствующими столбцами, величина определителя не изменится, то есть:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

2. Свойство антисимметрии при перестановке двух строк (двух столбцов).

При перестановке двух строк (столбцов) определитель сохраняет свою абсолютную величину, но изменяет знак на противоположный, то есть:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{12} & a_{12} & a_{13} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

Для описания других свойств определителей введем такие понятия:

минор M_{ij} элемента a_{ij} определителя n-го порядка – это определитель ($n-1$)-го порядка, который получен из данного вычеркиванием *i*-й строки и *j*-го столбца, на пересечении которых находится элемент a_{ij};

алгебраическим дополнением A_{ij} элемента a_{ij} определителя называется число

$$A_{ij} = (-1)\cdot M_{ij}.$$

Пример 3.1. Найти минор M_{32} и алгебраическое дополнение A_{32} для определителя

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 5 & 4 \\ 2 & 1 & 3 \\ -2 & 4 & 7 \end{vmatrix}.$$

Решение.

Минор M_{32} элемента a_{32} получается вычеркиванием из данного определителя 3-й строки и 2-го столбца.

Полученный определитель 2-го порядка равен:

$$M_{32} = \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 3 - 8 = -5.$$

Алгебраическое дополнение: $A_{32} = (-1)^{3+2} \cdot (-5) = (-1)^{5} \cdot (-5) = 5.$

Миноры и алгебраические дополнения играют важную роль в алгебре и ее приложениях. Одним из таких применений является *теорема о способе вычисления определителей.*

Теорема. Определитель равен сумме произведений элементов любой строки на их алгебраические дополнения:

$$\Delta = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + ... + a_{in}A_{in}, \quad i = \overline{1,n}. \qquad (3.2)$$

Формула (3.2) называется **формулой разложения определителя** по i-й строке.

Аналогичное утверждение имеет место и для разложения определителя по любому столбцу.

На основе введенных понятий можно сформулировать следующие *свойства определителя*:

1. Сумма произведений элементов любой строки на алгебраические дополнения этих элементов равна величине определителя, а сумма произведений элементов любой строки на алгебраические дополнения соответствующих элементов параллельной строки равна нулю.

2. Если элементы любой строки имеют общий множитель, то его можно вынести за знак определителя.

3. Определитель равен нулю, если он имеет строку со всеми равными нулю элементами.

4. Если элементы любой строки являются суммой двух слагаемых, то определитель можно представить в виде суммы двух определителей, в которых элементы данной строки равны соответствующим слагаемым.

5. Определитель по своей величине не изменится, если к элементам любой строки добавить элементы параллельной строки, которые умножены на одно и то же число λ.

Заметим, что все приведенные свойства определителей остаются верными для определителей любого порядка.

Пример 3.2. Вычислить определитель $\Delta = \begin{vmatrix} 5 & 3 \\ 2 & 5 \end{vmatrix}$.

Решение.

Воспользуемся формулой (3.1):

$$\Delta = \begin{vmatrix} 5 & 3 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} = 5\cdot 5 + 3\cdot(-2) = 19.$$

Пример 3.3. Вычислить определитель $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 5 & 4 \\ 2 & 1 & 3 \\ -2 & 4 & 7 \end{vmatrix}$.

Решение.

Воспользуемся формулой (3.2):

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 5 & 4 \\ 2 & 1 & 3 \\ -2 & 4 & 7 \end{vmatrix} = 1\cdot(-1)^{1+1}\cdot\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 7 \end{vmatrix} + 5\cdot(-1)^{1+2}\cdot\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -2 & 7 \end{vmatrix} +$$

$$+ 4\cdot(-1)\cdot\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -2 & 4 \end{vmatrix} = -5 - 100 + 40 = -65.$$

3.3. Способы вычисления определителей

Приведем *основные способы вычисления определителей*.

1. **Способ миноров**. Основой является вычисление по определению – формулы разложения определителя по элементам строки или столбца.

2. **Способ нулей***.* Основа – использование свойств определителей, то есть преобразование строки (столбца) с более чем одним отличающимся от нуля элементом.

3. **Способ треугольника**. Основой является приведение определителя к треугольному виду, то есть к виду, когда над или под главной диагональю определителя все элементы равны нулю:

$$\Delta = a'_{11} a'_{22} \ldots a'_{nn},$$

где $a'_{11}, a'_{22}, \ldots, a'_{nn}$ – преобразованные элементы главной диагонали.

Наиболее часто применяется способ (2), так как он позволяет снизить порядок определителя.

Пример 3.4. Вычислить определитель

$$\Delta = \begin{vmatrix} 4 & 3 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix}.$$

Решение.

$$\Delta = \begin{vmatrix} 4 & 3 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & -1 & -6 \\ 0 & -1 & -5 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & -6 \\ -1 & -5 \end{vmatrix} = -1.$$

При преобразовании третья строка определителя умножена на (–3) и прибавлена ко второй строке, дальше третья строка умножена на (–4) и прибавлена к первой строке.

Пример 3.5. Вычислить определитель четвертого порядка:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 5 & 1 & 3 & 5 \\ -4 & 2 & 1 & 3 \\ 4 & 0 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 7 & 1 \end{vmatrix}.$$

Решение.

Для вычисления используем свойства определителей.

Первую строку оставим без изменения, а ко второй нужно прибавить первую, умноженную на (–2). К четвертой строке прибавим первую, умноженную на (–4):

$$\Delta=\begin{vmatrix} 8 & 1 & 3 & 5 \\ -14 & 0 & -5 & -7 \\ 4 & 0 & 2 & 1 \\ -18 & 0 & -5 & -19 \end{vmatrix}.$$

Разложим определитель по элементам второго столбца и получим:

$$\Delta= -1^{1+2}\begin{vmatrix} -14 & -5 & -7 \\ 4 & 2 & 1 \\ 18 & -5 & -19 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 14 & 5 & 7 \\ 4 & 2 & 1 \\ 18 & -5 & -19 \end{vmatrix}.$$

Аналогично понижаем порядок полученного определителя.

Вторую строку оставим без изменения; первую прибавим ко второй, умноженной на (-7); третью прибавим ко второй, умноженной на 19.

Тогда:

$$\Delta=\begin{vmatrix} -14 & -9 & 0 \\ 4 & 2 & 1 \\ 58 & 33 & 0 \end{vmatrix}=(-1)^{2+3}\cdot\begin{vmatrix} -14 & -9 \\ 58 & 33 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 14 & 9 \\ 58 & 33 \end{vmatrix}=-60.$$

С помощью аналогичных преобразований определитель n-го порядка можно привести к треугольному виду.

Тогда в полученном определителе все элементы, которые стоят под главной диагональю, будут равны нулю, а его величина равна произведению элементов, которые стоят на главной диагонали.

3.4. Правило Крамера решения систем n линейных уравнений с n неизвестными

Найдем решение системы:

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+...+a_{1n}x_n=b_1, \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+...+a_{2n}x_n=b_2, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+...+a_{mn}x_n=b_m, \end{cases} \qquad (3.3)$$

При этом ее определитель имеет вид:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} \neq 0.$$

Умножим каждое уравнение системы $\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i \quad i = \overline{1, n}$ на A_{ij} – алгебраические дополнения j-го столбца, и найдем сумму этих уравнений.

Тогда:

$$x_1 \cdot \sum_{i=1}^{n} a_{i1} A_{ij} + x_2 \cdot \sum_{i=1}^{n} a_{i2} A_{ij} + \dots + x_n \cdot \sum_{i=1}^{n} a_{in} A_{ij} = \sum_{i=1}^{n} b_i A_{ij}.$$

При этом все коэффициенты при x_j, кроме одного, равны нулю, то есть:

$$x_j \cdot \sum_{i=1}^{n} a_{ij} A_{ij} = \sum_{i=1}^{n} b_i A_{ij}, \quad x_j \cdot \Delta = \Delta_j,$$

где Δ – определитель системы; Δ_j – определитель, который получили из определителя системы заменой j-го столбца на столбец свободных членов b_i.

Если $\Delta \neq 0$, то система имеет единственное решение:

$$x_j = \frac{\Delta_j}{\Delta} \quad j = \overline{1, n} .$$

Это и есть **правило Крамера** нахождения неизвестных x_j.

Пример 3.6. Решить систему $\begin{cases} 5x_1 + 3x_2 = 310 \\ 3x_1 + 2x_2 = 190 \end{cases}.$

Решение.

По правилу Крамера:

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} 310 & 3 \\ 190 & 2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 2 \end{vmatrix}} = \frac{310 \cdot 2 - 190 \cdot 3}{5 \cdot 2 - 3 \cdot 3} = 50; \quad x_2 = \frac{\begin{vmatrix} 5 & 310 \\ 3 & 190 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 2 \end{vmatrix}} = \frac{5 \cdot 190 - 3 \cdot 310}{5 \cdot 2 - 3 \cdot 3} = 20.$$

Пример 3.7. Решить систему уравнений:

$$\begin{cases} 4x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 33 \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 23 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 = 12 \end{cases}.$$

Решение.

$$\Delta = \begin{vmatrix} 4 & 3 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = -1 \neq 0, \qquad \Delta_{x_1} = \begin{vmatrix} 33 & 3 & 2 \\ 23 & 2 & 1 \\ 12 & 1 & 2 \end{vmatrix} = -5,$$

$$\Delta_{x_2} = \begin{vmatrix} 4 & 33 & 2 \\ 3 & 23 & 1 \\ 1 & 12 & 2 \end{vmatrix} = -3, \qquad \Delta_{x_3} = \begin{vmatrix} 4 & 3 & 33 \\ 3 & 2 & 23 \\ 1 & 1 & 12 \end{vmatrix} = -2.$$

Следовательно, $x_1 = \dfrac{\Delta_{x_1}}{\Delta} = 5;\ x_2 = \dfrac{\Delta_{x_2}}{\Delta} = 3;\ x_3 = \dfrac{\Delta_{x_3}}{\Delta} = 2.$

Вопросы для самодиагностики

1. Привести определение определителя второго и третьего порядков.
2. Чем определяется порядок определителя?
3. Что называется минором некоторого элемента определителя?
4. Что называется алгебраическим дополнением некоторого элемента определителя?
5. Перечислить свойства определителя.

6. Какие преобразования не изменяют величину определителя?
7. Какие преобразования изменяют лишь знак определителя?
8. При каких условиях определитель равен нулю?
9. Какие способы вычисления определителя:
    а) третьего порядка;
    б) n-го порядка?
10. Как решить систему уравнений по правилу Крамера?

Упражнения

Вычислить определители:

3.1. $\begin{vmatrix} 2 & 4 & 1 \\ 3 & 6 & 2 \\ 4 & -1 & -3 \end{vmatrix}$.

3.2. $\begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & -1 & 4 \\ 3 & 1 & -1 \end{vmatrix}$.

3.3. $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 & 2 \\ -2 & 2 & 2 & 2 \\ -2 & -2 & 3 & 2 \\ -2 & -2 & -2 & 4 \end{vmatrix}$.

3.4. $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 & 3 \\ 3 & -1 & -4 & -6 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & -1 & 7 \end{vmatrix}$.

3.5. $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & 3 & -1 \\ 3 & 4 & 5 & -5 & 3 \\ 1 & 3 & 2 & -4 & 2 \\ 5 & -5 & 6 & 8 & -2 \end{vmatrix}$.

3.6. $\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & 3 & -1 & 2 \\ 4 & -2 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 5 & -1 & 1 & -4 \\ 5 & 3 & 5 & 1 & 2 \end{vmatrix}$.

Решить по правилу Крамера системы уравнений:

3.7. $\begin{cases} 2x_1 + 5x_2 + 7x_3 = 2 \\ 6x_1 + 3x_2 + 4x_3 = 11 \\ 5x_1 - 2x_2 - 3x_3 = 11 \end{cases}$.

3.8. $\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 - x_3 = -7 \\ x_1 + 4x_2 + 2x_3 = -1 \\ x_1 - 4x_2 = -5 \end{cases}$.

4. Матрицы

4.1. Виды матриц

Прямоугольная таблица чисел, которая имеет m строк и n столбцов, называется **матрицей**, а сами числа – ее **элементами.**

Обозначают матрицы большими буквами латинского алфавита $A, B, C, \ldots$, а их элементы – a_{ij}, b_{ij}, c_{ij}, ... , где i – номер строки матрицы $(i = \overline{1,m})$, j – номер столбца матрицы $(j = \overline{1,n})$.

При этом **размер матрицы** обозначается $m \times n$, где m – число строк, n – число столбцов матрицы.

Матрицу

$$\underset{[m\times n]}{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix} \qquad (4.1)$$

также записывают в сокращенном виде:

$$A = (a_{ij}), \quad \underset{[m\times n]}{A} = [a_{ij}], \quad \underset{[m\times n]}{A} = \left\| a_{ij} \right\|.$$

Если в матрице число столбцов и число строк одинаково и равно n, то матрица называется **квадратной матрицей**. Тогда число n называется **порядком матрицы**.

Матрицу, которая имеет одну строку (столбец), называют *матрицей-строкой (матрицей-столбцом).*

Матрица A^T, которая получается из данной матрицы заменой ее строк столбцами, называется **транспонированной матрицей** к A:

$$A^T = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \ldots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \ldots & a_{m2} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{1n} & a_{2n} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Если все элементы матрицы равны нулю, то матрицу A называют **нулевой**: $A+0=A$.

Множество элементов квадратной матрицы $a_{11}, a_{22}, ..., a_{nn}$ называется главной *диагональю матрицы*, а множество элементов $a_{1n}, a_{2(n-1)}, ..., a_{(n-1)2}, a_{n1}$ – *побочной диагональю*.

Квадратная матрица называется **диагональной матрицей**, если все ее элементы, которые находятся вне главной диагонали, равны нулю:

$$D=\begin{pmatrix} a_{11} & 0 & ... & 0 \\ 0 & a_{22} & ... & 0 \\ ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & ... & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Единичная матрица – это диагональная матрица, у которой все элементы главной диагонали равны единице, а все остальные элементы – нулю:

$$E=\begin{pmatrix} 1 & 0 & ... & 0 \\ 0 & 1 & ... & 0 \\ ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & ... & 1 \end{pmatrix}.$$

Две матрицы A и B называются *равными*, если они обе одного размера $m\times n$ и их соответствующие элементы равны:

$$a_{ij}=b_{ij}.$$

4.2. Ранг матрицы. Теорема Кронекера – Капелли о совместности системы линейных уравнений

Рассмотрим матрицу $\underset{[m\times n]}{A} = [a_{ij}]$.

Минором k-го порядка матрицы A называют определитель матрицы, все элементы которого находятся на пересечении выбранных k строк и k столбцов матрицы A, и обозначается M_k.

Порядок минора матрицы не может быть больше, чем наименьшее из чисел m, n, то есть $k \leq \min\ m, n$.

Ранг матрицы A – это число r, которое равно наибольшему порядку отличающегося от нуля ее минора: $0 \leq r \leq \min\ m, n$.

Отличный от нуля минор матрицы, порядок которого равен рангу матрицы, называется *базисным минором* этой матрицы. Столбцы и строки матрицы, участвующие в образовании базисного минора, также называются *базисными.*

Пример 4.1. Найти ранг матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 1 & 4 & -1 \\ 3 & 12 & -3 \end{pmatrix}.$$

Решение.

Найдем минор 3-го порядка:

$$M_3 = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 1 & 4 & -1 \\ 3 & 12 & -3 \end{vmatrix} = 0.$$

Но при этом есть минор второго порядка, который отличен от нуля:

$$M_2 = \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = 8.$$

Таким образом, ранг матрицы равен 2.

Матрицы, которые имеют равные ранги, называются **эквивалентными** и соединяются знаком "~".

При вычислении ранга матрицы важное значение имеют *элементарные преобразования матриц:*

а) умножение всех элементов строки (столбца) на одно и то же число, отличающееся от нуля;

б) прибавление к элементам строки (столбца) матрицы соответствующих элементов другой строки (столбца), умноженных на одно и то же число;

в) перестановка местами строк (столбцов) в матрице;

г) вычеркивание строк (столбцов) матрицы, все элементы которых равны нулю.

Теорема 1. При элементарных преобразованиях ранг матрицы не изменяется.

Теорема 2. Если некоторый минор r-го порядка матрицы A не равен нулю, а все миноры $(r+1)$-го порядка, которые включают его как минор, равны нулю, то ранг матрицы равен r.

Теорема 3. При транспонировании матрицы ее ранг не изменяется.

Пример 4.2. Найти ранг матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & 4 \\ 2 & 4 & 5 & -1 \\ 5 & 10 & 7 & 2 \end{pmatrix}.$$

Решение.

Умножим первую строку матрицы на (–2) и прибавим ко второй. Дальше умножим первую строку на (–5) и прибавим к третьей.

Тогда:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & 4 \\ 2 & 4 & 5 & -1 \\ 5 & 10 & 7 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & 4 \\ 0 & 0 & 11 & -9 \\ 0 & 0 & 22 & -18 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & 4 \\ 0 & 0 & 11 & -9 \end{pmatrix}.$$

Вторая и третья строки пропорциональны и одну из них можно отбросить.

Получим: $M_2 = \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 0 & 11 \end{vmatrix} = 22 \neq 0$, то есть ранг матрицы равен 2.

На практике приходится исследовать системы уравнений общего вида, в которых число уравнений системы не совпадает с числом неизвестных.

Рассмотрим систему m линейных уравнений с n неизвестными:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m, \end{cases} \tag{4.2}$$

где $A = a_{ij} \quad i = \overline{1,m};\ j = \overline{1,n}$ – матрица системы;

$B = b_i \quad i = \overline{1,m}$; $X = x_j \quad j = \overline{1,n}$ – матрицы-столбцы свободных и неизвестных членов соответственно.

Матрицу A, дополненную свободным столбцом B, называют **расширенной матрицей** системы $A|B$.

Исследовать систему – это значит решить вопрос о ее совместности и определенности. Для исследования системы применяется **теорема Кронекера – Капелли.**

Теорема. Система линейных уравнений совместна тогда и только тогда, когда ранг матрицы системы r_A равен рангу расширенной матрицы системы $r_{A|B}$.

При этом если:

$r_A = r_{A|B} = n$ система имеет только одно решение;

$r_A = r_{A|B} < n$ система имеет множество решений;

$r_A \neq r_{A|B}$ система несовместна.

Следовательно, для ответа на вопрос относительно совместности системы необходимо вычислить ранги матриц A и $A|B$.

Особенно важным случаем при исследовании системы является случай, когда $r_A = r_{A|B} < n$, то есть система имеет множество решений.

Пусть коэффициенты матрицы при первых r неизвестных образуют отличающийся от нуля определитель, то есть ранг матрицы системы равен $r_A = r$.

Для решения системы неизвестные x_j $j=\overline{1,r}$ оставляем слева, а неизвестные x_j $j=\overline{r+1,n}$ перенесем направо:

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\ldots+a_{1r}x_r=b_1-a_{1r+1}x_{r+1}-a_{1r+2}x_{r+2}-\ldots-a_{1n}x_n, \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\ldots+a_{2r}x_r=b_2-a_{2r+1}x_{r+1}-a_{2r+2}x_{r+2}-\ldots-a_{2n}x_n, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{r1}x_1+a_{r2}x_2+\ldots+a_{rr}x_r=b_r-a_{rr+1}x_{r+1}-a_{rr+2}x_{r+2}-\ldots-a_{rn}x_n. \end{cases} \quad (4.3)$$

Неизвестные x_j $j=\overline{1,r}$ будем называть **базисными**, остальные неизвестные – **свободными**. Базисные неизвестные выразим через свободные.

Тогда:

$$\begin{cases} x_1=f_1(x_{r+1},x_{r+2},\ldots,x_n), \\ x_2=f_2(x_{r+1},x_{r+2},\ldots,x_n), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_r=f_r(x_{r+1},x_{r+2},\ldots,x_n). \end{cases} \quad (4.4)$$

Нужно отметить, если ранг матрицы системы $r_A=r=n$, то в формуле (4.4) – это единственное решение системы. В случае если $r_A=r<n$, полученные формулы называют **общим решением системы**.

Из общего решения системы можно найти **частные решения**, присваивая свободным неизвестным произвольные значения. Частные решения при нулевых значениях свободных неизвестных – это **базисные решения**. Если в базисных решениях все переменные принимают неотрицательные значения, то такие частные решения называют **опорными.**

Пример 4.3. Провести исследование и найти решение в случае совместности системы уравнений:

$$\begin{cases} 2x_1+x_2+2x_3+x_4=10, \\ \qquad x_2+3x_3+2x_4=3, \\ 2x_1 \qquad -x_3-x_4=7, \\ 2x_1-x_2-4x_3-3x_4=4. \end{cases}$$

Решение.

Запишем расширенную матрицу системы и приведем ее к треугольному или трапециеподобному виду:

$$A|B=\left(\begin{array}{cccc|c}2&1&2&1&10\\0&1&3&2&3\\2&0&-1&-1&7\\2&-1&-4&-3&4\end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{cccc|c}1&0{,}5&1&0{,}5&5\\0&1&3&2&3\\0&-1&-3&-2&-3\\0&-2&-6&-4&-6\end{array}\right)\sim$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c}1&0{,}5&1&0{,}5&5\\0&1&3&2&3\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\end{array}\right).$$

Таким образом, $r_A=r_{A|B}=2$.

Система уравнений совместна и имеет множество решений.

В этом случае решить систему – это значит найти ее общее решение. В результате преобразований получаем систему уравнений:

$$\begin{cases}x_1+0{,}5x_2+x_3+0{,}5x_4=5,\\ \qquad x_2+x_3+2x_4=3.\end{cases}$$

Пусть базисными неизвестными будут x_1,x_2. Неизвестные x_3,x_4 – свободные. Найдем x_2 из второго уравнения:

$$x_2=3-3x_3-2x_4.$$

Подставляя x_2 в первое уравнение системы, определим:

$$x_1=5-0{,}5(3-3x_3-2x_4)-x_3-0{,}5x_4=3{,}5+0{,}5x_3+0{,}5x_4..$$

Таким образом, общее решение системы будет:

$$\begin{cases}x_1=3{,}5+0{,}5x_3+0{,}5x_4,\\ \qquad x_2=3-3x_3-2x_4.\end{cases}$$

Если свободные неизвестные равны нулю $(x_3 = x_4 = 0)$, то найдем $x_1 = 3{,}5; \quad x_2 = 3$, то есть $X = (3{,}5; 3; 0; 0)$ – базисное решение.

Это базисное решение будет опорным, потому что все переменные в нем неотрицательны.

4.3. Системы однородных уравнений

Система линейных уравнений называется **однородной**, если свободные члены в каждом уравнении системы равны нулю:

$$AX = 0, \tag{4.5}$$

где $A = (a_{ij}),\ i = \overline{1,m},\ j = \overline{1,n},\ X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix},\ 0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \end{pmatrix}.$

Система однородных линейных уравнений всегда совместна.

Она имеет или единственное решение, или множество решений.

Если $r_A = n$, то система имеет единственное (тривиальное) решение $X = 0$;

если $r_A < n$, то система, кроме тривиального, имеет множество решений.

Если число уравнений однородной системы меньше числа ее неизвестных, то эта система имеет ненулевое решение.

Если в однородной системе число уравнений равно числу неизвестных, то она имеет ненулевое решение тогда и только тогда, когда определитель матрицы системы равен нулю.

Пример 4.4. Решить систему уравнений:

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 0, \\ 4x_1 + 2x_2 + x_3 - 3x_4 = 0. \end{cases}$$

Решение.

Ранг матрицы $r_A = 2$, потому что минор $M_2 = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} \neq 0$.

Данная система уравнений эквивалентна системе:

$$\begin{cases} 2x_1 - x_3 = -x_2 + x_4, \\ 4x_1 + x_3 = -2x_2 - 3x_4. \end{cases}$$

Тогда:

$$x_1 = \frac{-3x_2 + 2x_4}{6}, \quad x_3 = \frac{5}{3} x_4,$$

то есть нашли общее решение системы, из которого можно получить множество нетривиальных частных решений системы, если свободным неизвестным x_2, x_4 присваивать произвольные значения.

4.4. Действия над матрицами

Определены такие действия над матрицами:

1. *Сумма матриц* одинакового размера $A+B=C$, где элементы матрицы C равны сумме соответствующих элементов матриц A и B: $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$.

2. *Произведение матрицы на скалярный множитель* $k \cdot A = B$, где $B = (ka_{ij})$, то есть каждый элемент матрицы A умножается на число k.

3. Произведение матриц $AB = C$ согласно *правилу «строка на столбец»*: чтобы получить элемент, стоящий в i-й строке и j-м столбце матрицы C, равной произведению матриц A и B, нужно элементы i-й строки первой матрицы умножить на соответствующие элементы j-го столбца второй и полученные произведения сложить. При этом необходимо, чтобы число столбцов первой матрицы было равно числу строк второй.

Следует отметить, что операция произведения матриц имеет свои особенности. В общем случае $AB \neq BA$ (из определения произведения). Если такое равенство выполняется, то матрицы называют ***коммутативными.***

Операции с матрицами имеют такие же свойства, что и операции над числами:

1) $A+B=B+A$; 2) $(A+B)C = AC + BC$;

3) $(A+B)+C=A+(B+C)$; 4) $\lambda(AB)=(\lambda A)B=A(\lambda B)$;

5) $\lambda(A+B)=\lambda A+\lambda B$; 6) $AB\ C=A\ BC$;

7) $A(B+C)=AB+AC$; 8) $AE=EA=A$.

Пример 4.5. В отчете (табл. 4.1) приведены данные о производстве трех видов продукции четырьмя предприятиями за два года.

Таблица 4.1

Отчет работы за два года

Продукция	2009 г.				2010 г.			
	1	2	3	4	1	2	3	4
1	35	20	27	15	40	35	38	27
2	100	112	135	148	150	170	145	160
3	125	180	110	95	135	175	115	105

Найти суммарное производство за два года каждого вида продукции по каждому предприятию.

Решение.

Данную по условию таблицу запишем в виде двух матриц размера 3×4:

$$A=\begin{pmatrix} 35 & 20 & 27 & 15 \\ 100 & 112 & 135 & 148 \\ 125 & 180 & 110 & 95 \end{pmatrix}; \quad B=\begin{pmatrix} 40 & 35 & 38 & 27 \\ 150 & 170 & 145 & 160 \\ 135 & 175 & 115 & 105 \end{pmatrix}.$$

Данные матрицы – это матрицы одного размера.

Поэтому их можно складывать:

$$C=A+B=\begin{pmatrix} 75 & 55 & 65 & 42 \\ 250 & 282 & 280 & 380 \\ 260 & 355 & 225 & 200 \end{pmatrix}.$$

Матрица C характеризует суммарное производство за два года каждого вида продукции по каждому предприятию.

По данным задачи можно также определить изменение объема производства продукции по каждому предприятию за год.

Для этого нужно найти разность матриц:

$$D = B - A = \begin{pmatrix} 5 & 15 & 11 & 12 \\ 50 & 58 & 10 & 12 \\ 10 & -5 & 5 & 10 \end{pmatrix}.$$

Следовательно, производство продукции по сравнению с предыдущим годом в основном увеличилось.

Пример 4.6. Найти произведение двух матриц:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 0 & 2 \end{pmatrix} \text{ и } B = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Вычислим

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 0 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & 5 & 4 \\ 9 & 14 & 6 \end{pmatrix},$$

где

$$8 = 1 \cdot 1 + 2 \cdot 1 + 1 \cdot 3;$$
$$5 = 1 \cdot 4 + 2 \cdot 0 + 1 \cdot 1;$$
$$4 = 1 \cdot 2 + 2 \cdot 1 + 1 \cdot 0.$$

Произведение матриц $B \cdot A$ не существует (число столбцов матрицы B не равно числу строк матрицы A).

4.5. Обратная матрица. Решение систем линейных уравнений с помощью обратной матрицы

Аналогично операции частного чисел вводится операция нахождения матрицы, обратной к данной. Матрицу A^{-1} называют **обратной** к матрице A, если произведение этой матрицы, как слева, так и справа, на матрицу A равно единичной матрице, то есть

$$A^{-1} \cdot A = A \cdot A^{-1} = E. \qquad (4.6)$$

Как видно из последних равенств, обратную матрицу может иметь только квадратная матрица, но это условие недостаточно.

Достаточным условием наличия обратной матрицы A есть условие $\Delta_A \neq 0$, где Δ_A – определитель данной матрицы.

Для вычисления обратной матрицы необходимо выполнить ряд действий:

1. Вычислить определитель Δ_A.
2. Составить матрицу из алгебраических дополнений элементов исходной матрицы.
3. Транспонировать эту матрицу и получить матрицу A^*.
4. Разделить элементы матрицы A^* на величину определителя:

$$A^{-1} = \frac{A^*}{\Delta}. \tag{4.7}$$

Для проверки правильности полученного результата необходимо использовать формулу (4.6).

Пример 4.7. Найти матрицу, обратную к матрице A:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ -1 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Решение.

Вычислим определитель матрицы A:

$$\Delta_A = \begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 \\ -1 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 \\ -1 & 3 & 0 \\ 5 & 2 & 0 \end{vmatrix} = -1\begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 5 & 2 \end{vmatrix} = 17.$$

Находим все алгебраические дополнения A_{ij} элементов a_{ij}:

$$A_{11} = \begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 6, \quad A_{21} = -\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = -2, \quad A_{31} = -\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} = 3,$$

$$A_{12}=\begin{vmatrix}-1 & 0\\ 1 & 2\end{vmatrix}=2,\qquad A_{22}=\begin{vmatrix}2 & -1\\ 1 & 2\end{vmatrix}=5,\qquad A_{32}=-\begin{vmatrix}2 & 1\\ 1 & 0\end{vmatrix}=1,$$

$$A_{13}=\begin{vmatrix}-1 & 3\\ 1 & 0\end{vmatrix}=-3,\qquad A_{23}=-\begin{vmatrix}2 & 1\\ 1 & 0\end{vmatrix}=1,\qquad A_{33}=\begin{vmatrix}2 & 1\\ -1 & 3\end{vmatrix}=7.$$

Таким образом:

$$A^{*}=\begin{pmatrix}6 & -2 & 3\\ 2 & 5 & 1\\ -3 & 1 & 7\end{pmatrix},\qquad A^{-1}=\begin{pmatrix}\frac{6}{17} & \frac{-2}{17} & \frac{3}{17}\\ \frac{2}{17} & \frac{5}{17} & \frac{1}{17}\\ \frac{-3}{17} & \frac{1}{17} & \frac{7}{17}\end{pmatrix}.$$

Проверим правильность полученного результата:

$$A\times A^{-1}=\begin{pmatrix}2 & 1 & -1\\ -1 & 3 & 0\\ 1 & 0 & 2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}\frac{6}{17} & \frac{-2}{17} & \frac{3}{17}\\ \frac{2}{17} & \frac{5}{17} & \frac{1}{17}\\ \frac{-3}{17} & \frac{1}{17} & \frac{7}{17}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}.$$

Обратная матрица используется для решения системы линейных алгебраических уравнений.

В ***матричной форме*** система линейных уравнений имеет вид:

$$AX=B, \tag{4.8}$$

где $A=\left(a_{ij}\right)$ – матрица системы уравнений размерности $n\times n$;

$X=\left(x_{j}\right)$ – матрица-столбец размерности $n\times 1$;

$B=\left(b_{i}\right)$ – матрица-столбец размерности $n\times 1$.

Если умножить обе части равенства (4.9) справа на A^{-1}, то получим:

$$A^{-1}AX=A^{-1}B.$$

По определению обратной матрицы $A^{-1}A = E$, а $EX = X$, то есть

$$X = A^{-1}B.$$

Пример 4.8. Решить систему линейных уравнений с помощью обратной матрицы

$$\begin{cases} 4x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 33, \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 23, \\ x_1 + x_2 + 2x_3 = 12. \end{cases}$$

Решение.

Матрица системы: $A = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

Найдем матрицу, обратную к матрице A.

1. Вычислим определитель: $\Delta = \begin{vmatrix} 4 & 3 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = -1.$

2. Составим матрицу из алгебраических дополнений:

$$\begin{pmatrix} 3 & -5 & 1 \\ -4 & 6 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \end{pmatrix}.$$

3. Транспонируем полученную матрицу:

$$A^* = \begin{pmatrix} 3 & -4 & -1 \\ -5 & 6 & 2 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}.$$

4. Разделим матрицу A на величину определителя:

$$A^{-1} = \frac{A^*}{\Delta} = \begin{pmatrix} -3 & 4 & 1 \\ 5 & -6 & -2 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

5. Проверим правильность вычислений:

$$A\cdot A^{-1}=\begin{pmatrix}4&3&2\\3&2&1\\1&1&2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}3&-4&-1\\-5&6&2\\1&-1&-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}.$$

Следовательно, обратная матрица найдена правильно.

6. Определяем решение системы:

$$X=A^{-1}B=\begin{pmatrix}-3&4&1\\5&-6&-2\\-1&1&1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}33\\23\\12\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5\\3\\2\end{pmatrix}.$$

Таким образом, $x_1=5,\ x_2=3,\ x_3=2.$

Матрицу, обратную к матрице A можно также найти с помощью элементарных преобразований. Пусть матрица X – обратная матрица, элементы которой неизвестны.

Запишем матричное равенство:

$$A\cdot X=E. \tag{4.9}$$

Домножим обе части равенства (4.9) на A^{-1}.

Тогда

$$A^{-1}AX=A^{-1}E\text{, то есть } E\,X=A^{-1}\,E,$$

или

$$X=A^{-1}E. \tag{4.10}$$

Следовательно, вычисление обратной матрицы эквивалентно решению системы линейных уравнений с матрицей A и n столбцами свободных членов, которые являются столбцами единичной матрицы.

Поэтому для нахождения обратной матрицы необходимо к данной матрице A дописать единичную, а дальше элементарными преобразованиями на месте матрицы A получить единичную, тогда на месте единичной будет получена матрица, обратная данной.

Пример 4.9. Найти матрицу, обратную к данной:

$$A=\begin{pmatrix}4&3&2\\3&2&1\\1&1&2\end{pmatrix}.$$

Решение.

Допишем к матрице A единичную матрицу и с помощью элементарных преобразований на месте матрицы A получим единичную:

$$A|E=\left(\begin{array}{ccc|ccc}4&3&2&1&0&0\\3&2&1&0&1&0\\1&1&2&0&0&1\end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&1&2&0&0&1\\0&-1&-5&0&1&-3\\0&-1&-6&1&0&-4\end{array}\right)\sim$$

$$\sim\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&1&2&0&0&1\\0&1&5&0&-1&3\\0&0&-1&1&-1&-1\end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&0&-3&4&1\\0&1&0&5&-6&-2\\0&0&1&-1&1&1\end{array}\right).$$

Таким образом,

$$A^{-1}=\begin{pmatrix}-3&4&1\\5&-6&-2\\-1&1&1\end{pmatrix}.$$

Вычисление можно проводить в таблице с контролем. Если в процессе получения матрицы контроль не выполнялся, то следует проверить конечный результат произведением: $A^{-1}A=E$.

Вопросы для самодиагностики

1. Что называют матрицей? Чем определяется размер матрицы?
2. Какие виды матриц вам известны?
3. Какие матрицы можно складывать? Как умножить матрицу на число? Какие матрицы можно перемножать? По какому правилу перемножают матрицы?
4. Что называется рангом матрицы? Какие методы нахождения ранга вам известны?

5. Что понимают под элементарными преобразованиями?

6. Что такое расширенная матрица?

7. Сформулировать теорему Кронекера – Капелли.

8. Какое решение называется:

а) общим; б) частным; в) базисным; г) опорным?

9. Какие особенности решения однородной системы уравнений?

10. Какая матрица называется обратной к данной матрице? Для любой ли она существует?

11. Как найти обратную матрицу?

Упражнения

Найти произведение матриц:

4.1. $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -2 & 5 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$.

4.2. $\begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -2 & 5 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$.

4.3. $\begin{matrix} 1 & 2 & 3 \end{matrix}\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}$.

4.4. $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 4 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$.

Исследовать на совместность и решить системы уравнений, если они совместны:

4.5. $\begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 = 2 \\ x_1 + 3x_2 + x_3 = 5 \\ x_1 + x_2 + 5x_3 = -7 \\ 2x_1 + 3x_2 - 3x_3 = 14 \end{cases}$.

4.6. $\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 - 5x_4 = 4 \\ 2x_1 + 3x_2 - 3x_3 + x_4 = 2 \\ 8x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 1 \\ 4x_1 - 3x_2 + 3x_3 + 3x_4 = 2 \end{cases}$.

4.7. $\begin{cases} x_1 - 3x_2 + 2x_3 = -1 \\ x_1 + 9x_2 + 6x_3 = 3 \\ x_1 + 3x_2 + 4x_3 = 1 \end{cases}$.

4.8. $\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 + x_4 = 1 \\ x_1 - 2x_2 + x_3 - x_4 = -1 \\ x_1 - 2x_2 + x_3 + 5x_4 = 5 \end{cases}$.

Решить системы однородных уравнений:

4.9. $\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + 2x_3 - x_4 = 0 \\ x_1 + 3x_2 + 10x_3 - 8x_4 = 0 \end{cases}.$

4.10. $\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 0 \\ x_1 + x_2 + x_3 - 2x_4 = 0 \end{cases}.$

4.11. $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0 \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 = 0 \\ 3x_1 + x_2 - x_3 - x_4 = 0 \end{cases}.$

4.12. $\begin{cases} 2x_1 + x_2 + 4x_3 - 2x_4 = 0 \\ 2x_1 - x_2 - 4x_3 + 4x_4 = 0 \\ 6x_1 - x_2 - 4x_3 + 6x_4 = 0 \end{cases}.$

Найти обратную матрицу к матрице A:

4.13. $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}.$

4.14. $A = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 3 \\ -1 & 1 & -1 \\ 5 & 2 & 4 \end{pmatrix}.$

4.15. $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$

4.16. $A = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 3 \\ 1 & 5 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$

Решить с помощью обратной матрицы системы уравнений:

4.17. $\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 = 0 \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 = -2 \\ 4x_1 + 3x_2 + 7x_3 = 0 \end{cases}.$

4.18. $\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 = 2 \\ 2x_1 - 3x_2 + 2x_3 = 2 \\ 3x_1 + x_2 + x_3 = 8 \end{cases}.$

5. Жордановы исключения

5.1. Обычные и модифицированные жордановы исключения

Как было отмечено ранее, при решении системы уравнения методом Гаусса необходимо выполнить обратный ход.

Выполнение «обратного хода» фактически эквивалентно приведению матрицы системы к единичной. В этом и заключается суть метода **полного исключения**, или метода **Жордана – Гаусса.**

Целью преобразования системы уравнений по методу Жордана – Гаусса является сохранение любого неизвестного только в одном из уравнений и исключения этого неизвестного из всех остальных уравнений.

Для этого достаточно использовать два вида элементарных преобразований:

умножение (деление) уравнения системы (строки расширенной матрицы системы) на любое, не равное нулю число;

прибавление (вычитание) к одному уравнению системы (строке матрицы) другого уравнения (строки), умноженного на любое число.

Элементарными преобразованиями приводим матрицу системы:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m, \end{cases}$$

к единичной n-го порядка (ранг матрицы $r_A = r_{A|B} = n$):

$$\begin{cases} x_1 \qquad\qquad = b_1^{(n)}, \\ \quad x_2 \qquad\quad = b_2^{(n)}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \qquad\qquad x_n = b_n^{(n)}. \end{cases} \tag{5.1}$$

или в матрице системы получим единичную матрицу r-го порядка (ранг матрицы $r_A = r_{A|B} = r < n$):

$$\begin{cases} x_1 + a_{12}^{(r)} x_2 + a_{13}^{(r)} x_3 + \ldots + a_{1r}^{(r)} x_r + a_{1r+1}^{(r)} x_{r+1} + \ldots + a_{1n}^{(r)} x_n = b_1^{(r)}, \\ \qquad x_2 + a_{21}^{(r)} x_3 + \ldots + a_{2r}^{(r)} x_r + a_{2r+1}^{(r)} x_{r+1} + \ldots + a_{2n}^{(r)} x_n = b_2^{(r)}, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \qquad\qquad x_r + a_{rr+1}^{(r)} x_{r+1} + \ldots + a_{rn}^{(r)} x_n = b_r^{(r)}. \end{cases} \qquad (5.2)$$

Такой вид систем дает возможность без дополнительных вычислений получить значения неизвестных.

В системе (5.1) искомые неизвестные равны свободным членам преобразованной системы.

Из системы (5.2) легко найти общее решение системы.

Пример 5.1. Решить систему уравнений методом Жордана – Гаусса:

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 = 10 \\ 2x_1 - x_3 - x_4 = 7 \\ 2x_1 - x_2 - 4x_3 - 3x_4 = 4 \\ x_2 + 3x_3 + 2x_4 = 3 \end{cases}.$$

Решение.

Для удобства все элементарные преобразования будем проводить в табл. 5.1.

В процессе вычислений следует отметить, что после второй итерации второе и третье уравнения стали тождествами.

По двум последним строкам табл. 5.1 запишем систему:

$$\begin{cases} 6x_1 + x_2 - x_4 = 24 \\ -2x_1 + x_3 + x_4 = -7 \end{cases}.$$

Полученная система имеет бесконечное множество решений. Найдем ее общее решение.

Таблица 5.1

Схема Гаусса

№ строки	x_1	x_2	x_3	x_4	b_j	$\sum$	Примечания	№ итерации
1	2	[1]	2	1	10	16	Ведущая строка	Начальная система
2	2	0	-1	-1	7	7		
3	2	-1	-4	-3	4	-2		
4	0	1	3	2	3	9		
5	2	1	2	1	10	16	[1]	I
6	2	0	-1	-1	7	7	[2]	
7	4	0	-2	-2	14	14	[1] + [3]	
8	-2	0	[1]	1	-7	-7	[4] – [1]	
9	6	1	0	-1	24	30	[12] · [–2] + [5]	II
10	0	0	0	0	0	0	[12] + [6]	
11	0	0	0	0	0	0	[12] · [2] + [7]	
12	-2	0	1	1	-7	-7	[8]	
13	6	1	0	-1	24	30	[9]	III
14	-2	0	1	1	-7	-7	[12]	

Пусть x_2 и x_3 – базисные неизвестные, а x_1 и x_4 – свободные. Выразим x_2 и x_3 через x_1 и x_4:

$$\begin{cases} x_2 = 24 - 6x_1 + x_4 \\ x_3 = -7 + 2x_1 - x_4 \end{cases}.$$

Это общее решение системы, полученное по методу Жордана – Гаусса.

Чтобы получить частные решения, нужно свободным переменным присваивать любые значения.

Среди частных решений выделяют *базисные решения системы.* Это те решения, когда свободные переменные принимают нулевые значения.

Если $x_1 = 0$ и $x_4 = 0$, то $x_2 = 24$, $x_3 = -7$. Это одно из базисных решений, где в качестве базисных переменных взяты x_2 и x_3.

Базисными могут быть такие пары неизвестных: $x_1 x_2$; $x_1 x_3$; $x_1 x_4$; $x_2 x_4$; $x_3 x_4$, если определитель при этих переменных $\Delta \neq 0$.

Преобразуем общее решение системы к виду:

$$\begin{cases} x_2 = \dfrac{27}{2} - 3x_3 - 3x_4 \\ x_1 = \dfrac{7}{4} + \dfrac{1}{2}x_3 + \dfrac{1}{2}x_4 \end{cases}.$$

Получим еще одно базисное решение, а именно $x_3 = 0,\ x_4 = 0,$ $x_1 = \dfrac{7}{4},\ x_2 = \dfrac{27}{2}$, которое является опорным ($x_j \geq 0$).

5.2. Решение системы линейных уравнений с помощью жордановых исключений для анализа межотраслевого баланса

Макроэкономика функционирования многоотраслевого хозяйства требует баланса между отдельными отраслями. Каждая отрасль, с одной стороны, является производителем, а с другой – потребителем продукции, выпускаемой другими отраслями. Возникает задача расчета связи между отраслями через выпуск и потребление продукции разного рода. Впервые эта проблема была сформулирована в 1936 г. в виде математической модели в трудах известного американского экономиста В. Леонтьева. Эта модель основана на алгебре матриц и использует аппарат матричного анализа.

Пусть есть n отраслей промышленности, каждая из которых производит свою продукцию.

Введем обозначения:

x_i – общий объем продукции, которую изготовляет i-я отрасль;

x_{ij} – объем продукции i-й отрасли, которую потребляет j-я отрасль;

y_i – объем конечного спроса продукции i-й отрасли, $(i, j = \overline{1,n})$.

Валовой объем продукции i-й отрасли равен суммарному объему продукции, которую потребляют n отраслей, и конечной продукции, то есть:

$$x_i = \sum_{j=1}^{n} x_{ij} + y_i \quad \left(i = \overline{1,n}\right). \tag{5.3}$$

Уравнения (5.3) называются соотношениями **межотраслевого баланса.**

Эти соотношения можно записать в виде:

$$x_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j + y_i \quad \left(i = \overline{1,n}\right). \tag{5.4}$$

где $a_{ij} = \dfrac{x_{ij}}{x_j}$ – коэффициенты прямых материальных затрат, которые показывают расходы продукции i-й отрасли на изготовление единицы продукции j-й отрасли , то есть измеряют технологические связи между отраслями.

Соотношения баланса (5.4) можно записать в матричном виде:

$$X = AX + Y, \tag{5.5}$$

где X – матрица-столбец валового выпуска всех видов продукции;
A – матрица прямых расходов (технологические коэффициенты);
Y – матрица-столбец конечного спроса.

Основная задача межотраслевого баланса заключается в нахождении такой матрицы X валовой продукции, которая при известной матрице A прямых затрат обеспечит заданную матрицу Y конечной продукции.

Уравнение (5.5) можно переписать в виде:

$$(E - A)X = Y. \tag{5.6}$$

Систему (5.6) можно решить с помощью жордановых исключений, по правилу Крамера или с помощью обратной матрицы.

Если $|E-A| \neq 0$, то имеем решение системы:

$$X = \ E - A^{-1} Y = S \cdot Y. \tag{5.7}$$

Матрица $S = \ E - A^{-1}$ называется **матрицей коэффициентов полных материальных затрат.**

Исходя из экономического содержания задачи, $x_i \geq 0, y_i \geq 0$ и $a_{ij} \geq 0$.

Таким образом, баланс продукции на основе коэффициентов прямых материальных затрат дает возможность определить по конечному продукту валовые выпуски продукции по отраслям.

Матрица A называется **продуктивной**, если для любого неотрицательного вектора конечной продукции Y результат решения матричного уравнения (5.7) также целиком неотрицателен. В таком случае и модель баланса называется продуктивной.

Пример 5.2. Задана матрица прямых материальных затрат $A = \begin{pmatrix} 0,1 & 0,5 \\ 0,3 & 0,2 \end{pmatrix}$ и вектор $Y = \begin{pmatrix} 400 \\ 500 \end{pmatrix}$ конечной продукции на плановый период (усл. ед.).

Найти плановые объемы валовой продукции отраслей, межотраслевые поставки и чистую продукцию отраслей.

Решение.

Найдем матрицу $E-A$:

$$E - A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0,1 & 0,5 \\ 0,3 & 0,2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,9 & -0,5 \\ -0,3 & 0,8 \end{pmatrix};$$

имеем систему: $E - A \ X = Y.$

Решение полученной системы линейных уравнений при заданном векторе правой части Y с помощью метода Жордана – Гаусса дает новый вектор X валовой продукции, как решение системы уравнений баланса:

$$X = \begin{pmatrix} 1000 \\ 1000 \end{pmatrix}.$$

Матрица S полных материальных затрат: $S = \ E - A\ ^{-1}$.

Найдем

$$E - A\ ^{T} = \begin{pmatrix} 0{,}9 & -0{,}3 \\ -0{,}5 & 0{,}8 \end{pmatrix};$$

$$\Delta = |E - A| = 0{,}9 \cdot 0{,}8 - 0{,}3 \cdot 0{,}5 = 0{,}57.$$

Тогда $S = \ E - A\ ^{-1} = \dfrac{1}{0{,}57} \begin{pmatrix} 0{,}8 & 0{,}5 \\ 0{,}3 & 0{,}9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1{,}404 & 0{,}877 \\ 0{,}526 & 1{,}579 \end{pmatrix}.$

Можно также найти межотраслевые поставки x_{ij}:

$$\begin{pmatrix} 0{,}3 \cdot 1000 & 0{,}5 \cdot 1000 \\ 0{,}3 \cdot 1000 & 0{,}2 \cdot 1000 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 300 & 500 \\ 300 & 200 \end{pmatrix}.$$

Чистая продукция является разницей между валовой продукцией отрасли и затратами всех отраслей на производство этой отрасли.

Полученные результаты можно записать в виде таблицы межотраслевого баланса (табл. 5.2).

Таблица 5.2

Таблица межотраслевого баланса

Отрасли	I	II	Конечный продукт	Валовой продукт
I	300	500	400	1000
II	300	200	500	1000
Чистая продукция	400	300		
Валовая продукция	1000	1000		

Вопросы для самодиагностики

1. В чем суть модифицированных жордановых исключений?

2. Охарактеризовать модель межотраслевого баланса.
3. Что такое продуктивная модель?
4. В чем заключается анализ межотраслевого баланса?

Упражнения

Решить систему уравнений методом Жордана – Гаусса:

5.1. $\begin{cases} x_1+2x_2+x_3=-1 \\ 2x_1-x_2-x_3=1 \\ 4x_1+3x_2+x_3=0 \end{cases}$.

5.2. $\begin{cases} 4x_1+2x_2-x_3=1 \\ 5x_1+3x_2-2x_3=2 \\ 3x_1+2x_2-x_3=0 \end{cases}$.

5.3. $\begin{cases} x_1+x_2-x_3=-2 \\ -x_1+x_2-3x_3=-6 \\ x_1-x_2+x_3=4 \end{cases}$.

5.4. $\begin{cases} x_1+4x_2-2x_3=8 \\ x_1+3x_2-2x_3=7 \\ 3x_1+x_2-x_3=8 \end{cases}$.

5.5. $\begin{cases} x_1-2x_2-x_3=-4 \\ x_1+2x_2-x_3=8 \\ 3x_1-x_2-2x_3=2 \end{cases}$.

5.6. $\begin{cases} x_1+4x_2-3x_3=-4 \\ -2x_1+x_2-x_3=-8 \\ 3x_1-x_2+2x_3=12 \end{cases}$.

5.7. $\begin{cases} 9x_1-3x_2+5x_3+6x_4=4 \\ 6x_1-2x_2+3x_3+4x_4=5 \\ 3x_1-x_2+3x_3+14x_4=-8 \end{cases}$.

6. Векторы

6.1. Декартовые координаты вектора и точки

Различают два рода величин: скалярные и векторные. Если некоторая величина определяется ее числовым значением, то ее называют **скалярной.** Если при определении некоторой величины для ее полной характеристики, кроме числового значения, надо знать и ее направление, то такая величина называется **векторной.**

Вектор – это отрезок, который характеризуется длиной и направлением. Начало вектора называется точкой его приложения. Изображается вектор отрезком со стрелкой, которая указывает его направление (рис. 6.1).

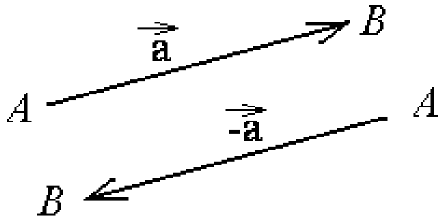


Рис. 6.1

Обозначается вектор $\overline{AB}$, или $\vec{a}$.

Направлением вектора $\overline{AB}$ называется направление луча AB, **длиной** (**модулем**) вектора $\overline{AB}$ называется длина отрезка AB (обозначается $\left|\overline{AB}\right|$).

Два вектора называются *равными*, если: равны их длины, они параллельны и направлены в одну и ту же сторону. Таким образом, равные векторы имеют равные длины и одинаковые направления.

Вектор, **противоположный** вектору $\vec{b}$, обозначается как $-\vec{b}$.

Вектор, у которого начало и конец совпадают, называется **нулевым** и обозначается $\vec{0}$. **Единичным вектором**, или **ортом** данного вектора, называется вектор, совпадающий по направлению с данным вектором и имеющий модуль, равный единице.

Суммой нескольких векторов, например: $\vec{a},\vec{b},\vec{c},\vec{d}$, называется вектор:

$$\vec{S}=\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}+\vec{d},$$

который по величине и направлению равен вектору, началом которого является начало вектора $\vec{a}$ (первого слагаемого), а конец – конец вектора $\vec{d}$ (последнего слагаемого).

На рис. 6.2 показано как находится сумма векторов $\vec{a},\vec{b},\vec{c},\vec{d}$ по *правилу многоугольника.*

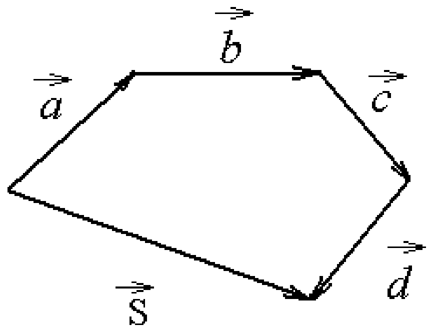


Рис. 6.2

Под **разностью** векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ понимаем вектор $\vec{d}=\vec{a}-\vec{b}$, который равен сумме векторов $\vec{a}$ и $-\vec{b}$. Вектор $-\vec{b}$ параллелен вектору $\vec{b}$, равен ему по модулю, но противоположно направлен.

Произведением вектора $\vec{a}$ на скаляр k называется вектор $\vec{d}=k\vec{a}$, который имеет длину $|\vec{b}|=|k|\cdot|\vec{a}|$, а направление такое же, как у вектора $\vec{a}$, если $k>0$, или противоположное, если $k<0$.

Под **компонентой вектора** $\vec{a}=\overrightarrow{AB}$ относительно оси l понимаем вектор $\vec{a}=\overrightarrow{A'B'}$, начало которого A' является проекцией на ось l начала A вектора $\vec{a}$, а конец – B' – проекция на ось l конца B этого вектора.

Под **проекцией вектора** $\vec{a}$ **на ось** l понимаем скалярную величину:

$$np_l\vec{a}=a_l=\pm\left|\overline{A'B'}\right|,$$

которая равна длине компоненты вектора $\vec{a}$ на ось l, если ее направление совпадает с направлением оси l, и минус длине компоненты, когда ее направление противоположно направлению оси.

Основные свойства проекции:

1. Проекция вектора $\vec{a}$ на ось l равна произведению длины вектора $\vec{a}$ на косинус угла φ между направлением вектора и направлением оси:

$$a_l = |\vec{a}|\cos\varphi, \varphi = \angle\ \vec{a}, \vec{l}\ .$$

2. Проекция суммы любого числа слагаемых векторов на данную ось равна сумме их проекций на эту ось.

3. Если вектор умножить на скаляр, то его проекцию на ось тоже нужно умножить на этот скаляр.

4. Если векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ равны, то равны и их проекции.

Пример 6.1. По данным векторам $\vec{a}$ и $\vec{b}$ построить векторы:

$$2\vec{a} + 3\vec{b} \quad \text{и} \quad \frac{\vec{a}}{2} - 2\vec{b}.$$

Решение.

Геометрическое построение векторов показано на рис. 6.3 и 6.4.

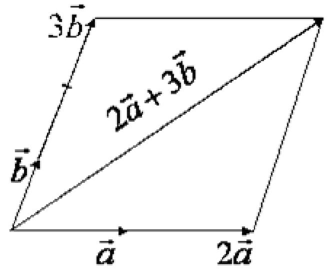


Рис. 6.3

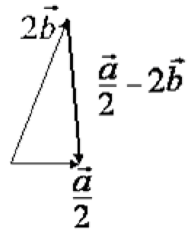


Рис. 6.4

Пример 6.2. Вычислить $|\vec{a}+\vec{b}|$, если $|\vec{a}| = 13$, $|\vec{b}| = 19$ и $|\vec{a}-\vec{b}| = 22$.

Решение.

Выполним чертеж (рис. 6.5).

Известно, что сумма квадратов длин диагоналей параллелограмма равна сумме квадратов длин его сторон.

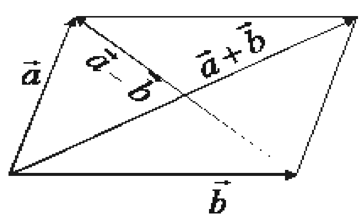


Рис. 6.5

Следовательно, имеем:

$$\left|\vec{a}+\vec{b}\right|^2+\left|\vec{a}-\vec{b}\right|^2=2\left|\vec{a}\right|^2+2\left|\vec{b}\right|^2;$$

$$\left|\vec{a}+\vec{b}\right|^2=2\cdot 13^2+2\cdot 19^2-22^2=576;\ \left|\vec{a}+\vec{b}\right|=24.$$

Ответ: $\left|\vec{a}+\vec{b}\right|=24.$

Пусть (рис. 6.6) Ox, Oy, Oz – три взаимно перпендикулярные прямые, на которых указаны направления и масштаб.

Для каждой точки M пространства существует ее *радиус-вектор* $\vec{r}=\overrightarrow{OM}$, начало которого является началом координат O, а конец является данной точкой M.

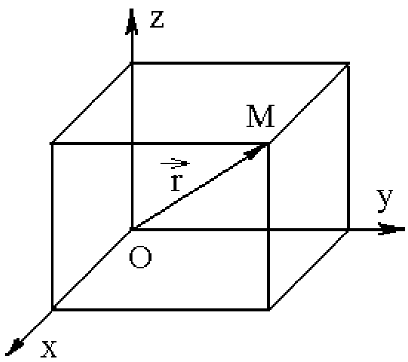


Рис. 6.6

Под **декартовыми прямоугольными координатами** x, y, z точки M понимаем проекции ее радиус-вектора $\vec{r}$ на соответствующие оси координат, то есть

$$x=np_{Ox}\bar{r},\quad y=np_{Oy}\bar{r},\quad z=np_{Oz}\bar{r}.$$

Точка M с координатами x, y, z обозначается как $M\ \ x, y, z$.

Для того чтобы найти координаты точки, нужно построить прямоугольный параллелепипед с диагональю (рис. 6.6).

Длина диагонали параллелепипеда:

$$r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}.$$

Если обозначить через α, β, γ углы, которые образованы радиус-вектором $\vec{r} = \overrightarrow{OM}$ с координатными осями, то:

$$x = |\vec{r}|\cos\alpha; \quad y = |\vec{r}|\cos\beta; \quad z = |\vec{r}|\cos\gamma. \qquad (6.1)$$

Косинусы $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ называются **направляющими косинусами** радиус-вектора $\vec{r}$.

Для направляющих косинусов вектора имеет место формула:

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = \frac{x^2}{r^2} + \frac{y^2}{r^2} + \frac{z^2}{r^2} = 1,$$

то есть сумма квадратов косинусов углов, образуемых с тремя взаимно-перпендикулярными осями, равна единице.

Пусть точка $M_1(x_1, y_1, z_1)$ – начало вектора $\overrightarrow{M_1M_2}$, а $M_2(x_2, y_2, z_2)$ – конец (рис. 6.7).

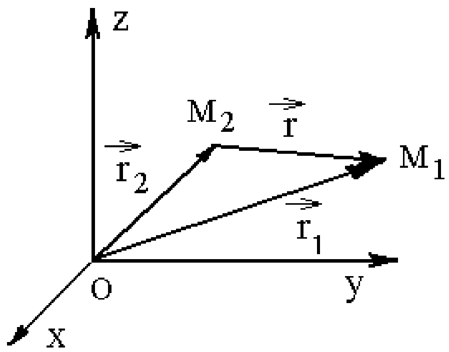


Рис. 6.7

Точки M_1 и M_2 можно задать их радиус-векторами $\vec{r}_1 = (x_1, y_1, z_1)$ и $\vec{r}_2 = (x_2, y_2, z_2)$.

Тогда вектор

$$\vec{r} = \overrightarrow{M_1M_2} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1.$$

Если это векторное равенство спроектировать на оси координат, то на основе свойств проекций получим:

$$r_x = x_2 - x_1;\ \ r_y = y_2 - y_1;\ \ r_z = z_2 - z_1.$$

Тогда длина отрезка M_1M_2 или длина вектора $\vec{r}$ будет:

$$|\vec{r}| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}\,. \qquad (6.2)$$

Если в пространстве задан свободный вектор $\vec{a}$, то проекции его на оси – **координаты вектора**:

$$a_x = np_x\vec{a};\quad a_y = np_y\vec{a};\quad a_z = np_z\vec{a}\,.$$

Длина вектора $\vec{a}$:

$$|\vec{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}\,. \qquad (6.3)$$

Направляющие косинусы можно найти из уравнений:

$$a_x = |\vec{a}|\cos\alpha;\quad a_y = |\vec{a}|\cos\beta;\quad a_z = |\vec{a}|\cos\gamma. \qquad (6.4)$$

Пример 6.3. Найти длину и направляющие косинусы вектора:

$$\vec{a} = 12; -15; -16\,.$$

Решение.

По формуле (6.2) находим длину вектора:

$$|\vec{a}| = \sqrt{12^2 + (-15)^2 + (-16)^2} = \sqrt{625} = 25.$$

По формулам (6.3.) находим направляющие косинусы:

$$\cos\alpha = \frac{12}{\sqrt{12^2 + (-15)^2 + (-16)^2}} = \frac{12}{15};\quad \cos\beta = \frac{-15}{25};\quad \cos\gamma = \frac{-16}{25}\,.$$

6.2. Линейные операции над векторами, заданными координатами

Определим основные действия над векторами, которые заданы координатами.

Пусть вектор $\vec{a} = \{a_x; a_y; a_z\}$ задан своими проекциями на оси координат Ox, Oy, Oz. Построим параллелепипед (рис. 6.8), диагональю которого является вектор $\vec{a}$, а ребрами будут его компоненты относительно соответствующих координатных осей.

Имеем разложение: $\vec{a} = \vec{a}_1 + \vec{a}_2 + \vec{a}_3$.

Если введем единичные векторы осей $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$, которые направленные по осям координат, то на основе связи между компонентами вектора и его проекциями получим:

$$\vec{a}_1 = a_x\vec{i}\,;\;\; \vec{a}_2 = a_y\vec{j}\,;\;\; \vec{a}_3 = a_z\vec{k}\,.$$

Тогда вектор

$$\vec{a} = \vec{a}_1 + \vec{a}_2 + \vec{a}_3,$$

или

$$\vec{a} = a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k}\,. \tag{6.5}$$

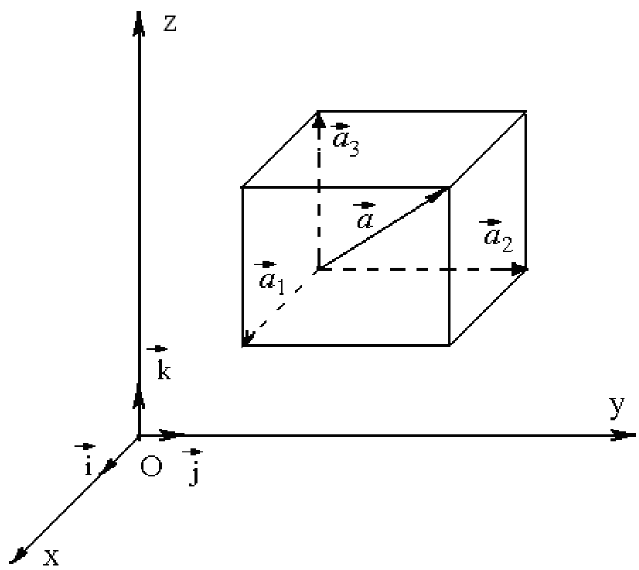


Рис. 6.8

Если вектор $\vec{b}=(b_x;b_y;b_z)$, то $\vec{b}=b_x\vec{i}+b_y\vec{j}+b_z\vec{k}$.

Линейные операции над векторами можно записать в таком виде:

1) умножение вектора на число – $\lambda\vec{a}=\lambda a_x\vec{i}+\lambda a_y\vec{j}+\lambda a_z\vec{k}$;

$$\lambda\vec{a}=(\lambda a_x,\lambda a_y,\lambda a_z),$$

где $\lambda-$ скаляр (при умножении вектора на скаляр координаты вектора нужно умножить на этот скаляр);

2) сумма векторов – $\vec{a}+\vec{b}=(a_x\pm b_x)\vec{i}+(a_y\pm b_y)\vec{j}+(a_z\pm b_z)\vec{k}$,

или

$$\vec{a}+\vec{b}=(a_x\pm b_x;a_y\pm b_y;a_z\pm b_z)$$

(при сложении (или вычитании) векторов их соответствующие координаты складываются (или вычитаются)).

Из введенных таким образом операций над векторами вытекают следующие свойства этих операций.

Пусть $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ – произвольные векторы, тогда:

1) $\vec{a}+\vec{b}=\vec{b}+\vec{a}$ – переместительное свойство;

2) $(\vec{a}+\vec{b})+\vec{c}=\vec{a}+(\vec{b}+\vec{c})$ – сочетательное свойство;

3) $\lambda(\vec{a}+\vec{b})=\lambda\vec{a}+\lambda\vec{b}$, где λ – действительное число;

4) $(\lambda+\mu)\vec{a}=\lambda\vec{a}+\mu\vec{a}$, где λ и μ – действительные числа;

5) $\lambda(\mu\vec{a})=(\lambda\mu)\vec{a}$, где λ и μ – действительные числа;

6) $\vec{a}+\vec{0}=\vec{a}$;

7) для любого вектора $\vec{a}$ существует такой вектор $-\vec{a}$, что

$$-\vec{a}=(-1)\vec{a},\quad \vec{a}+(-\vec{a})=\vec{0};$$

8) $0\cdot\vec{a}=\vec{0}$ для любого вектора $\vec{a}$.

Пример 6.4. Даны три вектора $\vec{a} = \ -2;1;3\ $, $\vec{b} = \ -1;3;2\ $, $\vec{c} = \ -3;-2;1\ $. Найти вектор $\vec{m} = 4\vec{a} + 3\vec{b} - 2\vec{c}$.

Решение.

Запишем координаты векторов $4\vec{a}$, $3\vec{b}$, $-2\vec{c}$:

$$4\vec{a} = \ -8;4;12\ ;\ 3\vec{b} = \ -3;9;6\ ;\ -2\vec{c} = \ 6;4;-2\ .$$

Складываем их соответствующие координаты и находим координаты вектора $\vec{m}$:

$$\vec{m} = \ -5;17;16\ .$$

Пример 6.5.

Найдем координаты точки $C\ x, y, z\ $, которая делит отрезок в отношении λ (рис. 6.9):

$$\lambda = \frac{np_{AB}\overrightarrow{AC}}{np_{AB}\overrightarrow{CB}}.$$

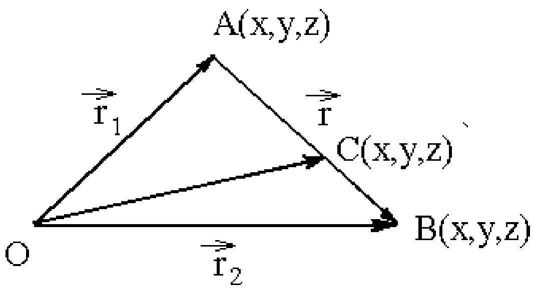


Рис. 6.9

Решение.

Пусть точкам $A; B; C$ соответствуют радиус-векторы $\vec{r}_1, \vec{r}, \vec{r}_2$.

Тогда вектор

$$\overrightarrow{AC} = \lambda\overrightarrow{CB},$$

или

$$\vec{r} - \vec{r}_1 = \lambda\ \vec{r}_2 - \vec{r}\ .$$

Из этого векторного равенства найдем вектор $\vec{r}$: $\vec{r}=\dfrac{\vec{r}_1+\lambda\vec{r}_2}{1+\lambda}$, или в координатах:

$$x=\frac{x_1+\lambda x_2}{1+\lambda};\ y=\frac{y_1+\lambda y_2}{1+\lambda};\ z=\frac{z_1+\lambda z_2}{1+\lambda}. \tag{6.6}$$

Отсюда, если отрезок точки C разделить на две равные части, то

$$x=\frac{x_1+x_2}{2};\ y=\frac{y_1+y_2}{2};\ z=\frac{z_1+z_2}{2}. \tag{6.7}$$

6.3. Признак коллинеарности двух векторов. Признак компланарности трех векторов

Два вектора $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называются **коллинеарными**, если они принадлежат одной прямой или параллельным прямым.

Необходимым и достаточным условием коллинеарности двух векторов является их пропорциональность, то есть:

$$\vec{b}=k\vec{a}\quad k-\text{скаляр})$$

или в координатах

$$b_x=ka_x;\ b_y=ka_y;\ b_z=ka_z\ ,$$

откуда:

$$\frac{b_x}{a_x}=\frac{b_y}{a_y}=\frac{b_z}{a_z}. \tag{6.8}$$

Таким образом, векторы **коллинеарны** только в том случае, когда их соответствующие координаты пропорциональны.

Нулевой вектор считается коллинеарным любому вектору.

Пример 6.6. Определить, при каких значениях α и β векторы $\vec{a}=(-3;\alpha;9)$ и $\vec{b}=(2;-8;\beta)$ коллинеарны.

Решение.

Условием коллинеарности векторов является пропорциональность их координат:

$$\frac{-3}{2}=\frac{\alpha}{-8}=\frac{9}{\beta}.$$

Откуда находим:

$$\beta=-6;\ \alpha=12.$$

Пример 6.7. Доказать, что точки $A(3;4;1)$, $B(1;0;-1)$ и $C(-2;-6;-4)$ лежат на одной прямой.

Решение.

Если векторы $\overrightarrow{AC}$ и $\overrightarrow{AB}$ – коллинеарны, то это будет означать, что точки A, B и C лежат на одной прямой.

Найдем координаты векторов $\overrightarrow{AC}$ и $\overrightarrow{AB}$:

$$\overrightarrow{AB}=(-2;-4;-2),\ \overrightarrow{AC}=(-5;-10;-5).$$

Координаты векторов пропорциональны: $\frac{-2}{-5}=\frac{-4}{-10}=\frac{-2}{-5}$.

Следовательно, точки A, B и C лежат на коллинеарных векторах.

