МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ

ХАРКІВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ ЕКОНОМІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ
ІМЕНІ СЕМЕНА КУЗНЕЦЯ

Методичні рекомендації та завдання
до виконання контрольних робіт
з навчальної дисципліни

"ПРИКЛАДНА МАТЕМАТИКА"

для студентів напряму підготовки
6.051501 "Комп'ютерні технології та системи
видавничо-поліграфічних виробництв"
заочної форми навчання

Харків. Вид. ХНЕУ ім. С. Кузнеця, 2014

Затверджено на засіданні кафедри вищої математики й економіко-математичних методів.

Протокол № 5 від 11.12.2013 р.

Укладачі: Рибалко А. П.
Широкорад Л. Д.

М54 Методичні рекомендації та завдання до виконання контрольних робіт з навчальної дисципліни "Прикладна математика" для студентів напряму підготовки 6.051501 "Комп'ютерні технології та системи видавничо-поліграфічних виробництв" заочної форми навчання / укл. А. П. Рибалко, Л. Д. Широкорад. – Х. : Вид. ХНЕУ ім. С. Кузнеця, 2014. − 76 с. (Укр. мов.)

Подано методичні рекомендації та завдання до виконання контрольних робіт з навчальної дисципліни, які охоплюють основні теми програмного матеріалу, а саме застосування чисельних методів на практиці, використання методів математичного програмування для розв'язання різних типів оптимізаційних задач, елементи теорії графів та застосування апарату рядів Фур'є для моделювання сигналів. Наведено теоретичні відомості та приклади розв'язання типових завдань з розгорнутими поясненнями, варіанти завдань контрольної роботи, а також запитання для самодіагностики.

Рекомендовано для студентів 2-го курсу напряму підготовки 6.051501 "Комп'ютерні технології та системи видавничо-поліграфічних виробництв" заочної форми навчання.

Вступ

Навчальна дисципліна "Прикладна математика" − це нормативна дисципліна природничо-наукового циклу, яка є важливою складовою навчального плану підготовки бакалавра за напрямом підготовки "Видавничо-поліграфічна справа".

Вивчення даної навчальної дисципліни дає змогу студентам отримати теоретичні знання та практичні навички з основних розділів чисельного аналізу, математичного програмування, методів оптимізації, основ теорії графів, застосування апарату рядів Фур'є.

У процесі опанування дисципліни "Прикладна математика" студент отримує аналітично-дослідницькі компетентності, що необхідні сучасному фахівцю видавничо-поліграфічної справи, а саме: формування вмінь застосовувати апарат чисельного аналізу для моделювання технічних задач та аналізувати результати обчислень з математичної і практичної точки зору; формування вмінь застосовувати апарат математичного програмування для вирішення задач поліграфічного виробництва; здібність моделювати та розв'язувати конфліктні ситуації за допомогою теорії матричних ігор; формування вмінь та навичок використання розкладання функції в ряд Фур'є тощо.

З метою систематизації та закріплення теоретичних і практичних знань із навчальної дисципліни "Прикладна математика" для студентів заочної форми навчання передбачено виконання контрольних робіт. Завдання контрольної роботи охоплюють основні теми програмного матеріалу: застосування чисельних методів на практиці, математичне моделювання прикладних задач, їх дослідження та розв'язання різними оптимізаційними методами, використання апарату рядів Фур'є для моделювання сигналів.

У першій частині розробки наведено теоретичні відомості та приклади розв'язання завдань з розгорнутими поясненнями. Розглянутий матеріал відповідає робочій програмі навчальної дисципліни "Прикладна математика" для студентів галузі знань 0515 "Видавничо-поліграфічна справа" і містить завдання за темами:

1. Чисельне рішення рівнянь.
2. Задача лінійного програмування.
3. Транспортна задача.
4. Матричні ігри.
5. Оптимізаційні задачі на неорієнтованих графах.
6. Ряди Фур'є.

У другій частині роботи подано 20 варіантів завдань рівнозначної складності, що складають контрольну роботу. Номери варіантів видаються викладачем. Перевірка виконання контрольної роботи супроводжується захистом роботи, підготовку до якого студенту рекомендовано здійснювати згідно з наведеними контрольними запитаннями для самодіагностики.

Особливу увагу пропонується приділити вивченню літературних навчальних джерел, список яких наведено у роботі. Це дозволить поглибити отримані знання, краще усвідомити теоретичні факти та особливості їх застосування до практичних задач, а також сприятиме розвитку навичок чіткого формулювання математичних тверджень та їх ланцюгів.

Методичні рекомендації до виконання контрольної роботи

1. Чисельне розв'язання рівнянь

У курсах елементарної та вищої математики було розглянуто різні класи алгебраїчних та трансцендентних рівнянь, застосування до яких певних методів дозволяє знайти їх точний розв'язок або розв'язки. Однак можливість використання аналітичних методів досить обмежена. Математичне моделювання практичних задач дуже часто призводить до нелінійних та трансцендентних рівнянь загального вигляду

$$f(x) = 0, \qquad (1)$$

для розв'язання яких необхідно застосовувати чисельні методи.

Наближене розв'язання рівнянь складається з двох основних етапів:

1) відокремлення кореня рівняння;

2) уточнення кореня.

На першому етапі визначається проміжок, у якому напевно знаходиться один корінь рівняння. Цей крок також називають ізоляцією або локалізацією кореня. Найчастіше відокремлення коренів здійснюється за допомогою графічних методів.

На другому етапі відбувається наближення до кореня рівняння з наперед заданою точністю. Розроблено багато алгоритмів відшукання розв'язку рівнянь загального вигляду: метод половинного ділення (бісекції), метод хорд, метод Ньютона (дотичних), метод простих ітерацій, комбіновані методи. Далі буде детально розглянуте застосування до наближеного розв'язання рівнянь методів половинного ділення та дотичних, решту методів запропоновано вивчити самостійно.

1.1. Відокремлення коренів

При наближеному знаходженні коренів рівнянь необхідно, по-перше, знайти інтервал $(a;b)$ числової осі, якому належить один із коренів рівняння. Найбільш поширеними є *графічні методи* локалізації коренів.

Першим таким методом є *метод одного графіка.* Точки перетину кривої $y = f(x)$ з віссю абсцис є розв'язками рівняння $f(x) = 0$. Тому слід побудувати графік функції $y = f(x)$ та знайти інтервал $(a;b)$, що містить точку перетину кривої $y = f(x)$ з віссю Ox (рис. 1).

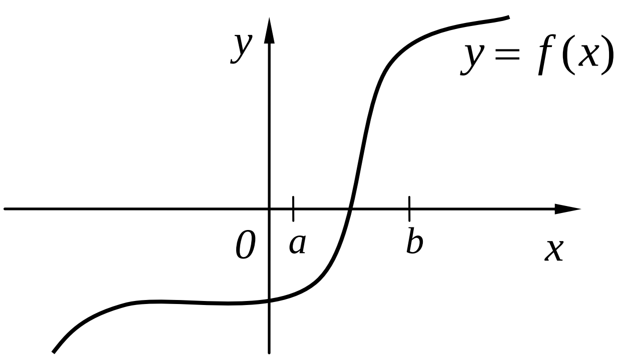


Рис. 1. **Відокремлення кореня методом одного графіка**

Метод двох графіків застосовують, коли побудова графіка функції $f(x)$ викликає труднощі. При цьому рівняння (1) подають у вигляді

$$f_1(x) = f_2(x) \tag{2}$$

так, щоб графіки функцій $y = f_1(x)$ та $y = f_2(x)$ було нескладно зобразити. Абсциса $\tilde{x}$ точки перетину кривих $y = f_1(x)$ та $y = f_2(x)$ буде коренем рівняння (2), а значить і (1). В якості інтервалу ізоляції кореня слід обрати проміжок $(a;b)$ вісі Ox, що містить $\tilde{x}$ (рис. 2).

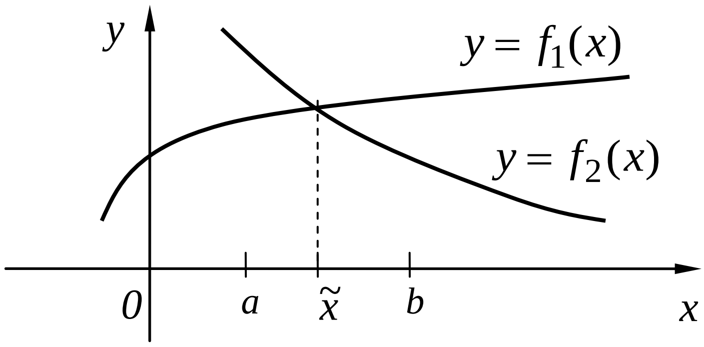


Рис. 2. **Відокремлення кореня методом двох графіків**

Для перевірки того, що локалізацію виконано правильно, доцільно обчислити значення функції $y = f(x)$ у граничних точках інтервалу $(a;b)$ та впевнитись, що вони мають різні знаки: $f(a) \cdot f(b) < 0$. Теоретичним обґрунтуванням наявності кореня рівняння $f(x) = 0$ в інтервалі $(a;b)$ при виконанні цих умов слугує теорема Коші з курсу вищої математики, зміст якої пропонується студентам згадати самостійно.

Приклад 1. Знайти проміжок ізоляції кореня рівняння $x^3 + x - 1 = 0$.

Розв'язання. Слід представити задане рівняння у вигляді

$$x^3 = 1 - x$$

і побудувати графіки функцій $y = f_1(x) = x^3$ та $y = f_2(x) = 1 - x$ (рис. 3).

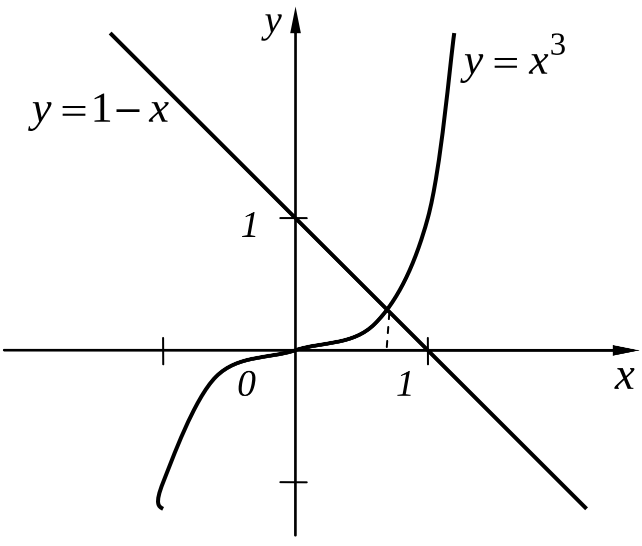


Рис. 3. **Відокремлення кореня рівняння** $x^3 + x - 1 = 0$

Як видно з рис. 3, абсциса точки перетину двох графіків належить інтервалу $(a;b)=(0;1)$.

1.2. Метод половинного ділення

Цей метод уточнення коренів також називають *методом бісекції* або *діхотомії*.

Розглянемо рівняння $f(x)=0$. Припустимо, що

- $(a;b)$ – інтервал, що містить корінь цього рівняння;
- $f(a)\cdot f(b)<0$, тобто функція $y=f(x)$ набуває значень різних знаків на кінцях інтервалу;
- функція $y=f(x)$ є неперервною на $[a;b]$.

У цьому випадку можна застосувати *алгоритм методу половинного ділення*, кожна ітерація полягає в такому:

1) знайти серединну точку $c=\dfrac{a+b}{2}$ відрізка $[a;b]$ та обчислити значення функції $f(c)$ в ній;

2) проаналізувати значення функції $f(x)$ на кінцях та в середині відрізка:

якщо $f(a)$ і $f(c)$ мають різні знаки, тоді корінь лежить на інтервалі $(a;c)$; якщо $f(c)$ і $f(b)$ мають різні знаки, тоді корінь лежить на інтервалі $(b;c)$; якщо $f(c)=0$ – коренем рівняння є $x=c$.

Процедура половинного ділення повторюється з новим інтервалом ізоляції кореня до тих пір, поки довжина відрізка не виявиться меншою за необхідну точність (припустиму погрішність) ε. Кожне значення x з цього проміжку буде наближеним розв'язком заданого рівняння з точністю до ε.

Приклад 2. Знайти корінь рівняння $x^3+x-1=0$ з точністю до $\varepsilon=0{,}1$ за допомогою методу бісекції.

Розв'язання. У попередньому прикладі було знайдено інтервал ізоляції кореня $(a;b)=(0;1)$. Функція $y=f(x)=x^3+x-1$ є неперервною на $[0;1]$ (як елементарна функція) та приймає значення різних знаків на кінцях відрізку:

$$f(0)=0^3+0-1=-1<0; \qquad f(1)=1^3+1-1=1>0.$$

Для уточнення кореня застосовуємо метод бісекції на відрізку $[0;\,1]$.

1 ітерація. Середина відрізка $[0;\,1]$: $c_1 = \dfrac{0+1}{2} = 0{,}5$, значення функції в середині $f(0{,}5) = 0{,}125 + 0{,}5 - 1 = -0{,}375 < 0$. Оскільки функція $f(x)$ має різні знаки в точках $0{,}5$ та 1, отже, корінь рівняння лежить всередині відрізка $[0{,}5;\,1]$.

2 ітерація. Середина відрізка $[0{,}5;\,1]$: $c_2 = \dfrac{0{,}5+1}{2} = 0{,}75$, значення функції в середині $f(0{,}75) = 0{,}1718 > 0$. Таким чином, функція $f(x)$ змінює знак на $[0{,}5;\,0{,}75]$.

3 ітерація. Середина відрізка $[0{,}5;\,0{,}75]$: $c_3 = \dfrac{0{,}5+0{,}75}{2} = 0{,}625$, значення функції в середині $f(0{,}625) = -0{,}1309 < 0$. Звідси корінь рівняння належить $[0{,}625;\,0{,}75]$.

4 ітерація. Середина $[0{,}625;\,0{,}75]$: $c_4 = \dfrac{0{,}625+0{,}75}{2} = 0{,}6875$, значення функції в середині $f(0{,}6875) = 0{,}0125 > 0$. Отже, функція $f(x)$ змінює знак на відрізку $[0{,}625;\,0{,}6875]$.

Оскільки довжина останнього відрізка менше заданого $\varepsilon = 0{,}1$

$$0{,}6875 - 0{,}625 = 0{,}0625 < 0{,}1,$$

будь-яке значення з нього є коренем рівняння із заданою точністю. Наприклад, можна сформулювати результат таким чином: $\tilde{x} = 0{,}65$ – корінь рівняння $x^3 + x - 1 = 0$ з точністю до $\varepsilon = 0{,}1$.

1.3. Метод дотичних

Цей метод уточнення коренів також називають *методом Ньютона*.

Розглянемо рівняння $f(x) = 0$. Припустимо, що

- $(a;b)$ – інтервал, що містить корінь цього рівняння;
- $f(a)\cdot f(b) < 0$, тобто функція $y = f(x)$ набуває значень різних знаків на кінцях інтервалу;
- перша та друга похідні $f'(x),\, f''(x)$ зберігають знак на $(a;b)$.

У цьому випадку можна застосувати *алгоритм методу Ньютона (дотичних):*

1. Знайти початкове наближення кореня x_0. Для цього треба обчислити значення функції $f(x)$ та другої похідної $f''(x)$ в граничних точках інтервалу ізоляції. Можливі два випадки:

якщо $f(a)\cdot f''(a)>0$, то $x_0=a$;

якщо $f(b)\cdot f''(b)>0$, то $x_0=b$.

2. Для відшукання наступних наближень кореня застосувати таку формулу ітераційного процесу:

$$x_{k+1}=x_k-\frac{f(x_k)}{f'(x_k)}, \qquad k=0,1,2... \tag{3}$$

Кількість ітерацій n, необхідна для відшукання розв'язку із заданою точністю ε визначається умовою:

$$|x_n-x_{n-1}|<\varepsilon,$$

тобто останні отримані наближення повинні відрізнятися менше, ніж на ε.

Приклад 3. Знайти корінь рівняння $x^3+x-1=0$ з точністю до $\varepsilon=0,1$ за допомогою методу Ньютона.

Розв'язання. Раніше було знайдено інтервал ізоляції кореня $(0;1)$, а також отримано впевненість в тому, що функція $y=f(x)=x^3+x-1$ приймає значення різних знаків на кінцях відрізка: $f(0)=-1<0$; $f(1)=1>0$. Обчислюємо похідні першого і другого порядку: $f'(x)=3x^2+1$, $f''(x)=6x$. Вони зберігають знак на $(a;b)$.

Таким чином, для уточнення кореня можна застосувати метод Ньютона.

Знаходимо початкове наближення. Оскільки $f(1)\cdot f''(1)=6>0$, то

$$x_0=1.$$

Скористаємось формулою (3) для отримання таких наближень:

$$x_1=1-\frac{f(1)}{f'(1)}=1-\frac{1}{4}=0,75;$$

$$x_2 = 0,75 - \frac{f(0,75)}{f'(0,75)} = 0,75 - \frac{0,172}{2,6875} = 0,686.$$

Оскільки

$$|x_2 - x_1| = 0,064 < \varepsilon = 0,1,$$

робимо висновок: $\tilde{x} = 0,686$ є коренем рівняння $x^3 + x - 1 = 0$ з точністю до $\varepsilon = 0,1$.

У ході розв'язання одного і того ж рівняння з однаковою точністю виявилось необхідним виконати чотири ітерації методу бісекції та лише дві ітерації методу Ньютона. Слід зазначити, що це пов'язано із тим, що збіжність методу дотичних є значно вищою.

2. Задача лінійного програмування

Математичні моделі задач оптимального планування, задачі про суміші, транспортні задачі – це класичні задачі, які належать до розділу "Лінійне програмування".

2.1. Загальна задача лінійного програмування

Математичну модель загальної задачі лінійного програмування можна записати так: знайти такі числові значення змінних $x_j \geq 0 \ \left(j = \overline{1,n}\right)$, які задовольняють систему лінійних обмежень

$$\begin{cases} \sum\limits_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \leq b_i \ \left(i = \overline{1,k}\right), \\ \sum\limits_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i \ \left(i = \overline{k+1,m}\right) \end{cases}$$

і при яких цільова функція

$$Z = c_1 x_1 + c_2 x_2 + \dots + c_n x_n$$

досягає екстремуму (максимуму або мінімуму).

Нерівності різних знаків можна звести до одного знака множенням обох частин на -1. Крім того, для спрощення можна сформулювати задачу лише для мінімуму цільової функції. Якщо ж у конкретній задачі треба шукати не мінімум, а максимум цільової функції $Z = c_1 x_1 + c_2 x_2 + \dots + c_n x_n$, то це те саме, що шукати мінімум функції $Z_1 = -Z = -c_1x_1 - c_2x_2 - \dots - c_nx_n$, оскільки $\max Z = -\min(-Z)$.

З цього випливають дві форми задач лінійного програмування з однорідними обмеженнями.

Стандартна форма задачі мінімізації полягає в такому: знайти такі числові значення змінних $x_1, x_2, \dots, x_n$, які задовольняють систему лінійних нерівностей

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \ge b_i \left(i = \overline{1,m}\right), \ x_j \ge 0 \ \left(j = \overline{1,n}\right)$$

і для яких цільова функція

$$Z = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j$$

досягає мінімуму.

Канонічна форма задачі мінімізації полягає в такому: знайти такі числові значення змінних $x_1, x_2, \dots, x_n$, які задовольняють систему лінійних рівнянь

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j = b_i \left(i = \overline{1,m}\right), \ x_j \ge 0 \ \left(j = \overline{1,n}\right)$$

і для яких цільова функція

$$Z = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j$$

досягає мінімуму.

Щоб перейти від стандартної форми задачі до відповідної їй канонічної, треба невід'ємну величину $x_{n+1} \ge 0$ відняти від лівої частини нерівності, якщо нерівність була типу $(\ge)$ і додати до лівої частини нерівності, якщо нерівність була типу $(\le)$.

Невід'ємні значення змінних, які задовольняють систему лінійних обмежень, називають *допустимим розв'язком задачі* (або *планом*).

Допустимий розв'язок, який перетворює в екстремум цільову функцію, називається *оптимальним*.