Пример 6.8. Найти вектор $\vec{x}$, который коллинеарен вектору $\vec{a}=(-12;16;15)$ и образующий с осью Oz тупой угол. Длина его $|\vec{x}|=100$.

Решение.

Вектор $\vec{x}$ коллинеарен вектору $\vec{a}$, поэтому

$$\vec{x}=\lambda\vec{a}=(-12\lambda;16\lambda;15\lambda).$$

Так как по условию $|\vec{x}|=100$, то:

$$\sqrt{(12\lambda)^2+(16\lambda)^2+(15\lambda)^2}=100.$$

Откуда $\lambda=\pm4$.

При $\lambda = 4$, $\vec{x} = (48; 64; 60)$, при $\lambda = -4$, $\vec{x} = (48; -64; -60)$.

Условию удовлетворяет вектор $\vec{x} = (48; 64; 60)$, который образует с осью Oz тупой угол.

Три вектора $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ называются **компланарными**, если они лежат в одной плоскости или параллельны одной и той же плоскости.

Справедлив следующий *признак (критерий) компланарности трех векторов*: три ненулевых вектора $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ компланарны тогда и только тогда, когда один из них является линейной комбинацией двух других неколлинеарных векторов, то есть:

$$\vec{c} = k\vec{a} + l\vec{b} \quad (k, l - \text{скаляры}).$$

Такое представление называется **разложением вектора** $\vec{c}$ на плоскости по двум неколлинеарным векторам $\vec{a}$ и $\vec{b}$.

Нулевой вектор по определению считается компланарным с любыми двумя векторами.

Вопросы для самодиагностики

1. Что такое прямоугольная система координат? Чем определяется положение точки в прямоугольной системе координат?

2. Как вычисляется расстояние между точками в прямоугольной системе координат?

3. Записать формулы координат точки, которая делит отрезок в заданном отношении.

4. В чем заключается условие коллинеарности векторов?

5. В чем заключается условие компланарности трех векторов?

Упражнения

6.1. В треугольнике ABC проведены медианы AK, BL и CM. Выразить векторы $\overline{AK}, \overline{BL}$ и $\overline{CM}$ через векторы $\overrightarrow{BC} = \vec{a}$ и $\overrightarrow{AB} = \vec{c}$.

6.2. Найти длину и направляющие косинусы вектора $\overrightarrow{AB}$, если $A\ 4;-2;6$, $B\ 1;4;0$.

6.3. Заданы векторы $\vec{a} = -3;4;-1$, $\vec{b} = -1;2;3$, $\vec{c} = -4;-2;1$. Найти вектор $\vec{d} = -5\vec{a} + 4\vec{b} + \vec{c}$ и его длину.

6.4. При каких значениях α и β векторы: $\vec{a} = -2\vec{i} + 3\vec{j} + \beta\vec{k}$ и $\vec{a} = -\alpha\vec{i} + 6\vec{j} + 2\vec{k}$ коллинеарны?

6.5. При каких значениях α и β точка $C\ -4;\alpha;\beta$ лежит на прямой AB, если $A\ -3;-2;-3$, $B\ -2;-5;-1$?

6.6. Показать, что треугольник с вершинами $A\ -1;-4;-2$, $B\ -4;0;-2$ и $C\ -7;-4;-2$ является равносторонним.

6.7. Найти вектор $\vec{x}$, коллинеарный вектору $\vec{a} = 2;1;-1$, который удовлетворяет условию: $\vec{x} \cdot \vec{a} = 6$.

7. Произведение векторов

7.1. Скалярное произведение векторов

Скалярным произведением двух векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называется число, равное произведению длин этих векторов на косинус угла между ними, то есть:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cos\varphi, \text{ где } \varphi = \angle\ \vec{a}, \vec{b} . \qquad (7.1)$$

Скалярное произведение векторов положительно, если угол между ними острый, скалярное произведение отрицательно, если угол между векторами тупой. На основе свойства проекции можно записать:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cos\varphi = |\vec{a}|\, np_{\vec{a}}\vec{b} = |\vec{b}|\, np_{\vec{b}}\vec{a} . \qquad (7.2)$$

Свойства скалярного произведения:

1) $\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{b}\cdot\vec{a}$;

2) $(\vec{a}+\vec{b})\cdot\vec{c}=\vec{a}\cdot\vec{c}+\vec{b}\cdot\vec{c}$;

3) $\vec{a}^2=|\vec{a}|^2$;

4) $(\lambda\vec{a})\cdot\vec{b}=\vec{a}\cdot(\lambda\vec{b})=\lambda(\vec{a}\cdot\vec{b})$, где λ – действительное число;

5) $(\lambda\vec{a}+\mu\vec{b})\cdot\vec{c}=\lambda(\vec{a}\cdot\vec{c})+\mu(\vec{b}\cdot\vec{c})$, где λ и μ – действительные числа.

Из определения скалярного произведения можно найти **косинус угла между двумя ненулевыми векторами** $\vec{a}$ **и** $\vec{b}$**:**

$$\cos\varphi=\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|}. \tag{7.3}$$

Скалярное произведение векторов можно записать в координатной форме. Пусть заданы векторы: $\vec{a}=a_x\vec{i}+a_y\vec{j}+a_z\vec{k}$ и $\vec{b}=b_x\vec{i}+b_y\vec{j}+b_z\vec{k}$.

Найдем произведение этих векторов как многочленов (на основе свойств скалярного произведения):

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=a_xb_x+a_yb_y+a_zb_z. \tag{7.4}$$

Тогда для *косинуса угла между векторами* получим:

$$\cos\varphi=\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|}=\frac{a_xb_x+a_yb_y+a_zb_z}{\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2}\cdot\sqrt{b_x^2+b_y^2+b_z^2}}. \tag{7.5}$$

Условие перпендикулярности векторов:

Два ненулевых вектора $\vec{a}$ и $\vec{b}$ **перпендикулярны** тогда и только тогда, когда скалярное произведение этих векторов равно нулю:

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=a_xb_x+a_yb_y+a_zb_z=0. \tag{7.6}$$

Пример 7.1. Известно, что $|\vec{a}|=5, \quad |\vec{b}|=6, \quad \varphi=120°$.

Найти:

а) $\vec{a}\cdot\vec{b}$;

б) $2\vec{a}-3\vec{b} \quad 3\vec{a}+2\vec{b}$;

в) $3\vec{a}+2\vec{b}\ ^{2}$.

Решение:

а) по формуле скалярного произведения имеем:

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot\cos 120^{0}=5\cdot 6\cdot\left(\frac{-1}{2}\right)=-15;$$

б) перемножим векторы скалярно:

$$2\vec{a}-3\vec{b}\ \cdot(3\vec{a}+2\vec{b})=6\vec{a}^{2}+6\vec{a}\cdot\vec{b}-9\vec{b}\cdot\vec{a}-6\vec{b}^{2}=$$

$$=6\cdot|\vec{a}|^{2}-3\vec{a}\cdot\vec{b}\cdot\cos 120^{0}-6|\vec{b}|^{2}=6\cdot 25-3\cdot 30\cdot\left(\frac{-1}{2}\right)-6\cdot 36=411;$$

в) $(3\vec{a}+2\vec{b})^{2}=9|\vec{a}|^{2}+6|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|+4|\vec{b}|^{2}=9\cdot 25+6\cdot 5\cdot 6\cdot\left(\frac{-1}{2}\right)+4\cdot 36=249.$

Пример 7.2. Найти скалярное произведение векторов $\vec{a}=\ 3;-1;5$ и $\vec{b}=\ 1;-2;-3$ и угол φ между ними.

Решение.

По формуле (7.4) имеем: $\vec{a}\cdot\vec{b}=3\cdot 1-1\cdot(-2)+5\cdot(-3)=-10$,

далее:

$$\cos\varphi=\frac{-10}{\sqrt{9+1+25}\cdot\sqrt{1+4+9}}=\frac{-10}{7\sqrt{10}}.$$

Пример 7.3. Найти:

а) проекцию вектора $\vec{a}=\ 5;4;-6$ на вектор $\vec{b}=\ 2;-1;-1$;

б) проекцию вектора $\vec{c}=2\vec{a}-5\vec{b}$ на вектор $\vec{d}=\vec{a}+\vec{b}$.

Решение:

а) имеем:

$$np_{\vec{b}}\vec{a}=\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{\left|\vec{b}\right|}=\frac{2\cdot5+4\cdot(-1)+(-1)\cdot(-6)}{\sqrt{4+1+1}}=2\sqrt{6};$$

б) найдем координаты векторов $\vec{c}$ и $\vec{d}$:

$$\vec{c}=2\vec{a}-5\vec{b}=\ 10;8;-12\ -\ 10;-5;-5\ =\ 0;13;-7\ ;$$

$$\vec{d}=\vec{a}+\vec{b}=\ 2;-1;-1\ +\ 5;4;-6\ =\ 7;3-7\ .$$

Тогда:

$$np_{\vec{d}}\vec{c}=\frac{\vec{c}\cdot\vec{d}}{\left|\vec{d}\right|}=\frac{0\cdot7+13\cdot3+(-7)\cdot(-5)}{\sqrt{49+9+25}}=\frac{74}{\sqrt{83}}.$$

7.2. Векторное произведение векторов

Задаем в пространстве положительную ориентацию. Будем считать, что тройка векторов $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ ориентирована по правилу правой руки, то есть с конца третьего вектора кратчайший оборот от первого ко второму видно против часовой стрелки (рис. 7.1).

Векторным произведением двух векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называют вектор $\vec{c}=\vec{a}\times\vec{b}$, который удовлетворяет следующим условиям:

1. Модуль вектора $\vec{c}$ численно равен площади параллелограмма, построенного на векторах $\vec{a},\vec{b}$ (рис. 7.2):

$$\left|\vec{c}\right|=\left|\vec{a}\right|\cdot\left|\vec{b}\right|\cdot\sin\varphi,\ \text{где}\ \ \varphi=\angle\ \vec{a},\vec{b}\quad 0\le\varphi\le\pi\ . \qquad (7.7)$$

2. Вектор $\vec{c}$ направлен перпендикулярно к плоскости этого параллелограмма, то есть $\vec{c}\perp\vec{b}$ и $\vec{c}\perp\vec{b}$.

3. Упорядоченная тройка векторов ($\vec{a},\vec{b},\vec{c}$) задает положительную ориентацию пространства.

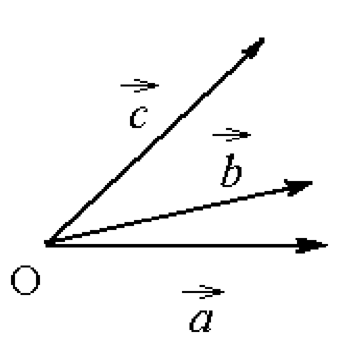


Рис. 7.1

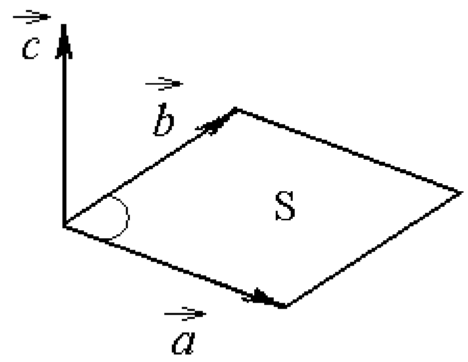


Рис. 7.2

Свойства векторного произведения:

1. При изменении порядка сомножителей векторное произведение изменяет свой знак на противоположный, модуль при этом не изменяется: $\vec{b}\times\vec{a}=-(\vec{b}\times\vec{a})$.

2. Векторный квадрат равен нуль-вектору, то есть:

$$\vec{a}\times\vec{a}=\vec{0}$$ (по определению).

3. Скалярный множитель можно выносить за знак векторного произведения, то есть если $\lambda-$скаляр, то:

$$\lambda\vec{a}\times\vec{b} \;=\; \vec{a}\times\lambda\vec{b} \;=\lambda\;\vec{a}\times\vec{b}\;.$$

4. Для любых трех векторов $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ справедливо равенство:

$$\vec{a}+\vec{b}\;\;\times\vec{c}=\vec{a}\times\vec{c}+\vec{b}\times\vec{c}$$ (распределительное свойство).

5. Векторное произведение $\vec{c}=\vec{a}\times\vec{b}$ равно нулю, если векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ коллинеарны или какой либо из перемножаемых векторов является нулевым.

Рассмотрим координатную форму векторного произведения.

Пусть:

$$\vec{a} = a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k};$$
$$\vec{b} = b_x\vec{i} + b_y\vec{j} + b_z\vec{k}.$$

Если умножить векторно $\vec{a}\times\vec{b}$, то получим такое равенство:

$$\vec{a}\times\vec{b} = \vec{i}\cdot\begin{vmatrix} a_y & a_z \\ b_y & b_z \end{vmatrix} - \vec{j}\cdot\begin{vmatrix} a_x & a_z \\ b_x & b_z \end{vmatrix} + \vec{k}\cdot\begin{vmatrix} a_x & a_y \\ b_x & b_y \end{vmatrix}.$$

Последнее равенство можно записать в виде определителя третьего порядка:

$$\vec{a}\times\vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}. \qquad (7.8)$$

Найдем длину вектора $\vec{a}\times\vec{b}$:

$$\left|\vec{a}\times\vec{b}\right| = \begin{vmatrix} a_y & a_z \\ b_y & b_z \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} a_x & a_z \\ b_x & b_z \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} a_x & a_y \\ b_x & b_y \end{vmatrix}^2.$$

Пример 7.4. Найти площадь треугольника с вершинами $A(1,1,0)$, $B(1,0,1)$ и $C(0,1,1)$.

Решение.

Площадь S треугольника ABC равна $1/2$ площади параллелограмма, построенного на векторах $\overrightarrow{AC}$ и $\overrightarrow{AB}$. Находим координаты векторов $\overrightarrow{AB} = (0,-1,1)$ и $\overrightarrow{AC} = (-1,0,1)$.

Тогда:

$$\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 0 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \vec{i}\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} - \vec{j}\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} + \vec{k}\begin{vmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} = -i - j - k.$$

Следовательно, $S = \frac{1}{2} \cdot \left| \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} \right| = \frac{1}{2}\sqrt{3}$.

Пример 7.5. Векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ образуют угол $150°$.

Найти $\left|\vec{a} \times \vec{b}\right|$, если $\left|\vec{a}\right| = 3$, $\left|\vec{b}\right| = 8$.

Решение.

В соответствии с формулой (7.8):

$$\left|\vec{a} \times \vec{b}\right| = \left|\vec{a}\right| \cdot \left|\vec{b}\right| \cdot \sin 150^0 = 3 \cdot 5 \cdot \frac{1}{2} = 7{,}5.$$

7.3. Смешанное произведение трех векторов

Смешанным произведением (или векторно-скалярным произведением) трех векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ называется число:

$$\vec{a}\vec{b}\vec{c} = (\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c}.$$

Построим параллелепипед (рис. 7.3), ребрами которого являются векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$, выходящие из общей вершины O.

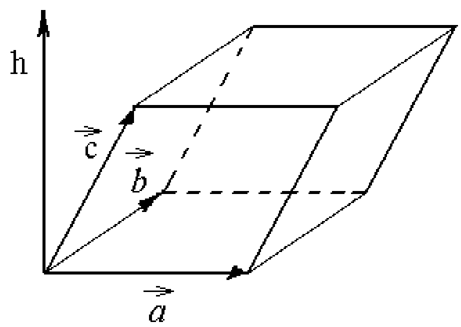


Рис. 7.3

Пусть вектор $\vec{S} = \vec{a} \times \vec{b}$, то есть он перпендикулярен к плоскости, в которой лежат векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ (направление h).

$\left|\vec{a}\times\vec{b}\right|=S$ – площадь параллелограмма, построенного на векторах $\vec{a}$ и $\vec{b}$, то есть площадь основания параллелепипеда.

Следовательно, смешанное произведение трех векторов равно объему параллелепипеда, который построен на этих векторах, и берется со знаком плюс, если эти векторы образуют правую тройку, и со знаком минус, если они образуют левую тройку:

$$\vec{a}\vec{b}\vec{c}=\pm V.$$

Основные свойства смешанного произведения:

1. Смешанное произведение не изменяется при циклической перестановке этих сомножителей, то есть

$$\vec{a}\vec{b}\vec{c}=\vec{b}\vec{c}\vec{a}=\vec{c}\vec{a}\vec{b}.$$

2. При перестановке двух соседних сомножителей смешанное произведение изменяет свой знак на противоположный:

$$\vec{b}\vec{a}\vec{c}=-\vec{a}\vec{c}\vec{b}=-\vec{c}\vec{b}\vec{a}=-\vec{a}\vec{b}\vec{c}.$$

С помощью смешанного произведения получим необходимое и достаточное *условие компланарности трех векторов*:

$\vec{a}\vec{b}\vec{c}=0$ (объем параллелепипеда равен нулю).

Если

$$\vec{a}=a_x\vec{i}+a_y\vec{j}+a_z\vec{k};$$
$$\vec{b}=b_x\vec{i}+b_y\vec{j}+b_z\vec{k};$$
$$\vec{c}=c_x\vec{i}+c_y\vec{j}+c_z\vec{k},$$

то, используя выражения в координатах для векторного и скалярного произведений, получим:

$$\vec{a}\vec{b}\vec{c}=(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c}=(\vec{b}\times\vec{c})\cdot\vec{a}=\vec{a}\cdot(\vec{b}\times\vec{c})=\begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}.$$

Пример 7.6. Показать, что векторы $\vec{a}=\{1;2;2\}$, $\vec{b}=\{2;5;7\}$ и $\vec{c}=\{1;1;-1\}$ компланарны.

Решение.

$$\vec{a}\vec{b}\vec{c}=\begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 5 & 7 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix}=-5+14+4-10+4-7=0.$$

Поскольку $\vec{a}\vec{b}\vec{c}=0$, то заданные векторы компланарны.

Вопросы для самодиагностики

1. Что называется скалярным произведением двух векторов? Назовите свойства скалярного произведения.

2. Чему равно скалярное произведение векторов, которые заданы координатами?

3. Как вычисляется угол между векторами? В чем заключается условие перпендикулярности векторов?

4. Что называется векторным произведением двух векторов? Назовите основные свойства векторного произведения.

5. Как выражается векторное произведение, когда векторы заданы координатами?

6. Как вычисляется площадь параллелограмма, построенного на двух векторах?

7. Что называется смешанным произведением трех векторов? Назовите основные свойства смешанного произведения.

8. Как выражается смешанное произведение, когда векторы заданы координатами? Как вычисляется объем параллелепипеда?

9. В чем заключается условие компланарности трех векторов?

Упражнения

7.1. Векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ образуют угол 45°. Найти скалярное произведение векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$, если $|\vec{a}| = \sqrt{2}$, $|\vec{b}| = 3$.

7.2. При каком значении α векторы $m = 3\vec{a} + \alpha \cdot \vec{b}$ и $\vec{n} = \vec{a} - 2\vec{b}$ будут взаимно перпендикулярны, если $|\vec{a}| = 7\sqrt{2}$, $|\vec{b}| = 2$, угол между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$ равен 45°.

7.3. Заданы векторы $\vec{a} = \{4;-2;-4\}$ и $\vec{b} = \{6;-3;2\}$. Найти $\vec{a} \cdot \vec{b}$.

7.4. Найти проекцию вектора $\vec{a} = \{5;4;-6\}$ на вектор $\vec{b} = \{2;-1;-1\}$.

7.5. Найти векторное произведение $\vec{a} \times \vec{b}$ и его модуль, если $\vec{a} = \{5;-4;7\}$ и $\vec{b} = \{1;1;-2\}$.

7.6. Найти смешанное произведение векторов $\vec{a} = \{1;1;4\}$, $\vec{b} = \{2;-1;-1\}$, $\vec{c} = \{1;3;-1\}$.

8. Прямая на плоскости

8.1. Прямая как линия первого порядка. Общее уравнение прямой

В аналитической геометрии решают две основные задачи:

1. Множество точек задано геометрическими характеристиками. Найти его уравнение и исследовать его свойства.

2. Дано уравнение. Исследовать множество точек, которое задается этим уравнением.

Линией в пространстве называют линию пересечения двух поверхностей, то есть множество точек, координаты которых удовлетворяют одновременно двум уравнениям:

$$\begin{cases} f_1(x, y, z) = 0 \\ f_2(x, y, z) = 0 \end{cases}.$$

12. Функция

12.1. Понятие функции. Способы задания функции

Понятие функции является одним из основных понятий математического анализа.

Если каждому значению переменной x множества $X\ (x \in X)$ по некоторому правилу или закону f соответствует одно значение переменной y из множества $Y\ (y \in Y)$ то говорят, что на множестве X задана функция $y = f(x)$.

Переменную x называют **аргументом**, или **независимой переменной**, а зависимую переменную y – **функцией**, множество X – **областью определения**, а множество Y – **областью значений функции**.

Существуют три основных способа задания функции:

1. Аналитический способ. Функция задается в виде формулы, устанавливающей, какие вычислительные действия и в каком порядке следует выполнить над x, чтобы получить y. При этом указывается, для каких значений аргумента эта функция рассматривается. Если множество X не задается, то имеются в виду все значения аргумента x, при которых функция конечна и действительна.

Например, функция Филлипса $y = -0{,}9 + 9{,}638 \cdot x^{-1{,}394}$, где y – годовой темп прироста ставки заработной платы (%), x – общий уровень безработицы (%).

При аналитическом способе задания функция может быть задана *явно*, когда дано выражение y через x, то есть формула имеет вид: $y = f(x)$; *неявно*, когда x и y связаны между собой уравнением вида $F(x, y) = 0$; *параметрически*, когда соответствующие друг другу значения x и y, выражены через третью переменную величину t, называемую *параметром*.

2. Табличный способ – это способ изображения функции таблицей, которая состоит из ряда значений независимой переменной x и соответствующих значений переменной y. Такой способ задания часто устанавливается экспериментально или путем наблюдений. Имеет широкое применение в таблицах бухгалтерской отчетности, в отчетах банковской деятельности, в статистических данных и т. д.

Например, таблично можно представить рост стоимости единицы сырья для производства продукции:

x	1 месяц	2 месяц	3 месяц	4 месяц	5 месяц	6 месяц	7 месяц
y	212	234	242	245	246	252	257

3. Графический способ. При исследованиях, связанных с использованием самопишущих приборов, соответствие между независимой переменной x и функцией y устанавливается с помощью некоторой линии, которая построена в выбранной системе координат. Абсцисса каждой точки линии изображает некоторое значение x, а ордината – соответствующее значение y. Геометрическое множество точек координатной плоскости (x, y), координаты которых удовлетворяют равенству $y = f(x)$ называют **графиком функции**.

В экономике широко используются графики, характеризующие динамику экономических параметров: курсов валют, курса акций, объема валового продукта и т. д.

Кривая Филлипса представлена на рис.12.1.

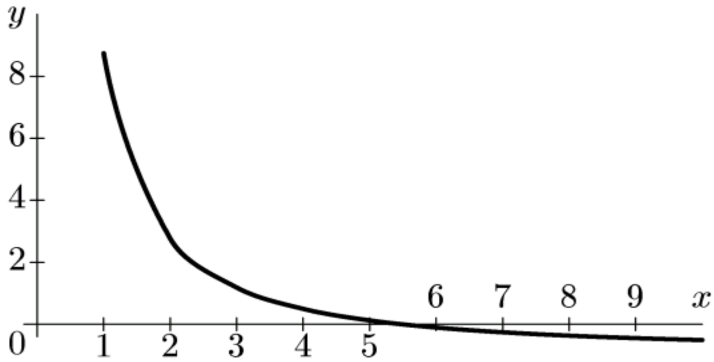


Рис. 12.1.

В том случае, когда функция задана в аналитическом виде $y = f(x)$ и более никаких ограничений не имеется, область ее определения находится только по соблюдению законности выполнения математических операций, входящих в формулу выражения функции. Эти ограничения хорошо известны: подкоренное выражение в корне четной степени не может быть отрицательным, знаменатель дроби не может быть равным нулю, выражение под знаком логарифма должно быть только положительным, а также некоторые другие.

Пример 12.1. Найти область определения функций:

1. $y=\dfrac{1}{x^2+1}$; $X=(-\infty;+\infty)$.

2. $y=\dfrac{1}{x^2-1}$; $X=(-\infty;-1)\cup(-1;1)\cup(1;+\infty)$.

3. $y=\arcsin x$; $X=[-1;1]$.

4. $y=\sqrt{5-x}+\sqrt{x-1}$; $X=[1;5]$.

12.2. Свойства функций. Классификация функций

Функция $f(x)$ возрастает на некотором множестве X, если из неравенства $x_1<x_2$ имеем неравенство $f(x_1)<f(x_2)$. Функция – убывает, если при $x_1<x_2$, $f(x_1)>f(x_2)$. Возрастающие и убывающие функции на множестве X называются **монотонными**.

Пример 12.2. Функция $y=x^3$ определена на интервале $(-\infty;+\infty)$, возрастает на этом интервале.

Пример 12.3. $y=\ln(-x)$, область определения: $(-\infty;0)$. Функция убывает на этом интервале.

Функция называется **кусочно-монотонной** на множестве X, если это множество можно разбить на такие множества, на которых эта функция будет монотонной.

Например, функция $y=x^2-x-6$ кусочно-монотонна, потому что она на интервале $\left(-\infty;\dfrac{1}{2}\right)$ убывает, а на интервале $\left(\dfrac{1}{2};+\infty\right)$ возрастает.

Функция $f(x)$ **ограничена на множестве** X, если есть такие числа m и M, что $m\le f(x)\le M$, если таких чисел нет, то функция называется **неограниченной**.

Пусть число C наибольшее из чисел m и M, тогда для ограничения функции должно выполняться условие:

$$|f(x)| \le C.$$

Пример 12.4. Функция $y = \arcsin x$ ограничена на промежутке $(-1;1)$.

Пример 12.5. Функция $y = \operatorname{tg} x$, ограничена на промежутке $\left[0;\frac{\pi}{4}\right]$, и неограничена на промежутке $\left[-\frac{\pi}{2};+\frac{\pi}{2}\right]$.

Область определения функции X называется **симметричной** относительно начала координат, если ей принадлежат как значение x, так и значение $-x$.

Функция называется **четной** (симметрия относительно оси Oy), если выполняется равенство:

$$f(x) = f(-x), \; x \in X \text{ и } -x \in X, \qquad (12.1)$$

а если

$$f(-x) = -f(x), \; x \in X, \qquad (12.2)$$

то функция называется **нечетной** (симметрия относительно начала координат). В противном случае функция называется **функцией общего вида.**

Пример 12.6. Исследовать функции на четность и нечетность.

1. $y = \dfrac{1}{x^2+1}$ – четная, $f(x) = f(-x)$.

2. $y = \dfrac{1}{x^3}$ – нечетная, $f(-x) = -f(x)$.

3. $y = x^2 - x - 6$ не является четной и не является нечетной.

4. $y = \sqrt{x}$ не является четной и не является нечетной, потому что значение $-x$ не принадлежит области определения функции.

Функция $y=f(x)$ называется **периодической** на множестве X, если существует такое число $l>0$, что для любой точки x, принадлежащей области определения X, выполняется условие:

$$f(x\pm l)=f(x). \quad (12.3)$$

Число l является **периодом функции** $f(x)$.

Следовательно, имеем такое равенство: $f(x+kl)=f(x)$, $k\in Z$.

При этом числа kl тоже можно считать периодами функции, но, говоря о периоде функции, идет речь о ее наименьшем периоде.

Например: $y=\sin x$ имеет период $l=2\pi$, $y=\mathrm{tg}\,x$ имеет период $l=\pi$

Заметим, что при построении графика периодической функции достаточно построить его в любом сегменте $[x_0;x_0+l]$, а дальше продлить его на всю числовую ось.

Пусть функция $y=f(x)$ определена на множестве $X=\{x\}$, а областью ее значений является множество $Y=\{y\}$. Если каждому значению переменной $y\in Y$ отвечает одно значение переменной $x\in X$, то на множестве Y возможно определить функцию

$$x=\varphi(y). \quad (12.4)$$

Множества X и Y являются некоторыми промежутками или числовыми множествами.

Если $x\in(a;b)$, $y\in(c;d)$, то $x=\varphi(y)$ – функция, **обратная к функции** $y=f(x)$, которая удовлетворяет условию на всем множестве Y: $y=f(\varphi(y))$.

При этом функции $x=\varphi(y)$ и $y=f(x)$ **взаимнообратные**.

Графики прямой и обратной функции симметричны относительно биссектрис первого и третьего координатных углов – прямой $y=x$ (рис. 12.2).

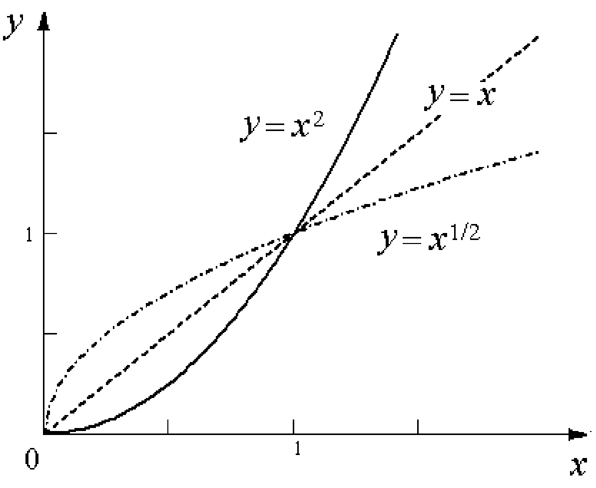


Рис. 12.2

Теорема. Если функция $y=f(x)$ монотонна на множестве X, то на соответствующем множестве Y существует также монотонная обратная функция $x=\varphi(y)$.

Функция $y=f(x)$, определенная на множестве X, называется **элементарной**, если она задается одной формулой, так, что ее значение при любом $x\in X$ может быть найдено с помощью конечного числа элементарных действий (сложение, произведение, деление, возведение в степень, извлечение корня, логарифмирование, вычисление тригонометрических и обратных тригонометрических функций), при этом количество операций не зависит от значения аргумента x.

Основными элементарными функциями являются такие функции:

1. Линейная функция $y=ax+b$, где $a=tg\varphi$ – угловой коэффициент, φ – угол между положительным направлением оси Ox и прямой, которая является графиком линейной функции (рис.12.3), область определения $(-\infty;+\infty)$, область значений $(-\infty;+\infty)$. Функция возрастает при $a>0$ и убывает при $a<0$.

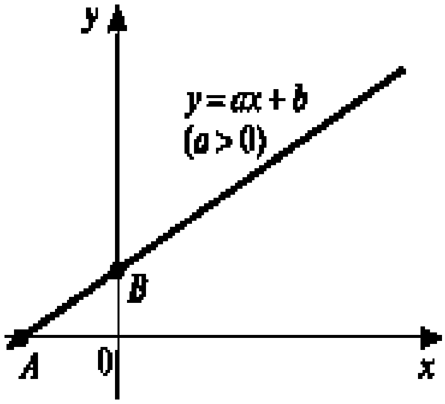


Рис. 12.3

2. Степенная функция $y=x^{\alpha}$, где $\alpha \in R$, а область значений зависит от α.

2.1. $y=x^{0}$:

область определения – $(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$; область значений – $\{1\}$; четная; постоянная на $(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$; ограниченная; непериодическая, (рис. 12.4).

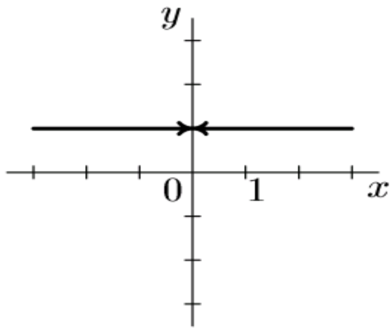


Рис. 12.4

2.2. $y=x$:

область определения – $(-\infty,+\infty)$; область значений – $(-\infty,+\infty)$; нечетная; возрастает на $(-\infty,+\infty)$; неограниченная; непериодическая, (рис. 12.5).

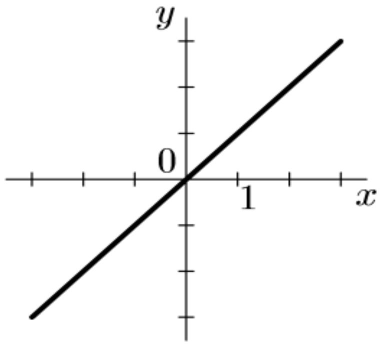


Рис. 12.5

2.3. $y=x^{n}$, n – нечетное натуральное число, $n \geq 3$:

область определения – $(-\infty,+\infty)$; область значений – $(-\infty,+\infty)$; нечетная; возрастает на $(-\infty,+\infty)$; неограниченная; непериодическая, (рис. 12.6).

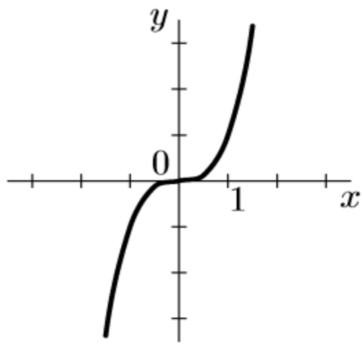


Рис. 12.6

2.4. $y=x^{n}$, n – четное натуральное число:

область определения – $(-\infty,+\infty)$; область значений – $[0,+\infty)$; четная; убывает на $(-\infty,0]$, возрастает на $[0,+\infty)$; неограниченная; непериодическая, (рис. 12.7).

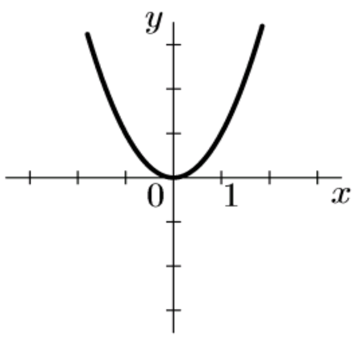


Рис. 12.7

2.5. $y = x^{-n}$, n – нечетное натуральное число:

область определения – $(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$; область значений – $(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$; нечетная; убывает на $(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$; неограниченная; непериодическая, (рис. 12.8).

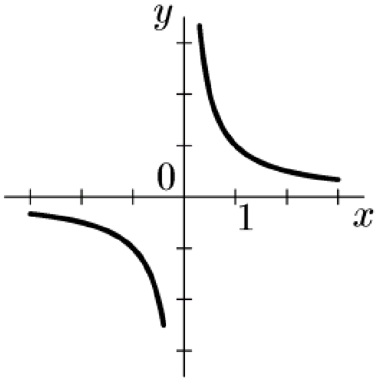


Рис. 12.8

2.6. $y = x^{-n}$, n – четное натуральное число:

область определения – $(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$; область значений – $(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$; четная; убывает на $(-\infty,0)$, возрастает на $(0,+\infty)$; неограниченная; непериодическая, (рис. 12.9).

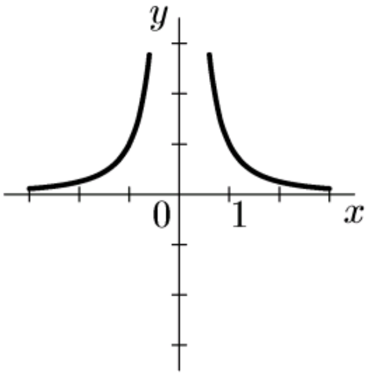


Рис. 12.9

2.7. $y = \sqrt[n]{x}$, n – нечетное натуральное число:

область определения – $(-\infty,+\infty)$; область значений – $(-\infty,+\infty)$; нечетная; возрастает на $(-\infty,+\infty)$; неограниченная; непериодическая, (рис. 12.10).

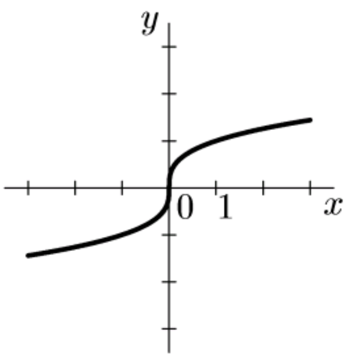


Рис. 12.10

2.8. $y = \sqrt[n]{x}$, n – четное натуральное число:

область определения – $[0,+\infty)$; область значений – $[0,+\infty)$; общего вида; возрастает на $[0,+\infty)$; неограниченная; непериодическая, (рис. 12.11).

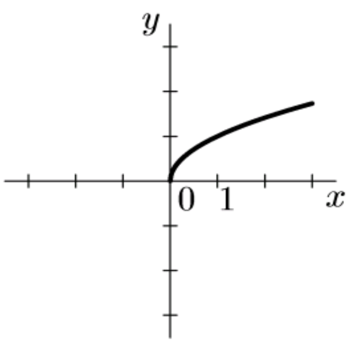


Рис. 12.11

3. Показательная функция $y=a^x$ $(a>0; a\neq 1)$, определенная на множестве $(-\infty;+\infty)$, а областью значений является интервал $(0;+\infty)$.

3.1. $y=a^x, 0<a<1$:

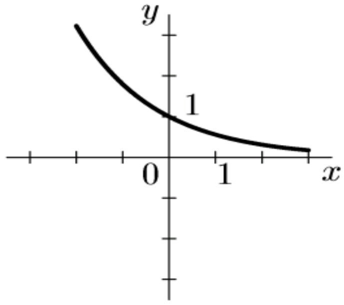


Рис. 12.12

область определения – $(-\infty,+\infty)$; область значений – $(0,+\infty)$; общего вида; убывает на $(-\infty,+\infty)$; неограниченная; непериодическая, (рис. 12.12).

3.2. $y=a^x, a>1$:

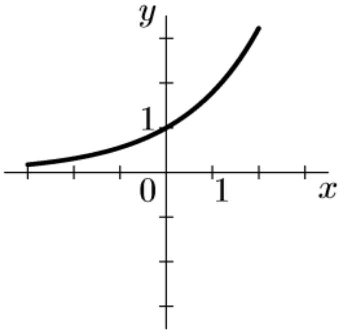


Рис. 12.13

область определения – $(-\infty,+\infty)$; область значений – $(0,+\infty)$; общего вида; возрастает на $(-\infty,+\infty)$; неограниченная; непериодическая, (рис. 12.13).

4. Логарифмическая функция $y=\log_a x$ $(a>0, a\neq 1)$, область определения $(0,+\infty)$, а область значений $(-\infty;+\infty)$. Функция является обратной к функции $y=a^x$.

4.1. $y=\log_a x, 0<a<1$:

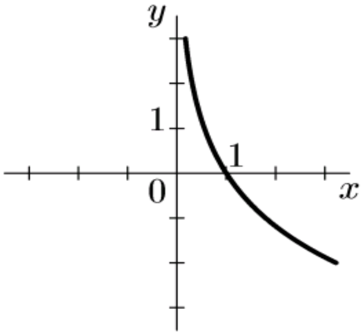


Рис. 12.14

область определения – $(0,+\infty)$;
область значений – $(-\infty,+\infty)$; общего вида; убывает на $(-\infty,+\infty)$; неограниченная; непериодическая, (рис. 12.14).

4.2. $y=\log_a x, a>1$:

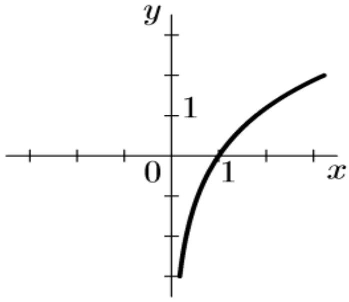
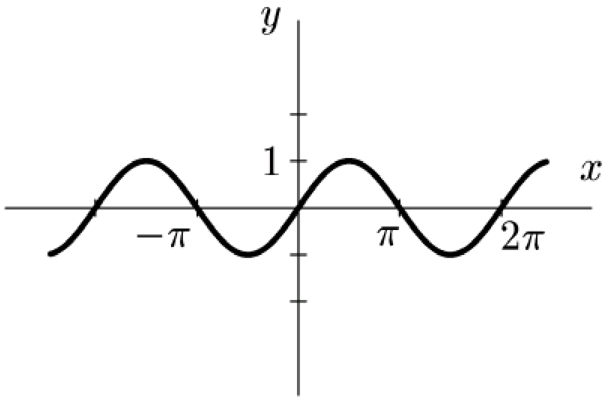


Рис. 12.15

область определения – $(0,+\infty)$;
область значений – $(-\infty,+\infty)$; общего вида; возрастает на $(-\infty,+\infty)$; неограниченная; непериодическая, (рис. 12.15).

5. Тригонометрические функции:

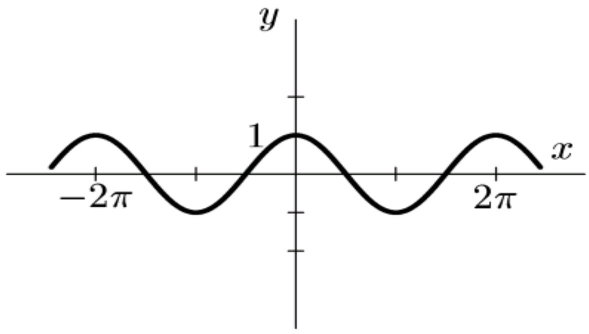
5.1. $y = \sin x$:



область определения функции – $(-\infty, +\infty)$; область значений – $[-1, 1]$; нечетная; возрастает на интервале $[-\pi/2 + 2\pi n, \pi/2 + 2\pi n]$, убывает на $[\pi/2 + 2\pi n, 3\pi/2 + 2\pi n]$, $n \in Z$; функция ограниченная $|\sin x| \le 1$; периодическая $\sin(x + T) = \sin x$, $T = 2\pi$, (рис. 12.16).

Рис. 12.16

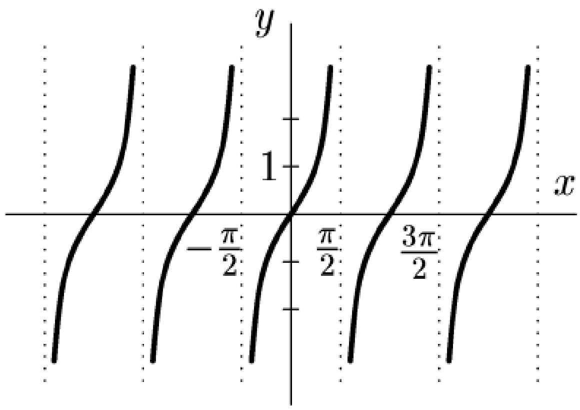
5.2. $y = \cos x$:



область определения – $(-\infty, +\infty)$; область значений – $[-1, 1]$; четная; убывает на $[2\pi n, \pi + 2\pi n]$, возрастает на $[-\pi + 2\pi n, \pi + 2\pi n]$, $n \in Z$; ограниченная $|\cos x| \le 1$; периодическая $\cos(x + T) = \cos x$, $T = 2\pi$, (рис. 12.17).

Рис. 12.17

5.3. $y = tgx$:



область определения функции – $(-\pi/2 + \pi n, \pi/2 + \pi n)$, $n \in Z$; область значений – $(-\infty, +\infty)$; нечетная; возрастает на $(-\pi/2 + \pi n, \pi/2 + \pi n)$, $n \in Z$; функция неограниченная; периодическая $tg(x + T) = tgx$, $T = \pi$, (рис. 12.18).

Рис. 12.18

5.4. $y = ctgx$:

область определения – $(\pi n, \pi + \pi n)$, $n \in Z$;

область значений – $(-\infty,+\infty)$; нечетная; убывает на $(\pi n, \pi+\pi n)$, $n \in Z$; неограниченная; периодическая $ctg(x+T)=ctgx$, $T=\pi$, (рис. 12.19).

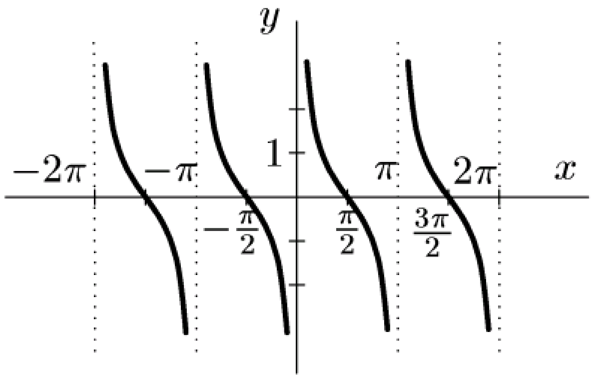


Рис. 12.19

6. Обратные тригонометрические функции:

6.1. $y=\arcsin x$:

область определения – $[-1,1]$; область значений – $[-\pi/2, \pi/2]$; нечетная; возрастает на $[-1,1]$; функция ограниченная $|\arcsin x| \le \pi/2$; непериодическая, (рис. 12.20).

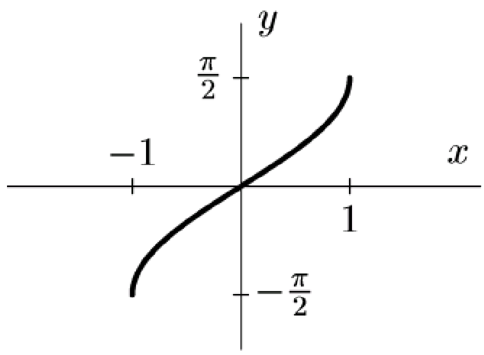


Рис. 12.20

6.2. $y=\arccos x$:

область определения – $[-1,1]$; область значений – $[0,\pi]$; общего вида; убывает на $[-1,1]$; функция ограниченная $0 \le \arccos x \le \pi$; непериодическая, (рис. 12.21).

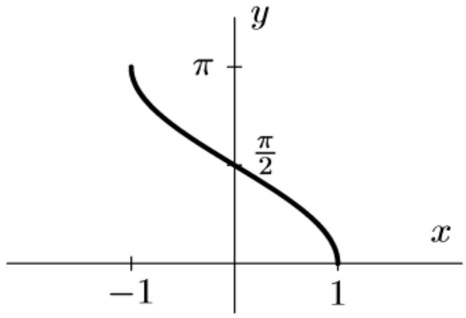


Рис. 12.21

6.3. $y=arctgx$:

область определения – $(-\infty,+\infty)$; область значений – $(-\pi/2, \pi/2)$; нечетная; возрастает на $(-\infty,+\infty)$; ограниченная $|arctgx| < \pi/2$; непериодическая, (рис. 12.22).

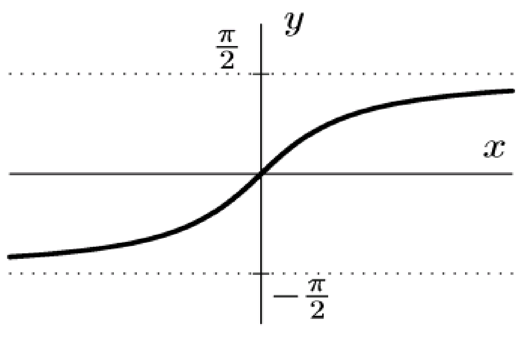


Рис. 12.22

6.4. $y = arcctgx$:

область определения – $(-\infty,+\infty)$; область значений – $(0,\pi)$; общего вида; убывает на $(-\infty,+\infty)$; функция ограниченная $0 < arcctgx < \pi$; непериодическая, (рис. 12.23).

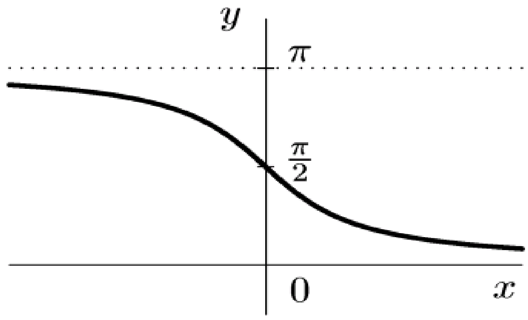


Рис. 12.23

Рассмотрим использование функций в экономике.

Пример 12.7. *Формула простых процентов*.

В банк внесена начальная сумма X_0 под $p\%$ процентов ежегодных. Какая сумма будет накоплена за n лет?

Решение.

Если начальная сумма X_0, то за первый год:

$$X_1 = X_0 + \frac{p}{100} X_0 = X_0\left(1 + \frac{p}{100}\right);$$

за второй год: $X_2 = X_1 + \frac{p}{100} X_0 = X_0\left(1 + \frac{2 \cdot p}{100}\right)$.

Накопленная сумма за n лет будет: $X_n = X_0\left(1 + n \cdot \frac{p}{100}\right)$.

Пример 12.8. *Формула сложных процентов*.

Сумма в X_0 , внесенная в банк под сложный процент, при условии начисления каждой единицы времени (месяц, год) $p\%$. Какая будет сумма через n единиц времени?

Решение.

На конец первого года сумма составляет:

$$X_1 = X_0 + \frac{p}{100} X_0 = X_0\left(1 + \frac{p}{100}\right);$$

второго года: $X_2 = X_1 + \frac{p}{100} X_1 = X_0\left(1 + \frac{p}{100}\right)^2$.

Откуда: $$X_n = X_0\left(1+\frac{p}{100}\right)^n. \qquad (12.5)$$

Функция называется **неэлементарной**, если она задается несколькими аналитическими выражениями (на различных участках изменения аргумента функция задана различными формулами).

Основные неэлементарные функции:

1. $y=[x]$ (читается: «y равно антье x») – целая часть x. Определяется как ниабольшее целое число, не превосходящее x (рис. 12.24).

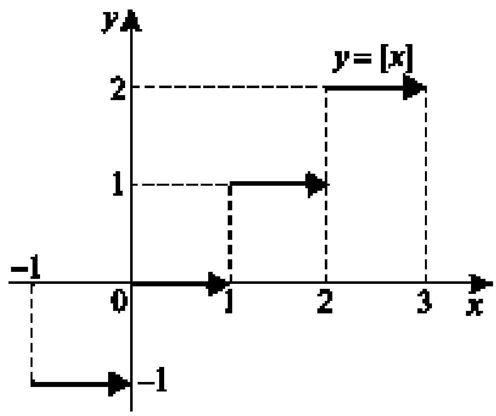


Рис. 12.24

2. $y = signx$ (читается: «y равно сигнум x») – знак числа x (рис.12.25):

$$signx=\begin{cases}-1, & x<0,\\ 0, & x=0,\\ 1, & x>0.\end{cases}$$

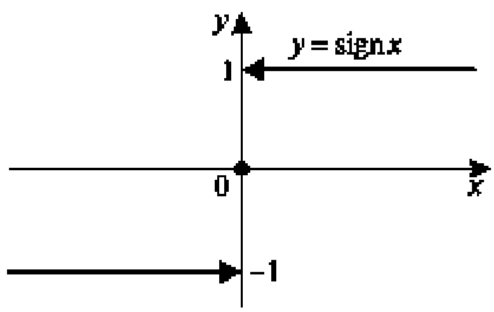


Рис. 12.25

3. $y=|x|$ – абсолютная величина (модуль) x (рис. 12.26):

$$|x|=\left[\begin{array}{l}x, x\geq 0,\\ -x, x<0.\end{array}\right.$$

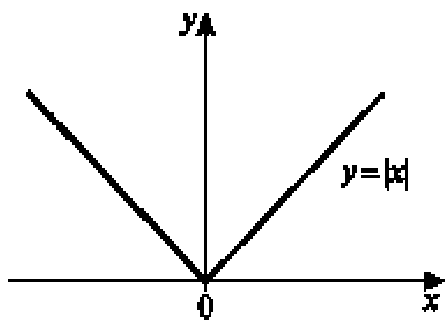


Рис. 12.26

12.3. Последовательность. Предел последовательности

Если функция рассматривается только при целых и положительных значениях аргумента, то она называется **функцией натурального аргумента.**

Множество ее значений образует числовую последовательность: каждому целому положительному числу соответствует число x_n – член последовательности, имеющий номер n. Это значит, что $x_n = f(n)$.

Числовой последовательностью называется множество значений функции $f(n)$, определенной на множестве натуральных чисел.

Числовая последовательность считается заданной, если для каждого номера n $n \in N$ можно однозначно определить член последовательности, который находится на n-м месте.

Последовательность называется **монотонно возрастающей** (**убывающей**), если при всех n каждый ее член больше (меньше) предшествующего.

Последовательность называется **ограниченной**, если все ее члены находятся на конечном интервале $(-M;M)$ и $M > 0$, то есть, если $|x_n| < M$ для любого номера n.

Число a называют **пределом последовательности** x_n, если для любого сколь угодно малого положительного числа ε найдется такой номер $N(\varepsilon)$, что для всех значений переменной x_n, у которых $n > N$, выполняется неравенство:

$$|x_n - a| < \varepsilon. \tag{12.6}$$

Аналитически можно записать:

$$\lim_{n\to\infty} x_n = a. \tag{12.7}$$

В соответствии с определением докажем, что:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n}{n+1} = 1.$$

Запишем неравенство:

$$\left|\frac{n}{n+1}-1\right|<\varepsilon, \quad \varepsilon>0; \qquad \left|-\frac{1}{n+1}\right|<\varepsilon \Rightarrow n+1>\frac{1}{\varepsilon}, \quad n>\frac{1}{\varepsilon}-1.$$

Следовательно, можно принять $N(\varepsilon)=\left[\frac{1}{\varepsilon}\right]-1.$

Неравенство (12.6) равносильно неравенству $a-\varepsilon<x_n<a+\varepsilon,$ если $n>N(\varepsilon)$.

Геометрический смысл предела

Если число a – предел последовательности x_n, то какую бы ε-окрестность точки a не взять, все члены последовательности x_n, начиная с $n>N$, должны попасть в эту окрестность. Поэтому вне этой окрестности остается конечное число членов x_n.

Числовую последовательность называют **сходящейся** *(***расходящейся***)*, если она имеет предел (не имеет предел).

Свойства сходящихся последовательностей формулируются в виде теорем, которые дальше применяются в теоретических и практических исследованиях.

Теорема 1. Если переменная x_n имеет предел $a>0$ ($a<0$), то начиная с некоторого номера и сама переменная $x_n>0$ ($x_n<0$).

Теорема 2 (*об ограниченности сходящейся последовательности*). Если переменная x_n имеет конечный предел, то она ограничена.

Теорема 3 (*о единственности предела*). Если переменная x_n имеет конечный предел, то этот предел единственный.

Теорема 4 (*о предельном переходе в неравенстве*). Если члены последовательностей удовлетворяют неравенству $x_n \le y_n$, то их пределы удовлетворяют такому же неравенству $\lim\limits_{n\to\infty} x_n \le \lim\limits_{n\to\infty} y_n$.

Теорема 5 (*о пределе промежуточной функции*). Если члены последовательностей x_n ; y_n ; z_n , начиная с некоторого n $n > N$, удовлетворяют неравенству $x_n \le y_n \le z_n$ и $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \lim\limits_{n\to\infty} z_n = a,$ то последовательность y_n также сходится и $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = a.$

Теорема 6 (*теорема Вейерштрасса о сходимости монотонной и ограниченной последовательности*). Если последовательность x_n монотонно возрастает (убывает) и ограничена сверху (снизу), то такая последовательность имеет предел.

Важным видом последовательности как упорядоченной переменной величины является случай, когда она стремится к нулю.

Последовательность, предел которой равен нулю, называется **бесконечно малой последовательностью**:

$$\lim_{n\to\infty} x_n = 0, \text{ или } |x_n - 0| < \varepsilon, \quad n > N.$$

Будем обозначать бесконечно малые последовательности: α_n ; β_n и т. д.

Примером бесконечно малых последовательностей являются $x_n = \dfrac{1}{n}$, или $x_n = (-1)^n \dfrac{1}{n}$.

Теорема 7 (*критерий сходимости последовательности*). Последовательность x_n имеет предел a, тогда и только тогда, когда ее можно представить в виде суммы постоянного числа a и бесконечно малой последовательности α_n .То есть $x_n = a + \alpha_n$.

Основные арифметические свойства бесконечно малых:

1. Сумма нескольких бесконечно малых есть величина бесконечно малая.

Доказательство.

Пусть α_n и β_n – бесконечно малые, то есть для любого $\dfrac{\varepsilon}{2} > 0$

существует такой номер N_1, что для всех $n > N_1$ выполняется неравенство $|\alpha_n| < \frac{\varepsilon}{2}$.

Аналогично для бесконечно малой последовательности β_n , для $\frac{\varepsilon}{2} > 0$ и $n > N_2$, $|\beta_n| < \frac{\varepsilon}{2}$.

Если $N = \max(N_1 : N_2)$, то $|\alpha_n + \beta_n| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon, n > N.$

Следовательно, последовательность $\alpha_n + \beta_n -$ бесконечно малая.

Следствие 1. Разность бесконечно малых есть величина бесконечно малая.

2. Произведение бесконечно малой на ограниченную величину – бесконечно малая величина.

Доказательство.

Пусть α_n – бесконечно малая, а x_n $-$ ограниченная последовательность.

По определению ограниченности существует такое число M, что для любого члена последовательности $|x_n| \le M$.

Для бесконечно малой последовательности:

$$\frac{\varepsilon}{M} > 0,\ |x_n| < \frac{\varepsilon}{M}, n > N.$$

Отсюда $|x_n \cdot \alpha_n| = |x_n| \cdot |\alpha_n| = \frac{\varepsilon}{M} \cdot M < \varepsilon, n > N,$ то есть $x_n \cdot \alpha_n$ – бесконечно малая последовательность.

Следствие 1. Произведение постоянной на бесконечно малую есть бесконечно малая величина.

Следствие 2. Произведение конечного числа бесконечно малых есть бесконечно малая величина.

Бесконечно большой последовательностью называется последовательность, которая имеет бесконечный предел $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \infty$, то есть для любого большого числа $M>0$ найдется такой номер N, что для всех $n>N, |x_n|>M.$

Например $x_n = 2n+1$, $\{x_n\} = 2^n$.

Между бесконечно малыми и бесконечно большими последовательностями существует тесная связь.

Теорема 8. Если переменная x_n −бесконечно малая, то переменная $\left\{\dfrac{1}{x_n}\right\}$ – бесконечно большая, и наоборот, если x_n −бесконечно большая, то $\left\{\dfrac{1}{x_n}\right\}$ – бесконечно малая.

Доказательство.

Пусть x_n – бесконечно малая, то есть $|x_n|<\varepsilon, n>N,$ отсюда $\dfrac{1}{|x_n|}>\dfrac{1}{\varepsilon}$. Если принять $\dfrac{1}{\varepsilon}=M$, то $\dfrac{1}{|x_n|}>M, n>N(\varepsilon)$.

Теорема доказана.

Теорема 9 (*об арифметических свойствах пределов последовательностей*). Пусть x_n , y_n −сходящиеся последовательности и $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a;$ $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = b,$ тогда их сумма (разность), произведение, частное (если предел знаменателя $\neq 0$) также имеет предел:

$$\lim_{n\to\infty}(x_n \pm y_n) = a \pm b;$$

$$\lim_{n\to\infty} x_n \cdot y_n = \lim_{n\to\infty} x_n \cdot \lim_{n\to\infty} y_n = ab;$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{x_n}{y_n} = \frac{\lim\limits_{n\to\infty} x_n}{\lim\limits_{n\to\infty} y_n} = \frac{a}{b}\ (b\neq 0).$$

Приведенные соотношения распространяются и на случай нескольких, или некоторого числа, слагаемых или множителей.

Докажем одно из утверждений теоремы: $\lim\limits_{n\to\infty} x_n \cdot y_n = a \cdot b.$

Доказательство.

По определению предела $x_n = a + \alpha_n$, $y_n = b + \beta_n$, где α_n и β_n — бесконечно малые.

Найдем произведение:

$$x_n \cdot y_n = (a + \alpha_n)(b + \beta_n) = ab + \underbrace{b \cdot \alpha_n + a \cdot \beta_n + \alpha_n \cdot \beta_n}_{\gamma_n}.$$

На основе свойств бесконечно малых к произведению ab прибавляется бесконечно малая. Это означает, что

$$\lim_{n\to\infty} x_n \cdot y_n = a \cdot b.$$

Пример 12.9. Найти предел $\lim\limits_{x\to a} x^n$.

Решение.

Используем теорему о пределе произведения:

$$\lim_{x\to a} x^n = \lim_{x\to a} (x \cdot x \cdot \ldots \cdot x) = \left(\lim_{x\to a} x\right)^n = a^n.$$

12.4. Предел функции

Зафиксируем некоторое значение $x = x_0$, в окрестности которого функция $f(x)$ определена. В самой точке x_0 функция может и не существовать. Точка $x = x_0$ называются *предельной точкой* множества $\tilde{O} = \{x_i\}$, если в любой окрестности точки существуют значения $x \in \tilde{O}$ отличающиеся от x_0.

Определение предела функции по Гейне

Функция $y = f(x)$ имеет **предел** A при x, стремящемся к x_0 (или в точке x_0), если для любой последовательности значений аргумента, которая сходится к x_0 соответствующая последовательность значений функции сходится к A.

Следовательно, если

$$x_1, x_2, \dots, x_n, \dots \to x_0 \quad (x \neq x_0)$$

то

$$y_1, y_2, \dots, y_n, \dots \to A.$$

Предел функции пишут в таком виде:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = A, \tag{12.8}$$

или

$$f(x) \to A \text{ при } x \to x_0.$$

Если $|f(x)| \to \infty$ при $x \to x_0$, то функцию $f(x)$ называют **бесконечно большой** при $x \to x_0$. Если $f(x) \to 0$ при $x \to x_0$, то функцию $f(x)$ называют **бесконечно малой** при $x \to x_0$.

Например $y = \dfrac{1}{x}$ – функция бесконечно большая при $x \to 0$ и бесконечно малая при $x \to \infty$.

Определение предела функции по Коши

Пусть функция $f(x)$ определена в некоторой окрестности точки x_0, кроме, возможно, самой точки x_0.

Число A называют **пределом функции** в точке x_0, то есть $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A$, если для произвольного числа $\varepsilon > 0$ существует такое число $\delta(\varepsilon) > 0$, что неравенство $|f(x) - A| < \varepsilon$ выполняется для всех $x \in (x_0 - \delta; x_0 + \delta)$, $x \neq x_0$.

Согласно определению предела функции соотношение $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A$ предусматривает, чтобы соответствующие условия определения выполнялись для всех точек, близких к x_0 как справа, так и слева.

Но на практике существуют функции, которые ведут себя по разному вблизи точки x_0. Например, $f(x)=\begin{cases}0, & x<1,\\ x^2, & x\geq 1.\end{cases}$

В связи с этим вводятся понятия правостороннего и левостороннего пределов.

Число A называют **пределом функции** $f(x)$ **слева (справа)** в точке x_0, если для любой последовательности значений аргумента, сходящейся к x_0 ($x_n<x_0$ ($x_n>x_0$)), соответствующая последовательность значений функции сходится к A.

Обозначается:

левый предел: $\lim\limits_{x\to x_0-0} f(x)=f(x_0-0)$,

правый предел: $\lim\limits_{x\to x_0+0} f(x)=f(x_0+0)$.

Между односторонними пределами и пределом функции в точке x_0 имеет место определенная связь.

Если односторонние пределы функции существуют и равны, то существует $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$, то есть:

$$f(x_0-0)=f(x_0+0)=\lim_{x\to x_0} f(x). \qquad (12.9)$$

Геометрический смысл предела функции

Если число A – предел функции $y=f(x)$ при $x\to x_0$, то какую бы малую ε-окрестность точки A мы не взяли, найдется такая δ-окрестность точки x_0, что для всех $x\neq x_0$ соответствующие значения функции принадлежат полосе $(A-\varepsilon; A+\varepsilon)$ шириной 2ε (рис. 12.27).

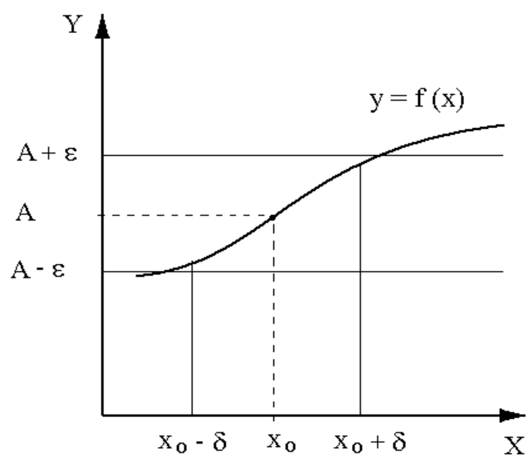


Рис. 12.27

Пределы функции непрерывного аргумента имеют свойства, аналогичные тем, которые были представлены относительно последовательностей.

Для решения примеров приведем теорему о нахождении предела суммы, произведения и частного.

Теорема. Пусть на множестве $\tilde{O}$ с предельной точкой x_0 заданы функции $f(x)$ и $g(x)$, которые в точке x_0 имеют конечные пределы:

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = A; \ \lim_{x\to x_0} g(x) = B.$$

Тогда предел суммы, произведения, частного этих функций равен сумме, произведению, частному пределов этих функций (если предел знаменателя не равен нулю) соответственно.

Сформулированная теорема в сжатом виде запишется так:

1) $\lim\limits_{x\to x_0} \left(f(x) + g(x)\right) = A + B;$

2) $\lim\limits_{x\to x_0} \left(f(x) - g(x)\right) = A - B;$

3) $\lim\limits_{x\to x_0} \left(f(x) \cdot g(x)\right) = A \cdot B;$

4) $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{A}{B}, B \neq 0.$

Если приведенные условия теоремы не выполняются, то имеем дело с так называемой неопределенностью, пределы которой можно найти с помощью соответствующих преобразований.

Если функция определена в точке x_0, то вычисление предела сводится к подстановке вместо x его предельного значения, то есть используется равенство $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = f\left(\lim\limits_{x\to x_0} x\right) = f(x_0)$.

Пример 12.10. Найти предел $\lim\limits_{x\to -3} \left(2x^2 - 5x + 1\right)$.

Решение.

$$\lim_{x\to -3}\left(2x^2-5x+1\right)=\lim_{x\to -3}\left(2x^2\right)-\lim_{x\to 3}\left(5x\right)+\lim_{x\to -3}1=$$

$$=2\cdot\left(-3\right)^2-5\left(-3\right)+1=34.$$

Пример 12.11. Найти предел $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2+4}{x^2-x-2}$.

Решение.

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^2+4}{x^2-x-2}=\frac{8}{0}=\infty.$$

В точке $x=2$ функция не определена, знаменатель дроби равен нулю и теорема о пределе частного не работает. Но из свойств бесконечно малых эта функция бесконечно большая при $x\to 2$. Следовательно, функция стремится к бесконечности.

12.5. Раскрытие неопределенности

При вычислении предела функций необходимо иметь в виду теоремы, которым удовлетворяют функции, имеющие предел.

На практике достаточно широко имеем дело с такими функциями, к которым теоремы использовать невозможно, если не преобразовать выражение, предел которого нужно вычислить. Такие выражения называют **неопределенностью**.

Рассмотрим ряд неопределенностей разного типа.

1. *Неопределенность типа* $\left[\dfrac{\infty}{\infty}\right]$, если нужно найти предел отношения двух многочленов, когда аргумент следует к бесконечности:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{P_m\left(x\right)}{Q_n\left(x\right)}=\lim_{x\to\infty}\frac{a_mx^m+a_{m-1}x^{m-1}+\ldots+a_0}{b_nx^n+b_{n-1}x^{n-1}+\ldots+b_0}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]=\begin{cases}0, & m<n\\ \dfrac{a_m}{b_n}, & m=n\\ \infty, & m>n\end{cases}. \qquad (12.10)$$

Для вычисления предела нужно числитель и знаменатель дроби разделить на наивысшую степень x, а затем вычислить предел.

Пример 12.12.

Вычислить пределы:

а) $$\lim_{x\to\infty}\frac{5x^3+2x-1}{2x^3-x^2+2}=\lim_{x\to\infty}\frac{5+\dfrac{2}{x^2}-\dfrac{1}{x^3}}{2-\dfrac{1}{\infty}+\dfrac{2}{x^3}}=\frac{5}{2};$$

б) $$\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{3n^2+1}+\sqrt{n}}{\sqrt[3]{n^2+1}+n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{3+\dfrac{1}{n^2}}+\sqrt{\dfrac{1}{n}}}{\sqrt[3]{\dfrac{1}{n}+\dfrac{1}{n^3}}+1}=\sqrt{3}.$$

В этом примере первая степень переменной n наивысшая, поэтому числитель и знаменатель разделили на n и вычислили предел.

2. *Неопределенность типа* $\left[\dfrac{0}{0}\right]$.

Рассмотрим предел частного двух функций: $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)}$, когда $f(x)$ и $\varphi(x)$ стремятся к нулю одновременно. То есть $x=a$ является корнем числителя и знаменателя.

В случае, если $f(x)$ и $\varphi(x)$ – многочлены, их можно по теореме Безу разложить на множители, один из которых $x-a$, а затем сократить дробь на $x-a$.

Пример 12.13. Вычислить предел:

$$\lim_{x\to1}\frac{2x^3+5x-7}{x^2-3x+2}=\lim_{x\to1}\frac{(x-1)(2x^2+2x+7)}{(x-1)(x-2)}=\lim_{x\to1}\frac{2x^2+2x+7}{x-2}=-11.$$

Чтобы выделить в числителе и знаменателе множитель $x-1$, нужно разделить «в столбик» числитель и знаменатель на $x-1$.

Подобным образом, а именно исключением множителя $(x-a)$, раскрывают неопределенность $\left[\dfrac{0}{0}\right]$ и тогда, когда числитель и (или) знаменатель содержат корневую иррациональность. Наиболее распространена при этом такая операция, как умножение числителя и знаменателя дроби на выражение, сопряженное тому или другому (или и тому, и другому, в зависимости от операции), с целью устранения начальной иррациональности, чтобы получить множитель $(x-a)$.

Пример 12.14. Вычислить предел:

$$\lim_{x\to 2}\frac{\sqrt{6-x}-2}{\sqrt{14+x}-4}=\lim_{x\to 2}\frac{(\sqrt{6-x}-2)(\sqrt{6-x}+2)(\sqrt{14+x}+4)}{(\sqrt{14+x}-4)(\sqrt{14+x}+4)(\sqrt{6-x}+2)}=$$

$$=\lim_{x\to 2}\frac{(2-x)(\sqrt{14+x}+4)}{(x-2)(\sqrt{6-x}+2)}=-\frac{8}{4}=-2.$$

3. *Неопределенность типа* $\infty-\infty$.

Неопределенность этого вида с помощью преобразований нужно привести к неопределенностям $\left[\frac{0}{0}\right]$ или $\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$.

Пример 12.15. Вычислить пределы:

а) $\lim\limits_{x\to 3}\left(\frac{1}{x-3}-\frac{6}{x^2-9}\right)=\lim\limits_{x\to 3}\frac{x-3}{x^2-9}=\lim\limits_{x\to 3}\frac{x-3}{(x-3)(x+3)}=\frac{1}{6}$;

б) $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\sqrt{x^2+2}+x\right)=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{\left(x-x\sqrt{1+\frac{2}{x^2}}\right)\left(x+x\sqrt{1+\frac{2}{x^2}}\right)}{x+x\sqrt{1+\frac{2}{x^2}}}=$

$$=\lim_{x\to-\infty}=\frac{x^2-x^2-2}{x+x\sqrt{1+\frac{2}{x^2}}}=\frac{-2}{-\infty}=0.$$

В этом примере, если x стремится к $+\infty$, неопределенности нет, имеем: $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+2}+x\right)=\infty+\infty=\infty$, как сумма двух бесконечно больших переменных.

Первый замечательный предел

Теорема 1. Предел отношения синуса бесконечно малого аргумента к этому аргументу равен единице, то есть

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1. \tag{12.11}$$

Доказательство.

Чтобы доказать теорему, рассмотрим окружность радиуса 1 с центром в точке O (рис. 12.28) и пусть $x\in\left(0;\frac{\pi}{2}\right)$.

Сравним площади треугольника AOB, сектора $A\breve{O}B$, треугольника AOC.

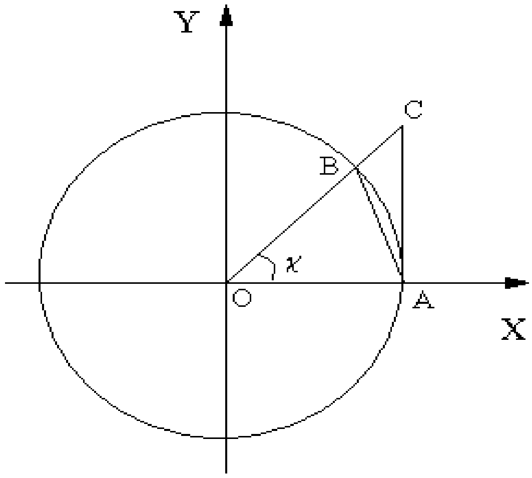


Рис. 12.28

Очевидно, что

$$S_{\Delta AOB}<S_{сектAOB}<S_{\Delta AOS}.$$

Следовательно,

$\frac{1}{2}\sin x<\frac{x}{2}<\frac{1}{2}\operatorname{tg}x$, или $\sin x<x<\frac{\sin x}{\cos x}$, или $1<\frac{x}{\sin x}<\frac{1}{\cos x}$.

Отсюда $\cos x<\frac{x}{\sin x}<1.$

Отметим, что данные неравенства выполняются и для $x\in\left(-\frac{\pi}{2};0\right)$, потому что функции $\cos x$ и $\frac{\sin x}{x}$ четные.

Переходим к пределу и получаем:

$$\lim_{x\to 0}1=1;\ \lim_{x\to 0}\cos x=1.$$

Тогда по признаку существования предела промежуточной функции $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1.$

Теорема доказана.

Для применения этой теоремы нужно отметить, что в роли аргумента x под знаком синуса может выступать сложный аргумент – функция независимой переменной, но структура выражения должна быть именно такой, как в приведенной теореме.

То есть:

$$\lim_{x\to a}\frac{\sin\alpha\ x}{\alpha\ x}=1,$$

если $\sin\alpha\ x\ \to 0$ и $\alpha\ x\ \to 0$, когда аргумент x стремится к a.

На практике как готовые формулы используют следствия из теоремы:

1. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x}{\sin x}=1.$

2. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin ax}{x}=a.$

3. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin ax}{\sin bx}=\frac{a}{b}.$

4. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg} x}{x}=1.$

5. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\arcsin x}{x}=1.$

6. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\operatorname{arctg} x}{x}=1.$

Пример 12.16. Вычислить пределы:

а) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 5x}{4x}=\frac{5}{4}\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 5x}{5x}=\frac{5}{4};$

б) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{2\sin^2\frac{x}{2}}{x^2}=\frac{1}{2}\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{\sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}\right)^2=\frac{1}{2};$

в) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\cos 3x-\cos 5x}{x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{2\sin 4x\sin x}{x^2}=\frac{1}{2}\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 4x}{4x}\cdot\frac{\sin x}{x}=\frac{1}{2};$

г) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin\frac{1}{2}x\ \ x-1}{x^2-x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin\frac{1}{2}x\ \ x-1}{2\cdot\frac{x\ \ x-1}{2}}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin\alpha}{2\cdot 2}=\dfrac{1}{2}$,

где $\alpha=\dfrac{1}{2}x\ \ x-1$;

д) $\lim\limits_{x\to 0}x\operatorname{ctg}5x=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{5\cdot x}{5\cdot\operatorname{tg}5x}=\dfrac{1}{5}\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{5x}{\operatorname{tg}5x}=\dfrac{1}{5}$.

Теорема 2. Предел последовательности $u_n=\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n$, если $n\to\infty$ равен:

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=e. \tag{12.12}$$

Доказательство.

Рассмотрим последовательность с общим членом $u_n=\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n$. Если n стремится к бесконечности, имеем неопределенность $\left[1^\infty\right]$.

Проведем анализ поведения этой последовательности при $n\to\infty$. Допустим, что последовательность u_n монотонно возрастает.

Действительно, воспользуемся формулой бинома Ньютона:

$$u_n=\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=1+n\frac{1}{n}+\frac{n\ \ n-1}{1\cdot 2}\cdot\frac{1}{n^2}+\ldots+\frac{n\ \ n-1\ \ \ n-\ \ n-1}{1\cdot 2\ldots n}\cdot\frac{1}{n^n},$$

или

$$u_n=2+\frac{1}{1\cdot 2}\left(1-\frac{1}{n}\right)+\ldots+\frac{1}{1\cdot 2\ldots n}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\ldots\left(1-\frac{n-1}{n}\right).$$

С увеличением n возрастает как число положительных слагаемых (их в формуле $n+1$), так и величина каждого слагаемого, то есть u_n возрастает.

Сделаем оценку общего члена последовательности u_n :

$$u_n < 2+\frac{1}{1\cdot 2}+\ldots+\frac{1}{1\cdot 2\cdot n} < 2+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{2^{n-1}}.$$

Следовательно, имеем сумму S_{n-1} членов геометрической прогрессии с первым членом $a=\frac{1}{2}$ и знаменателем $q=\frac{1}{2}$

$$S_{n-1}=\frac{a\ \ q^{n-1}-1}{q-1}=\frac{\frac{1}{2}\left(\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}-1\right)}{\frac{1}{2}-1}=1-\frac{1}{2^{n-1}}<1,$$

или

$$2<u_n<2+1, \text{ то есть } 2<u_n<3.$$

Таким образом, последовательность u_n монотонно возрастает и ограничена. То есть u_n имеет предел.

Предел числовой последовательности $u_n=\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ существует и равен числу e $\quad e=2,718281\ldots$).

Следовательно,

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=e.$$

Теорема доказана.

Можно доказать, что функция $y=\left(1+\frac{1}{x}\right)^x$ при $x\to\pm\infty$ также имеет предел, который равен e (любое вещественное число x находится между двумя натуральными $n\le x\le n+1$).

Вторым замечательным пределом называют:

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}=e. \qquad (12.13)$$

Последнее равенство можно записать и в таком виде:

$$\lim_{\alpha\to 0}(1+\alpha)^{1/\alpha}=e, \qquad (12.14)$$

где $\alpha=\dfrac{1}{x}$, при $x\to\infty,\ \alpha\to 0.$

Относительно двух формул (12.13) и (12.14), которые соответствуют второму замечательному пределу, можно привести такие же рассуждения, как и при анализе первого замечательного предела: в роли x и α могут выступать соответственно любые бесконечно большие или бесконечно малые, но структура выражения должна быть такой, как в приведенных формулах.

На практике как готовые формулы используют следствия из (12.13):

1. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{a}{x}\right)^{bx}=e^{ab}.$

2. $\lim\limits_{x\to 0}(1+ax)^{1/bx}=e^{a/b}.$

3. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{a^{x}-1}{x}=\ln a.$

4. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{a}{bx}\right)^{x}=e^{a/b}.$

5. $\lim\limits_{x\to 0}(1+ax)^{bx}=e^{ab}.$

6. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{x}-1}{x}=1.$

Пример 12.17.

Вычислить пределы:

а) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{3}{x}\right)^{5x}=\lim\limits_{x\to\infty}\left(\left(1+\dfrac{3}{x}\right)^{\frac{x}{3}}\right)^{\frac{3}{x}\cdot 5x}=e^{15};$

б) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x+3}{x+1}\right)^{2x-1}=\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{2}{x+1}\right)^{2x-1}=\lim\limits_{x\to\infty}\left(\left(1+\frac{2}{x+1}\right)^{\frac{x+1}{2}}\right)^{\frac{2(2x-1)}{x+1}}=e^4;$

в) $\lim\limits_{x\to0}(\cos x)^{\frac{1}{x^2}}=\lim\limits_{x\to0}(1-1+\cos x)^{1/x^2}=\lim\limits_{x\to0}\left((1+(\cos x-1))^{1/(\cos x-1)}\right)^{\frac{\cos x-1}{x^2}}=$

$$=\lim_{x\to0}e^{\frac{\cos x-1}{x^2}}=e^{-\lim\limits_{x\to0}\frac{1-\cos x}{x^2}}=e^{-\lim\frac{2\sin^2\frac{x}{2}}{x^2}}=e^{-\frac{1}{2}}.$$

Задача. Начальный взнос в банк составляет A_0. Банк насчитывает ежегодно $p\%$ годовых, но насчитываются они m раз в год при ежегодном увеличении на $p\%$. Необходимо найти величину вклада, который будет накоплен за n лет.

По формуле сложных процентов: $A_n=A_0\left(1+\frac{p}{100m}\right)^{mn}$.

Если проценты по взносу насчитываются непрерывно, то будем иметь:

$$A_n=\lim_{m\to\infty}A_0\left(1+\frac{p}{100m}\right)^{mn}=A_0\lim_{m\to\infty}\left(\left(1+\frac{p}{100m}\right)^{\frac{100m}{p}}\right)^{\frac{p}{100m}mn}=A_0e^{\frac{pn}{100}}.$$

Формула отображает показательный (экспоненциальный) закон роста (при $p>0$) или убывания (при $p<0$). Ее можно использовать при непрерывном начислении процентов. Эта формула достаточно эффективна при анализе сложных финансовых проблем, например при обосновании и выборе инвестиционных решений.

Сравнение бесконечно малых

Пусть $\alpha=\alpha(x)$, $\beta=\beta(x)$ – бесконечно малые функции при $x\to a$ (a – конечное число или ∞).

Сравнить бесконечно малые – это означает вычислить предел их отношения:

$$\lim_{x\to a}\frac{\alpha(x)}{\beta(x)}=c. \qquad (12.15)$$

Если такой предел существует, то:

а) при $c\neq 0, \alpha(x)$ и $\beta(x)$ называют бесконечно малыми одного порядка. В частности при $c=1$ бесконечно малые α и β называют *эквивалентными* и пишут $\alpha\sim\beta$;

б) при $c=0, \alpha(x)$ называют бесконечно малой более высокого порядка, чем $\beta(x)$;

в) при $c=\infty, \alpha(x)$ – бесконечно малая более низкого порядка, чем $\beta(x)$.

Бесконечно малая $\alpha(x)$ называется *бесконечно малой порядка* k относительно бесконечно малой $\beta(x)$, если

$$\lim_{x\to a}\frac{\alpha(x)}{\beta^k(x)}=c\neq 0.$$

Пусть, например, $\alpha=x; \beta=x^{10}, x\to 0,$ тогда $\lim_{x\to 0}\frac{\beta(x)}{\alpha(x)}=\lim_{x\to 0}\frac{x^{10}}{x}=$ $=\lim_{x\to 0}x^9=0$ – бесконечно малая $\beta(x)$ более высокого порядка малости, чем α. При этом порядок малости $k=10$.

Следовательно β и α^{10} – эквивалентные бесконечно малые.

Особенный интерес при вычислении предела функции вызывают эквивалентные бесконечно малые.

Ряд эквивалентных бесконечно малых получен исходя из первого и второго замечательных пределов при $\alpha(x)\to 0$:

1. $\sin\alpha(x)\sim\alpha(x)$. 2. $\arcsin\alpha(x)\sim\alpha(x)$. 3. $\ln(1\pm\alpha(x))\sim\pm\alpha(x)$.

4. $\mathrm{tg}\,\alpha(x)\sim\alpha(x)$. 5. $\mathrm{arctg}\,\alpha(x)\sim\alpha(x)$. 6. $a^{\alpha(x)}-1\sim\alpha(x)\ln a$.

Пример 12.18. Вычислить пределы:

а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 5x}{\operatorname{arctg} 6x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{5x}{6x}=\dfrac{5}{6}$; предельный переход дает неопределенность $\left[\dfrac{0}{0}\right]$.

Поскольку $x\to 0$, то $\sin 5x \sim 5x$, $\operatorname{arctg} 6x \sim 6x$;

б) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 3x}{1-\cos 5x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2\sin^2\frac{3}{2}x}{2\sin^2\frac{5}{2}x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\frac{9}{4}x^2}{\frac{25}{4}x^2}=\dfrac{9}{25}$;

в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+2\sin 3x)}{\sin 5x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2\sin 3x}{\sin 5x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2\cdot 3x}{5x}=\dfrac{6}{5}$;

г) $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{\cos 5x-\cos 7x}{\arcsin^2 3x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2\sin 6x\cdot\sin x}{\arcsin^2 3x}=2\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{6x\cdot x}{9x^2}=\dfrac{4}{3}$.

12.6. Непрерывность функции

Пусть функция $y=f(x)$ определена на некотором множестве X, а в точке $x_0\in X$ ее значение соответственно $y_0=f(x_0)$.

Функция $f(x)$ называется **непрерывной в точке** x_0, если предел этой функции при $x\to x_0$ равен значению функции в этой точке.

То есть:

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=f(x_0). \tag{12.16}$$

Для непрерывной функции в точке x_0 необходимо, чтобы функция в этой точке существовала. В определении непрерывности функции точка x_0 принадлежит области определения функции и является внутренней точкой, то есть рассматривается двусторонний предел функции.

При исследовании непрерывности могут быть случаи, когда функция непрерывна в данной точке слева или справа.

Если существует предел

$$f(x_0+0)=\lim_{x\to x_0+0} f(x)=f(x_0) \tag{12.17}$$

или

$$f(x_0-0)=\lim_{x\to x_0-0} f(x)=f(x_0), \tag{12.18}$$

то функцию называют *непрерывной в точке* x_0 *справа и слева* соответственно.

Если эти условия не выполняются, то функция имеет **разрыв в точке** x_0 справа или слева**.**

Следовательно, если функция непрерывна в точке x_0, то она непрерывна в этой точке справа и слева, то есть:

$$f(x_0+0)=f(x_0-0)=f(x_0). \tag{12.19}$$

Пример 12.19. Доказать, что функция $y=x^3+1$ непрерывна в точке $x_0=2$.

Доказательство.

Найдем значение функции в точке $x_0=2$, $f(2)=9$.

Вычислим:

$$\lim_{x\to 2}(x^3+1)=\lim_{x\to 2}x^3+\lim_{x\to 2}1=9.$$

Таким образом, предел функции в точке $x_0=2$ равен значению функции в этой точке, следовательно, функция непрерывна в точке $x_0=2$.

Пример 12.20.

Доказать, что функция: $f(x)=\begin{cases} x\sin\dfrac{1}{x}, & x\neq 0 \\ 0, & x=0 \end{cases}$ непрерывна в точке $x_0=0$.

Доказательство.

По условию функция $f(0)=0$; $\lim\limits_{x\to 0} x\sin\frac{1}{x}=0$ (произведение бесконечно малой на ограниченную).

Следовательно $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=f(0)$, функция в точке $x_0=0$ является непрерывной.

Пример 12.21.

Доказать, что функция $f(x)=\begin{cases} x^2, & x\le 1 \\ x+1, & x>1 \end{cases}$ в точке $x_0=1$ имеет разрыв.

Доказательство.

Вычислим односторонние пределы:

$$f(1-0)=\lim_{x\to 1-0} x^2=1;$$

$$f(1+0)=\lim_{x\to 1+0}(x+1)=2,$$

то есть предел слева не равен пределу справа и в данной точке предел не существует и функция в точке $x_0=1$ имеет разрыв.

Рассмотрим еще одно определение непрерывности функции в точке.

Введем такие понятия: **приращением аргумента** при переходе от значения x_0 к x называют разность $\Delta x=x-x_0$, а соответствующее изменение значения функции $\Delta y=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)$ – **приращением функции** в точке x_0.

Пусть функция определена в точке x_0 и непрерывна в ней.

Тогда:

$$\Delta y=f(x)-f(x_0)=f(x_0+\Delta x)-f(x_0),$$

и

$$\lim_{\Delta x\to 0}\Delta y=\lim_{\Delta x\to 0}\left(f(x_0+\Delta x)-f(x_0)\right)=0.$$

Если функция непрерывна в точке x_0, то бесконечно малому приращению аргумента соответствует бесконечно малое приращение функции, то есть:

$$\lim_{\Delta x\to 0}\Delta y=0. \qquad (12.20)$$

Выполняется и обратное утверждение, если $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\Delta y=0$, то функция непрерывна.

Действительно

$$\lim_{\Delta x\to 0}\Delta y=\lim_{\Delta x\to 0}\left(f(x_0+\Delta x)-f(x_0)\right)=\lim_{x\to x_0}\left(f(x)-f(x_0)\right)=0,$$

или

$$\lim_{x\to x_0}f(x)=f(x_0),$$

то есть функция непрерывна.

Функция **непрерывна на множестве** X, если она непрерывна в каждой точке этого множества.

Пример 12.22. Доказать, что функция $y=x^2$ непрерывна на множестве $(-\infty;+\infty)$.

Доказательство.

Для любой точки x найдем:

$$\Delta y=f(x+\Delta x)-f(x)=(x+\Delta x)^2-x^2=2x\Delta x+(\Delta x)^2.$$

Тогда:

$$\lim_{\Delta x\to 0}\Delta y=\lim_{\Delta x\to 0}\left(2x\Delta x+(\Delta x)^2\right)=0,$$

то есть функция непрерывна в произвольной точке x.

Пример 12.23. Доказать, что функция $y=\sin x$ непрерывна для любого $x\in(-\infty;+\infty)$.

Доказательство.

Определим: $\Delta y=\sin(x+\Delta x)-\sin x=2\sin\frac{\Delta x}{2}\cos\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right)$.

Тогда:

$$\lim_{\Delta x\to 0}\Delta y=\lim_{\Delta x\to 0}2\sin\frac{\Delta x}{2}\cos\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right)=0$$

и непрерывность доказана ($\sin\frac{\Delta x}{2}$ – бесконечно мала, $\cos\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right)$ – ограничена единицей).

Если для функции $f(x)$ в точке x_0 не выполняется хотя бы одно из условий непрерывности, то есть функция не является непрерывной в этой точке, то говорят, что точка x_0 – *точка разрыва функции*, или $f(x)$ имеет разрыв в точке x_0.

Точки разрыва функции классифицируются в зависимости от того, как именно нарушается критерий непрерывности.

Различают такие случаи:

1. Существуют односторонние (конечные) пределы и $f(x_0-0)=$ $=f(x_0+0)=A$, но $f(x_0)\neq A$ или не существует, тогда говорят, что x_0 является *точкой устранимого разрыва*.

2. Существуют конечные односторонние пределы, но $f(x_0-0)\neq$ $\neq f(x_0+0)$, тогда x_0 называют *точкой разрыва 1-го рода*.

3. Не существует хотя бы одного из односторонних пределов, или по крайней мере один из них бесконечный, тогда точка x_0 – *точка разрыва 2-го рода.*

Таким образом, чтобы исследовать функцию на непрерывность в данной точке x_0, нужно найти односторонние пределы функции $f(x)$ при $x\to x_0$ и вычислить значение функции в точке, то есть проверить условие:

$$f(x_0-0)=f(x_0+0)=f(x_0).$$

Далее необходимо сделать выводы соответственно типа разрыва функции.

Пример 12.24. Исследовать на непрерывность функцию:

$$y=\frac{\sin x}{x} \quad \text{в точке } x_0=0.$$

Решение.

В соответствии с первым замечательным пределом: $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$.

То есть $f(0-0)=\lim\limits_{x\to 0-0}\frac{\sin x}{x}=1$;

$f(0+0)=\lim\limits_{x\to 0+0}\frac{\sin x}{x}=1$.

Но в точке $x_0=0$ функция не существует (рис. 12.29).

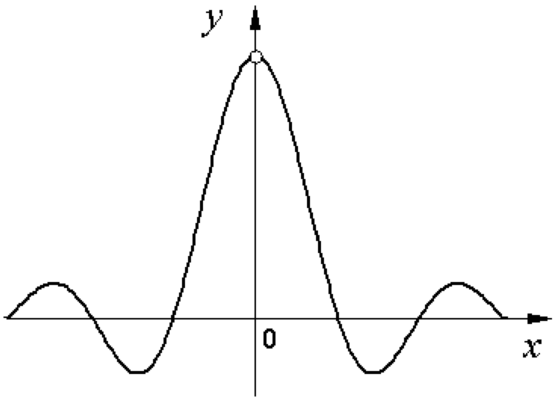


Рис. 12.29

Имеем: $f(0-0)=f(0+0)\neq f(0)$, следовательно $x_0=0$ – точка устранимого разрыва.

Пример 12.25. Исследовать на непрерывность функцию

$$y=\frac{x-2}{x^2-3x+2}.$$

Решение.

Областью определения функции является вся числовая ось, кроме $x=1$, $x=2$ (знаменатель равен нулю).

Следовательно, на непрерывность функцию исследуем в точках:

1) $x=1$.

Найдем односторонние пределы:

$$f(1-0)=\lim_{x\to 1-0}\frac{x-2}{(x-1)(x-2)}=-\infty.$$

Следовательно, точка $x=1$ является точкой разрыва 2-го рода;

2) $x=2$.

$$f(2-0)=\lim_{x\to 2-0}\frac{1}{x-1}=1,\quad f(2+0)=\lim_{x\to 2+0}\frac{1}{x-1}=1\ ,$$

в точке $x=2$ функция не существует, то есть:

$$f(2-0)=f(2+0)\neq f(2).$$

Таким образом, точка $x=2$ является точкой устранимого разрыва (рис. 12.30).

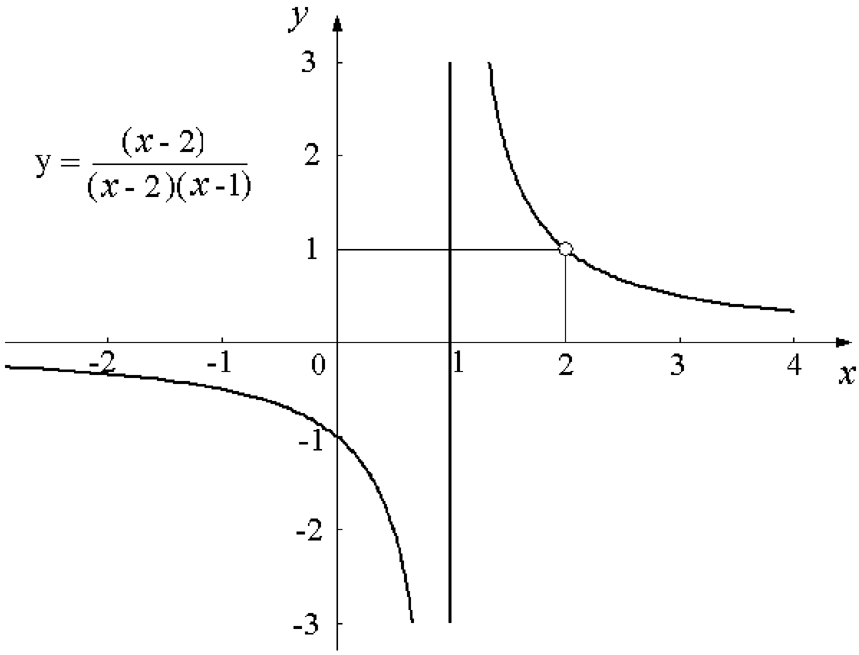


Рис. 12.30

Пример 12.26. Исследовать на непрерывность функцию:

$$y=\begin{cases} x+1, & x\leq 0 \\ x^2+1, & 0<x\leq 1 \\ x+\dfrac{3}{2}, & x>1 \end{cases}.$$

Решение.

Имеем неэлементарную функцию, которая задана тремя формулами. На каждом из указанных промежутков функция непрерывна, как элементарна на области своего существования.

Необходимо рассмотреть точки стыковки функций разного вида. То есть, точки $x=0$ и $x=1$.

1. При $x=0$, односторонние пределы

$$f(0-0)=\lim_{x\to 0-0}(x+1)=1;\; f(0+0)=\lim_{x\to 0+0}(x^2+1)=1;\; f(0)=1.$$

Таким образом, функция в точке $x=0$ непрерывна.

2. При $x=1$ $f(1-0)=\lim\limits_{x\to 1-0}(x^2+1)=2$; $f(1+0)=\lim\limits_{x\to 1+0}(x+2)=3$; $f(1)=2$.

То есть $f(1-0)\neq f(1+0)$ и функция в этой точке имеет разрыв 1-го рода (рис. 12.31).

Пример 12.27. Исследовать на непрерывность функцию $y=e^{\frac{1}{x-2}}$.

Решение.

В точке $x=2$ односторонние пределы:

$$f(2-0)=\lim_{x\to 2-0} e^{\frac{1}{x-2}}=0;\quad f(2+0)=\lim_{x\to 2+0} e^{\frac{1}{x-2}}=\infty.$$

Следовательно, точка $x=2$ есть точки разрыва 2-го рода (рис. 12.32).

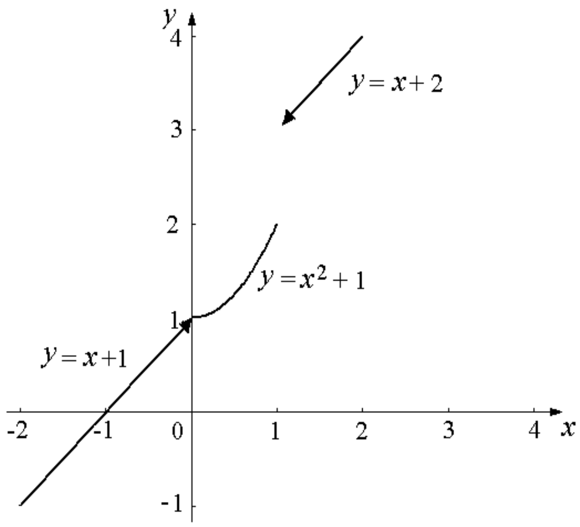


Рис. 12.31

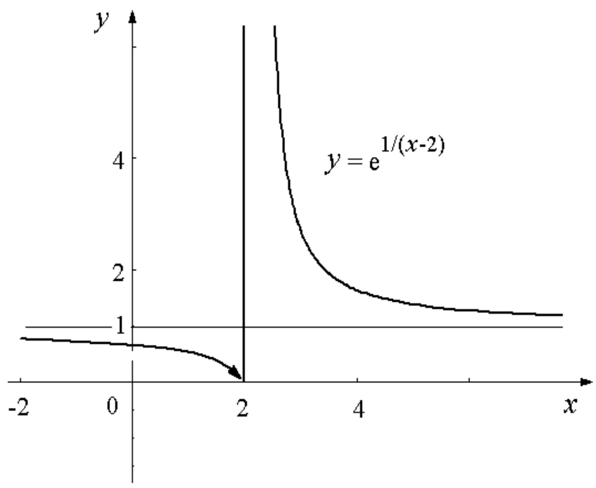


Рис. 12.32

Теорема 1 (*об арифметических свойствах непрерывных функций*). Если каждая из функций $f(x)$ и $g(x)$ определена на множестве X и непрерывна в точке $x_0\in X$, то в этой точке непрерывными являются функции $f(x)\pm g(x)$; $f(x)\cdot g(x)$; $f(x)/g(x)$ (при условии $g(x)\neq 0$).

Доказательство.

Рассмотрим частное двух функций $f(x)/g(x)$. Предположение о непрерывности функций $f(x)$ и $g(x)$ в точке $x_0 \in X$ равносильно выполнению равенств: $\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$, $\lim_{x \to x_0} g(x) = g(x_0)$. Отсюда по теореме о пределе частного двух функций имеем:

$$\lim_{x \to 0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(x_0)}{g(x_0)},$$

а это значит, что функция $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ непрерывна в точке x_0.

Теорема доказана.

Непрерывность функций $f(x) \pm g(x)$ и $f(x) \cdot g(x)$ доказывается аналогично; теорема справедлива для алгебраической суммы и произведения любого конечного числа функций.

Например, функция $f(x) = x^2 + 2x + 5$ непрерывна в каждой точке, потому что она является суммой непрерывных функций.

Теорема 2 (*непрерывность сложной функции*). Пусть функция $y = f(u)$ определена на множестве U, а функция $u = \varphi(x)$, все значения которой принадлежат U, определена на множестве X. Если функция $u = \varphi(x)$ непрерывна в точке $x_0 \in X$, а функция $y = f(u)$ непрерывна в соответствующей точке $u_0 = \varphi(x_0) \in U$, то и функция $y = f(\varphi(x))$ будет непрерывной в точке x_0.

Доказательство.

Придадим в точке $x_0 \in X$ приращение Δx, тогда приращение функции $u = \varphi(x)$ будет иметь прирост Δu. Если $\Delta x \to 0$, тогда и $\Delta u \to 0$, потому что функция $u = \varphi(x)$ непрерывна. Это значит, что $\Delta y \to 0$ ($y = f(u)$ – непрерывная функция).

Следовательно, если $\Delta x \to 0$, то $\Delta y \to 0$.

То есть функция $y = f(\varphi(x))$ непрерывна.

Имеем:

$$\lim_{x \to x_0} f(\varphi(x)) = f(\varphi(x_0)). \qquad (12.21)$$

Теорема доказана.

Равенство (12.21) означает, что под знаком непрерывной сложной функции можно переходить к пределу.

Теорема 3 (*непрерывность обратной функции*). Если функция $y = f(x)$ возрастает (убывает) и непрерывна на множестве X, а область ее изменения есть Y, тогда на множестве Y существует однозначная обратная функция $x = \varphi(y)$, также возрастающая (убывающая) и непрерывная на множестве Y

Теорема 4 (*непрерывность элементарных функций*). Основные элементарные функции являются функциями, непрерывными на области их определения.

Функцию $y = f(x)$ называют **непрерывной на интервале** $(a;b)$, если она непрерывна в каждой точке этого интервала.

Функция называется **непрерывной на отрезке** $[a;b]$, если она непрерывна на интервале $(a;b)$ и непрерывна справа в точке a и слева в точке b.

Если функция $y = f(x)$ определена на множестве X и существует такое значение $x_0 \in X$, что для всех $x \in X$ выполняется условие $f(x) \le f(x_0)$ $(f(x) \ge f(x_0))$, то число $f(x_0)$ называется **наибольшим** – M **(наименьшим** – m**) значением функции** $f(x)$ на множестве X.

Теорема 5. Если функция $y = f(x)$ непрерывна на отрезке $[a;b]$, $X = [a,b]$, то она на этом отрезке достигает своего наибольшего и наименьшего значений. То есть для любых $x \in X$ выполняется условие: $m \le f(x) \le M$.

Если функция $y=f(x)$ задана на интервале $(a;b)$ или $[a;b)$, то она таким свойствам может и не удовлетворять.

Например $y=x$, $x\in(0;1)$ – ни наименьшего, ни наибольшего значения функция не имеет.

Функция $y=x$ на отрезке $[0;2]$ имеет наименьшее значение $m=f(0)=0$; наибольшее $M=f(2)=2$, то есть на концах отрезка.

Функция $y=\dfrac{1}{x}$ на отрезке $[0;2]$ не имеет наибольшего значения, потому что в точке $x=0$ она не определена.

Функция $y=\sin x$ на отрезке $[0;2\pi]$ достигает наименьшего значения $m=0$, в точке $x=\dfrac{3\pi}{2}$, $m=-1$, и наибольшего значения $M=1$ в точке $x=\dfrac{\pi}{2}$.

Теорема 6. Если функция $y=f(x)$ определена и непрерывна на отрезке $[a;b]$ и на его концах принимает значение разных знаков, то между a и b существует хотя бы одна точка $c\in(a;b)$, в которой функция равна нулю.

Теорема 7. Если функция $y=f(x)$ непрерывна на отрезке $[a;b]$ и ее наименьшее и наибольшее значения, соответственно, m и M, а число $C\in[m;M]$, тогда на отрезке $[a;b]$ найдется хотя бы одна точка c, такая, что $f(c)=C$.

Вопросы для самодиагностики

1. Какая зависимость называется функциональной?
2. Какие существуют способы задания функции?
3. Какие функции называют четными и нечетными? Какие функции называют периодическими? Какие функции называют монотонными? Какие функции называют ограниченными?

4. Какие функции принадлежат к основным элементарным? Привести примеры элементарных функций в экономике.

5. Сформулировать определение предела последовательности и функции.

6. Каков геометрический смысл предела функции? Какие теоремы используются для нахождения предела функции?

7. Как раскрывается неопределенность вида $\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$, $\left[\frac{0}{0}\right]$, $\infty-\infty$, $0\cdot\infty$?

8. Что такое первый замечательный предел?

9. Что такое второй замечательный предел?

10. Какие функции называются эквивалентными? Как эквивалентные функции применяются при вычислении пределов?

11. Какая функция называется непрерывной в точке x_0?

12. Какая функция называется непрерывной на отрезке?

13. Что означает непрерывность в точке слева (справа)?

14. Какие точки называются точками разрыва?

15. Как исследовать на непрерывность элементарные функции?

Упражнения

12.1. Найти область определения каждой из следующих функций:

1) $y=\sqrt{x-1}+\sqrt{2-x}$; 2) $y=\log_2\ 3-x$; 3) $y=\sqrt{\dfrac{3-x}{x+2}}$;

4) $y=\sqrt{x^2+9x}+\dfrac{2}{x+9}$; 5) $y=\dfrac{1}{\log_2\ 1-x}+\sqrt{x+2}$.

12.2. Построить графики функций:

1) $y=2|x|-1$; 2) $y=\left|x^2-4x\right|$; 3) $y=\sqrt{1-x}$;

4) $y=1-2^{x-1}$; 5) $y=3-\dfrac{2}{x-1}$; 6) $y=\log_2\ x-1$;

7) $y=\begin{cases}-x^2, & x\le 0\\ 2x, & 0<x<1\\ x, & x\ge 1\end{cases}$; 8) $y=\begin{cases}\sin x, & x\le 0\\ 0, & 0<x<1\\ \log_2 x, & x\ge 1\end{cases}$.

12.3. Вычислить пределы, используя свойства бесконечно малых и бесконечно больших функций:

1) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\cos x}{3^x}$; 2) $\lim\limits_{x\to+\infty} x\cdot\log_{1,7} x$; 3) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos 5x}{\mathrm{tg}^2\, 3x}$;

4) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\mathrm{arctg}\, x}{x^2}$; 5) $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(3^x+5^x\right)$; 6) $\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{2^x}{x+1}$.

12.4. Найти односторонние пределы:

1) $\lim\limits_{x\to 1\pm 0}\dfrac{x+1}{x-1}$; 2) $\lim\limits_{x\to\pm 0}\left(2^{\frac{3}{x}}+3\right)$; 3) $\lim\limits_{x\to(-2\pm 0)}\dfrac{x^2}{4-x^2}$.

12.5. Найти пределы функций:

1) $\lim\limits_{x\to\frac{1}{3}}\dfrac{3x^2+2x-1}{27x^3-1}$; 2) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{2x^2-x}-\dfrac{1}{x^2-x}\right)$; 3) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{x}-\sqrt{2-x}}{2x^2-x-1}$;

4) $\lim\limits_{x\to 8}\dfrac{\sqrt{9+2x}-5}{\sqrt[3]{x}-2}$; 5) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^2-2x-1}{x^2+3x+7}$; 6) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^4-2x-1}{100x^3+x^2+2}$;

7) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^4}{x^2-2}-\dfrac{x^4}{x^2+2}\right)$; 8) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\mathrm{tg}\, 6x}{\sin 8x}$; 9) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1-\dfrac{1}{x-1}\right)^{2x}$.

12.6. Исследовать на непрерывность заданные функции, установить характер точек разрыва и построить их графики:

1) $f(x)=\dfrac{|x|}{x}$; 2) $f(x)=\dfrac{5}{x^2-1}$.

13. Производная функции одной переменной

13.1. Определение производной. Геометрический, механический и экономический смысл производной

Задачи, приводящие к понятию производной

Задача о проведении касательной к графику функции в точке $A\left(x_0; y_0\right)$ (рис. 13.1).

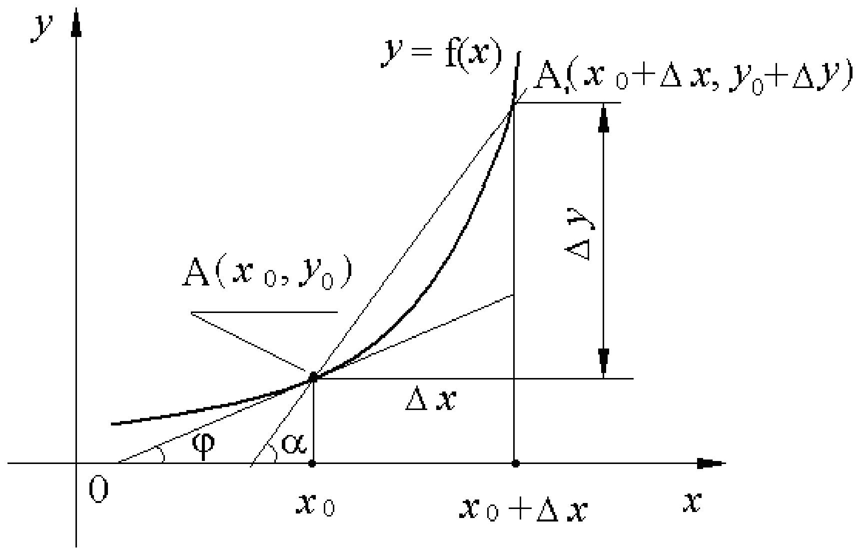


Рис. 13.1

Пусть дана непрерывная кривая $y=f\left(x\right)$. Необходимо найти тангенс угла наклона касательной к этой кривой в точке $A\left(x_0; y_0\right)$.

Определим понятие касательной к кривой.

Дадим аргументу x_0 приращение Δx и перейдем на кривой $y=f\left(x\right)$ от точки $A\left(x_0; y_0\right)$ к точке $A_1\left(x_0+\Delta x; y_0+\Delta y\right)$.

Проведем секущую AA_1. Когда A_1 будет перемещаться вдоль кривой к точке A, секущая будет вращаться вокруг точки A и приближаться к некоторой прямой с углом наклона φ. Эту прямую и называют касательной.

Касательной к кривой $y=f\left(x\right)$ в точке $A\left(x_0; y_0\right)$ называют предельное положение секущей AA_1 при приближении точки A_1 к точке A, то есть при $\Delta x \to 0$.

Тангенс угла наклона секущей может быть найден из прямоугольного треугольника как отношение противолежащего катета к прилежащему:

$$tg\alpha = \frac{\Delta y}{\Delta x}.$$

Тогда тангенс угла наклона касательной

$$tg\phi = \lim_{\Delta x \to 0} tg\alpha = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}.$$

Задача о скорости прямолинейного движения материальной точки, если известна функция пути $S = S(t)$.

Рассмотрим некоторое прямолинейное движение. Каждому значению времени t соответствует определенное значение пройденного пути S, то есть задана функция с помощью уравнения движения $S = S(t)$.

К моменту времени $t + \Delta t$ пройденный путь равен $S(t + \Delta t)$. За промежуток времени Δt пройденный путь составит $\Delta S = S(t + \Delta t) - S(t)$. Средняя скорость на промежутке ΔS составит:

$$v_{cp} = \frac{\Delta S}{\Delta t}.$$

Чем меньше Δt, тем лучше средняя скорость характеризует движение точки в момент времени t. Поэтому *скоростью точки* в момент времени t называют предел средней скорости за промежуток от t до $t + \Delta t$, когда $\Delta t \to 0$:

$$v(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta S}{\Delta t}.$$

Итак, рассматривая различные по характеру задачи, пришли к пределу одного вида $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$. Этот предел используется в различных областях науки.

Поэтому ему дали отдельное название – *производная*.

Дадим общее определение производной.

Пусть функция $y = f(x)$ определена на множестве $X = (a;b)$. Зададим значение аргумента $x = x_0$. Получим приращение аргумента Δx, тогда соответствующее приращение функции будет

$$\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0).$$

Производной функции $y = f(x)$ в точке $x = x_0$ называется предел отношения приращения функции Δy в этой точке к приращению аргумента Δx, когда приращение аргумента стремится к нулю произвольным способом.

То есть:

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}. \qquad (13.1)$$

Процесс нахождения производной называется **дифференцированием функции.**

Если функция имеет производную в точке x_0, то она называется **дифференцируемой в этой точке**.

Производная в данной точке – это число.

Если производная существует в каждой точке множества X, то функция **дифференцируема на множестве.** При этом производная изменяется вместе со значением x, то есть является функцией аргумента x.

Для производной функции применяют разные обозначения. Например: $y', y'_x, \dfrac{dy}{dx}, \dfrac{df(x)}{dx}$.

Анализируя определение производной функции $f(x)$ в некоторой точке x, получим общий порядок нахождения производной, а именно:

1) придаем аргументу x приращение Δx и находим соответствующее приращение функции $\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$;

2) делим приращение функции на приращение аргумента, то есть находим отношение приращений:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x};$$

3) находим предел этого отношения, то есть искомую производную:

$$f'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}.$$

Пример 13.1. Найти по определению производные функций:

а) $y=\sin x$, $x\in R$;

1) $\Delta y=f(x+\Delta x)-f(x)=\sin(x+\Delta x)-\sin x$;

2) $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=\dfrac{\sin(x+\Delta x)-\sin x}{\Delta x}$;

3) $$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\sin(x+\Delta x)-\sin x}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{2\sin\frac{\Delta x}{2}\cos\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right)}{\Delta x}=$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\sin\frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}}\cdot\lim_{\Delta x\to 0}\cos\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right)=\cos x;$$

б) $y=\ln x$;

1) $\Delta y=\ln(x+\Delta x)-\ln x$;

2) $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=\dfrac{\ln(x+\Delta x)-\ln x}{\Delta x}$;

3) $$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\ln\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\ln\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)^{\frac{1}{\Delta x}}=$$

$$=\ln\lim_{\Delta x\to 0}\left(\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)^{\frac{x}{\Delta x}}\right)^{\frac{1}{x}}=\ln e^{\frac{1}{x}}=\frac{1}{x};$$

в) $y=a^{x}$;

1) $\Delta y=a^{x+\Delta x}-a^{x}$;

2) $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=\dfrac{a^{x+\Delta x}-a^{x}}{\Delta x}$;

3) $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{a^{x+\Delta x}-a^{x}}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{a^{x}\left(a^{\Delta x}-1\right)}{\Delta x}=a^{x}\ln a$.

Теорема 1 (*о непрерывности дифференцируемой функции*). Если функция $y=f(x)$ дифференцируема в точке x_0, то она непрерывна в этой точке.

Доказательство.

Пусть функция $f(x)$ имеет производную $f'(x_0)$ в точке x_0.

То есть:

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=f'(x_0).$$

По критерию существования предела имеем:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=f'(x_0)+\alpha(x,\Delta x),$$

где $\alpha(x,\Delta x)$ – бесконечно малая при $\Delta x\to 0$.

Следовательно, $\Delta y=f'(x_0)\Delta x+\alpha(x;\Delta x)\Delta x$ и, учитывая арифметические свойства пределов и бесконечно малых, получаем: $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\Delta y=0$. Это значит, что $y=f(x)$ непрерывна в точке x_0.

Обратное к теореме 1 утверждение вообще может и не выполняться. То есть из непрерывности функции не вытекает дифференцируемость $(y=|x|)$.

Геометрический смысл производной. *Для функции* $y=f(x)$ *ее производная* $y'=f'(x)$ *для каждого значения* x *равна угловому коэффициенту касательной в соответствующей точке.*

Уравнение касательной к кривой в точке $A(x_0;y_0)$:

$$y-y_0=k(x-x_0).$$

Угловой коэффициент касательной: $k=\operatorname{tg}\varphi=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$, то есть

$$k=f'(x_0).$$

Отсюда *уравнение касательной* имеет вид:

$$y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0), \tag{13.2}$$

а *нормали* (перпендикуляра к касательной):

$$y - f(x_0) = \frac{1}{f'(x_0)}(x - x_0). \tag{13.3}$$

Если касательную к кривой в некоторой точке провести невозможно, то это означает, что функция недифференцируема в этой точке.

Механический смысл производной. *Для функции $y = f(x)$, меняющейся со временем x, производная $y' = f'(x_0)$ есть скорость изменения y в момент x_0.*

Если термин «скорость» понимать в более общем смысле, то производную можно трактовать как скорость изменения функции $y = f(x)$ по переменной x, независимо от того, какой процесс эта функция описывает.

Экономический смысл производной. *Производная выражает предельные расходы производства и характеризует приблизительно дополнительные расходы на производство единицы дополнительной продукции.*

Пусть предприятие производит однородную продукцию. Тогда расходы предприятия являются функцией объема производства $y = f(x)$. Если количество продукции изменилось на Δx, тогда расходы производства также изменятся на $\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$.

Следовательно, равенство $\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \dfrac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$ – это среднее приращение расходов производства на единицу продукции. Если в этом равенстве перейти к пределу:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = f'(x),$$

то получим *предельные расходы производства* при данном объеме производства x.

Рассмотрим зависимость себестоимости произведенной продукции от ее объема. Тогда *предельная себестоимость* характеризует отношение приращения себестоимости к приращению объема продукции при малом изменении продукции.

Пусть дана функция спроса от цены товара. Ее производная приблизительно равна увеличению спроса при увеличении цены на одну единицу. При повышении цены спрос уменьшается, а абсолютное значение производной показывает *уменьшение спроса* со стороны покупателей при повышении цены товара за единицу.

Применение дифференциального исчисления к исследованию экономических объектов и процессов на основе анализа этих предельных величин получило название *предельного (маржинального) анализа*. Суть маржинального анализа заключается в анализе соотношения объема продаж (выпуска продукции), себестоимости и прибыли на основе прогнозирования уровня этих величин при заданных ограничениях.

Предельные величины характеризуют не состояние (как суммарная или средняя величины), а процесс изменения экономического объекта. Таким образом, *производная выступает как скорость изменения некоторого экономического объекта (процесса) во времени или относительно другого исследуемого фактора.*

13.2. Производные элементарных функций. Производная обратной функции. Таблица производных. Правила вычисления производных. Производная сложной функции

Определение производной используется для практического вычисления табличных производных функций.

Если функция, производную которой нужно найти, представляет из себя комбинацию элементарных функция, то для вычисления производных применяются таблицы производных элементарных функций и правила дифференцирования, важнейшие из которых приведены ниже.

Пусть функции $u\ x$ и $\upsilon\ x$ имеют производные в некоторой точке x, тогда в той же точке:

1) $(u \pm \upsilon)' = u' \pm \upsilon'$ – производная суммы (разности) равнв сумме (разности) производных;

2) $(u\upsilon)' = u'\upsilon + \upsilon' u$ – правило дифференцирования произведения функций;

следствие из 2): постоянный множитель выносится за знак производной $(cu)' = cu', c = const$;

3) $\left(\dfrac{u}{\upsilon}\right)' = \dfrac{u'\upsilon - \upsilon' u}{\upsilon^2}$ $\upsilon(x) \neq 0$ – правило дифференцирования частного функций.

Пример 13.2. Найти производные функций.

Решение:

а) $y = \operatorname{tg} x$;

$$y = \frac{\sin x}{\cos x};\quad y = \frac{(\sin x)' \cos x - (\cos x)' \sin x}{\cos^2 x} = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}.$$

Следовательно $(\operatorname{tg} x)' = \dfrac{1}{\cos^2 x}$;

б) $y = \operatorname{ctg} x$;

$$y = \frac{\cos x}{\sin x};\quad y' = \frac{(\cos x)' \sin x - (\sin x)' \cos x}{\sin^2 x} = \frac{-\sin^2 x - \cos^2 x}{\sin^2 x} = -\frac{1}{\sin^2 x}.$$

Следовательно $(\operatorname{ctg} x)' = \dfrac{-1}{\sin^2 x}$;

в) $y = 2^x \ln x$;

$$y' = (2^x)' \ln x + 2^x (\ln x)' = 2^x \ln 2 \cdot \ln x + 2^x \frac{1}{x}.$$

Следовательно, $(2^x \ln x)' = 2^x \ln 2 \cdot \ln x + 2^x \dfrac{1}{x}$.

Таким образом, производную любой элементарной функции можно найти, если пользоваться правилами и таблицей производных основных элементарных функций.

Таблица производных

1. $y=c$	$y'=0$.
2. $y=x^{\alpha}$ $(\alpha\in R)$	$y'=\alpha x^{\alpha-1}$.
3. $y=a^{x}$ $(a>0; a\neq 1)$	$y'=a^{x}\ln a$.
4. $y=\ln x$ $(x>0)$	$y'=\frac{1}{x}$.
5. $y=\sin x$	$y'=\cos x$.
6. $y=\cos x$	$y'=-\sin x$.
7. $y=\operatorname{tg} x$	$y'=\frac{1}{\cos^2 x}$.
8. $y=\operatorname{ctg} x$	$y'=-\frac{1}{\sin^2 x}$.
9. $y=\arcsin x$	$y'=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.
10. $y=\arccos x$	$y'=-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.
11. $y=\operatorname{arctg} x$	$y'=\frac{1}{1+x^2}$.
12. $y=\operatorname{arcctg} x$	$y'=-\frac{1}{1+x^2}$.

Теорема 2 (*производная сложной функции*). Если функция $y=f(u)$ при некотором значении u имеет производную $y'_u=f'_u(u)$, а функция $u=\varphi(x)$ имеет производную $u'_x=\varphi'_x(x)$ в точке x, которой со-

ответствует значение u, то производная сложной функции $y=f(\varphi(x))$ определяется по формуле:

$$\left(f(\varphi(x))\right)'_x=f'_u(u)\cdot\varphi'_x(x)$$

или

$$y'_x=y'_u\cdot u'_x. \qquad (13.4)$$

Доказательство.

По условию теоремы функция $y=f(u)$ имеет производную в точке u, то есть существует

$$\lim_{\Delta u\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta u}=y'_u,$$

откуда по теореме о пределе имеем:

$$\frac{\Delta y}{\Delta u}=y'_u+\alpha(u,\Delta u),$$

где $\alpha(u,\Delta u)$ – бесконечно мала при $\Delta u\to 0$.

Тогда

$$\Delta y=y'_u\cdot\Delta u+\alpha(u,\Delta u)\Delta u$$

или

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=y'_u\cdot\frac{\Delta u}{\Delta x}+\frac{\Delta u}{\Delta x}\alpha(u,\Delta u).$$

При $\Delta x\to 0$ и $\Delta u\to 0$ (как непрерывная функция, которая имеет производную).

Следовательно, найдем предел $\frac{\Delta y}{\Delta x}$:

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}y'_u\cdot\frac{\Delta u}{\Delta x}+\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta u}{\Delta x}\cdot\alpha(u,\Delta u).$$

Получаем правило для нахождения производной сложной функции:

$$y'_x=y'_u\cdot u'_x.$$

Пример 13.3. Найти производную.

Решение:

а) $y=\cos^3 x$.

Если $u=\cos x$, тогда $y=u^3$.

По таблице производных получим:

$$y'_x=\left(u^3\right)'_u\cdot\left(\cos x\right)'_x=3u^2\left(-\sin x\right)=-3\cos^2 x\sin x;$$

б) $y=\cos x^3\ \left(u=x^3;\ f\left(u\right)=\cos u\right)$.

Следовательно, $y'=\left(-\sin x^3\right)3x^2$.

Случай сложной функции как суперпозиции нескольких исчерпывается последовательным применением приведенного правила.

Для функции:

$$y=f\left(u\right),\ u=\varphi\left(\upsilon\right),\ \upsilon=\psi\left(x\right);$$

$$y'_x=y'_u\cdot u'_x=y'_u\cdot u'_\upsilon\cdot\upsilon'_x.$$

Пример 13.4. Найти производную $y=\operatorname{arctg}^4 2x$.

Решение.

$$y'=4\operatorname{arctg}^3 2x\cdot\frac{1}{1+4x^2}\cdot 2.$$

Теорема о дифференцировании сложной функции дает возможность доказать *правила вычисления производных для некоторых функций.*

1. **Производная обратной функции**. Если функция $y=f\left(x\right)$ имеет обратную $x=\varphi\left(y\right)$ и существует производная, отличающаяся от нуля y'_x в некоторой точке x, то $x'_y=\dfrac{1}{y'_x}$.

Таким образом,

$$x'_y=\frac{1}{y'_x}\ \text{и}\ y'_x=\frac{1}{x'_y}\ \left(x'_y\neq 0\right). \qquad (13.5)$$

Пример 13.5. Найти производные:

а) $y = \operatorname{arctg} x$.

Считая, что $x = \operatorname{tg} y$, $x'_y = \dfrac{1}{\cos^2 y}$, или $y'_x = \cos^2 y = \dfrac{1}{1 + tg^2 y} = \dfrac{1}{1 + x^2}$.

Следовательно, $\left(\operatorname{arctg} x\right)' = \dfrac{1}{1 + x^2}$;

б) $y = \arcsin x$.

Тогда, $x = \sin y$, $x'_y = \cos y$, $y'_x = \dfrac{1}{\cos y} = \dfrac{1}{\sqrt{1 - \sin^2 y}} = \dfrac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$.

2. **Производная неявной функции**. Функция определяется нерешенным относительно y уравнением:

$$F\left(x, y\right) = 0, \text{ или } F\left(x, f\left(x\right)\right) \equiv 0.$$

Для нахождения производной от y нет необходимости решать уравнение $F\left(x, y\right) = 0$ относительно y (не всегда это можно сделать), достаточно рассмотреть $F\left(x, f\left(x\right)\right) \equiv 0$ как сложную функцию от x, но с учетом того, что $F'_x \equiv 0$, найти y' из этого тождества.

Пример 13.6. Найти производную $x^2 + 2y^2 + 3xy + 5x - 4y - 10 = 0$.

Решение.

Найдем производную по x обеих частей уравнения, учитывая, что переменная y – функция от x. Следовательно,

$$2x + 4y \cdot y' + 3\left(y + xy'\right) + 5 - 4y' = 0.$$

Решая это уравнение относительно y' имеем:

$$y' = \frac{-2x - 3y - 5}{4y + 3x - 4}.$$

Для вычисления производной в некоторой точке $x = x_0$ нужно найти и соответствующее значение функции y_0.

3. **Производная степенно-показательной функции**. Функция, которая имеет вид $y=\left(u(x)\right)^{\upsilon(x)}$, называется степенно-показательной. Для вычисления производной этой функции найдем: $\ln y=\upsilon(x)\cdot\ln u(x)$ (*логарифмическое дифференцирование*). Полученная функция будет неявной и к ней применим правило дифференцирования неявной функции.

Следовательно,

$$\frac{1}{y}\cdot y'=\upsilon'\ln u+\upsilon\cdot\frac{1}{u}\cdot u'.$$

Из этого равенства получим:

$$y'=u^{\upsilon}\left(\upsilon'\ln u+\upsilon\cdot\frac{1}{u}\cdot u'\right). \tag{13.6}$$

Пример 13.7. Найти производную функции $y=\left(\operatorname{tg}x\right)^{x}$.

Решение.

Согласно правилу логарифмического дифференцирования получим:

$$\ln y=x\ln\operatorname{tg}x$$

или

$$\frac{1}{y}\cdot y'=\ln\operatorname{tg}x+x\cdot\frac{1}{\operatorname{tg}x}\cdot\frac{1}{\cos^2 x}.$$

Откуда

$$y'=\left(\operatorname{tg}x\right)^{x}\left(\ln\operatorname{tg}x+x\cdot\frac{1}{\operatorname{tg}x}\cdot\frac{1}{\cos^2 x}\right)=\left(\operatorname{tg}x\right)^{x}\left(\ln\operatorname{tg}x+x\frac{\operatorname{ctg}x}{\cos^2 x}\right).$$

4. **Производная функции, заданной параметрически**. Функцию $y=f(x)$ называют заданной в параметрической форме, если она определяется с помощью двух функций $x=\varphi(t)$, $y=\psi(t)$ от вспомогательной переменной t (параметра), а именно:

$$\begin{cases}x=\varphi(t)\\ y=\psi(t)\end{cases}.$$

Параметрическую функцию можно дифференцировать как неявную, не прибегая к ее явному заданию.

Теорема 3. Производная функции, которая задается уравнениями $x=\varphi(t)$, $y=\psi(t)$ равна:

$$y'_x=\frac{y'_t}{x'_t}=\frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}, \qquad (13.7)$$

если y и x имеют производные по аргументу t.

Доказательство.

Функцию y от x можно рассматривать как сложную функцию: $y=\psi(t)$, $t=g(x)$, то есть $y=\psi(g(x))$.

Тогда по правилу дифференцирования сложной функции:

$$y'_x=\psi'_t\cdot t'_x=y'_t\cdot\frac{1}{x'_t}=\frac{y'_t}{x'_t},\ \text{так как}\ (t'_x\cdot x'_t)=1.$$

Заметим, что $y=f(x)$ геометрически – некоторая линия, тогда равенства $x=\varphi(t)$; $y=\psi(t)$ называют параметрическими уравнениями линии.

Пример 13.8. Найти производную функции:

$$\begin{cases}x=R\cos t\\ y=R\sin t\end{cases}.$$

Решение.

Соответственно теореме: $y'_x=\dfrac{y'_t}{x'_t}$, то есть $y'_x=\dfrac{R\cos t}{-R\sin t}=-\operatorname{ctg}t$.

Геометрически, если исключить параметр t, получаем:

$$x^2+y^2=R^2.$$

То есть заданная параметрическая функция является параметрическим уравнением окружности радиуса R, t – угол между радиус-вектором точки окружности и положительным направлением оси Ox $(0\le t\le 2\pi)$.

Пример 13.9. Функция задана параметрическими уравнениями: $x=\arcsin t$, $y=\ln\left(1-t^2\right)$. Найти y'_x.

Решение.

По формуле $y_x' = \dfrac{y_t'}{x_t'}$ имеем:

$$y'_x=\frac{(\ln(1-t^2))'}{(\arcsin t)'}=\frac{-\dfrac{2t}{1-t^2}}{\dfrac{1}{\sqrt{1-t^2}}}=-\frac{2t}{\sqrt{1-t^2}}.$$

13.3. Производные высших порядков

Если функция $y=f(x)$ имеет производную $f'(x)$ на некотором множестве X, то производная от этой производной называется **производной второго порядка** от функции $y=f(x)$.

То есть:

$$f''(x)=\left(f'(x)\right)'=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f'(x+\Delta x)-f'(x)}{\Delta x}.$$

Таким образом, чтобы найти n**-ю производную от функции** $y=f(x)$, необходимо найти первую производную от $(n-1)$-й производной функции.

Следовательно,

$$f^{(n)}(x)=\left(f^{(n-1)}(x)\right)'. \tag{13.8}$$

То есть для нахождения n-й производной нужно вычислить:

$$f'(x),\ f''(x),\ldots,f^{(n-1)}(x).$$

Пример 13.10. Найти производную второго порядка y'' от функции $y=\ln(x+\sqrt{1+x^2})$.

Решение.

Сначала находим y':

$$y'=\frac{1}{x+\sqrt{1+x^2}}\cdot(x+\sqrt{1+x^2})'=\frac{1+\dfrac{2x}{2\sqrt{1+x^2}}}{x+\sqrt{1+x^2}}=$$

$$=\frac{\sqrt{1+x^2}+x}{\sqrt{1+x^2}(x+\sqrt{1+x^2})}=\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}=(1+x^2)^{-\frac{1}{2}}.$$

$$y''=((1+x^2)^{-\frac{1}{2}})'=-\frac{1}{2}(1+x^2)^{-\frac{3}{2}}\cdot 2x=\frac{-x}{\sqrt{(1+x^2)^3}}.$$

Физический смысл производной второго порядка: если $S=S(t)$, тогда $S'(t)=\upsilon(t)$ – это скорость в точке t, а $S''(t)=\upsilon'(t)$ – это ускорение движения в момент времени t.

Экономический смысл производной второго порядка: вторая производная от производственной функции $y=f(x)$ по переменной x есть скорость изменения предельных расходов (уменьшение или увеличение) в зависимости от объема производства x.

Вопросы для самодиагностики

1. Что такое производная функции?
2. Каков геометрический смысл производной?
3. Как записать уравнение касательной к кривой в заданной точке?
4. Какой вид имеет уравнение нормали к кривой в заданной точке?
5. Каков механический смысл производной?
6. Запишите таблицу производных для основных функций.
7. Какие основные правила дифференцирования?
8. Как найти производную сложной функции $y=f(\varphi(x))$?
9. Как найти производную функций, которая задана неявно и параметрически?
10. Как найти производную от степенно-показательной функции?
11. В чем заключается физический и экономический смысл производной второго порядка?

Упражнения

13.1. Пользуясь определением производной, найти производные функций:

1) $y = x^2$; 2) $y = \frac{1}{x}$; 3) $y = \sin^2 x$.

Найти производные функции, пользуясь правилами дифференцирования и таблицей производных:

13.2. $y = \frac{5}{x} - \frac{4}{x^2} + \frac{5}{x^3} - \frac{6}{11x^4}$.

13.3. $y = x^{\frac{3}{2}} - 2x^{\frac{2}{3}} + 3x^{\frac{1}{3}}$.

13.4. $y = 3\sqrt{x} + 5x\sqrt[3]{x} - \sqrt[4]{x} + \frac{1}{x}$.

13.5. $y = \frac{x^2 + 2x}{3 - 4x}$.

13.6. $y = \frac{x^2 + x - 1}{x^2 + 1}$.

13.7. $y = \sqrt[5]{(2x^2 - 4x^3)^4}$.

13.8. $y = \frac{\sqrt{x}}{\sin\ 2x + 1}$.

13.9. $y = tg^2 x - ctg\ \ x^2$.

13.10. $y = \operatorname{arctg} x^2$.

13.11. $y = \arccos \frac{1}{\sqrt{x}}$.

Найти производную второго порядка:

13.12. $y = x^4 - 4x^2 + 5x - 3$.

13.13. $y = \sin^2 3x$.

Найти производные от функций, которые заданы неявно:

13.14. $y^3 - x^3 + x^2y^2 = 0$.

13.15. $x\cos y = y\sin x$.

13.16. $e^x + e^y - e^{xy} = 1$.

13.17. $2y\ln y = x$.

Найти вторую производную от неявной функции:

13.18. $y = x\ln xy$.

13.19. $x^3 + y^3 - 3y + 3 = 0$.

Найти производные первого и второго порядков от функций, заданных параметрически:

13.20. $x=\ln t,\ y=t^2.$ **13.21.** $x=t^3+3t^2,\ y=3t^2-7.$

Применяя метод логарифмического дифференцирования, найти производные для заданных функций:

13.22. $y=(x+1)(2x+1)(3x+1)$. **13.23.** $y=(3x-4)^4(2x+7)^5(x-1)^6.$

13.24. $y=\dfrac{(x-2)^3\sqrt{5x+1}}{(x+1)^4}.$ **13.25.** $y=x^{x+1}.$

14. Дифференциал функции одной переменной

14.1. Определение дифференциала. Дифференциал суммы, произведения и частного. Дифференциалы высших порядков

Пусть функция $y=f(x)$ имеет в точке x конечную производную $f'(x)\neq 0$, то есть существует конечный предел $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=f'(x)\neq 0$.

Тогда:

$$\Delta y=f'(x)\cdot\Delta x+\alpha(x,\Delta x)\cdot\Delta x.$$

Следовательно, приращение функции в точке x равно сумме двух бесконечно малых.

Первое слагаемое бесконечно малое и линейное относительно приращения аргумента Δx.

Второе слагаемое бесконечно малое более высокого порядка малости, чем Δx:

$$\left(\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\alpha(x,\Delta x)\cdot\Delta x}{\Delta x}=0\right).$$

Говорят, что величина $f'(x)\cdot\Delta x$ составляет главную часть приращения функции $y=f(x)$.

Дифференциалом функции $y=f(x)$ называется линейная относительно Δx величина $f'(x)\cdot\Delta x$, составляющая главную часть приращения функции $y=f(x)$ (обозначается dy):

$$dy=f'(x)\cdot\Delta x,$$

или

$$dy=f'(x)\,dx\quad(\Delta x=dx; dx=x'\Delta x). \tag{14.1}$$

Тогда $f'(x)=\dfrac{dy}{dx}$ (обозначение производной как частного дифференциала функции $y=f(x)$ и аргумента x).

Рассмотрим *геометрический смысл дифференциала* (рис. 14.1).

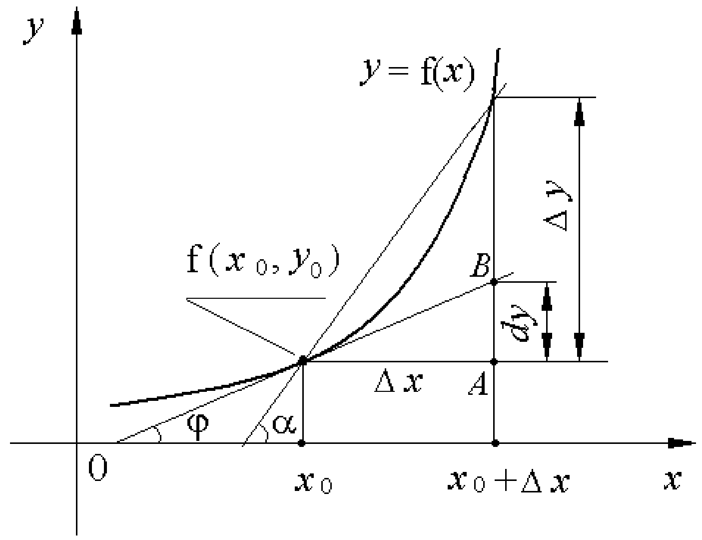


Рис. 14.1

Из геометрического смысла производной:

$$f'(x)=\operatorname{tg}\varphi,\ AB=\operatorname{tg}\varphi\Delta x=f'(x)\Delta x=dy.$$

Таким образом, геометрически дифференциал dy функции $y=f(x)$ в данной точке изображает приращение ординаты касательной к графику функции в этой точке, когда x получает приращение Δx.

Пример 14.1. Вычислить дифференциал функции $y=x^2-2x-3$ в точке $x=2$, $\Delta x=0{,}1$.

Решение.

По определению:

$$dy = f'(x)\,\Delta x,$$

или

$$dy = (2x - x)\cdot\Delta x;\ dy = (2\cdot 2 - 2)\cdot 0{,}1 = 0{,}2.$$

Сравним dy с приращением функции Δy:

$$\Delta y = (x+\Delta x)^2 - 2(x+\Delta x) - 3 - x^2 + 2x + 3 = (2x-2)\Delta x + (\Delta x)^2.$$

При $\Delta x = 0{,}1$, $\Delta y = 0{,}2 + 0{,}01 = 0{,}21$.

То есть $\Delta y > dy$.

Так как дифференциал dy по форме отличается от производной лишь множителем dx, то *свойства дифференциала* аналогичны свойствам производных, а именно:

1) $dc = 0$, $c = const$;

2) $d(u \pm \upsilon) = du \pm d\upsilon$;

3) $d(u\upsilon) = \upsilon du + u d\upsilon$ $(d(cu) = c du)$;

4) $d\left(\dfrac{u}{\upsilon}\right) = \dfrac{1}{\upsilon^2}(\upsilon du - u d\upsilon)$;

5) инвариантность формы дифференциала.

Пусть функция $y = f(x)$ имеет производную в точке x, тогда **дифференциалом первого порядка** является выражение вида:

$$dy = f'(x)\,dx.$$

Пример 14.2. Найти дифференциал функции $y = \mathrm{arctg}^3(\mathrm{e}^{3x})$.

Решение.

По формуле $dy = y'dx$ имеем:

$$dy = 3\mathrm{arctg}^2(e^{3x})\cdot\frac{1}{1+e^{6x}}\cdot e^{3x}\cdot 3dx = \frac{9e^{3x}}{1+e^{6x}}\mathrm{arctg}^2(e^{3x})dx.$$

Если допустить, что dx имеет любое, но фиксированное значение, то dy также, как и производная, является функцией переменной x.

То есть можно найти его дифференциал, а именно:

$$d(dy) = d(f'(x)dx) = (f'(x)dx)' dx = f''(x)(dx)^2,$$

или

$$d^2y = f''(x)dx^2. \qquad (14.2)$$

Следовательно, *дифференциалом второго порядка функции* $y = f(x)$ называется дифференциал от дифференциала первого порядка этой функции. Аналогично *дифференциалом n-го порядка* $d^n y$ называется дифференциал от дифференциала $(n-1)$-го порядка, то есть $d^n y = d(d^{n-1}y)$.

Таким образом, в общем случае, имеем:

$$d^n y = f^{(n)}(x)dx^n. \qquad (14.3)$$

Из последней формулы найдем значение производной n-го порядка как отношение дифференциала n-го порядка к n-й степени дифференциала независимой переменной:

$$f^{(n)}(x) = \frac{d^n y}{dx^n}. \qquad (14.4)$$

14.2. Применение дифференциала в приближенных вычислениях

Если функция $y = f(x)$ в точке x имеет конечную производную, то

$$\Delta y = f'(x)\Delta x + \alpha \cdot \Delta x,$$

где $\alpha(x, \Delta x) \to 0$, при $\Delta x \to 0$.