Нехай ранг множини векторів $\vec{P}_1, \vec{P}_2, \cdots, \vec{P}_n$ дорівнює $r < n$. Розв'язок $X^{'} = \left(x_1^{'}, x_2^{'}, \cdots, x_n^{'}\right)$ системи лінійних рівнянь

$$x_1\vec{P}_1 + x_2\vec{P}_2 + \cdots + x_n\vec{P}_n = \vec{P}_0,$$

який залежить від будь-яких r лінійно незалежних векторів, називається *базисним розв'язком системи*, а змінні, що залежать від базисних векторів, називаються *базисними змінними*.

Невід'ємний базисний розв'язок називається *опорним планом*.

Теорема 1. Множина планів основної задачі лінійного програмування є опуклою.

Теорема 2. Якщо основна задача лінійного програмування має оптимальний план, то функція Z задачі приймає мінімальне значення в одній з вершин багатогранника розв'язків.

Теорема 3. Якщо система векторів $\vec{P}_1, \vec{P}_2, \cdots, \vec{P}_r \ \ (r \le n)$ лінійно незалежна, тобто

$$x_1\vec{P}_1 + x_2\vec{P}_2 + \cdots + x_r\vec{P}_r = \vec{P}_0,$$

де всі $x_j \ge 0$, то точка $X = (x_1, x_2, \cdots, x_r, 0, \cdots 0)$ є вершиною багатогранника розв'язків.

2.2. Геометричне розв'язування задач лінійного програмування

Відомо, що будь-яке рівняння $a_1x_1 + a_2x_2 = b$ з двома змінними геометрично зображає пряму лінію на площині в декартовій системі координат.

Кожна нерівність $a_1x_1 + a_2x_2 < b$ з двома змінними геометрично визначає півплощину з граничною прямою $a_1x_1 + a_2x_2 = b$, другу частину півплощини визначає нерівність $a_1x_1 + a_2x_2 > b$.

Для того, щоб визначити розміщення відповідних півплощин відносно граничної прямої, треба підставити координати будь-якої точки (найпростіше взяти початок координат) у ліву частину нерівності. Якщо координати початку задовольняють нерівність, то відповідна півплощина включає початок координат. Якщо координати початку не задовольняють нерівність, то відповідна півплощина розміщена відносно граничної прямої з другого боку, ніж початок координат.

Розв'язком системи лінійних нерівностей є багатокутник.

Розглянемо задачу. Знайти максимальне значення функції

$$z = c_1 x_1 + c_2 x_2,$$

якщо

$$a_{i1} x_1 + a_{i2} x_2 \le b_i \ \left(i = \overline{1, m}\right).$$

Маємо задачу з двома змінними. Її можна розв'язати графічним способом. Для цього треба:

1) знайти багатокутник розв'язків;

2) побудувати градієнт цільової функції $grad\ z = (c_1; c_2)$;

3) побудувати лінію рівня $c_1 x_1 + c_2 x_2 = 0$;

4) знайти найбільш віддалену вершину багатокутника в напрямі градієнта цільової функції, якщо задача на максимум, і – в протилежному напрямі, якщо задача на мінімум;

5) обчислити координати цієї вершини і значення цільової функції.

Приклад 4. Знайти максимум функції

$$z = 5x_1 + 4x_2,$$

якщо

$$\begin{cases} x_1 + x_2 \ge 10, \\ -3x_1 + 2x_2 \le 6, \\ -3x_1 + 10x_2 \ge 30, \\ 3x_1 + 5x_2 \le 60, \\ x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0. \end{cases}$$

Розв'язання. Визначимо спочатку багатокутник розв'язків. Для цього побудуємо прямі, які обмежують цей багатокутник (рис. 4).

$$l_1: \quad x_1 + x_2 = 10 \quad \Rightarrow \frac{x_1}{10} + \frac{x_2}{10} = 1;$$

$$l_2: -3x_1 + 2x_2 = 6 \quad \Rightarrow \frac{x_1}{-2} + \frac{x_2}{3} = 1;$$

$$l_3: \quad -3x_1 + 10x_2 = 30 \quad \Rightarrow \frac{x_1}{-10} + \frac{x_2}{3} = 1;$$

$$l_4: \quad 3x_1 + 5x_2 = 60 \quad \Rightarrow \frac{x_1}{20} + \frac{x_2}{12} = 1.$$

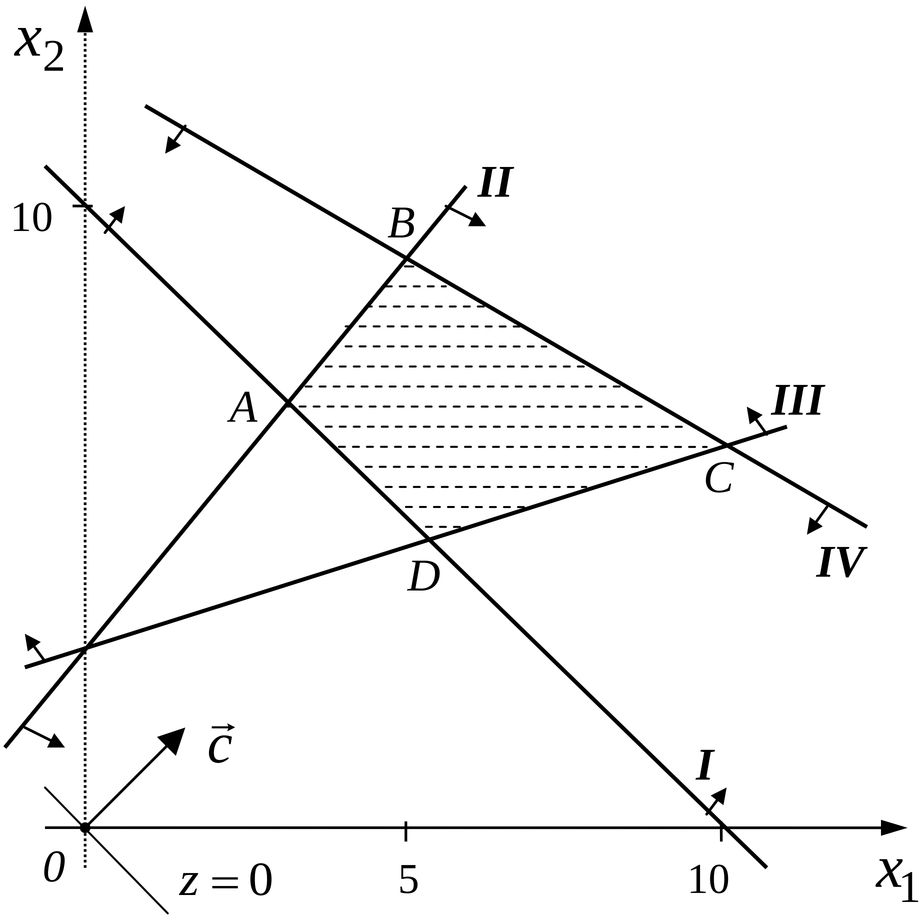


Рис. 4. **Графічний метод задачі лінійного програмування**

Тепер перевіримо справедливість кожної нерівності за однією точкою (початок координат).

Розглянемо першу нерівність: $x_1 + x_2 \geq 10$. Початок координат $(0; 0)$ не задовольняє цю нерівність, тому область розв'язку лежить по інший бік від прямої l_1; це показано на рисунку стрілками.

Розглянемо другу нерівність: $-3x_1 + 2x_2 \leq 6$. Початок координат $(0; 0)$ задовольняє цю нерівність, тому область розв'язку лежить по той же бік від прямої l_2, що і початок координат.

Розглянемо нерівність $3x_1 + 10x_2 \geq 30$. Початок координат $(0; 0)$ не задовольняє цю нерівність, тому область розв'язку лежить по інший бік від прямої l_3; це показано на рисунку стрілками.

Розглянемо нерівність: $3x_1 + 5x_2 \leq 60$. Початок координат $(0; 0)$ задовольняє цю нерівність, тому область розв'язку лежить по той же бік від прямої l_4, що і початок координат.

Зауваження. Якщо обмежуюча пряма проходить через початок координат, то замість точки $(0; 0)$ треба взяти будь-яку іншу точку.

Утворилась область, де виконуються всі нерівності системи обмежень – це многокутник $ABCD$ (рис. 4).

Тепер побудуємо градієнт цільової функції – це вектор

$$\vec{c} = grad\ z = (5; 4).$$

Далі проводимо лінію рівня, що проходить через початок координат (для неї $z = 0$) і перпендикулярна $grad\ z = (5; 4)$. Переміщуємо лінію рівня в напрямку цього градієнта. Визначаємо, що найбільш віддаленою вершиною многокутника є C.

Обчислимо координати цієї вершини. Точка C лежить на перетині прямих l_3 та l_4. Розв'яжемо систему рівнянь цих прямих:

$$\begin{cases} -3x_1 + 10x_2 = 30, \\ 3x_1 + 5x_2 = 60. \end{cases}$$

Додаючи ці два рівняння, отримаємо

$$15x_2 = 90.$$

Звідки $x_2 = 6$, а $x_1 = 10$.

Цьому плану відповідає $z_{\max} = 5 \cdot 10 + 4 \cdot 6 = 74$.

Приклад 5. Знайти максимум функції

$$z = 4x_1 + 5x_2,$$

якщо

$$\begin{cases} x_1 + x_2 \geq 10, \\ -3x_1 + 10x_2 \geq 30, \\ -3x_1 + 2x_2 \leq 6, \\ x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0. \end{cases}$$

Розв'язання. Побудуємо багатокутник розв'язків. Прямі, які потрібні для побудови, розглядалися в попередньому прикладі. Багатокутник розв'язків відкритий (рис. 5).

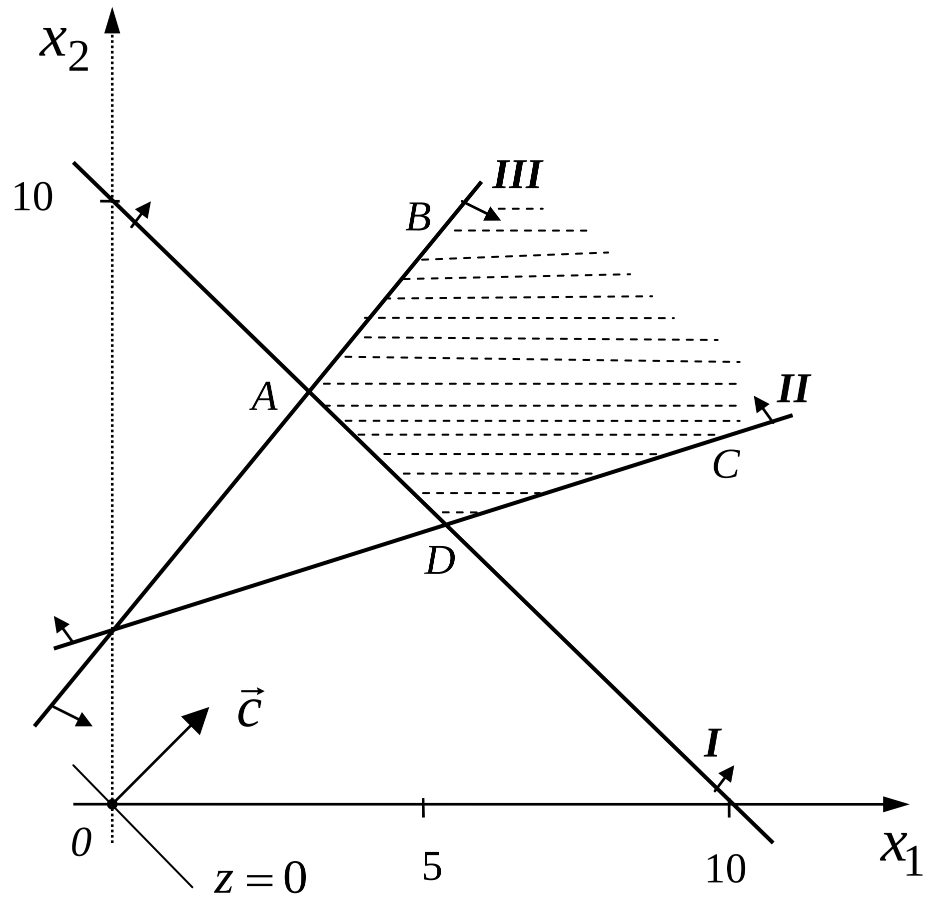


Рис. 5. **Задача лінійного програмування, що не має розв'язку**

Градієнт цільової функції $grad\ z = (4; 5)$. Переміщуючи лінію рівня $z = 0$ в напрямку цього градієнта, бачимо, що немає найбільш віддаленої вершини. Цільова функція необмежена: $z_{\max} = \infty$. Отже, задача не має розв'язку.

2.3. Симплексний метод

Симплексний метод іноді називають методом послідовного поліпшення плану. Така назва справді відображає обчислювальну характеристику симплексного методу: після кожного наступного кроку дістаємо розв'язок (або шуканий виробничий план), кращий, ніж було знайдено на попередньому кроці.

Розглянемо канонічну форму задачі лінійного програмування, для якої відомий будь-який опорний план.

Знайти мінімум функції

$$z = c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_nx_n,$$

якщо

$$\begin{cases} x_1 + a_{1m+1}x_{m+1} + \cdots + a_{1n}x_n = b_1, \\ x_2 + a_{2m+1}x_{m+1} + \cdots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \\ x_m + a_{mm+1}x_{m+1} + \cdots + a_{mn}x_n = b_m, \end{cases}$$

$$x_j \geq 0 \quad \left(j = \overline{1,n}\right).$$

Векторна форма задачі має такий вигляд: знайти мінімум функції

$$z = \vec{C} \cdot \vec{X},$$

якщо

$$x_1\vec{P}_1 + x_2\vec{P}_2 + \cdots + x_m\vec{P}_m + \cdots + x_n\vec{P}_n = \vec{P}_0,$$

$$x_j \geq 0 \quad \left(j = \overline{1,n}\right),$$

де

$$\vec{P}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}; \quad \vec{P}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}; \ \ldots; \quad \vec{P}_m = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix};$$

$$\vec{P}_{m+1} = \begin{pmatrix} a_{1m+1} \\ a_{2m+1} \\ \vdots \\ a_{mm+1} \end{pmatrix}; \ \ldots; \quad \vec{P}_n = \begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix}; \quad \vec{P}_0 = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}.$$

Оскільки

$$b_1\vec{P}_1 + b_2\vec{P}_2 + \cdots + b_m\vec{P}_m + \cdots + b_n\vec{P}_n = \vec{P}_0,$$

то $\vec{X} = \left(b_1; b_2; \cdots; b_m; 0; \cdots; 0\right)$ є опорним планом задачі.

Система одиничних векторів $\vec{P}_1, \vec{P}_2, \cdots, \vec{P}_m$ утворюють базис m-вимірного простору, тому кожний з векторів $\vec{P}_1, \vec{P}_2, \cdots, \vec{P}_m, \cdots \vec{P}_n$, а також $\vec{P}_0$ може бути зображений у вигляді лінійної комбінації векторів даного базису.

Нехай

$$P_j = \sum_{i=1}^{m} x_{ij} P_i \quad \left(j = \overline{0,n}\right);$$

$$z_j = \sum_{i=1}^{m} c_i x_{ij} \quad \left(j = \overline{0,n}\right);$$

$$\Delta_j = z_j - c_j \quad \left(j = \overline{0,n}\right).$$

Оскільки вектори $\vec{P}_1, \vec{P}_2, \cdots, \vec{P}_m$ – одиничні, то $x_{ij} = a_{ij}$ і

$$z_j = \sum_{i=1}^{m} c_i a_{ij}, \quad \text{а} \quad \Delta_j = \sum_{i=1}^{m} c_i a_{ij} - c_j.$$

Критерій оптимальності. Опорний план $X^{\bullet} = \left(x_1^{\bullet}; x_2^{\bullet}; \cdots; x_m^{\bullet}; 0; \cdots; 0\right)$ буде оптимальним, якщо $\Delta_j \le 0$ для всіх $j = \overline{1,n}$.

***Алгоритм** симплексного методу.*

1. Знайти опорний план.
2. Скласти симплекс-таблицю.
3. Перевірити план на оптимальність. Якщо всі $\Delta_j \le 0$, то план оптимальний. Якщо серед чисел Δ_j є додатні, то або встановити нерозв'язність задачі або перейти до нового опорного плану.
4. Знайти розв'язувальні стовпець і рядок. У базис ввести той вектор, для якого $\theta_j \cdot \Delta_j$ найбільше, де

$$\theta_j = \min_{a_{ij} > 0} \frac{b_i}{a_{ij}}.$$

З базису вивести вектор, якому відповідає найменше відношення вільних членів до додатних коефіцієнтів вектора, що вводиться в базис.

5. Перейти до нового базису за допомогою перетворень Жордана – Гаусса.
6. Перевірити новий план на оптимальність. Якщо план неоптимальний, то перейти до пункту 4, а якщо одержано оптимальний план, то процес розв'язання задачі закінчується.

Приклад 6. Знайти мінімум функції

$$z = x_1 - x_2 + x_3 + x_4 + x_5 - x_6 ,$$

якщо

$$\begin{cases} x_1 + x_4 + 6x_6 = 9, \\ 3x_1 + x_2 - 4x_3 + 2x_6 = 2, \\ x_1 + 2x_3 + x_5 + 2x_6 = 6. \end{cases}$$

Розв'язання. Запишемо матрицю обмежень:

$$\left(\begin{array}{cccccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 6 & 9 \\ 3 & 1 & -4 & 0 & 0 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & 2 & 0 & 1 & 2 & 6 \end{array}\right).$$

Одиничні вектори $\vec{P}_4, \vec{P}_2, \vec{P}_5$ приймаємо за базис. Вільним невідомим надаємо значення $x_1 = x_3 = x_6 = 0$. Тоді $x_2 = 2,\ x_4 = 9,\ x_5 = 6$. Отже, опорний план $X = (0; 2; 0; 9; 6; 0)$.

Значення цільової функції: $z_0 = -2 + 9 + 6 = 13$.

Перевіримо початковий опорний план на оптимальність. Для цього складаємо симплекс-таблицю (табл. 1).

z_j обчислюється як скалярний добуток вектора $\vec{P}_j$ на вектор $\vec{C}_{баз}$ за формулою $z_j = \sum_{i=1}^{m} a_{ij} \cdot c_j$, тобто

$z_1 = 1 \cdot 1 + (-1) \cdot 3 + 1 \cdot 1 = -1$; $z_2 = 1 \cdot 0 + (-1) \cdot 1 + 1 \cdot 0 = -1$;

$z_3 = 1 \cdot 0 + (-1) \cdot (-4) + 1 \cdot 2 = 6$; $z_4 = 1 \cdot 1 + (-1) \cdot 0 + 1 \cdot 0 = 1$;

$z_5 = 1 \cdot 0 + (-1) \cdot 0 + 1 \cdot 1 = 1$; $z_6 = 1 \cdot 6 + (-1) \cdot 2 + 1 \cdot 2 = 6$.

Δ_j обчислюється за формулою $\Delta_j = z_j - c_j$, тобто

$\Delta_1 = -1 - 1 = -2$; $\Delta_2 = -1 - (-1) = 0$; $\Delta_3 = 6 - 1 = 5$;

$\Delta_4 = 1 - 1 = 0$; $\Delta_5 = 1 - 1 = 0$; $\Delta_6 = 6 - (-1) = 7$.

Таблиця 1

Симплекс-таблиця 1 до прикладу 6

Базис	$\vec{C}_{баз}$	c_j	1	-1	1	1	1	-1
		$\vec{P}_0$	$\vec{P}_1$	$\vec{P}_2$	$\vec{P}_3$	$\vec{P}_4$	$\vec{P}_5$	$\vec{P}_6$
$\vec{P}_4$	1	9	1	0	0	1	0	6
$\vec{P}_2$	-1	2	3	1	-4	0	0	2
$\leftarrow \vec{P}_5$	1	6	1	0	2	0	1	2
	z_j	13	-1	-1	6	1	1	6
	Δ_j		-2	0	$\boxed{5}$	0	0	7

Останній рядок показує, що план $X = (0; 2; 0; 9; 6; 0)$ не є оптимальним, бо наявні два додатних елемента: $\Delta_3 = 5$; $\Delta_6 = 7$.

Тому переходимо до нового опорного плану. Для цього вводимо в базис вектор, для якого $\theta_j \cdot \Delta_j$ найбільше:

$$\Delta_3 = 5; \quad \theta_j = \min_{a_{ij}>0} \frac{b_i}{a_{ij}}.$$

Оскільки відповідний стовпець має один додатний елемент, то $\theta_3 = \frac{6}{2} = 3$.