Пользуясь обозначением дифференциала, запишем:

$$\Delta y = dy + \alpha \cdot \Delta x.$$

Отсюда $\Delta y - dy = \alpha \cdot \Delta x$.

То есть чем меньше приращение аргумента Δx, тем меньше дифференциал функции отличается от приращения функции.

Следовательно, для достаточно малых Δx можно написать приближенное равенство:

$$\Delta y \approx dy;\ \Delta = |\Delta y - dy| \text{ – абсолютная погрешность,}$$

и

$$\delta = \left|\frac{\Delta y - dy}{\Delta y}\right| \text{ – относительная погрешность.}$$

Таким образом,

$$f(x+\Delta x) - f(x) \approx f'(x)\Delta x$$

или

$$f(x+\Delta x) \approx f(x) + f'(x)\Delta x. \qquad (14.5)$$

Заметим, что в практических задачах вычисление приращения функции значительно сложнее, чем вычисление дифференциала. Поэтому если Δx – малые, дифференциал можно приближенно считать приращением функции.

Пример 14.3. Вычислить приращение и дифференциал функции

$$y = x^3 - 2x^2 + 3x - 4$$

при переходе от $x = 2$ к $x = 2{,}02$.

Решение.

Имеем $y' = 3x^2 - 4x + 3$, следовательно $dy = (3x^2 - 4x + 3)\Delta x$.

Найдем dy в точке $x = 2$ при $\Delta x = 0{,}02$.

Таким образом:

$$dy\Big|_{\substack{x=2 \\ \Delta x = 0{,}02}} = 7 \cdot 0{,}02 = 0{,}14;$$

$$\Delta y = (x+\Delta x)^3 - 2(x+\Delta x)^2 + 3(x+\Delta x) - 4 - x^3 + 2x^2 + 3x - 4,$$

$$\Delta y\Big|_{\substack{x=2 \\ \Delta x = 0{,}02}} = 0{,}14160.$$

Следовательно, абсолютная ошибка $\Delta = |\Delta y - dy| = 0,0016$,

относительная ошибка $\delta = \left|\dfrac{\Delta y - dy}{\Delta y}\right| = 0,011$.

Пример 14.4. Вычислить приближенно $\sqrt[3]{27,36}$.

Решение.

Рассмотрим функцию $y = \sqrt[3]{x}$ и вычислим ее значение при $x = 27,36$.

Пусть $x_0 + \Delta x = 27,36$, $x_0 = 27$, $\Delta x = 0,36$. Тогда $\sqrt[3]{x_0} = \sqrt[3]{27} = 3$,

$$y' = \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}, \text{ а } y'(x_0) = y'(3) = \frac{1}{3\sqrt[3]{27^2}} = \frac{1}{27}.$$

По формуле $y(x_0 + \Delta x) \approx y(x_0) + y'(x_0)\Delta x$ имеем:

$$\sqrt[3]{27,36} \approx \sqrt[3]{27} + \frac{1}{27} \cdot 0,36 \approx 3,013.$$

14.3. Использование производной для анализа некоторых экономических показателей

Предельные величины в экономической литературе называются маржинальными. Рассмотрим использование производной для анализа некоторых экономических показателей.

1. Расходы производства.

Если расходы производства рассматривать как функцию количества изготовляемой продукции x, то есть $y = f(x)$, то $y' = f'(x)$ – предельные расходы, которые характеризуют приращение расходов на производство дополнительной единицы продукции, а $y_1(x) = f(x)/x$ – средние расходы, которые являются расходами на единицу выпуска продукции.

2. Производительность труда.

Пусть $y = f(t)$ – это объем изготовленной продукции за время t. Тогда $y' = f'(t)$ – это производительность труда в момент времени t.

3. Функция потребления и сбережения.

Пусть x – национальный доход, $C(x)$ – функция потребления (часть дохода, который тратится), $S(x)$ – функция сбережения (часть дохода, который экономится), тогда:

$$x = C(x) + S(x).$$

Дифференцируя обе части равенства, получим:

$$\frac{dC}{dx} + \frac{dS}{dx} = 1, \tag{14.6}$$

где $\frac{dC}{dx}$ – предельное стремление к потреблению; $\frac{dS}{dx}$ – предельное стремление к сбережению.

Для исследования экономических процессов и решения прикладных задач часто используют понятие эластичности функции.

Эластичностью функции $E_x(y)$ в точке x называется предел отношения относительного приращения функции в данной точке к относительному приращению аргумента x, если $\Delta x \to 0$:

$$E_x(y) = \lim_{\Delta x \to 0}\left(\frac{\Delta y}{y} : \frac{\Delta x}{x}\right) = \frac{x}{y}\lim_{\Delta x \to 0}\left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right) = \frac{x}{y} \cdot y'. \tag{14.7}$$

Эластичность функции приближенно показывает, на сколько процентов изменяется функция $y = f(x)$ при изменении аргумента x на 1 %. Если $|E_x(y)| > 1$ – функция является эластичной, при $|E_x(y)| < 1$ – неэластичной, при $|E_x(y)| = 1$ – функция считается нейтральной.

Основные свойства эластичности функции:

1. Эластичность – безразмерная величина, значение которой не зависит от того, в каких единицах измерены величины x и y.

2. Эластичность функции равна произведению независимой переменной на темп изменения функции:

$$E_x(y) = x \cdot T_y, \quad T_y = (\ln y)' = \frac{y'}{y}.$$

3. Эластичность произведения и частного:

$$E_x(uv)=E_x(u)+E_x(v), \quad E_x\left(\frac{u}{v}\right)=E_x(u)-E_x(v).$$

4. $E_x(y)=\dfrac{1}{E_y(x)}$ – эластичности взаимно обратных функций являются взаимно обратными функциями.

Геометрический смысл эластичности функции

Из рис.14.2 видно, что $\Delta MBN \sim \Delta MAC$.

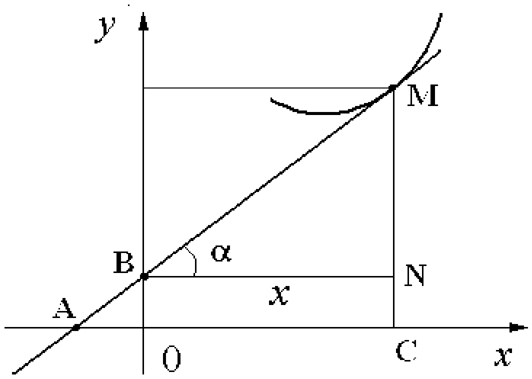


Рис. 14.2

Тогда

$$\frac{MN}{MC}=\frac{MB}{MA}, \quad MN=x\,\mathrm{tg}\,\alpha, \; MC=y, \; \mathrm{tg}\,\alpha=y', \; \frac{x}{y}y'=\frac{MB}{MA},$$

то есть

$$\frac{MB}{MA}=E_x\;\; y\;\; .$$

Таким образом, эластичность (по абсолютной величине) равна отношению расстояний по касательной от данной точки графика функции к точкам ее пересечения с осями Oy и Ox соответственно.

Виды эластичности в экономике

Эластичность спроса по цене (прямая) показывает относительное изменение (в процентах) величины спроса при изменении цены на 1 % и характеризует чувствительность потребителей к изменению цен на продукцию.

Эластичность спроса по доходу характеризует относительное изменение величины спроса при изменении дохода потребителей на 1 %.

Перекрестная эластичность спроса по цене характеризует относительное изменение величины спроса на одно благо при изменении цены на другое благо (замещающее или дополняющее его в потреблении) на 1 %.

Ценовая эластичность ресурсов характеризует относительное изменение величины спроса на какой-либо ресурс при изменении цены этого ресурса на 1 %.

Эластичность замещения одного ресурса другим характеризует необходимое изменение величины одного ресурса при изменении количества другого ресурса на 1 % с тем, чтобы выпуск при этом не изменился.

Пример 14.5. Функция расходов производства продукции некоторой фирмы имеет вид:

$$y(x)=0.1x^3-1.2x^2+5x+250.$$

Найти предельные и средние расходы при $x=10$.

Решение.

Предельные расходы:

$$y'(x)=0.3x^2-2.4x+5; \quad y'(10)=30-24+5=11.$$

Средние расходы:

$$y_1(x)=\frac{0.1x^3-1.2x^2+5x+250}{x}=0.1x^2-1.2x \ +5+\frac{250}{x};\ y_1(10)=28.$$

Это значит, что при данном количестве изготовляемой продукции средние расходы на производство одной единицы продукции составляют 28 ден. ед., а увеличение объема на 1 единицу продукции при данном уровне производства обойдется фирме приблизительно в 11 ден. ед.

Пример 14.6. Объем производства зимней обуви может быть описан уравнением:

$$f\ \ t\ =\frac{1}{3}t^3-\frac{7}{2}t^2+6t+2100.$$

Вычислить производительность труда, скорость ее изменения:

а) в начале года ($t=0$); б) в середине года ($t=6$); в) в конце года ($t=12$).

Решение.

Производительность труда: $f'(t)=t^2-7t+6$ (ед./мес.), а скорость изменения производительности – $f''(t)$, или $f''(t)=2t-7$.

Следовательно, значение производительности труда и скорости ее изменения в данных точках будет:

$$
\begin{aligned}
&a)\ f'(0)=6,\ f''(0)=-7;\\
&б)\ f'(6)=0,\ \ f''(6)=5;\\
&в)\ f'(12)=6.6,\ f''(12)=16.
\end{aligned}
$$

Пример 14.7. Функция потребления некоторой страны имеет вид:

$$C(x)=15+0.25x+0.36x^{4/3},$$

где x – совокупный национальный доход (ден. ед.).

Найти:

а) предельное стремление к потреблению;

б) предельное стремление к сбережению, если национальный доход составляет 27 ден. ед.

Решение.

Предельное стремление к потреблению: $C'(x)=0.25+0.48x^{1/3}$, его значение $C'(27)=1.69.$ Предельное стремление к сбережению найдем из формулы:

$$\frac{dC}{dx}+\frac{dS}{dx}=1.$$

Следовательно,

$$
\begin{aligned}
&S'(x)=1-C'(x)=0.75-0.48x^{1/3};\\
&S'(27)=1-1.69=-0.69.
\end{aligned}
$$

Пример 14.8. Зависимость между себестоимостью единицы продукции в (тыс. грн) и выпуском продукции x (млн грн) выражается формулой $y=-0,6x+40$.

Найти эластичность себестоимости при выпуске продукции $x=60$ млн грн.

Решение.

$$E_x(y)=\frac{-0.6x}{-0.6x+40}=\frac{x}{x-240} \text{ при } x=60 \text{ млн. грн.}$$

$$E_x(y)=-0.33,$$

то есть при выпуске продукции на 60 млн грн увеличение его на 1 % приведет к снижению себестоимости на 0,33 %.

14.4. Основные теоремы дифференциального исчисления. Правило Лопиталя

Для исследования функций и построения их графиков фундаментальное значение имеют некоторые теоремы, которые являются теоретической основой для многих прикладных задач.

Теорема Ферма

Пусть функция $y=f(x)$, которая определена в интервале $(a;b)$ и в некоторой точке $c\in(a;b)$, принимает наибольшее (наименьшее) значение. Если в этой точке существует конечная производная, то она равна нулю.

Доказательство.

Пусть для определенности в точке c функция достигает наибольшего значения. Это значит, что для любого $x\in(a;b)$ выполняется условие $f(x)\le f(c)$.

Придадим аргументу x в точке c приращение Δx, получим приращение функции

$$\Delta y=f(c+\Delta x)-f(x), \quad c+\Delta x\in(a,;b)$$

или

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(c+\Delta x)-f(c)}{\Delta x}.$$

Числитель этой дроби $\Delta y\le 0$ $(f(x)\le f(c))$.

Следовательно, если $\Delta x<0$, то $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}\ge 0$, а если $\Delta x>0$, то $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}\le 0$. По условию теоремы в точке c существует производная, то есть существует предел:

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(c+\Delta x)-f(c)}{\Delta x}=f'(c),$$

который не зависит от того, как Δx стремится к нулю (слева или справа).

Если вычислить предел при $\Delta x\to +0$ и $\Delta x\to -0$ соответственно получим $f'(c)\le 0$, $f'(c)\ge 0$. Отсюда $f'(c)=0$.

В случае, когда функция $f(x)$ достигает в точке c наименьшего значения, теорема доказывается аналогично.

Геометрический смысл теоремы Ферма (рис. 14.3).

По теореме $f'(c)=0$, то есть касательная в точке $M(c;f(c))$ параллельна оси Ox.

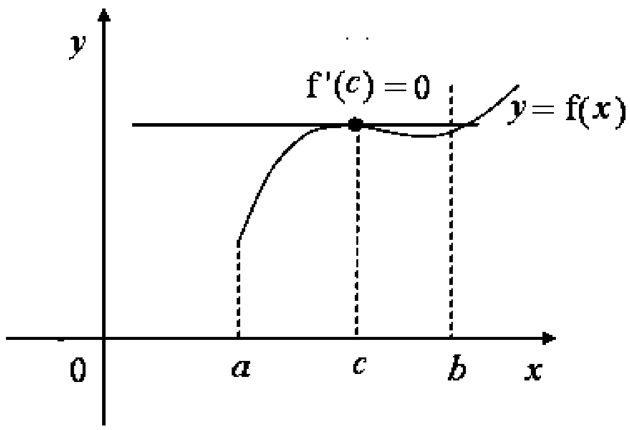


Рис. 14.3

Теорема Ролля

Если функция $f(x)$:

1) непрерывна на отрезке $[a;b]$;

2) имеет конечную производную в интервале $(a;b)$;

3) на концах отрезка принимает одинаковые значения, то есть $f(a)=f(b)$,

то в интервале $(a;b)$ найдется по крайней мере одна точка c, в которой $f'(c)=0$ (рис. 14.4).

Доказательство.

Непрерывная на сегменте функция достигает на этом сегменте наибольшего M и наименьшего m значений.

Рассмотрим два случая:

1. Пусть $M = m$, тогда $m \le f(x) \le M$. Отсюда для любого $x \in [a;b]$, $f(x) = m$, то есть $f(x) = \text{const}$ на сегменте $[a;b]$. Итак, $f'(x) = 0$ на этом сегменте и в качестве точки c можно брать любую точку сегмента $[a;b]$.

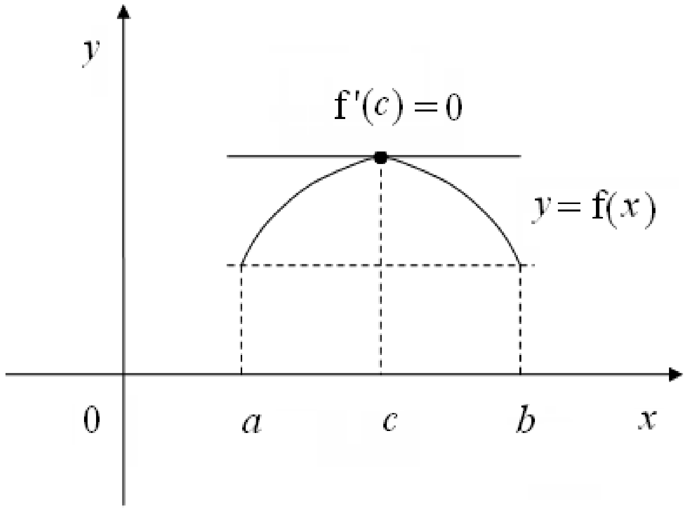


Рис.14.4

2. Если $M > m$, тогда хотя бы одно из значений M или m функция достигает во внутренней точке сегмента $[a;b]$. Тогда, по теореме Ферма в этой точке $f'(c) = 0$.

Теорема Лагранжа

Если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a;b]$ и имеет конечную производную на интервале $(a;b)$, то найдется по крайней мере одна такая точка $x = c$, $a < c < b$, в которой выполняется равенство:

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c), \tag{14.8}$$

или

$$f(b) - f(a) = (b - a) f'(c).$$

Доказательство.

Рассмотрим вспомогательную функцию

$$F(x) = f(x) - f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a).$$

Функция $F(x)$ удовлетворяет условиям теоремы Ролля:

1) непрерывна на $[a,b]$, как сумма непрерывных функций;

2) в каждой точке $(a;b)$ имеет конечную производную;

3) на концах сегмента $[a,b]$ принимает одинаковые значения: $F(a)=F(b)=0$.

Таким образом, на сегменте $[a,b]$ существует хотя бы одна точка $x=c$, в которой $F'(c)=0$.

Следовательно,

$$0=f'(c)-\frac{f(b)-f(a)}{b-a},$$

или

$$f'(c)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}.$$

Геометрический смысл теоремы Лагранжа (рис. 14.5): на кривой $y=f(x)$ всегда найдется по крайней мере одна точка, касательная в которой будет параллельна хорде, которая соединяет концы графика функции на $[a,b]$.

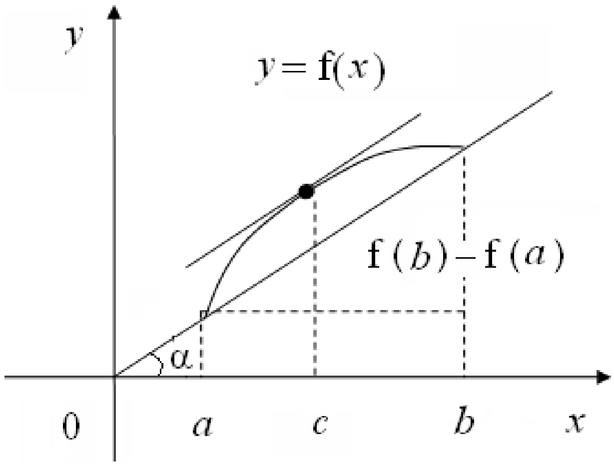


Рис. 14.5

Следствие. Приращение функции $f(x)$ в точке $x_0 \in (a;b)$ равно приращению аргумента, умноженному на производную в некоторой точке c, которая находится между x_0 и $x_0+\Delta x$:

$$\Delta f(x_0)=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)=f'(c)\cdot\Delta x.$$

Если в теореме Лагранжа: $a=x_0$, а $b=x_0+\Delta x$, то точка $c\in\left(x_0;x_0+\Delta x\right)$.

Если ввести параметр $\theta\ \left(0<\theta<1\right)$, то любую внутреннюю точку c сегмента $\left[x_0;x_0+\Delta x\right]$ можно представить в виде $c=x_0+\theta\Delta x$, и тогда:

$$\Delta y=\Delta f\left(x_0\right)=f'\left(x_0+\theta\Delta x\right)\Delta x. \qquad (14.9)$$

Формулу (14.9) называют **формулой конечных приращений**.

Правило Лопиталя

Теорема. Пусть имеем отношение двух функций $\dfrac{f\left(x\right)}{g\left(x\right)}$, где функции определены на $\left[a;b\right]$, имеют конечные производные на этом сегменте $g'\left(x\right)\neq 0$, тогда если обе функции бесконечно малые или бесконечно большие при $x\to x_0\ \left(x_0\in\left[a;b\right]\right)$ и существует $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f'\left(x\right)}{g'\left(x\right)}$, то выполняется равенство:

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f\left(x\right)}{g\left(x\right)}=\lim_{x\to x_0}\frac{f'\left(x\right)}{g'\left(x\right)}. \qquad (14.10)$$

Доказательство.

Рассмотрим теорему для неопределенности вида $\left[\dfrac{0}{0}\right]$ при $x\to x_0$.

Пусть функции $f\left(x\right)$ и $g(x)$, а также их производные непрерывны в точке x_0, причем $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=f(x_0)=0$ и $\lim\limits_{x\to x_0}g(x)=g(x_0)=0$.

В этом случае

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{g(x)-g(x_0)}.$$

Используя теорему Лагранжа для функций $f\left(x\right)$ и $g(x)$ на отрезке $[x,x_0]$, получим:

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to x_0}\frac{f'(c_1)(x-x_0)}{g'(c_2)(x-x_0)}=\lim_{x\to x_0}\frac{f'(c_1)}{g'(c_2)},$$

где $x<c_1<x_0, \quad x<c_2<x_0$.

При $x\to x_0$ вследствие непрерывности производных $f'(x)$ и $g'(x)$ и с помощью теоремы о пределе частного двух функций получаем равенство:

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f\ \ x}{g\ \ x}=\lim_{x\to x_0}\frac{f'\ \ x}{g'\ \ x}.$$

Правило Лопиталя используется и в случае, когда $x\to\infty$.

Таким образом, согласно правилу Лопиталя раскрывается неопределенность вида $\left[\frac{0}{0}\right]$ или $\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$.

Сведение других типов неопределенности к рассмотренным осуществляется так:

1) $$0\cdot\infty \Rightarrow y=u\cdot\upsilon\Rightarrow\begin{cases} y=\dfrac{u}{\frac{1}{\upsilon}}=\left[\dfrac{0}{0}\right] \\ y=\dfrac{\upsilon}{\frac{1}{u}}=\left[\dfrac{\infty}{\infty}\right]\end{cases}; \qquad (14.11)$$

2) $$\infty-\infty \Rightarrow y=u-\upsilon\Rightarrow y=\frac{\frac{1}{\upsilon}-\frac{1}{u}}{\frac{1}{\upsilon}\cdot\frac{1}{u}}=\left[\frac{0}{0}\right]; \qquad (14.12)$$

3) $$1^{\infty},0^{0},\infty^{0} \Rightarrow y=u^{\upsilon}\Rightarrow\ln y=\upsilon\cdot\ln u=\ 0\cdot\infty\ . \qquad (14.13)$$

То есть $\ln y$ дает неопределенность уже рассмотренного вида $0\cdot\infty$. Если удается найти $\lim\limits_{x\to x_0}\ln y=k$, тогда $\lim\limits_{x\to x_0}y=e^{k}$, потому что $\lim\limits_{x\to x_0}\ln y=\ln\ \lim\limits_{x\to x_0}y$.

Пример 14.9. Вычислить пределы.

Решение:

1) $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^5-1}{x^7-1}=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{5x^4}{7x^6}=\dfrac{5}{7}$;

2) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^2+2x+1}{5x^2-x+1}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{6x+2}{10x-1}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{6}{10}=\dfrac{3}{5}$;

3) $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{\sqrt{x+2}-2}{\sqrt{7+x}-3}=\lim\limits_{x\to2}\dfrac{\dfrac{1}{2\sqrt{x+2}}}{\dfrac{1}{2\sqrt{x+7}}}=\dfrac{3}{4}$;

4) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^{x^2}-1}{\sin^2 3x}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^{x^2}\cdot 2x}{3\cdot 2\sin 3x\cos 3x}=\dfrac{1}{3}\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^{x^2}}{\cos 3x}\cdot\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x}{\sin 3x}=\dfrac{1}{9}$;

5) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x+\sin x}{x}\neq\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1+\cos x}{1}$.

Последний предел не существует, но это не значит, что не существует предел отношения функций, потому что:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x+\sin x}{x}=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{\sin x}{x}\right)=1.$$

Этот пример – предостережение от неправильного использования правила Лопиталя в случае, когда отношение $\dfrac{f'(x)}{\varphi'(x)}$ при $x\to x_0$ не имеет предела. Предел $\dfrac{f(x)}{\varphi(x)}$ при $x\to x_0$ может существовать и тогда, когда отношение производных при $x\to x_0$ предела не имеет;

6) $\lim\limits_{x\to0}x\ln x=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\ln x}{\dfrac{1}{x}}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\dfrac{1}{x}}{-\dfrac{1}{x^2}}=-\lim\limits_{x\to0}x=0$;

7) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1}{\sin x}-\frac{1}{x}\right)=\lim\limits_{x\to 0}\frac{x-\sin x}{x\sin x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{\sin x+x\cos x}=$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{\cos x+\cos x-x\sin x}=\frac{0}{2}=0;$$

8) $\lim\limits_{x\to 1}x^{\frac{1}{x-1}}$ или $\ln y=\frac{1}{x-1}\ln x$, $\lim\limits_{x\to 1}\ln y=\lim\limits_{x\to 1}\frac{\ln x}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1}\frac{1}{x}=1$.

Отсюда: $\lim\limits_{x\to 1}y=e$, то есть $\lim\limits_{x\to 1}x^{\frac{1}{x-1}}=e$.

Вопросы для самодиагностики

1. Что называется дифференциалом функции?
2. Записать формулу для использования дифференциала в приближенных вычислениях.
3. Каков геометрический смысл дифференциала?
4. Какие свойства дифференциалов?
5. Что называется эластичностью функции?
6. Каков геометрический смысл эластичности?
7. Привести примеры использования производной и дифференциала в экономике.
8. Привести основные теоремы дифференциального исчисления.
9. В чем суть правила Лопиталя?

Упражнения

Найти дифференциалы функций:

14.1. $y=\cos^3 2x.$

14.2. $y=2x\sqrt{7x-2}.$

14.3. $y=5^{x^2}\arccos\frac{1}{x}.$

14.4. $y=\frac{e^{3x-5}}{\sqrt{x^2-3}}.$

14.5. $y=x\ln(x^2-2x).$

14.6. $\ln\sqrt{x^2+y^2}=\operatorname{arctg}\frac{y}{x}.$

Найти приближенное значение функции:

14.6. $y = e^{1-x^2}$ при $x = 1,05$.

14.7. $\sqrt[4]{80,5}$.

14.8. $\arcsin 0,4983$.

14.9. $\sin 29°$.

14.10. $\ln 1,01$.

Найти пределы функций по правилу Лопиталя:

14.11. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{e^{3x} - e^{-2x} - 1}{x^2}$.

14.12. $\lim\limits_{x \to -\frac{1}{2}} \dfrac{2x^2 - 7x - 4}{-2x^2 + 5x + 3}$.

14.13. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x^2}{1 - \cos 6x}$.

14.14. $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{x^2}{\ln(e^{x^2} + 1)}$.

14.15. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{e^{3x} - 3x - 1}{\sin^2 5x}$.

14.16. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\ln x}{1 + 2\ln\sin x}$.

14.17. $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{\ln\ln(x^2 - 3)}{\ln(x - 2)}$.

14.18. $\lim\limits_{x \to 0} x \ln^3 x.$

14.19. $\lim\limits_{x \to 1} (\dfrac{x}{x - 1} - \dfrac{1}{\ln x}).$

14.20. $\lim\limits_{x \to 0} c\,\mathrm{tg}\, x \cdot \ln(x + e^x).$

14.21. $\lim\limits_{x \to 0} (\dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{\sin x}).$

14.22. $\lim\limits_{x \to 0} (\dfrac{1}{x^2} - c\,\mathrm{tg}^2\, x).$

14.23. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1 - e^{-2x}}{\mathrm{tg}\, 3x}$.

14.24. $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}} \dfrac{e^{\mathrm{tg}\, 2x} - e^{-\sin 2x}}{\sin x - 1}$.

14.25. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{e^x - e^{\sin x}}{x - \sin x}$.

14.26. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin x - x\cos x}{\sin^3 x}$.

15. Исследование функции с помощью производных

15.1. Признак монотонности функции

Рассмотрим применение производной для анализа поведения функции и построения ее графика. С этой целью остановимся на некоторых теоремах, которые имеют важное значение для исследования функции.

Теорема 1 (*необходимое условие монотонности*).

Если функция $y=f(x)$ дифференцируема на промежутке $(a;b)$ и возрастает $(x_2>x_1\Rightarrow f(x_2)>f(x_1))$, то ее производная на этом промежутке $f'(x)\geq 0$.

Если функция убывает на промежутке $(x_2>x_1\Rightarrow f(x_2)<f(x_1))$, то ее производная на этом промежутке $f'(x)\leq 0$.

Если функция на промежутке $(a;b)$ постоянна, то ее производная $f'(x)=0$ в каждой точке этого промежутка, то есть если $f(x)=const, f'(x)\equiv 0$ $(\Delta y=0)$.

Доказательство.

Пусть функция $y=f(x)$ на промежутке $(a;b)$ возрастает, то есть для $x_2>x_1\Rightarrow f(x_2)>f(x_1)$.

И пусть $x_2=x+\Delta x;\ x_1=x,\ \Delta y=f(x+\Delta x)-f(x)$. По определению производной: $f'(x)=\lim\limits_{\Delta x}\frac{\Delta y}{\Delta x}$. По условию теоремы $\Delta y>0,$ если $\Delta x>0$ и $\Delta y<0$, если $\Delta x<0$. Следовательно, отношение $\frac{\Delta y}{\Delta x}>0$ и его предел $f'(x)\geq 0.$

Для убывающей функции теорема доказывается аналогично.

Если $f(x)=const, f'(x)\equiv 0$ $(\Delta y=0)$.

Теорема 2 (*достаточное условие монотонности*). Если функция $y=f(x)$ дифференцируема на промежутке $(a;b)$ и ее производная

$f'(x)>0$ в каждой точке этого промежутка, то функция на этом промежутке возрастает и убывает, если $f'(x)<0$.

Доказательство.

Пусть $f'(x)<0$. Докажем, что функция убывает.

Возьмем любые две точки x_1 и x_2 из $(a;b)$ и применим теорему Лагранжа к функции $f(x)$ на промежутке $[x_1;x_2]$:

$$f(x_2)-f(x_1)=f'(c)(x_2-x_1), \quad c\in(x_1;x_2).$$

Пусть $x_2>x_1$, тогда $f(x_2)-f(x_1)<0$, то есть $f(x_2)<f(x_1)$ и функция убывает. Теорема доказана.

Условие возрастания функции доказывается аналогично. Точки, которые отделяют интервалы возрастания и убывания функции, назовем границами интервалов монотонности.

Вывод 1. Если точка x_0 является границей монотонности $f(x)$, то $f'(x_0)=0$ или не существует.

Действительно, если точка x_0 отделяет интервал возрастания функции от интервала убывания, то, проходя через эту точку, производная меняет знак, то есть $f'(x_0)=0$ или не существует в точке x_0.

Вывод 2. Точка x_0 является границей монотонности, если производная функции при переходе через эту точку изменяет знак.

Точки, в которых производная функции $y=f(x)$ равна нулю, или не существует, называют **критическими точками** $f(x)$. Иногда критические точки, в которых $f'(x)=0$, называют **стационарными точками** $f(x)$.

При исследовании функции $f(x)$ на монотонность необходимо:

1) найти область определения функции;

2) найти критические точки, то есть точки, в которых $f'(x)=0$ или не существует;

3) установить знак производной на каждом интервале, на которые критические точки разбивают область существования функции;

4) сделать выводы ($f'(x) > 0$ – функция возрастает, $f'(x) < 0$ – убывает).

Пример 15.1. Найти интервалы монотонности:

1. $y = \sin^2 x + \cos^2 x$.

Функция определена для $x \in R$.

Найдем производную:

$$f'(x) = 2\sin x \cdot \cos x - 2\cos x \sin x \equiv 0,$$

следовательно, функция является постоянной для всех $x \in R$.

2. $y = \dfrac{x^3}{x^2 - 1}$.

Функция теряет смысл при $x = \pm 1$. Область определения функции состоит из трех интервалов: $(-\infty; -1) \cup (-1; 1) \cup (1; +\infty)$.

Находим критические точки функции:

$$f'(x) = \frac{3x^2(x^2 - 1) - 2x \cdot x^3}{(x^2 - 1)^2} = \frac{x^2(x^2 - 3)}{(x^2 - 1)^2},$$

$f'(x) = 0$ в точках $x = 0;\ x = \pm\sqrt{3}$.

При $x = \pm 1$ производная не существует.

Таким образом, область определения функции разбивается на шесть интервалов, в которых производная имеет постоянный знак (рис. 15.1).

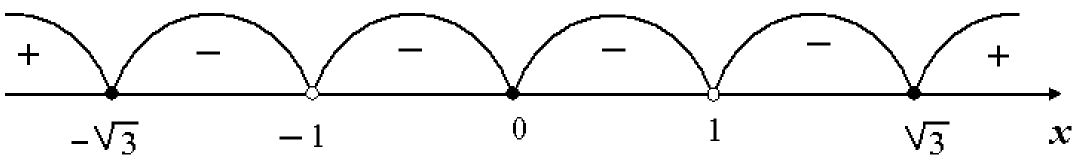


Рис. 15.1

Чтобы установить знак производной на каждом интервале, достаточно установить знак производной в любой точке каждого из них. Как видно, критическая точка $x=0$ не является границей монотонности, потому что для нее не выполняется достаточное условие.

Следовательно, данная функция возрастает на интервалах: $(-\infty;-\sqrt{3})$ и $(\sqrt{3};+\infty)$; убывает на интервалах: $(-\sqrt{3};-1)$, $(-1;1)$ и $(1;\sqrt{3})$ (см. рис.15.1).

3. $y=\ln(x^2+2x-3)$.

Область определения функции:

$$x^2+2x-3>0, \text{ то есть } (-\infty;-3)\cup(1;+\infty).$$

Найдем производную и критические точки:

$$f'(x)=\frac{2x+2}{x^2+2x-3};\; f'(x)=0 \Rightarrow 2x+2=0;\; x=-1.$$

Но точка $x=-1$ не принадлежит области определения функции. То есть как критические точки возможно рассмотреть точки, в которых производная не существует. Следовательно, при $x=1$ и $x=-3$. Таким образом, на интервале $(-\infty;-3)$ функция убывает, а на интервале $(1;+\infty)$ – возрастает (рис. 15.2).

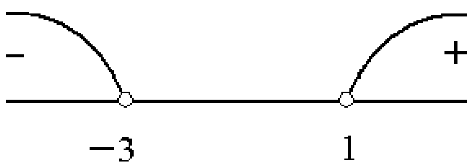


Рис. 15.2

15.2. Максимум и минимум функции. Необходимые и достаточные условия экстремума функции

Пусть функция $y=f(x)$ определенная и непрерывная на интервале $(a;b)$.

Точка $x_0 \in (a;b)$ называется **точкой максимума** (**минимума**) функции $y=f(x)$, если существует такая окрестность $(x_0-\varepsilon; x_0+\varepsilon)$, что для всех x из этой окрестности выполняется неравенство:

$$f(x)<f(x_0) \quad (f(x)>f(x_0)). \tag{15.1}$$

Если положить $x-x_0=\Delta x,\ f(\Delta x+x_0)-f(x_0)=\Delta y,$ то в точке x_0 функция имеет максимум при $\Delta y<0,$ а минимум при $\Delta y>0.$

Точки максимума и минимума называют *точками экстремума функции*.

Таким образом, из определения экстремума функции, поведение функции рассматривается в окрестности точки x_0 и при выполнении условия экстремума функция $y=f(x)$ в точке x_0 имеет *локальный максимум или минимум.*

Теорема 3 (*необходимое условие экстремума*). Если функция $y=f(x)$ в точке $x_0 \in (a,b)$ достигает экстремума и в этой точке существует конечная производная, то $f'(x_0)=0.$

Доказательство.

По условию теоремы функция $y=f(x)$ в точке x_0 имеет максимум или минимум, то есть в окрестности $(x_0-\varepsilon, x_0+\varepsilon)$ достигает наибольшего (наименьшего) значения, а по теореме Ферма, если в этой точке функция $f(x)$ имеет конечную производную, то $f'(x)=0$.

Теорема доказана.

Следовательно, если в точке x_0 производная $f'(x_0)=0$ или не существует, то это только означает, что точка x_0 является *критической*.

Теорема 4 (*первое достаточное условие экстремума*). Пусть точка x_0 является критической точкой для непрерывной функции $f(x)$. При этом в некоторой окрестности точки x_0, то есть в интервале $(x_0-\varepsilon, x_0+\varepsilon)$, как слева от точки x_0, так и справа, существует по крайней мере при $x \neq x_0$ конечная производная, которая сохраняет знак слева от точки x_0 и справа от нее. Тогда если производная функции при переходе через точку x_0 изменяет знак, то в этой точке функция имеет экстремум.

Доказательство.

Рассмотрим три возможные случая:

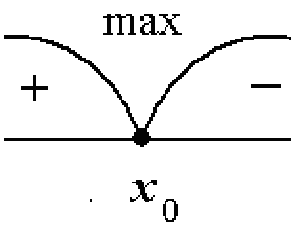
1. Если $x < x_0$, то $f'(x) > 0$, если $x > x_0$, то $f'(x) < 0$.

Таким образом, слева от точки x_0 функция возрастает и справа убывает.

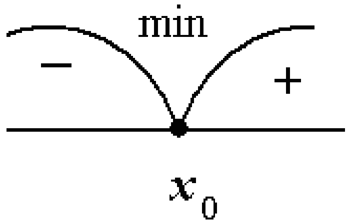
Следовательно, в точке x_0 функция имеет максимум (рис. 15.3а).

2. Если $x < x_0$, то $f'(x) < 0$, если $x > x_0$, то $f'(x) > 0$. То есть слева от точки x_0 функция убывает, а справа – возрастает (рис. 15.3б).

Таким образом, в точке x_0 функция имеет минимум.



а)



б)

Рис. 15.3

3. Если при переходе через точку x_0 производная знак не изменяет, то функция $f(x)$ в окрестности точки x_0 монотонно возрастает ($f'(x) > 0$) или монотонно убывает ($f'(x) < 0$).

Следовательно, в точке x_0 экстремум функция не имеет.

Таким образом, для нахождения экстремума функции, нужно:

1) найти область определения функции;

2) найти критические точки ($f'(x) = 0$, $f'(x) = \infty$ или не существует);

3) исследовать на экстремум каждую критическую точку.

Пример 15.2. Исследовать на экстремум функции:

1. $y = x^2 - 2x - 3.$

Функция определена и непрерывна на промежутке $(-\infty; +\infty)$.

Критическая точка найдена из уравнения $f'(x) = 0$, то есть $2x - 2 = 0;\ x = 1.$

При $x < 1;\ f'(x) < 0,$ а при $x > 1;\ f'(x) > 0,$ следовательно, точка $x = 1$ является точкой минимума: $x_{\min} = 1,\ f_{\min}(1) = -4.$

2. $y = -x^2 + 3x - 2.$

Область определения $x \in R;\ f'(x) = -2x + 3 = 0,\ x = \dfrac{3}{2};$

при $x < \dfrac{3}{2} \Rightarrow f'(x) > 0;$ при $x > \dfrac{3}{2} \Rightarrow f'(x) < 0.$

Следовательно, точка $x = \dfrac{3}{2}$ является точкой максимума; $x_{\max} = \dfrac{3}{2};$ $f_{\max}\left(\dfrac{3}{2}\right) = 0,25.$

3. $y = \sqrt[3]{x}$.

Область определения функции: $x \in R;$

критическая точка $f'(x) = \dfrac{1}{3\sqrt[3]{x^2}} = \infty,$ при $x = 0;$

при переходе через $x = 0$ производная знак не изменяет $(f'(x) > 0)$.

Следовательно, функция на $(-\infty; +\infty)$ возрастает и экстремума не имеет.

4. $y = (x+2)^2 (x-1)^3.$

Функция определена на интервале $(-\infty; +\infty)$. Найдем производную и критические точки:

$$y' = 2(x+2)(x-1)^3 + 3(x-1)^2 (x+2)^2 = (x-1)^2 (x+2)(5x+4).$$

Следовательно, критические точки: $x_1=-2;\ x_2=-\dfrac{4}{5};\ x_3=1.$

Исследуем знак производной в окрестности каждой из этих точек (рис. 15.4).

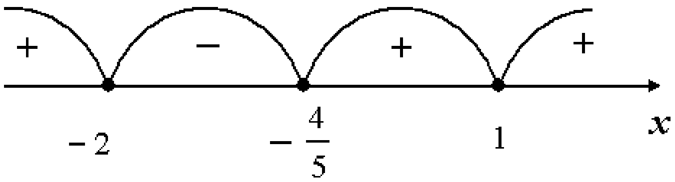


Рис. 15.4

На каждом промежутке выбираем произвольную точку:

$$f'(-3)=176>0;\ \ f'(-1)=-4<0;\ \ f'(0)=8>0;\ \ f'(2)=56>0.$$

Итак, сделаем выводы:

точка $x_1=-2$ является точкой максимума, $f_{\min}(-2)=0;$

точка $x_2=-\dfrac{4}{5}$ является точкой минимума, $f_{\max}\left(-\dfrac{4}{5}\right)\approx 8{,}4;$

в точке $x_3=1$ функция экстремума не имеет.

Теорема 5 (*второе достаточное условие экстремума*). Пусть точка x_0 является критической точкой функции $f(x)$ и существует вторая производная $f''(x_0)$, которая непрерывна в некоторой окрестности точки x_0 и $f''(x_0)\neq 0,$ тогда:

а) если $f''(x_0)>0,$ то в точке x_0 функция имеет минимум;

б) если $f''(x_0)<0,$ то функция в точке x_0 имеет максимум.

Доказательство.

а) пусть $f''(x_0)>0,$ тогда $f'(x)$ в точке x_0 является функцией возрастающей, то есть при $x<x_0$, $f'(x)<0,$ а при $x>x_0,$ $f'(x)>0.$

Следовательно, в точке x_0 функция имеет минимум (по первому правилу);

б) пусть $f''(x_0)<0$, тогда $f'(x)$ – убывающая функция в точке x_0, то есть при $x<x_0$, $f'(x)>0$, а при $x>x_0$, $f'(x)<0$.

Следовательно, в точке x_0 функция имеет максимум (по первому правилу).

Если в точке x_0 производная $f''(x_0)=0$, то второе правило использовать нельзя и исследование надо проводить по первому правилу.

Покажем *применение второго достаточного условия экстремума* на примерах 15.2:

1) $y=x^2-2x-3$; $y'=2x-2$; $y''=2>0$,

следовательно, в точке $x=1$ функция имеет минимум;

2) $y=-x^2+3x-2$; $y'=-2x+3$; $y''=-2<0$,

функция в точке $x=\frac{3}{2}$ имеет максимум;

3) $y=\sqrt[3]{x}$; $y'=\frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$, $y'=\infty$ при $x=0$ и второе правило не используется;

4) $y=(x+2)^2(x-1)^3$; $y'=(x-1)^2(x+2)(5x+4)$;

$y''=2(x-1)(10x^2+16x+1)$.

Следовательно, в точке $x=-2$, $y''<0$ и функция имеет максимум;

в точке $x=-\frac{4}{5}$, $y''>0$ и функция имеет минимум;

в точке $x=1$, $y''=0$ и провести исследование на экстремум не возможно.

Рассмотрим *задачу о нахождении наибольшего и наименьшего значений функции на отрезке* $[a;b]$.

Пусть функция $y=f(x)$ непрерывна на отрезке $[a;b]$.

Найдем ее наибольшее и наименьшее значения, то есть M и m, на этом отрезке.

Для нахождения наибольшего (наименьшего) значения функции на отрезке $[a;b]$ нужно:

1. Найти производную $f'(x)$ и все критические точки, которые принадлежат отрезку $[a;b]$. То есть точки, в которых $f'(x_0)=0$, $f'(x_0)=\infty$ или $f'(x)$ не существует.

2. Вычислить значение функции $f'(x)$ в критических точках и на концах отрезка $[a;b]$.

3. Сравнить полученные значения функции и выбрать среди этих значений наибольшее и наименьшее:

$$\sup_{[a;b]} f(x) = M \text{ (наибольшее значение } f(x)\text{)},$$

$$\inf_{[a;b]} f(x) = m \text{ (наименьшее значение } f(x)\text{)}.$$

Пример 15.3. Найти наибольшее и наименьшее значения функции $y=(x+2)^2(x-1)^3$ на промежутке $[-1;2]$.

Решение.

Вычислим: $y'=(x-1)^2(x+2)(5x+4)$,

$$y'=0 \text{ при } x_1=-2;\ x_2=-\frac{4}{5};\ x_3=1.$$

Получаем значение функции в критических точках, которые принадлежат отрезку $[-1;2]$, то есть в точках $x_2=-\frac{4}{5}$ и $x_3=1$ и на его концах, а именно при $x=-1$ и $x=2$:

$$f(-1)=8;\ f\left(-\frac{4}{5}\right)=-8{,}4;\ f(1)=0;\ f(2)=16.$$

Таким образом, сравнив полученные значения, имеем:

$$M=\sup_{[-1;2]} f(2)=16 \text{ (наибольшее значение);}$$

$$m = \inf_{-1;2} f\left(-\frac{4}{5}\right) = -8{,}4 \text{ (наименьшее значение).}$$

15.3. Выпуклость и вогнутость графика функции, точки перегиба, асимптоты графика функции

Функция $y = f(x)$ называется **выпуклой** *(***вогнутой***)* в точке x_0, если в некоторой окрестности точки x_0 кривая, которая является графиком функции, лежит ниже (выше) касательной к кривой в этой точке.

Кривая называется выпуклой (вогнутой) на промежутке $(a;b)$, если она выпуклая (вогнутая) во всех точках этого промежутка.

Теорема 6 (*необходимое и достаточное условие выпуклости (вогнутости)*). Пусть функция $f(x)$ на интервале $(a;b)$ дважды непрерывная дифференцируемая и $f''(x) \neq 0$ на этом интервале, тогда для того чтобы кривая $y = f(x)$ была выпуклая (вогнутая) на интервале, необходимо и достаточно, чтобы вторая производная функции $f''(x)$ сохраняла знак $f''(x) < 0$ (выпуклость) или $f''(x) > 0$ (вогнутость).

Доказательство.

Рассмотрим случай вогнутости кривой. Пусть $f''(x) > 0$. Покажем, что кривая $y = f(x)$ вогнутая.

На интервале $(a;b)$ возьмем любую точку x_0 и проведем касательную к кривой в этой точке. Приращение функции в точке x_0:

$$\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x);$$

$$dy = f'(x_0)\Delta x.$$

Необходимо доказать, что $\Delta y - dy > 0.$ Это и будет подтверждением вогнутости кривой на $(a;b)$ (рис. 15.5).

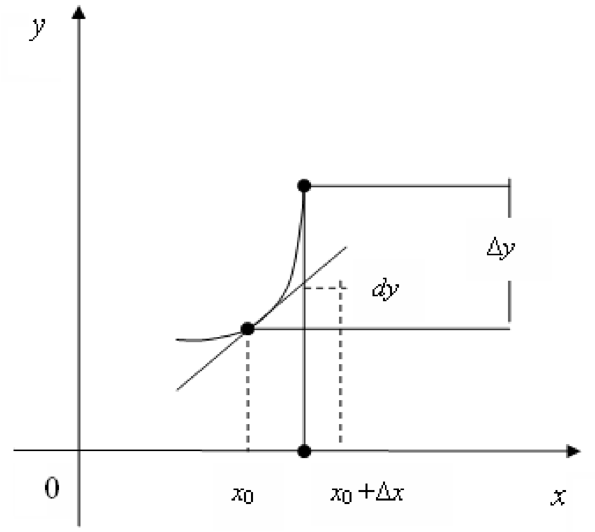


Рис. 15.5

По теореме Лагранжа приращение $\Delta y = f'(c_1)\Delta x,\ c_1 \in (x_0; x_0 + \Delta x)$.

Таким образом,

$$\Delta y - dy = f'(c_1)\Delta x - f'(x_0)\cdot\Delta x = \left(f'(c_1) - f'(x_0)\right)\Delta x,$$

или по теореме Лагранжа $\Delta y - dy = f''(c_2)(\Delta x)^2$, где $c_2 \in (x_0; c_1)$.

Отсюда получаем: $\Delta y - dy > 0$, и теорема доказана.

Аналогично доказывается случай выпуклости кривой. Необходимость условия выпуклости и вогнутости кривой легко доказать на основе равенства: $\Delta y - dy = f''(c_2)(\Delta x)^2$.

Точки, которые отделяют интервалы выпуклости и вогнутости кривой, называются границами соответствующих интервалов, или **точками перегиба** кривой.

Теорема 7 (*необходимое условие точек перегиба*). Промежутки выпуклости и вогнутости кривой отделяются точками, в которых вторая производная $f''(x) = 0$ или не существует.

Доказательство.

Действительно, если точка $x = x_0 \in (a; b)$ является границей интервалов выпуклости и вогнутости $(a; x_0)$, $(x_0; b)$, то для второй производной $f''(x_0)$ возможны два случая:

или $f''(x_0)$ существует и тогда $f''(x_0) = 0$, или переход от «положительности» к «отрицательности» и наоборот осуществляется через ноль;

или $f''(x_0)$ не существует.

Точки, в которых вторая производная функции $f''(x) = 0$ или не существует, называют **критическими точками второго рода**.

Теорема 8 (*достаточное условие точек перегиба*). Критическая точка x_0 является точкой перегиба функции $f(x)$, если вторая производная функции при переходе через эту точку изменяет знак.

Исследование функции на выпуклость (вогнутость) с помощью $f''(x)$ аналогично исследованию функции на экстремум на основе $f'(x)$, а именно:

1. Найти область определения функции $f(x)$.

2. Вычислить производную $f''(x)$ и критические точки второго рода ($f''(x)=0$ или не существует).

3. Установить знак второй производной в каждом из интервалов, на какие критические точки разбивают область существования функции.

4. Сделать соответствующие выводы.

Пример 15.4. Исследовать на выпуклость (вогнутость) функцию: $y=\dfrac{x^3}{x^2-1}$.

Решение.

Область существования функции: $(-\infty;-1)\cup(-1;1)\cup(1;+\infty)$.

Находим $f'(x)$ и $f''(x)$:

$$f'(x)=\frac{x^2(x^2-3)}{(x^2-1)^2};\quad f''(x)=\frac{2x(x^2+4)}{(x^2-1)^3};$$

$f''(x)=0$ при $x=0$; $f''(x)$ не существует при $x=\pm1$.

Следовательно, функция имеет три критических точки второго рода, а именно: $x_1=-1$; $x_2=0$; $x_3=1$.

Этими точками область определения функции разбивается на интервалы: $(-\infty;-1)\cup(-1;0)\cup(0;1)\cup(1,+\infty)$ (рис. 15.6).

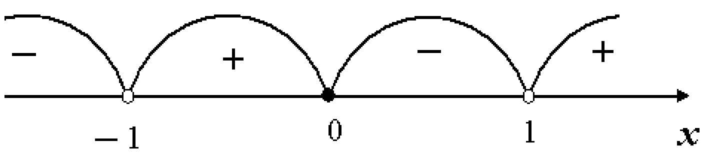


Рис. 15.6

Устанавливаем знак второй производной на каждом интервале.

Следовательно, на промежутках $(-\infty;-1)\cup(0;1)$ график функции выпуклый; на промежутках $(-1;0)\cup(1;+\infty)$ – вогнутый. Все критические точки являются точками перегиба функции.

Асимптотой графика функции $y=f(x)$ называется прямая, обладающая тем свойством, что расстояние от точки $(x,f(x))$ до этой прямой стремится к нулю при неограниченном удалении точки графика от начала координат.

Различают три типа асимптот:

1) вертикальные $(x=a)$;

2) наклонные $(y=kx+b)$;

3) горизонтальные $(y=b)$ как частный случай наклонных $(k=0)$.

Для нахождения уравнения *вертикальных асимптот* необходимо найти точки, в которых функция $y=f(x)$ стремится к бесконечности.

То есть если по крайней мере один односторонний предел в точке $x=a$ равен бесконечности:

$$\lim_{x\to a+0} f(x)=\infty \text{ или } \lim_{x\to a-0} f(x)=\infty,$$

то прямая $x=a$ является вертикальной асимптотой графика функции.

Уравнение *наклонной асимптоты* $y=kx+b$ графика функции находится вычислением пределов:

$$k=\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x};\ b=\lim_{x\to\infty}\left(f(x)-kx\right). \qquad (15.2)$$

Заметим, что при стремлении $x\to\infty$ в одном направлении $x\to+\infty$ или $x\to-\infty$ возможны разные наклонные асимптоты. Тогда пределы для вычисления k и b находят и при $x\to+\infty$, и при $x\to-\infty$.

Если по крайней мере один из пределов (для k или b) не существует или бесконечный, то кривая наклонных асимптот не имеет.

Горизонтальную асимптоту получаем при $k=0$: $b=\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$.

Пример 15.5. Найти асимптоты графика функции:

1. $y=\dfrac{x^3}{x^2-1}$.

Решение.

Для нахождения вертикальных асимптот рассмотрим точки, в которых функция стремится к бесконечности, и поведение функции в окрестности этих точек.

Следовательно,

$$\lim_{x\to 1+0}\frac{x^3}{x^2-1}=+\infty;\ \lim_{x\to 1-0}\frac{x^3}{x^2-1}=-\infty;$$

$$\lim_{x\to -1+0}\frac{x^3}{x^2-1}=+\infty;\ \lim_{x\to -1-0}\frac{x^3}{x^2-1}=-\infty.$$

Таким образом, прямые $x=-1$ и $x=1$ – вертикальные асимптоты.

Уравнение наклонной асимптоты $y=kx+b$ получим, если вычислим пределы:

$$k=\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2}{x^2-1}=1;$$

$$b=\lim_{x\to\infty}\left(f(x)-kx\right)=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^3}{x^2-1}-x\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{x}{x^2-1}=0.$$

Следовательно, имеем уравнение наклонной асимптоты: $y=x$.

2. $y=x\cdot e^x$.

Решение.

Вертикальные асимптоты функция не имеет $x\in R$. Наклонные асимптоты определим, рассматривая два случая:

а) $x\to+\infty$; $k=\lim\limits_{x\to+\infty}e^x=\infty$, асимптоты график функции не имеет;

б) $x\to-\infty$; $k=\lim\limits_{x\to-\infty}e^x=0$; $b=\lim\limits_{x\to-\infty}xe^x=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x}{e^{-x}}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{1}{-e^{-x}}=0$.

Таким образом, при $x\to-\infty$ кривая имеет горизонтальную асимптоту: $y=0$.

15.4. Общая схема построения графика функции

Для построения графика функции нужно провести ее исследование по схеме:

1) найти область определения функции;
2) проверить функцию на четность, нечетность, периодичность;
3) исследовать функцию на монотонность и экстремум;
4) установить интервалы выпуклости (вогнутости) и точки перегиба;
5) определить асимптоты графика функции;
6) найти точки пересечения графика функции с осями координат.

Пример 15.6. Исследовать функцию $y=\dfrac{x^3}{x^2-1}$ и построить ее график.

В пунктах 15.1. – 15.3 эта функция была исследована на экстремум, выпуклость (вогнутость) и наличие асимптот.

Изобразим схематически график функции (рис. 15.7).

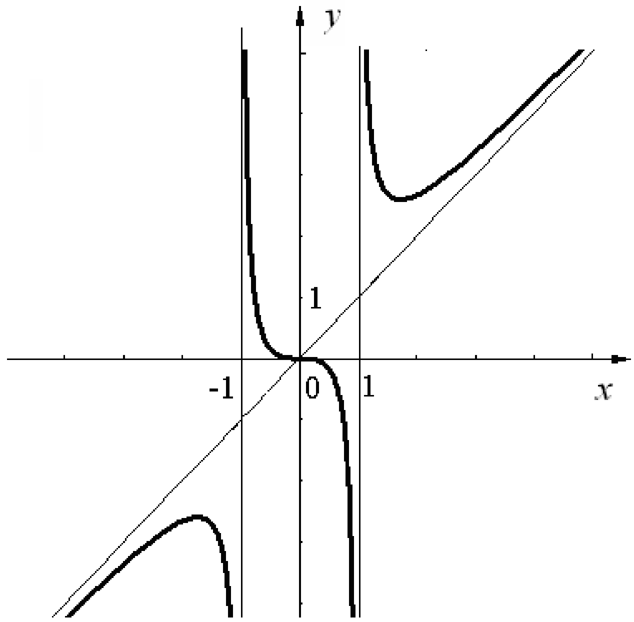


Рис. 15.7

Пример 15.7. Исследовать функцию $y=\operatorname{arctg}x-x$ и построить график.

Решение.

1. Область определения функции: $x\in R$.

2. Функция нечетная $f(-x)=-f(x)$ (график симметричен относительно начала координат).

3. Найдем критические точки по первой производной и определим интервалы монотонности и экстремумы:

$$f'(x)=\frac{1}{1+x^2}-1=\frac{-x^2}{1+x^2};$$

$f'(x)=0$ при $x=0$; $f'(x)<0$, $x\in R$ поэтому функция убывает и экстремума не имеет.

4. Установим интервалы выпуклости (вогнутости):

$$f''(x)=-\frac{2x}{(1+x^2)^2},$$

$f''(x)=0$ при $x=0$.

На интервале $(-\infty;0)$ кривая вогнута $(f''(x)>0)$, на интервале $(0;+\infty)$ кривая выпукла $(f''(x)<0)$.

5. Вертикальные асимптоты кривая не имеет $(x\in R)$.

Наклонные асимптоты:

$$k=\lim_{x\to\pm\infty}\left(\frac{\operatorname{arctg}x}{x}-1\right)=0,\ b=\lim_{x\to\infty}(\operatorname{arctg}x-x)=\infty.$$

Следовательно, наклонные асимптоты кривая тоже не имеет.

6. Точка пересечения с осями координат: $(0;0)$.

Результаты исследований изображены на рис. 15.8.

Заметим, что для построения графика этой функции характерных точек ($x=0$) недостаточно, и значение функции нужно вычислить в любых других точках.

Например, при $x=1$, $y=\frac{\pi}{4}-1$, а при $x=-1, y=-\frac{\pi}{4}+1$ (функция нечетная, график симметричный относительно начала координат).

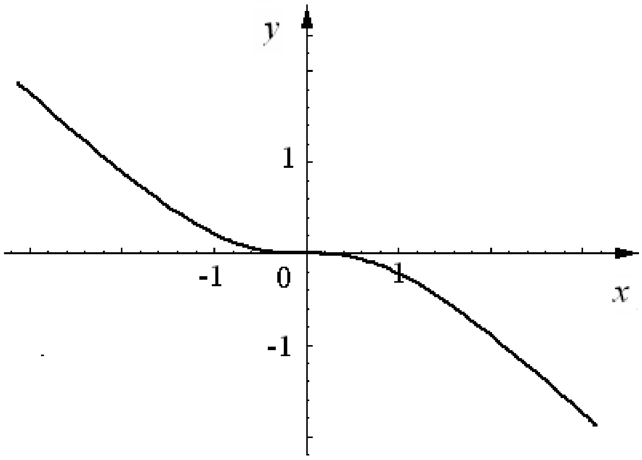


Рис. 15.8

Вопросы для самодиагностики

1. Какое необходимое условие возрастания (убывания) функции?
2. Какое достаточное условие возрастания (убывания) функции?
3. Что называется максимумом и минимумом функции в точке?
4. Какое необходимое условие экстремума? Какое достаточное условие экстремума? В чем заключается достаточное условие экстремума по второй производной?
5. Как найти наибольшее и наименьшее значение функции на заданном отрезке?
6. Что такое точка перегиба?
7. В чем заключается достаточное условие точек перегиба?
8. В чем заключается необходимое условие точек перегиба?
9. В каком случае кривая выпуклая на промежутке?
10. В каком случае кривая вогнута на промежутке?
11. Что такое асимптота? Какое уравнение вертикальной асимптоты? Как находят уравнение наклонной асимптоты?
12. Какая основная схема исследования функции и построения ее графика?

Упражнения

Исследовать на монотонность и экстремумы функции:

15.1. $y = 2x^3 + 3x^2 - 12x + 5.$ **15.2.** $y = -x^2\sqrt{x+2}.$

15.3. $y=\frac{x-4\quad^{2}}{x^2-2x+5}.$

15.4. $y=x\ln x.$

15.5. $y=\frac{1}{4}x^4+\frac{1}{3}x^3-x^2.$

15.6. $y=x+\cos x.$

Найти наибольшее и наименьшее значения функций на указанных промежутках:

15.7. $y=\frac{x}{2+x^3},\quad 0;3\ .$

15.8. $y=\frac{2x-1}{2+x^2},\quad -2;0\ .$

15.9. $y=\sqrt{100-x^2},\quad -6;8\ .$

15.10. Разность двух чисел равна 13. Найти эти числа, если известно, что их произведение наибольшее.

15.11. Расходы на производство x единиц продукции равны $d\ \ x$, цена продукции $p\ \ x$. Определить, какое количество продукции нужно произвести, чтобы получить максимальную прибыль, если:

1) $d\ \ x\ =5x^2+300x+5000,\ \ p\ \ x\ =580-2x;$

2) $d\ \ x\ =10x^2+200x+6000,\ \ p\ \ x\ =1000-10x.$

Найти промежутки выпуклости, вогнутости и точки перегиба функций:

15.12. $y=3x^5-5x^4+3x-2.$

15.13. $y=x+36x^2-2x^3-x^4.$

15.14. $y=xe^x.$

15.15. $y=x-\ln x.$

Найти асимптоты графиков функций:

15.16. $y=\frac{x^2-2x+3}{x+2}.$

15.17. $y=\frac{1-x^3}{(2-x)(1+3x^2)}.$

Исследовать функции и построить их график:

15.18. $y = x^3 - 4x^2 - 3x + 6$.

15.19. $y = (x+4)^2 (x-5)$.

15.20. $y = x^4 - 8x^2 - 9$.

15.21. $y = \dfrac{x^2}{x-3}$.

15.22. $y = \dfrac{x^2 - 2x + 2}{x-1}$.

15.23. $y = \dfrac{4x}{x^2+1}$.

15.24. $y = \ln(x^2+4)$.

15.25. $y = xe^{-x}$.

15.26. $y = \sqrt{16 - x^2}$.

15.27. $y = (x+4)\sqrt[3]{x}$.

16. Функции нескольких переменных

16.1. Функции нескольких переменных в задачах экономики

Многим экономическим явлениям свойственна многофакторная зависимость, поэтому при изучении процессов в экономике вводят функции нескольких переменных.

Примером функций нескольких переменных в экономике являются производственные функции. При рассмотрении любого производственного комплекса как открытой системы (входами которой служат затраты ресурсов – человеческих и материальных, а выходами – продукция) *производственная функция выражает устойчивое количественное соотношение между входами и выходами*.

Производственная функция обычно задается уравнением

$$z = f(x_1, x_2, ..., x_n),$$

где все компоненты выпуска объединены (по стоимости или в натуральной форме) в одну скалярную величину z, а разнородные производственные ресурсы обозначены как x_i.

Наиболее часто в экономических исследованиях используется производственная функция Кобба – Дугласа, которая является функцией двух независимых переменных:

$$z = f(x, y),$$

где z – величина общественного продукта, x – расходы труда, y – объем производственных фондов (обычно z и y измеряются в стоимостных единицах, x – в человеко-часах).

Следует заметить, что в экономике рассматриваются функции не только от двух, но и большего числа независимых переменных.

Например, уровень рентабельности R зависит от прибыли P за реализованную продукцию, величины основных (a) и оборотных (b) фондов, $R = \dfrac{P}{a+b}$, то есть R является функцией трех независимых переменных $R = f(P, a, b)$.

16.2. Функциональная зависимость между переменными. Функции двух переменных, область их определения. Графическое изображение

Функцией нескольких переменных $x_1, x_2, ..., x_n$ будем называть переменную z, если каждому набору значений $x_1, x_2, ..., x_n$ из множества X по некоторому правилу ставится в соответствие некоторое значение z, то есть $z = f(x_1, x_2, ..., x_n)$ из множества Z.

Переменные $x_1, x_2, ..., x_n$ называют **независимыми**, z – **зависимой переменной**. Количество независимых переменных может быть произвольным.

Функция двух независимых переменных может быть задана несколькими способами: *табличным* (с помощью таблицы значений аргументов и функции), *аналитическим* (с помощью одной или нескольких формул) или *графическим*. Как и для функции одной переменной, функция двух переменных не обязательно должна существовать для любых значений x и y.

Совокупность пар $(x; y)$, для которых функция $z = f(x, y)$ определена, называется **областью определения** этой функции. Она обозначается $D \; f$. Если для функции одной переменной $y = f \; x$ области определения является интервал числовой оси (конечный или бесконечный), то в случае двух переменных совокупность пар $x; y$, которые образуют область определения функции, определяет множество точек плоскости. То есть областью определения функции двух переменных может быть некоторая ограниченная часть плоскости или вся плоскость, если область определения неограничена.

Линию, которая ограничивает эту область, называют *границей области.* Точки области, которые не принадлежат границе, называют *внутренними точками* области. В случае, когда граница принадлежит области определения, имеем замкнутую область, если граница не принадлежит области, то последнюю считают открытой (незамкнутой).

Если функция задана аналитически, то под областью определения имеют в виду область определенности математического выражения.

Пример 16.1. Найти область определения функций:

а) $z = 4x - y$; б) $z = \sqrt{16 - x^2 - y^2}$; в) $z = \ln \; x^2 + y$.

Решение:

а) для функции $z = 4x - y$ областью определения является вся плоскость xOy, потому что выражение имеет смысл для любых x и y;

б) функция $z = \sqrt{16 - x^2 - y^2}$ существует, если $16 - x^2 - y^2 \geq 0$, то есть $x^2 + y^2 \leq 16$.

Этому неравенству удовлетворяют все точки, которые находятся в пределах окружности радиуса 4, центр которой находится в начале координат. Точки, которые принадлежат окружности, также отвечают области определения, то есть область замкнута (рис. 16.1);

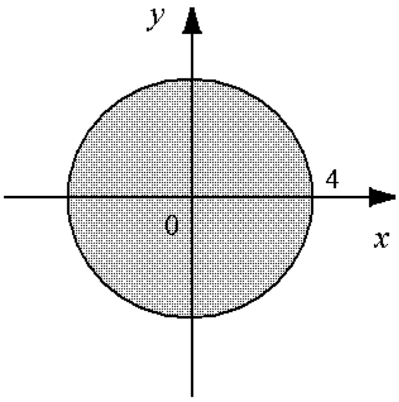


Рис. 16.1

в) функция $z = \ln \; x^2 + y$ имеет значение, когда $x^2 + y > 0$ или $y > -x^2$. Последнее неравенство определяет часть плоскости, которая расположена вне параболы $y=-x^2$, но точки самой параболы к области определения не принадлежат.

Это пример незамкнутой области определения (рис. 16.2).

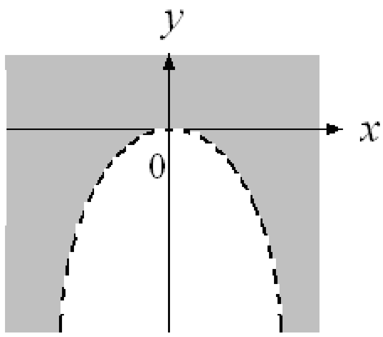


Рис. 16.2

Поиск области определения функции состоит из таких этапов:

1) составляют неравенство (или систему неравенств), которое отвечает области определения элементарных функций, входящих в аналитическое выражение функции $z=f(x,y)$;

2) с помощью графического решения полученного неравенства (или системы) находят область определения.

Каждая пара значений $(x;y)$ определяет точку M на плоскости xOy, а значение функции z является аппликатой пространственной точки $P(x;y;z)$.

Графиком функции двух переменных $z=f(x,y)$ называют множество точек трехмерного пространства $(x;y;z)$, аппликата которых связана с абсциссой x и ординатой y функциональным соотношением $z=f(x,y)$. Следовательно, графиком является некоторая поверхность в трехмерном пространстве.

Как правило, построение графика является достаточно сложной задачей. Поэтому очень часто пользуются другим понятием для определения характера поведения функции. Таким понятием являются линии уровня функции.

Линией уровня функции двух переменных $z=f(x,y)$ называют множество точек на плоскости такое, что во всех точках этой линии значения функции одинаково и равно некоторой постоянной величине C ($z=const=C$).

Число C в этом случае называется *уровнем*.

Множество всех линий уровня функции $z = f(x, y)$ называется **картой линий уровня** функции.

Например, линиями уровня для функции $z = x^2 + y^2$ есть совокупность концентрических кругов разного радиуса $z = const$ с центром в начале координат.

На рис. 16.3 приведены примеры линий уровня:

$x^2 + y^2 = c = 1$; $x^2 + y^2 = c = 4$; $x^2 + y^2 = c = 0$.

Значение константы, которое равно нулю, соответствует случаю вырождения линии в точку $(0,0)$.

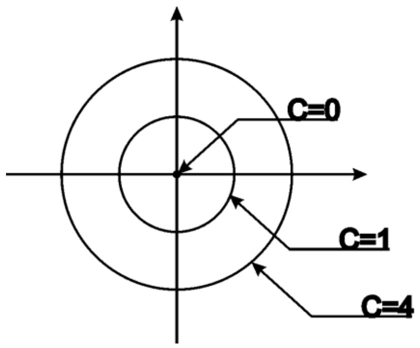


Рис. 16.3

Понятие *предела функции двух переменных* сложнее, чем для функции одной переменной. Это объясняется тем, что при определении предела функции одной переменной путей, по которым приближается аргумент к избранному определенному значению, только два: вдоль оси с одной стороны или с другой.

При определении предела функции двух переменных путей приближения точки $(x; y)$ к точке $(x_0; y_0)$ в декартовой системе координат множество.

Общепринятым является требование того, чтобы значение предела функции $f(x, y)$ при $x \to x_0$, $y \to y_0$ будет равно A тогда и только тогда, когда величина A не будет зависеть от пути, по которому происходит приближение точки $M(x; y)$ к точке $M_0(x_0; y_0)$.

Постоянная величина A является **пределом функции** $f(x, y)$ **в точке** $M_0(x_0; y_0)$ при приближении точки $M(x; y)$ к точке $M_0(x_0; y_0)$ любым путем, если для любого наперед заданного сколь угодно малого положительного числа ε $(\varepsilon > 0)$ существует такое число δ, которое зависит от ε $(\delta = \delta(\varepsilon))$, что для всех точек $M(x; y)$ из δ-окрестности точки M_0 выполняется неравенство:

$$\left| f(x, y) - A \right| < \varepsilon.$$

Обозначение предела функции двух переменных:

$$\lim_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x,y) = A. \qquad (16.1)$$

Основные теоремы о пределе функций одной переменной распространяются и на случай функции двух переменных.

Пример 16.2. Найти предел функции:

а) $\dfrac{\sin xy}{x}$, если $x\to 0$, $y\to k$;

б) $z=\dfrac{2xy}{x^2+y^2}$, если $x\to 0$, $y\to 0$.

Решение:

а) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to k}} \dfrac{\sin xy}{x} = \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to k}} \dfrac{y\sin xy}{yx} = \lim\limits_{y\to k} y \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to k}} \dfrac{\sin xy}{xy} = k\cdot 1 = k$;

б) рассмотрим разные пути приближения точки $M(x;y)$ к точке $O(0;0)$. При приближении вдоль линии $y=0$ (ось Ox) функция $z=0$ (числитель равен 0, а знаменатель переменный). Поэтому в этом направлении предел функции равен 0. Аналогично при приближении вдоль линии $x=0$ (ось Oy) предел равен нулю.