Тоді $\theta_3 \cdot \Delta_3 = 5 \cdot 3 = 15$.

$$\Delta_6 = 7; \quad \theta_6 = \min\left\{\frac{9}{2}; \frac{2}{2}; \frac{6}{2}\right\} = 1,$$

звідки $\theta_6 \cdot \Delta_6 = 7 \cdot 1 = 7$.

Оскільки $\theta_3 \cdot \Delta_3 > \theta_6 \cdot \Delta_6$, то в базис вводимо вектор $\vec{P}_3$. З базису виводимо вектор, якому відповідає найменше відношення вільних членів до додатних коефіцієнтів вектора, що вводимо в базис. Цей стовпець має лише один додатний елемент 2, тому виводимо з базису вектор $\vec{P}_5$. Отже, розв'язувальними є стовпець вектора $\vec{P}_3$ та рядок вектора $\vec{P}_5$. На їх перетині знаходиться розв'язувальний елемент 2.

Складаємо нову таблицю (табл. 2). Пояснення до заповнення наведені далі.

Таблиця 2

Симплекс-таблиця 2 до прикладу 6

Базис	$\vec{C}_{баз}$	c_j	1	-1	1	1	1	-1
		$\vec{P}_0$	$\vec{P}_1$	$\vec{P}_2$	$\vec{P}_3$	$\vec{P}_4$	$\vec{P}_5$	$\vec{P}_6$
$\to \vec{P}_3$	1	3	$1/2$	0	1	0	$1/2$	1
$\leftarrow \vec{P}_4$	1	9	1	0	0	1	0	6
$\vec{P}_2$	-1	14	5	1	0	0	2	6
	z_j	-2	$-7/2$	-1	1	1	$-3/2$	1
	Δ_j		$-9/2$	0	0	0	$-5/2$	$\boxed{2}$

Новий базис складається з векторів $\vec{P}_3, \vec{P}_4, \vec{P}_2$. У стовпці $\vec{C}_{баз}$ записали коефіцієнти при базисних невідомих цільової функції, а саме: $1; 1; -1$. Заповнюємо рядок вектора, що ввели в базис $(\vec{P}_3)$. Для цього елементи третього рядка табл. 1 ділимо на розв'язувальний елемент 2. Одержали головний рядок. У стовпці $\vec{P}_3$, треба мати одиничний вектор. У цьому стовпці першого рядка табл. 1 є 0, тому цей рядок треба переписати без зміни в другий рядок табл. 2. У другому рядку табл. 1 на місці (-4) треба мати 0. Тому кожний елемент головного рядка табл. 2 треба помножити на 4 і додати до відповідних елементів другого рядка табл. 1 і записати в третій рядок табл. 2.

Одержали новий опорний план $X = (0; 14; 3; 9; 0; 0)$. Перевіримо його на оптимальність. Для цього треба знайти оцінки (Δ_j) векторів. Видно, що є одне додатне число 2, тому план неоптимальний.

Переходимо до нового опорного плану. Для цього вводимо в базис вектор $\vec{P}_6$, тому що $\Delta_6 = 2 > 0$. Шукаємо відношення вільних членів до коефіцієнтів останнього стовпця: $3/1; 9/6; 14/6$. Далі знаходимо $\min\left\{\frac{3}{1}; \frac{9}{6}; \frac{14}{6}\right\} = 9/6$, тому виводимо з базису вектор $\vec{P}_4$. Отже, розв'язувальними є стовпець вектора $\vec{P}_6$ та рядок вектора $\vec{P}_4$, а розв'язувальним елементом є 6.

Складаємо нову таблицю. Маємо новий базис: $\vec{P}_6, \vec{P}_3, \vec{P}_2.$ У стовпці $\vec{C}_{баз}$ записали коефіцієнти при базисних невідомих цільової функції, а саме: $-1; 1; -1$. Заповнюємо рядок вектора, що ввели в базис $\left(\vec{P}_6\right)$. Для цього елементи другого рядка табл. 2 ділимо на розв'язувальний елемент 6 і записуємо в перший рядок табл. 3. Одержали головний рядок. У стовпці $\vec{P}_6$ треба мати одиничний вектор. У першому рядку табл. 2 треба мати 0 на місці 1. Для цього кожний елемент головного рядка табл. 3 треба помножити на (-1) і додати до відповідних елементів першого рядка табл. 2.

Таблиця 3

Симплекс-таблиця 3 до прикладу 6

Базис	$\vec{C}_{баз}$	c_j	1	-1	1	1	1	-1
		$\vec{P}_0$	$\vec{P}_1$	$\vec{P}_2$	$\vec{P}_3$	$\vec{P}_4$	$\vec{P}_5$	$\vec{P}_6$
$\to \vec{P}_6$	-1	$3/2$	$1/6$	0	0	$1/6$	0	1
$\leftarrow \vec{P}_3$	1	$3/2$	$1/3$	0	1	$-1/6$	$1/2$	0
$\vec{P}_2$	-1	5	4	1	0	-1	2	0
	z_j	-5	$-23/6$	-1	1	$2/3$	$-3/2$	-1
	Δ_j		$-29/6$	0	0	$-1/3$	$-5/2$	0

Одержані елементи записуємо в другий рядок табл. 3. У третьому рядку табл. 2 на місці 6 треба мати 0. Для цього кожний елемент головного рядка табл. 3 треба помножити на (-6) і додати до відповідних елементів третього рядка табл. 2 і записати в третій рядок табл. 3.

Одержали новий опорний план $X = (0; 5; 3/2; 0; 0; 3/2)$. Перевіримо його на оптимальність. Для цього треба знайти оцінки (Δ_j) векторів, але спочатку заповнити рядок z_j. Оскільки серед оцінок немає додатних, то останній план є оптимальним. Отже, план $X = (0; 5; 3/2; 0; 0; 3/2)$ оптимальний і $z_{\min} = -5$.

Приклад 7. На підприємстві є три види основного устаткування A_1, A_2, A_3, на яких можна виготовляти вироби трьох видів – B_1, B_2, B_3. Можливості виробництва лімітує лише фонд часу використання основного устаткування, який не може бути перевищеним для кожного його виду. Відомо фонд часу використання кожного виду устаткування (в годину), потребу в часі його використання для кожного виробу і величини прибутку, яке одержує підприємство за одиницю кожного виробу. Ці дані розміщені в табл. 4.

Визначити, скільки треба випускати щомісяця виробів кожного виду, щоб мати максимальний прибуток від виробництва.

Таблиця 4

Дані прикладу 7

Назва устаткування	Витрати часу на одиницю виробу			Місячний фонд часу
	B_1	B_2	B_3	
A_1	1	1	1	150
A_2	0,5	1	0	100
A_3	1	0,5	2	300
Прибуток за од. виробу	2	2,5	1,5	

Розв'язання. Складаємо математичну модель цієї задачі. Позначимо через x_1, x_2, x_3 відповідно кількість виробів виду B_1, B_2, B_3, які треба випускати, щоб мати максимальний прибуток. Тоді для виробництва такої кількості виробів буде потрібно затратити $x_1 + x_2 + x_3$ годин устаткування A_1.

Через те, що місячний фонд часу основного устаткування A_1 не може перевищувати 150, то повинна виконуватися нерівність:

$$x_1 + x_2 + x_3 \le 150.$$

Аналогічні міркування відносно використання устаткування A_2 та A_3 приведуть до таких нерівностей:

$$0{,}5x_1 + \quad x_2 \qquad \le 100,$$
$$x_1 + 0{,}5x_2 + 2x_3 \le 300.$$

За змістом задачі невідомі $x_1,\ x_2,\ x_3$ є невід'ємними величинами, тобто $x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0,\ x_3 \ge 0$.

Прибуток визначається так: $z = 2x_1 + 2{,}5x_2 + 1{,}5\,x_3$.

Отже, приходимо до такої математичної задачі.

Знайти такі невід'ємні $x_1,\ x_2,\ x_3$, які задовольняють систему нерівностей

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 \le 150, \\ 0{,}5x_1 + x_2 \le 100, \\ x_1 + 0{,}5x_2 + 2x_3 \le 300 \end{cases}$$

і перетворюють у максимум функцію $z = 2x_1 + 2{,}5x_2 + 1{,}5\,x_3$.

Запишемо цю задачу в канонічній формі. Для цього систему нерівностей перетворимо в систему рівнянь, додавши до лівої частини кожної нерівності системи по невід'ємній змінній $x_4,\ x_5,\ x_6$ відповідно. Дістанемо систему:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \le 150, \\ 0{,}5x_1 + x_2 + x_5 \le 100, \\ x_1 + 0{,}5x_2 + 2x_3 + x_6 \le 300. \end{cases}$$

Змінні $x_4,\ x_5,\ x_6$ називають додатковими змінними і в цільову функцію їх вводять з нульовими коефіцієнтами. Дана задача на максимум, тому вводимо функцію

$$z_1 = -z = -2x_1 - 2{,}5x_2 - 1{,}5\,x_3.$$

Додаткові вектори $\vec{P}_4, \vec{P}_5, \vec{P}_6$ утворюють одиничний базис. Початковий опорний план $X = (0; 0; 150; 100; 300)$. Складаємо симплекс-таблицю і перевіряємо початковий опорний план на оптимальність. Усі перетворення розміщуємо в одній табл. 5.

Таблиця 5

Симплекс-таблиця до прикладу 7

Базис	$\vec{C}_{баз}$	c_j	-2	$-2{,}5$	$-1{,}5$	0	0	0
		$\vec{P}_0$	$\vec{P}_1$	$\vec{P}_2$	$\vec{P}_3$	$\vec{P}_4$	$\vec{P}_5$	$\vec{P}_6$
$\leftarrow \vec{P}_4$	0	150	1	1	1	1	0	0
$\vec{P}_5$	0	100	0,5	1	0	0	1	0
$\vec{P}_6$	0	300	1	0,5	2	0	0	1
	z_j	0	0	0	0	0	0	0
	Δ_j		$\boxed{2}$	2,5	1,5	0	0	0
$\rightarrow \vec{P}_1$	-2	150	1	1	1	1	0	0
$\leftarrow \vec{P}_5$	0	25	0	0,5	$-0{,}5$	$-0{,}5$	1	0
$\vec{P}_6$	0	150	0	$-0{,}5$	1	-1	0	1
	z_j	-300	-2	-2	-2	-2	0	0
	Δ_j		0	$\boxed{0{,}5}$	$-0{,}5$	-2	0	0
$\rightarrow \vec{P}_2$	$-2{,}5$	50	0	1	-1	-1	2	0
$\vec{P}_1$	-2	100	1	0	2	2	-2	0
$\vec{P}_6$	0	175	0	0	0,5	$-1{,}5$	1	1
	z_j	-325	-2	$-2{,}5$	$-1{,}5$	$-1{,}5$	-1	0
	Δ_j		0	0	0	$-1{,}5$	-1	0

В останньому рядку нема додатних елементів, тому маємо оптимальний план: $X=(100;\,50;\,0)$. Отже, щоб мати максимальний прибуток $z=325$, треба щомісяця випускати 100 виробів виду B_1, 50 виробів виду B_2, а третього виду B_3 випускати не треба.

3. Транспортна задача лінійного програмування

3.1. Постановка задачі

Нехай є m пунктів відправлення (постачальники) $A_1, A_2, \cdots, A_m$, в яких знаходиться однорідна продукція в кількостях $a_1, a_2, \cdots, a_m$ відповідно. Нехай є n пунктів призначення (споживачі) $B_1, B_2, \cdots, B_n$, яким потрібна ця продукція відповідно в кількостях $b_1, b_2, \cdots, b_n$. Нехай відомі c_{ij} – витрати за перевезення одиниці продукції з i-го пункту відправлення в j-й пункт призначення. Нехай x_{ij} – кількість продукції, яка вивозиться з i-го пункту відправлення в j-й пункт призначення.

Задача полягає в тому, щоб визначити, скільки треба вивезти продукції з кожного пункту відправлення в кожний пункт призначення, щоб сумарні витрати на перевезення були мінімальними.

Усі дані та шукані величини можна розмістити в табл. 6.

Таблиця 6

Постановка транспортної задачі у вигляді таблиці

Постачальники	Споживачі				
	B_1	B_2	…	B_n	Запаси
A_1	c_{11} x_{11}	c_{12} x_{12}	…	c_{1n} x_{1n}	a_1
A_2	c_{21} x_{21}	c_{22} x_{22}	…	c_{2n} x_{2n}	a_2
…	…	…	…	…	…
A_m	c_{m1} x_{m1}	c_{m2} x_{m2}	…	c_{mn} x_{mn}	a_m
Потреби	b_1	b_2	…	b_n	

Наведемо математичну модель транспортної задачі для будь-яких m постачальників і n споживачів:

знайти мінімум функції

$$z = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij}$$

за умови

$$\sum_{i-1}^{m} x_{ij} = b_j \quad \left(j = \overline{1,n}\right),$$

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i \quad \left(i = \overline{1,m}\right),$$

$$x_{ij} \geq 0 \quad \left(i = \overline{1,m};\ j = \overline{1,n}\right).$$

Необхідною і достатньою умовою розв'язку транспортної задачі є умова балансу

$$\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j,$$

тобто загальна кількість виробленої продукції дорівнює загальній кількості попиту споживачів. Якщо виконується ця умова, то така транспортна задача називається закритою.

Кожна транспортна задача розв'язується за тією самою схемою, що й будь-яка задача лінійного програмування, а саме:

1) знайти будь-який базисний невід'ємний розв'язок;
2) перевірити його на оптимальність;
3) якщо знайдений розв'язок не є оптимальним, то перейти до нового плану.

3.2. Знаходження початкового опорного плану

Спосіб "північно-західного кута" (діагональний спосіб).

Цей спосіб полягає в тому, що розподіляється продукція постачальників і задовольняються потреби споживачів у тому порядку, в якому записано в таблиці: спочатку розподіляємо продукцію першого постачальника A_1, намагаючись повністю задовольнити перших споживачів $B_1, B_2, \cdots, B_n$, наскільки це можливо. Вичерпавши продукцію постачальника A_1, розподіляємо продукцію постачальника A_2 за тим самим принципом: задовольняємо потреби дальших споживачів, яких не вдалося задовольнити за рахунок постачальника A_1, і так доти, поки не буде розподілена вся продукція всіх постачальників. Таким чином, заповнення кліток таблиці починається з крайньої в лівому верхньому кутку клітинки, з "північно-західного кута", продовжується в напрямі діагоналі таблиці до крайньої клітинки в правому нижньому кутку.

Розглянемо застосування цього методу на прикладі.

Приклад 8. З трьох пунктів виробництва необхідно вивезти однорідний продукт у п'ять пунктів споживання. Транспортні витрати, об'єм виробництва й об'єм споживання подано в табл. 7. Знайти початковий опорний план способом "північно-західного кута".

Таблиця 7

Транспортна таблиця до прикладу 8

A_i \ B_j	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	Запаси
A_1	7	5	2	8	7	125
A_2	9	9	4	6	9	60
A_3	5	1	9	2	3	115
Потреби	30	50	100	40	80	300

Розв'язання. В цій задачі є три постачальника і п'ять споживачів. Умова балансу виконується:

$$125+60+115=30+50+100+40+80=300.$$

Кількість базисних невідомих дорівнює $m+n-1$, тобто 7.

Будемо заповнювати нову табл. 8. Запишемо спочатку можливості постачальників і потреби споживачів. Як видно, споживачеві B_1 потрібно 30 одиниць продукції, постачальник A_1 має 125 одиниць; отже, за рахунок постачальника A_1 можна повністю задовольнити потреби споживача B_1.

Запишемо в клітинку $(1,1)$ найменше з чисел 30 і 125, $x_{11} = \min(30, 125) =$ $= 30$.

Перший стовпець виключаємо з розгляду, тобто в решті клітинок цього стовпця проставимо нулі.

Таблиця 8

Знаходження початкового опорного плану методом "північно-західного кута"

A_i \ B_j	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	Запаси
A_1	30	50	45	0	0	125
A_2	0	0	55	5	0	60
A_3	0	0	0	35	80	115
Потреби	30	50	100	40	80	300

Перший стовпець виключаємо з розгляду, тобто в решті клітинок цього стовпця проставимо нулі.

У постачальника A_1 залишається ще $125 - 30 = 95$ одиниць. Тепер треба заповнити клітинку $(1,2)$. Споживачеві B_2 потрібно 50 одиниць продукції. Отже, за рахунок постачальника A_1, у якого залишалося ще 95 одиниць, можна повністю задовольнити потреби споживача B_2. Запишемо в клітку $(1,2)$ найменше з чисел 50 і 95, $x_{12} = \min(50, 95) = 50$. Другий стовпець виключаємо з розгляду, тобто в решті клітинок цього стовпця проставимо нулі. У постачальника A_1 залишається ще $95 - 50 = 45$ одиниць.

Тепер будемо заповнювати клітинку $(1,3)$. Споживачеві B_3 потрібно 100 одиниць. Запишемо в клітинку $(1,3)$ найменше з чисел 45 і 100, $x_{13} = \min(45,100) = 45$. Резерви постачальника A_1 вичерпані. Перший рядок виключаємо з розгляду, тобто в решті клітинок цього рядка проставимо нулі.

Тепер будемо заповнювати клітинку $(2,3)$. Споживачеві B_3 ще потрібно 55 одиниць, постачальник A_2 має 60 одиниць. Запишемо в клітинку $(2,3)$ найменше з чисел 55 і 60, $x_{23} = \min(55, 60) = 55$. Третій стовпець виключаємо з розгляду, тобто в решті клітинок цього стовпця проставимо нулі.

У постачальника A_2 залишається ще $60 - 55 = 5$ одиниць. Тепер будемо заповнювати клітинку $(2,4)$. Споживачеві B_4 потрібно 40 одиниць. Записуємо в клітинку $(2,4)$ найменше з чисел 5 і 40, $x_{24} = \min(5, 40) = 5$. Потреби споживача B_4 задоволено частково, йому ще потрібно $40 - 5 = 35$ одиниць. Резерви постачальника A_2 вичерпані. Другий рядок виключаємо з розгляду, тобто в решті клітинок цього рядка проставимо нулі.

Тепер будемо заповнювати клітинку $(3,4)$. Споживачеві B_4 ще потрібно 35 одиниць, постачальник A_3 має 115 одиниць. Запишемо в клітинку $(3,4)$ найменше з чисел 35 і 115, $x_{34} = \min(35, 115) = 35$. У постачальника A_3 залишається ще $115 - 35 = 80$ одиниць.

Заповнюємо останню клітинку $(3,5)$. Споживачеві B_5 потрібно 80 одиниць, тобто $x_{35} = 80$.

На цьому процес побудови початкового опорного плану способом ''північно-західного кута'' закінчується. Початковий опорний план, знайдений цим способом, такий:

$x_{11} = 30, \quad x_{12} = 50, \quad x_{13} = 45, \quad x_{23} = 55, \quad x_{24} = 5, \quad x_{34} = 35, \quad x_{35} = 80$,

решта $x_{ij} = 0$. Значення цільової функції:

$$z = 7 \cdot 30 + 5 \cdot 50 + 2 \cdot 45 + 4 \cdot 55 + 6 \cdot 5 + 2 \cdot 35 + 3 \cdot 80 = 1110.$$

Розглянемо другий спосіб знаходження початкового опорного плану.

Метод мінімальної вартості.

Цей спосіб полягає в тому, що з усієї таблиці вартостей обирається найменша і в клітинці, яка їй відповідає, записується менше з чисел a_i і b_j.

З розгляду виключається або рядок, відповідний постачальнику, запаси якого вичерпані, або стовпець, відповідний споживачеві, потреби якого повністю задоволені, або рядок і стовпець, якщо вичерпані запаси постачальника і задоволені потреби споживача. В частині таблиці, що залишилася, знову вибирається найменша вартість, і процес розподілу запасів продовжується, доки всі запаси не будуть розподілені, а потреби задоволені.

Розглянемо застосування цього методу на попередньому прикладі.

Для цього випишемо таблицю вартостей, розмістивши їх в кутку кожної клітинки (табл. 9). Шукаємо в цій таблиці найменший елемент. У даному випадку він дорівнює 1 і розміщений у клітинці $(3,2)$. У цю клітинку записуємо найменше з чисел 50 і 115, тобто $x_{32} = \min(50,115) = 50$.