Пусть точка $M(x;y)$ приближается к точке $O(0;0)$ по любой прямой $y=kx$.

Тогда:

$$f(x,y) = \frac{2xy}{x^2+y^2} = \frac{2xkx}{x^2+k^2x^2} = \frac{2k}{1+k^2};$$

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} f(x,y) = \frac{2k}{1+k^2}.$$

Получили, что предел зависит от углового коэффициента k, то есть от направления приближения точки $M(x;y)$ к точке $O(0;0)$. Поэтому в данном случае предел не существует.

Функция $f(x, y)$ является **непрерывной в точке** (x_0, y_0), если:

1) она определена в этой точке и ее окрестности;

2) существует конечный предел при $x \to x_0$ и $y \to y_0$;

3) этот предел равен значению функции в точке $(x_0; y_0)$.

Геометрическое толкование непрерывности функции: *график в точке* $(x_0; y_0)$ *является сплошной неразрывной поверхностью.*

Если в любой точке $(x_0; y_0)$ хотя бы одно из требований не выполняется, эта точка является точкой разрыва.

Функция $f(x, y)$ называется *непрерывной в области,* если она непрерывна в каждой внутренней точке области.

Если функция $f(x, y)$ непрерывна в каждой внутренней точке области и на ее границе, то такая функция является непрерывной на замкнутой области.

Для функций нескольких переменных выполняются теоремы о непрерывности функции: алгебраическая сумма, умножение и частное функций, непрерывных в некоторой точке $M_0(x_0; y_0)$, является также непрерывной функцией в этой точке (для частного необходимо, чтобы в этой точке знаменатель не равнялся нулю). Выполняется также теорема о непрерывности сложной функции.

Свойства функций нескольких переменных, непрерывных в замкнутой области, аналогичны свойствам функций одной переменной, непрерывной на отрезке.

16.3. Частные и полные приращения функции двух переменных. Частные производные

Пусть задана функция $z = f(x, y)$. Выберем произвольную точку $M_0(x_0; y_0)$ из области ее определения.

Зафиксируем значение переменной $y = y_0$ и придадим независимой переменной x приращение Δx. Тогда зависимая переменная z получит приращение, которое называют **частным приращением** z **по** x в точке $M_0(x_0, y_0)$ и обозначают $\Delta_x z$.

То есть частное приращение – это разность между значениями функции в точке $M\left(x_0+\Delta x; y_0\right)$ и в исходной точке $M_0\left(x_0, y_0\right)$:

$$\Delta_x z = f\left(x_0+\Delta x, y_0\right) - f\left(x_0, y_0\right). \qquad (16.2)$$

Аналогично, если зафиксировать переменную x ($x = x_0$) и придать приращение независимой переменной y, то есть из точки $M_0\left(x_0; y_0\right)$ перейти в точку $M\left(x_0; y_0+\Delta y\right)$, получим частное приращение z по y, которое соответственно равно:

$$\Delta_y z = f\left(x_0, y_0+\Delta y\right) - f\left(x_0, y_0\right). \qquad (16.3)$$

Если переменной x придать приращение Δx и, одновременно, переменной y придать приращение Δy и рассмотреть разницу между значениями функции в точке $M\left(x_0+\Delta x; y_0+\Delta y\right)$ и в точке $M_0\left(x_0; y_0\right)$, получим **полное приращение функции в точке** M_0:

$$\Delta z = f\left(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y\right) - f\left(x_0, y_0\right). \qquad (16.4)$$

Следует отметить, что полное приращение не равно сумме частных приращений, то есть

$$\Delta z \neq \Delta_x z + \Delta_y z.$$

Пусть $z = xy$.

Найдем приращения:

$$\Delta_x z = \left(x+\Delta x\right)y - xy = \Delta x y; \qquad \Delta_y z = x\left(y+\Delta y\right) - xy = x\Delta y;$$

$$\Delta z = \left(x+\Delta x\right)\left(y+\Delta y\right) - xy = \Delta x y + x\Delta y + \Delta x\Delta y.$$

Отсюда видно, что $\Delta z \neq \Delta_x z + \Delta_y z$.

Частной производной функции $z = f\left(x, y\right)$ по переменной x называется предел отношения частного приращения функции по соответствующей переменной $\Delta_x z$ к приращению самой независимой переменной Δx при условии, что приращение аргумента стремится к нулю

($\Delta x \to 0$). Частная производная функции $z = f(x, y)$ по переменной x имеет ряд обозначений: $z'_x,\ f'_x(x, y),\ \frac{\partial z}{\partial x},\ \frac{\partial f}{\partial x}$.

Таким образом, по определению можно записать:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta_x z}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x, y) - f(x, y)}{\Delta x}. \qquad (16.5)$$

Аналогично определяется частная производная по переменной y от функции $z = f(x, y)$:

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{\Delta_y z}{\Delta y} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{f(x, y+\Delta y) - f(x, y)}{\Delta y}. \qquad (16.6)$$

Эти производные являются аналогами производных функций одной переменной, но существенно отличаются от них тем, что как сама функция, так и ее производные зависят от двух переменных. Из того, что частные приращения были получены при условии, что одна из независимых переменных остается постоянной, следует, что правила определения частных производных не отличаются от правил дифференцирования функций одной переменной.

Заметим, что при нахождении частных производных другая независимая переменная (y при определении производной $\frac{\partial z}{\partial x}$ и x при определении $\frac{\partial z}{\partial y}$) считается постоянной величиной и дифференцирование происходит с использованием таблицы производных элементарных функций.

Пример 16.3.

Найти частные производные функции $z = \ln(x^2 + xy + y^2)$.

Решение.

Дифференцируем заданную функцию сначала по x, считая при этом переменную y постоянной, а затем по y, считая постоянной переменную x, по правилу дифференцирования сложной функции.

Получим:

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\ln\left(x^2+xy+y^2\right)\right)=$$

$$=\frac{1}{x^2+xy+y^2}\cdot\frac{\partial}{\partial x}\left(x^2+xy+y^2\right)=\frac{1}{x^2+xy+y^2}\left(2x+y\right);$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{1}{x^2+xy+y^2}\left(x+2y\right).$$

Упорядоченная пара частных производных функции $z=f\left(x,y\right)$ обозначается символом $grad\,f\left(x,y\right)$ и называется **градиентом функции** двух переменных. Градиент $grad\,f\left(x_0,y_0\right)$ функции $z=f\left(x,y\right)$ в точке $\left(x_0,y_0\right)$ показывает направление самого быстрого роста функции в точке $\left(x_0,y_0\right)$.

16.4. Производные высших порядков. Теорема о равенстве смешанных производных

Частные производные функции $z=f\left(x,y\right)$ являются также функциями независимых переменных x и y, и может появиться потребность в их повторном дифференцировании.

Как известно, второй производной является первая производная от первой производной. Поэтому после дифференцирования частных производных мы получим частные производные второго порядка функции $z=f\left(x,y\right)$:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)=\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_x'=z_{xx}''$$

– вторая частная производная по x;

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)=\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)_y'=z_{yy}''$$

– вторая частная производная по y;

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) = \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)'_y = z''_{xy}$$

– частная производная по y от производной по x;

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) = \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)'_x = z''_{yx}$$

– частная производная по y от производной по x.

Для двух частных производных первого порядка можно, соответственно, получить четыре производные второго порядка.

Производные $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$ и $\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$ называют **смешанными производными**.

Теорема. Если функция $z = f\;\; x, y$ и ее частные производные $\frac{\partial z}{\partial x}$, $\frac{\partial z}{\partial y}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$ определены и непрерывны в некоторой области, то смешанные производные не зависят от порядка дифференцирования, то есть:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}. \tag{16.7}$$

Таким образом, функция $z = f\;\; x, y$ двух переменных имеет только три разных частных производных второго порядка.

Пример 16.4. Найти частные производные второго порядка функции $z = y^2 e^x + x^2 y^3 + 1$.

Решение.

Сначала найдем частные производные первого порядка:

$$\frac{\partial z}{\partial x}=y^2e^x+2xy^3; \qquad \frac{\partial z}{\partial y}=2ye^x+3x^2y^2.$$

Найдем частные производные второго порядка:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=y^2e^x+2y^3; \qquad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=2e^x+6x^2y;$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\left(y^2e^x+2xy^3\right)'_y=2ye^x+6xy^2;$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}=\left(2ye^x+3x^2y^2\right)'_x=2ye^x+6xy^2.$$

Таким образом, $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\dfrac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}$.

Пример 16.5. Найти частные производные функции

$$u=\sqrt{\sin^2 x+\sin^2 y+\sin^2 z}.$$

Решение.

Как известно $(\sqrt{u})'=\dfrac{1}{2\sqrt{u}}\cdot u'$.

Применим это:

$$u'_x=\frac{1}{2\sqrt{\sin^2 x+\sin^2 y+\sin^2 z}}\cdot(\sin^2 x+\sin^2 y+\sin^2 z)'_x=$$

$$=\frac{2\sin x\cos x}{2\sqrt{\sin^2 x+\sin^2 y+\sin^2 z}}=\frac{\sin 2x}{2\sqrt{\sin^2 x+\sin^2 y+\sin^2 z}}.$$

Аналогично имеем: $u'_y=\dfrac{\sin 2y}{2\sqrt{\sin^2 x+\sin^2 y+\sin^2 z}}$;

$$u'_z=\frac{\sin 2z}{2\sqrt{\sin^2 x+\sin^2 y+\sin^2 z}}.$$

По определению полного приращения функции $z=f(x,y)$ при переходе от точки (x_0,y_0) к точке $(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y)$ имеем:

$$\Delta z=\Delta f(x_0,y_0)=f(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y)-f(x_0,y_0).$$

Если приращение функции можно изобразить в виде суммы линейной (относительно Δx и Δy) части и «добавки» (слагаемых высшего порядка):

$$\Delta f(x_0,y_0)=A\Delta x+B\Delta y+\varepsilon_1\Delta x+\varepsilon_2\Delta y, \tag{16.8}$$

где $\varepsilon_1,\varepsilon_2$ – бесконечно малые при $\Delta x\to 0$ и $\Delta y\to 0$; A, B – некоторые константы, то функция $z=f(x,y)$ называется *дифференцированной*, а выражение $A\Delta x+B\Delta y$ – ее **полным дифференциалом**, который обозначают df или dz:

$$dz=A\Delta x+B\Delta y.$$

Смысл определения дифференцируемости раскрывается, если преобразовать уравнение для полного приращения функции:

$$\begin{aligned}&f(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y)=f(x_0,y_0)+\Delta f(x_0,y_0)=\\&=f(x_0,y_0)+A\Delta x+B\Delta y+\varepsilon_1\Delta x+\varepsilon_2\Delta y.\end{aligned}$$

Отсюда, если Δx и Δy малы, то значение функции в точке $(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y)$ приблизительно равно значению функции в точке (x_0,y_0) плюс линейное приращение $A\Delta x+B\Delta y$. Получим приближенное значение функции:

$$f(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y)\approx f(x_0,y_0)+A\Delta x+B\Delta y=f(x_0,y_0)+df. \tag{16.9}$$

Вычислим коэффициенты A и B.

Для определения коэффициента A допустим, что $\Delta y=0$ и запишем выражение в таком виде:

$$f(x_0+\Delta x, y_0)-f(x_0,y_0)=A\Delta x+\varepsilon_1\Delta x.$$

Разделив обе части равенства на Δx, перейдем к пределу при $\Delta x \to 0$:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x, y_0) - f(x_0, y_0)}{\Delta x} = A + \lim_{\Delta x \to 0} \varepsilon_1 \Delta x.$$

Второе слагаемое правой части равно нулю и имеем:

$$A = (\partial f / \partial x)\Big|_{\substack{x = x_0 \\ y = y_0}}.$$

Аналогично можно найти (допустив $\Delta x = 0$ и $\Delta y \to 0$), что

$$B = (\partial f / \partial y)\Big|_{\substack{x = x_0 \\ y = y_0}}.$$

Таким образом, получили окончательное выражение для полного приращения функции $z = f(x, y)$ в точке (x_0, y_0):

$$\Delta z = \frac{\partial z}{\partial x}\bigg|_{\substack{x = x_0 \\ y = y_0}} \Delta x + \frac{\partial z}{\partial y}\bigg|_{\substack{x = x_0 \\ y = y_0}} \Delta y + \varepsilon_1 \Delta x + \varepsilon_2 \Delta y$$ ($\varepsilon_1, \varepsilon_2$ – бесконечные малые).

Выражение $\dfrac{\partial z}{\partial x}\Delta x + \dfrac{\partial z}{\partial y}\Delta y$, образующее главную часть полного приращения Δz, которая линейно зависит от приращения аргументов, называется **полным дифференциалом функции** $z = f(x, y)$.

Так как для независимых переменных их приращения и дифференциалы совпадают, то есть $\Delta x = dx, \Delta y = dy$, окончательно формула для полного дифференциала имеет вид:

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x} dx + \frac{\partial z}{\partial y} dy,$$

где каждое из слагаемых является частным дифференциалом по данному аргументу:

$d_x z = \dfrac{\partial z}{\partial x} dx$ – частный дифференциал функции z по аргументу x;

$d_y z = \frac{\partial z}{\partial y} dy$ – частный дифференциал функции z по аргументу y.

Следовательно:

$$f\left(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y\right) = f\left(x_0, y_0\right) + \frac{\partial f\left(x_0, y_0\right)}{\partial x} dx + \frac{\partial f\left(x_0, y_0\right)}{\partial y} dy + \varepsilon_1 \Delta x + \varepsilon_2 \Delta y,$$

или приближенно:

$$f\left(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y\right) \approx f\left(x_0, y_0\right) + \frac{\partial f\left(x_0, y_0\right)}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial f\left(x_0, y_0\right)}{\partial y} \Delta y. \quad (16.10)$$

Основным свойством дифференциала является инвариантность формы первого дифференциала, то есть равенство $dz = \frac{\partial z}{\partial x} dx + \frac{\partial z}{\partial y} dy$ выполняется независимо от того, есть ли переменные x и y независимыми или сами является функциями других аргументов.

Последнюю формулу удобно использовать для приближенного вычисления значения функции в точке.

Пример 16.6. Вычислить приближенно $\sqrt{\left(4{,}05\right)^2 + (2{,}93)^2}$.

Решение.

Пусть известно значение функции $z = f\left(x, y\right)$ в некоторой точке $\left(x_0, y_0\right)$, а необходимо найти ее значение в точке, близкой к данной $\left(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y\right)$. Рассмотрим функцию $z = \sqrt{x^2+y^2}$.

Близкими к заданным значениям аргументов и такими, что вычисление станет проще, являются $x_0 = 4$, $y_0 = 3$, $f\left(x_0, y_0\right) = \sqrt{16+9} = 5$.

Тогда: $x = x_0 + \Delta x = 4{,}05$, а $y = y_0 + \Delta y = 2{,}93$.

Откуда находим $\Delta x = 0{,}05$, $\Delta y = -0{,}93$.

Найдем дифференциал в точке $\left(x_0, y_0\right)$. Определим значения производных:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}},$$

и вычислим полный дифференциал:

$$dz\big|_{\substack{x=4\\y=3}} = \frac{4}{\sqrt{16+9}}\cdot 0,05 - \frac{3}{\sqrt{16+9}}\cdot 0,07 = -0,002.$$

Откуда

$$z(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y) = \sqrt{(4,05)^2+(2,93)^2} \approx 5-0,002 = 4,998.$$

Расчет на калькуляторе дал такой результат: 4,9987398. Как видно, погрешность составляет 0,0007398.

Пример 16.7. Найти полный дифференциал функции $z = x^y + y^x$ в точке $M(1;1)$.

Решение.

Находим частные производные:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = yx^{y-1} + y^x \ln y, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = x^y \ln x + xy^{x-1}.$$

В точке $M(1;1)$ $\dfrac{\partial z}{\partial x} = 1$, $\dfrac{\partial z}{\partial y} = 1$, поэтому $dz = dx + dy$.

Пример 16.8. Вычислить приближенно $(1,97)^{3,02}$.

Решение.

Рассмотрим функцию $z = x^y$ и точку $M(2;3)$. В этой точке $z = 2^3 = 8$.

По условию необходимо вычислить значение функции $z = x^y$ в точке $(1,97;3,02)$, то есть $\Delta x = -0,03$, а $\Delta y = 0,02$.

Вычислим частные производные $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ и $\dfrac{\partial z}{\partial y}$ в точке $M(2;3)$:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = yx^{y-1}; \qquad \frac{\partial z}{\partial y} = x^y \ln x.$$

$$\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_M = 3\cdot 2^2 = 12; \qquad \left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_M = 2^3\cdot \ln 2 \approx 8\cdot 0,603 = 4,824.$$

Таким образом, имеем:

$$(1{,}97)^{3{,}02} \approx 8 + 12 \cdot (-0{,}03) + 4{,}824 \cdot 0{,}02 = 7{,}736 .$$

Вопросы для самодиагностики

1. Что понимают под функцией нескольких переменных?
2. Что такое область определения функции двух переменных?
3. Что такое линия уровня?
4. Что называется графиком функции двух переменных?
5. Что называется пределом функции двух переменных?
6. Что такое частное приращение функции по x?
7. Как найти частную производную по x?
8. Какая взаимосвязь между градиентом функции и ее линией уровня?
9. Что называется полным дифференциалом?
10. Записать формулу, которая применяется в приближенных вычислениях.
11. Что называется частными производными второго порядка от функции с двумя неизвестными? Как они вычисляются?

Упражнения

Найти область определения функций:

16.1. $z = \sqrt{9 - x^2 - y^2}$.

16.2. $z = \ln(4 - x^2)$.

16.3. $z = \sqrt{\dfrac{x^2}{9} + \dfrac{y^2}{4} - 1}$.

16.4. $z = \sqrt{x} + \sqrt{y}$.

16.5. $z = \log_{1,7} \quad xy$.

16.6. $z = \sqrt{x-1} - \sqrt{2-y}$.

16.7. $z = \dfrac{1}{\sqrt{y - \sqrt{x}}}$.

16.8. $z = \ln \quad y^2 - 2x + 6$.

16.9. $z = \sqrt{y \sin x}$.

16.10. $z = \ln \quad \cos x$.

Найти частные производные следующих функций:

16.11. $z = x^2y + 3y^2 + 5x - \sqrt{2}$.

16.12. $z = (2y^3 - 6xy^2 + 3x^2)^5$.

16.13. $z = \sqrt{4 - x^2 - y^3}$.

16.14. $z = \dfrac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}$.

16.15. $z = (x^2 + y^2)\cos\dfrac{y}{x}$.

16.16. $z = \ln(x + \sqrt{x^2 + y^2})$.

16.17. $z = 2^{\sin 3xy}$.

16.18. $z = \cos^3(3x^2 - 5xy)$.

16.19. $z = x^{\sin y}$.

16.20. $z = (x^2 + 2x)^{2y-3}$.

16.21. $z = \dfrac{\cos(2y^3 - 3)}{x}$.

16.22. $z = 3x^2ye^{-xy}$.

Найти полные дифференциалы функций:

16.23. $z = \dfrac{\sqrt{x} - \sqrt{y}}{x + y}$.

16.24. $z = e^{xy}\quad x + y$.

16.25. $z = \ln\quad x^3 + y^3 - 3xy$.

16.26. $z = \sqrt[5]{x^5 - y^5}$.

16.27. $z = \sqrt{\ln\quad xy}$.

16.28. $u = arctg\quad x - y\ ^z$.

Вычислить значение полных дифференциалов:

16.29. Вычислить приближенно значение $1{,}03^2 \cdot 0{,}98^4$, применяя значение функции $z = x^2y^4$ при $x = 1$, $y = 1$.

16.30. Найти приближенно значение $\ln(\sqrt[3]{1{,}03} + \sqrt[4]{0{,}98} - 1)$, применяя значение функции $z = \ln(\sqrt[3]{x} + \sqrt[4]{y} - 1)$ при $x = 1$, $y = 1$.

16.31. Найти приближенно значение $\sqrt[3]{1{,}02^2 + 0{,}05^2}$, применяя значение функции $z = \sqrt[3]{x^2 + y^2}$ при $x = 1$, $y = 0$.

Найти частные производные второго порядка:

16.32. $z = 4x^3 + 3x^2y + 3xy^2 - y^3$.

16.33. $z = \dfrac{\cos x^2}{y}$.

17. Экстремум функции нескольких переменных

17.1. Необходимое условие экстремума функции нескольких переменных

Пусть функция $z = f(x, y)$ определена на множестве $D \subset R^2$ и точка $M_0(x_0; y_0)$ принадлежит этому множеству.

Говорят, что функция $z = f(x, y)$ в точке $M_0(x_0; y_0)$ имеет *локальный максимум (минимум),* если существует такая δ-окрестность точки $M_0(x_0; y_0)$, что для любой точки из этой окрестности выполняется неравенство:

$$f(x, y) \le (\ge) f(x_0, y_0).$$

Для обозначения локального максимума и минимума существует общий термин – локальный экстремум, или просто **экстремум**.

Теорема (*необходимое условие экстремума*). Если функция двух переменных $z = f(x, y)$ дифференцируема в точке $M_0(x_0; y_0)$ и имеет в этой точке экстремум, то все частные производные первого порядка в этой точке равны нулю:

$$\begin{cases} \left.\dfrac{\partial f}{\partial x}\right|_{\substack{x=x_0,\\ y=y_0}} = 0 \\ \left.\dfrac{\partial f}{\partial y}\right|_{\substack{x=x_0,\\ y=y_0}} = 0 \end{cases} \qquad (17.1)$$

Точки, в которых выполняется это условие, называются **стационарными** и могут не быть точками экстремума. Как и для функции одной переменной, выполнение этого условия является *необходимым условием экстремума*, однако не является достаточным.

Решив систему уравнений (17.1), определим координаты точек, в которых функция может иметь экстремум.

17.2. Достаточное условие экстремума функции нескольких переменных

Рассмотрим определитель, элементы которого являются производными второго порядка от функции $z = f(x, y)$. Он обозначается символом Δ:

$$\Delta = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x\, \partial y} \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial x\, \partial y} & \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2} \end{vmatrix}.$$

Теорема (*достаточное условие экстремума*). Если для функции $z = f(x, y)$ в стационарной точке $M_0(x_0; y_0)$ и в некоторой ее окрестности существуют все частные производные второго порядка этой функции и определитель Δ в этой точке положительный, то функция $z = f(x, y)$ достигает в точке $M_0(x_0; y_0)$ экстремума.

При этом,

если $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} > 0$, то в стационарной точке функция имеет минимум,

если $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} < 0$ – максимум.

Следовательно, достаточное условие экстремума для функции двух переменных имеет вид:

$$\Delta = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \right)^2 > 0. \qquad (17.2)$$

Если в стационарной точке определитель отрицателен, то функция локального экстремума в этой точке не имеет.

Если в стационарной точке определитель равен нулю, то приведенная выше теорема не отвечает на вопрос о существовании экстремума, и нужны дополнительные исследования.

Пример 17.1*.* Исследовать функцию $z = x^2 + y^2 - 4x + 6y$ на локальный экстремум.

Решение.

По необходимому условию экстремума проверим, имеет ли функция стационарные точки.

Определим производные первого порядка:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 2x - 4; \qquad \frac{\partial z}{\partial y} = 2y + 6.$$

Приравнивая эти производные нулю, получим систему уравнений для вычисления координат стационарной точки:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial z}{\partial x} = 0 \\ \dfrac{\partial z}{\partial y} = 0 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} 2x_0 - 4 = 0 \\ 2y_0 + 6 = 0 \end{cases}.$$

Отсюда получим, что стационарная точка $M_0(x_0; y_0)$ имеет координаты:

$$\begin{cases} x_0 = 2, \\ y_0 = -3. \end{cases}$$

По достаточному условию проверим, является ли эта точка точкой локального экстремума.

Для этого найдем все производные второго порядка и вычислим их значения в стационарной точке:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 2, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 2, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = 0.$$

Теперь вычислим определитель: $\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 4.$

Оказалось, что определитель является положительным, следовательно, функция в стационарной точке достигает экстремума.

Поскольку $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 2 > 0$, то имеет место локальный минимум.

Вычислим значение функции в точке $M_0(2,-3)$:

$$z_{\min} = 2^2 + (-3)^2 - 2 \cdot 2 + 6 \cdot (-3) = 27.$$

Пример 17.2. Исследовать функцию $z = x^2 - 4y^2 - 4x + 8y$ на локальный экстремум.

Решение.

Определим первые производные функции и вычислим координаты стационарной точки из системы уравнений, которую получили в соответствии с требованиями необходимого условия экстремума:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial z}{\partial x} = 2x - 4 \\ \dfrac{\partial z}{\partial y} = -8y + 8 \end{cases} \Rightarrow \quad \begin{cases} 2x_0 - 4 = 0 \\ -8y_0 + 8 = 0 \end{cases} \Rightarrow \quad \begin{cases} x_0 = 2 \\ y_0 = 1 \end{cases}.$$

По достаточному условию экстремума:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 2; \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = -8;, \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = 0;$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -8 \end{vmatrix} = -16 < 0.$$

Поскольку определитель отрицателен, то функция не имеет экстремум.

17.3. Понятие об условном экстремуме

Пусть функция $z = f(x,y)$ определена в области D и точка $M_0(x_0; y_0)$ принадлежит этой области.

При этом на независимые переменные наложено определенное условие:

$$\varphi(x,y) = 0.$$

Точка $M_0 \in X$ называется *точкой условного локального максимума (минимума) функции* $z = f(x,y)$, если вокруг этой точки существует такая δ-окрестность, что для всех точек этой окрестности выполняется неравенство:

$$f(x,y) \le\ \ge\ f(x_0,y_0) \text{ при условии } \varphi(x,y)=0. \qquad (17.3)$$

В этом случае можно также пользоваться термином **условный экстремум.**

Если уравнение $\varphi(x,y)=0$ можно решить относительно одной из переменных, то есть представить в явном виде эту переменную как функцию второй переменной, то подставив решение уравнения связи в выражение для функции $z = f(x,y)$, получим новую функцию, которая зависит только от одной переменной. Локальный экстремум этой новой функции и будет условным локальным экстремумом исходной функции.

То есть задача поиска условного экстремума сводится к решению задачи об определении локального экстремума функции одной переменной, то есть к поиску безусловного экстремума.

Пример 17.3. Найти условный экстремум функции $z = xy$, если $x + y = 1$.

Решение.

В данном случае можно из уравнения связи одну переменную выразить через другую и подставить в функцию, а затем исследовать ее на обычный экстремум.

Из уравнения связи имеем $y = 1 - x$. Подставляем в функцию $z = x(1-x)$. Получили функцию одной переменной.

Определяем производную $dz/dx = 1 - 2x$.

Критическая точка $x = 1/2$. Эта точка является точкой максимума (производная изменяет знак с «+» на «– »).

Следовательно, при $x = 1/2;\ y = 1/2$.

Находим значение функции:

$$z_{\max} = z\left(\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4}.$$

17.4. Метод множителей Лагранжа

Если уравнение связи нельзя решить относительно некоторой переменной, то чтобы найти условный экстремум функции $z = f(x, y)$ при наличии соотношения $\varphi(x, y) = 0$, составляют так называемую **функцию Лагранжа**:

$$F(x, y, \lambda) = F(x, y) + \lambda\varphi(x, y), \tag{17.4}$$

где λ – неопределенный постоянный множитель (*множитель Лагранжа*), и ищут экстремум этой вспомогательной функции.

Функция Лагранжа представляет собой сумму целевой функции $z = f(x, y)$ и функции ограничения $\varphi(x, y) = 0$, умноженной на новую независимую переменную λ.

Необходимые условия экстремума функции Лагранжа сводятся к системе трех уравнений:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial F}{\partial x} = \dfrac{\partial f}{\partial x} + \lambda \dfrac{\partial \varphi}{\partial x} = 0 \\ \dfrac{\partial F}{\partial y} = \dfrac{\partial f}{\partial y} + \lambda \dfrac{\partial \varphi}{\partial y} = 0. \\ \varphi(x, y) = 0 \end{cases} \tag{17.5}$$

Из этой системы находят x, y и λ.

Чтобы обосновать существование и вид экстремума в критической точке для функции двух переменных, можно использовать такое правило.

Составляем и вычисляем определитель третьего порядка:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 0 & \varphi'_x & \varphi'_y \\ \varphi'_x & F''_{xx} & F''_{xy} \\ \varphi'_y & F''_{xy} & F''_{yy} \end{vmatrix}, \tag{17.6}$$

элементами которого являются значения частных производных в критической точке.

Если $\Delta > 0$, то имеем условный максимум, а если $\Delta < 0$ – условный минимум.

Пример 17.4. Найти экстремум функции $f = x + y$ при условии, что $9x^2 + 4y^2 = 13$.

Решение.

Сформируем функцию Лагранжа:

$$F(x, y, \lambda) = x + y + \lambda \cdot (9x^2 + 4y^2 - 13)$$

и найдем ее частные производные первого порядка:

$$\frac{\partial F}{\partial x} = 1 + 18\lambda x; \qquad \frac{\partial F}{\partial y} = 1 + 8\lambda y.$$

Учитывая уравнение связи, получаем систему уравнений для определения координат стационарных точек функции Лагранжа:

$$\begin{cases} 1 + 18\lambda x = 0 \\ 1 + 8\lambda y = 0 \\ 9x^2 + 4y^2 - 13 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \dfrac{-1}{18\lambda} \\ y = \dfrac{-1}{8\lambda} \\ \dfrac{9}{324\lambda^2} + \dfrac{4}{64\lambda^2} - 13 = 0 \end{cases}.$$

Решив последнее уравнение системы, найдем, что $\lambda = \pm \dfrac{1}{12}$.

Следовательно, для функции $F(x, y)$ имеем стационарные точки $M_1\left(-\dfrac{2}{3}; -\dfrac{3}{2}\right)$ и $M_2\left(\dfrac{2}{3}; \dfrac{3}{2}\right)$.

Соответственно, для исходной функции точки M_1 и M_2 могут быть точками условного экстремума.

Для проверки выполнения достаточного условия экстремума вычислим определитель Δ в точках M_1 и M_2.

В точке M_1: $\Delta = -312 < 0$, следовательно функция имеет минимум: $f_{\min} = -13/6$.

В точке M_2: $\Delta = 312 > 0$, поэтому в этой точке функция имеет максимум: $f_{\max} = 13/6$.

17.5. Метод наименьших квадратов

Метод наименьших квадратов относится *к методам аппроксимации*, или приближенного восстановления функции по известным ее значениям в ряде точек.

На практике часто возникает задача о наилучшем подборе *эмпирических формул*, позволяющих представить в аналитической форме данные статистических наблюдений, изменений и т. д.

Задача формулируется следующим образом: имеются данные наблюдений в n точках:

$$x_1, x_2, ..., x_n \tag{17.7}$$

некоторой величины y и получены соответствующие значения

$$y_1, y_2, ..., y_n. \tag{17.8}$$

Нужно подобрать функцию определенного вида $y = f(x)$, чтобы она по возможности наиболее точно отражала неизвестную зависимость измеряемой величины y от параметров точек измерения x.

Таким образом, задача нахождения эмпирических формул состоит из двух этапов:

1) определения общего вида зависимости $y = f(x)$ или вида функции f с точностью до постоянных параметров (коэффициентов), входящих в нее;

2) подбора этих неизвестных коэффициентов таким образом, чтобы в точках наблюдений (17.7) подобранная функция наилучшим способом отвечала данным измерений (17.8).

Итак, пусть на первом этапе определено, что эмпирическая формула должна включать совокупность известных базовых функций

$$\varphi_1(x), \varphi_2(x), ..., \varphi_m(x), \tag{17.9}$$

то есть эта формула должна иметь вид:

$$f(x) = a_1\varphi_1(x) + a_2\varphi_2(x) + ...a_m\varphi_m(x), \tag{17.10}$$

где $a_1, a_2, ..., a_m$ – неизвестные параметры эмпирической функции.

Второй этап состоит в определении неизвестных параметров. Их следует выбрать такими, чтобы значения функции (17.10) по возможности наименее всего отклонялись бы в точках (17.7) от измеренных значений (17.8).

Метод наименьших квадратов состоит в минимизации суммы квадратов погрешностей (отклонений) функции (17.10) в точках (17.7) как функции от m аргументов – неизвестных параметров:

$$S(a_1, a_2, ..., a_m) = \sum_{i=1}^{n} \left(y_i - f(x_i)\right)^2 = \sum_{i=1}^{n} \left(y_i - \sum_{k=1}^{m} a_k \varphi_k(x_i) \right)^2. \quad (17.11)$$

Для установления точки минимума функции (17.11) m переменных нужно найти частные производные этой функции по всем аргументам и приравнять их к нулю. Отсюда получается система алгебраических уравнений относительно m неизвестных параметров:

$$A_{j1}a_1 + A_{j2}a_2 + ... + A_{jm}a_m = B_j, \quad j = \overline{1,m}. \quad (17.12)$$

Коэффициенты и свободные члены уравнений этой системы определяются по формулам:

$$A_{jk} = A_{kj} = \sum_{i=1}^{n} \varphi_j(x_i)\varphi_k(x_i), \quad B_j = \sum_{i=1}^{n} y_i \varphi_j(x_i), \quad j,k = \overline{1,n}. \quad (17.13)$$

Решение системы уравнений (17.12) представляет собой координаты точки локального минимума функции (17.11).

При обработке данных экономической статистики наиболее распространенным является *приближение эмпирической формулой в виде линейной функции одной переменной*.

В этом случае совокупность точек изменения (17.7) представляет собой набор значений аргумента $x_1, x_2, ..., x_n$, а совокупность функций (17.8) состоит из двух функций: x и 1.

Эмпирическая формула (17.9) имеет вид:

$$y = ax + b. \quad (17.14)$$

Неизвестные параметры a и b определяются из системы двух линейных уравнений (*системы нормальных уравнений*):

$$\begin{cases} A_{11}a + A_{12}b = B_1, \\ A_{21}a + A_{22}b = B_2, \end{cases} \tag{17.15}$$

в которой коэффициенты и свободные члены выражаются формулами:

$$A_{11} = \sum_{i=1}^{n} x_i^2,\ A_{12} = A_{21} = \sum_{i=1}^{n} x_i\ ,\ A_{22} = n,\ B_1 = \sum_{i=1}^{n} y_i x_i\ ,\ B_2 = \sum_{i=1}^{n} y_i\ . \tag{17.16}$$

Пример 17.5. Зависимость между переменными величинами X и Y получена на основе эксперимента и представлена следующей таблицей:

x_i	1	1,5	2	2,5	3
y_i	2,15	2,3	2,6	2,8	2,5

Найти формулу линейной зависимости $y(x) = ax + b$ между X и Y.

Решение.

Исходные данные и результаты вычислений поместим в таблицу:

n	x_i	y_i	x_i^2	$x_i y_i$
1	1	2,15	1	2,15
2	1,5	2,3	2,25	3,45
3	2	2,6	4	5,2
4	2,5	2,8	6,25	7
5	3	2,5	9	7,5
$\sum$	10	12,35	22,5	25,3

Подставим вычисленные суммы в систему нормальных уравнений (17.16):

$$\begin{cases} 22{,}5 \cdot a + 10 \cdot b = 25{,}3, \\ 10 \cdot a + 5 \cdot b = 12{,}35. \end{cases}$$

Решив эту систему, получим: $a = 0{,}24$, $b = 1{,}99$.

Искомая зависимость имеет вид: $y(x) = 0{,}24 \cdot x + 1{,}99$.

Вопросы для самодиагностики

1. Как определяется экстремум функции нескольких переменных?

2. Какие необходимые условия существования экстремума функции двух переменных?

3. Какие достаточные условия существования экстремума функции двух переменных?

4. Что называется условным экстремумом функции двух переменных?

5. В чем сущность метода множителей Лагранжа?

6. Описать алгоритм метода наименьших квадратов.

Упражнения

Исследовать на экстремум функции:

17.1. $z = x^2 + xy + y^2 - 2x - 3y$.

17.2. $z = x^2 + y^2 + xy - 4x - 5y$.

17.3. $z = 4 - \sqrt[3]{x^2 + y^2}$.

17.4. $z = x^3 + y^3 - 9xy$.

17.5. $z = x^4 + 2y^4 + 4$.

17.6. $z = 2x + 6y - 2\ln x - 18\ln y$.

17.7. $z = x^3 + 8y^3 + 6xy - 1$.

17.8. Найти экстремум функции $z = x^2 + y^2 - xy + x + y - 4$ при условии $x + y + 3 = 0$.

17.9. Найти экстремум функции $z = xy^2$ при условии $x + 2y - 1 = 0$.

17.10. Найти экстремум функции $z = \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y}$ при условии $x + y = 2$.

17.11. Найти экстремум функции $z = e^{x+2y}$ при условии $x^2 + y^2 = 1$.

Раздел 2. Интегральное исчисление. Дифференциальные уравнения. Ряды

18. Неопределенный интеграл

18.1. Понятие первообразной функции и неопределенного интеграла

Одной из основных задач дифференциального исчисления является поиск производной данной функции. Разнообразные исследования во многих направлениях науки, в том числе экономической, приводят к решению обратной задачи, а именно по данной функции $f(x)$ найти такую функцию $F(x)$, производная которой равна функции $f(x)$, то есть $F'(x) = f(x)$.

Восстановление функции по известной производной этой функции составляет одну из *основных задач интегрального исчисления*.

Следовательно, если

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{F(x+\Delta x) - F(x)}{\Delta x} = F'(x), \text{ то } dF(x) = F'(x)dx.$$

Обозначим $F'(x) = f(x)$, тогда дифференциал функции:

$$dF(x) = f(x)dx. \qquad (18.1)$$

Функция $F(x)$ называется **первообразной функцией** для функции $f(x)$ на множестве X, если для любой переменной $x \in X$ функция $F(x)$ дифференцируема и $F'(x) = f(x)$, или $dF(x) = f(x)dx$.

Примеры. Найти первообразные для функций:

18.1. Пусть функция $f(x) = 1/x$, тогда $F(x) = \ln|x|$ – первообразная для функции $f(x)$, потому что $(\ln|x|)' = 1/x$.

18.2. Если $f(x) = -x/\sqrt{1-x^2}$ на интервале $(-1;1)$, то $F(x) = \sqrt{1-x^2}$ – первообразная, потому что в любой точке x этого интервала $\left(\sqrt{1-x^2}\right)' = -x/\sqrt{1-x^2}$.

18.3. Если $f(x) = x^3$, то $F(x) = \dfrac{x^4}{4}$, потому что $\left(\dfrac{x^4}{4}\right)' = x^3$.

При этом также $F(x) = \dfrac{x^4}{4} + 1$, потому что $\left(\dfrac{x^4}{4} + 1\right)' = x^3$.

Следовательно, $F(x) = \dfrac{x^4}{4} + C$, где C – произвольная постоянная.

В примерах, которые приведены выше, общий вид всех первообразных для заданных функций будет:

1. $F(x) + C = \ln|x| + C, \quad f(x) = 1/x$.
2. $F(x) + C = \sqrt{1-x^2} + C$, $f(x) = -x/\sqrt{1-x^2}$.
3. $F(x) + C = \dfrac{x^4}{4} + C$, $f(x) = x^3$.

Теорема.

1. Если $F(x)$ – первообразная для $f(x)$ на X, то $F(x) + C$, также первообразная для $f(x)$, где C – постоянная величина.

2. Если $F_1(x)$ и $F_2(x)$ – две первообразные для $f(x)$ на X, то $F_1(x) - F_2(x) = C$, то есть эти функции отличаются одна от другой на постоянную величину.

Доказательство.

То, что вместе с функцией $F(x)$ функция $F(x) + C$ также является первообразной для функции $f(x)$, очевидно, так как

$$\left(F(x) + C\right)' = F'(x) = f(x).$$

Для доказательства второй части теоремы составим функцию:

$$\varphi(x) = F_1(x) - F_2(x),$$

где $F_1'(x) = f(x)$ и $F_2'(x) = f(x)$, поскольку эти функции первообразные для $f(x)$.

Тогда $\varphi'(x) = F_1'(x) - F_2'(x) = f(x) - f(x) = 0$, $x \in X$.

Откуда, функция $\varphi(x) = C$, то есть $F_1(x) - F_2(x) = C$.

Теорема доказана.

Из данной теоремы вытекает, что если $F(x)$ – одна из первообразных для $f(x)$, то множество всех первообразных имеет вид $F(x) + C$.

Если функция $F(x)$ – первообразная для функции $f(x)$, то множество функций $F(x) + C$, где C– произвольная постоянная, называется **неопределенным интегралом** от функции $f(x)$ и обозначается таким образом:

$$\int f(x)\,dx = F(x) + C, \tag{18.2}$$

где символ $\int$ – интеграл, а $f(x)\,dx$– подынтегральное выражение, $f(x)$ – подынтегральная функция, x – переменная интегрирования.

Операция восстановления функции по ее производной, или нахождение $F(x) + C$ функции $f(x)$, называется *интегрированием* $f(x)$.

Из геометрического содержания производная $F'(x)$ является угловым коэффициентом касательной к кривой $y = F(x)$ в точке с абсциссой x. Тогда найти первообразную для $f(x)$ значит найти такую кривую $F(x)$, что угловой коэффициент касательной к ней в произвольной точке x был бы равен значению $f(x)$ в этой точке.

Из определения неопределенного интеграла можно сделать вывод: для того чтобы проверить правильно ли выполнено интегрирование, достаточно продифференцировать результат и получить при этом подынтегральную функцию.

Свойства неопределенного интеграла

1. Производная от неопределенного интеграла по независимой переменной равна подынтегральной функции, то есть:

$$\left(\int f(x)\,dx\right)' = f(x). \tag{18.3}$$

2. Дифференциал от неопределенного интеграла равен подынтегральному выражению, то есть:

а) $d\int f(x)\,dx = f(x)\,dx$;

б) $\int dF(x) = F(x) + C$.

3. Постоянный множитель можно выносить за знак интеграла:

$$\int Af(x)\,dx = A\int f(x)\,dx.$$

4. Неопределенный интеграл от алгебраической суммы двух (или конечного числа) функций равен алгебраической сумме интегралов от этих функций:

$$\int \left(f_1(x) \pm f_2(x)\right) dx = \int f_1(x)\,dx \pm \int f_2(x)\,dx. \tag{18.4}$$

5. Если в подынтегральной функции переменную интегрирования умножить на любой постоянный множитель k, то первообразная подынтегральной функции делится на этот множитель:

$$\int f(kx)\,dx = \frac{1}{k}F(kx) + C, \tag{18.5}$$

а также

$$\int f(kx+b)\,dx = \frac{1}{k}F(kx+b) + C. \tag{18.6}$$

Все свойства доказываются дифференцированием правых частей приведенных равенств.

18.2. Таблица основных интегралов. Правила интегрирования

Составим таблицу основных интегралов. Доказательство всех формул осуществляем дифференцированием их правых частей.

1. $\int x^n dx = \dfrac{x^{n+1}}{n+1} + C, \quad n \neq -1$; $\left(\dfrac{x^{n+1}}{n+1} + C\right)' = x^n$.

2. $\int \dfrac{dx}{x} = \ln|x| + C; \quad \ln|x| + C\ ' = \dfrac{1}{x}$.

3. $\int \sin x dx = -\cos x + C$.

4. $\int \cos x dx = \sin x + C; \quad \sin x + C\ ' = \cos x$.

5. $\int \dfrac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + C; \quad \operatorname{tg} x + C\ ' = \dfrac{1}{\cos^2 x}$.

6. $\int \dfrac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x + C; \quad -\operatorname{ctg} x + C\ ' = \dfrac{1}{\sin^2 x}$.

7. $\int \operatorname{tg} x dx = -\ln|\cos x| + C; \quad -\ln|\cos x| + C\ ' = \operatorname{tg} x$.

8. $\int \operatorname{ctg} x dx = \ln|\sin x| + C; \quad \ln|\sin x| + C\ ' = \operatorname{ctg} x$.

9. $\int a^x dx = \dfrac{a^x}{\ln a} + C, \ a > 0; \ a \neq 1$; $\left(\dfrac{a^x}{\ln a} + C\right)' = a^x$.

10. $\int e^x dx = e^x + C; \quad e^x + C\ ' = e^x$.

11. $\int \dfrac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \arcsin\dfrac{x}{a} + C, \quad -a < x < a$; $\left(\arcsin\dfrac{x}{a} + C\right)' = \dfrac{1}{\sqrt{a^2 - x^2}}$.

12. $\int \dfrac{dx}{a^2 + x^2} = \dfrac{1}{a}\operatorname{arctg}\dfrac{x}{a} + C, \quad a \neq 0$; $\left(\dfrac{1}{a}\operatorname{arctg}\dfrac{x}{a} + C\right)' = \dfrac{1}{a^2 + x^2}$.

13. $\int \frac{dx}{x^2-a^2} = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right| + C;\quad \left(\frac{1}{2a}\ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right| + C\right)' = \frac{1}{x^2-a^2}$.

14. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \ln\left|x + \sqrt{x^2 \pm a^2}\right| + C;\quad \left(\ln\left|x + \sqrt{x^2 \pm a^2}\right| + C\right)' = \frac{1}{\sqrt{x^2 \pm a^2}}$.

Примеры. Найти интегралы.

18.4. $\int x^5 dx = \frac{x^6}{6} + C$.

18.5. $\int (3x-1)^5 dx = \frac{(3x-1)^6}{3\cdot 6} + C$.

18.6. $\int (3x^2-1)^2 dx = \int (9x^4 - 6x^2 + 1)\, dx =$

$$= 9\int x^4 dx - 6\int x^2 dx + \int dx = \frac{9x^5}{5} - \frac{6x^3}{3} + x + C.$$

18.7. $\int \frac{dx}{4x^2+9} = \frac{1}{2\cdot 3}\operatorname{arctg}\frac{2x}{3} + C$.

18.8. $\int \frac{dx}{\sqrt{4x^2 \pm 9}} = \frac{1}{2}\ln\left|2x + \sqrt{4x^2 \pm 9}\right| + C$.

18.9. $\int \frac{dx}{\sqrt{9-4x^2}} = \frac{1}{2}\arcsin\frac{2x}{3} + C$.

Для проверки найденных интегралов нужно найти производные от полученных первообразных и доказать, что $F'(x) = f(x)$.

18.3. Замена переменной в неопределенном интеграле

Если неопределенный интеграл не является табличным, то во многих случаях к цели приведет метод интегрирования с помощью замены переменной, который является основным методом вычисления интегралов.

Метод подстановки, или замены переменной, играет одну из основных ролей в интегральном исчислении.

Пусть нужно найти интеграл $\int f\ \ \varphi\ \ x\ \ \ \varphi'\ \ x\ dx$, где подынтегральная функция непрерывна.

Сделаем замену переменной, обозначим $t=\varphi(x)$, тогда:

$$\int f\ \ \varphi\ \ x\ \ \ \varphi'\ \ x\ dx=\int f(t)dt, \tag{18.7}$$

где $dt=\varphi'(x)dx$.

Допустим, что первообразная функции $f(t)$ известна, то есть:

$$\int f(t)dt=F(t)+C,$$

тогда:

$$\int f\ \ \varphi\ \ x\ \ \ \varphi'\ \ x\ dx=F(\varphi(x))+C. \tag{18.8}$$

Примеры. Найти интегралы:

18.10. $\int e^{x^2}xdx.$

Решение.

Сделаем замену $t=x^2$, тогда $2xdx=dt$, а $xdx=\frac{dt}{2}$.

Перепишем интеграл:

$$\int e^{x^2}xdx=\int e^t\frac{dt}{2}=\frac{1}{2}\int e^t dt=\frac{1}{2}e^t+C=\frac{1}{2}e^{x^2}+C.$$

18.11. $\int\frac{2x+3}{x^2+3x+5}dx$.

Решение.

Взяв $x^2+3x+5=t$, $\ 2x+3\ \ dx=dt$, получим:

$$\int\frac{2x+3}{x^2+3x+5}dx=\int\frac{1}{t}dt=\ln|t|+C=\ln\left|x^2+3x+5\right|+C.$$

Рассмотрим замену переменной в некоторых интегралах вида $\int f(x)dx$, которые непосредственно вычислить нельзя.

Пусть переменная интегрирования $x=\varphi(t)$, причем $\varphi(t)$ – непрерывная функция, которая имеет непрерывную производную, а также обратную функцию $t=t(x)$.

Тогда $dx=\varphi'(t)dt$, и интеграл после подстановки новой переменной t будет иметь вид:

$$\int f(x)dx=\int f(\varphi(t))\varphi'(t)dt. \qquad (18.9)$$

Пример 18.12. Найти $\int x\sqrt{x+1}dx$.

Решение.

Сделаем замену $x+1=t^2$, то есть $x=t^2-1$, откуда $dx=2tdt$.
Имеем:

$$\int x\sqrt{x+1}dx=\int(t^2-1)t\cdot 2tdt=2\int(t^4-t^2)dt=2\left(\frac{t^5}{5}-\frac{t^3}{3}\right)+C.$$

Теперь возвращаемся к переменной x, $t=\sqrt{x+1}$.

Следовательно, $\int x\sqrt{x+1}dx=2\left(\frac{\sqrt{(x+1)^5}}{5}-\frac{\sqrt{(x+1)^3}}{3}\right)+C$.

Пример 18.13. Найти $\int\frac{dx}{1+\sqrt{x}}$.

Решение.

Сделаем замену $x=t^2$, тогда $dx=2tdt$.
Имеем:

$$\int\frac{dx}{1+\sqrt{x}}=\int\frac{2tdt}{1+t}=2\int\frac{tdt}{1+t}=2\int\frac{t+1-1}{1+t}dt=2\int\left(\frac{t+1}{t+1}-\frac{1}{t+1}\right)dt=$$
$$=2\int\left(1-\frac{1}{t+1}\right)dt=2\left(\int dt-\int\frac{dt}{t+1}\right).$$

Итак, $\int \frac{dx}{1+\sqrt{x}} = 2\left(t - \ln|t+1|\right) + C$.

Возвращаемся к переменной x: $x = t^2$, $t = \sqrt{x}$.

Таким образом, $\int \frac{dx}{1+\sqrt{x}} = 2\left(\sqrt{x} - \ln\left|\sqrt{x}+1\right|\right) + C$.

Пример 18.14. Найти $\int \sqrt{a^2 - x^2}\,dx.$

Решение.

Если $x = a\sin t$, то $\sqrt{a^2 - x^2} = a\sqrt{1-\sin^2 t} = a\cos t$ и $dx = a\cos t dt.$

Следовательно, имеем:

$$\int \sqrt{a^2 - x^2}\,dx = \int a\cos t \cdot a\cos t dt = a^2 \int \cos^2 t dt = \frac{a^2}{2} \int \left(1+\cos 2t\right) dt =$$

$$= \frac{a^2}{2}\int dt + \frac{a^2}{2}\int \cos 2t dt = \frac{a^2}{2}t + \frac{a^2}{4}\sin 2t + C.$$

Использована формула

$$\cos^2 t = \frac{1+\cos 2t}{2}.$$

Так как $t = \arcsin\frac{x}{a}$, $\sin 2t = 2\sin t\cos t$, то:

$$\int \sqrt{a^2 - x^2}\,dx = \frac{a^2}{2}t + \frac{a^2}{4}\sin 2t + C =$$

$$= \frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{a} + \frac{a^2}{2}\frac{x}{a}\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}} =$$

$$= \frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{a} + \frac{x}{a}\sqrt{a^2 - x^2} + C.$$

18.4. Интегрирование по частям

Пусть $u = u(x)$, $v = v(x)$ – дифференцируемые функции аргумента x. Тогда $d(uv) = vdu + udv$, откуда $udv = d(uv) - vdu$.

Интегрируя это равенство, получим:

$$\int udv = uv - \int vdu. \qquad (18.10)$$

Это и является *формулой интегрирования по частям*, она используется тогда, когда $\int vdu$ не более сложный, чем $\int udv$.

Формула используется для нахождения интеграла $\int f(x)dx$, если $f(x)$ имеет вид:

1. $P_n(x)a^{bx}$; $P_n(x)e^x$; $P_n(x)\sin mx$; $P_n(x)\cos mx$.

2. $P_n(x)\arcsin x$; $P_n(x)\arccos x$; $P_n(x)\operatorname{arc\,tg} x$; $P_n(x)\operatorname{arcctg} x$; $P_n(x)\ln x$, где $P_n(x)$ – многочлен.

Интегралы такого типа являются стандартными и вычисляются только по формуле интегрирования по частям.

При этом в интегралах первого вида за u берем многочлен $P_n(x)$, а в интегралах второго вида трансцендентную функцию.

Примеры. Найти интегралы:

18.15. $\int (x+1)\sin 2x dx$.

Решение.

Положим $u = x$, а $dv = \sin 2x dx$.

Тогда $du = dx$, $v = \int \sin 2x dx = -\dfrac{\cos 2x}{2}$.

Теперь, используя формулу (18.10), получаем:

$$\int (x+1)\sin 2x = -\frac{1}{2}\cos 2x + \frac{1}{4}\sin 2x - \frac{1}{2}x\cos 2x + C.$$

18.16. $\int x^2e^xdx$.

Решение.

Пусть $u=x^2, dv=e^xdx$. Тогда $du=2xdx, \quad v=\int e^xdx=e^x$.

Получим $\int x^2e^xdx=x^2e^x-2\int xe^xdx$.

Применяя к интегралу $\int xe^xdx$ формулу (18.10), вычисляем данный интеграл:

$$\int x^2e^xdx=x^2e^x-2\int xe^xdx=x^2e^x-2(xe^x-e^x)+C.$$

18.17. $\int \arcsin xdx$.

Решение.

Обозначим

$$u=\arcsin x, dv=dx; du=\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}, v=x.$$

Следовательно, применив формулу (18.10), получим:

$$\int \arcsin xdx=x\arcsin x-\int\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}dx.$$

Пусть $t=1-x^2, dt=-2xdx$, тогда $\int\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}dx=-\sqrt{1-x^2}$.

Следовательно, $\int \arcsin xdx=x\arcsin x-\sqrt{1-x^2}+C$.

18.18. $\int\frac{x\cos xdx}{\sin^3 x}$.

Решение.

Пусть $u=x$, а $dv=\frac{\cos xdx}{\sin^3 x}$, тогда $du=dx$, чтобы найти v нужно сначала сделать такую замену $\sin x=t$, тогда $dt=\cos xdx$, а $dv=\frac{dt}{t^3}$, значит $v = \int \frac{dt}{t^3} = -\frac{1}{t^2} = -\frac{1}{\sin^2 x}$.

Теперь по формуле интегрирования по частям получим:

$$\int \frac{x \cos x dx}{\sin^3 x} = -\frac{x}{\sin^2 x} + \int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\frac{x}{\sin^2 x} - c\,\mathrm{tg}\, x + C.$$

Рассмотрим еще один тип интегралов, которые берутся лишь по частям. Это интегралы вида $\int e^{ax} \sin bx dx$, $\int e^{ax} \cos bx dx$, $\int \sin\ \ln x\ dx$, $\int \cos\ \ln x\ dx$, $\int \sqrt{x^2 + a^2} dx$, в которых после двукратного применения формулы интегрирования по частям получается исходный интеграл.

В этом случае мы приходим к линейному уравнению относительно искомого интеграла.

Примеры. Найти интегралы.

18.19. $\int e^x \sin x dx$.

Решение.

В интеграле: $u = e^x,\ du = e^x dx;\ dv = \sin x dx,\ v = \int \sin x dx = -\cos x$.

Следовательно $\int e^x \sin x dx = -e^x \cos x + \int e^x \cos x dx.$

$\int e^x \cos x dx$ еще раз берем по частям.

Получим:

$$\int e^x \cos x dx = e^x \sin x - \int e^x \sin x dx,$$

обозначив $u = e^x,\ du = e^x dx\ \ dv = \cos x dx,\ v = \int \cos x dx = \sin x$.

Таким образом:

$$\int e^x \sin x dx = -e^x \cos x + e^x \sin x - \int e^x \sin x dx,$$

или

$$2\int e^x \sin x dx = -e^x \cos x + e^x \sin x + C,$$

окончательно:

$$\int e^x \sin x dx = \frac{e^x}{2}\left(\sin x - \cos x\right) + C.$$

18.20. $\int \sqrt{x^2 + a^2} dx$.

Решение.

Пусть $u = \sqrt{x^2 + a^2}$, $dv = dx$.

Тогда,

$$du = \frac{1}{2\sqrt{x^2 + a^2}} \cdot 2x dx = \frac{x dx}{\sqrt{x^2 + a^2}}, \ v = \int dx = x.$$

По формуле интегрирования по частям имеем:

$$\int \sqrt{x^2 + a^2} dx = x\sqrt{x^2 + a^2} - \int \frac{x^2 dx}{\sqrt{x^2 + a^2}}.$$

В числителе последнего интеграла прибавим и отнимем a^2, то есть:

$$\int \sqrt{x^2 + a^2} dx = x\sqrt{x^2 + a^2} - \int \frac{x^2 + a^2 - a^2}{\sqrt{x^2 + a^2}} dx =$$

$$= x\sqrt{x^2 + a^2} - \int \sqrt{x^2 + a^2} dx + a^2 \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + a^2}} =$$

$$= x\sqrt{x^2 + a^2} - \int \sqrt{x^2 + a^2} dx + a^2 \ln\left|x + \sqrt{x^2 + a^2}\right|.$$

Решим уравнение относительно исходного интеграла, то есть:

$$2\int \sqrt{x^2 + a^2} dx = x\sqrt{x^2 + a^2} + a^2 \ln\left|x + \sqrt{x^2 + a^2}\right|.$$

Следовательно,

$$\int \sqrt{x^2 + a^2} dx = \frac{1}{2}\left(x\sqrt{x^2 + a^2} + a^2 \ln\left|x + \sqrt{x^2 + a^2}\right|\right) + C.$$

18.5. Интегрирование рациональных дробей

Рассмотрим интеграл $I=\int\frac{dx}{ax^2+bx+c}$.

Для вычисления этого интеграла сделаем такие преобразования: выделим полный квадрат из квадратного трехчлена и получим квадратный двучлен:

$$ax^2+bx+c=a\left(x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}\right)=a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2+\frac{c}{a}-\frac{b^2}{4a^2}\right]=$$

$$=a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2+\frac{4ac-b^2}{a}\right]=a\ \ t^2\pm m^2\ \ ,$$

где $t=x+\frac{b}{2a}$, $\left(x=t-\frac{b}{2a}\right)$, $\frac{4ac-b^2}{4a^2}=\pm m^2$. В последнем равенстве берется знак плюс, если $4ac-b^2>0$, и знак минус, если $4ac-b^2<0$.

Таким образом, интеграл будет иметь вид:

$$I=\frac{1}{a}\int\frac{dt}{t^2+m^2},\quad \text{или}\quad I=\frac{1}{a}\int\frac{dt}{t^2-m^2}.$$

Получили табличные интегралы.

Рассмотрим интеграл общего вида: $I=\int\frac{Ax+B}{ax^2+bx+c}dx$.

В квадратном трехчлене выделим полный квадрат, проведем замену переменной и запишем данный интеграл в виде суммы двух интегралов:

$$\int\frac{Ax+B}{ax^2+bx+c}dx=\frac{1}{a}\int\frac{A\left(t-\frac{b}{2a}\right)+B}{t^2\pm m^2}dt=$$

$$=\frac{A}{2a}\int\frac{2t}{t^2\pm m^2}dt+\frac{1}{a}\int\frac{\left(B-\frac{Ab}{2a}\right)}{t^2\pm m^2}dt,$$

где первый интеграл в правой части этого равенства равен модулю натурального логарифма знаменателя дроби, а второй – табличный.

Пример 18.30. Найти интеграл $\int \frac{3x+2}{2x^2+6x+5}$.

Решение.

Из квадратного трехчлена выделим полный квадрат, получим:

$$\frac{1}{2}\int \frac{3x+2}{x^2+3x+\frac{5}{2}}dx = \frac{1}{2}\int \frac{3x+2}{\left(x+\frac{3}{2}\right)^2+\frac{5}{2}-\frac{9}{4}}dx.$$

Сделаем замену переменной, положив

$$x+\frac{3}{2}=t, \quad x=t-\frac{3}{2}, \quad dx=dt:$$

$$2\int \frac{3t-\frac{9}{2}+2}{t^2+\frac{1}{4}}dt = \frac{1}{2}\int \frac{3t-\frac{5}{2}}{t^2+\frac{1}{4}}dt = = \frac{3}{4}\int \frac{2t}{t^2+\frac{1}{4}}dt - \frac{5}{4}\int \frac{dt}{t^2+\frac{1}{4}} =$$

$$= \frac{3}{4}\ln\left(t^2+\frac{1}{4}\right) - \frac{5}{4}2\operatorname{arctg}2t + C = \frac{3}{4}\ln\left(x^2+3x+\frac{5}{2}\right) - \frac{5}{4}2\operatorname{arctg}\ 2x+3\ + C.$$

Рассмотрим далее интегралы вида:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}} \quad \text{и} \quad \int \frac{Ax+B}{\sqrt{ax^2+bx+c}}dx.$$

Интегралы этого типа с помощью преобразований, а именно выделения полного квадрата в квадратном трехчлене и замены переменной приводятся к табличным интегралам.

Отметим, что квадратный трехчлен ax^2+bx+c при этом должен быть положительным $ax^2+bx+c>0$.

Пример 18.22. Найти интеграл $\int \frac{dx}{\sqrt{2+8x-2x^2}}$.

Решение.

$$\int \frac{dx}{\sqrt{-2\left(x^2-4x-1\right)}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \int \frac{dx}{\sqrt{-\left(x-2\right)^2-5}} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} \int \frac{d(x-2)}{\sqrt{5-\left(x-2\right)^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \arcsin \frac{x-2}{\sqrt{5}} + C.$$

Рациональной функцией называется отношение двух многочленов: $\frac{P_n(x)}{Q_m(x)}$. Рациональная дробь $\frac{P_n(x)}{Q_m(x)}$ называется *правильной*, если степень многочлена числителя меньше степени многочлена знаменателя, то есть когда $n<m$, и *неправильной* – в противоположном случае, когда $n \geq m$.

Рациональную неправильную дробь всегда можно записать в виде:

$$\frac{P_n(x)}{Q_m(x)} = S_k(x) + \frac{P_l(x)}{Q_m(x)},$$

где $S_k(x), P_l(x)$ – многочлены, причем степень многочлена $P_l(x)$ меньше степени многочлена $Q_m(x)$. Для этого нужно разделить числитель на знаменателя по правилу деления многочленов.

Следовательно, интегрирование неправильной рациональной дроби сводится к интегрированию целой части (многочлена) и правильной рациональной дроби.

Рассмотрим интегрирование элементарных дробей типа:

1) $\frac{A}{x-a}$;

2) $\frac{A}{\left(x-a\right)^k}$ (k – целое, $k \geq 2$);

3) $\dfrac{Ax+B}{x^2+px+q}$ ($p^2-4q<0$, то есть квадратный трехчлен не имеет действительных корней).

Для вычисления интегралов $\int\dfrac{Adx}{x-a}$ и $\int\dfrac{Adx}{x-a\ ^{k}}$ нужно сделать замену переменной $t=x-a$, а $dt=dx$.

Тогда:

$$\int\frac{Adx}{x-a}=A\int\frac{dt}{t}=A\ln|t|+C=A\ln|x-a|+C.$$

$$\int\frac{Adx}{x-a\ ^{k}}=A\int\frac{dt}{t^k}=A\int t^{-k}dt=A\frac{t^{-k+1}}{-k+1}+C=\frac{A}{1-k}\cdot\frac{1}{x-a\ ^{k-1}}+C.$$

Для вычисления интеграла 3) в знаменателе выделяем полный квадрат и делаем замену:

$$\int\frac{Ax+B\ \ dx}{x^2+px+q}=\int\frac{Ax+B\ \ dx}{x^2+2\cdot\frac{p}{2}x+\frac{p^2}{4}+q-\frac{p^2}{4}}=\int\frac{Ax+B\ \ dx}{\left(x+\frac{p}{2}\right)^2+q-\frac{p^2}{4}}.$$

Замена $x+\dfrac{p}{2}=t, dx=dt$.

Теперь:

$$\int\frac{Ax+B\ \ dx}{x^2+px+q}=\int\frac{A\left(t-\frac{p}{2}\right)+B}{t^2+q-\frac{p^2}{4}}dt=\int\frac{At-\frac{Ap}{2}+B}{t^2+q-\frac{p^2}{4}}dt.$$

Последний интеграл запишем как сумму двух интегралов, а именно:

$$\int\frac{Ax+B\ \ dx}{x^2+px+q}=\int\frac{Atdt}{t^2+q-\frac{p^2}{4}}+\int\frac{B-\frac{Ap}{2}}{t^2+q-\frac{p^2}{4}}dt,\ \text{если } q-\frac{p^2}{4}>0.$$

Возвращаемся к переменной x:

$$\int \frac{(Ax+B)\,dx}{x^2+px+q} = \frac{A}{2}\ln\left|x^2+px+q\right| + \frac{B-\frac{Ap}{2}}{\sqrt{q-\frac{p^2}{4}}}\operatorname{arctg}\frac{x+\frac{p}{2}}{\sqrt{q-\frac{p^2}{4}}} + C =$$

$$= \frac{A}{2}\ln\left|x^2+px+q\right| + \frac{2B-Ap}{\sqrt{4q-p^2}}\operatorname{arctg}\frac{2x+p}{\sqrt{4q-p^2}} + C.$$

Рассмотрим общий подход к интегрированию правильной рациональной дроби $\frac{P_n(x)}{Q_m(x)}$, где $n<m$.

Для этого нужно:

1. Разложить знаменатель $Q_m(x)$ на простые действительные множители. По основной теореме алгебры это разложение может иметь линейные и квадратичные множители:

$$Q_m(x) = (x-a)^k \ldots (x-b)^l \cdot (x^2+px+q)^s \ldots (x^2+cx+d)^r,$$

при этом квадратичные трехчлены не имеют действительные корни.

2. Написать разложение данной рациональной дроби на элементарные (самые простые) дроби в таком виде:

$$\frac{P_n(x)}{Q_m(x)} = \frac{A_1}{x-a} + \frac{A_2}{(x-a)^2} + \ldots + \frac{A_k}{(x-a)^k} +$$

$$+ \frac{B_1}{x-b} + \frac{B_2}{(x-b)^2} + \ldots + \frac{B_l}{(x-b)^l} +$$

$$+ \frac{M_1x+N_1}{x^2+px+q} + \frac{M_2x+N_2}{(x^2+px+q)^2} + \ldots + \frac{M_sx+N_s}{(x^2+px+q)^s} +$$

$$+ \frac{C_1x+D_1}{x^2+cx+d} + \frac{C_2x+D_2}{(x^2+cx+d)^2} + \ldots + \frac{C_rx+D_r}{(x^2+cx+d)^r},$$

где $A_1,\ldots,B_1,\ldots,M_1,\ldots,N_1,\ldots,C_1,\ldots,D_1,\ldots$ – некоторые постоянные.

Нужно заметить, что в этом разложении будет столько дробей, сколько корней имеет многочлен $Q_m(x)$, включая их кратность $(k,l,s,\ldots,r)$. Знаменателями простых дробей являются все целые степени каждого множителя $Q_m(x)$, начиная с первой степени и заканчивая той степенью, которая имеет множитель в разложении $Q_m(x)$.

Числителями простых дробей будут или постоянные $A_1, A_2, \ldots$, или линейные функции $M_1 x + N_1$, в зависимости от того, есть ли в знаменателе дроби какая-либо степень линейной или квадратичной функции.

3. Избавиться от знаменателя в последнем расписании, для чего нужно умножить обе части равенства на $Q_m(x)$.

4. Составить и решить систему уравнений, сравнивая коэффициенты при одинаковых степенях x в обеих частях полученного тождества. (Количество этих уравнений должно равняться количеству неизвестных $A_1,\ldots,B_1,\ldots,M_1,\ldots,N_1,\ldots,C_1,\ldots,D_1,\ldots$).

Систему уравнений для нахождения неизвестных можно найти иначе. Учитывая, что тождество имеет место при любых значениях x, присваиваем x произвольные числовые значения. Как правило x присваивают значения корней $Q_m(x)$. Также можно комбинировать эти способы.

5. Решить полученную систему уравнений. Найденные значения подставить в разложение рациональной дроби.

Следовательно, интегрирование правильной рациональной дроби сводится к интегрированию элементарных дробей.

Примеры. Найти интегралы.

18.23. $\int \frac{(x+2)\,dx}{x^2+5x-6}$.

Решение.

Приравняем знаменатель подынтегральной функции к нулю: $x^2+5x-6=0$, откуда имеем корни $x_t = 1;\ x_2 = -6$.

Тогда подынтегральную дробь можно переписать так:

$$\frac{x+2}{x-1\quad x+6}.$$

Это правильная рациональная дробь, которую можно разложить на простые дроби таким образом:

$$\frac{x+2}{x-1\quad x+6}=\frac{A}{x-1}+\frac{B}{x+6}.$$

Приводя к общему знаменателю и приравнивая числители, получим:

$$x+2=A\ \ x+6\ \ +B\ \ x-1\ \ .$$

Теперь найдем коэффициенты A,B. Подставим в последнее равенство значения корней знаменателя, тогда:

$$x=1\quad\Big|\,1+2=A\ \ 1+6\ \ ,\qquad 3=7A, A=\frac{3}{7}.$$

$$x=-6\quad\Big|\,-6+2=B\ \ -6-1\ \ ,\quad -4=-7B, B=\frac{4}{7}.$$

Перепишем интеграл и с учетом предыдущих преобразований, найдем его:

$$\int\frac{x+2}{x^2+5x-6}dx=\int\frac{x+2}{x-1\quad x+6}dx=$$

$$=\int\frac{\frac{3}{7}}{x-1}dx+\int\frac{\frac{4}{7}dx}{x+6}=\frac{3}{7}\int\frac{dx}{x-1}+\frac{4}{7}\int\frac{dx}{x+6}=$$

$$=\frac{3}{7}\ln|x-1|+\frac{4}{7}\ln|x+6|+C.$$

18.24. $\displaystyle\int\frac{x^4dx}{x^2+1}$.