Таблиця 9

Знаходження початкового опорного плану методом мінімальної вартості

$A_i \backslash B_j$	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	Запаси
A_1	7 25	5 0	2 100	8 0	7 0	125
A_2	9 5	9 0	4 0	6 0	9 55	60
A_3	5 0	1 50	9 0	2 40	3 25	115
Потреби	30	50	100	40	80	300

Другий стовпець далі не розглядається. У постачальника A_3 залишилося $115-50=65$ одиниць. У частині таблиці, що залишилася, вибираємо знову найменший елемент. Таким елементом є 2. Він знаходиться в клітинці $(1,3)$. В цю клітинку записуємо найменше з чисел 100 і 125, тобто $x_{13} = \min(100,125) = 100$.

Третій стовпець далі не розглядається. У постачальника A_1 залишилося $125-100=25$ одиниць. У частині таблиці, що залишилася, вибираємо знову найменший елемент. Таким елементом є 2. Він знаходиться в клітинці $(3,4)$. Споживачеві B_4 треба 40 одиниць, а у постачальника A_3 залишилося 65 одиниць. У клітинку $(3,4)$ записуємо найменше з чисел 40 і 65, тобто $x_{34} = \min(40,65) = 40$.

Четвертий стовпець далі не розглядається. Споживачеві B_5 ще треба $80 - 25 = 55$ одиниць.

Аналогічно, продовжуючи заповнення таблиці, одержуємо такий опорний план:

$x_{11} = 25, \quad x_{13} = 100, \quad x_{21} = 5, \quad x_{25} = 55, \quad x_{32} = 50, \quad x_{34} = 40, \quad x_{35} = 25,$ решта $x_{ij} = 0$. Значення цільової функції

$$z = 7 \cdot 25 + 2 \cdot 100 + 9 \cdot 5 + 9 \cdot 55 + 1 \cdot 50 + 2 \cdot 40 + 3 \cdot 25 = 1120.$$

Наступним етапом розв'язку транспортної задачі є перевірка плану на оптимальність.

3.3. Поліпшення плану

Природно поліпшувати треба той початковий опорний план, для якого транспортні витрати найменші. В цьому прикладі таким планом є план, що знайдений способом "північно-західного кута".

Якщо початковий опорний план транспортної задачі має $m + n - 1$ додатних перевезень, то він називається невиродженим, а якщо початковий опорний план має менше $m + n - 1$ додатних перевезень, то він називається виродженим.

Теорема. Якщо план транспортної задачі є оптимальним, то йому відповідає система з $m + n$ чисел U_i і V_j, які задовольняють умовам

$$U_i + V_j = c_{ij} \text{ для } x_{ij} > 0 \text{ і}$$

$$U_i + V_j \le c_{ij} \text{ для } x_{ij} = 0,$$

$$\left(i = \overline{1,m}; \quad j = \overline{1,n}\right).$$

Числа U_i і V_j називаються потенціалами постачальників і споживачів відповідно.

Отже, якщо виявиться, що хоч для однієї вільної клітинки

$$\Delta_{ij} = U_i + V_j - c_{ij} > 0,$$

то план неоптимальний і його треба поліпшувати. Поліпшення плану полягає в тому, що вільну клітинку, для якої $\Delta_{ij} > 0$, заповнюємо, перемістивши в неї за певним правилом число з іншої клітинки, а якщо є декілька клітинок, для яких $\Delta_{ij} > 0$, то заповнюємо ту клітинку, де Δ_{ij} найбільше.

Повернемося до нашої задачі. В даному прикладі початковий опорний план невироджений, тому що кількість заповнених клітинок дорівнює $m+n-1=7$. Перевіримо на оптимальність план, знайдений способом "північно-західного кута". Складемо систему рівнянь для визначення потенціалів, використовуючи табл. 8. Для заповнених клітинок:

$$c_{11} = U_1 + V_1 = 7, \quad c_{23} = U_2 + V_3 = 4, \quad c_{24} = U_2 + V_4 = 6,$$

$$c_{12} = U_1 + V_2 = 5, \quad c_{34} = U_3 + V_4 = 2, \quad c_{13} = U_1 + V_3 = 2,$$

$$c_{35} = U_3 + V_5 = 3.$$

Маємо систему 7 рівнянь із 8 невідомими. Така система має безліч розв'язків. Знайдемо один із них. Нехай $U_1 = 0$, тоді з першого рівняння знаходимо:

$$V_1 = 7 - 0 = 7.$$

З рівняння $U_1 + V_2 = 5$ знаходимо:

$$V_2 = 5 - U_1 = 5 - 0 = 5.$$

З рівняння $U_1 + V_3 = 2$ знаходимо:

$$V_3 = 2 - U_1 = 2 - 0 = 2.$$

З рівняння $U_2 + V_3 = 4$ знаходимо:

$$U_2 = 4 - V_3 = 4 - 2 = 2.$$

Аналогічно з останніх рівнянь знаходимо значення всіх інших змінних:

$$V_4 = 6 - U_2 = 4, \quad U_3 = 2 - V_4 = -2, \quad V_5 = 3 - U_3 = 5.$$

Для визначення потенціалів U_i і V_j можна використати табл. 10.

У тих клітинках, де були поставки, записуємо транспортні витрати. Далі знаходимо потенціали. Нехай $U_1 = 0$. Тоді, знаючи c_{11}, c_{12}, c_{13}, можна знайти V_1, V_2, V_3:

$$V_1 = c_{11} - U_1, \quad V_1 = 7 - 0 = 7;$$
$$V_2 = c_{12} - U_1 = 5 - 0 = 5;$$
$$V_3 = c_{13} - U_1 = 2 - 0 = 2.$$

Таблиця 10

Перевірка на оптимальність за допомогою потенціалів

U_i \ V_j	7	5	2	4	5
0	7	5	2	8 / 4	7 / 5
2	9 / 9	9 / 7	4	6	9 / 7
-2	5 / 5	1 / 3	9 / 0	2	3

Знаючи V_3 і c_{23}, знаходимо U_2. Знаючи U_2 і c_{24}, знаходимо $V_4 = 4$. Знаючи V_4 і c_{34}, знаходимо $U_3 = -2$. Знаючи U_3 і c_{35}, знаходимо $V_5 = 5$.

Ті клітинки, в яких не було поставок, ділимо навпіл. У верхній частині клітинки записуємо транспортні витрати, в нижній – суму $U_i + V_j$ і порівнюємо її з транспортними витратами.

Знаходимо оцінки:

$\Delta_{14} = 4-8=-4$, $\Delta_{15} = 5-7=-2$, $\Delta_{21} = 9-9=0$, $\Delta_{22} = 7-9=-2$, $\Delta_{25} = 7-9=-2$, $\Delta_{31} = 5-5=0$, $\Delta_{32} = 3-1=2$, $\Delta_{33} = 0-9=-9$.

Оскільки $\Delta_{32} = 2 > 0$, то знайдений опорний план не є оптимальним. Його можна поліпшити. Додатна оцінка відповідає клітинці $(3,2)$.

Запишемо план, що знайдено способом "північно-західного кута" (табл. 11).

У клітинку $(3,2)$ треба розмістити вантаж, позначимо кількість його через θ. Далі треба знайти замкнений цикл, який забезпечить баланс у задачі. Для цього треба відняти θ з об'єму перевезення клітинки $(3,4)$ (щоб сума перевезень у третьому рядку залишилася без зміни); далі треба додати θ до об'єму перевезення клітинки $(2,4)$ (щоб сума перевезень у четвертому стовпці залишилася без зміни); тепер треба відняти θ з об'єму перевезення клітинки $(2,3)$, щоб сума перевезень у другому рядку залишилася без зміни; далі треба додати θдо об'єму перевезення клітинки $(1,3)$, щоб сума перевезень у третьому стовпці залишилася без зміни; нарешті, треба відняти θ з об'єму перевезення клітинки $(1,2)$, щоб сума перевезень у першому рядку і у другому стовпці залишилася без зміни.

Таблиця 11

Поліпшення плану шляхом перерозподілу вантажу

A_i \ B_j	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5
A_1	30	$-\theta$ 50	$+\theta$ 45		
A_2			$-\theta$ 55	$+\theta$ 5	
A_3		$+\theta$		$-\theta$ 35	80

Величина θ означає, скільки одиниць вантажу можна перерозподілити за знайденим циклом. θ визначаємо як найменшу з усіх поставок, що стоять в клітинках, де θ віднімається. В даному прикладі

$$\theta = \min(50, 55, 35) = 35.$$

У результаті перерозподілу вантажу одержимо новий опорний план (табл. 12).

Таблиця 12

План, що отриманий після перерозподілу

B_j / A_i	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5
A_1	30	15	80		
A_2			20	40	
A_3		35			80

Перевіряємо цей план на оптимальність. Для цього знову знаходимо потенціали. Щоб знайти U_i і V_j, складемо табл. 13. У тих клітинках, де були поставки, записуємо транспортні витрати c_{ij}.

Таблиця 13

Перевірка нового плану на оптимальність

V_j / U_i	7	5	2	4	7
0	7	5	2	8 / 4	7 / 7
2	9 / 9	9 / 7	4	6	9 / 9
-4	5 / 3	1	9 / -2	2 / 0	3

Нехай $U_1 = 0$. Тоді, знаючи c_{11}, c_{12}, c_{13}, можна знайти V_1, V_2, V_3: $V_1 = c_{11} - U_1 = 7 - 0 = 7$; $V_2 = c_{12} - U_1 = 5 - 0 = 5$; $V_3 = c_{13} - U_1 = 2 - 0 = 2$.

Знаючи V_3 і c_{23}, знаходимо U_2: $U_2 = c_{23} - V_3 = 4 - 2 = 2$.

Знаючи U_2 і c_{24}, знаходимо $V_4 = c_{24} - U_2 = 6 - 2 = 4$.

Знаючи V_2 і c_{32}, знаходимо $U_3 = c_{32} - V_2 = 1 - 5 = -4$.

Знаючи U_3 і c_{35}, знаходимо $V_5 = c_{35} - U_3 = 3 - (-4) = 7$.

Ті клітинки, в яких не було поставок, ділимо навпіл. У верхній частині клітки записуємо транспортні витрати, в нижній – суму $U_i + V_j$ і порівнюємо її з транспортними витратами. Усі клітинки цієї таблиці мають $\Delta_{ij} \le 0$. Отже, план

$$x_{11} = 30,\ x_{12} = 15,\ x_{13} = 80,\ x_{23} = 20,\ x_{24} = 40,\ x_{32} = 35,\ x_{35} = 80$$

і решта $x_{ij} = 0$ є оптимальним.

Транспортні витрати на перевезення дорівнюють:

$$z_{\min} = 7 \cdot 30 + 5 \cdot 15 + 2 \cdot 80 + 4 \cdot 20 + 6 \cdot 40 + 1 \cdot 35 + 3 \cdot 80 = 1040.$$

Перевірка: $z_{нов} = z_{поч} - \theta \cdot \Delta_{ij}$; $z_{нов} = 1110 - 35 \cdot 2 = 1040$.

3.4. Розв'язок незбалансованої транспортної задачі

Було розглянуто транспортну задачу, коли $\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j$, тобто попит і пропозиція збалансовані. На практиці часто ця умова не виконується, трапляються випадки:

1) $\sum_{i=1}^{m} a_i > \sum_{j=1}^{n} b_j$, тобто сумарний обсяг виробництва більший за сумарну потребу споживачів. У цьому випадку вводять фіктивного споживача B_{n+1} з потребою $b_{n+1} = \sum_{i=1}^{m} a_i - \sum_{j=1}^{n} b_j$ і з вартостями перевезень $c_{i(n+1)} = 0$ $\left(i = \overline{1, m}\right)$;

2) $\sum_{i=1}^{m} a_i < \sum_{j=1}^{n} b_j$, тобто сумарний обсяг виробництва менший за сумарну потребу споживачів. У цьому випадку вводять фіктивного постачальника A_{m+1} із запасом $a_{m+1} = \sum_{j=1}^{n} b_j - \sum_{i=1}^{m} a_i$ і з вартостями перевезень $c_{(m+1)j} = 0$ $\left(j = \overline{1,n}\right)$.

Після того, як задача збалансована, вона розв'язується звичайним способом.

Приклад 9. З трьох пунктів виробництва необхідно вивезти однорідний продукт у чотири пункти споживання. Транспортні витрати, об'єм виробництва і об'єм споживання подано в табл. 14. Спланувати перевезення вантажу з пунктів виробництва до пунктів споживання при мінімальних транспортних витратах.

Розв'язання. Підрахуємо сумарні запаси:

$$\sum_{i=1}^{3} a_i = 400 + 180 + 250 = 830$$

та сумарні потреби:

$$\sum_{j=1}^{4} b_j = 100 + 140 + 200 + 90 = 530$$

.

Таблиця 14

Незбалансована транспортна задача

Пункти виробництва	Пункти споживання				Запаси
	B_1	B_2	B_3	B_4	
A_1	4	5	3	2	400
A_2	2	4	5	1	180
A_3	3	2	4	3	250
Потреби	100	140	200	90	

Запаси перевищують потреби на 300 одиниць. Необхідно ввести фіктивного споживача з потребою 300 одиниць і вартостями перевезень, що дорівнюють нулю. Після того, як задача збалансована, знаходимо початковий опорний план, наприклад, способом мінімальної вартості (табл. 15).

У таблиці шукаємо найменшу вартість, не враховуючи поки що фіктивного споживача. Таким елементом є 1 в клітинці $(2,4)$. Заповнюємо цю клітинку, $x_{24} = \min(90, 180) = 90$. Четвертий стовпець далі не розглядаємо. У постачальника A_2 залишилося 90 одиниць.

Таблиця 15

Знаходження опорного плану методом мінімальної вартості

Пункти виробництва	Пункти споживання					Запаси
	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	
A_1	4 0	5 0	3 200	2 0	0 200	400
A_2	2 90	4 0	5 0	1 90	0 0	180
A_3	3 10	2 140	4 0	3 0	0 100	250
Потреби	100	140	200	90	300	

У частині таблиці, що залишилася, меншим елементом є 2, який знаходиться в клітинках $(2,1)$ і $(3,2)$. Заповнюємо клітинку $(3,2)$ (сюди можна більше перевезти). $x_{32} = \min(140, 250) = 140$. Другий стовпець далі не розглядається. У постачальника A_3 залишилося 110 одиниць. Заповнюємо клітинку $(2,1)$: $x_{21} = \min(100, 90) = 90$. Другий рядок далі не розглядається. Споживачеві B_1 треба ще 10 одиниць.

У таблиці, що залишилася, меншим елементом є 3, який знаходиться в клітинках $(1,3)$ і $(3,1)$. Заповнюємо клітинку $(1,3)$. $x_{13} = \min(200, 400) = 200$. Третій стовпець далі не розглядається. У постачальника A_1 залишилося 200 одиниць. Далі заповнюємо клітинку $(3,1)$: $x_{31} = \min(10, 110) = 10$.

Перший стовпець далі не розглядається. Тепер заповнюємо останній стовпець: $x_{15} = 200$, $x_{35} = 100$.

Кількість заповнених клітинок дорівнює 7, тобто план невироджений. Для перевірки плану на оптимальність побудуємо табл. 16.

У тих клітинках, де були поставки, записуємо транспортні витрати.

Нехай $U_1 = 0$. Тоді, знаючи c_{13} і c_{15}, знаходимо $V_3 = c_{13} - U_1 = 3 - 0 = 3$ і $V_5 = c_{15} - U_1 = 0 - 0 = 0$.

Таблиця 16

Перевірка плану на оптимальність

V_j / U_i	3	2	3	2	0
0	4 / 3	5 / 2	3	2 / 2	0
-1	2	4 / 1	5 / 2	1	0 / -1
0	3	2	4 / 3	3 / 2	0

Тепер можна знайти $U_3 = c_{35} - V_5 = 0 - 0 = 0$.

Знаючи U_3, $V_1 = c_{31} - U_3 = 3 - 0 = 3$ і $V_2 = c_{32} - U_3 = 2 - 0 = 2$.

Далі знаходимо $U_2 = c_{21} - V_1 = 2 - 3 = -1$.

Нарешті, $V_4 = c_{24} - U_2 = 1 - (-1) = 2$.

Ті клітинки, в яких не було поставок, ділимо навпіл. У верхній частині клітинки записуємо транспортні витрати, в нижній – суму $U_i + V_j$ і порівнюємо її з транспортними витратами. Усі клітинки цієї таблиці мають $\Delta_{ij} \le 0$.

Отже, план $x_{13} = 200,\ x_{21} = 90,\ x_{24} = 90,\ x_{31} = 10,\ x_{32} = 140$ є оптимальним, при цьому у постачальника A_1 залишається 200 одиниць, а у A_3 – 100 одиниць.

Зауваження. Якщо задача вироджена, тобто не вистачає p заповнених клітинок до кількості $m+n-1$, то поміщають у p вільних клітинок нулі і вважають ці клітинки фіктивно заповненими.

4. Матричні ігри

Гра – це дійсний або формальний конфлікт, у якому є принаймні два учасники, кожний із яких прагне власних цілей.

Кількісна оцінка результатів гри називається *платежем*.

Гра називається *парною*, якщо в ній беруть участь тільки дві сторони.

Парна гра називається *грою з нульовою сумою*, якщо сума платежів дорівнює нулю, тобто якщо програш одного гравця дорівнює виграшу другого.

Стратегія гравця називається *оптимальною*, якщо при багаторазовому повторенні гри вона забезпечує гравцю максимально можливий середній виграш (мінімально можливий середній програш).

Матриця $A=(a_{ij})$ називається *платіжною (матриця гри)*. Рядки матриці відповідають стратегіям першого гравця, стовпці – стратегіям другого. Ці стратегії називаються *чистими*.

Число $\alpha=\max\limits_i\left(\min\limits_j a_{ij}\right)$ називається *нижньою ціною гри* або максиміном, а відповідна йому стратегія (рядок) – *максимінною*.

Число $\beta=\min\limits_j\left(\max\limits_i a_{ij}\right)$ називається *верхньою ціною гри* або мінімаксом , а відповідна йому стратегія (стовпець) – *мінімаксною*.

Нижня ціна гри завжди не перевищує верхню ціни гри.

Якщо $\alpha=\beta=v$, то число v називається *ціною гри*.

Гра, для якої $\alpha=\beta$, називається *грою із сідловою точкою*.

Для гри із сідловою точкою находження розв'язку полягає у виборі максимінної і мінімаксної стратегій, які є оптимальними.

Якщо $\alpha\neq\beta$, то гра має розв'язок *у мішаних стратегіях*.

Вектор, кожна із координат якого показує відносну частоту використання гравцем відповідної чистої стратегії, називається мішаною стратегією даного гравця.

Вводять такі позначення:

$X = (x_1, x_2, \cdots, x_m)$ – мішана стратегія першого гравця,

$Y = (y_1, y_2, \cdots, y_n)$ – мішана стратегія другого гравця,

де $x_i \ge 0 \ (i = \overline{1, m})$, $y_j \ge 0 \ (j = \overline{1, n})$,

$\sum_{i=1}^{m} x_i = 1$, $\sum_{j=1}^{n} y_j = 1$.

Якщо X^* – оптимальна стратегія першого гравця, а Y^* – оптимальна стратегія другого гравця, то число

$$v = \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{m} a_{ij} x_i^* y_j^*$$

є ціною гри.

Знаходження оптимальних стратегій і ціни гри складає процес розв'язку матричної гри.

Теорема. Будь-яка матрична гра з нульовою сумою має розв'язок у мішаних стратегіях.

Теорема. Для того щоб число v було ціною гри, а X^* і Y^* – оптимальними стратегіями, необхідно і достатньо виконання нерівностей

$$\sum_{i=1}^{m} a_{ij} x_i^* \ge v \qquad (j = \overline{1, n}),$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} y_j^* \le v \qquad (i = \overline{1, m}).$$

Теорема. Якщо один із гравців застосовує оптимальну мішану стратегію, то його виграш дорівнює ціні гри v не залежно від того, з якими частотами буде застосовувати другий гравець стратегії, що увійшли в оптимальну.

Приклад 10. Знайти нижню та верхню ціну гри, що задана платіжною матрицею

$$A = \begin{pmatrix} 7 & 3 & 10 & 4 \\ 6 & 5 & 9 & 7 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}.$$

Розв'язання. Знайдемо нижню ціну гри $\alpha = \max_i \left(\min_j a_{ij} \right)$.

Для цього в кожному рядку даної матриці вибираємо найменше число. Такими числами є: $3, 5, 3$. Далі серед них вибираємо максимальне, отже,

$$\alpha = \max(3, 5, 3) = 5.$$

Знайдемо верхню ціну гри $\beta = \min_j \left(\max_i a_{ij} \right)$.

Для цього в кожному стовпці матриці вибираємо найбільше число. Такими числами є: $7, 5, 10, 7$. Далі серед них вибираємо мінімальне, отже,

$$\beta = \min(7, 5, 10, 7) = 5.$$

***Алгоритм** знаходження розв'язку матричної гри $2\times n$ або $n\times 2$.*

1. Рисують прямі, що відповідають стратегіям другого (першого) гравця.

2. Визначають нижню (верхню) границю виграшу.

3. Находять дві стратегії другого (першого) гравця, яким відповідають дві прямі, що перетинаються в точці з максимальною (мінімальною) ординатою.

4. Визначають ціну гри та оптимальні стратегії.

Приклад 11. Визначити ціну гри та оптимальні стратегії кожного гравця, якщо платіжна матриця

$$\Pi = \begin{pmatrix} 3 & 5 & 1 & 4 & 6 \\ 7 & 4 & 9 & 5 & 2 \end{pmatrix}.$$

Розв'язання. Перевіримо наявність сідлової точки. Визначаємо нижню та верхню ціну гри.

$$\alpha = \max_i \left(\min_j a_{ij} \right), \quad \alpha = \max(1;2) = 2.$$

$$\beta = \min_j \left(\max_i a_{ij} \right), \quad \beta = \min(7;5;9;5;6) = 5.$$

Оскільки $\alpha \neq \beta$, гра має розв'язок лише у мішаних стратегіях.

Застосовуємо графічний спосіб. Для цього на площині по осі абсцис відкладаємо відрізок одиничної довжини. В кінці відрізка проводимо перпендикуляри, на яких відкладаємо виграші гравців (рис. 6).

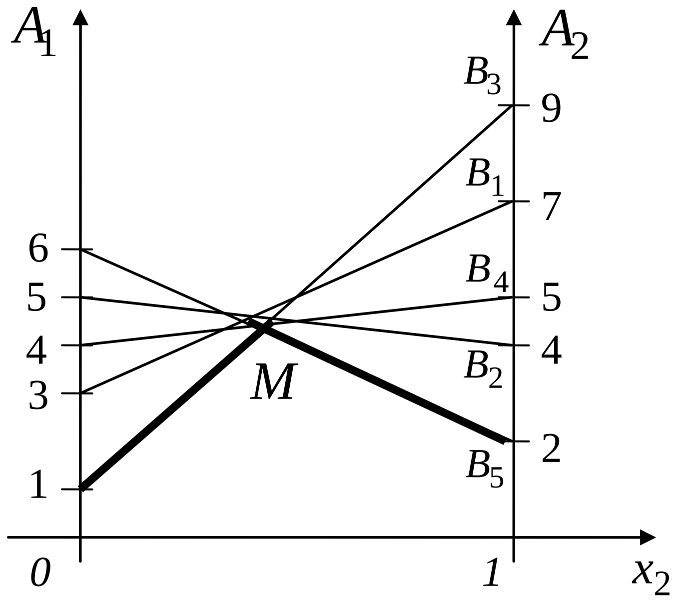


Рис. 6. **Графічний спосіб розв'язання матричної гри** $2 \times n$

Якщо гравець A застосовує стратегію A_1, то його виграш складає відповідно $3, 5, 1, 4, 6$ при стратегії B_1, B_2, B_3, B_4, B_5 гравця B. Відкладаємо ці значення на перпендикулярі $0A_1$.

Якщо гравець A застосовує стратегію A_2, то його виграш складає відповідно $7, 4, 9, 5, 2$ при стратегії B_1, B_2, B_3, B_4, B_5 гравця B. Відкладаємо ці значення на перпендикулярі $1A_2$.

З'єднуємо між собою відповідні точки на перпендикулярах.

Нижньою границею виграшу гравця A є ламана лінія, що лежить на перетині ліній, які відповідають стратегіям B_3 та B_5 гравця B, а максимум знаходиться в точці M (рис. 6).

Отже, в активних стратегіях платіжна матриця набуває вигляду

$$\begin{pmatrix} 1 & 6 \\ 9 & 2 \end{pmatrix}.$$

Оптимальна стратегія гравця A визначається вектором $X^* = (x_1; x_2)$, а гравця B – $Y^* = (0;0;y_3;0;y_5)$.

Для знаходження оптимальної стратегії гравця A складаємо систему рівнянь:

$$\begin{cases} x_1 + 9x_2 = v, \\ 6x_1 + 2x_2 = v, \\ x_1 + x_2 = 1. \end{cases} \quad \begin{cases} x_1 + 9x_2 = 6x_1 + 2x_2, \\ x_1 + x_2 = 1. \end{cases} \quad \begin{cases} 5x_1 - 7x_2 = 0, \\ x_1 + x_2 = 1. \end{cases}$$

Звідки $x_1 = 7/12; x_2 = 5/12$.

Тоді, наприклад, з першого рівняння маємо

$$v = \frac{7}{12} + \frac{45}{12} = \frac{52}{12} = \frac{13}{3}.$$

Отже, $X^* = (7/12; 5/12)$, $v = 13/3$.

Для знаходження оптимальної стратегії гравця B складаємо систему рівнянь:

$$\begin{cases} y_3 + 6y_5 = v, \\ 9y_3 + 2y_5 = v, \\ y_3 + y_5 = 1. \end{cases} \quad \begin{cases} y_3 + 6y_5 = 9y_3 + 2y_5, \\ y_3 + y_5 = 1. \end{cases} \quad \begin{cases} 8y_3 - 4y_5 = 0, \\ y_3 + y_5 = 1. \end{cases}$$

Звідки $y_3 = 1/3; y_5 = 2/3$, тоді з першого рівняння

$$v = \frac{1}{3} + \frac{12}{3} = \frac{13}{3}.$$

Отже, $Y^* = (1/3; 2/3), v = 13/3$.

Таким чином, гравець A приймає стратегію A_1 з імовірністю $7/12$, а стратегію A_2 з імовірністю $5/12$.

Приклад 12. Визначити ціну гри та оптимальні стратегії кожного гравця, якщо платіжна матриця

$$\Pi = \begin{pmatrix} 3 & 8 \\ 5 & 3 \\ 1 & 6 \\ 4 & 5 \\ 6 & 2 \end{pmatrix}.$$

Розв'язання. Перевіримо наявність сідлової точки. Визначаємо нижню та верхню ціну гри.

$$\alpha = \max_i \left(\min_j \, a_{ij} \right), \quad \alpha = \max(3;3;1;4;2) = 4.$$

$$\beta = \min_j \left(\max_i a_{ij} \right), \quad \beta = \min(6;8) = 6.$$

Оскільки $\alpha \neq \beta$, гра має розв'язок у мішаних стратегіях.

Як і в попередній задачі застосовуємо графічний спосіб. Для цього на площині по осі абсцис відкладаємо відрізок одиничної довжини. В кінці відрізка проводимо перпендикуляри і рисуємо прямі, що відповідають стратегіям гравця A (рис. 7).

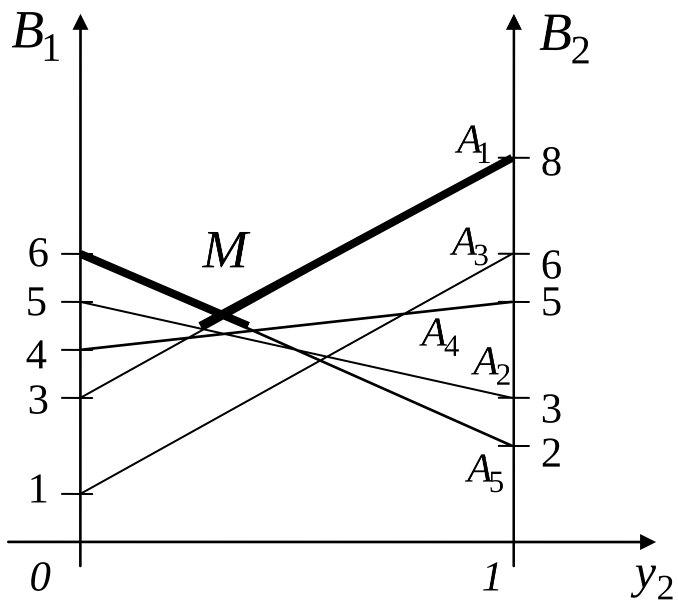


Рис. 7. **Графічний спосіб розв'язання матричної гри** $n \times 2$

Ламана, що відповідає стратегіям A_1 і A_5, є верхньою границею виграшу гравця A. Отже, в активних стратегіях платіжна матриця набуває вигляду

$$\begin{pmatrix} 3 & 8 \\ 6 & 2 \end{pmatrix}.$$

Оптимальна стратегія гравця A визначається вектором $X^* = (x_1; 0; 0; 0; x_5)$, а гравця B – $Y^* = (y_1; y_2)$.

Для знаходження оптимальної стратегії гравця A складаємо систему рівнянь:

$$\begin{cases} 3x_1 + 6x_5 = v, \\ 8x_1 + 2x_5 = v, \\ x_1 + x_5 = 1. \end{cases} \qquad \begin{cases} 3x_1 + 6x_5 = 8x_1 + 2x_5, \\ x_1 + x_5 = 1. \end{cases} \qquad \begin{cases} 5x_1 - 4x_5 = 0, \\ x_1 + x_5 = 1. \end{cases}$$

Звідки $x_1 = 4/9;\ x_5 = 5/9$.

Тоді з першого рівняння

$$v = \frac{12}{9} + \frac{30}{9} = \frac{42}{9} = \frac{14}{3}.$$

Отже, $X^* = (4/9;\ 0; 0; 0; 5/9)$, $v = 14/3$.

Для знаходження оптимальної стратегії гравця B складаємо систему рівнянь:

$$\begin{cases} 3y_1 + 8y_2 = v, \\ 6y_1 + 2y_2 = v, \\ y_1 + y_2 = 1. \end{cases} \qquad \begin{cases} 3y_1 + 8y_2 = 6y_1 + 2y_2, \\ y_1 + y_2 = 1. \end{cases} \qquad \begin{cases} 3y_1 - 6y_2 = 0, \\ y_1 + y_2 = 1. \end{cases}$$

Звідки $y_1 = 2/3;\ y_2 = 1/3$.

Тоді з першого рівняння

$$v = \frac{6}{3} + \frac{8}{3} = \frac{14}{3}.$$

Отже, $Y^* = (2/3; 1/3)$, $v = 14/3$.

Таким чином, гравець B приймає стратегію B_1 з імовірністю $2/3$, а стратегію B_2 з імовірністю $1/3$.

5. Оптимізаційні задачі на графах

Багато економічних задач зручно формулювати та розв'язувати за допомогою графів. Ми розглянемо деякі оптимізаційні задачі на неорієнтованих графах.

Неорієнтований граф – це сукупність $G=(X,U)$ множини елементів $X=\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$, які називаються *вершинами* графу, та множини $U=\{u_1, u_2, \ldots, u_m\}$ неупорядкованих пар вершин, які називаються *ребрами* графу.

Існують різні способи завдання графів, найбільш поширеним з яких є *геометричний*: кожній вершині графа відповідає точка площини, кожному ребру – прямолінійний або криволінійний відрізок, що з'єднує відповідні вершини.

Якщо вершина x_i є кінцем ребра u_j, то кажуть, що вони *інцидентні*. Два ребра називаються *суміжними*, якщо вони інцидентні одній і тій самій вершині. Дві вершини називають *суміжними*, якщо вони інцидентні одному і тому ж ребру. Ребро, кінці якого співпадають, називають *петлею*.

Маршрутом у графі називається скінченна послідовність суміжних ребер. Маршрут, що з'єднує вершини x_i, x_j, називають *замкненим*, якщо вершини x_i, x_j співпадають, і *незамкненим* у протилежному випадку.

Незамкнений маршрут, всі ребра в якому різні, називається *ланцюгом*. Замкнений маршрут, всі ребра в якому різні, називається *циклом*.

Граф називають *зв'язним*, якщо будь-які дві його вершини можна з'єднати хоча б одним ланцюгом. У протилежному випадку кажуть, що граф *незв'язний*.

5.1. Задача відшукання найкоротшого ланцюга

У практичних застосуваннях має велике значення *задача відшукання найкоротшого ланцюга* між двома вершинами зв'язного графа. До такої задачі зводяться численні задачі вибору найбільш економічного (з точки зору відстані або часу, або вартості) маршруту між двома об'єктами.

Нехай $G=(X,U)$ – неорієнтований граф, кожному ребру $\{x_i, x_j\}$ якого приписано деяке дійсне число $d(x_i, x_j)=d_{ij}\geq 0$ – *довжина ребра*. Треба для заданих вершин x_α, x_β знайти такий ланцюг $L^*=L^*(\alpha,\beta)$, сумарна довжина ребер якого d_{L^*} є мінімальною:

$$d_{L^*}=\sum_{(x_i,x_j)\in L^*} d_{ij}\to \min .$$

Для визначеності будемо вважати x_α початковою вершиною, x_β – кінцевою.

Алгоритм *відшукання найкоротшого ланцюга методом індексації вершин* складається з таких етапів.

1. Початкова індексація вершин. Кінцевій вершині x_β приписуємо індекс (вагу) $p_\beta = 0$, а решті вершин – вагу $p_i = \infty \ (i \neq \beta)$.

2. Поновлення індексів вершин. На кожному наступному кроці шукаємо ребро $\{x_i, x_j\}$, для якого $p_j - p_i > d_{ij}$, і замінюємо індекс p_j новим індексом $p_j^{\text{н}} = p_i + d_{ij}$ (зауважимо, що $p_j^{\text{н}} < p_j$). Починаємо з кінцевої вершини (розглядаючи ребра $\{x_\beta, x_j\}$) і породовжуємо процес заміни індексів до тих пір, поки не залишиться хоча б одна вершина, індекс якої можна зменшити.

3. Відшукання оптимального ланцюга. Для початкової вершини x_α з індексом p_α, знаходимо вершину x_{i_1} таку, що $p_\alpha - p_{i_1} = d(\alpha, i_1)$. Далі знаходимо вершину x_{i_2}, для якої $p_{i_1} - p_{i_2} = d(i_1, i_2)$, і т. д., поки не дійдемо до кінцевої вершини x_β. Ланцюг $L(\alpha,\beta) = \left(x_\alpha - x_{i_1} - x_{i_2} - \ldots - x_\beta\right)$, довжина якого дорівнює індексу початкової вершини $d_L = p_\alpha$, є найкоротшим.

Приклад 13. Знайти найкоротший ланцюг, що з'єднує $L(\alpha,\beta) = L(1,8)$, що з'єднує першу і восьму вершину на графі, зображеному на рис. 8.

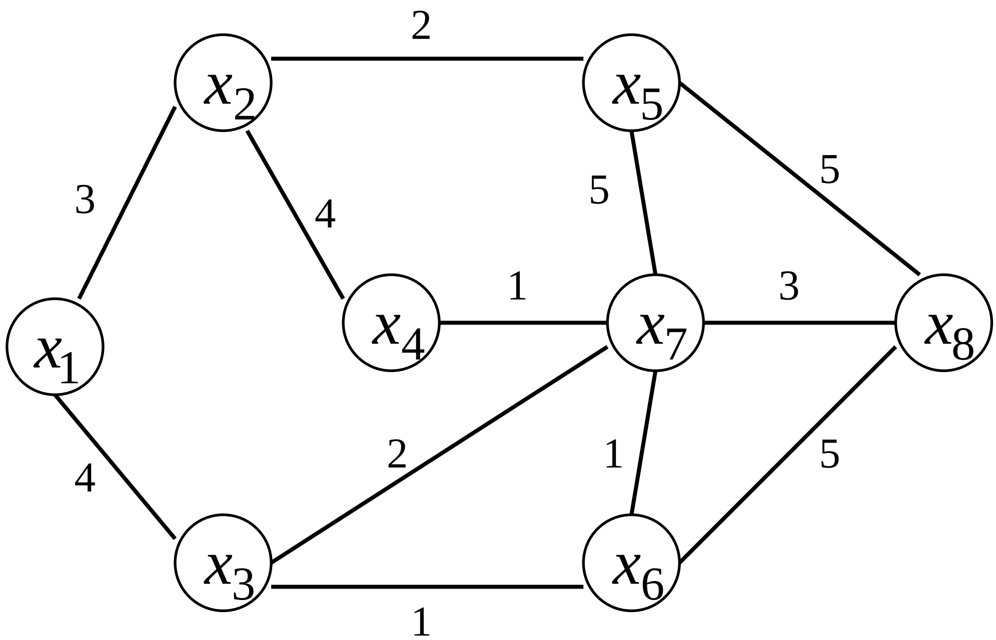


Рис. 8. **Неорієнтований граф до прикладу 13**

Розв'язання. По-перше, згідно з алгоритмом відшукання ланцюга найменшої довжини приписуємо вершині x_8 індекс 0 $(p_8 = 0)$, а всім іншим – індекс $+\infty$. Початкове зваження вершин не зображено як очевидне.

Далі розглядаємо пари суміжних вершин x_i, x_j і у випадку, коли виконується нерівність $p_j - p_i > d_{ij}$ (d_{ij} – довжина ребра) вершинам x_j приписуємо нові індекси $p_j = p_i + d_{ij}$. Для $i = 8$, $j = 7, 6, 5$ маємо $p_j - p_8 > d_{8j}$; отже, нові індекси $p_7 = 3$, $p_6 = 5$, $p_5 = 5$. Далі для вершин x_4, x_3, x_2, одержуємо індекси $p_4 = p_7 + 1 = 4$, $p_3 = p_7 + 2 = 5$; $p_2 = p_5 + 2 = 7$. Переіндексацію вершини x_3 можна було здійснити також відштовхуючить від вершини x_6, але доцільно обирати той варіант індексації, який дає найменшу вагу. З тих же міркувань знайдемо нову вагу вершини x_1: $p_1 = p_3 + 4 = 9$. Результат поновленої індексації зображено на рис. 9.

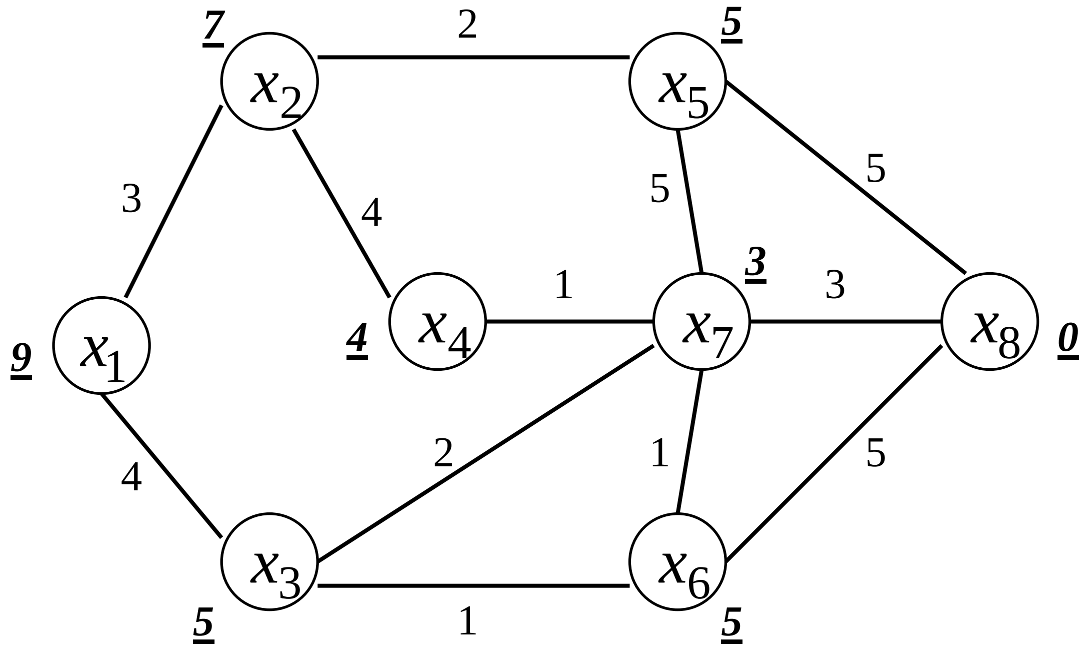


Рис. 9. **Індексація вершин**

Після "зняття" індексів $p_j = +\infty$ знову перевіряємо виконання умови $p_j - p_i > d_{ij}$ для кожної пари суміжних вершин. Виявляється, що індекс вершини x_6 можна поновити, оскільки $p_6 - p_7 = 5 - 3 > 1 = d_{76}$; отже,

$p_6 = p_7 + 1 = 3 + 1 = 4$. На цьому процес індексації закінчено, оскільки немає таких пар суміжних вершин x_i, x_j, для яких $p_j - p_i > d_{ij}$. Остаточна індексація зображена на рис. 10.