Решение.

Здесь, как видим, под знаком интеграла имеем неправильную рациональную дробь.

Разделим числитель на знаменатель по правилу деления многочленов, тогда имеем:

$$\frac{x^4}{x^2+1}=x^2-1+\frac{1}{x^2+1},$$

откуда:

$$\int\frac{x^4}{x^2+1}dx=\int\left(x^2-1+\frac{1}{x^2+1}\right)dx=\int x^2dx-\int dx+\int\frac{dx}{x^2+1}=\frac{x^3}{3}-x+\operatorname{arctg}x+C.$$

18.25. $\int\frac{x+1}{(x-1)(x-2)^2}dx.$

Решение.

Под интегралом правильная рациональная дробь. Разложим эту дробь на простые:

$$\frac{x+1}{(x-1)(x-2)^2}=\frac{A}{x-1}+\frac{B}{x-2}+\frac{C}{(x-2)^2}.$$

Приводя к общему знаменателю и приравнивая числители, имеем:

$$x+1=A(x-2)^2+B(x-2)(x-1)+C(x-1).$$

Находим коэффициенты A,B,C.

Сначала в обе части подставляем корни знаменателя $x_1=1,\ x_2=2$:

$$\begin{array}{l|l} x=1 & 1+1=A\Rightarrow A=2 \\ x=2 & 2+1=C\Rightarrow C=3 \end{array}.$$

Осталось найти B.

Его можно найти, если приравнять коэффициенты, например при x^2 в обеих частях:

$$x^2\,\big|\ 0=A+B\Rightarrow B=-2.$$

Следовательно,

$$\int\frac{x+1}{(x-1)(x-2)^2}dx=\int\frac{2}{x-1}dx-\int\frac{2}{x-2}dx+\int\frac{3dx}{(x-2)^2}=2\int\frac{dx}{x-1}-2\int\frac{dx}{x-2}+$$

$$+3\int\frac{dx}{(x-2)^2}=2\ln|x-1|-2\ln|x-2|-\frac{3}{x-2}+C.$$

18.26. $\int\frac{x-1}{x(x^2+4)}dx$.

Решение.

Под знаком интеграла знаменатель правильной дроби имеет лишь один действительный корень $x=0$, а уравнение $x^2+4=0$ не имеет действительных корней, тогда разложение на элементарные дроби будет иметь вид:

$$\frac{x-1}{x(x^2+4)}=\frac{A}{x}+\frac{Bx+C}{x^2+4}.$$

Приводим к общему знаменателю и приравниваем числители:

$$x-1=A(x^2+4)+(Bx+C)x=Ax^2+4A+Bx^2+Cx=(A+B)x^2+Cx+4A.$$

Определяем A,B,C:

$$\begin{array}{l|l} x=0 & 0-1=4A, A=-1/4 \\ x^2 & 0=A+B, B=-A, B=-1/4 \\ x & 1=C, C=1 \end{array}.$$

Следовательно, интеграл запишется в виде суммы двух интегралов от простых дробей, которые легко интегрируются:

$$\int\frac{x-1}{x(x^2+4)}dx=-\frac{1}{4}\int\frac{dx}{x}+\int\frac{\frac{1}{4}x+1}{x^2+4}dx=-\frac{1}{4}\ln|x|+\frac{1}{8}\int\frac{2xdx}{x^2+4}+\int\frac{dx}{x^2+4}=$$

$$= -\frac{1}{4}\ln|x| + \frac{1}{8}\ln\left(x^2+4\right) + \frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{x}{2} + C.$$

18.6. Интегрирование иррациональных выражений и выражений, которые содержат тригонометрические функции

Рассмотрим интеграл:

$$\int R\left(x, x^{\frac{m_1}{n_1}}, \ldots, x^{\frac{m_k}{n_k}}\right)dx, \qquad (18.11)$$

где $R(x)$ – непрерывная функция, а $\frac{m_1}{n_1}, \ldots, \frac{m_k}{n_k}$ – дробные показатели степеней.

Этот интеграл можно вычислить, используя подстановку:

$$x = t^n, \qquad dx = nt^{n-1}dt, \qquad (18.12)$$

где n – наименьшее общее кратное знаменателей дробей $\frac{m_1}{n_1}, \ldots, \frac{m_k}{n_k}$.

С помощью этой подстановки каждый дробный показатель степени x превратится в целое число и таким образом под интегралом будет $R(t)$ – рациональная функция, то есть:

$$\int R\left(x, x^{\frac{m_1}{n_1}}, \ldots, x^{\frac{m_k}{n_k}}\right)dx = \int R(t)dt,$$

где $R(t)$ – рациональная функция нового аргумента t.

Интегралы типа

$$\int R\left(x, \sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}\right)dx \qquad (18.13)$$

приводятся к интегралам от рациональных функций с помощью подстановки: $\dfrac{ax+b}{cx+d}=t^n$, $x=\dfrac{dt^n-b}{a-ct^n}$, $dx=\left(\dfrac{dt^n-b}{a-ct^n}\right)' dt$.

Интегралы типа:

а) $\int R\;\; x, \sqrt{a^2-x^2}\;\; dx$; б) $\int R\;\; x, \sqrt{x^2+a^2}\;\; dx$; в) $\int R\;\; x, \sqrt{x^2-a^2}\;\; dx$,

где $R(x)$ – иррациональная функция от аргумента x, приводятся к интегралам от рациональных тригонометрических функций с помощью тригонометрических подстановок:

а) $x=a\sin t$ или $x=a\cos t$; (18.14)

б) $x=a\,\mathrm{tg}\,t$ или $x=a\,\mathrm{ctg}\,t$; (18.15)

в) $x=\dfrac{a}{\cos t}$ или $x=\dfrac{a}{\sin t}$. (18.16)

Пример 18.27. Найти $\int\dfrac{\sqrt[4]{x}}{1+\sqrt{x}}dx$.

Решение.

Под интегралом имеем степени аргумента – $^1/_2$ и $^1/_4$, наименьший общий знаменатель которых 4.

Тогда возьмем $x=t^4, dx=4t^3dt$ и получим:

$$\int\frac{\sqrt[4]{x}}{1+\sqrt{x}}dx=\int\frac{t}{1+t^2}4t^3dt=4\int\frac{t^4dt}{1+t^2}=4\int\frac{t^4-1+1}{t^2+1}dt=$$

$$=4\int\frac{t^2+1\quad t^2-1\;\;+1}{t^2+1}dt=4\int\;t^2-1\;\;dt+4\int\frac{dt}{1+t^2}=$$

$$=4\int t^2dt-\int dt+4\,\mathrm{arctg}\,t=\frac{4}{3}t^3-4t+4\,\mathrm{arctg}\,t+C=4\left(\frac{1}{3}\sqrt[4]{x^3}-\sqrt[4]{x}+\mathrm{arctg}\sqrt[4]{x}\right)+C.$$

Пример 18.28. Найти $\int \frac{1}{x^2}\sqrt{\frac{1+x}{x}}dx.$

Решение.

Пусть $\frac{1+x}{x}=t^2$, тогда $1+x=xt^2,$ откуда $x=\frac{1}{t^2-1}$.

Тогда $dx=\frac{-2tdt}{(t^2-1)^2}$.

Следовательно,

$$-2\int \frac{t^2(t^2-1)^2}{(t^2-1)^2}dt=-2\int t^2dt=-\frac{2}{3}t^3+C=-\frac{2}{3}\left(\frac{1+x}{x}\right)^{3/2}+C.$$

Пример 18.29. Найти $\int \frac{dx}{x^4\sqrt{x^2-1}}$.

Решение.

Пусть $x=\frac{1}{\sin t}$, откуда $dx=-\frac{\cos t dt}{\sin^2 t}$.

Тогда:

$$\int \frac{dx}{x^4\sqrt{x^2-1}}=-\int \frac{\sin^4 t}{\sqrt{\frac{1}{\sin^2 t}-1}}\cdot\frac{\cos t}{\sin^2 t}dt=-\int \frac{\sin^2 t\cos t dt}{\sqrt{\frac{1-\sin^2 t}{\sin^2 t}}}=$$

$$=-\int \frac{\sin^2 t\cos t dt}{\operatorname{ctg} t}=-\int \sin^3 t dt=-\int \sin^2 t\sin t dt=$$

$$=-\int (1-\cos^2 t)\sin t dt.$$

Сделаем подстановку $\cos t=z$, тогда $-\sin t dt=dz$.
Подставим в данный интеграл.
Имеем:

$$\int \frac{dx}{x^4\sqrt{x^2-1}}=\int (1-z^2)dz=z-\frac{z^3}{3}+C=\cos t-\frac{\cos^3 t}{3}+C.$$

Перейдем к переменной x.

Учитывая, что $\cos t = \sqrt{1-\sin^2 t}$ и $\sin t = \dfrac{1}{x}$, имеем:

$$\int \frac{dx}{x^4\sqrt{x^2-1}} = \sqrt{1-\sin^2 t} - \frac{\sqrt{(1-\sin^2 t)^3}}{3} + C =$$

$$= \sqrt{1-\frac{1}{x^2}} - \frac{\sqrt{\left(1-\dfrac{1}{x^2}\right)^3}}{3} + C = \frac{\sqrt{x^2-1}}{x} - \frac{\sqrt{(x^2-1)^3}}{3x^3} + C.$$

Основные случаи интегрирования тригонометрических выражений

1. Интегралы, которые с помощью известных тригонометрических соотношений можно привести к табличным:

$$\int \cos ax \cos bx\, dx = \frac{1}{2}\int \left(\cos (a+b)x + \cos (a-b)x\right) dx; \qquad (18.17)$$

$$\int \sin ax \sin bx\, dx = \frac{1}{2}\int \left(\cos (a-b)x - \cos (a+b)x\right) dx; \qquad (18.18)$$

$$\int \sin ax \cos bx\, dx = \frac{1}{2}\int \left(\sin (a+b)x + \sin (a-b)x\right) dx. \qquad (18.19)$$

$$\begin{aligned} \int \cos^2 ax\, dx &= \int \frac{1+\cos 2ax}{2} dx = \frac{x}{2} + \frac{\sin 2ax}{4a} + C; \\ \int \sin^2 ax\, dx &= \int \frac{1-\cos 2ax}{2} dx = \frac{x}{2} - \frac{\sin 2ax}{4a} + C. \end{aligned} \qquad (18.20)$$

Пример 18.41. Найти $\int \sin 5x \cos 2x dx$.

Решение.

Применяем формулу (18.19):

$$\int \sin 5x \cos 2x dx = \int \frac{1}{2}\left(\sin 7x + \sin 3x\right) dx = \frac{1}{2}\int \sin 7x dx + \frac{1}{2}\int \sin 3x dx =$$

$$= \frac{1}{2}\left(-\frac{\cos 7x}{7}\right) + \frac{1}{2}\left(-\frac{\cos 3x}{3}\right) + C = -\frac{\cos 7x}{14} - \frac{\cos 3x}{6} + C.$$

2. Интегралы вида $\int \sin^m x \cos^n x \, dx$.

Здесь можно выделить следующие случаи:

а) хотя бы один из показателей степеней m или n – нечетное число, а другой – любое. Например, $m = 2p+1$ – нечетное число, а n – любое, замена $t = \cos x$ дает возможность вычислить интеграл. Если наоборот, $n = 2p+1$ – нечетное, а m – любое, то интеграл берется с помощью замены $t = \sin x$;

б) оба показателя m и n – четные неотрицательные числа. Например, $m = 2p$ и $n = 2k$ – четные числа, интеграл можно взять постепенно понижая степени тригонометрических функций, для чего используют формулы: $\cos^2 x = \dfrac{1+\cos 2x}{2}$, $\sin^2 x = \dfrac{1-\cos 2x}{2}$;

в) сумма показателей m и n равна четному отрицательному числу, то есть $m + n = -2p$. Интеграл вычисляется с помощью подстановки:

$$t = \operatorname{tg} x;\ \cos^2 x = \frac{1}{1+t^2},\ \sin^2 x = \frac{t^2}{1+t^2},\ x = \operatorname{arctg} t;\ \ dx = \frac{dt}{1+t^2},$$

или

$$t = \operatorname{ctg} x;\ \cos^2 x = \frac{t^2}{1+t^2},\ \sin^2 x = \frac{1}{1+t^2},\ x = \operatorname{arcctg} t;\ dx = -\frac{dt}{1+t^2}.$$

Пример 18.31. Найти $\int \sin^3 x \cos^3 x dx$.

Решение.

Пусть $t = \sin x$, $dt = \cos\ xdx$, тогда

$$\int \sin^3 x \cos^3 x dx = \int t^3 (1-t^2) dt = \int t^3 dt - \int t^5 dt =$$
$$= \frac{t^4}{4} - \frac{t^6}{6} + C = \frac{\sin^4 x}{4} - \frac{\sin^6 x}{6} + C.$$

Пример 18.32. Найти $\int \sin^4 x \cos^4 x dx$.

Решение.

Так как $\sin x\cos x=\frac{1}{2}\sin 2x$, то $\sin^2 x\cos^2 x=\frac{1}{4}\sin^2 2x$.

В свою очередь, $\frac{1}{4}\sin^2 x=\frac{1}{4}\cdot\frac{1-\cos 4x}{2}$.

Подставляя эти выражения под знак интеграла, получим:

$$\int\sin^4 x\cos^4 x dx=\int\left(\frac{1-\cos 4x}{8}\right)^2 dx=\frac{1}{64}\int\left(1-2\cos 4x+\cos^2 4x\right)dx=$$

$$=\frac{1}{64}\left(\int dx-2\int\cos 4x dx+\int\cos^2 4x dx\right)=$$

$$=\frac{1}{64}\left(x-\frac{1}{2}\sin 4x+\frac{1}{2}\int dx+\frac{1}{2}\int\cos 8x dx=\right)$$

$$=\frac{1}{64}\left(x-\frac{1}{2}\sin 4x+\frac{1}{2}x+\frac{1}{16}\sin 8x\right)+C.$$

Пример 18.33. Найти $\int\frac{\sin^4 x}{\cos^8 x}dx$.

Решение.

Сделаем подстановку:

$$t=\operatorname{tg}x;\ \cos^2 x=\frac{1}{1+t^2},\ \sin^2 x=\frac{t^2}{1+t^2},\ x=\operatorname{arctg}t;\ \ dx=\frac{dt}{1+t^2}.$$

Тогда:

$$\int\frac{\sin^4 x}{\cos^8 x}dx=\int\frac{t^4\left(1+t^2\right)^4}{\left(1+t^2\right)\left(1+t^2\right)^2}dt=\int t^4\left(1+t^2\right)dt=$$

$$=\int\left(t^4+t^6\right)dt=\frac{t^5}{5}+\frac{t^7}{7}+C=\frac{\operatorname{tg}^5 x}{5}+\frac{\operatorname{tg}^7 x}{7}+C.$$

3. В интегралах вида $\int\operatorname{tg}^n x dx$ и $\int\operatorname{ctg}^n x dx$ используются подстановки $t=tgx$ и $t=ctgx$.

4. Интеграл $\int R(\cos x, \sin x)\,dx$, где подынтегральная функция является рациональной или дробно-рациональной функцией от $\cos x$ и $\sin x$, приводится к интегралу от рациональных функций с помощью подстановки

$$t = \operatorname{tg}\frac{x}{2}, \tag{18.21}$$

которая называется **универсальной тригонометрической подстановкой.**

Используя тригонометрические формулы, получим:

$$\sin x = \frac{2\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}; \quad \cos x = \frac{1-\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}.$$

То есть:

$$t = \operatorname{tg}\frac{x}{2},\ x = 2\operatorname{arctg} t; \quad dx = \frac{2dt}{1+t^2}. \tag{18.22}$$

$$\sin x = \frac{2t}{1+t^2}; \quad \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}. \tag{18.23}$$

Тогда:

$$\int R(\cos x, \sin x)\,dx = \int R\left(\frac{1-t^2}{1+t^2}; \frac{2t}{1+t^2}\right)\frac{2dt}{1+t^2} = \int R_1(t)\,dt. \tag{18.24}$$

где $R_1(t)$ – рациональная или дробно-рациональная функция.

Пример 18.34. Найти $\int \frac{dx}{4\cos x + 3\sin x + 5}$.

Решение.

Пусть

$$t = \operatorname{tg}\frac{x}{2}; dx = \frac{2dt}{1+t^2}; \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}; \sin x = \frac{2t}{1+t^2}.$$

Тогда получим:

$$\int \frac{dx}{4\cos x + 3\sin x + 5} = \int \frac{2dt}{(1+t^2)\left(\frac{4(1-t^2)}{1+t^2} + 3\frac{2t}{1+t^2} + 5\right)} =$$

$$= 2\int \frac{dt}{t^2+6t+9} = 2\int \frac{dt}{(t+3)^2} = -\frac{2}{t+3} + C = -\frac{2}{\operatorname{tg}\frac{x}{2}+3} + C.$$

Вопросы для самодиагностики

1. Какая функция называется первообразной для данной функции?
2. Что называется неопределенным интегралом?
3. Перечислите свойства неопределенного интеграла.
4. Запишите табличные интегралы.
5. В чем состоит метод непосредственного интегрирования?
6. В чем состоит метод интегрирования с помошью замены переменной?
7. Записать формулу интегрирования по частям.
8. Как находятся интегралы вида $\int \frac{(Ax+B)\,dx}{x^2+px+q}$?
9. Что называется рациональной функцией? Какая рациональная дробь называется правильной?
10. Как правильную рациональную дробь разложить на сумму простейших дробей?
11. Как находятся интегралы вида $\int R\left(x, x^{\frac{m_1}{n_1}}, \ldots, x^{\frac{m_k}{n_k}}\right)dx$?
12. Какие интегралы от иррациональных функций берутся тригонометрическими подстановками?
13. Опишите методы интегрирования функций, содержащих тригонометрические выражения.

Упражнения

Найти интегралы, используя свойства неопределенного интеграла и таблицу интегралов:

18.1. $\int \frac{\sqrt{x}-x^3e^x+x^2}{x^3}dx.$

18.2. $\int \frac{(4-3\sqrt{x})^2}{x^2}dx.$

18.3. $\int \frac{dx}{\sqrt{3x^2-2}}.$

18.4. $\int \frac{3-\sqrt{3-x^2}}{\sqrt{3-x^2}}dx.$

18.5. $\int 1-3x\ ^{17}dx.$

18.6. $\int e^{3x-5}dx.$

18.7. $\int \frac{dx}{16+25x^2}.$

18.8. $\int \frac{3dx}{2x-3\ ^{3}}.$

18.9. $\int \frac{dx}{\sqrt{25-9x^2}}.$

18.10. $\int tg3xdx.$

Найти интегралы:

18.11. $\int \frac{x}{\sqrt[3]{x^2+2}}dx.$

18.12. $\int \frac{x^2}{1+x^6}dx.$

18.13. $\int e^{4\sin x}\cos xdx.$

18.14. $\int \frac{\sin 2x}{1+\cos^2 x}dx.$

18.15. $\int x\cos(x^2-1)dx.$

18.16. $\int \frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^2}dx.$

18.17. $\int \frac{\arccos\frac{x}{2}}{\sqrt{4-x^2}}dx.$

18.18. $\int \frac{\arcsin x+x}{\sqrt{1-x^2}}dx.$

18.19. $\int x\ln xdx.$

18.20. $\int x\cos 3xdx.$

18.21. $\int \frac{\ln x}{\sqrt{x}}\,dx.$

18.22. $\int \ln(1+x^2)\,dx.$

18.23. $\int x \operatorname{arctg} x\,dx.$

18.24. $\int \arcsin x\,dx.$

18.25. $\int \frac{dx}{\sqrt{4x-3-x^2}}.$

18.26. $\int \frac{12x+11}{9x^2-6x+2}\,dx.$

Найти интегралы от рациональных дробей:

18.27. $\int \frac{2x+7}{x^2+x-2}\,dx.$

18.28. $\int \frac{2x^2+41x-91}{x-1 \quad x+3 \quad x-4}\,dx.$

18.29. $\int \frac{x^5+x^4-8}{x^3-4x}\,dx.$

18.30. $\int \frac{x^3+1}{x^3-5x^2+6x}\,dx.$

18.31. $\int \frac{x+2}{x^3-2x^2}\,dx.$

18.32. $\int \frac{x^2+2}{x+1 \;^{2} \quad x-1}\,dx.$

Найти интегралы:

18.33. $\int \frac{dx}{5\sin x+12\cos x+13}.$

18.34. $\int \sin^3 x\,dx.$

18.35. $\int \operatorname{ctg}^3 x\,dx.$

18.36. $\int \sqrt[3]{\sin^2 x}\cdot\cos^3 x\,dx.$

18.37. $\int \frac{1+\sqrt[4]{x}}{x+\sqrt{x}}\,dx.$

18.38. $\int \frac{x+1}{x\sqrt{x-2}}\,dx.$

18.39. $\int \frac{\sqrt[3]{x}+1}{(\sqrt[4]{x}+\sqrt[6]{x})\sqrt[6]{x^5}}\,dx.$

18.40. $\int \frac{dx}{\sqrt{1+e^x}}.$

18.41. $\int \sqrt{\frac{x}{x+5}}\cdot\frac{dx}{x^2}.$

18.42. $\int \sqrt{9-x^2}\,dx.$

19. Определенный интеграл

19.1. Интегральные суммы. Условия существования определенного интеграла

Пусть неотрицательная функция $y = f(x)$ определена и непрерывная на отрезке $[a,b]$ (a,b – конечные числа). График функции изображен на рис. 19.1.

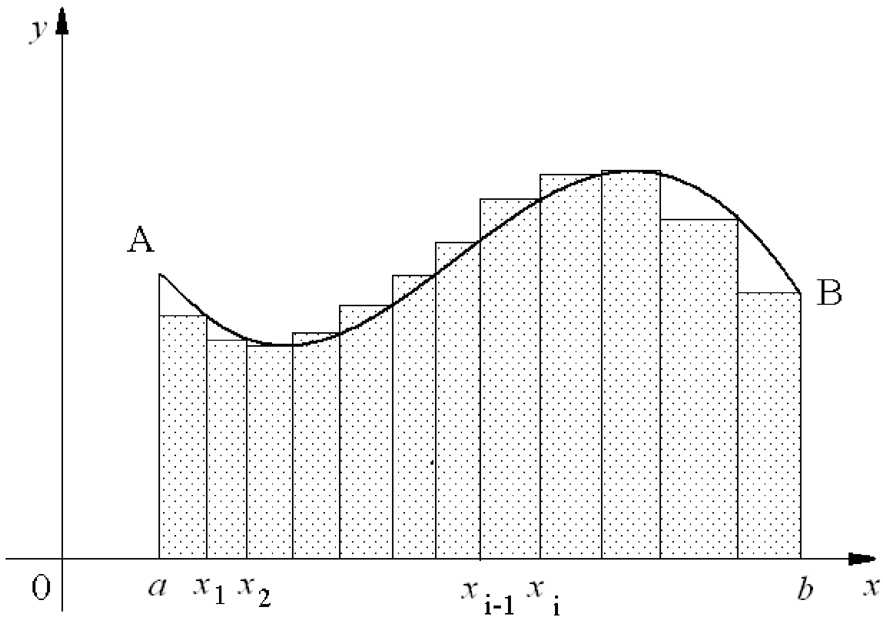


Рис. 19.1

1. Задача о вычислении площади криволинейной трапеции.

Пусть плоская фигура ограничена графиком функции $y = f(x)$, осью Ox, прямыми $x = a,\ x = b.$

Фигура $aABb$ называется **криволинейной трапецией**. Для того чтобы решить задачу выполним следующие действия:

1) разобьем произвольно отрезок $[a,b]$ на n частей точками

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < ... < x_{i-1} < x_i < ... < x_n = b;$$

2) выберем на каждом из отрезков $[x_{i-1}; x_i]$ произвольную точку $\xi_i \in [x_{i-1}; x_i]$. Обозначим через Δx_i разницу $x_i - x_{i-1}$, которую будем называть длиной частного отрезка $[x_{i-1}; x_i]$;

3) в точках ξ_i вычислим значение функции $f\ \ \xi_i$ и составим такую сумму:

$$S_n = f(\xi_1)\Delta x_1 + f(\xi_2)\Delta x_2 + ... + f(\xi_n)\Delta x_n = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i\,. \qquad (19.1)$$

Геометрический смысл этой суммы очевиден – это сумма площадей прямоугольников с основаниями $\Delta x_1, \Delta x_2, ..., \Delta x_n$ и высотами $f(\xi_1), f(\xi_2), ..., f(\xi_n)$;

4) для нахождения площади криволинейной трапеции допустим, что количество точек $n \to \infty$, а максимальная длина отрезков стремится к нулю, то есть $\max \Delta x_i \to 0$.

Тогда площадь S криволинейной фигуры, которая изображена на рис.19.1, есть предел интегральной суммы (19.1), то есть:

$$S = \lim_{\substack{\max \Delta x_i \to 0, \\ n \to \infty}} S_n = \lim_{\substack{\max \Delta x_i \to 0, \\ n \to \infty}} \sum_{i=1}^{n} f\ \ \xi_i\ \ \Delta x_i. \qquad (19.2)$$

2. Задача о вычислении пути материальной точки.

Пусть известна скорость движения материальной точки как функция времени $v(t) = f\ \ t$. Найти путь, который пройдет точка за время от T_1 до T_2. Если скорость не изменяется в течение времени, то есть $f\ \ t$ – постоянная величина, то путь ΔS, который прошла точка за промежуток времени $t, t+\Delta t$, вычисляется по формуле $\Delta S = f\ \ t\ \ \Delta t.$

Выполним такие действия:

1) разобьем отрезок $[T_1; T_2]$ на промежутки времени:

$$T_1 = t_0 < t_1 < t_2 < ... < t_n = T_2;$$

2) на каждом отрезке времени $t_{i-1}; t_i$ возьмем произвольную точку ξ_i и вычислим в этой точке значения скорости $f\ \ \xi_i$;

3) для длины пути ΔS_i, который прошла точка за промежуток $t_{i-1}; t_i$ имеем $\Delta S_i = f\ \ \xi_i\ \ \Delta t_i$, где $\xi_i \in\ t_{i-1}; t_i$, $\Delta t_i = t_i - t_{i-1}$, $i = 1 \div n$.

Тогда полная длина пути S_n, если на каждом промежутке времени Δt_i допустить движение равномерным, будет:

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} \Delta S_i = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta t_i \, ; \qquad (19.3)$$

4) для нахождения пути, который прошла точка за время от T_1 до T_2, найдем предел S_n при $n \to \infty$ и при $\max \Delta t_i \to 0$:

$$S = \lim_{\max \Delta x_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\,\Delta t_i \, . \qquad (19.4)$$

3. Задача об объеме продукции.

Пусть функция $z = f(t)$ описывает зависимость производительности труда z некоторого производства за время t. Найдем объем продукции u, изготовленной за промежуток времени $[0,T]$. Если производительность не меняется на протяжении времени, то есть $f(t)$ – постоянная величина, то объем продукции Δu, изготовленной за промежуток времени $[t, t+\Delta t]$, вычисляется по формуле $\Delta u = f(t)\,\Delta t$. Используя приближенное равенство $\Delta u = f(\xi)\,\Delta t$, где $\xi \in [t, t+\Delta t]$, которое будет более точным, чем меньшим будет Δt. Выполним следующие действия:

1. Разобьем отрезок $[0,T]$ на промежутки времени:

$$0 = t_0 < t_1 < t_2 < \ldots < t_n = T \, .$$

2. Вычислим объем продукции Δu_i, изготовленной за промежуток $[t_{i-1}, t_i]$, имеем: $\Delta u_i = f(\xi_i)\,\Delta t_i$, где $\xi_i \in [t_{i-1}, t_i]$, $\Delta t_i = t_i - t_{i-1}$, $i = 1 \div n$.

3. Определим приближенно объем продукции, изготовленной за промежуток времени $[0,T]$:

$$u_n = \sum_{i=1}^{n} \Delta u_i = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\,\Delta t_i . \qquad (19.5)$$

4. Найдем предел u_n, если $\max \Delta t_i$ стремится к нулю, а $n \to \infty$ и получим объем продукции, изготовленной за промежуток времени $[0,T]$:

$$u = \lim_{\max \Delta x_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta t_i. \tag{19.6}$$

Итак, рассматривая различные по характеру задачи, пришли к пределу одного вида.

Будем считать, что на промежутке $[a,b]$ задана непрерывная функция $y = f(x)$ и для нее аналогично рассмотренным задачам составлена сумма $S_n = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x$, которую будем называть **интегральной суммой для функции** $f(x)$ на промежутке $[a,b]$.

Если существует конечный предел интегральной суммы S_n при $\max x_i \to 0$ и $n \to \infty$, который не зависит от способов разбиения отрезка на части, а также выбора точек $\xi_1, \xi_2, \ldots$, то этот предел называется **определенным интегралом** от функции $f(x)$ на отрезке $[a,b]$ и обозначается:

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\max \Delta x_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i, \tag{19.7}$$

при этом сама функция $f(x)$ называется **подынтегральной функцией**, заданной на отрезке $[a,b]$.

Числа a и b соответственно называются *верхним* и *нижним пределами интеграла*, $f(x)dx$ – *подынтегральным выражением*, x – *переменной интегрирования*.

Отметим, что поскольку определенным интегралом является предел интегральной суммы, то для существования такого предела, а поэтому и интеграла, достаточно непрерывности функции $f(x)$.

Заметим также, что поскольку из определения определенного интеграла также вытекает, что величина интеграла зависит от вида функции $f(x)$ и пределов интегрирования, то определенный интеграл определяется однозначно и в отличие от неопределенного интеграла является числом, которое не зависит от того, какой буквой обозначается переменная интегрирования.

Следовательно, можно записать:

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(u)du\,.$$

Геометрический смысл определенного интеграла: если функция неотрицательна на отрезке $[a,b]$, где $a<b$, то $\int_a^b f(x)dx$ – численно равен площади S криволинейной трапеции, которая ограничена кривой $y=f(x)$, отрезком $[a,b]$ и прямыми $x=a$ и $x=b$.

Физический смысл определенного интеграла: определенный интеграл $\int_a^b f(t)dt = \lim\limits_{\max \Delta x_i \to 0} \sum\limits_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta t_i$ – это длина пути, пройденного материальной точкой за промежуток времени $[a,b]$, если известна скорость $f(t)$ в момент времени t.

Экономический смысл определенного интеграла: определенный интеграл $\int_0^T f(t)dt = \lim\limits_{\max \Delta x_i \to 0} \sum\limits_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta t_i$ – это объем продукции, произведенной за промежуток времени $[0,T]$, если известна производительность труда $f(t)$ в момент времени t.

19.2. Свойства определенного интеграла

По определению определенный интеграл – это предел интегральной суммы функции $f(x)$:

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\max \Delta x_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i\,.$$

Свойства определенного интеграла

1. При перестановке пределов интегрирования интеграл изменяет знак:

$$\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx. \tag{19.8}$$

2. Определенный интеграл от единичной функции равен:

$$\int_a^b dx = b - a. \tag{19.9}$$

3. Определенный интеграл $\int_a^a f(x)dx = 0$. (19.10)

4. Если M – константа, то $\int_a^b Mdx = M(b-a)$. (19.11)

5. Постоянный множитель можно выносить за знак определенного интеграла, то есть:

$$\int_a^b Mf(x)dx = M\int_a^b f(x)dx, \tag{19.12}$$

где M – константа.

6. Интеграл от алгебраической суммы двух (или конечного числа) функций равен сумме интегралов от этих функций, то есть:

$$\int_a^b (f_1(x) \pm f_2(x))dx = \int_a^b f_1(x)dx \pm \int_a^b f_2(x)dx. \tag{19.13}$$

7. Если отрезок интегрирования разбить на части, то интеграл на всем отрезке равен сумме интегралов на составляющих этого отрезка, то есть для любых чисел a, b, c будет:

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx. \tag{19.14}$$

8. Если на отрезке $[a,b]$, где $a < b$, функции $f(x)$ и $\varphi(x)$ удовлетворяют условию $f(x) \le \varphi(x)$, то:

$$\int_a^b f(x)dx \le \int_a^b \varphi(x)dx. \qquad (19.15)$$

9. Если m и M – наибольшее и наименьшее значения функции $f(x)$ на $[a,b]$, то есть $m \le f(x) \le M$ и $a < b$, то:

$$m(b-a) \le \int_a^b f(x)dx \le M(b-a). \qquad (19.16)$$

10. Если функция $y = f(x)$ непрерывна на $[a,b]$ ($a < b$), то найдется такое значение $c \in [a,b]$, что

$$\int_a^b f(x)dx = f(c)(b-a). \qquad (19.17)$$

Свойство 10 называют **теоремой о среднем значении** $f(x)$.

19.3. Вычисление интеграла. Формула Ньютона – Лейбница

Если функция $y = f(x)$ интегрируема на $[a,b]$, то она также будет интегрируемой на отрезке $[a; x]$, $x \in [a; b]$.

Интеграл от такой функции является некоторой функцией, зависимой от x. Обозначим его как

$$F(x) = \int_a^x f(u)du. \qquad (19.18)$$

В этом интеграле нижний его предел a – фиксированное число, а верхний предел x изменяется.

В выражении (19.18) используется переменная интегрирования u, чтобы отличить ее от верхнего предела интегрирования. На основе теоремы о среднем можно установить также, что функция $F(x)$ определена и непрерывна на отрезке $[a,b]$, а значит и на $[a; x]$. Численно она равна площади криволинейной трапеции, основой которой является промежуток $[a; x]$.

Теорема (*о производной интеграла с переменным верхним пределом*).

Если функция $y=f(x)$ непрерывна на $[a,b]$, то в каждой точке $x\in[a,b]$ производная от функции $F(x)$ по переменному верхнему пределу равна подынтегральной функции, то есть

$$F'(x)=\left(\int_a^x f(u)du\right)'_x=f(x). \qquad (19.19)$$

Доказательство.

Пусть x – точка непрерывности $F(x)$, дадим ей некоторое приращение Δx. Тогда и функция $F(x)$ также получит некоторое приращение $\Delta F(x)$.

Рассмотрим:

$$\frac{\Delta F(x)}{\Delta x}=\frac{F(x+\Delta x)-F(x)}{\Delta x}=\frac{1}{\Delta x}\left[\int_a^{x+\Delta x} f(u)du-\int_a^x f(u)du\right]=$$

$$=\frac{1}{\Delta x}\left[\int_a^x f(u)du+\int_x^{x+\Delta x} f(u)du-\int_a^x f(u)du\right]=\frac{1}{\Delta x}\int_x^{x+\Delta x} f(u)du.$$

Последний интеграл был получен с помощью свойства (19.14) для определенного интеграла.

Поскольку

$$\Delta F(x)=\int_x^{x+\Delta x} f(u)du,$$

то применяя теорему о среднем, получим

$$\frac{\Delta F(x)}{\Delta x}=\frac{1}{\Delta x}\int_x^{x+\Delta x} f(u)du=\frac{f(c)(x+\Delta x-x)}{\Delta x}=\frac{f(c)\Delta x}{\Delta x}=f(c),$$

где $c\in[x;x+\Delta x]$.

Переходя к пределу при $\Delta x\to 0$, а также при условии того, что $c\to x$, имеем

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta F(x)}{\Delta x}=F'(x)=f(x).$$

Таким образом, теорема доказана.

Из этой теоремы следует, что если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a,b]$, то для нее существует первообразная на этом отрезке, и в качестве одной из первообразных можно взять интеграл с переменным верхним пределом. Отсюда также вытекает, что неопределенный интеграл от функции $f(x)$, непрерывной на $[a,b]$, является одним из интегралов с переменным верхним пределом, то есть

$$\int f(x)dx=\int_a^x f(x)dx+C,\quad x\in[a;b],$$

где C – некоторая постоянная.

Теорема (формула Ньютона – Лейбница).

Если $F(x)$ – первообразная для непрерывной на $[a,b]$ функции $f(x)$, то имеет место формула:

$$\int_a^b f(x)dx=F(b)-F(a). \qquad (19.20)$$

Доказательство.

Если $F(x)$ – какая-либо первообразная для функции $f(x)$, то и функция $\int_a^x f(u)du$ – также первообразная для $f(x)$.

Две первообразные отличаются одна от другой лишь константой, то есть

$$\int_a^x f(u)du=F(x)+C_1. \qquad (19.21)$$

Последнее равенство будет справедливым при соответствующем выборе постоянной C_1 для всех значений x.

Чтобы определить C_1 допустим в (19.21) $x = a$, тогда

$$\int_a^a f(u)du = F(a) + C_1 = 0,$$

откуда $C_1 = -F(a)$.

Следовательно: $\int_a^x f(u)du = F(x) - F(a)$.

Теперь, если взять в (19.21) $x = b$, то получим:

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a).$$

Следовательно, формула Ньютона – Лейбница доказана.

Вычисление определенных интегралов с помощью формулы Ньютона – Лейбница проводится в два этапа: сначала методами вычисления неопределенного интеграла находят некоторую первообразную $F(x)$ для функции $f(x)$, а затем находят ее приращение на промежутке $[a,b]$.

Для обозначения приращения первообразной вводят символ двойной подстановки, который удобно использовать при решении примеров, а именно:

$$\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a). \qquad (19.22)$$

Пример 19.1. Вычислить интеграл $\int_1^2 (x^2 - 3x + 1)\,dx.$

Решение.

$$\int_1^2 (x^2 - 3x + 1)\,dx = \int_1^2 x^2dx - 3\int_1^2 xdx + \int_1^2 dx = \frac{x^3}{3}\Big|_1^2 - 3\cdot\frac{x^2}{2}\Big|_1^2 +$$

$$+ x\Big|_1^2 = \frac{8}{3} - \frac{1}{3} - \frac{3}{2}(4-1) + (2-1) = \frac{7}{3} - \frac{9}{2} + 1 = -\frac{7}{6}.$$

Пример 19.2. Вычислить интеграл $\int\limits_{-3}^{-2}\frac{dx}{1-x^2}$.

Решение.

$$\int\limits_{-3}^{-2}\frac{dx}{1-x^2}=\int\limits_{-2}^{-3}\frac{dx}{x^2-1}=\frac{1}{2}\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right|\Bigg|_{-2}^{-3}=$$

$$=\frac{1}{2}\left(\ln\left|\frac{-3-1}{-3+1}\right|-\ln\left|\frac{-2-1}{-2+1}\right|\right)=\frac{1}{2}\ \ \ln 2-\ln 3\ \ =\frac{1}{2}\ln\frac{2}{3.}$$

Пример 19.3. Вычислить интеграл $\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{4}}\cos^2 xdx.$

Решение.

Преобразуем подынтегральную функцию: $\cos^2 x=\frac{1+\cos 2x}{2}$.

Тогда:

$$\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{4}}\cos^2 xdx=\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{4}}\frac{1+\cos 2x}{2}dx=\frac{1}{2}\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{4}}dx+\frac{1}{2}\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{4}}\cos 2xdx=$$

$$=\frac{1}{2}x\Bigg|_{0}^{\frac{\pi}{4}}+\frac{1}{2}\frac{sin2x}{2}\Bigg|_{0}^{\frac{\pi}{4}}=\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{4}+\frac{1}{4}\left(\sin\frac{\pi}{2}-\sin 0\right)=\frac{\pi}{8}+\frac{1}{4}.$$

Пример 19.4. Вычислить интеграл $\int\limits_{1}^{4}\frac{1+\sqrt{x}}{x^2}dx.$

Решение.

$$\int\limits_{1}^{4}\frac{1+\sqrt{x}}{x^2}dx=\int\limits_{1}^{4}\frac{1}{x^2}dx+\int\limits_{1}^{4}x^{-\frac{3}{2}}dx=\frac{x^{-1}}{-1}\Bigg|_{1}^{4}-2x^{-\frac{1}{2}}\Bigg|_{1}^{4}=\frac{7}{4}.$$

19.4. Замена переменной в определенном интеграле

Пусть нужно найти интеграл $\int\limits_{a}^{b}f\ \ \varphi\ \ x\ \ \ \varphi'\ \ x\ dx$, который непосредственно вычислить нельзя, где подынтегральная функция непрерывная.

Допустим, что $t=\varphi(x)$.

Тогда:

$$\int_a^b f(\varphi(x))\varphi'(x)dx=\int_\alpha^\beta f(t)dt, \tag{19.23}$$

где $dt=\varphi'(x)dx$, $\alpha=\varphi(a),\ \beta=\varphi(b)$.

Пример 19.5. Вычислить $\int_0^{3\pi}\sin^3 xdx$.

Решение.

$$\int_0^{3\pi}\sin^3 xdx=-\int_0^{3\pi}(1-\cos^2 x)(-\sin x)dx=\int_1^{-1}(1-t^2)dt=\left(-t+\frac{t^3}{3}\right)\Bigg|_{-1}^{1}=\frac{2}{3}.$$

В интеграле была сделана замена:

$t=\cos x,\ dt=-\sin xdx,$ и при $x=0$, $t=-1$, а при $x=3\pi,\ t=-1$.

Рассмотрим еще один случай замены переменной.

Пусть функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a;b]$.

Тогда, если:

1) функция $x=\varphi(t)$ дифференцируема на $[\alpha;\beta]$ и отображает $[\alpha;\beta]$ на $[a;b]$, $\varphi'(t)$ непрерывна на $[\alpha;\beta]$;

2) функция $f(\varphi(t))$ определенная и непрерывная на $[\alpha,\beta]$;

3) $\varphi(\alpha)=a$; $\varphi(\beta)=b$, то справедлива формула:

$$\int_a^b f(x)dx=\int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)dt, \tag{19.24}$$

которая носит название *формулы замены переменной в определенном интеграле.*

Заметим, что если при вычислении неопределенного интеграла с помощью замены переменной мы должны были вернуться от новой переменной t к переменной x, то при вычислении определенного интеграла этого можно не делать, достаточно установить новые пределы интегрирования α и β для переменной t.

Пример 19.6. Вычислить $\int_0^a \sqrt{a^2 - x^2}\,dx \quad a > 0$ **.**

Решение.

Если положить $x = a\sin t$, то

$$\sqrt{a^2 - x^2} = a\sqrt{1-\sin^2 t} = a\cos t \text{ и } dx = a\cos t dt.$$

Изменяем пределы интегрирования: при $x = 0,\ t = 0;$ при $x = a, t = \frac{\pi}{2}$.

Следовательно:

$$\int_0^a \sqrt{a^2 - x^2}\,dx = \int_0^{\pi/2} a\cos t \cdot a\cos t dt = a^2 \int_0^{\pi/2} \cos^2 t dt = \frac{a^2}{2} \int_0^{\pi/2} \ 1+\cos 2t \ \ dt =$$

$$= \left(\frac{a^2}{2} t + \frac{a^2}{4} \sin 2t \right)\Bigg|_0^{\pi/2} = \frac{\pi a^2}{4}.$$

Здесь использована формула: $\cos^2 t = \frac{1+\cos 2t}{2}$.

19.5. Интегрирование по частям

Известно, что так же, как и для неопределенного интеграла, для определенного интеграла будет справедливой формула интегрирования по частям.

Теорема. Пусть функции u и v дифференцируемые функции по своим аргументам x, тогда:

$$\int_a^b u dv = uv \Big|_a^b - \int_a^b v du, \tag{19.25}$$

где $uv \Big|_a^b = u(b)v(b) - u(a)v(a)$, а интеграл $\int_a^b v du$ будет более проще при интегрировании, чем исходный.

Формула (19.25) является *формулой интегрирования по частям* в определенном интеграле.

Пример 19.7. Вычислить $\int\limits_0^1 xe^{2x}dx$.

Решение.

Пусть $x=u$, тогда $dx=du$, $e^{2x}dx=dv$, тогда $v=\frac{1}{2}e^{2x}$.

Используя формулу интегрирования по частям (19.25), получим:

$$\int\limits_0^1 xe^{2x}dx=\frac{x}{2}e^{2x}\Big|_0^1-\frac{1}{2}\int\limits_0^1 e^{2x}dx=\frac{e^2}{2}-\frac{1}{4}e^{2x}\Big|_0^1=\frac{e^2}{2}-\frac{1}{4}(e^2-1)=\frac{1}{4}(e^2-1).$$

Пример 19.8. Вычислить $\int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}\frac{xdx}{\sin^2 x}$.

Решение.

Пусть $u=x$, $dv=\frac{dx}{\sin^2 x}$, тогда $du=dx$, $v=\int\frac{dx}{\sin^2 x}=-\mathrm{ctg}\,x$.

Следовательно, имеем:

$$\int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}\frac{xdx}{\sin^2 x}=x\ \ -ctgx\ \Big|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}+\int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}ctgxdx=-\frac{\pi}{3}ctg\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{4}ctg\frac{\pi}{4}+$$

$$+\int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}\frac{\cos x}{\sin x}dx=-\frac{\pi}{3}\frac{1}{\sqrt{3}}+\frac{\pi}{4}+\ln|\sin x|\Big|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}=-\frac{\pi}{3\sqrt{3}}+\frac{\pi}{4}+$$

$$+\ln\sin\frac{\pi}{3}-\ln\sin\frac{\pi}{4}=-\frac{\pi}{3\sqrt{3}}+\frac{\pi}{4}+\ln\frac{\sqrt{3}}{2}-\ln\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{\pi}{4}-$$

$$-\frac{\pi}{3\sqrt{3}}+\ln\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}=\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{3\sqrt{3}}+\frac{1}{2}\ln\frac{3}{2}=\frac{\pi\ \ 9-4\sqrt{3}}{36}+\frac{1}{2}\ln\frac{3}{2}.$$

Пример 19.9. Вычислить $\int\limits_1^2 x^2\ln xdx$.

Решение.

Пусть $u = \ln x$, тогда $du = \frac{1}{x}dx$, а $dv = x^2 dx$, тогда $v = \frac{x^3}{3}$.

Следовательно,

$$\int_1^2 x^2 \ln x dx = \frac{x^3}{2}\ln x\Bigg|_1^2 - \frac{1}{3}\int_1^2 x^2 dx = 4\ln 2 - \frac{1}{3}\frac{x^2}{3}\Bigg|_1^2 = 4\ln 2 - \frac{8}{9} + \frac{1}{9} = 4\ln 2 - \frac{7}{9}.$$

19.6. Приближенное вычисление определенного интеграла

Для вычисления определенного интеграла можно использовать так называемые приближенные формулы, основанные на численных методах вычисления.

Формула прямоугольников

Пусть нужно вычислить определенный интеграл от непрерывной на отрезке $[a, b]$ функции $y = f(x)$.

Самый простой способ приближенного вычисления определенного интеграла вытекает из его определения как предела интегральной суммы.

Разделим отрезок $[a, b]$ на равные части точками $x_i = a + i\frac{b-a}{n}$ $(i = \overline{1, n})$ и положим, что:

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{n}\sum_{i=1}^{n} f(x_i). \qquad (19.26)$$

Полученное выражение называется **формулой прямоугольников**.

Поскольку для непрерывной функции на $[a, b]$ предел при $n \to \infty$ и $\Delta x_i = \frac{b-a}{n} \to 0$, то можно утверждать, что ошибка при вычислении интеграла будет тем меньше, чем больше n.

Абсолютная погрешность Δ при этом подсчитывается по формуле:

$$\Delta = \left| \int_a^b f(x)dx - S_n \right|, \tag{19.27}$$

где $S_n = \dfrac{b-a}{n} \sum_{i=1}^{n} f(x_i)$.

Формула трапеций

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{n}\left(\frac{f(x_0)+f(x_1)}{2} + \frac{f(x_1)+f(x_2)}{2} + \ldots + \frac{f(x_{n-1})+f(x_{n+1})}{2}\right) =$$

$$= \frac{b-a}{2n}\left(f(x_0) + 2\sum_{i=1}^{n-1} f(x_i) + f(x_n) \right). \tag{19.28}$$

Формула, как и в предыдущем случае, будет тем точнее, чем большее число n.

Можно доказать, что если функция $f(x)$ имеет непрерывную ограниченную производную $f'(x)$, которая удовлетворяет неравенству $|f'(x)| \le M_1$ (M_1 – число), то для обеих формул (прямоугольников и трапеций) абсолютная погрешность определяется неравенством

$$\Delta \le \frac{M_1(b-a)^2}{4n}. \tag{19.29}$$

Для функций, которые имеют ограниченную вторую производную $|f''(x)| \le M_2$, для абсолютной погрешности имеет место такая оценка:

$$\Delta \le \frac{M_2(b-a)^2}{12n^2}. \tag{19.30}$$

Формула Симпсона

Поделим отрезок $[a,b]$ на четное число частей $n = 2k$. Площадь криволинейной трапеции, которая соответствует первым двум отрезкам $[x_0, x_1]$ и $[x_1, x_2]$, ограниченная линией $y = f(x)$, заменим на площадь, которая ограничена параболой, которая проведена через точки

$A_0(x_0, y_0)$, $A_1(x_1, y_1)$, $A_2(x_2, y_2)$, с осью симметрии, параллельной оси Oy (рис. 19.2).

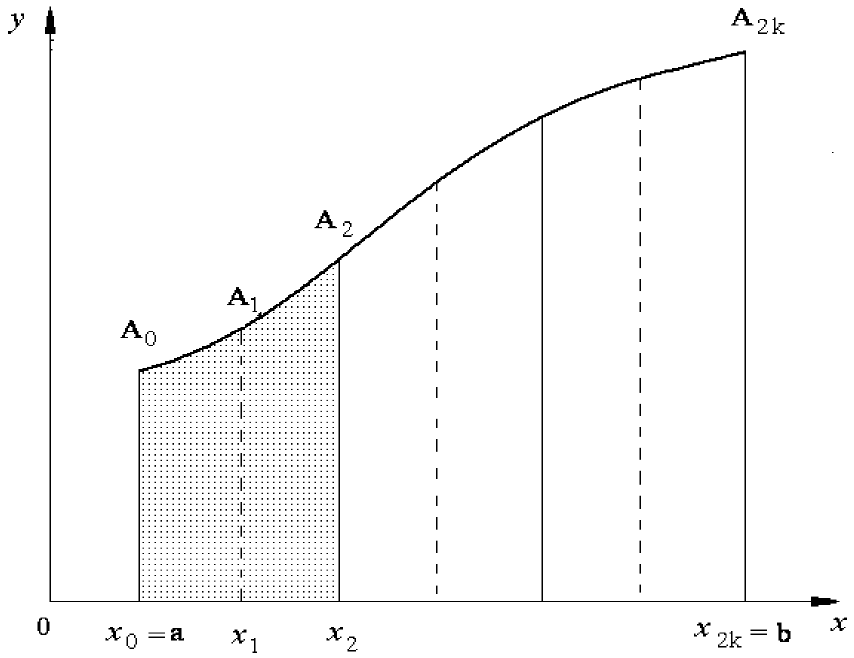


Рис. 19.2

Рассмотрим площадь криволинейной трапеции, ограниченную сверху параболой:

$$y = ax^2 + bx + c. \tag{19.31}$$

Аналогичные параболы строим и для всех других пар отрезков. Сумма площадей под этими параболами и даст приближенное значение интеграла.

Можно доказать, что площадь криволинейной трапеции, которая ограничена сверху параболой (19.31), будет:

$$S = \frac{h}{3}(f(x_0) + 4f(x_1) + f(x_2)). \tag{19.32}$$

где h – расстояние между двумя ординатами $f(x_0)$ и $f(x_2)$.

Погрешность формулы парабол

$$\Delta \le \frac{(b-a)^5}{180n^4} M_3, \tag{19.33}$$

где M_3 – наибольшее значение $\left|y^{(4)}\right|$ в интервале $[a,b]$.

Таким образом, формула Симпсона дает наилучшее приближение к искомому интегралу при $n=2k\to\infty$, чем формула прямоугольников или формула трапеций.

Пример 19.10. Вычислить интеграл $\int\limits_0^4 x^2dx$, а затем для $n=10$ вычислить приближенно по формулам прямоугольников, трапеций, парабол.

Найти абсолютные и относительные погрешности.

Решение.

$$y_i = f(x_i) = x_i^2,\ h=\frac{b-a}{n}=\frac{4-0}{10}=0,4.$$

x_i	0	0,4	0,8	1,2	1,6	2	2,4	2,8	3,2	3,6	4
y_i	0	0,16	0,64	1,44	2,56	4	5,76	7,84	10,24	12,96	16

По формуле Ньютона – Лейбница:

$$\int\limits_0^4 x^2dx=\left.\frac{x^3}{3}\right|_0^4=\frac{64}{3}\approx 21,33.$$

По формуле прямоугольников:

$$\int\limits_0^4 x^2dx\approx 0,4\,(0,16+0,64+1,44+2,56+4+5,76+$$
$$+7,84+10,24+12,96+16)=24,64.$$

По формуле трапеции:

$$\int\limits_0^4 x^2dx\approx 0,4\left(\frac{0+16}{2}+0,16+0,64+1,44+2,56+4+5,76+\right.$$
$$\left.+7,84+10,24+12,96\right)=21,44.$$

По формуле парабол:

$$\int_0^4 x^2dx \approx \frac{0,4}{3}\left(0+16+4\left(0,16+1,44+4+7,84+12,96\right)+\right.$$

$$\left.+2\left(0,64+2,56+5,76+10,24\right)\right)=21,33.$$

При вычислении интеграла по формуле прямоугольников:

$$\Delta = \left|24,64-21,33\right| = 3,31, \text{ а } \delta = \frac{3,31}{21,33}\cdot 100\,\% = 15,52\,\%.$$

При вычислении интеграла по формуле трапеций:

$$\Delta = \left|21,44-21,33\right| = 0,11, \text{ а } \delta = \frac{0,11}{21,33}\cdot 100\,\% = 0,52\,\%.$$

При вычислении интеграла по формуле Симпсона:

$$\Delta = \left|21,33-21,33\right| = 0, \text{ а } \delta = 0\,\%, \ \Delta = \left|21,33-21,33\right| = 0.$$

19.7. Геометрические приложения определенного интеграла

Вычисление длины дуги кривой

Длиной дуги называется предел длины вписанной ломаной линии при неограниченном уменьшении длины ее участков.

Найдем длину дуги $y = f(x)$, где $y = f(x)$ – непрерывная дифференцируемая функция на $[a,b]$.

Длина дуги кривой, которая ограничена $y = f(x)$, будет:

$$l = \lim_{\max \Delta x_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} \sqrt{1+y'^2(c_i)}\Delta x_i = \int_a^b \sqrt{1+y'^2}dx, \text{ где } 1 \le i \le n. \quad (19.34)$$

Если кривая задана уравнениями в параметрической форме $x = x(t)$, $y = y(t)$, то длина дуги кривой определяется по формуле:

$$l = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{(x_t')^2 + (y_t')^2}dt, \quad (19.35)$$

где t_1 и t_2 – значения параметра, которые соответствуют концам дуги.

Если дуга задается уравнением $\rho = \rho(\varphi)$ в полярных координатах, то длина дуги определяется:

$$l = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{\rho^2 + (\rho')^2}\, d\varphi, \tag{19.36}$$

где α и β – значения полярного угла, которые соответствуют концам дуги (в *полярной системе координат* положение точки M на плоскости определяется ее расстоянием $|OM| = \rho$ от полюса O и полярным углом, образованным отрезком OM с полярной осью OX).

Прямоугольные и полярные координаты связаны следующими формулами: $x = \rho \cdot cos\varphi, \quad y = \rho \cdot sin\varphi.$

Пример 19.11. Найти длину дуги кривой $y = \sqrt{x - x^2} + \arcsin\sqrt{x}.$

Решение.

Чтобы найти пределы интегрирования, найдем область определения заданной функции, решив систему неравенств:

$$\begin{cases} x - x^2 \geq 0, \\ -1 \leq \sqrt{x} \leq 1, \end{cases} \quad \begin{cases} x(x-1) \leq 0, \\ 0 \leq x \leq 1, \end{cases} \quad 0 \leq x \leq 1.$$

Найдем:

$$y' = \frac{1-2x}{2\sqrt{x-x^2}} + \frac{1}{2\sqrt{x}\sqrt{1-x}} = \frac{1-x}{\sqrt{x}\sqrt{1-x}};$$

$$1 + (y')^2 = 1 + \frac{(1-x)^2}{x(1-x)} = 1 + \frac{1-x}{x} = \frac{1}{x}.$$

Следовательно, по формуле (19.31):

$$l = \int_0^1 \sqrt{\frac{1}{x}}\, dx = \int_0^1 x^{-\frac{1}{2}}\, dx = 2\sqrt{x}\Big|_0^1 = 2.$$

Пример 19.12. Найти длину дуги астроиды $x = a\cos^3 t,\ \ y = a\sin^3 t$ (рис. 19.3).

Решение.

Найдем длину $\frac{1}{4}$ всей дуги, которая расположена в первой четверти.

Параметр t изменяется от $t = 0$ до $t = \frac{\pi}{2}$.

$$x'(t) = -3a\cos^2 t\sin t,$$

$$y'(t) = 3a\sin^2 t\cos t,$$

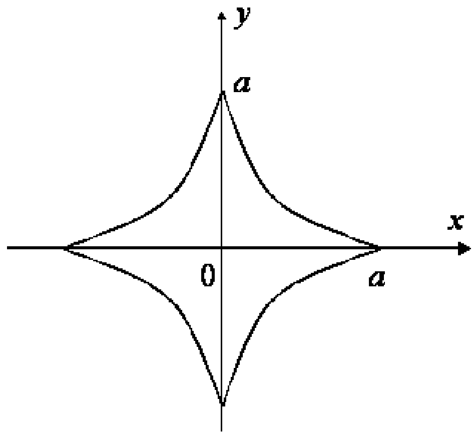


Рис. 19.3

$$(x')^2 + (y')^2 = 9a^2\cos^4 t\sin^2 t + 9a^2\sin^4 t\cos^2 t =$$
$$= 9a^2\cos^2 t\sin^2 t(\cos^2 t + \sin^2 t) = 9a^2\cos^2 t\sin^2 t.$$

По формуле (19.35) получаем:

$$\frac{1}{4}l = \int\limits_0^{\pi/2}\sqrt{9a^2\cos^2 t\sin^2 t dt} = 3a\sqrt{\cos t\sin t dt} = 3a\left.\frac{\sin^2 t}{2}\right|_0^{\pi/2} = \frac{3}{2}a.$$

Следовательно, длина астроиды $l = 4\cdot\frac{3}{2}a = 6a$.

Пример 19.13. Найти длину кардиоиды $\rho = 2a(1+\cos\varphi)$ (рис. 19.4).

Решение.

Заданная кривая симметрична относительно полярной оси. Поэтому найдем половину длины ее дуги, где угол φ будет изменяться от $\varphi = 0$ до $\varphi = \pi$.

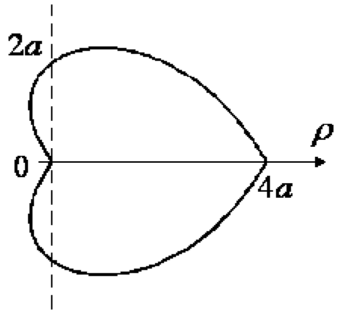


Рис. 19.4

Имеем: $\rho' = -2a\sin\varphi$,

$$\rho^2 + (\rho')^2 = 4a^2(1+\cos\varphi)^2 + 4a^2\sin^2\varphi =$$
$$= 4a^2(1 + 2\cos\varphi + \cos^2\varphi + \sin^2\varphi) = 8a^2(1+\cos\varphi).$$

По формуле (19.36) получаем:

$$\frac{1}{2}l=\int_0^{\pi}\sqrt{8a^2(1+\cos\varphi)}\,d\varphi=a\int_0^{\pi}\sqrt{16\cos^2\frac{\varphi}{2}}\,d\varphi=$$

$$=4a\int_0^{\pi}\cos\frac{\varphi}{2}\,d\varphi=8a\sin\frac{\varphi}{2}\Big|_0^{\pi}=8a$$

Тогда длина искомой линии $l=16a$ (ед.).

Вычисление площадей геометрических фигур

Рассмотрим несколько случаев вычисления площадей геометрических фигур:

1. Известно, что определенный интеграл от неотрицательной непрерывной функции $y=f(x)$ на $[a,b]$ численно равен площади S криволинейной трапеции, ограниченной функцией $y=f(x)\geq 0$:

$$S=\int_a^b f(x)dx. \tag{19.37}$$

2. Если функция $y=f(x)$ на отрезке $[a,b]$ неположительная, то есть $f(x)\leq 0$, то и определенный интеграл от нее также будет числом неположительным, потому что он является пределом интегральных сумм, а значит сохраняет знак подынтегральной функции, тогда для $f(x)\leq 0$ площадь криволинейной трапеции будет:

$$S=-\int_a^b f(x)dx. \tag{19.38}$$

3. Если функция $y=f(x)$ на промежутке $[a,b]$ изменяет знак, проходя через точку c, то для нахождения площади промежуток $[a,b]$ нужно разбить на два промежутка $[a,c]$ и $[c,b]$ и применить формулы (19.37) и (19.38).

Если функция $y=f(x)$ несколько раз изменяет знак на $[a,b]$, то площадь фигуры можно вычислить по формуле:

$$S=\int_a^b |f(x)|dx. \tag{19.39}$$

4. Более сложные задачи на вычисление площадей решают, используя свойство аддитивности площадей, то есть фигуру можно разделить на непересекающиеся части и вычислить площадь всей фигуры как сумму площадей этих частей.

5. Если нужно вычислить площадь фигуры, ограниченную кривыми $y=f_1(x)$, $y=f_2(x)$, заданными на отрезке $[a,b]$, причем $f_1(x)\geq f_2(x)$, то эта площадь вычисляется по формуле:

$$S=\int_a^b f_1(x)dx-\int_a^b f_2(x)dx=\int_a^b (f_1(x)-f_2(x))dx. \tag{19.40}$$

6. Если плоская фигура ограничена графиком непрерывной на промежутке c,d функции $x=g(y)$, прямыми $y=c, y=d$ и осью ординат, то площадь S находится по формуле:

$$S=\int_c^d g(y)dy. \tag{19.41}$$

Пример 19.14. Найти площадь фигуры, ограниченной графиком функции $y=x^3$, прямой $x=1$ и осью Ox (рис. 19.5).

Решение.

$$S=\int_0^1 x^3dx=\left.\frac{x^4}{4}\right|_0^1=\frac{1}{4}.$$

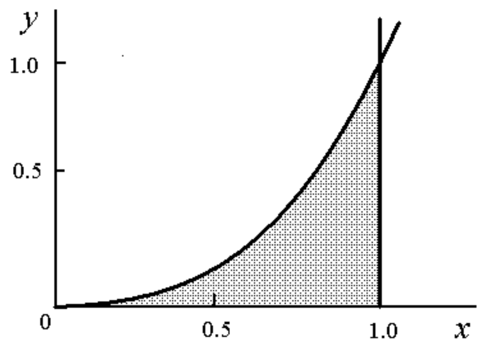


Рис. 19.5

Пример 19.15. Найти площадь фигуры, которая ограничена линиями $y=\cos x$, $x=0$; $x=\pi$ (рис. 19.6).

Решение.

Площадь этой фигуры будет:

$$S=\int_0^{\frac{\pi}{2}}|\cos x|\,dx.$$

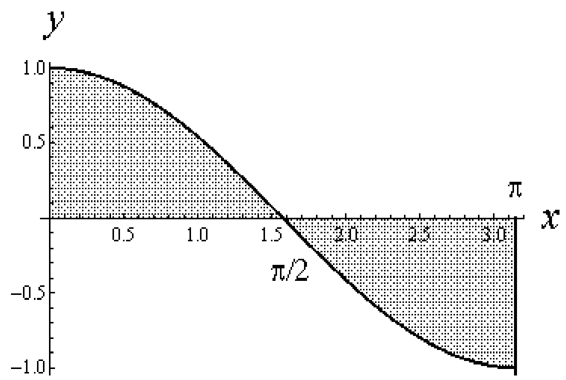


Рис. 19.6

Как видно из рис. 19.6, площадь S под кривой $y=\cos x$ между точками $x=\frac{\pi}{2}$ и $x=\pi$ отрицательна, значит на этом интервале $|\cos x|=-\cos x$, и площадь можно вычислить как разницу двух площадей S_1 и S_2, то есть:

$$S=S_1-S_2=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos x dx-\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\cos x dx=\sin x\ \Big|_0^{\frac{\pi}{2}}-\sin x\ \Big|_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}=$$

$$=\sin\frac{\pi}{2}-\sin 0-\sin\pi+\sin\frac{\pi}{2}=1-0-0+1=2.$$

Пример 19.16. Найти площадь S фигуры, ограниченной линиями: $y=x$; $y=\frac{1}{x^2}$, $y=0$; $x=3$.

Решение.

Данную фигуру можно рассматривать как две криволинейных трапеции, ограниченные осью абсцисс, прямыми $x=0$ и $x=3$, а также графиком функции $y=x$ на отрезке $[0;1]$ и графиком $y=\frac{1}{x^2}$ на отрезке $[1;3]$ (рис. 19.7).

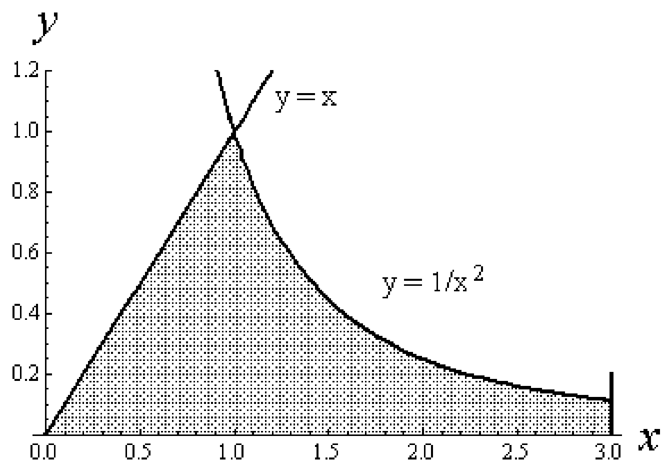


Рис. 19.7

Поскольку записать первообразную одинаково для этих функций нельзя, то данную криволинейную трапецию разобьем прямой $x=1$ на две трапеции, тогда общая площадь фигуры будет равна сумме площадей этих трапеций, то есть $S = S_1 + S_2$, где $S_1 = \int\limits_0^1 x dx$, а $S_2 = \int\limits_1^3 \frac{1}{x^2} dx$.

Следовательно, $S = \int\limits_0^1 x dx + \int\limits_1^3 \frac{dx}{x^2} = \left. \frac{x^2}{2} \right|_0^1 - \left. \frac{1}{x} \right|_1^3 = \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + 1 = \frac{7}{6}$.

7. Площадь фигуры, ограниченной кривой, которая задана уравнениями в параметрической форме.

Пусть зависимость $y = f(x)$ задается параметрически, а именно:

$$x = x(t),\ y = y(t), \tag{19.42}$$

где $\alpha \le t \le \beta$; $\varphi(\alpha) = a$, $\varphi(\beta) = b$ и уравнения (19.42) определяют некоторую кривую $y = f(x)$ на отрезке $[a, b]$.

Тогда площадь фигуры вычисляется по формуле (19.37), но при этом выполняется замена переменной $x = x(t)$, тогда $dx = x'(t)dt$, а $y = f(x(t)) = y(t)$ и

$$S = \int\limits_a^b f(x)dx = \int\limits_\alpha^\beta y(t)x'(t)dt. \tag{19.43}$$

Пример 19.17. Найти площадь, ограниченную эллипсом $x = a\cos t$, $y = b\sin t$ (рис. 19.8).

Решение.

Поскольку эллипс симметричен относительно осей координат, то найдем четверть его площади.

При изменении x от 0 до a параметр t изменяется от $\frac{\pi}{2}$ до 0 (из уравнений $a\cos t = 0,\ a\cos t = a$).

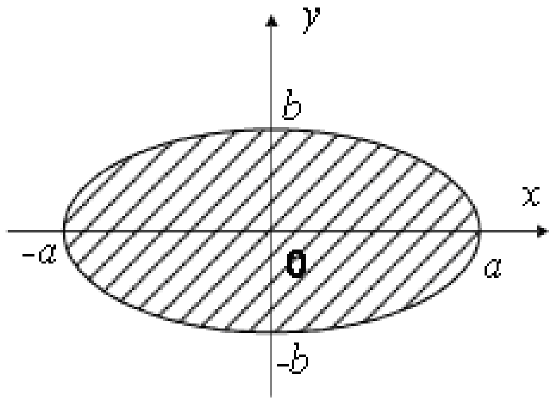


Рис. 19.8

Следовательно,

$$\frac{1}{4}S=\int_{\frac{\pi}{2}}^{0} b\sin t\ \ a\cos t\ '\,dt=-ab\int_{\frac{\pi}{2}}^{0}\sin^2 t dt=$$

$$=-\frac{ab}{2}\int_{\frac{\pi}{2}}^{0}\ 1-\cos 2t\ \ dt=-\frac{ab}{2}\left(t-\frac{\sin 2t}{2}\right)\Bigg|_{\frac{\pi}{2}}^{0}=\frac{ab}{2}\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\sin\pi}{2}\right)=\frac{\pi ab}{4}.$$

$$S=\pi ab.$$

Вычисление объема тела вращения

Допустим, что $f(x)$ – известная непрерывная функция от x.

Объем тела вращения криволинейной трапеции вокруг оси Ox:

$$V_x=\lim_{\max\Delta x_i\to 0}\pi\sum_{i=1}^{n} f^2(\xi_i)\Delta x_i=\pi\int_a^b f^2(x)dx. \qquad (19.44)$$

Пример 19.18. Шар радиусом R можно рассматривать как результат вращения полуокружности $y=\sqrt{R^2-x^2}$ вокруг оси Ox.

Тогда объем этого шара можно найти по формуле (19.44):

$$V=\pi\int_{-R}^{R} f^2(x)dx=2\pi\int_0^R(R^2-x^2)dx=2\pi(R^2x-\frac{x^3}{3})\Bigg|_0^R=\frac{4}{3}\pi R^3.$$

Если заменить в формуле (19.44) формально x на y, то получим объем тела вращения вокруг оси Oy криволинейной трапеции, ограниченной линиями $x=\varphi(y)$, где $\varphi(y)$ – функция обратная к $f(x)$, $x=0$; $y=c$; $y=d$,

то есть:

$$V_y=\pi\int_c^d\varphi^2(y)dy. \qquad (19.45)$$

19.8. Использование интегралов в некоторых экономических задачах

Интегрирование в экономике широко используется для определения функций расходов, прибыли, потребления, если известны соответственно функции предельных расходов, предельной прибыли, предельного потребления и т. п. Для определения свободной постоянной интегрирования необходимо дополнительное условие. Если находится функция расходов, используется условие: при количестве продукции $x=0$ значение функции расходов равно фиксированным расходам, а при нахождении функции дохода: при количестве продукции $x=0$ значение функции равно нулю (доход равен нулю, если изделия не проданы).