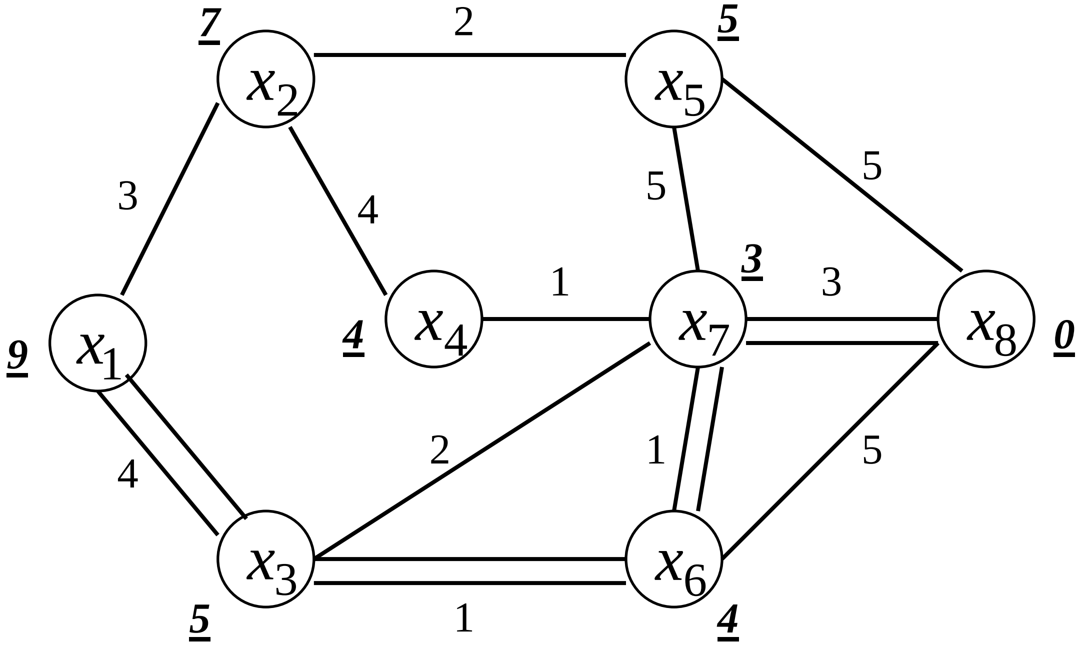


Рис. 10. **Найкоротший ланцюг** $L^*(1{,}8)$

Ланцюг $L^*(1{,}8)$ найменшої довжини, що з'єднує вершини x_1, x_8 знаходимо відштовхуючись від вершини x_1: на кожному кроці таке ребро, різниця індексів інцидентних вершин якого дорівнює довжині цього ребра. Вага початкової вершини $p_1 = 9$ вказує на довжину оптимального ланцюга. Отримаємо: $L_1^*(1{,}8) = (x_1 - x_3 - x_6 - x_7 - x_8)$, на рис. 10 його зображено двома лініями. Легко побачити, що існує ще один найкоротший ланцюг $L_1^*(1{,}8) = (x_1 - x_3 - x_7 - x_8)$. Довжини обох ланцюгів рівні: $d_{L_1^*} = d_{L_2^*} = p_1 = 9$.

5.2. Задача побудови економічного дерева

Зв'язний граф без циклів називають *деревом*.

Часто дерева розглядають не самі по собі, а у взаємозв'язку з графами більш складної структури. Частина графа G, яка містить всі його вершини і є деревом, називається *кістяком* або *покривним деревом* *графа* G. Очевидно, що кожне дерево, яке покриває n вершин, має $(n-1)$-е ребро. Щоб одержати кістяк графа G з n вершинами і m ребрами (який містить цикли), треба вилучити з нього $(m-n+1)$-е ребро.

У багатьох задачах практичного характеру потрібно зв'язати деякі об'єкти (міста, будинки, підприємства тощо) найбільш економічним чином із точки зору відстані, часу, вартості тощо. Це призводить до *задачі побудови економічного дерева*.

Нехай $G=(X,U)$ – зв'язний неорієнтований граф, кожному ребру $\{x_i, x_j\}$ якого поставлено у відповідність дійсне число $d_{ij} \geq 0$ – *довжина ребра*. Треба побудувати покривне дерево T графа G так, щоб сумарна довжина його ребер d_T була мінімальною:

$$d_T = \sum_{(x_i, x_j) \in T} d_{ij} \to \min .$$

Кожне дерево, що задовольняє цю умову, називається *економічним (або екстремальним).*

***Алгоритм** побудови економічного дерева:*

1) вибрати ребро найменшої довжини (якщо таких ребер декілька, то обрати будь-яке з них);

2) на кожному наступному кроці приєднати інцедентне найкоротше з ребер, при долучені якого до вже обраних ребер не утворюється ніякого циклу;

3) процес закінчується, як тільки буде обрано $(n-1)$ ребер.

Зауваження. Іншим способом є обирання на кожному кроці ребра найменшої довжини. Потрібно послідовно взяти $(n-1)$ ребро і так, щоб не утворилося жодного циклу.

Приклад 14. Побудувати економічне дерево на графі, зображеному на рис. 8.

Розв'язання. Якщо почати з першої вершини і приєднувати на кожному кроці суміжні ребра найменшої довжини так, щоб не утворювалось циклів, то послідовність $(n-1)=7$ ребер буде такою:

$d(1,2)=3$, $d(2,5)=2$, $d(1,3)=4$, $d(3,6)=1$, $d(6,7)=1$, $d(7,4)=1$, $d(7,8)=3$.

Якщо обирати ребра з пріоритетом за мінімумом їх довжини так, щоб не утворювалось циклів, то одержимо таку множину з $(n-1)=7$ ребер:

$d(3,6)=1$, $d(6,7)=1$, $d(7,4)=1$, $d(2,5)=2$, $d(1,2)=3$, $d(7,8)=3$, $d(1,3)=4$.

Обидва способи дають однаковий результат: економічне дерево зображено на рис. 11, сумарна довжина його ребер дорівнює $l^*=1+1+1+2+3+3+4=15$.

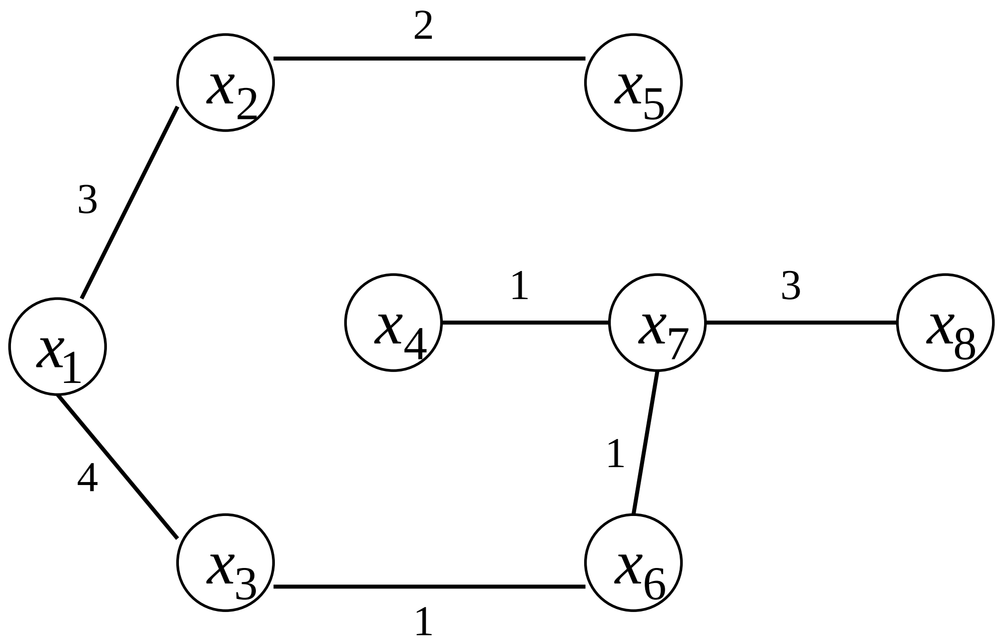


Рис. 11. **Побудова економічного дерева**

Інше покривне дерево мінімальної довжини можна одержати, якщо замість ребра u_{13} взяти ребро u_{24}. У цьому пропонуємо переконатися самостійно.

6. Ряди Фур'є

У природі та техніці дуже поширені процеси, в яких стан об'єкта повністю повторюється через деякий час, наприклад, механічні коливання, коливання напруги тощо. Такі процеси називаються *періодичними* і моделюються за допомогою періодичних функцій: $f(x+T)=f(x), \quad x\in R$, T – період. При цьому виняткове значення мають гармонічні (сінусоідальні та косинусоідальні) функції.

Рядом Фур'є періодичної функції $f(x)$ з періодом $T=2l$, визначеної на сегменті $[-l;l]$, називається функціональний (тригонометричний) ряд

$$S(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\frac{n\pi x}{l}+b_n\sin\frac{n\pi x}{l}\right),$$

де числа a_n, b_n знаходяться за формулами:

$$a_n=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(x)\cos\frac{n\pi x}{l}dx,\quad n=0,1,2...$$

; зокрема,

$$a_0=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(x)dx$$

$$b_n=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(x)\sin\frac{n\pi x}{l}dx,\quad n=1,2...$$

Теорема Діріхлє. Нехай функція $f(x)$ має на сегменті $[-l;l]$ скінченну кількість екстремумів та є неперервною за винятком скінченного числа точок розриву I роду. Тоді ряд Фур'є цієї функції збігається в кожній точці, причому:

1) $S(x)=f(x)$ в точках неперервності $f(x)$;

2) $S(x_0)=\dfrac{f(x_0-0)+f(x_0+0)}{2}$, якщо x_0 – точка розриву I роду $f(x)$;

3) $S(\pm l)=\dfrac{f(-l+0)+f(l-0)}{2}$ в граничних тосках сегмента $[-l;l]$.

У цьому сенсі пишуть

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\frac{n\pi x}{l}+b_n\sin\frac{n\pi x}{l}\right).$$

Цю рівність називають розкладом функції $f(x)$ у ряд Фур'є, а коефіцієнти a_n, b_n – коефіцієнтами Фур'є.

У деяких випадках можна спростити обчислення коефіцієнтів a_n, b_n, якщо скористатися такими *властивостями рядів Фур'є*:

1. Інтеграли можна брати за довільним інтервалом довжини T:

$$a_n = \frac{1}{l}\int_{\alpha}^{\alpha+T} f(x)\cos\frac{n\pi x}{l}dx, \quad n = 0,1,2...;$$

$$b_n = \frac{1}{l}\int_{\alpha}^{\alpha+T} f(x)\sin\frac{n\pi x}{l}dx, \quad n = 1,2...,$$

де α – довільне число.

2. Якщо $f(x)$ – парна функція ($f(-x) = f(x)$), то

$$a_n = \frac{2}{l}\int_0^l f(x)\cos\frac{n\pi x}{l}dx, \quad n = 0,1,2...; \qquad b_n = 0.$$

3. Якщо $f(x)$ – непарна функція ($f(-x) = -f(x)$), то

$$a_n = 0; \qquad b_n = \frac{2}{l}\int_0^l f(x)\sin\frac{n\pi x}{l}dx, \quad n = 1,2....$$

При практичному застосуванні рядів Фур'є функцію $f(x)$ наближають тригонометричним багаточленом:

$$f(x) \approx \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{N} a_n\cos\frac{n\pi x}{l} + b_n\sin\frac{n\pi x}{l},$$

і це наближення можна зробити як завгодно точним вибором числа N.

Приклад 15. Періодичний з періодом $T = 2l = 10$ прямокутний імпульс $f(x)$, заданий на півперіоді $(0;l) = (0;5)$ формулою

$$f_0(x) = \begin{cases} 3, & x \in (1;\, 2); \\ 0, & x \notin (1;\, 2). \end{cases}$$

Розкласти функцію $f(x)$ у ряд Фур'є, якщо відомо, що вона є непарною. Записати тригонометричні многочлени $S_1(x), S_2(x), S_3(x)$, що наближують $f(x)$.

Розв'язання. Спочатку знаходимо коефіцієнти ряду Фур'є. Оскільки функція $f(x)$ є непарною, то $a_n = 0,$

$$b_n = \frac{2}{l}\int_0^l f(x)\sin\frac{n\pi x}{l}dx = \frac{2\cdot 3}{5}\int_1^2 \sin\frac{n\pi x}{5}dx = \frac{6}{5}\cdot\frac{5}{n\pi}\int_1^2 \sin\frac{n\pi x}{5}d\left(\frac{n\pi x}{5}\right) =$$

$$= -\frac{6}{n\pi}\cos\frac{n\pi x}{5}\Bigg|_1^2 = -\frac{6}{n\pi}\left[\cos\frac{2n\pi}{5} - \cos\frac{n\pi}{5}\right]$$

Тоді ряд Фур'є має вигляд

$$f(x) = -\frac{6}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\left[\cos\frac{2n\pi}{5} - \cos\frac{n\pi}{5}\right]\sin\frac{n\pi x}{5}.$$

Обчислимо три перших коефіцієнти ряду

$$b_1 = \frac{-6}{\pi}\left[\cos\frac{2\pi}{5} - \cos\frac{\pi}{5}\right] = -1{,}91[0{,}309 - 0{,}809] = 0{,}955;$$

$$b_2 = \frac{-3}{\pi}\left[\cos\frac{4\pi}{5} - \cos\frac{2\pi}{5}\right] = -0{,}95[-0{,}809 - 0{,}309] = 1{,}062;$$

$$b_3 = \frac{-2}{\pi}\left[\cos\frac{6\pi}{5} - \cos\frac{3\pi}{5}\right] = -0{,}637[-0{,}809 + 0{,}309] = 0{,}319.$$

Таким чином, одержимо три перші наближення $f(x)$ тригонометричними поліномами:

$$S_1(x) = b_1\sin\frac{\pi x}{5} = 0{,}955\sin\frac{\pi x}{5};$$

$$S_2(x) = b_1\sin\frac{\pi x}{5} + b_2\sin\frac{2\pi x}{5} = 0{,}955\sin\frac{\pi x}{5} + 1{,}062\sin\frac{2\pi x}{5};$$

$$S_3(x) = b_1\sin\frac{\pi x}{5} + b_2\sin\frac{2\pi x}{5} + b_3\sin\frac{3\pi x}{5} =$$

$$= 0{,}955\sin\frac{\pi x}{5} + 1{,}062\sin\frac{2\pi x}{5} + 0{,}319\sin\frac{3\pi x}{5}.$$

Завдання контрольної роботи

Завдання 1

Знайти найбільший корінь рівняння:
а) методом половинного ділення з точністю до 0,1;
б) методом дотичних із точністю до 0,01.

1. $x^3 - 2x^2 + 2 = 0$.
2. $x^5 - x - 2 = 0$.
3. $x^4 - 8x + 1 = 0$.
4. $x^3 + 3x + 5 = 0$.
5. $x^3 - x^2 - 4 = 0$.
6. $x^4 + x^2 - 1 = 0$.
7. $x^3 + 2x - 7 = 0$.
8. $x^4 - x^2 - 2 = 0$.
9. $x^3 - 12x + 5 = 0$.
10. $x^4 - x^3 + 1 = 0$.
11. $x^4 - 3x + 1 = 0$.
12. $x^3 - 10x + 9 = 0$.
13. $x^3 + 2x - 1 = 0$.
14. $x^3 - 9x - 5 = 0$.
15. $x^4 + 3x - 20 = 0$.
16. $x^3 - 10x + 5 = 0$.
17. $x^4 + 5x - 7 = 0$.
18. $x^3 + x^2 - 3 = 0$.
19. $x^4 - 2x - 4 = 0$.
20. $x^3 - 2x^2 - 4x - 7 = 0$.

Завдання 2

Для виготовлення двох видів виробів A і B використовують три види сировини (табл. 17). На виробництво одиниці виробу A потрібно витратити сировини першого типу a_1, другого – a_2, третього – a_3 кг. На виробництво одиниці виробу B потрібно витратити сировини першого типу b_1, другого – b_2, третього – b_3 кг. Виробництво забезпечене сировиною першого типу у кількості P_1, другого – P_2, третього – P_3 кг. Прибуток від реалізації готового виробу A дорівнює α, виробу B – β. Скласти план виробництва виробів так, щоб був максимальний прибуток від реалізації виробів.

Таблиця 17

Дані до завдання 2

Варіант	a_1	a_2	a_3	b_1	b_2	b_3	P_1	P_2	P_3	α	β
1	7	1	3	6	1	8	42	5	30	1	2
2	1	2	8	3	3	4	15	12	32	2	2
3	5	6	0	2	5	1	22	42	7	3	2
4	1	11	4	1	5	12	6	55	48	2	3
5	1	3	0	2	1	1	20	27	8	1	3
6	13	1	4	4	1	15	52	6	68	4	6
7	1	4	13	1	15	5	6	68	65	1	3
8	2	1	4	1	1	15	10	6	68	3	2
9	1	2	6	1	1	11	7	12	66	3	2
10	5	1	2	9	1	1	55	7	12	1	1
11	2	5	1	1	9	1	12	55	7	2	2
12	1	6	1	1	11	0	7	66	5	4	1
13	0	1	2	1	1	1	5	7	12	2	4
14	1	0	12	1	1	5	7	5	60	1	2
15	11	3	8	10	5	21	140	45	168	2	2
16	0	11	3	1	10	5	6	140	45	3	5
17	8	3	1	21	5	0	168	45	10	5	2
18	4	0	5	7	1	17	56	5	100	1	3
19	5	5	3	7	17	2	50	100	26	2	6
20	7	1	1	6	3	0	60	15	7	3	3

Завдання 3

Для будівництва чотирьох об'єктів B_1, B_2, B_3, B_4 використовують цеглу, що виготовляється на трьох заводах A_1, A_2, A_3. Щодня кожний із заводів може виготовляти відповідно a_1, a_2, a_3 ум. од. цегли. Щодня потреби цегли на об'єктах відповідно дорівнюють b_1, b_2, b_3, b_4 ум. од. Вартість перевезення 1 ум. од. цегли з кожного заводу до кожного об'єкта визначається матрицею $C = (c_{ij})$. Спланувати перевезення цегли з кожного заводу до кожного об'єкта так, щоб загальні транспортні витрати були мінімальними.

1. $a_1 = 300, a_2 = 150, a_3 = 250;$
$b_1 = 160, b_2 = 140, b_3 = 180, b_4 = 220.$
$$C = \begin{pmatrix} 20 & 3 & 9 & 15 \\ 14 & 10 & 12 & 20 \\ 25 & 11 & 16 & 19 \end{pmatrix}.$$

2. $a_1 = 180, a_2 = 100, a_3 = 120;$
$b_1 = 120, b_2 = 80, b_3 = 105, b_4 = 95.$
$$C = \begin{pmatrix} 7 & 3 & 9 & 15 \\ 3 & 10 & 12 & 20 \\ 15 & 11 & 16 & 19 \end{pmatrix}.$$

3. $a_1 = 250, a_2 = 125, a_3 = 225;$
$b_1 = 140, b_2 = 145, b_3 = 135, b_4 = 180.$
$$C = \begin{pmatrix} 7 & 20 & 9 & 15 \\ 3 & 14 & 12 & 20 \\ 15 & 23 & 16 & 19 \end{pmatrix}.$$

4. $a_1 = 200, a_2 = 100, a_3 = 200;$
$b_1 = 120, b_2 = 90, b_3 = 150, b_4 = 140.$
$$C = \begin{pmatrix} 7 & 20 & 3 & 16 \\ 3 & 14 & 10 & 20 \\ 15 & 25 & 11 & 18 \end{pmatrix}.$$

5. $a_1 = 220, a_2 = 120, a_3 = 160;$
$b_1 = 110, b_2 = 150, b_3 = 100, b_4 = 140.$
$C = \begin{pmatrix} 7 & 20 & 3 & 9 \\ 4 & 13 & 10 & 12 \\ 13 & 24 & 11 & 16 \end{pmatrix}.$

6. $a_1 = 210, a_2 = 140, a_3 = 150;$
$b_1 = 100, b_2 = 90, b_3 = 110, b_4 = 200.$
$C = \begin{pmatrix} 11 & 7 & 3 & 9 \\ 12 & 3 & 14 & 12 \\ 18 & 15 & 21 & 15 \end{pmatrix}.$

7. $a_1 = 170, a_2 = 120, a_3 = 110;$
$b_1 = 105, b_2 = 95, b_3 = 100, b_4 = 100.$
$C = \begin{pmatrix} 20 & 13 & 9 & 7 \\ 3 & 11 & 10 & 12 \\ 15 & 21 & 11 & 16 \end{pmatrix}.$

8. $a_1 = 250, a_2 = 300, a_3 = 150;$
$b_1 = 140, b_2 = 180, b_3 = 200, b_4 = 180.$
$C = \begin{pmatrix} 11 & 7 & 20 & 9 \\ 14 & 4 & 15 & 17 \\ 18 & 16 & 24 & 15 \end{pmatrix}.$

9. $a_1 = 225, a_2 = 250, a_3 = 125;$
$b_1 = 150, b_2 = 110, b_3 = 155, b_4 = 185.$
$C = \begin{pmatrix} 10 & 7 & 20 & 3 \\ 12 & 5 & 14 & 10 \\ 17 & 15 & 25 & 11 \end{pmatrix}.$

10. $a_1 = 150, a_2 = 200, a_3 = 150;$
$b_1 = 110, b_2 = 140, b_3 = 140, b_4 = 110.$
$C = \begin{pmatrix} 20 & 3 & 9 & 7 \\ 13 & 10 & 12 & 19 \\ 25 & 11 & 16 & 18 \end{pmatrix}.$

11. $a_1 = 150, a_2 = 120, a_3 = 130;$
$b_1 = 145, b_2 = 90, b_3 = 90, b_4 = 75.$
$C = \begin{pmatrix} 7 & 4 & 9 & 12 \\ 11 & 2 & 7 & 3 \\ 4 & 5 & 12 & 8 \end{pmatrix}.$

12. $a_1 = 150, a_2 = 260, a_3 = 170;$ $b_1 = 90, b_2 = 160, b_3 = 150, b_4 = 180.$ $C = \begin{pmatrix} 2 & 10 & 15 & 14 \\ 3 & 12 & 7 & 5 \\ 14 & 15 & 6 & 13 \end{pmatrix}.$

13. $a_1 = 180, a_2 = 120, a_3 = 230;$ $b_1 = 110, b_2 = 185, b_3 = 125, b_4 = 110.$ $C = \begin{pmatrix} 14 & 8 & 17 & 5 \\ 19 & 10 & 7 & 10 \\ 3 & 5 & 8 & 4 \end{pmatrix}.$

14. $a_1 = 175, a_2 = 165, a_3 = 180;$ $b_1 = 120, b_2 = 200, b_3 = 130, b_4 = 70.$ $C = \begin{pmatrix} 12 & 8 & 7 & 11 \\ 4 & 3 & 12 & 2 \\ 5 & 15 & 8 & 3 \end{pmatrix}.$

15. $a_1 = 160, a_2 = 140, a_3 = 300;$ $b_1 = 110, b_2 = 185, b_3 = 125, b_4 = 180.$ $C = \begin{pmatrix} 3 & 10 & 9 & 11 \\ 14 & 3 & 1 & 8 \\ 9 & 5 & 16 & 7 \end{pmatrix}.$

16. $a_1 = 300, a_2 = 150, a_3 = 250;$ $b_1 = 120, b_2 = 190, b_3 = 205, b_4 = 185.$ $C = \begin{pmatrix} 10 & 8 & 18 & 9 \\ 13 & 4 & 11 & 16 \\ 14 & 15 & 20 & 17 \end{pmatrix}.$

17. $a_1 = 150, a_2 = 100, a_3 = 120;$ $b_1 = 70, b_2 = 90, b_3 = 85, b_4 = 125.$ $C = \begin{pmatrix} 4 & 11 & 9 & 12 \\ 14 & 5 & 3 & 8 \\ 9 & 6 & 16 & 7 \end{pmatrix}.$

18. $a_1 = 250, a_2 = 125, a_3 = 225;$ $b_1 = 200, b_2 = 155, b_3 = 115, b_4 = 130.$ $C = \begin{pmatrix} 2 & 10 & 8 & 12 \\ 15 & 6 & 4 & 8 \\ 10 & 6 & 17 & 7 \end{pmatrix}.$

19. $a_1 = 200, a_2 = 100, a_3 = 200;$ $b_1 = 180, b_2 = 75, b_3 = 130, b_4 = 115.$ $C = \begin{pmatrix} 2 & 12 & 6 & 13 \\ 15 & 5 & 4 & 9 \\ 11 & 4 & 17 & 10 \end{pmatrix}.$

20. $a_1 = 210, a_2 = 140, a_3 = 150;$ $b_1 = 125, b_2 = 115, b_3 = 135, b_4 = 125.$ $C = \begin{pmatrix} 4 & 13 & 9 & 12 \\ 16 & 3 & 4 & 8 \\ 11 & 7 & 18 & 10 \end{pmatrix}.$

Завдання 4

Знайти розв'язок матричної гри, яка задана платіжною матрицею Π.

1. $\Pi = \begin{pmatrix} 2 & 7 & 1 & 4 & 3 \\ 5 & 3 & 9 & 8 & 5 \end{pmatrix}.$

2. $\Pi = \begin{pmatrix} 3 & 6 & 5 & 4 & 1 \\ 5 & 2 & 6 & 3 & 7 \end{pmatrix}.$

3. $\Pi = \begin{pmatrix} 5 & 9 & 2 & 4 & 1 \\ 3 & 4 & 5 & 5 & 7 \end{pmatrix}.$

4. $\Pi = \begin{pmatrix} 7 & 4 & 2 & 5 & 6 \\ 3 & 6 & 8 & 2 & 2 \end{pmatrix}.$

5. $\Pi = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 & 3 & 5 \\ 5 & 1 & 5 & 7 & 3 \end{pmatrix}.$

6. $\Pi = \begin{pmatrix} 6 & 5 & 4 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 3 & 7 & 5 \end{pmatrix}.$

7. $\Pi = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 & 7 & 8 \\ 8 & 5 & 1 & 4 & 2 \end{pmatrix}.$

8. $\Pi = \begin{pmatrix} 6 & 4 & 3 & 8 & 1 \\ 1 & 2 & 5 & 2 & 7 \end{pmatrix}.$

9. $\Pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 5 & 6 \\ 6 & 8 & 5 & 1 & 4 \end{pmatrix}.$

10. $\Pi = \begin{pmatrix} 5 & 2 & 9 & 4 & 2 \\ 3 & 5 & 2 & 5 & 7 \end{pmatrix}.$

11. $\Pi = \begin{pmatrix} 8 & 5 & 1 & 6 & 1 \\ 4 & 6 & 10 & 3 & 7 \end{pmatrix}.$

12. $\Pi = \begin{pmatrix} 1 & 6 & 2 & 3 & 7 \\ 6 & 3 & 8 & 7 & 1 \end{pmatrix}.$

13. $\Pi = \begin{pmatrix} 5 & 2 & 3 & 4 & 4 \\ 1 & 3 & 4 & 2 & 6 \end{pmatrix}.$ 14. $\Pi = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 6 & 7 & 5 \\ 2 & 7 & 4 & 3 & 2 \end{pmatrix}.$

15. $\Pi = \begin{pmatrix} 7 & 4 & 5 & 1 & 6 \\ 5 & 6 & 3 & 7 & 4 \end{pmatrix}.$ 16. $\Pi = \begin{pmatrix} 1 & 6 & 5 & 3 & 4 \\ 7 & 3 & 5 & 5 & 1 \end{pmatrix}.$

17. $\Pi = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 8 & 7 & 1 \\ 5 & 9 & 4 & 1 & 6 \end{pmatrix}.$ 18. $\Pi = \begin{pmatrix} 6 & 4 & 6 & 2 & 5 \\ 2 & 7 & 5 & 9 & 4 \end{pmatrix}.$

19. $\Pi = \begin{pmatrix} 7 & 4 & 5 & 6 & 5 \\ 5 & 8 & 6 & 3 & 7 \end{pmatrix}.$ 20. $\Pi = \begin{pmatrix} 8 & 5 & 6 & 6 & 4 \\ 2 & 6 & 8 & 5 & 7 \end{pmatrix}.$

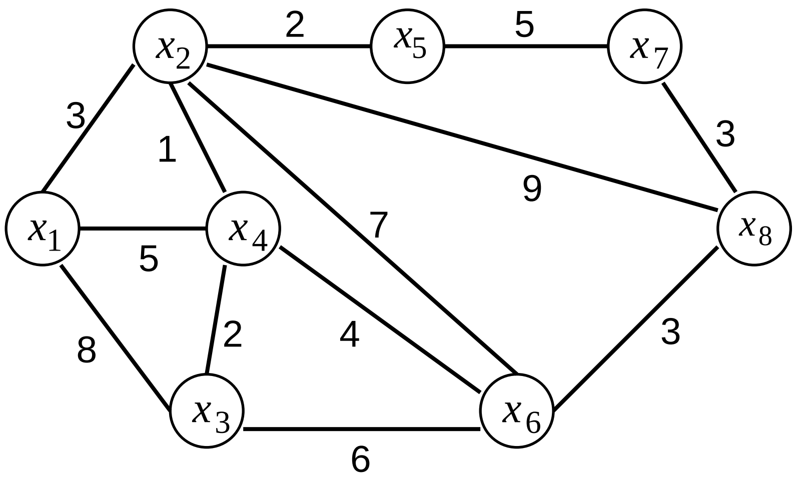
Завдання 5

Задано неорієнтований n-вершинний граф. Знайти:

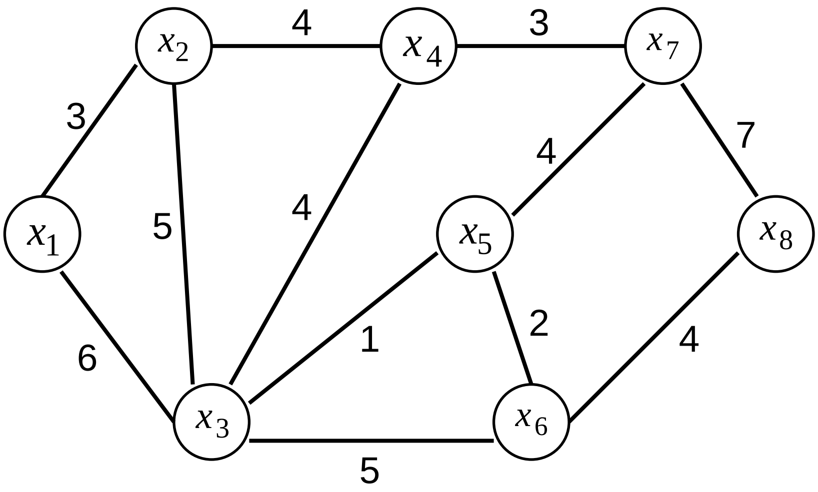
1) найкоротший ланцюг $L^*(1,n)$, що з'єднує вершини x_1, x_n;

2) побудувати економічне дерево на графі.

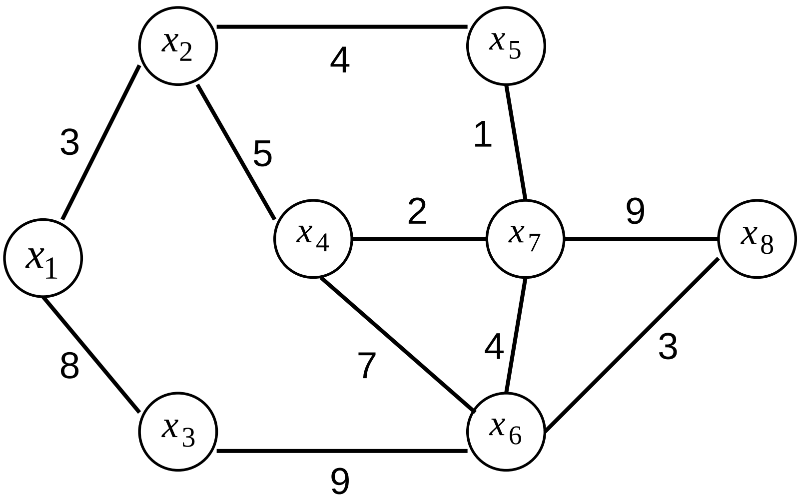
1.



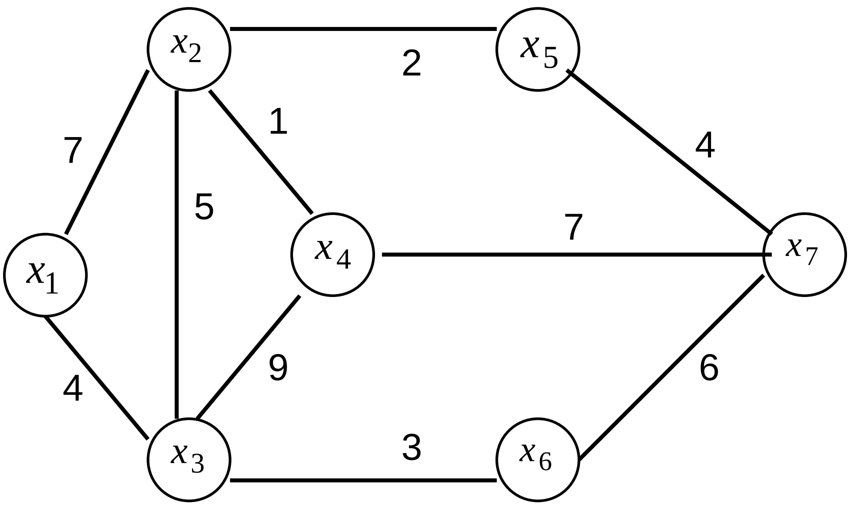
2.


x_1
x_2
x_3
x_4
x_5
x_6
x_7
x_8
4
3
3
7
4
4
5
1
2
4
6
5

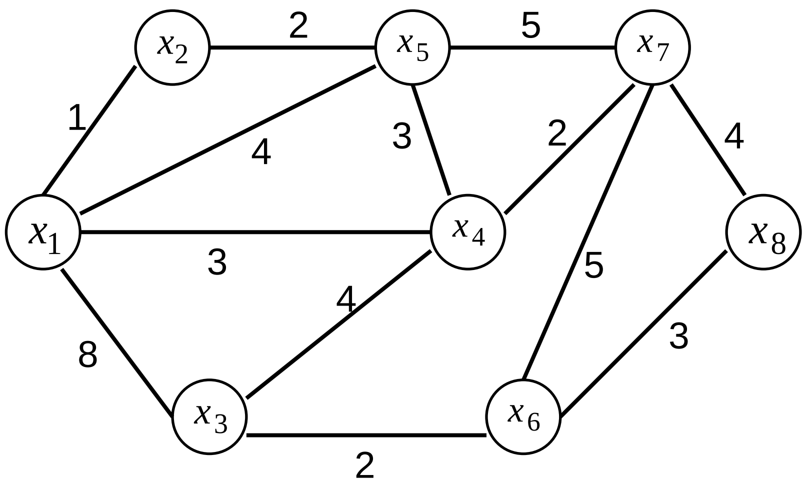
3.


x_1
x_2
x_3
x_4
x_5
x_6
x_7
x_8
4
3
5
1
2
9
7
4
3
8
9

4.

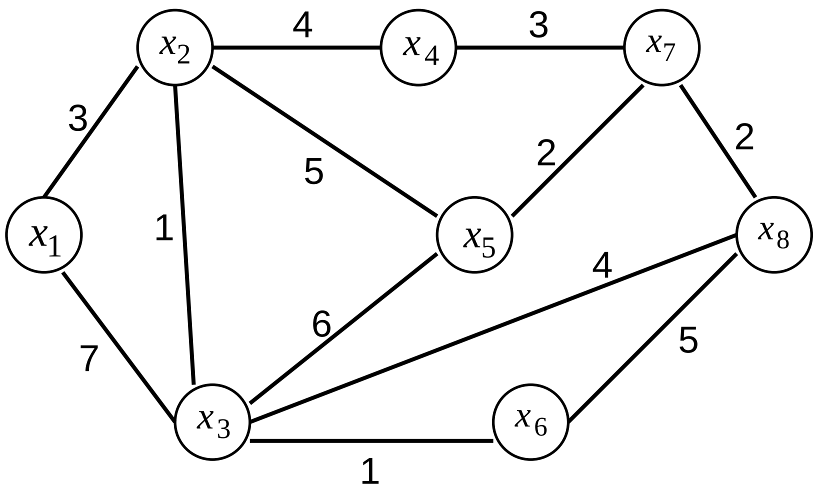

x_1
x_2
x_3
x_4
x_5
x_6
x_7
2
1
7
5
4
7
9
6
4
3

5.



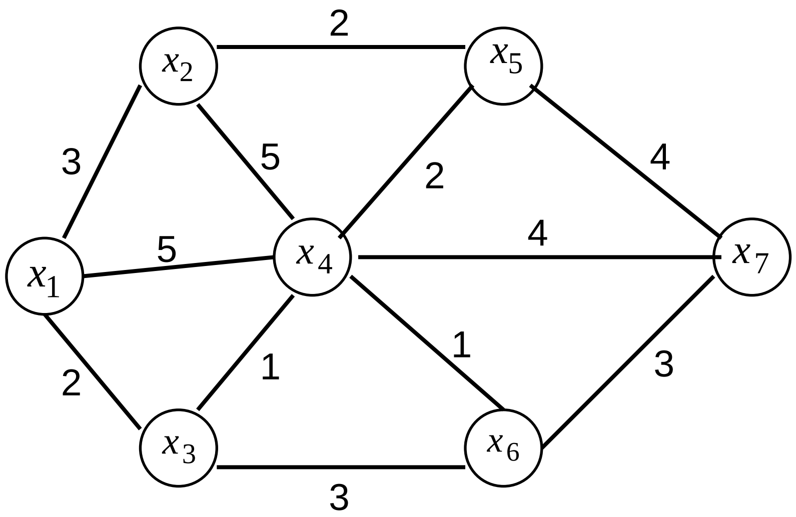
x_1
x_2
x_3
x_4
x_5
x_6
x_7
x_8
2
5
1
4
3
2
4
3
5
4
3
8
2

6.



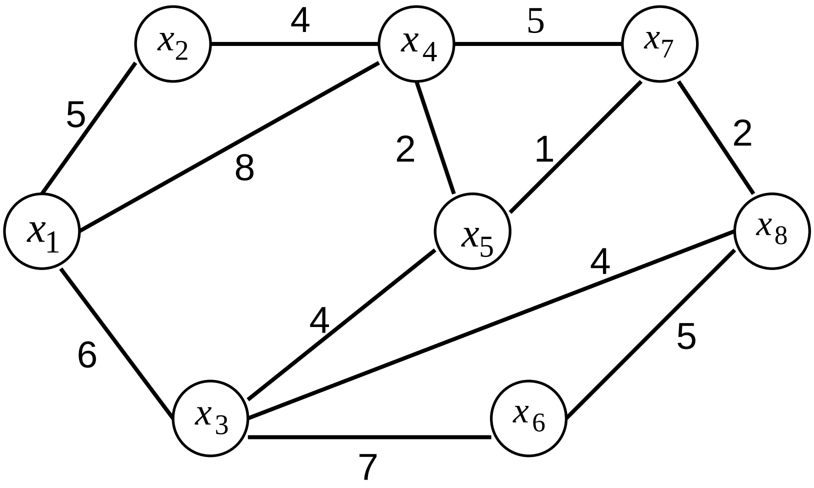
x_1
x_2
x_3
x_4
x_5
x_6
x_7
x_8
4
3
3
2
5
2
1
4
6
5
7
1

7.