Рассмотрим ряд экономических задач, для решения которых используется понятие неопределенного и определенного интеграла.

Пример 19.19. Задана функция предельного дохода

$$R'(x)=30-0,02x.$$

Найти функцию дохода и закон спроса.

Решение.

$$R(x)=\int(30-0,02x)dx=30x-0,01x^2+C.$$

Следовательно, при $x=0,$ $R(x)=0$, то есть $C=0$ и функция дохода будет:

$$R(x)=30x-0,01x^2.$$

Если каждая единица продукции продается по цене p единиц, то доход определяется формулой $R=xp.$

Следовательно, закон спроса будет:

$$p(x)=30-0,01x.$$

Пример 19.20. Функция предельных расходов предприятия имеет вид:

$$f'(x)=60-0,04x+0,003x^2.$$

1. Найти функцию расходов, если расходы на 100 единиц продукции составляют 7 тыс. грн.

2. Найти фиксированные расходы.

3. Каковы затраты производства 250 единиц продукции?

4. Если цена составляет 65,5 грн за единицу продукции, найти максимальное значение прибыли.

Решение.

Найдем функцию расходов:

$$f(x) = \int (60 - 0,04x + 0,003x^2)dx = 60x - 0,02x^2 + 0,001x^3 + C.$$

Если $x = 100$ ед., то по условию задачи $f(x) = 7000$ тыс. грн.

То есть:

$$7000 = 60 \cdot 100 - 0,02 \cdot 100^2 + 0,001 \cdot 100^3 + C, \text{ или } C = 200.$$

Для нахождения фиксированных расходов найдем функцию расходов при $x = 0$. При этом $f(0) = 200$.

Таким образом, функция расходов имеет вид:

$$f(x) = 60x - 0,02x^2 + 0,001x^3 + 200.$$

Расходы производства на 250 ед. продукции получим:

$$f(250) = 60 \cdot 250 + 0,02 \cdot 250^2 + 0,001 \cdot 250^3 = 29575.$$

Прибыль предприятия определяем по формуле:

$$P(x) = px - f(x),$$

где p – цена единицы продукции.

Следовательно,

$$P(x) = 65,5x - 60x + 0,02x^2 - 0,001x^3 - 200.$$

Решим задачу на экстремум, найдем критические точки:

$$P'(x) = 5,5 + 0,04x - 0,003x^2 = 0, \ x = 50.$$

Исследуем $P''(x) = 0,04 - 0,006x^2$ при $x = 50$.

$P''(50) = 0,04 - 0,006 \cdot 50 = -0,26 < 0$, то есть функция прибыли имеет максимум.

Значение функции прибыли в точке $P(50)=0.$

Таким образом, если реализовывать продукцию по цене 65,5 грн за единицу, предприятие не будет иметь прибыль.

Пример 19.21. Найти среднее значение расходов, если объем производства изменяется от 100 до 200 ден. ед. Известно, что расходы $f(x)$ в зависимости от объема производства x описываются с помощью функции $f(x)=1000+2x+0{,}04x^2$. Определить объем производства, при котором расходы достигают среднего значения.

Решение.

Для того чтобы определить искомый объем производства, используем теорему о среднем, записав ее так:

$$f(c)=\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx. \tag{19.46}$$

Если $f(x)=1000+2x+0{,}04x^2$, то подставим ее под знак интеграла с пределами интегрирования $a=100$, $b=200$:

$$f(c)=\frac{1}{200-100}\int_{100}^{200}(1000+2x+0{,}4x^2)dx=$$

$$=\frac{1}{100}\left(1000x+x^2+0{,}04\frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_{100}^{200}=2700.$$

Таким образом, средние расходы производства составляют 2700 ден. ед.

Пример 19.22. *Выигрыш потребителей и поставщиков.*

Найти выигрыш потребителей и выигрыш поставщиков, если $p=f(x)$ – кривая спроса на некоторый товар D и $p=g(x)$ – кривая предложения (S); $(x_0;p_0)$ – точка рыночного равновесия (рис. 19.9).

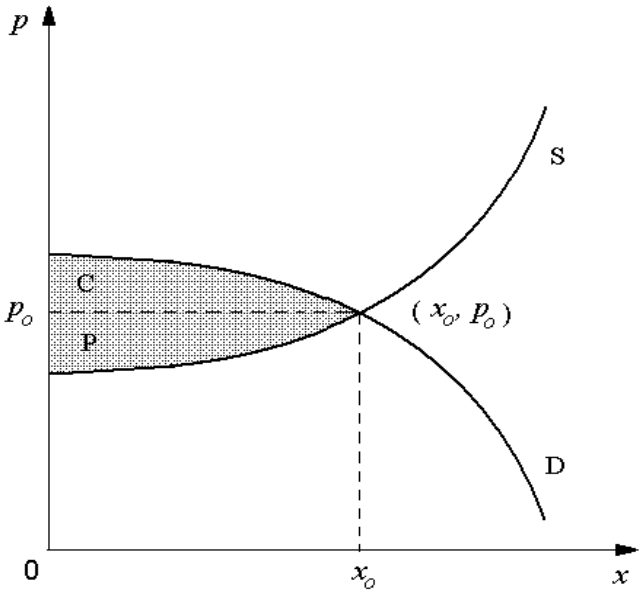
Понятно, что некоторые потребители смогут заплатить за товар цену $p>p_0$.

Найдем выигрыш потребителей от установленной цены p_0.

Разобьем промежуток $0; x_0$ на частные промежутки $x=0; x=x_1;$ $x=x_2, ..., x_n=x_0$.

В каждом частном промежутке $x_{i-1} \le x \le x_i$ возьмем произвольную точку $u_i (i=1 \div n)$.

Выигрыш потребителей на этом отрезке будет:



$$p(u_i) - p_0 \;\; \Delta x_i ,$$

где $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$.

Рис. 19.9

Тогда средний выигрыш на промежутке $0; x_0$ будет:

$$\sum_{i=1}^{n} \;\; p(u_i) - p_0 \;\; \Delta x_i .$$

Если функция спроса непрерывна и $n \to \infty$, а $\max|\Delta x_i| \to 0$, то эта интегральная сумма имеет предел: $\int_0^{x_0} \;\; f(x) - p_0 \;\; dx$.

Таким образом, выигрыш потребителей:

$$C = \int_0^{x_0} f(x)dx - p_0 x_0 . \qquad (19.47)$$

Аналогично находится выигрыш поставщиков:

$$P = p_0 x_0 - \int_0^{x_0} g(x)dx . \qquad (19.48)$$

Очевидно, что выигрыш потребителей равен площади между кривой спроса D и прямой $p = p_0$. Выигрыш поставщиков равен площади между прямой $p = p_0$ и кривой предложения S.

Пример 19.23. Пусть $f(x)=116-x^2$ – функция спроса, а функция предложения – $g(x)=\frac{5}{3}x+20$. Найти выигрыши потребителей и поставщиков, если было установлено рыночное равновесие.

Решение.

Найдем точку рыночного равновесия $116-x^2=\frac{5}{3}x+20$,

или

$$3x^2+5x-288=0.$$

Корни квадратного уравнения $x_1=9$, $x_2=-\frac{32}{3}$.

Тогда при $x_0=9$, $p_0=35$.

Таким образом, выигрыш потребителя:

$$C=\int_0^9 116-x^2\ dx-315=\left(116x-\frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_0^9-315=486,$$

а выигрыш поставщика:

$$P=315-\int_0^9\left(\frac{5}{3}x+20\right)dx=315-\left(\frac{5}{3}x^2+20x\right)\Bigg|_0^9=315-\frac{5}{6}\cdot 81-180=67{,}5.$$

Пример 19.24. *Задача дисконтирования.* Определение начальной суммы капиталовложений по ее конечной стоимости, полученной в течение времени t (годы), если годовой процент, или процентная ставка p, называется *дисконтированием*. Задачи дисконтирования рассматривают при определении экономической эффективности капиталовложений.

Пусть K_t – конечная сумма за t лет, а K – начальная, или дисконтированная, сумма.

Если проценты простые, то $K_t=K(1+it)$, где $i=\frac{p}{100}$ – удельная процентная ставка.

Тогда

$$K=\frac{K_t}{(1+it)}.$$

В случае сложных процентов $K_i = K(1+it)^t$, а поэтому

$$K = \frac{K_t}{(1+it)^t}.$$

Если ежегодная прибыль изменяется во времени и описывается формулой $f(t)$ по удельной процентной ставке, которая равна i, то она насчитывается непрерывно.

В этом случае дисконтированная прибыль K в течение времени T подсчитывается по формуле:

$$K = \int_0^T f(t)e^{-it}dt. \qquad (19.49)$$

Пример 19.25. Пусть нужно определить дисконтированную прибыль за 5 лет при процентной ставке 4%, если начальные капиталовложения составляют 1 млрд грн, а также намечается ежегодно увеличивать капиталовложение на 1 млрд грн.

Если капиталовложения задаются формулой $f(t) = 1 + it = 1 + t$, тогда по формуле (19.49) дисконтированная прибыль:

$$K = \int_0^5 (1+t)e^{-0,04t}dt.$$

Интегрируя по частям, имеем:

$$K = \int_0^5 (1+t)e^{-0,04t}dt = \left| \begin{matrix} 1+t = u \\ dt = du \\ e^{-0,04t}dt = dv \\ v = -\frac{1}{0,04}e^{-0,04} \end{matrix} \right| =$$

$$= -25e^{-0,04t}(1+t)\Big|_0^5 + 25\int_0^5 e^{-0,04t}dt = -25\cdot 6e^{-0,2} + 25 - 625e^{-0,04}\Big|_0^5 =$$

$$= -25(6e^{-0,2} - 1) - 625e^{-0,2} + 625 = -150e^{-0,2} + 25 - 625e^{-0,2} + 625 =$$

$$= -775e^{-0,2} + 650 = 15,5.$$

Стоимость $K = 15{,}5$ свидетельствует о том, что за 5 лет при равномерном приросте капиталовложений от 1 до 5 млрд грн ежегодные капиталовложения, равносильны начальным вложениям в 15,5 млрд грн по той же непрерывно начисленной процентной ставке.

19.9. Понятие несобственных интегралов

При рассмотрении определенного интеграла как предела интегральных сумм предполагалось, что подынтегральная функция ограничена на конечном отрезке интегрирования. Данное ранее определение определенного интеграла не имеет смысла при невыполнении хотя бы одного из этих условий. Нельзя разбить бесконечный интервал на конечное число отрезков конечной длины; при неограниченной функции интегральная сумма не имеет предела. Тем не менее возможно обобщить понятие определенного интеграла и на эти случаи, с чем связано понятие несобственного интеграла.

Пусть функция $f(x)$ определена на промежутке $[a,+\infty)$ и интегрируема на любом отрезке $[a,R]$, $R>0$, так что интеграл $\int_a^R f(x)\,dx$ имеет смысл.

Предел этого интеграла при $R\to\infty$ называется **несобственным интегралом с бесконечным пределом интегрирования** (или *несобственным интегралом первого рода*):

$$\int_a^{\infty} f(x)\,dx = \lim_{R\to\infty}\int_a^R f(x)\,dx.$$

В случае если этот предел конечен, говорят, что несобственный интеграл *сходится*, а функцию $f(x)$ называют **интегрируемой на бесконечном промежутке** $[a,+\infty)$; если предел бесконечен или не существует, то говорят, что несобственный интеграл *расходится.*

Аналогичным образом вводится понятие несобственного интеграла по промежутку $(-\infty,b]$:

$$\int_{-\infty}^{b} f(x)\,dx = \lim_{R\to\infty}\int_R^b f(x)\,dx.$$

Наконец, *несобственный интеграл с двумя бесконечными пределами* можно определить как сумму несобственных интегралов

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = \int_{-\infty}^{c} f(x)dx + \int_{c}^{\infty} f(x)dx.$$

Символ $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$ будем понимать так:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \lim_{\substack{a\to-\infty,\\ b\to+\infty}} \int_{a}^{b} f(x)dx = \lim_{\substack{a\to-\infty,\\ b\to+\infty}} F(x)\Big|_a^b = \lim_{\substack{a\to-\infty,\\ b\to+\infty}} \left(F(b)-F(a)\right). \quad (19.50)$$

Если этот предел существует, то несобственный интеграл существует, то есть *сходится*. В противном случае – не существует, то есть *расходится*.

Введем обозначения:

$$\lim_{b\to+\infty} F(b) = F(+\infty),\ \lim_{a\to-\infty} F(a) = F(-\infty).$$

Тогда:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = F(x)\Big|_{-\infty}^{+\infty} = F(+\infty) - F(-\infty), \quad (19.51)$$

где $F(x)$ – первообразная функция для $f(x)$.

Теорема 1. Если для всех $x\ (x \geq a)$ выполняется неравенство $0 \leq f(x) \leq \varphi(x)$, и если $\int_{a}^{+\infty} \varphi(x)\,dx$ сходится, то $\int_{a}^{+\infty} f(x)\,dx$ также сходится, при этом $\int_{a}^{+\infty} f(x)\,dx \leq \int_{a}^{+\infty} \varphi(x)\,dx$.

Теорема 2. Если для всех $x\ (x \geq a)$ выполняется неравенство $0 \leq \varphi(x) \leq f(x)$, к тому же $\int_{a}^{+\infty} \varphi(x)\,dx$ расходится, то расходится и интеграл $\int_{a}^{+\infty} f(x)\,dx$.

Теорема 3. Если интеграл $\int\limits_a^{+\infty}|f(x)|dx$ сходится, то сходится и интеграл $\int\limits_a^{+\infty} f(x)\,dx$. В этом случае последний интеграл называется абсолютно сходящимся.

Несобственный интеграл вида: $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}dx$ называется *интегралом Пуассона*. Доказано, что этот интеграл: $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}dx=\sqrt{\pi}$.

Пример 19.26. Вычислить $\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{1+x^2}$.

Решение.

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{1+x^2}=\operatorname{arctg}x\Big|_{-\infty}^{+\infty}=\operatorname{arctg}(+\infty)-\operatorname{arctg}(-\infty)=\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2}=\pi.$$

Следовательно, интеграл сходится.

Пример 19.27. Вычислить $\int\limits_1^{+\infty}\cos x dx$.

Решение.

$$\int\limits_1^{+\infty}\cos x dx=\lim_{b\to+\infty}\sin x\Big|_1^b=\lim_{b\to+\infty}(\sin b-\sin 1).$$

Этот предел не существует. Следовательно, данный несобственный интеграл расходится.

Пример 19.28. Вычислить интеграл $\int\limits_0^{\infty}\frac{\operatorname{arctg}x}{1+x^2}dx$.

Решение.

По определению $\int\limits_0^{+\infty}\frac{\operatorname{arctgx}}{1+x^2}dx=\lim\limits_{b\to+\infty}\int\limits_0^b\frac{\operatorname{arctg}x}{1+x^2}dx$.

Для нахождения первообразной подынтегральной функции воспользуемся заменой $\operatorname{arctg}x=t$, откуда $\frac{1}{1+x^2}dx=dt$.

Тогда:

$$\int \frac{\operatorname{arctg} x}{1+x^2}dx = \int t dt = \frac{t^2}{2} = \frac{\operatorname{arctg}^2 x}{2}.$$

Следовательно,

$$\int_0^{+\infty} \frac{\operatorname{arctg} x}{1+x^2}dx = \lim_{b\to+\infty} \frac{\operatorname{arctg}^2 x}{2}\Bigg|_0^b = \lim_{b\to+\infty}\left(\frac{\operatorname{arctg}^2 b}{2} - \frac{\operatorname{arctg}^2 0}{2}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2}\right)^2 = \frac{\pi^2}{8}.$$

Несобственные интегралы от функции $f\ x$ *, которая имеет разрыв* при $x=a$ или при $x=b$, определяются такими формулами:

$$\int_a^b f\ x\ dx = \lim_{\varepsilon\to0}\int_{a+\varepsilon}^b f\ x\ dx;$$

$$\int_a^b f\ x\ dx = \lim_{\varepsilon\to0}\int_a^{b-\varepsilon} f\ x\ dx,\quad \varepsilon>0.$$

Несобственные интегралы называют *сходящимся*, если существуют конечные пределы в правых частях этих формул. В противном случае их называют *расходящимися*.

Пример 19.29. Вычислить несобственный интеграл $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$, если он сходящийся.

Решение.

Подынтегральная функция имеет разрыв в точке $x=1$.

По определению имеем:

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \lim_{\varepsilon\to0}\int_0^{1-\varepsilon}\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \lim_{\varepsilon\to0}\arcsin x\Big|_0^{1-\varepsilon} =$$

$$= \lim_{\varepsilon\to0}\ \arcsin\ 1-\varepsilon\ -\arcsin 0\ = \arcsin 1 = \frac{\pi}{2}.$$

То есть данный интеграл сходится.

Пример 19.30. Вычислить несобственный интеграл $\int\limits_0^1 \frac{dx}{x^2}$, если он сходится.

Решение.

Подынтегральная функция разрывная в точке $x = 0$.

По определению имеем:

$$\int\limits_0^1 \frac{dx}{x^2} = \lim_{\varepsilon \to 0} \int\limits_\varepsilon^1 \frac{dx}{x^2} = \lim_{\varepsilon \to 0} \left(-\frac{1}{x} \right) \Bigg|_\varepsilon^1 = \lim_{\varepsilon \to 0} \left(-1 + \frac{1}{\varepsilon} \right) = +\infty.$$

Таким образом, интеграл расходится.

Вопросы для самодиагностики

1. Что называется интегральной суммой функции $f\ \ x$ на $\ a,b\ $?
2. Дать определение определенного интеграла.
3. Сформулировать основные свойства определенного интеграла.
4. Как найти среднее значение функции на промежутке $\ a,b\ $?
5. В чем состоит геометрический смысл определенного интеграла?
6. В чем состоит физический смысл определенного интеграла?
7. В чем состоит экономический смысл определенного интеграла?
8. В чем заключается разница между определенным и неопределенным интегралами?
9. Чему равна производная от определенного интеграла с переменным верхним пределом?
10. Записать формулу Ньютона – Лейбница для вычисления определенного интеграла.
11. Какие методы интегрирования определенного интеграла вы знаете?
12. Сформулировать теорему о замене переменной в определенном интеграле.
13. В чем особенность метода замены переменной в определенном интеграле?
14. Записать формулу интегрирования по частям в определенном интеграле.
15. Какие интегралы называются несобственными?

16. Какие несобственные интегралы называются сходящимися? Приведите пример.

Упражнения

По формуле Ньютона – Лейбница вычислить интегралы:

19.1. $\int\limits_1^8 \left(4x - \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}\right)dx.$

19.2. $\int\limits_0^1 \sqrt{1-x}\,dx.$

19.3. $\int\limits_0^1 \frac{dx}{\sqrt{4-x^2}}.$

19.4. $\int\limits_0^4 \frac{dx}{25-x^2}.$

19.5. $\int\limits_2^{2,5} \frac{dx}{\sqrt{5+4x-x^2}}.$

19.6. $\int\limits_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}.$

19.7. $\int\limits_4^5 x\sqrt{x^2-16}\,dx.$

19.8. $\int\limits_{-2}^1 x^2\sqrt{1-x^3}\,dx.$

19.9. $\int\limits_{\ln 3}^{\ln 8} \frac{e^x}{\sqrt{e^x+1}}dx.$

19.10. $\int\limits_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sqrt{1+\operatorname{tg} x}}{\cos^2 x}dx.$

19.11. $\int\limits_0^{0,5} e^{\sin \pi x}\cos \pi x\,dx.$

19.12. $\int\limits_1^{\sqrt[4]{e}} \frac{dx}{x\sqrt{1-\ln^2 x}}.$

19.13. $\int\limits_1^e \frac{\sin\ \ln x}{x}dx.$

19.14. $\int\limits_4^{25} \frac{dx}{\sqrt{x}-1}.$

19.15. $\int\limits_0^{\pi} x\sin\frac{x}{2}dx.$

19.16. $\int\limits_1^{\sqrt[3]{e}} x^2 \ln x\,dx.$

19.17. $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \ x+3\ \ \sin x\,dx.$

19.18. $\int\limits_0^{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} x\,dx.$

19.19. $\int\limits_1^{\infty} \frac{dx}{x^5}.$

19.20. $\int\limits_1^{\infty} \frac{dx}{x}.$

19.21. $\displaystyle\int_{2}^{\infty}\frac{dx}{x^2-1}.$

19.22. $\displaystyle\int_{-1}^{\infty}\frac{dx}{\sqrt[3]{(2x+1)^2}}.$

19.23. $\displaystyle\int_{1}^{\infty}\frac{dx}{\sqrt{x}}.$

19.24. $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{x^2+2x+2}.$

Найти длину дуги кривой:

19.25. $y^2=x^3,\quad 0\le x\le\frac{4}{3}.$

19.26. $y=\ln x,\ \sqrt{3}\le x\le\sqrt{8}.$

19.27. $y=\ln\cos x+2,\quad 0\le x\le\frac{\pi}{6}.$

19.28. $x=t-\sin t,\quad y=1-\cos t,\quad 0\le t\le 2\pi.$

Найти площади фигур, ограниченных заданными линиями:

19.29. $y=-x^2+3x-2,\ y=0.$

19.30. $y=x^2-2x+2,\ \ y=2+4x-x^2.$

19.31. $xy=1,\quad y=x^2,\ \ x=3,\quad y=0.$

19.32. $y=4-x^2,\quad y=x^2-2x.$

Найти объемы тел, образованных вращением вокруг оси Ох фигур, ограниченных заданными линиями:

19.33. $y=4x-x^2,\quad y=0.$

19.34. $y=\sin\frac{x}{2},\quad y=0,\ \ 0\le x\le\pi.$

19.35. $y^2=4x,\ \ y=x.$

19.36. $x^2+y^2=16,\ \ x=1,\ \ x=3,\ y=0.$

19.37. $y=\frac{4}{x},\ \ x=1,\ \ x=4,\ \ y=0.$

20. Дифференциальные уравнения первого порядка

20.1. Понятие дифференциального уравнения и его решения

Уравнение вида:

$$F(x, y, y', y'', ..., y^{(n)}) = 0, \qquad (20.1)$$

которое связывает аргумент x, неизвестную функцию $y(x)$ и ее производные, называется **дифференциальным уравнением**.

Порядком дифференциального уравнения называют порядок наивысшей производной, которую содержит в себе уравнение, а ее степень называется *степенью дифференциального уравнения*.

Например: 1) $y' + y \cdot x = x^2 + 1$ – дифференциальное уравнение первого порядка; 2) $y'' + y' = e^{-x}$ – дифференциальное уравнение второго порядка.

Если неизвестная функция, которая входит в дифференциальное уравнение, является функцией более чем одной переменной, то дифференциальное уравнение называется **уравнением в частных производных.**

Решением дифференциального уравнения называют функцию $y = \varphi(x)$, подстановка которой в уравнение превращает его в тождество.

График решения называется *интегральной кривой*. Решить или проинтегрировать данное дифференциальное уравнение значит найти все его решения. Уравнение (20.1) имеет множество решений.

Пример 20.1. Показать, что функция $y = e^{-5x}$ является решением уравнения $y'' + 5y' = 0$.

Решение.

Находим $y' = -5e^{-5x}$, $y'' = 25e^{-5x}$.

Подставляем в заданное уравнение $y'' + 5y' = 25e^{-5x} - 25e^{-5x} = 0$, то есть функция $y = e^{-5x}$ действительно является решением заданного дифференциального уравнения.

Общим решением дифференциального уравнения n-го порядка называется его решение:

$$y=\varphi(x, C_1, ..., C_n), \tag{20.2}$$

которое содержит n независимых произвольных постоянных $C_1, C_2, ...,$ C_n.

Если общее решение задано в неявном виде:

$$\Phi(x, y, C_1, ..., C_n)=0, \tag{20.3}$$

то оно называется *общим интегралом*.

Частным решением дифференциального уравнения называется решение, которое получается из общего решения, если свободным постоянным придавать некоторые значения.

Дифференциальным уравнением первого порядка называется уравнение вида:

$$F(x, y, y')=0, \tag{20.4}$$

или

$$y'=f(x, y). \tag{20.5}$$

Уравнение (20.5) – уравнение первого порядка, разрешенное относительно производной. Общее решение этого уравнения имеет вид:

$$y=\varphi(x, C), \tag{20.6}$$

где C – произвольная постоянная.

Задача решения дифференциального уравнения, которое удовлетворяет начальному условию: $y_0=y(x_0)$, имеет название *задачи Коши.*

Решение дифференциального уравнения (20.5) существует не для любой функции $f(x, y)$ и не при любом начальном условии.

Теорема. Если в уравнении $y'=f(x, y)$ функция $f(x, y)$ и ее частная производная $f'_y(x, y)$ непрерывны в некоторой замкнутой области X и точка $(x_0; y_0)\in X$, то существует единственное решение $y=\varphi(x)$

этого уравнения, которое удовлетворяет начальному условию при $x = x_0,\ y = y_0$.

Геометрический смысл задачи Коши состоит в том, что график функции $y = \varphi(x)$, то есть интегральная кривая, которая проходит через точку $(x_0; y_0) \in X$, единственная.

Если в точке $(x_0; y_0)$ условия теоремы Коши выполняются, то начальное условие $x = x_0,\ y = y_0$ будем называть *допустимым.*

Для решения задачи Коши в общее решение уравнения (20.6) нужно подставить начальное условие и решить уравнение $y_0 = \varphi(x_0, C)$ *относительно постоянной* C. *Тогда частное решение* $y = \varphi(x, C_0)$ *будет решением задачи.*

Пример 20.2. Решить уравнение: $y' = \cos x;\ y(0) = 1$.

Решение.

Запишем уравнение в дифференциалах $dy = \cos x dx$ и интегрируем его правую и левую части: $y = \sin x + C$.

Используем начальное условие: $y(0) = 1$.

Следовательно, $1 = \sin x + C, \quad C = 1$.

Таким образом, $y = \sin x + 1$ является решением задачи Коши.

20.2. Дифференциальные уравнения первого порядка с разделяющимися переменными

Дифференциальное уравнение вида

$$y' = f_1(x) f_2(y), \tag{20.7}$$

где $f_1(x), f_2(y)$ – непрерывные функции, называется **уравнением с разделяющимися переменными**

Этот тип уравнения является самым простым, но вместе с тем очень важным, поскольку более сложные уравнения с помощью некоторых преобразований сводятся именно к этому типу.

Метод решения такого типа уравнений носит название **разделения переменных**. Запишем производную в эквивалентной форме как отношение дифференциала функции к дифференциалу независимой переменной $\frac{dy}{dx}$.

Умножим обе части уравнения (20.7) на dx и поделим обе его части на $f_2(y)$ $(f_2(y) \neq 0)$; получаем:

$$\frac{dy}{f_2(y)} = f_1(x)dx. \tag{20.8}$$

В этом уравнении переменные разделены. Интегрируя обе части равенства (20.8), получим общий интеграл дифференциального уравнения:

$$\int \frac{dy}{f_2(y)} = \int f_1(x)dx + C, \tag{20.9}$$

где C – произвольная постоянная.

Пример 20.3. Решить уравнение $x\sqrt{y^2-1}dx + y\sqrt{x^2-1}dy = 0$.

Решение.

Разделим обе части уравнения на произведение $\sqrt{y^2-1}\sqrt{x^2-1}$.

Получим:

$$\frac{xdx}{\sqrt{x^2-1}} + \frac{ydy}{\sqrt{y^2-1}} = 0.$$

Переменные разделены. Интегрируя почленно, найдем общий интеграл:

$$\int \frac{xdx}{\sqrt{x^2-1}} + \int \frac{ydy}{\sqrt{y^2-1}} = \int 0dx.$$

Следовательно, общим интегралом уравнения будет функция:

$$\sqrt{x^2-1} + \sqrt{y^2-1} = C.$$

Пример 20.4. Решить уравнение $y'(1-x) = y+1$.

Решение.

Переходим в уравнении к дифференциалам:

$$(1+y)dx+(x-1)dy=0\text{, или } \frac{dx}{x-1}+\frac{dy}{y+1}=0.$$

Следовательно, $\int\frac{dx}{x-1}+\int\frac{dy}{y+1}=C$.

Отсюда $\ln|x-1|+\ln|y+1|=\ln|C|$, то есть $\ln\left|\,x-1\quad y+1\,\right|=\ln|C|$, или $x-1\quad y+1\ =C$.

Пример 20.5. Найти частное решение дифференциального уравнения $xy'=\frac{y}{\ln x}$, которое удовлетворяет условию $y=1$ при $x=e$.

Решение.

Сначала найдем общее решение уравнения:

$$xy'=\frac{y}{\ln x}\text{, или } x\frac{dy}{dx}=\frac{y}{\ln x}.$$

Умножим обе части уравнения на dx:

$$xdy=\frac{ydx}{\ln x}.$$

Разделяем переменные, для этого обе части нужно разделить на xy:

$$\frac{dy}{y}=\frac{dx}{x\ln x}.$$

Интегрируем обе части:

$$\int\frac{dy}{y}=\int\frac{dx}{x\ln x}+C_1.$$

Находим интегралы: $\ln|y|=\ln|\ln x|+\ln C$.

После потенцирования получаем: $y=C\ln x$ – общее решение.

Теперь нужно найти C, используя начальное условие, а именно: $y(e)=1$. Подставляем в решение начальное условие, получим: $1=C\ln e$, откуда $C=1$. Теперь подставляем в общее решение $C=1$.

Таким образом, частное решение: $y=\ln x$.

20.3. Однородные дифференциальные уравнения

Дифференциальное уравнение вида:

$$y' = f(x, y) \tag{20.10}$$

называется **однородным уравнением первого порядка**, если его правую часть, то есть функцию $f(x, y)$, можно представить как функцию отношения своих аргументов:

$$f(x, y) = \varphi(y/x).$$

Тогда уравнение (20.10) будет иметь вид:

$$y' = \varphi(y/x). \tag{20.11}$$

Это уравнение легко преобразовать в уравнение с разделяющимися переменными. С этой целью сделаем замену переменной:

$$u = y/x.$$

Так как $y = ux$ и $y' = u + xu'$, уравнение (20.11) примет вид:

$$xu' + u = \varphi(u),$$

то есть

$$\frac{du}{\varphi(u) - u} = \frac{dx}{x}. \tag{20.12}$$

В уравнении (20.12) переменные разделены.

Проинтегрировав его обе части, получим:

$$\int \frac{du}{\varphi(u) - u} = \ln|x| + c.$$

Из этого соотношения найдем общий интеграл уравнения $F(u, C) = 0$. Возвращаясь к исходной переменной $y = xu$, получим решение однородного дифференциального уравнения первого порядка.

Пример 20.6. Решить уравнение: $y' = \dfrac{y}{x} + tg\dfrac{y}{x}$.

Решение.

Пусть $y/x = u$, тогда $y = ux$ и $y' = u + xu'$. Подставим полученные соотношения в исходное уравнение:

$$u + xu' = u + \operatorname{tg} u, \quad \text{то есть} \quad \operatorname{ctg} u du = dx/x.$$

Интегрируем обе части уравнения:

$$\ln|\sin u| = \ln|x| + \ln C; \ \ln\left|\sin\frac{y}{x}\right| = \ln|Cx|.$$

Таким образом, общий интеграл уравнения: $\sin\dfrac{y}{x} = Cx$.

Пример 20.7. Решить уравнение: $(x^2 + y^2)dx - 2xydy = 0$.

Решение.

Выразим из данного уравнения первую производную неизвестной функции:

$$y' = \frac{x^2 + y^2}{2xy} = \frac{1 + (y/x)^2}{2y/x}.$$

Полученное уравнение однородное.

Пусть $y/x = u$, $y = ux$ и $y' = u + xu'$.

Тогда, $xu' = \dfrac{1+u^2}{2u} - u$, или $\dfrac{2udu}{1-u^2} = \dfrac{dx}{x}$.

Интегрируем обе части уравнения:

$$-\ln\left|1 - u^2\right| = \ln|Cx|, \quad \text{или} \quad Cx = 1/(1-u^2).$$

Возвращаясь к исходной переменной, получим решение:

$$x^2 - y^2 = Cx.$$

Пример 20.8. Найти частное решение дифференциального уравнения $xy' - y\ \operatorname{arctg}\dfrac{y}{x} = x$, если $y\ 1\ = 0$.

Решение.

Сначала находим общий интеграл данного уравнения.

Разделив обе части уравнения на x, имеем: $\left(y'-\dfrac{y}{x}\right)\mathrm{arctg}\dfrac{y}{x}=1.$

Применяем замену $\dfrac{y}{x}=t$, или $y=tx$, $y'=t'x+t$.

Тогда:

$$t'x+t-t\ \ \mathrm{arctg}\,t=1, \text{ или } t'x\,\mathrm{arctg}\,t=1,$$

откуда $\dfrac{dt}{dx}x\,\mathrm{arctg}\,t=1.$

Это уравнения с разделяющимися переменными: $\mathrm{arctg}\,t\,dt=\dfrac{dx}{x}$.

Интегрируем обе части уравнения: $\int \mathrm{arctgt}\,dt=\int\dfrac{dx}{x}+C_1$.

$$\int \mathrm{arctgt}\,dt=t\,\mathrm{arctg}\,t-\int\frac{tdt}{1+t^2}=t\,\mathrm{arctg}\,t-\frac{1}{2}\ln\left|1+t^2\right|+C_2.$$

$$t\,\mathrm{arctg}\,t-\frac{1}{2}\ln\left|1+t^2\right|=\ln|x|+\ln C \text{ или } t\,\mathrm{arctg}\,t=\ln Cx\sqrt{1+t^2}\ .$$

Возвращаясь к исходной переменной, получим решение:

$$\frac{y}{x}\mathrm{arctg}\frac{y}{x}=\ln C\sqrt{x^2+y^2}\ .$$

Учитывая начальное условие, найдем C.

Для этого в общий интеграл уравнения поставим $x=1,\ y=1$:

$$\frac{0}{1}\mathrm{arctg}\frac{0}{1}=\ln C\sqrt{1+0},\ 0=\ln C, \text{ откуда } C=1.$$

Тогда частное решение уравнения имеет вид:

$$\frac{y}{x}\mathrm{arctg}\frac{y}{x}=\ln\sqrt{x^2+y^2}\ .$$

20.4. Линейные дифференциальные уравнения первого порядка

Линейным дифференциальным уравнением первого порядка называется уравнение, линейное относительно неизвестной функции и ее производной первого порядка, а именно:

$$y' + p(x)y = g(x), \tag{20.13}$$

где $g(x)$ – свободный член уравнения; $p(x)$ и $g(x)$ – известные и непрерывные функции независимой переменной x (они также могут быть постоянными).

Метод Бернулли

Найдем решение уравнения в виде произведения двух неизвестных функций:

$$y = u(x)v(x).$$

Для первой производной этого соотношения получим выражение:

$$y' = u'v + uv'.$$

Таким образом, исходное уравнение (20.13) будет иметь вид:

$$u'v + (v' + p(x)v)u = g(x).$$

Выбрав в качестве $v(x)$ любое частное решение уравнения:

$$v' + p(x)v = 0,$$

для поиска неизвестной функции $u(x)$ получим уравнение:

$$u'(x)v(x) = g(x).$$

Таким образом, исходное уравнение свелось к решению системы двух дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases} v'(x) + p(x)v(x) = 0 \\ u'(x)v(x) = g(x) \end{cases}, \tag{20.14}$$

оба уравнения которой составляют уравнения с разделяющимися переменными.

Решив первое уравнение системы, найдем функцию $v(x)$:

$$\frac{dv}{dx}+p(x)=0,\quad \frac{dv}{v}=-p(x)dx,\quad \ln|v|=-\int p(x)dx,\quad v(x)=e^{-\int p(x)dx},$$

поскольку нас интересует любое частное решение.

Подставляя найденное решение $v(x)$ во второе уравнение системы, получим:

$$\frac{du}{dx}=g(x)e^{\int p(x)dx},\quad du=g(x)e^{\int p(x)dx}dx.$$

Откуда: $\quad u(x)=\int g(x)e^{\int p(x)dx}dx+C$.

Таким образом, общее решение линейного уравнения имеет вид:

$$y(x)=u(x)v(x)=e^{-\int p(x)dx}\left(\int g(x)e^{\int p(x)dx}dx+C\right). \qquad (20.15)$$

Пример 20.9. Найти решение уравнения $y'-y\,\mathrm{tg}\,x=\cos x$.

Решение.

Имеем уравнение вида (20.13).

Применяем подстановку $y=uv$, где u и v – функции от x.

Тогда $y'=u'v+uv'$.

Подставляя y и y' в данное уравнение, получим:

$$u'v+uv'-uv\,\mathrm{tg}\,x=\cos x.$$

Сгруппируем члены, которые содержат u, и вынесем u за скобки, а именно:

$$u'v+u\left(v'-v\,\mathrm{tg}\,x\right)=\cos x.$$

Дальше функцию v выбираем так, что $v'-v\,\mathrm{tg}\,x=0$, тогда $u'v=\cos x$.

Следовательно, для нахождения u и v имеем систему:

$$\begin{cases} v'-v\,\mathrm{tg}\,x=0 \\ u'v=\cos x \end{cases}. \qquad (20.16)$$

Решая первое уравнение, найдем v: $\frac{dv}{dx}=v\operatorname{tg}x$, или $\frac{dv}{v}=\operatorname{tg}xdx$.

Интегрируем обе части: $\int\frac{dv}{v}=\int\frac{\sin x}{\cos x}dx$,

$$\ln|v|=-\ln|\cos x|,\ \ \ln|v|=\ln|\cos x|^{-1}.$$

Откуда

$$v=\frac{1}{\cos x}.$$

Найденную функцию v подставляем во второе уравнение системы (20.16) и находим u:

$$u'\cdot\frac{1}{\cos x}=\cos x,\ \frac{du}{dx}=\cos^2 x,\ du=\cos^2 xdx.$$

Интегрируем:

$$\int du=\int\cos^2 xdx+C,\ u=\int\frac{1+\cos 2x}{2}dx+C.$$

Следовательно,

$$u=\frac{1}{2}x+\frac{\sin 2x}{4}+C.$$

Таким образом, $y=\left(\frac{1}{2}x+\frac{\sin 2x}{4}+C\right)\cdot\frac{1}{\cos x}$.

Пример 20.10. Решить уравнение $y^3-xy\ \ y'=1$.

Решение.

Данное уравнение линейное, но относительно функции $x=x(y)$.

Запишем иначе это уравнение:

$$y^3-xy\ \ \frac{dy}{dx}=1,\ \text{или}\ \ y^3-xy=\frac{dx}{dy},$$

откуда

$$y^3-xy=\frac{dx}{dy}.$$

Следовательно $x'+xy=y^3$.

Таким образом, получили линейное уравнение относительно $x(y)$.

Решение ищем в виде $x = u(y)\cdot v(y)$, откуда $x' = u'v + uv'$.

В уравнение подставляем x и x', получим:

$$u'v + uv' + uvy = y^3.$$

Вынося за скобки u, имеем:

$$u'v + u(v' + vy) = y^3.$$

Это уравнение заменяем системой уравнений: $\begin{cases} v' + vy = 0 \\ u'v = y^3 \end{cases}$.

Из первого уравнения находим v:

$$v' + vy = 0, \text{ или } \frac{dv}{dy} = -vy, \text{ откуда } \frac{dv}{v} = -ydy.$$

Интегрируя полученное уравнение, имеем:

$$\ln|v| = -\frac{y^2}{2}, \text{ или } v = e^{-\frac{y^2}{2}}.$$

Из второго уравнения системы найдем u: $u'v = y^3$.

Подставляя v, имеем: $u'e^{-\frac{y^2}{2}} = y^3$, или $\frac{du}{dy}e^{-\frac{y^2}{2}} = y^3$, которое можно записать так: $du = e^{\frac{y^2}{2}} y^3 dy$.

Интегрируем это уравнение: $\int du = \int e^{\frac{y^2}{2}} y^3 dy + C$.

Найдем интеграл, который находится справа. Для этого используем метод интегрирования по частям: $u = y^2$, $dv = e^{\frac{y^2}{2}} ydy$, откуда $du = 2ydy$, $v = e^{\frac{y^2}{2}}$.

Теперь имеем: $\int e^{\frac{y^2}{2}} y^3 dy = y^2 e^{\frac{y^2}{2}} - \int e^{\frac{y^2}{2}} 2ydy = y^2 e^{\frac{y^2}{2}} - 2e^{\frac{y^2}{2}}$.

Следовательно, $u = y^2 e^{\frac{y^2}{2}} - 2e^{\frac{y^2}{2}} + C$.

Таким образом,

$$x=\left(y^2e^{\frac{y^2}{2}}-2e^{\frac{y^2}{2}}+C\right)e^{-\frac{y^2}{2}},\quad \text{или}\quad x=y^2-2+Ce^{-\frac{y^2}{2}}.$$

20.5. Дифференциальные уравнения Бернулли

Некоторые уравнения в результате замены неизвестной функции могут быть приведены к линейному дифференциальному уравнению, например **уравнение Бернулли**, которое имеет вид:

$$y'+p(x)\,y=y^n g(x), \tag{20.17}$$

где $n\in N$.

В этом уравнении $p(x)$ и $g(x)$ – некоторые непрерывные функции, которые могут быть и постоянными. Уравнение Бернулли является нелинейным уравнением, поскольку неизвестная функция $y(x)$ в правой части уравнения нелинейная.

Разделив обе части уравнения на y^n, получим:

$$\frac{y'}{y^n}+p(x)\,y^{1-n}=g(x). \tag{20.18}$$

Заменим функцию $y(x)$ на новую функцию $z(x)$ с помощью выражения:

$$y^{1-n}=z.$$

Для первой производной этого соотношения получим:

$$z'=(1-n)\,y^{-n}\,y'.$$

Подставим полученные соотношения в исходное уравнение. Будем иметь линейное дифференциальное уравнение относительно функции z, а именно:

$$z'+z\,p(x)=g(x),$$

решение которого рассмотрено выше.

Пример 20.11. Найти решение уравнения $y' + \dfrac{y}{x} = -xy^2$.

Решение.

По условию имеем уравнение Бернулли (20.17).

Преобразуем его к линейному, применяя замену $z = y^{1-n}$. В нашем примере $n = 2$, поэтому $z = y^{-1}$ или $y = \dfrac{1}{z}$, тогда $y' = -\dfrac{1}{z^2} z'$.

Уравнение принимает вид:

$$-\frac{1}{z^2} z' + \frac{1}{zx} = -\frac{x}{z^2},$$

или после умножения на $-z^2$:

$$z' - \frac{z}{x} = x.$$

Теперь имеем линейное уравнение относительно z.

Решение уравнения ищем в виде $z = uv$, отсюда $z' = u'v + uv'$. Подставляя z и z' в уравнение, получаем:

$$u'v + uv' - \frac{uv}{x} = x, \text{ или } \quad u'v + u(v' - \frac{v}{x}) = x.$$

Это уравнение заменяем системой уравнений:

$$\begin{cases} v' - \dfrac{v}{x} = 0 \\ u'v = x. \end{cases}.$$

Из первого уравнения системы найдем v:

$$v' - \frac{v}{x} = 0, \text{ или } \frac{dv}{dx} = \frac{v}{x}, \text{ откуда } \frac{dv}{v} = \frac{dx}{x}.$$

Таким образом, $\int \dfrac{dv}{v} = \int \dfrac{dx}{x}$, $\ln|v| = \ln|x|$, то есть $v = x$.

Из второго уравнения системы найдем u:

$$u'v = x, \text{ или } u'x = x, \ \frac{du}{dx} = 1, du = dx.$$

Интегрируя, имеем $u = x + C$.

Таким образом: $z = uv$, $z = (x + C)x$.

Возвращаемся к переменной y:

$$y = \frac{1}{z}, \text{ или } y = \frac{1}{x(C+x)} = \frac{1}{Cx + x^2}.$$

20.6. Применение дифференциальных уравнений в экономике

Спрос и предложение являются основными экономическими категориями рыночных отношений. Обозначим через $x = x(p)$ функцию спроса в зависимости от цены товара p, а через $y = y(p)$ – соответствующее предложение, которое также является функцией цены товара.

Рассмотрим самую простую модель, в которой спрос и предложение являются линейными функциями цены товара, а именно:

$$\begin{cases} x(p) = a - bp, \\ y(p) = np + m, \end{cases} \quad (a, b, n, m > 0). \tag{20.19}$$

Действительно, спрос в зависимости от цены товара должен снижаться с ростом p, а предложение, наоборот, – увеличиваться. В случае низких цен спрос будет превышать предложение $x(p) > y(p)$, а если цена будет слишком большой – наоборот, предложение будет превышать спрос: $y(p) > x(p)$.

Рынок будет сбалансирован, если спрос и предложение будут совпадать, то есть $y(p) = x(p)$.

Соответствующее значение цены p_0 в этом случае называется *ценой равновесия*, или равновесной ценой, а спрос и предложение – *равновесными.*

Найдем равновесную цену из условия $x(p) = y(p)$.

По формуле (20.19) имеем: $a - bp_0 = np_0 + m$, откуда:

$$p_0=\frac{a-m}{n+p}. \qquad (20.20)$$

При равновесной цене рынок в зависимости от времени сбалансирован и цена на товар остается постоянной.

В действительности спрос далеко не всегда находится в соответствии с предложением, то есть $x(p)>y(p)$, или $y(p)>x(p)$, и возникает потребность рассмотреть динамическую модель, в которой цена товара изменяется во времени t: $p=p(t)$ и дать ответ на вопрос, за какой промежуток времени цена будет стремиться к цене равновесия.

Определим $p=p(t)$ в предположении, что скорость изменения цены в любой момент времени t прямо пропорциональна разнице между спросом и предложением в тот же момент времени.

Следовательно:

$$\frac{dp}{dt}=k\ \ x(p)-y(p)\ \ ,\quad (k>0).$$

Из формулы (20.19) получим равенство:

$$\frac{dp}{dt}=k(a-bp-np-m)=k(a-m-p(b+n)). \qquad (20.21)$$

Запишем равенство (20.21) в виде:

$$\frac{dp}{dt}+p\cdot k(b+n)=k(a-m). \qquad (20.22)$$

Таким образом динамическая модель описывается неоднородным линейным дифференциальным уравнением первого порядка.

Вопросы для самодиагностики

1. Какой вид имеет дифференциальное уравнение n-го порядка?

2. Что называется общим решением дифференциального уравнения n-го порядка?

3. Что называется частным решением дифференциального уравнения n-го порядка?

4. Сформулируйте задачу Коши для дифференциального уравнения первого порядка.

5. Какие виды дифференциальных уравнений первого порядка вы знаете?

6. Какой вид имеет дифференциальное уравнение с разделяющимися переменными?

7. Какое уравнение называется однородным?

8. Какую замену нужно сделать при решении однородных уравнений?

9. Какое уравнение первого порядка называется линейным?

10. Как решается линейное уравнение?

11. Каким образом можно привести уравнение Бернулли к линейному дифференциальному уравнению?

Упражнения

Проверить, является ли решением данного дифференциального уравнения указанная функция:

20.1. $y'' + 4y' = 0, \quad y = \sin 2x.$

20.2. $y'' = x^2 + y^2, \ y = \dfrac{1}{x}.$

Решить уравнения с разделяющимися переменными:

20.3. $\cos x \cos y dx - \sin x \sin y dy = 0.$

20.4. $(y-1)^2 dx = (x-1)^3 dy.$

20.5. $xydx + \sqrt{4-x^2}dy = 0.$

20.6. $e^{1-2x}(y^2-1)dy = dx.$

Найти частные решения, которые удовлетворяют указанным начальным условиям:

20.7. $(xy^2 + x)dx + (x^2y - y)dy = 0$, $y(0) = 1$.

20.8. $\sin^2 x\cos^2 y dx = \cos^2 x dy$, $\quad y\ \ 0\ = \frac{\pi}{4}$.

20.9. $y'e^{-x} = x-1$, $\quad y\ \ 1\ = -e$.

20.10. $x(y^6+1)dx + y^2(x^4+1)dy = 0$, $\quad y\ \ 0\ = 1$.

Решить однородные дифференциальные уравнения:

20.11. $y' = \dfrac{x^2+y^2}{2x^2}$.

20.13. $xy' = y\ln\dfrac{y}{x}$.

20.14. $(3x^2+xy-y^2)dx + x^2dy = 0$.

20.15. $xy' - y = \sqrt{y^2+2x^2}$.

Найти для заданных уравнений частные решения, которые удовлетворяют указанным начальным условиям:

20.16. $xy' = y\ \ 3+\ln y - \ln x\ $, $y\ \ 1\ = \dfrac{1}{e}$.

20.17. $\ 2x-3y\ \ dx + xdy = 0$, $y\ \ 1\ = -1$.

20.18. $(x^2+y^2)dx = 2xydy$, $\quad y\ \ 4\ = 0$.

20.19. $(x^2-3y^2)dx + 2xydy = 0$, $\ y\ \ 2\ = 1$.

Решить линейные дифференциальные уравнения:

20.20. $y' + \dfrac{y}{x+1} = x^2$.

20.21. $y' - \dfrac{y}{x} = 3x$.

20.22. $y'(x^2+4) - xy = \sqrt{x^2+4}$.

20.23. $xy' + y = e^x$.

20.24. $y' - y\,\mathrm{tg}\,x = \mathrm{ctg}\,x$.

20.25. $y' - \dfrac{4}{x}y = x\sqrt{y}$.

Найти для заданных уравнений частные решения, которые удовлетворяют указанным начальным условиям:

20.26. $y' + 3y = xe^{-3x}$, $\ y\ \ 0\ = 0$.

20.27. $xy'\ln x - y = \ln x$, $\ y(e^2) = 2\ln 2$.

21. Линейные дифференциальные уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами

21.1. Дифференциальные уравнения второго порядка

Уравнение вида:

$$F(x, y, y', y'') = 0 \tag{21.1}$$

называется **дифференциальным уравнением второго порядка**.

Уравнение, разрешенное относительно производной, можно записать в виде:

$$y'' = f(x, y, y'). \tag{21.2}$$

Общим решением дифференциального уравнения второго порядка называют функцию:

$$y = \varphi(x, C_1, C_2), \tag{21.3}$$

которая зависит от аргумента x и от двух произвольных постоянных величин C_1 и C_2. Если определить функцию y явно невозможно, то решение в этом случае называют *общим интегралом дифференциального уравнения второго порядка*:

$$\Phi\left(x, y, C_1, C_2\right) = 0. \tag{21.4}$$

Частное решение (**частный интеграл**) находят из общего решения при произвольных значениях постоянных C_1 и C_2. Если к уравнению прилагаются начальные условия, то частное решение можно найти в соответствии с этими условиями.

Начальными условиями для дифференциального уравнения второго порядка являются:

$$y(x_0) = y_0; \qquad y'(x_0) = y_0'. \tag{21.5}$$

Задача Коши. Найти частное решение дифференциального уравнения (21.1) $y = f(x)$, которое удовлетворяет начальным условиям (21.5).

Для поиска решения задачи Коши нужно сначала найти общее решение (21.3) или (21.4) и определить постоянные C_1, C_2 из начальных условий (21.5).

Геометрический смысл начальных условий для дифференциального уравнения второго порядка состоит в том, что, кроме точки $M_0(x_{0,}\,y_0)$, через которую проходит интегральная кривая, мы задаем угловой коэффициент касательной y_0' к этой кривой в точке $M_0(x_0,\,y_0)$. Поскольку общее решение диференциального уравнения второго порядка зависит от двух произвольных постоянных, через данную точку проходит множество интегральных кривых, и лишь одна из них имеет данный угловой коэффициент:

$$y_0' = \mathrm{tg}\,\alpha = y'(\,x_0).$$

Произвольные постоянные C_1 и C_2 получают из системы уравнений:

$$\begin{cases} y_0 = \varphi(x_0, C_1, C_2) \\ y_0' = \varphi'(x_0, C_1, C_2) \end{cases}. \tag{21.6}$$

Линейным однородным дифференциальным уравнением n-го порядка с постоянными коэффициентами называется уравнение вида:

$$a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \cdots + a_1 y' + a_0 y = 0, \tag{21.7}$$

где $a_0, a_1, ..., a_n$ – действительные числа.

Частным случаем однородного уравнения второго порядка является:

$$y'' + py' + qy = 0, \tag{21.8}$$

где p и q – постоянные коэффициенты.

Линейным неоднородным уравнением второго порядка с постоянными коэффициентами называется уравнение вида:

$$y'' + py' + qy = f(x), \tag{21.9}$$

где p и q – постоянные коэффициенты.

21.2. Общее решение линейного однородного уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами

Теорема 1. Если $y = y_1$ – решение уравнения $y'' + py' + qy = 0$, то и $y = Cy_1$, где C – произвольная постоянная, тоже будет решением этого уравнения.

Доказательство.

По условию теоремы $y_1'' + py_1' + qy_1 = 0$.

Теперь подставим в уравнение (21.8) $y = Cy_1$, получим:

$$Cy_1'' + Cpy_1' + Cqy_1 = C(y_1'' + py_1' + qy_1) = 0,$$

а это значит, что $y = Cy_1$ также является решением уравнения (21.8).

Теорема 2. Если y_1, y_2 – решения уравнения $y'' + py' + qy = 0$, то их сумма тоже является решением этого уравнения.

Доказательство.

$$\begin{aligned}&(y_1 + y_2)'' + p(y_1 + y_2)' + q(y_1 + y_2) = \\ &= (y_1'' + py_1' + qy_2) + (y_2'' + py_2' + qy_2) = 0\end{aligned}$$

То есть сумма $y = y_1 + y_2$ также является решением уравнения.

Два решения y_1, y_2 называются *линейно независимыми* на множестве X, если их отношение не равно постоянному числу. В противоположном случае решения y_1, y_2 называются *линейно зависимыми*.

Теорема 3. Если y_1, y_2 – независимые решения уравнения $y'' + py' + qy = 0$, то $y = C_1y_1 + C_2y_2$ есть общее решение уравнения.

Доказательство.

В соответствии с теоремами **1** и **2** следует, что $y = C_1y_1 + C_2y_2$ является решением уравнения (21.8) и оно зависит от двух произвольных постоянных C_1, C_2.

Теорема 4. Если решения уравнения y_1, y_2 линейно зависимые, то решение $y = C_1 y_1 + C_2 y_2$ не будет общим решением уравнения.

Действительно, если $y_1 = C_3 y_2$, то

$$y = C_3 C_1 y_2 + C_2 y_2 = y_2 (C_3 C_1 + C_2) = C y_2.$$

Решение $y = C y_2$ является частным решением уравнения, потому что оно зависит от одной произвольной постоянной C. Таким образом, из теоремы **3** можно сделать вывод: чтобы найти общее решение уравнения (21.8), нужно найти два его линейно независимых решения y_1, y_2 и тогда $y = C_1 y_1 + C_2 y_2$ будет общим решением этого уравнения.

Будем искать частное решение уравнения $y'' + py' + qy = 0$ в виде показательной функции $y = e^{kx}$. Подставив в уравнение первую и вторую производные частного решения и учитывая, что $e^{kx} \neq 0$, после упрощения получим уравнение:

$$k^2 + pk + q = 0. \qquad (21.10)$$

Это уравнение относительно k называется **характеристическим уравнением** данного однородного линейного дифференциального уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами.

Чтобы получить характеристическое уравнение, достаточно производные y'', y' и функцию y заменить на соответствующие степени величины k, рассматривая при этом функцию y как производную нулевого порядка.

Решив характеристическое уравнение, найдем значения k:

$$k_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}. \qquad (21.11)$$

Рассмотрим разные случаи решений характеристического уравнения, от которых зависит вид частного решения:

1. Если $\frac{p^2}{4} - q > 0$, корни уравнения действительные и разные: $k_1 \neq k_2$.

В этом случае $y_1 = e^{k_1 x}$; $y_2 = e^{k_2 x}$ – линейно независимые решения уравнения. Частные решения уравнения y_1 и y_2 линейно независимы, потому что их соотношение не является постоянной величиной.

Тогда в соответствии с теоремой **3** общее решение уравнения будет:

$$y = C_1 e^{k_1 x} + C_2 e^{k_2 x}. \qquad (21.12)$$

Пример 21.1. Найти общее решение дифференциального уравнения: $y'' - y' - 6y = 0$.

Решение.

Составим характеристическое уравнение: $k^2 - k - 6 = 0$. Это уравнение имеет разные действительные корни: $k_1 = -2; k_2 = 3$. Им соответствуют два частных решения: $y_1 = e^{-2x}$, $y_2 = e^{3x}$.

Следовательно, общее решение имеет вид:

$$y = C_1 e^{-2x} + C_2 e^{3x}.$$

2. Если $\dfrac{p^2}{4} - q = 0$, то корни характеристического уравнения действительны и равны: $k_1 = k_2 = k$.

В этом случае $y_1 = e^{kx}$ – частное решение уравнения. Второе частное решение найдем в виде $y_2 = xe^{kx}$. Тогда в соответствии с теоремой **3** общее решение уравнения будет:

$$y = C_1 e^{kx} + C_2 xe^{kx} = e^{kx}(C_1 + C_2 x). \qquad (21.13)$$

Пример 21.2. Найти общее решение уравнения: $y'' - 4y' + 4y = 0$.

Решение.

Запишем характеристическое уравнение этого дифференциального уравнения: $k^2 - 4k + 4 = 0$. Его корни: $k_1 = k_2 = 2$. То есть уравнение имеет один двукратный действительный корень.

Ему соответствуют два частных решения уравнения: $y_1 = e^{2x}$, $y_2 = xe^{2x}$. Общее решение уравнения имеет вид: $y(x) = e^{2x}(C_1 + C_2 x)$.

3. Если $\frac{p^2}{4} - q < 0$, то уравнение имеет комплексно-сопряженные корни: $k_1 = \alpha + \beta i$; $k_2 = \alpha - \beta i$, где $\alpha = -\frac{p}{2}$; $\beta = \sqrt{q - \frac{p^2}{4}}$.

В этом случае частные решения уравнения имеют вид:

$$y_1 = e^{\alpha x}\cos\beta x; \quad y_2 = e^{\alpha x}\sin\beta x.$$

Тогда в соответствии с теоремой **3** общее решение уравнение будет:

$$y = e^{ax}(C_1\cos\beta x + C_2\sin\beta x). \qquad (21.14)$$

Пример 21.3. Найти общее решение уравнения: $y'' + 2y' + 10y = 0$.

Решение.

Запишем характеристическое уравнение: $k^2 + 2k + 10 = 0$. Оно имеет комплексные корни: $k_{1,2} = -1 \pm 3i$. То есть $\alpha = -1$; $\beta = 3$. Этим корням соответствуют два частных решения:

$$y_1 = e^{-x}\cos 3x \text{ и } y_2 = e^{-x}\sin 3x.$$

Общее решение уравнения имеет вид:

$$y(x) = e^{-x}(C_1\cos 3x + C_2\sin 3x).$$

21.3. Структура общего решения неоднородного дифференциального уравнения второго порядка. Линейные неоднородные дифференциальные уравнения второго порядка с правыми частями специального типа

Теорема. Общее решение линейного неоднородного уравнения второго порядка находится по формуле:

$$y(x) = \tilde{y} + \bar{y}, \qquad (21.15)$$

где $\bar{y}$ – общее решение однородного дифференциального уравнения;

$\tilde{y}$ – частное решение, определенное видом правой части неоднородного уравнения, то есть функции $f(x)$.

Доказательство.

Пусть $\bar{y}=C_1 y_1+C_2 y_2$ – общее решение соответствующего однородного уравнения, а $\tilde{y}$ – некоторое частное решение того же уравнения, но с правой частью.

Таким образом:

$$\bar{y}''+p\bar{y}'+q\bar{y}=0 \quad \text{и} \quad \tilde{y}''+p\tilde{y}'+q\tilde{y}=f(x). \qquad (21.16)$$

Сложив почленно уравнения (21.16) и учитывая, что производная суммы равна сумме производных, получим;

$$(\bar{y}+\tilde{y})''+p(\bar{y}+\tilde{y})'+q(\bar{y}+\tilde{y})=f(x). \qquad (21.17)$$

Отсюда видно, что функция $y(x)=\tilde{y}+\bar{y}$ будет решением неоднородного дифференциального уравнения. Это решение является общим, поскольку в него входит две независимые произвольные постоянные C_1 и C_2.

Теорема доказана.

Таким образом, чтобы найти общее решение неоднородного дифференциального уравнения нужно:

1) найти общее решение $\bar{y}$ соответствующего однородного уравнения;

2) найти любое частное решение $\tilde{y}$ неоднородного уравнения;

3) найденные решения сложить, найденная сумма и будет общим решением неоднородного уравнения.

Рассмотрим несколько случаев нахождения частных решений неоднородного дифференциального уравнения со специальными правыми частями.

1. Пусть в правой части уравнения функция $f(x)=P_n(x)e^{\alpha x}$, где $P_n(x)$ – многочлен n-й степени.

В этом случае возможны такие ситуации:

а) число α не является корнем характеристического уравнения.

Тогда частное решение находится в виде:

$$\tilde{y} = Q_n(x)e^{\alpha x} = (A_0 x^n + A_1 x^{n-1} + \ldots + A_n)e^{\alpha x}, \qquad (21.18)$$

где $Q_n(x)$ – полный многочлен той же степени, что и $P_n(x)$. Коэффициенты этого многочлена неизвестны и находятся при подстановке решения в неоднородное уравнение в результате приравнивания коэффициентов, которые стоят при одинаковых степенях x в левой и правой частях уравнения (21.9). В этом заключается суть метода неопределенных коэффициентов;

б) число α совпадает с одним из корней характеристического уравнения: $\alpha = k_1 \neq k_2$.

Тогда частное решение находится в виде:

$$\tilde{y} = xQ_n(x)e^{\alpha x}; \qquad (21.19)$$

в) число α совпадает с двукратным корнем характеристического уравнения: $\alpha = k_1 = k_2$.

Тогда частное решение находится в виде:

$$\tilde{y} = x^2 Q_n(x)e^{\alpha x}. \qquad (21.20)$$

Пример 21.4. Найти решение дифференциального уравнения

$$y'' - 2y' - 3y = e^{2x},$$

которое удовлетворяет начальным условиям: $y(0) = -1/3$; $y'(0) = 0$.

Решение.

Определим общее решение данного дифференциального уравнения. Это линейное неоднородное дифференциальное уравнение, поэтому его общее решение состоит из общего решения соответствующего однородного уравнения и любого частного решения неоднородного уравнения.

Найдем общее решение однородного уравнения: $y'' - 2y' - 3y = 0$.

Составим его характеристическое уравнение: $k^2-2k-3=0$.

Это уравнение имеет разные действительные корни: $k_1=-1$; $k_2=3$, которым соответствуют два частных решения однородного уравнения: $y_1=e^{-x}$ и $y_2=e^{3x}$.

Общее решение однородного уравнения имеет вид:

$$\bar{y}=C_1 e^{-x}+C_2 e^{3x}.$$

Для нахождения частного решения неоднородного уравнения применим метод неопределенных коэффициентов. Будем искать частное решение неоднородного уравнения в виде: $\tilde{y}=Ae^{2x}$.

Для нахождения неизвестного коэффициента A подставим функцию $\tilde{y}=Ae^{2x}$ и ее производные: $\tilde{y}'=2Ae^{2x}$ и $\tilde{y}''=4Ae^{2x}$ в исходное неоднородное уравнение.

Имеем:

$$4Ae^{2x}-4Ae^{2x}-3Ae^{2x}=e^{2x}, \text{ откуда } A=-1/3.$$

Таким образом, общее решение неоднородного уравнения запишется так:

$$y(x)=\bar{y}+\tilde{y}=C_1 e^{-x}+C_2 e^{3x}-1/3e^{2x}.$$

Найдем частное решение неоднородного уравнения при начальных условиях: $y(0)=-1/3$; $y'(0)=0$.

Подставим: $x=0$, $y=-1/3$, $y'=0$ в выражения для y и y'.

Если $y'=-C_1 e^{x}+3C_2 e^{3x}-2/3e^{2x}$, то получим:

$$\begin{cases}-1/3=C_1+C_2-1/3\\ 0=-C_1+3C_2-2/3\end{cases}, \quad \text{или} \quad \begin{cases}C_1+C_2=0\\ -\tilde{N}_1+3\tilde{N}_2=2/3\end{cases}.$$

Откуда: $C_1=-1/6$, $C_2=1/6$.

Тогда искомое частное решение:

$$y(x)=-1/6e^{-x}+1/6e^{3x}-1/3e^{2x}.$$

Если правая часть уравнения $y'' + py' + qy = f(x)$ имеет вид: $f(x) = f_1(x) + f_2(x)$, то частное решение этого уравнения может быть найдено, как сумма частных решений уравнений:

$$\tilde{y}_1'' + p\tilde{y}_1' + q\tilde{y}_1 = f_1(x)$$

и

$$\tilde{y}_2'' + p\tilde{y}_2' + q\tilde{y}_2 = f_2(x).$$

То есть

$$\tilde{y} = \tilde{y}_1 + \tilde{y}_2.$$

Пример 21.5. Найти общее решение уравнения:

$$y'' - 6y' + 9y = 3x - 8e^x.$$

Решение.

Записав характеристическое уравнение: $k^2 - 6k + 9 = 0$, находим его корни: $k_1 = k_2 = 3$. Общее решение соответствующего однородного уравнения имеет вид:

$$\bar{y} = C_1 e^{3x} + C_2 xe^{3x}.$$

Правая часть данного уравнения является суммой:

$$f(x) = f_1(x) + f_2(x),$$

где $f_1(x) = 3x$, $f_2(x) = -8e^x$.

Следовательно частное решение $\tilde{y} = \tilde{y}_1 + \tilde{y}_2$, а именно:

$$\tilde{y} = Ax + B + Ce^x.$$

Взяв первую и вторую производные от функции $\tilde{y}$ и подставив их и саму функцию в исходное уравнение, получим:

$$Ce^x - 6(A + Ce^x) + 9(Ax + B + Ce^x) = 3x - 8e^x.$$

Приравняем коэффициенты у подобных членов обеих частей полученного соотношения.

Получим систему линейных уравнений относительно неизвестных коэффициентов:

$$\begin{cases} 9A = 3 \\ 4C = -8 \\ 9B - 6A = 0 \end{cases},$$

решением которой являются:

$$A = 1/3,\ C = -2,\ B = 2/9.$$

Следовательно, $\tilde{y} = 1/3x + 2/9 - 2e^{x}$.

Таким образом, общее решение имеет вид:

$$y = C_1 e^{3x} + C_2 x e^{3x} + 1/3x + 2/9 - 2e^{x}.$$

2. Рассмотрим уравнение, которое имеет в правой части:

$$f(x) = e^{\alpha x}(a\cos\beta x + b\sin\beta x), \qquad (21.22)$$

где a, b – постоянные.

При таком виде функции $f(x)$ могут быть два случая:

а) $\alpha \pm \beta i$ не являются корнями характеристического уравнения. Тогда частное решение имеет вид:

$$\tilde{y} = e^{\alpha x}(A\cos\beta x + B\sin\beta x), \qquad (21.23)$$

где A, B определяются в результате приравнивания коэффициентов при $\cos\beta x$ и $\sin\beta x$ в левой и правой частях уравнения (21.9) при подстановке в это уравнение частного решения $\tilde{y}$ и его первой и второй производных;

б) $\alpha \pm \beta i$ совпадают с корнями характеристического уравнения. В этом случае:

$$\tilde{y} = e^{\alpha x} x (A\cos\beta x + B\sin\beta x). \qquad (21.24)$$

При нахождении частного решения линейного неоднородного уравнения предлагаем пользоваться табл. 21.1.

Таблица 21.1

Частные решения неоднородного уравнения

Правая часть уравнения $ay''+by'+cy=f\ \ x$	Корни характеристического уравнения $ak^2+bk+c=0$	Вид частного решения
$f\ \ x\ =P_n\ \ x\ \ ,$ где $P_n\ \ x$ – многочлен степени n	а) число 0 не является корнем характеристического уравнения	$y^*=Q_n\ \ x$ $Q_n\ \ x$ – многочлен степени n с неопределенными коэффициентами
	б) число 0 является корнем кратности r характеристического уравнения	$y^*=x^rQ_n\ \ x$
$f\ \ x\ =e^{\alpha x}P_n\ \ x$	а) число α не является корнем характеристического уравнения	$y^*=e^{\alpha x}Q_n\ \ x$
	б) число α является корнем кратности r характеристического уравнения	$y^*=x^re^{\alpha x}Q_n\ \ x$
$f\ \ x\ =P_n\ \ x\ \cos\beta x+$ $+Q_n\ \ x\ \sin\beta x$	а) число βi не является корнем характеристического уравнения	$y^*=U_n\ \ x\ \cos\beta x+$ $+V_n\ \ x\ \sin\beta x,$ где $U_n\ \ x$ и $V_n\ \ x$ – многочлены с неопределенными коэффициентами
	б) число βi является корнем характеристического уравнения	$y^*=x\ \ U_n\ \ x\ \cos\beta x+$ $+V_n\ \ x\ \sin\beta x$
$f\ \ x\ =e^{\alpha x}\ \ P_n\ \ x\ \cos\beta x+$ $+Q_n\ \ x\ \sin\beta$	а) число $\alpha+\beta i$ не является корнем характеристического уравнения	$y^*=e^{\alpha x}\ \ U_n\ \ x\ \cos\beta x+$ $+V_n\ \ x\ \sin\beta x$
	б) число $\alpha+\beta i$ является корнем характеристического уравнения	$y^*=e^{\alpha x}x\ \ U_n\ \ x\ \cos\beta x+$ $+V_n\ \ x\ \sin\beta x$

Пример 21.6. Найти решение уравнения $y''+9y=\cos 3x$.

Решение.

Имеем неоднородное уравнение. Составим характеристическое уравнение, которое соответствует однородному уравнению:

$$k^2+9=0.$$

Его корни $k_{1,2}=\pm 3i$.

По формуле общее решение однородного уравнения имеет вид:

$$\bar{y}=C_1\cos 3x+C_2\sin 3x.$$

Частное решение неоднородного уравнения будем искать в виде:

$$\tilde{y}=x\ \ A\cos 3x+B\sin 3x\ \ ,$$

потому что $\alpha\pm\beta i$, где $\alpha=0$, а $\beta=3$, то есть $\pm 3i$ совпадает с корнем характеристического уравнения.

Для нахождения A,B подставляем $\tilde{y}$, $\tilde{y}'$, $\tilde{y}''$ в уравнение, где

$$\tilde{y}'=A\cos 3x+B\sin 3x+x\ \ -3A\sin 3x+3B\cos 3x\ \ ;$$

$$\tilde{y}''=-3A\sin 3x+3B\cos 3x-3A\sin 3x+3B\cos 3x+$$

$$+x\ \ -9A\cos 3x-9B\sin 3x\ \ =$$

$$=-6A\sin 3x+6B\cos 3x+x\ \ -9A\cos 3x-9B\sin 3x\ \ .$$

Получаем тождество, когда решение подставляем в уравнение, а именно:

$$-6A\sin 3x+6B\cos 3x+x\ \ -9A\cos 3x-9B\sin 3x\ \ +$$

$$+9x\ \ A\cos 3x+B\sin 3x\ \ \equiv\cos 3x.$$

Тогда

$$-6A\sin 3x+6B\cos 3x\equiv\cos 3x.$$

Приравниваем коэффициенты при $\cos 3x$ и $\sin 3x$ слева и справа. Следовательно, имеем систему уравнений для нахождения A,B.

$$\begin{array}{l|l}\cos 3x & \multirow{2}{*}{$\begin{cases}6B=1\\-6A=0\end{cases}$}\\ \sin 3x & \end{array}.$$

Откуда $A=0$, $B=\dfrac{1}{6}$.   Тогда $\tilde{y}=\dfrac{1}{6}x\sin 3x$.

Таким образом, общее решение неоднородного уравнения:

$$y=C_1\cos 3x+C_2\sin 3x+\frac{x}{6}\sin 3x.$$

Пример 21.7. Найти решение уравнения

$$y''-2y=2xe^x \;\; \cos x-\sin x \;\; .$$

Решение.

Данное уравнение является неоднородным. Сначала найдем общее решение однородного уравнения.

Составим характеристическое уравнение и найдем его корни: $k^2-2=0$, $k_1=-\sqrt{2}$, $k_2=\sqrt{2}$.

Общее решение однородного уравнения: $\bar{y}=C_1e^{-\sqrt{2}x}+C_2e^{\sqrt{2}x}$.

Частное решение неоднородного уравнения ищем в виде (см. табл. 21.1): $\tilde{y}=e^x \;\; Ax+B \;\; \cos x+ \;\; Cx+D \;\; \sin x \;\;$.

Для нахождения A, B, C, D в данное уравнение подставляем $\tilde{y}$, $\tilde{y}'$, $\tilde{y}''$, где

$$\tilde{y}'=e^x \;\; Ax+B+A+Cx+D \;\; \cos x+ \;\; Cx+D-Ax-B+C \;\; \sin x \;\; .$$

$$\tilde{y}''=e^x \;\; 2Cx+2A+2C+2D \;\; \cos x+ \;\; -2Ax-2A-2B+2C \;\; \sin x \;\; .$$

Имеем тождество:

$$2e^x \;\; Cx+A+C+D \;\; \cos x- \;\; Ax+A+B-C \;\; \sin x \;\; -$$

$$-2e^x \;\; Ax+B \;\; \cos x+ \;\; Cx+D \;\; \sin x \;\; \equiv 2xe^x \;\; \cos x-\sin x \;\; .$$

Или

$$Cx+A+C+D-Ax-B \;\; \cos x+$$

$$+ \;\; -Ax-A-B+C-Cx-D \;\; \sin x\equiv x \;\; \cos x-\sin x \;\; ;$$

$$C-A\ \ x+A-B+C+D\ \ \cos x+$$
$$+\ \ -A-C\ \ x-A-B-D+C\ \ \sin x\equiv x\ \ \cos x-\sin x\ \ .$$

Таким образом неопределенные коэффициенты A,B,C,D удовлетворяют системе линейных уравнений, которая получена из последнего выражения сравнением коэффициентов у подобных членов обеих частей полученного соотношения:

$$\begin{array}{l|l} x\cos x & \\ \cos x & \\ x\sin x & \\ \sin x & \end{array}\begin{cases} C-A=1 \\ A-B+C+D=0 \\ -A-C=-1 \\ -A-B+C-D=0 \end{cases}.$$

Добавляя к первому уравнению третье, имеем $A=0$. Тогда из первого уравнения получаем $C=1$.

Дальше второе и четвертое принимают такой вид:

$$\begin{cases} -B+D=-1 \\ -B-D=-1 \end{cases}.$$

Откуда $B=1$, а $D=0$.

Следовательно, частное решение неоднородного уравнения:

$$\tilde{y}=e^{x}\ \ \cos x+x\sin x\ \ ,$$

а общее решение данного уравнения:

$$y=C_1e^{-\sqrt{2}x}+C_2e^{\sqrt{2}x}+e^{x}\ \ \cos x+x\sin x\ \ .$$

Вопросы для самодиагностики

1. Что называется линейным дифференциальным уравнением второго порядка?

2. Какое уравнение называется однородным?

3. Какой вид имеет линейное однородное дифференциальное уравнение второго порядка с постоянными коэффициентами?

4. Как составляется характеристическое уравнение?

5. Как записать общее решение однородного уравнения?

6. Сформулировать теорему об общем решении линейного неоднородного уравнения.

7. Какой общий вид линейного неоднородного уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами?

8. Какая структура общего решения неоднородного уравнения?

9. Как найти частное решение неоднородного уравнения?

10. Как найти частное решение неоднородного уравнения, если правая часть $f(x) = f_1(x) + f_2(x)$?

Упражнения

Найти общие решения уравнений:

21.1. $y'' + y' - 2y = 0$. **21.2.** $y'' - 9y = 0$.

21.3. $3y'' - 2y' - 8y = 0$. **21.4.** $y'' + 3y' = 0$.

21.5. $y'' + 4y' + 4y = 0$. **21.6.** $y'' + 4y = 0$.

Найти частные решения уравнений при указанных начальных условиях:

21.7. $y'' + 2y' + y = 0$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 1$.

21.8. $y'' - 5y' + 6y = 0$. $y(0) = 1$, $y'(0) = 2$.

Найти общие решения уравнений:

21.9. $y'' - 8y' + 7y = 14$. **21.10.** $y'' - 4y' + 4y = x^2$.

21.11. $y'' - 2y' = 3xe^{-x}$. **21.12.** $2y'' + 5y' = 29\cos x$.

21.13. $y'' + y' - 2y = \cos x - 3\sin x$. **21.14.** $y'' + 4y = \sin x$.

Найти решения уравнения, которые удовлетворяют начальным условиям:

21.15. $y'' + 4y = e^{2x}$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 1$.

21.16. $y'' - 2y' = e^{x}(x^2 + x - 3)$, $y(0) = 2$, $y'(0) = 2$.

21.17. $y'' - 2y' + 10y = 74\sin 3x$, $y(0) = 6$, $y'(0) = 3$.

Указать вид частных решений таких уравнений:

21.18. $y'' - 10y' + 25y = e^{5x}(1 - x^2)$.

21.19. $y'' + 2y' + y = \sin x + e^x$.

22. Числовые ряды

22.1. Частичные суммы ряда. Необходимое условие сходимости ряда

Пусть задана числовая последовательность u_n , $n = 1, 2, 3, \ldots$.

Выражение вида:

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n = u_1 + u_2 + u_3 + \cdots + u_n + \cdots \qquad (22.1)$$

называется **числовым рядом**.

Числа $u_1, u_2, u_3, \ldots, u_n$ имеют название *членов ряда*, u_n называется *общим членом ряда*.

Числовой ряд считаем заданным если известна формула общего члена ряда, или некоторое правило, по которому можно найти произвольный член ряда.

Пример 22.1. Задан общий член ряда. Записать ряд в виде суммы его членов.

а) $u_n = (-1)^{n-1} \dfrac{1}{2^n}$. (22.2)

Решение.

Подставим в общий член ряда (22.2) последовательно $n = 1, 2, \ldots$

Запишем ряд в виде: $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{2^n} = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \cdots + (-1)^{n-1} \frac{1}{2^n} + \cdots;$

б) $u_n = 2^n$. (22.3)

Подставим в общий член ряда (22.3) последовательно $n=1,2,...$

Запишем ряд в виде: $\sum_{n=1}^{\infty} 2^n = 2+4+\cdots+2^n+\cdots;$

в) $u_n = (-1)^{n-1}$. (22.4)

При $n=1,2,...$ ряд имеет вид: $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1} = 1-1+\cdots+(-1)^{n-1}+\cdots;$

г) $u_n = \dfrac{1}{n\ \ n+1}$. (22.5)

Соответствующий ряд имеет вид:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\cdot\ \ n+1} = \frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\cdots+\frac{1}{n\cdot\ \ n+1}+\cdots$$

В приведенных примерах ряды были записаны, если известна формула общего члена ряда. Иногда по нескольким членам ряда предлагается найти общий член ряда.

Пример 22.2. Написать формулу общего члена ряда:

$$\frac{1}{1\cdot 7}-\frac{1}{3\cdot 9}+\frac{1}{5\cdot 11}-\frac{1}{7\cdot 13}+...$$

Решение.

Каждый член ряда в числителе имеет 1, а в знаменателе – нечетные числа, а именно: второй множитель на шесть единиц больше первого. Учтем, что знаки членов ряда чередуются, поэтому:

$$u_n = (-1)^{n-1}\frac{1}{(2n-1)(2n+5)}.$$

Сумма n первых членов ряда называется **частичной суммой ряда**.

То есть

$$S_1 = u_1,\ S_2 = u_1+u_2,\ S_3 = u_1+u_2+u_3,\ldots,$$

$$S_n = u_1+u_2+u_3+...+u_n,\ldots$$

Последовательность частичных сумм может иметь конечный предел, бесконечный предел или не иметь предела вообще.

Числовой ряд называется **сходящимся**, если последовательность его частичных сумм сходится, то есть существует конечный предел:

$$S = \lim_{n\to\infty} S_n. \tag{22.6}$$

Число S называется **суммой ряда**.

Ряд называется **расходящимся**, если предел S_n не существует, или же он равен бесконечности.

Если ряд сходится и его сумма равна S, то записывают:

$$S = \sum_{n=1}^{\infty} u_n = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} u_i . \tag{22.7}$$

Пример 22.3. Исследовать ряд на сходимость

$$\sum_{n=1}^{\infty} 2^n = 2 + 4 + \cdots + 2^n + \cdots .$$

Решение.

Найдем сумму n первых членов данного ряда $2+4+\cdots+2^n$.

По формуле суммы n членов арифметической прогрессии имеем:

$$S_n = \frac{u_1 + u_n}{2} \cdot n, \text{ тогда } \lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \frac{u_1 + u_n}{2} \cdot n = \infty,$$

то есть ряд расходится.

Пример 22.4. Исследовать ряд на сходимость

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\cdot\ n+1} = \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \cdots + \frac{1}{n\cdot\ n+1} + \cdots .$$

Решение.

Очевидно, что общий член ряда можно записать так:

$$u_n = \frac{1}{n\ \ n+1} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1},$$

тогда

$$S_n = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} = 1 - \frac{1}{n+1},$$

и

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty}\left(1 - \frac{1}{n+1}\right) = 1,$$

то есть ряд сходится.

Пример 22.5. Исследовать на сходимость ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1} = 1 - 1 + \cdots + (-1)^{n-1} + \cdots$$

Решение.

Последовательность частичных сумм этого ряда:

$$S_1 = 1,\ S_2 = 0,\ S_3 = 1,\ S_4 = 0,\ \ldots$$

В данном примере последовательность частичных сумм ограничена, но не имеет предела, следовательно, этот ряд расходится.

Ряд геометрической прогрессии

Рассмотрим бесконечную геометрическую прогрессию с общим членом: $a_n = a \cdot q^{n-1} \quad n = 1, 2, \ldots$ и соответствующий числовой ряд:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a \cdot q^{n-1} = a + aq + aq^2 + \ldots + aq^{n-1} + \ldots. \qquad (22.8)$$

Частичная сумма такого ряда имеет вид:

$$S_n = \frac{a - aq^n}{1-q}. \qquad (22.9)$$

Возьмем предел этого соотношения:

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty 1}\frac{a}{1-q} - \lim_{n\to\infty}\frac{aq^n}{1-q} = \frac{a}{1-q}\lim_{n\to\infty} q^n.$$

В зависимости от числового значения знаменателя прогрессии частичная сумма S_n при $n \to \infty$ будет сходящейся или расходящейся.

Рассмотрим возможные случаи:

1) $|q| < 1$. Предел частичной суммы ряды при $n \to \infty$ существует, то есть:

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \frac{a}{1-q} = S, \quad \text{так как} \quad \lim_{n\to\infty} q^n = 0.$$

Следовательно ряд, построенный из членов бесконечно убывающей геометрической прогрессии сходится;

2) $|q| > 1$. Предел частичной суммы ряда при $n \to \infty$ бесконечный, то есть:

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \infty, \quad \text{так как} \quad \lim_{n\to\infty} q^n = \infty.$$

Следовательно, ряд расходится;

3) $q = 1$. В этом случае частичная сумма ряда может быть вычислена таким образом:

$$S_n = a + a + \ldots + a = na.$$

Следовательно, $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \infty$, то есть ряд расходится;

4) $q = -1$. Частичную сумму ряда можно вычислить таким образом:

$$S_n = a - a + a - a + \ldots + a - a.$$

Следовательно, $S_n = 0$, если n – четное, $S_n = a$, если n – нечетное. То есть $\lim\limits_{n\to\infty} S_n$ не существует, а это значит, что ряд расходится.

Итак, ряд сходится при $|q| < 1$ и расходится при $|q| \geq 1$.

Гармонический ряд

Исследуем сходимость ряда с общим членом:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} + \cdots. \tag{22.10}$$

Этот ряд называется гармоническим. Запишем этот ряд более детально:

$$1+\frac{1}{2}+(\frac{1}{3}+\frac{1}{4})+(\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8})+(\frac{1}{9}+\ldots+\frac{1}{16})+\ldots.$$

Сравним данный ряд с рядом вида:

$$1+\frac{1}{2}+(\frac{1}{4}+\frac{1}{4})+(\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8})+(\frac{1}{16}+\ldots+\frac{1}{16})+\ldots.$$

Для всех $n>2$ имеет место соотношение: $S_n^{1} > S_n^{2}$.

Вычислим n-ю частичную сумму, где $n=2k$ (k – число скобок в частичной сумме) вспомогательного ряда: $S_{2k}^{(2)} = 1+k\cdot\frac{1}{2}$.

Если $k\to\infty$, то $\lim\limits_{k\to\infty} S_{2k}^{(2)} = \infty$. То есть ряд расходится.

Так как $S_n^{1} > S_n^{2}$, то $\lim\limits_{n\to\infty} S_n^{(1)} = \infty$. Следовательно, гармонический ряд (22.10) является рядом расходящимся.

Ряд, который получен из данного отбрасыванием первых n членов

$$R_n = \sum_{i=1}^{\infty} u_{n+i} = u_{n+1} + u_{n+2} + \ldots + u_{n+m} + \ldots, \qquad (22.11)$$

называется n*-м остатком ряда*.

У остатка первым членом является $(n+1)$ член исходного ряда.

Теорема 1. Если ряд (22.1) сходится, то сходится и его остаток и, наоборот, если сходится остаток ряда, то сходится и данный ряд.

Следствие. Сходимость или расходимость ряда не нарушается, если изъять из него или прибавить к этому ряду конечное число членов.

Теорема 2. Если ряд сходится, то сходится и ряд, который получен из данного умножением на постоянное число.

Теорема 3. Если ряды с общими членами u_n и v_n сходящиеся и

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n = A, \text{ а } \sum_{n=1}^{\infty} v_n = B,$$

то для любых чисел α и β ряд с общим членом: $\alpha u_n + \beta v_n$ сходится, а его сумма равна:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \alpha u_n + \beta v_n \ = \alpha A + \beta B.$$

Теорема (*необходимый признак сходимости*). Если ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ сходится, то предел общего члена ряда при $n \to \infty$ равен 0, то есть:

$$\lim_{n\to\infty} u_n = 0.$$

Доказательство.

Пусть ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ сходится и его сумма равна S. Поскольку $S_n = u_1 + u_2 + \ldots + u_n$, то можно записать, что $u_n = S_n - S_{n-1}$. Возьмем предел этого соотношения:

$$\lim_{n\to\infty} u_n = \lim_{n\to\infty} \ S_n - S_{n-1} \ = \lim_{n\to\infty} S_n - \lim_{n\to\infty} S_{n-1} = S - S = 0.$$

Теорема доказана.

Нужно иметь в виду, что когда необходимое условие не выполняется, то исследуемый ряд является расходящимся.

То есть условие $\lim_{n\to\infty} u_n \neq 0$ является *достаточным признаком расходимости* числового ряда. Действительно, если ряд сходится, то предел общего члена этого ряда равен нулю. Таким образом, ряд расходится. Следовательно, если необходимый признак выполняется, то это не значит, что соответствующий ряд сходится. То есть вопрос остается открытым и нуждается в дальнейшем исследовании.

Пример 22.6. Исследовать на сходимость ряды:

а) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+1}{5n-3}$.

Решение.

Найдем предел общего члена ряда: $\lim_{n\to\infty} u_n = \lim_{n\to\infty} \frac{2n+1}{5n-3} = \frac{2}{5} \neq 0$, то есть необходимый признак не выполняется и ряд расходится;

б) $\sum_{n=1}^{\infty}(2\cdot\frac{1}{3^n}+3\cdot\frac{1}{2^{n-1}})$.

Решение.

Общий член этого ряда имеет вид: $2\cdot\frac{1}{3^n}+6\cdot\frac{1}{2^n}=2\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^n+6\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^n$.

Рассмотрим вспомогательные ряды: $u_n = 1/3^{\,n}$ и $v_n=(1/2)^n$. Каждый из этих рядов с общими членами u_n и v_n сходится, поскольку эти ряды образуются бесконечными убывающими геометрическими прогрессиями (22.8).

В результате применения теоремы 3 исследуемый ряд сходится и его сумма равна сумме первого и второго вспомогательных рядов.

22.2. Достаточные признаки сходимости рядов с положительными членами: признак сравнения, Даламбера, Коши, интегральный признак Маклорена – Коши

Ряды, члены которых не изменяют знаки в зависимости от n (номера), называют **знакопостоянными**.

Ряд $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ называется *знакоположительным*, если все члены данного ряда $u_n \ge 0$.

Признак сравнения

Рассмотрим ряды, члены которых не изменяют знаки в зависимости от его номера n. Допустим, что члены ряда $u_n \ge 0$.

Теорема. Пусть имеем два знакоположительных ряда:

$$\sum_{n=1}^{\infty}u_n = u_1+u_2+\ldots+u_n+\ldots \tag{22.12}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}v_n = v_1+v_2+\ldots+v_n+\ldots \tag{22.13}$$

Если для всех членов этих рядов выполняются неравенства:

$$u_n \le v_n, \tag{22.14}$$

то из сходимости ряда с общим членом v_n вытекает сходимость ряда u_n, а из расходимости ряда с общим членом u_n вытекает расходимость ряда с общим членом v_n. Считаем, что неравенство (22.14) выполняется с $n=1$, иначе конечное число членов ряда можно отбросить.

Доказательство.

Рассмотрим частичные суммы рядов:

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} u_i , \qquad \sigma_n = \sum_{i=1}^{n} v_i .$$

Из условия $u_n \le v_n$ следует, что $S_n \le \sigma_n$. Докажем, что из сходимости ряда с v_n вытекает сходимость ряда с u_n. Поскольку $\lim\limits_{n\to\infty} \sigma_n = \sigma$ существует, то $S \le \sigma$. Мы имеем последовательность частичных сумм S_n, которая с ростом n монотонно возрастает и ограничена сверху. По теореме Вейерштрасса она имеет предел, то есть существует $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = S$. Следовательно, ряд с общим членом u_n сходится. Первая часть теоремы доказана.

Докажем вторую ее часть, то есть если ряд с u_n расходится, то и ряд с v_n также расходится. По условию $u_n \le v_n$, $S \le \sigma$, а частичные суммы ряда (22.12) монотонно возрастают ($u_n \ge 0$) и не имеют конечного предела, то $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \infty$. Тогда $\lim\limits_{n\to\infty} \sigma_n = \infty$, то есть ряд с v_n расходится. Теорема доказана.

Отметим, что применяя признак сравнения, можно использовать ряд бесконечной убывающей геометрической прогрессии (22.8) как пример сходящегося ряда и гармонический ряд (22.10) как пример расходящегося ряда.

При решении задач чаще используется ***признак сравнения рядов в предельной форме***, а именно: если существует конечный и отличающийся от нуля предел:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{u_n}{v_n}=k \qquad (0<k<\infty), \qquad (22.15)$$

то оба ряда сходятся или расходятся одновременно.

Действительно, если начиная с некоторого номера выполняется условие (22.15), то для любого $\varepsilon>0$ $(k-\varepsilon)v_n<u_n<(k+\varepsilon)v_n$ и к ряду с общим членом u_n можно применить признак сравнения.

Пример 22.7. Исследовать на сходимость ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n+1}\cdot\frac{1}{3^n}$.

Решение.

Запишем очевидное неравенство: $3^n< n+1 \cdot 3^n$, которое имеет место при $n\geq 1$.

Перейдем к обратному неравенству: $\frac{1}{(n+1)3^n}<\frac{1}{3^n}$.

Рассмотрим два ряда: $u_n=\frac{1}{(n+1)3^n}$ и $v_n=\frac{1}{3^n}$.

Ряд с общим членом v_n сходится как бесконечная геометрическая прогрессия со знаменателем меньше единицы.

Следовательно, по признаку сравнения сходится и ряд с общим членом u_n.

Пример 22.8. Исследовать на сходимость ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2n-1}{3n^2+5}\right)$.

Решение.

Для сравнения возьмем ряд с общим членом $v_n=\frac{1}{n}$.

Тогда $\lim_{n\to\infty}\frac{u_n}{v_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{(2n-1)\cdot n}{5n^2+3}=\frac{2}{5}$, следовательно ряды ведут себя одинаково, а именно данный ряд расходится, потому что ряд $v_n=\frac{1}{n}$ расходится как гармонический.

Признак Даламбера

Теорема. Пусть для ряда с знакоположительными членами $u_n > 0$ существует предел:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n} = l, \tag{22.16}$$

тогда:

1) если $l < 1$, ряд сходится;
2) если $l > 1$, ряд расходится;
3) если $l = 1$, признак не дает ответ.

Доказательство.

Пусть $l < 1$. Из определения предела для любого положительного $\varepsilon > 0$ существует такое N, что при $n > N$ будет верным неравенство:

$$l - \varepsilon < \frac{u_{n+1}}{u_n} < l + \varepsilon.$$

Обозначим $l + \varepsilon = r$ и выберем ε таким, чтобы r оставалось меньшим 1.

Тогда:

$$\frac{u_{N+1}}{u_N} < r,\ \frac{u_{N+2}}{u_{N+1}} < r,\quad \frac{u_{N+3}}{u_{N+2}} < r, \ldots$$

Отсюда имеем:

$$u_{N+1} < r\cdot u_N;$$

$$u_{N+2} < r\cdot u_{N+1} < r^2\cdot u_N;$$

$$u_{N+3} < r\cdot u_{N+2} < r^3\cdot u_N;$$

…………………………….

Построим ряд:

$$u_{N+1} + u_{N+2} + u_{N+3} + \ldots = \sum_{i=N+1}^{\infty} u_i,$$

который является N-м остатком исследуемого ряда. Члены этого остатка меньше соответствующих членов бесконечно убывающей геометрической прогрессии:

$$ru_N + r^2u_N + r^3u_N + \ldots$$

По признаку сравнения ряд, который является N-м остатком исследуемого ряда, сходится. Следовательно, сходится и данный ряд.

Пусть $r>1$, тогда $\varepsilon>0$ можно взять настолько малым, что $l-\varepsilon=r$ будет также больше 1. При достаточно больших n, будем иметь:

$$\frac{u_{n+1}}{u_n}>1, \text{ или } u_{n+1}>u_n.$$

В этом случае каждый следующий член ряда будет больше предыдущего и, так как все они неотрицательны, не может выполняться необходимое условие сходимости ряда. Следовательно, при $l>1$ ряд расходится. Теорема доказана.

Пример 22.9. Исследовать на сходимость ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{3^n}$.

Решение.

Обозначим $u_n=\frac{n}{3^n}$, тогда $u_{n+1}=\frac{n+1}{3^{n+1}}$.

Найдем отношение следующего члена ряда к предыдущему:

$$\frac{u_{n+1}}{u_n}=\frac{(n+1)3^n}{n3^{n+1}}=\frac{(n+1)}{3n}$$

и возьмем его предел.

Получим: $$\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{3n}=\frac{1}{3}<1.$$

Таким образом, по признаку Даламбера ряд сходится.

Пример 22.10. Исследовать на сходимость ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{n!}$.

Решение.

$$u_n=\frac{2^n}{n!},\ u_{n+1}=\frac{2^{n+1}}{(n+1)!}.$$

Запишем отношение $\frac{u_{n+1}}{u_n}=\frac{2^{n+1}n!}{2^n(n+1)!}=\frac{2}{n+1}$ и найдем его предел:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{2^{n+1}n!}{2^n(n+1)!}=\lim_{n\to\infty}\frac{2}{n+1}=0<1.$$

Таким образом, по признаку Даламбера ряд сходится.

Пример 22.11. Исследовать на сходимость ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{5^n}$.

Решение.

Обозначим $u_n=\frac{n!}{5^n}$, тогда $u_{n+1}=\frac{(n+1)!}{5^{n+1}}$.

Найдем отношение $\frac{u_{n+1}}{u_n}=\frac{(n+1)!\,5^n}{n!\,5^{n+1}}=\frac{(n+1)}{5}$ и возьмем его предел:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)}{5}=\infty>1,$$

то есть по признаку Даламбера ряд расходится.

Радикальный признак Коши

Теорема. Пусть для знакоположительного ряда $u_n>0$ существует предел:

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n}=l, \tag{22.17}$$

тогда:

1) если $l<1$, ряд сходится;
2) если $l>1$, ряд расходится;
3) если $l=1$, признак Коши не дает ответ о сходимости ряда.

Пример 22.12. Исследовать на сходимость ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{3n+1}{5n+3}\right)^n$.

Решение.

Соответственно признаку Коши:

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{3n+1}{5n+3}=\frac{3}{5}<1,$$

следовательно ряд сходится.

Пример 22.13. Исследовать на сходимость ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{3n-1}{2n+3}\right)^{n^2}$.

Решение.

В соответствии с признаком Коши:

$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{3n-1}{2n+3}\right)^n=\left(\frac{3}{2}\right)^{+\infty}=\infty>1$, то есть ряд расходится.

Интегральный признак Маклорена – Коши

Теорема. Пусть $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ – знакоположительный ряд, члены которого не возрастают, то есть $u_1\ge u_2\ge u_3\ge\ldots\ge u_n\ge\ldots$, и пусть $f\;x$ – непрерывная функция, такая что: $f\;1=u_1,\;f\;2=u_2,\cdots,f\;n=u_n$.

Тогда: если несобственный интеграл $\int_1^{\infty}f\;x\,dx$ сходится, то сходится и ряд $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$; если несобственный интеграл $\int_1^{\infty}f\;x\,dx$ расходится, то расходится и ряд $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$.

Пример 22.14. Исследовать на сходимость ряд: $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^s}$, $s=const(s\subset R)$.

Решение.

Этот ряд называют **рядом Дирихле**, или обобщенным гармоническим рядом.

Для исследования ряда на сходимость применим интегральный признак Коши.

Вычислим интеграл: $\int_1^{\infty}\frac{dx}{x^s}=\lim_{t\to\infty}\int_1^{t}\frac{dx}{x^s}=$

$$\lim_{t\to\infty}\left(\frac{1}{1-s}\right)\cdot x^{1-s}\Big|_1^t=\lim_{t\to\infty}\left(\frac{1}{1-s}\right)t^{1-s}+\frac{1}{s-1}=\begin{cases}1/(s-1), & s>1\\ \infty, & s<1\end{cases}.$$

Если $s=1$ данный интеграл является расходящимся.

Действительно, $\int\limits_1^{\infty}\frac{dx}{x}=\ln|x|\Big|_1^{\infty}=\infty$.

Следовательно, ряд Дирихле сходящийся при $s>1$ и расходящийся при $s\le 1$.

При $s=1$ ряд Дирихле называют гармоническим рядом:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}+\cdots$$

Отметим, что ряд Дирихле, как и гармонический ряд, используют в признаке сравнения рядов как эталонный ряд, то есть ряд, о котором известно, сходится он или расходится.

Пример 22.15. Исследовать на сходимость ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+1)\ln^2(n+1)}$.

Решение.

Используем интегральный признак Коши.

Пусть $f(x)=\frac{1}{(x+1)\ln^2(x+1)}$.

Тогда

$$\int\limits_1^{\infty}\frac{dx}{(x+1)\ln^2(x+1)}=\frac{1}{\ln(x+1)}\Bigg|_1^{\infty}=\frac{1}{\ln 2}.$$

Таким образом, несобственный интеграл сходится. Следовательно, сходится и соответствующий ряд.

22.3. Знакопеременные ряды. Абсолютная и условная сходимость рядов

Знакопеременным называется ряд, членами которого являются вещественные числа произвольного знака.

Достаточный признак сходимости знакопеременного ряда базируется на исследовании ряда, который составлен из абсолютных величин членов исходного ряда.

Теорема *(достаточный признак сходимости знакопеременного ряда).* Пусть имеем знакопеременный ряд:

$$u_1 + u_2 + \ldots + u_n + \ldots, \tag{22.18}$$

который является таким, что ряд, образованный из абсолютных величин его членов:

$$|u_1| + |u_2| + \ldots + |u_n| + \ldots, \tag{22.19}$$

сходится. Тогда сходится и исходный ряд.

Доказательство.

Обозначим n-ю частичную сумму знакопеременного ряда как $S_n^{(1)}$. Тогда $S_n^{(1)} = S_n^{(1)+} - S_n^{(1)-}$, где $S_n^{(1)+}$ – сумма всех положительных членов, а $S_n^{(1)-}$ – сумма абсолютных величин отрицательных членов частичной суммы $S_n^{(1)}$. Тогда n-я частичная сумма ряда, который составлен из абсолютных величин членов данного ряда, будет: $S_n^{(2)} = S_n^{(1)+} + S_n^{(1)-}$.

По условию теоремы $\lim\limits_{n\to\infty} S_n^{(2)} = S$ существует, то есть существуют пределы $S_n^{(1)+}$ и $S_n^{(1)-}$: $\lim\limits_{n\to\infty} S_n^{(1)} = \lim\limits_{n\to\infty} S_n^{(1)+} - \lim\limits_{n\to\infty} S_n^{(1)-}$.

Таким образом, данный знакопеременный ряд сходится.

Теорема доказана.

Этот признак является достаточным признаком сходимости, но не является необходимым. Существуют сходящиеся знакопеременные ряды, для которых ряды, которые составлены из абсолютных величин членов исходного ряда, являются расходящимися.

Знакопеременный ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ называется **абсолютно сходящимся**, если сходится ряд, составленный из абсолютных величин его членов: $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |u_n|$.

Если данный ряд сходится, а ряд, составленный из абсолютных величин его членов, расходится, то он называется **условно сходящимся**.

Признаки абсолютной сходимости знакопеременного ряда являются такими же, как и для сходимости ряда с положительными членами. Поэтому для исследования сходимости этого ряда можно использовать признаки сравнения, признак Даламбера или Коши.

Возникает вопрос, как исследовать сходимость знакопеременного ряда, который имеет бесконечное множество как положительных, так и отрицательных членов. В этом случае используем теорему, которая является признаком абсолютной сходимости ряда. С ее помощью исследование сходимости знакопеременного ряда сводится к исследованию знакоположительного ряда.

Пример 22.16. Исследовать на сходимость ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin n\alpha}{n^4}$, где $\alpha-$ произвольное вещественное число.

Решение.

Поскольку $|\sin n\alpha|\le 1$, то $\left|\sin n\alpha\cdot\frac{1}{n^4}\right|\le\frac{1}{n^4}$. В правой части неравенства имеем общий член ряда Дирихле, для которого $s=4$. Этот ряд сходится.

Следовательно, по признаку сравнения рядов, ряд, который образован из модулей членов исследуемого ряда, сходится.

Таким образом, исследуемый ряд сходится абсолютно.

22.4. Знакочередующиеся ряды. Теорема Лейбница

Частным случаем знакопеременного ряда является ряд, у которого любые соседние члены имеют разные знаки. Он имеет название **знакочередующегося** ряда.

То есть: $$u_1-u_2+u_3-u_4+\ldots=\sum_{n\to\infty}^{\infty}(-1)^{n-1}u_n,\qquad u_n>0.$$

Теорема Лейбница. Пусть для знакочередующегося ряда выполняются условия:

$$u_1\ge u_2\ge u_3\ge u_4\ge\ldots\ge u_n\ge\ldots \text{ и } \lim_{n\to\infty}u_n=0, \qquad (22.20)$$

то есть каждый следующий член знакочередующегося ряда по абсолютному значению меньше предыдущего, а предел общего члена ряда при

$n \to \infty$ равен 0. Тогда ряд сходится, его сумма неотрицательна и не превышает первого члена ряда: $0 \le S \le u_1$.

Доказательство.

Пусть $n = 2m$, то есть n – четное число. Тогда

$$S_{2m} = u_1 - u_2 + u_3 - u_4 + \ldots + u_{2m-1} - u_{2m}.$$

Перепишем это соотношение:

$$S_{2m} = (u_1 - u_2) + (u_3 - u_4) + \ldots + (u_{2m-1} - u_{2m}).$$

Из условия теоремы витекает, что выражение в каждой скобке неотрицательно. Следовательно, сумма $S_{2m} \ge 0$ и возрастает с ростом m. Запишем эту сумму иначе:

$$S_{2m} = u_1 - (u_2 - u_3) - (u_4 - u_5) - \ldots - (u_{2m-2} - u_{2m-1}) - u_{2m}.$$

Следовательно, $S_{2m} \le u_1$. Таким образом, последовательность S_{2m} монотонно возрастает и органичена сверху. Отсюда следует, что она имеет предел, то есть:

$$\lim_{n\to\infty} S_{2m} = S,$$

и S находится в промежутке $0 \le S \le u_1$.

Таким образом, доказано, что последовательность четных частичных сумм S_{2m} имеет предел S.

Докажем, что нечетные частичные суммы также имеют предел – число S. Рассмотрим сумму n первых членов ряда, где $n = 2m+1$, $S_{2m+1} = S_{2m} + u_{2m+1}$. Найдем пределы левой и правой частей этого соотношения при $n \to \infty$:

$$\lim_{n\to\infty} S_{2m+1} = \lim_{n\to\infty} S_{2m} + \lim_{n\to\infty} u_{2m+1} = S,$$

так как по условию теоремы $\lim_{m\to\infty} u_{2m+1} = 0$. Доказано, что $\lim_{n\to\infty} S_{2m+1} = S$, то есть соответствующий ряд сходится. Теорема доказана.

Следствие. Если знакочередующийся ряд сходится, то сходится и его n-й остаток:

$$-1^{n} \;\; u_{n+1}-u_{n+2}+\cdots$$

и его сумма не превышает по абсолютной величине первого члена ряда, то есть u_{n+1}.

Таким образом, погрешность при замене S на S_n не превышает по абсолютной величине первого из отброшенных членов ряда, то есть:

$$\left|S-S_n\right|\le u_{n+1}. \tag{22.21}$$

Пример 22.20. Исследовать на сходимость ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} -1^{\;n-1}\dfrac{1}{n}$.

Решение.

Проверяем выполнение первого и второго условий сходимости знакочередующегося ряда:

1) $1>\dfrac{1}{2}>\dfrac{1}{3}>...>\dfrac{1}{n}>...$; 2) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n}=0$.

Следовательно, оба условия выполняются, то есть ряд сходится по признаку Лейбница.

Ряд сходится условно, потому что ряд, который составлен из абсолютных величин членов данного ряда $\left|u_n\right|=\dfrac{1}{n}$, расходится как гармонический.

Вопросы для самодиагностики

1. Что называется рядом?
2. Какие ряды называются числовыми, а какие функциональными?
3. Какой ряд называется сходящимся или расходящимся?
4. Что можно сказать о сходимости или расходимости гармонического ряда?
5. В чем заключается необходимый признак сходимости ряда?

6. Выясните поведение ряда, если его общий член не стремится к нулю.

7. Сформулировать достаточные признаки сходимости числовых рядов.

8. Какие ряды называются знакопеременными?

9. Сформулируйте достаточный признак сходимости знакопеременного ряда.

10. Какие ряды называются знакочередующимися?

11. В чем заключается признак Лейбница?

12. Какой ряд называется абсолютно сходящимся?

13. Какой ряд называется условно сходящимся?

Упражнения

22.1. Записать ряд по заданному общему члену u_n:

а) $u_n = \dfrac{3^n}{n!}$; б) $u_n = (-1)^n \dfrac{\ln n}{n}$; в) $u_n = (-1)^{n+1} \cdot \dfrac{1}{n} \cdot \dfrac{1}{2^n}$.

22.2. Написать формулу общего члена ряда:

1) $1 + \dfrac{1}{3} + \dfrac{1}{5} + \dfrac{1}{7} + \dots$;

2) $\dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{4} + \dfrac{1}{6} + \dfrac{1}{8} + \dots$;

3) $\dfrac{1}{e} + \dfrac{8}{e^2} + \dfrac{27}{e^3} + \dfrac{64}{e^4} + \dots$;

4) $1 - \dfrac{1}{4} + \dfrac{1}{9} - \dfrac{1}{16} + \dots$.

22.3. Исследовать на сходимость ряды:

1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{n+1}{2n+1}$;

2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{n+1}{n^2+1}$;

3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{(3n-1)^2}$;

4) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{2n-1}{3^n}$;

5) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{(2n+1)!}$;

6) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{2^{n+1}}{(3n)^n}$;

7) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{2n^2+1}$;

8) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\dfrac{2n+1}{5n+4}\right)^{2n}$;

9) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{4n+1}}$; 10) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{4n^5+3}}{n^3-7n-1}$.

22.4. Исследовать абсолютную и условную сходимость рядов:

1) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{n}{6n-5}$;

2) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{(2n-1)^2}$;

3) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{n\cdot 2^n}$.

23. Степенные ряды

23.1. Теорема Абеля. Радиус сходимости степенного ряда

Степенным рядом называется ряд:

$$a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3+\ldots+a_nx^n+\ldots, \tag{23.1}$$

членами которого являются степенные функции x^n с возрастающими целыми показателями, числа $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n$ – коэффициенты данного ряда.

Выражение $u_n=a_nx^n$ – общий член степенного ряда.

Иногда рассматривают степенной ряд более общего вида:

$$a_0+a_1(x-a)+a_2(x-a)^2+a_3(x-a)^3+\ldots+a_n(x-a)^n+\ldots \tag{23.2}$$

Этот ряд легко привести к предыдущему, если считать $x-a=z$.

Точка x_0 является *точкой сходимости степенного ряда*, если при подстановке ее в степенной ряд соответствующий числовой ряд сходится.

Областью сходимости степенного ряда называется множество значений x, при которых степенной ряд сходится.

Теорема Абеля. Если степенной ряд сходится для некоторого значения x_0, не равного нулю, то он сходится абсолютно для всех значений x, для которых выполняется условие:

$$|x| < |x_0|. \qquad (23.3)$$

Если степенной ряд расходится для некоторого значения x_0, то он расходится для всех значений x, для которых выполняется условие:

$$|x| > |x_0|. \qquad (23.4)$$

Доказательство.

По условию теоремы при $x = x_0$ ряд (23.1) сходится, то есть числовой ряд

$$a_0 + a_1 x_0 + a_2 x_0{}^2 + a_3 x_0{}^3 + \ldots + a_n x_0{}^n + \ldots,$$

сходится, и тогда по необходимому условию сходимости ряда его общий член $a_n x_0^n \to 0$ при $n \to \infty$. Отсюда общий член ряда является величиной ограниченной, то есть найдется такое число M, что для любых значений n будет выполняться неравенство $\left|a_n x_0^n\right| < M$.

Сделаем оценку абсолютной величины общего члена ряда (23.1):

$$\left|a_n x^n\right| = \left|a_n x_0^n \left(\frac{x}{x_0}\right)^n\right| = \left|a_n x_0^n\right| \left|\left(\frac{x}{x_0}\right)\right|^n < Mq^n \ \ (n = 0,1,2,...), \text{ где } q = \left|\frac{x}{x_0}\right| < 1.$$

Таким образом, получили неравенство:

$$\left|a_n x^n\right| < Mq^n. \qquad (23.5)$$

Следовательно, члены ряда (23.1) меньше членов ряда геометрической прогрессии, который сходится при $q < 1$ (23.5). Отсюда по признаку сравнения абсолютно сходится и данный ряд.

Докажем вторую часть теоремы.

Пусть в точке $x = x_0$ степенной ряд (23.1) расходится, тогда он расходится для всех $|x| > |x_0|$.

Действительно, пусть ряд сходится при любом значении $x > x_0$, но на основе первой части теоремы ряд будет сходиться и в точке x_0, что противоречит условию теоремы. Теорема доказана.

Из теоремы Абеля вытекает, что для произвольного степенного ряда существует положительное число R (конечное или бесконечное), такое, что для всех $|x| < R$ ряд сходится, причем абсолютно, а при $|x| > R$ ряд расходится.

Интервал $(-R, R)$, во всех точках которого степенной ряд сходится, а в точках, которые не принадлежат данному интервалу, степенной ряд расходится, называется **интервалом сходимости степенного ряда**.

Половина интервала сходимости называется **радиусом сходимости степенного ряда.**

Если $R = +\infty$, то интервал сходимости составляет всю числовую ось $(-\infty < x < +\infty)$.

Если $R = 0$, то степенной ряд сходится лишь при $x = 0$, то есть интервал сходимости вырождается в точку.

Для решения вопроса о сходимости степенного ряда применяют признак Даламбера к ряду, который составлен из абсолютных величин его членов, то есть вычисляют предел:

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = l, \quad u_n = a_n x^n \ ,$$

и сравнивают его с единицей.

Множество значений x, для которых $l < 1$, образует *область абсолютной сходимости степенного ряда* (23.1). Множество значений x, для которых $l > 1$, образует *область расходимости*.

Следовательно,

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}x^{n+1}}{a_n x^n}\right| = |x|\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| < 1, \text{ а } \ |x| < \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = R,$$

где R – радиус сходимости степенного ряда.

То есть

$$R=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|. \tag{23.6}$$

Пример 23.1. Найти область сходимости степенного ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n!}$.

Решение.

Обозначим $u_n=\frac{x^n}{n!}$, тогда $u_{n+1}=\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}$.

Далее получаем:

$$\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right|=\left|\frac{x^{n+1}n!}{x^n(n+1)!}\right|=\left|\frac{x}{n+1}\right|.$$

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{x}{n+1}\right|=|x|\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n+1}=|x|\cdot 0<1.$$

Последнее неравенство выполняется для любого $x\in R$, то есть ряд сходится на всей числовой оси: $-\infty<x<+\infty$.

Можно сразу найти R, поскольку степенной ряд содержит все степени x:

$$R=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)!}{n!}=\lim_{n\to\infty}(n+1)=\infty.$$

Таким образом, ряд сходится на всей числовой оси.

Пример 23.2. Найти область сходимости степенного ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(2x)^{2n-1}}{2n+1}$.

Решение.

В этом степенном ряде коэффициенты при четных степенях x равны нулю, то есть $a_{2n}=0$.

Непосредственное применение признака Даламбера дает:

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{(2x)^{2n+3}(2n+1)}{(2x)^{2n+1}(2n+3)}\right|=4x^2<1,$$

откуда получаем, что $|x|<1/2$, следовательно $x\in(-1/2;1/2)$.

Исследуем поведение степенного ряда на концах интервала сходимости.

Пусть $x=-1/2$. Подставим это значение в степенной ряд и получим числовой ряд:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{2n+1}}{2n+1}=-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n+1},$$

поведение которого определяется поведением гармонического ряда. Следовательно, этот ряд расходящийся по признаку сравнения в предельной форме.

Пусть $x=1/2$. При этом значении x степенной ряд превращается в числовой ряд: $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n+1}$. Этот ряд, как уже было показано, является расходящимся.

Таким образом, область сходимости ряда является интервалом $x\in(-1/2;1/2)$.

Пример 23.3. Найти область сходимости ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(x-5)^n}{n^2}$.

Решение.

Обозначим $x-5=z$.

Следовательно, $u_n=\frac{z^n}{n^2}$ – степенной ряд. Тогда $u_{n+1}=\frac{z^{n+1}}{(n+1)^2}$.

Для нахождения радиуса сходимости теперь можно применить формулу (23.6):

$$R=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)^2}{n^2}=1.$$

Исследуем поведение ряда на концах полученного интервала.

При $z=-1$ получим числовой ряд: $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}$. Этот ряд сходится согласно признаку Лейбница.

При $z=1$ числовой ряд имеет вид: $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$. Он сходится, как ряд Дирихле, при $s=2$.

Следовательно, областью сходимости ряда будет промежуток

$$-1\le z\le 1.$$

Возвращаясь к переменной x, получим $-1\le x-5\le 1$, или $4\le x\le 6$.

Таким образом, областью сходимости данного ряда является промежуток $[4,6]$.

Свойства сходящихся степенных рядов:

1. Сумма членов степенного ряда является функцией непрерывной в интервале сходимости.

2. Степенные ряды можно почленно складывать или вычитать. Радиус сходимости результативного ряда будет не меньше, чем наименьший из радиусов сходимости исходных рядов.

3. Степенной ряд можно почленно дифференцировать на интервале сходимости. Сумма этого нового ряда равна производной от суммы исходного ряда, а радиус сходимости нового ряда равен радиусу сходимости исходного ряда.

4. Степенной ряд можно почленно интегрировать на интервале сходимости. Его сумма при этом равна сумме интегралов от членов исходного ряда. Радиус сходимости нового ряда равен радиусу сходимости исходного ряда.

23.2. Ряды Тейлора и Маклорена. Разложение элементарных функций в ряды Тейлора и Маклорена

Покажем, что если произвольная функция $f(x)$ задана на множестве X, в окрестности точки $x=a$ имеет множество производных и является суммой степенного ряда:

$$f(x) = a_0 + a_1(x-a) + a_2(x-a)^2 + a_3(x-a)^3 + \ldots + a_n(x-a)^n + \ldots,$$

то можно найти коэффициенты этого ряда.

Подставим в степенной ряд $x = a$.

Тогда $a_0 = f(a)$.

Найдем первую производную функции $f(x)$:

$$f'(x) = a_1 + 2a_2(x-a) + 3a_3(x-a)^2 + \ldots + na_n(x-a)^{n-1} + \ldots$$

При $x = a$: $a_1 = f'(a)$.

Для второй производной получим:

$$f''(x) = 2a_2 + 3 \cdot 2a_3(x-a) + \ldots + n(n-1)a_n(x-a)^{n-2} + \ldots$$

При $x = a$: $a_2 = \dfrac{f''(a)}{2!}$. Продолжая эту процедуру n раз получим:

$a_n = \dfrac{f^{n}\ \ a}{n!}$. Таким образом, получили степенной ряд вида:

$$f\ \ x\ = f\ \ a\ + \frac{f'\ \ a}{1!}\ \ x-a\ + \frac{f''\ \ a}{2!}\ \ x-a\ ^2 + \ldots + \frac{f^{n}\ \ a}{n!}\ \ x-a\ ^n + \ldots, \quad (23.7)$$

который называется **рядом Тейлора** для функции $f(x)$ в окрестности точки $x = a$.

Частным случаем ряда Тейлора является **ряд Маклорена** при $a = 0$:

$$f\ \ x\ = f\ \ 0\ + \frac{f'\ \ 0}{1!}x + \frac{f''\ \ 0}{2!}x^2 + \ldots + \frac{f^{n}\ \ 0}{n!}x^n + \ldots \quad (23.8)$$

Остаток ряда Тейлора (Маклорена) получается отбрасыванием от основных рядов n первых членов и обозначается как $R_n(x)$.

Тогда функцию $f(x)$ можно записать как сумму n первых членов ряда $S_n(x)$ и остатка $R_n(x)$:

$$f(x) = S_n(x) + R_n(x), \quad (23.9)$$

то есть

$$f(x)=f(a)+\frac{f'(a)}{1!}(x-a)+\frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2+\dots+\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n+R_n(x).$$

Остаток обычно $R_n(x)$ выражают разными формулами.

Одна из них в форме Лагранжа:

$$R_n(x)=\frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1},$$

где $c=a+\theta(x-a)$, $0<\theta<1$.

Заметим, что на практике чаще используется ряд Маклорена (23.8).

Таким образом, для того чтобы записать функцию $f(x)$ в виде суммы степенного ряда необходимо:

1) найти коэффициенты ряда Маклорена (Тейлора);
2) найти область сходимости полученного степенного ряда;
3) доказать, что данный ряд сходится к функции $f(x)$.

Теорема 1 (*необходимое и достаточное условие сходимости ряда Маклорена*). Пусть радиус сходимости ряда $R>0$. Для того чтобы этот ряд сходился в интервале $(-R,R)$ к функции $f(x)$, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось условие $\lim\limits_{n\to\infty}R_n(x)=0$ в указанном интервале.

Доказательство.

Для функции $f(x)$ запишем формулу Маклорена в виде:

$$f(x)=S_n(x)+R_n(x),\ \text{или}\ f(x)-S_n(x)=R_n(x).$$

Пусть ряд

$$f(x)=f(0)+\frac{f'(0)}{1!}x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\ldots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n+\ldots$$

сходится к функции $f(x)$ в указанном интервале $(-R,R)$, то есть $S_n(x)\to f(x)$ при $n\to\infty$, тогда $R_n(x)\to f(x)$ при $n\to\infty$ в этом интервале.

Если, наоборот, в интервале $(-R,R)$ $R_n(x)\to 0$ при $n\to\infty$, то $S_n(x)\to f(x)$ при $n\to\infty$ в этом интервале. Теорема доказана.

Теорема 2. Если производные любого порядка функции $f(x)$ в некотором промежутке $-b,b$ ограничены по абсолютной величине одним и тем же числом M, то есть $\left|f^{(n)}(x)\right|<M$, то в этом промежутке функцию $f(x)$ можно разложить в ряд Маклорена.

Доказательство.

Запишем абсолютную величину остаточного члена в форме Лагранжа и выполним его оценку:

$$\left|R_n(x)\right|=\left|\frac{f^{\,n+1}\;c}{n+1\;!}x^{n+1}\right|<\frac{b^{n+1}}{(n+1)!}M.$$

При $n\to\infty$ выражение $\dfrac{b^{n+1}}{(n+1)!}\to 0$, отсюда $\lim\limits_{n\to\infty}R_n(x)=0$.

Следовательно, условие разложения функции $f(x)$ выполнено.

Пример 23.4. Разложить в ряд Тейлора в окрестности точки $x=-4$ функцию $f\;x\;=x^3-2x^2-5x-2$.

Решение.

Находим значение функции и ее производных при $x=-4$.

$f\;x\;=x^3-2x^2-5x-2$, $\qquad f\;-4\;=-64-32+20-2=-78;$

$f'\;x\;=3x^2-4x-5$, $\qquad f'\;-4\;=48+16-5=59;$

$f''\;x\;=6x-4$, $\qquad f''\;-4\;=-28;$

$f'''\;x\;=6$, $\qquad f'''\;-4\;=6;$

$f^{IV}\;x\;=0$, $\qquad f^{IV}\;-4\;=0;$

....

$f^{\;n}\;\;x\;=0$, $\qquad f^{\;n}\;\;-4\;=0.$

Подставляем эти значения в ряд (23.7).

Получаем:

$$x^3-2x^2-5x-2=-78+\frac{59}{1!}(x+4)-\frac{28}{2!}(x+4)^2+\frac{6}{3!}(x+4)^3,$$

или

$$x^3-2x^2-5x-2=-78+59(x+4)-14(x+4)^2+(x+4)^3.$$

Область сходимости $-\infty<x<\infty$.

Пример 23.5. Разложить функцию e^x в ряд Тейлора в окрестности точки $x=2$.

Решение.

Находим значение функции и ее производных при $x=2$.

$$f(x)=e^x, \qquad f(2)=e^2;$$

$$f'(x)=e^x, \qquad f'(2)=e^2;$$

....

$$f^{(n)}(x)=e^x, \qquad f^{(n)}(2)=e^2.$$

Подставляем эти значения в ряд (23.7).

Получаем:

$$e^x=e^2+\frac{e^2}{1!}(x-2)+\frac{e^2}{2!}(x-2)^2+...+\frac{e^2}{n!}(x-2)^n+...,$$

или

$$e^x=e^2\left(1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x-2)^n}{n!}\right).$$

Найдем область сходимости этого ряда.

По признаку Даламбера ряд сходится, если

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right|<1.$$

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{(x-2)^{n+1}\cdot n!}{(n+1)!\cdot(x-2)^n}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{x-2}{n+1}\right|=|x-2|\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n+1}=0.$$

Следовательно, при любом x этот предел менее 1, а потому областью сходимости ряда будет: $-\infty < x < \infty$.

Рассмотрим несколько примеров разложения в ряд Маклорена основных элементарных функций. Напомним, что ряд Маклорена

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \ldots.$$

сходится на интервале $(-R, R)$ к функции $f(x)$.

Отметим, что для разложения функции в ряд необходимо:

а) найти коэффициенты ряда Маклорена для данной функции;

б) вычислить радиус сходимости для полученного ряда;

в) доказать, что полученный ряд сходится к функции $y = f(x)$.

Пример 23.6. Рассмотрим функцию $f(x) = e^x$.

Решение.

Вычислим значение функции и ее производных при $x = 0$:

$$f(x) = e^x,\ f'(x) = e^x,\ f''(x) = e^x, \ldots,\ f^{(n)}(x) = e^x.$$

Тогда числовые коэффициенты ряда имеют вид:

$$f(0) = 1,\ f'(0) = 1,\ f''(0) = 1, \ldots,\ f^{(n)}(0) = 1 \text{ для любого } n.$$

Подставим найденные коэффициенты в ряд Маклорена и получим:

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + \ldots \qquad (23.10)$$

Найдем радиус сходимости полученного ряда, а именно:

$$R = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)!}{n!} = \lim_{n\to\infty}(n+1) = \infty.$$

Следовательно, ряд сходится на интервале $(-\infty, +\infty)$.

Этот ряд сходится к функции e^x при любых значениях x, потому что на любом промежутке $-b,b$ функция e^x и ее производные по абсолютной величине ограничены числом e^b.

Пример 23.7. Рассмотрим функцию $f(x)=\sin x$.

Решение.

Найдем значения функции и ее производных при $x=0$:

$$\begin{aligned}
f(x)&=\sin x, & f(0)&=0;\\
f'(x)&=\cos x, & f'(0)&=1;\\
f''(x)&=-\sin x, & f''(0)&=0;\\
f'''(x)&=-\cos x, & f'''(0)&=-1;\\
f^{IV}(x)&=\sin x, & f^{IV}(0)&=0.
\end{aligned}$$

Нетрудно заметить, что производные четного порядка $f^{(2n)}(0)=0$, а производные нечетного порядка $f^{(2n-1)}(0)=(-1)^{n-1}$ $(n=1,2,3,\ldots)$.

Подставим найденные коэффициенты в ряд Маклорена и получим разложение:

$$\sin x=\frac{x}{1!}-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\frac{x^7}{7!}+\ldots+(-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!}+\ldots \qquad (23.11)$$

Найдем интервал сходимости данного ряда.

По признаку Даламбера:

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{x^{2n+1}(2n-1)!}{(2n+1)!x^{2n-1}}\right|=x^2\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2n(2n+1)}=0<1$$

для любого x.

Следовательно, ряд сходится на интервале $-\infty,+\infty$.

Этот ряд сходится к функции $\sin x$, потому что все ее производные ограничены единицей.

Пример 23.8. $f(x)=\cos x$.

Решение.

Найдем значение функции и ее производных при $x=0$:

$$\begin{array}{ll}
f(x)=\cos x, & f(0)=1; \\
f'(x)=-\sin x, & f'(0)=0; \\
f''(x)=-\cos x, & f''(0)=-1; \\
f'''(x)=\sin x, & f'''(0)=0; \\
f^{IV}(x)=\cos x, & f^{IV}(0)=1.
\end{array}$$

Таким образом, коэффициенты данного ряда: $f^{(2n)}(0)=(-1)^n$ и $f^{(2n-1)}(0)=0$, следовательно:

$$\cos x=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\frac{x^6}{6!}+\ldots+(-1)^n\frac{x^{2n}}{2n!}+\ldots \quad (23.12)$$

Аналогично с предыдущим рядом область сходимости $(-\infty,+\infty)$. Ряд сходится к функции $\cos x$, потому что все ее производные ограничены единицей.

Обратим внимание, что функция $\sin x$ нечетная и разложение в ряд по нечетным степеням, функция $\cos x$ – четная и разложение в ряд по четным степеням.

Пример 23.9. Биномиальный ряд: $f(x)=(1+x)^m$.

Решение.

Найдем значения функции и ее производных при $x=0$:

$$\begin{array}{ll}
f(x)=(1+x)^m; & f(0)=1; \\
f'(x)=m(1+x)^{m-1} & f'(0)=m; \\
f''(x)=m(m-1)(1+x)^{m-2}; & f''(0)=m(m-1); \\
f'''(x)=m(m-1)(m-2)(1+x)^{m-3}; & f'''(0)=m(m-1)(m-2).
\end{array}$$

Отсюда видно, что:

$$f^{(n)}(x) = m(m-1)(m-2)\ldots\,[m-(n-1)]\,(1+x)^{m-n},$$
$$f^{(n)}(0) = m(m-1)(m-2)\ldots\,[m-(n-1)]\,.$$

Подставим эти значения коэффициентов в ряд Маклорена и получим разложение данной функции в степенной ряд:

$$(1+x)^m = 1 + \frac{m}{1!}x + \frac{m(m-1)}{2!}x^2 + \ldots + \frac{m(m-1)\ldots m(m-n+1)}{n!}x^n + \ldots \quad (23.13)$$

Найдем радиус сходимости этого ряда:

$$|a_n| = \left|\frac{m(m-1)\ldots(m-n+1)}{n!}\right|;\ |a_{n+1}| = \left|\frac{m(m-1)\ldots(m-n+1)(m-n)}{(n+1)!}\right|;$$

$$R = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{(n+1)!m(m-1)\ldots(m-n+1)(m-n)}{n!m(m-1)\ldots(m-n+1)(m-n)}\right| =$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left|\frac{n+1}{m-n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{1+\frac{1}{n}}{\frac{m}{n}-1}\right| = 1.$$

Следовательно, ряд сходится на интервале $(-1,1)$. В предельных точках при $x=-1$ и $x=1$ ряд может сходится или нет в зависимости от показателя степени m.

Исследованный ряд сходится на интервале $(-1,1)$ к функции $f(x) = (1+x)^m$, то есть сумма ряда $S(x) = (1+x)^m$ при $|x| < 1$.

Пример 23.10. Разложим в ряд Маклорена функцию

$$f(x) = \ln(1+x).$$

Решение.

Для разложения в ряд этой функции используем биномиальный ряд при $m=-1$.

Получим:

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - \ldots + (-1)^{n-1}x^n + \ldots$$

На основе свойства степенных рядов (степенной ряд можно интегрировать в области его сходимости) найдем интеграл от левой и правой частей данного ряда:

$$\int_0^x \frac{dx}{1+x} = \ln(1+x)\Big|_0^x = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \ldots + (-1)^n \frac{x^n}{n} + \ldots \qquad (23.14)$$

Найдем область сходимости данного ряда: $R = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{n+1}{n} = 1$, то есть областью сходимости данного ряда является интервал $(-1,1)$.

Определим сходимость ряда на концах интервала.

При $x = -1$ получим числовой ряд с общим членом $u_n = (-1)^{2n}\frac{1}{n} = \frac{1}{n}$. Этот ряд является гармоническим рядом, то есть расходится.

При $x = +1$ получим числовой ряд с общим членом $u_n = (-1)^n \frac{1}{n}$.

Ряд по признаку Лейбница сходится.

Таким образом, областью сходимости данного ряда является промежуток $(-1,+1]$.

23.3. Применение степенных рядов в приближенных вычислениях

В приближенных вычислениях степенные ряды играют исключительно большую роль. С их помощью составлены таблицы тригонометрических функций, таблицы логарифмов, таблицы значений других функций, которые используют в разных областях знаний, например в теории вероятностей и математической статистике. Кроме того, разложение функций в степенной ряд полезно для их теоретического исследования.

Главным вопросом при использовании степенных рядов в приближенных вычислениях является вопрос оценки погрешности при замене суммы ряда суммой его первых n членов.

Рассмотрим два случая:

1) функция разложена в знакочередующийся ряд;
2) функция разложена в знакопостоянный ряд.

Вычисление с помощью знакочередующихся рядов

Пусть функция $f(x)$ разложена в знакочередующийся степенной ряд. Тогда при вычислении этой функции для конкретного значения x получаем числовой ряд, к которому можно применить признак Лейбница.

В соответствии с этим признаком, если сумму ряда заменить суммой его первых n членов, то абсолютная погрешность не превышает первого члена остатка этого ряда, то есть:

$$|S-S_n|<u_{n+1}. \tag{23.15}$$

Пример 23.11. Вычислить $\cos 5^{\circ}$ с точностью до 0,0001.

Решение.

Будем использовать ряд Маклорена для $f(x)=\cos x$ (23.12), подставив значение угла в радианах:

$$\cos 5° = \cos\frac{\pi}{36} = 1-\left(\frac{\pi}{36}\right)^2\frac{1}{2!}+\left(\frac{\pi}{36}\right)^4\frac{1}{4!}-\dots$$

Если сравнить первый и второй члены ряда с заданной точностью, то: $u_1=1>0.0001;\quad u_2=\left(\frac{\pi}{36}\right)^2\frac{1}{2!}\approx 0,0038>0,0001$.

Третий член разложения:

$$u_3=\left(\frac{\pi}{36}\right)^4\frac{1}{4!}<\frac{0.1^{\ 4}}{4!}=\frac{1}{24\cdot 10000}<\frac{1}{10\cdot 10000}=0,00001,$$

меньше заданной точности вычисления.

Следовательно, для вычисления $\cos 5°$ достаточно оставить два члена ряда, то есть

$$\cos 5° \approx 1-\left(\frac{\pi}{36}\right)^2\frac{1}{2!}=1-0,0038=0,9962.$$

Таким образом, $\cos 5° \approx 0,9962$.

Пример 23.12. Вычислить $\sqrt[3]{9}$ с точностью 0,001.

Решение.

Будем использовать формулу биномиального ряда (23.13). Для этого запишем $\sqrt[3]{9}$ в виде:

$$\sqrt[3]{9}=2\sqrt[3]{\frac{9}{8}}=2\sqrt[3]{1+\frac{1}{8}}=2\left(1+\frac{1}{8}\right)^{1/3}.$$

В этом выражении $m=\frac{1}{3},\quad x=\frac{1}{8}$,

$$\sqrt[3]{9}=2\left[1+\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{8}+\frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}-1\right)\left(\frac{1}{8}\right)^2\frac{1}{2!}+\frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}-1\right)\left(\frac{1}{3}-2\right)\left(\frac{1}{8}\right)^3\frac{1}{3!}+\ldots\right]=$$

$$=2\left(1+\frac{1}{3\cdot 8}-\frac{2}{3^2\cdot 8^2\cdot 2!}+\frac{2\cdot 5}{3^3\cdot 8^3\cdot 3!}-\ldots\right).$$

Сравним каждый из членов ряда с точностью, которая задана. Видно, что $u_4=\frac{4\cdot 5}{3^3\cdot 8^3\cdot 3!}<0{,}001$. Следовательно, для вычисления $\sqrt[3]{9}$ достаточно оставить три члена ряда:

$$\sqrt[3]{9}\approx 2\left(1+\frac{1}{24}-\frac{1}{576}\right),\text{ или }\sqrt[3]{9}\approx 2{,}080.$$

Вопросы для самодиагностики

1. Что такое степенной ряд?
2. Сформулировать теорему Абеля.
3. Как найти радиус сходимости степенного ряда?
4. Как использовать признак Даламбера при нахождении радиуса сходимости степенного ряда?
5. Назвать свойства степенного ряда.
6. Что такое ряд Тейлора?
7. Какой вид имеет ряд Маклорена?
8. Сформулировать необходимое и достаточное условие сходимости ряда Маклорена.
9. Сформулировать теорему о разложении функции в ряд Тейлора.

10. Записать разложение в ряд Маклорена основных функций.

11. Указать области сходимости рассмотренных рядов.

12. Как выполнить оценку погрешности в приближенных вычислениях с помощью степенных рядов?

Упражнения

Найти интервалы сходимости степенных рядов:

23.1. $x-\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{x^3}{3}-\ldots+(-1)^{n-1}\dfrac{x^n}{n}+\ldots$.

23.2. $10x+100x^2+\ldots+10^n x^n+\ldots$.

23.3. $1+\dfrac{x}{3\cdot 2}+\dfrac{x^2}{3^2\cdot 3}+\dfrac{x^3}{3^3\cdot 4}+\ldots+\dfrac{x^n}{3^n(n+1)}+\ldots$.

23.4. $(x+1)+\dfrac{(x+1)^2}{2\cdot 4}+\dfrac{(x+1)^3}{3\cdot 4^2}+\ldots+\dfrac{(x+1)^n}{n\cdot 4^{n-1}}+\ldots$.

23.5. $(2x-5)-\dfrac{(2x-5)^2}{3}+\dfrac{(2x-5)^3}{5}-\ldots+(-1)^{n-1}\dfrac{(2x-5)^n}{2n-1}+\ldots$.

23.6. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\dfrac{x^n}{\sqrt[3]{n}}$.

23.7. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(x-2)^n}{\sqrt{n}}$.

23.8. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(x+1)^n}{n^2}$.

23.9. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\dfrac{n+1}{2n+1}\right)^n x^n$.

23.10. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\dfrac{(x-3)^n}{2^n\sqrt{n}}$.

23.11. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}n!x^n$.

23.12. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{n^2} x^n$.

23.13. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{3^n x^n}{\sqrt{2^n}}$.

Разложить заданные функции в ряд Тейлора:

23.14. $f(x)=\dfrac{1}{x}$ по степеням $(x-1)$.

23.15. $f(x)=\dfrac{1}{x^2}$ по степеням $(x+1)$.

23.16. $f(x)=e^{5x}$ по степеням $(x-2)$.

23.17. Вычислить приближенно $\ln 1{,}04$ с точностью до 0,0001.

23.18. Вычислить $\sqrt[3]{130}$ с точностью до 0,0001.

23.19. Вычислить $\cos 18^\circ$ с точностью до 0,0001.

23.20. Вычислить $\sin 18^\circ$, взяв три члена разложения в ряд Маклорена функции $f(x)=\sin x$, и оценить погрешность.

Использованная литература

Барковський В. В. Математика для економістів : навч. посібн. / В. В. Барковський, Н. В. Барковська. – К. : НАУ, 1999. – 448 с.

Берман Г. Н. Сборник задач по курсу математического анализа / Г. Н. Берман – М. : Наука, 2002. – 384 с.

Валуєв К. Г. Вища математика : навч. посібн. : у 2-х ч. / К. Г. Валуєв, І. А. Джалладова. – К. : КНЕУ, 2001. – 452 с.

Васильченко І. П. Вища математика для економістів : підручник / І. П. Васильченко. – К. : Знання-Прес, 2002. – 454 с.

Данко П. Е. Высшая математика в упражнениях и задачах : в 2-х ч. / П. Е. Данко, А. Г. Попов, Т. Я. Кожевникова. – М. : ВШ, 2003. – 416 с.

Клетеник А. В. Сборник задач по аналитической геометрии / А. В. Клетеник. – М. : Наука, 2002. – 240 с.

Малярець Л. М. Вища математика для економістів у прикладах, вправах і задачах : навч. посібн. / Л. М. Малярець, А. В. Ігначкова. – Х. : ВД «ІНЖЕК», 2006. – 544 с.

Малярець Л. М. Математика для економістів : практ. посібн. до розв'язання задач / Л. М. Малярець, Л. Д. Широкорад. – Х. : Вид ХНЕУ, 2008. – 476 с.

Вправи з курсу «Математика для економістів» для студентів усіх спеціальностей усіх форм навчання. Ч. 2 / Л. М. Афанасьєва, Г. К. Снурникова, Л. Д. Широкорад. – Х. : Вид ХДЕУ, 2003. – 80 с.

Методичні рекомендації до самостійної роботи з курсу «Математика для економістів» (розділ «Функція кількох змінних») для студентів усіх спеціальностей денної форми навчання / укл. Анохіна О. Д., Лебедєва І. Л. – Х. : Вид. ХНЕУ, 2005. – 48 с.

Диференціальні рівняння. Ряди : текст лекцій з курсу «Математика для економістів» / укл. Я. П. Бузько, В. Г. Титарев, І. Л. Лебедєва. – Х. : РВВ ХДЕУ, 1998. – 40 с.

Высшая математика для экономистов : учебн. пособ. для вузов / под ред. Н. Ш. Кремера. – М. : Банки и биржи, ЮНИТИ, 1997. – 440 с.

Панова Н. В. Елементи математичного аналізу з курсу «Математика для економістів» : тексти лекцій / Н. В. Панова, В. Г. Титарєв. – Х. : Вид. ХДЕУ, 2003. – 80 с.

Предметный указатель

Р

Т

У

Х

Ц

Ч

Э

Содержание