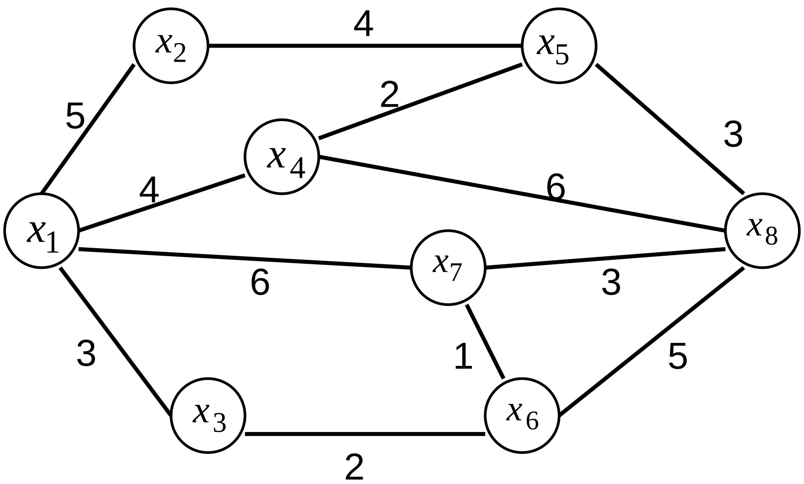


x_1
x_2
x_3
x_4
x_5
x_6
x_7
2
3
5
4
2
5
4
1
1
2
3
3

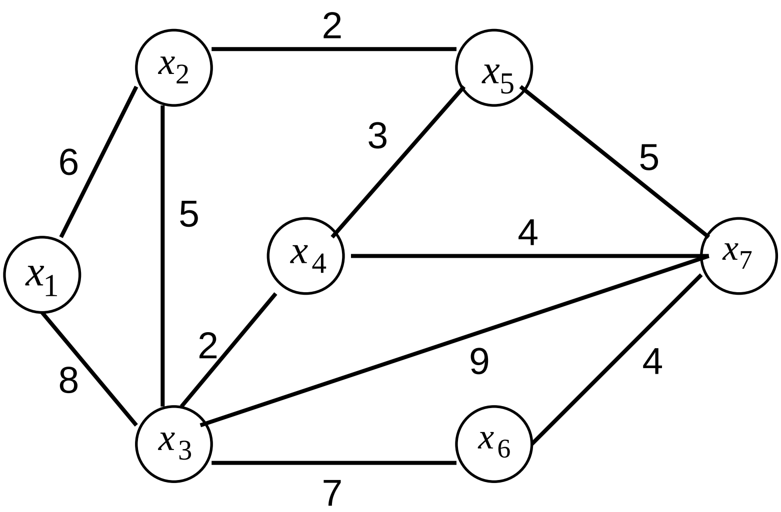
8.


x2
x4
x7
x1
x5
x8
x3
x6
4
5
5
8
2
1
2
4
4
6
5
7

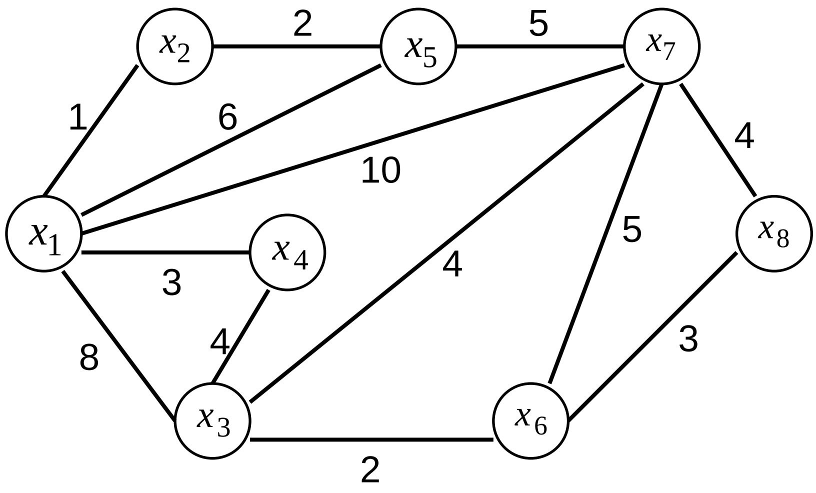
9.


x2
x5
x4
x1
x7
x8
x3
x6
4
5
2
3
4
6
6
3
1
3
5
2

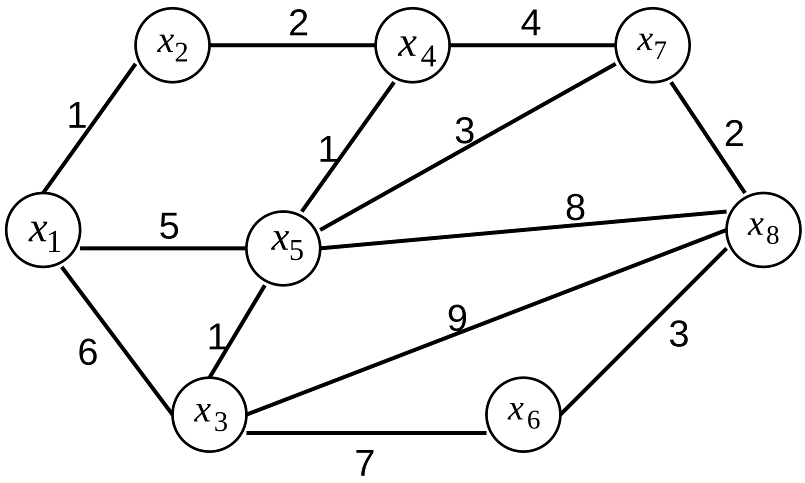
10.


x2
x5
x1
x4
x7
x3
x6
2
6
3
5
5
4
2
9
8
4
7

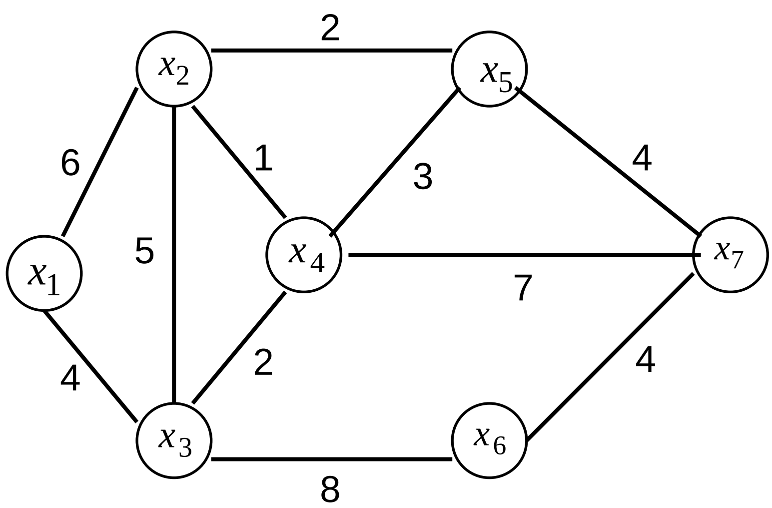
11.


x_1
x_2
x_3
x_4
x_5
x_6
x_7
x_8
1
2
5
6
10
4
4
5
3
4
8
3
2

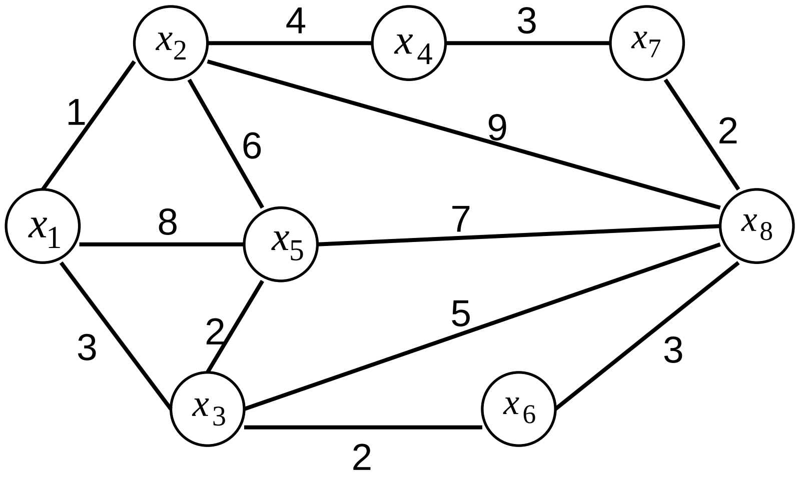
12.


x_1
x_2
x_3
x_4
x_5
x_6
x_7
x_8
2
4
1
1
3
2
5
8
6
1
9
3
7

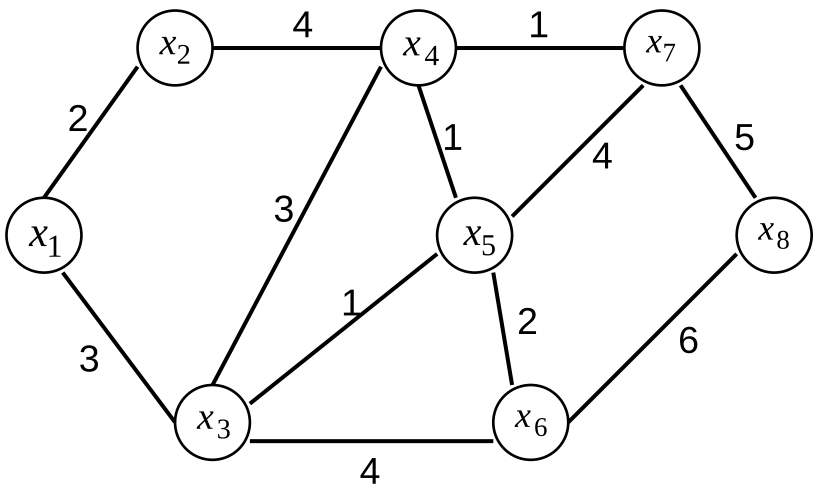
13.


x_1
x_2
x_3
x_4
x_5
x_6
x_7
2
6
1
3
4
5
7
2
4
4
8

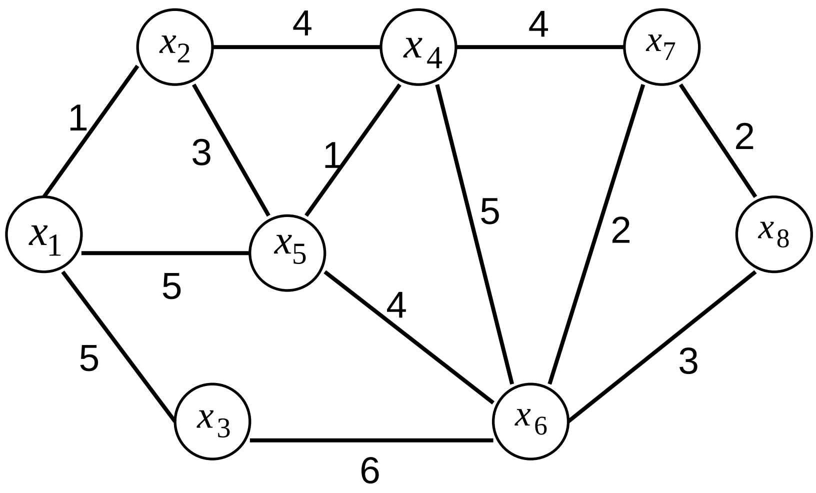
14.


x_2
4
x_4
3
x_7
1
6
9
2
x_1
8
x_5
7
x_8
2
5
3
3
x_3
x_6
2

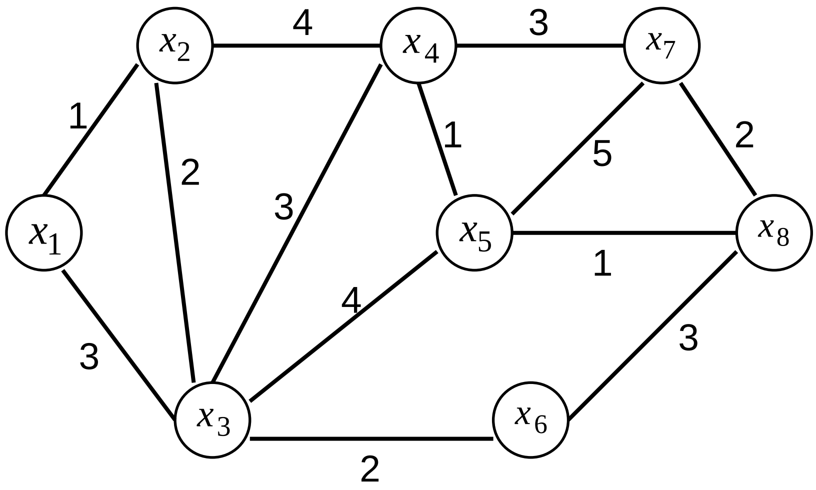
15.


x_2
4
x_4
1
x_7
2
1
4
5
3
x_1
x_5
x_8
1
2
6
3
x_3
x_6
4

16.

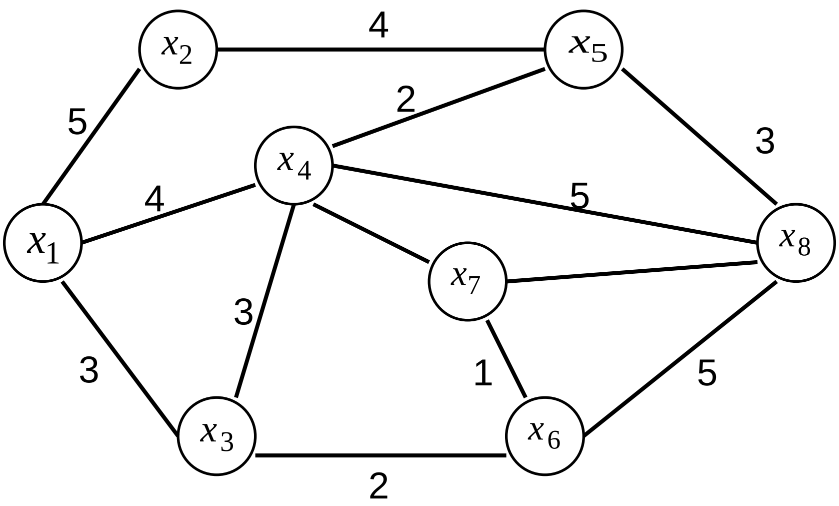

x_2
4
x_4
4
x_7
1
3
1
2
5
2
x_1
x_5
x_8
5
4
5
3
x_3
x_6
6

17.



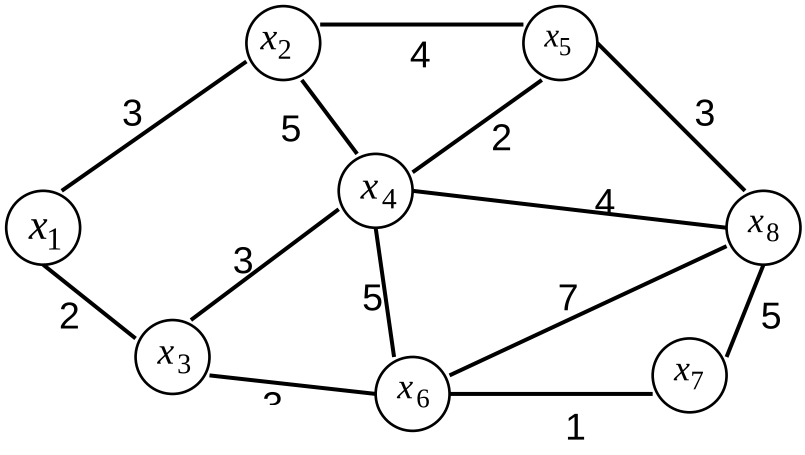
x_1
x_2
x_3
x_4
x_5
x_6
x_7
x_8
1
4
3
2
3
1
5
2
3
4
1
3
2

18.



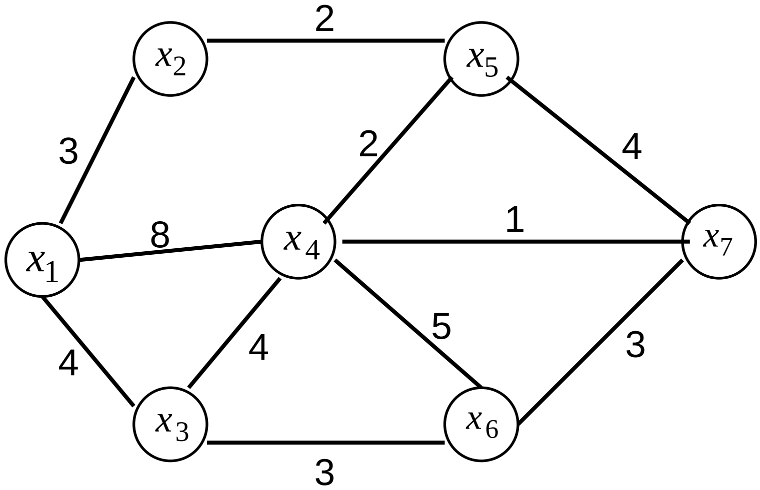
x_1
x_2
x_3
x_4
x_5
x_6
x_7
x_8
4
5
2
3
4
5
3
3
1
5
2

19.



x_1
x_2
x_3
x_4
x_5
x_6
x_7
x_8
4
3
5
2
3
4
3
5
7
2
5
1

20.



Завдання 6

Періодичний з періодом $T = 2l$ прямокутний імпульс $f(x)$ заданий на півперіоді $(0;l)$ формулою

$$f_0(x)=\begin{cases} h, & x\in(\alpha,\beta); \\ 0, & x\notin(\alpha,\beta). \end{cases}$$

Розкласти $f(x)$ у ряд Фур'є як парну функцію для парних номерів варіантів, і як непарну – для непарних номерів. Записати тригонометричні многочлени $S_1(x), S_2(x), S_3(x)$, що наближують $f(x)$.

Варіант №	l	α	β	h
1	2	3	4	5
1	4	3	4	-1
2	4	2	5	-5
3	8	1	5	4
4	8	3	7	1
5	4	1	3	-2
6	6	2	3	5

1	2	3	4	5
7	6	3	4	3
8	4	1	4	-2
9	6	2	5	3
10	4	2	4	1
11	6	3	4	-1
12	4	1	3	-3
13	4	2	6	-1
14	6	4	6	-3
15	8	1	4	2
16	10	5	9	-5
17	8	2	7	6
18	10	1	6	2
19	8	4	7	-4
20	10	2	8	5

Контрольні запитання для самодіагностики

1. Коли необхідно застосовувати наближені методи розв'язання рівнянь?
2. Які основні етапи наближеного знаходження кореня рівняння?
3. Які методи відокремлення коренів ви знаєте?
4. Які методи чисельного роз'язання рівнянь вам відомі?
5. Який критерій закінчення ітерацій при застосуванні методу бісекції? Методу Ньютона?
6. Як залежить кількість ітерацій від припустимої погрішності знаходження кореня?
7. Який з методів має більш високу збіжність: бісекції чи Ньютона?
8. Сформулюйте загальну постановку задачі лінійного програмування.

9. Що таке канонічна форма задачі математичного програмування?

10. Які методи розв'язання задач лінійного програмування вам відомі? Чи є обмеження в їх застосуванні?

11. Який план задачі лінійного програмування називається опорним, а який оптимальним?

12. Сформулюйте математичну модель транспортної задачі.

13. Яка транспортна задача називається збалансованою?

14. Які вам відомі методи побудови вихідного плану?

15. Який план називається виродженим (невиродженим)?

16. Сформулюйте крітерій оптимальності методу потенціалів.

17. У чому полягає метод перерозподілу транспортних перевезень?

18. Як розв'язується транспортна задача, коли умова балансу невиконана?

19. Що моделюють матричні ігри? Яка гра називається парною? Грою з нульовою сумою?

20. Як задається матрична гра? Чому дорівнюють елементи платіжної матриці?

21. З чого складається розв'язок матричної гри?

22. Коли існує розв'язок у чистих стратегіях?

23. Як знайти розв'язок у мішаних стратегіях для гри 2×2?

24. Як звести гру розмірності $2\times n$ або $n\times 2$ до гри 2×2?

25. Що називається неорієнтованим графом? Поняття циклу, маршруту, ланцюга на графі. Який граф називається деревом?

26. Які оптимізаційні задачі на неорієнтованих графах вам відомі?

27. У чому полягає алгоритм задачі знаходження економічного дерева?

28. Яка кількість ребер покривного дерева?

29. Який алгоритм відшукання найкоротшого ланцюга між двома заданими вершинами? Чи може бути кілька розв'язків цієї задачі?

30. Означення ряду Фур'є функції.

31. В якому сенсі ряд Фур'є збігається до функції?

32. Які властивості рядів Фур'є ви знаєте?

33. Що моделюють за допомогою рядів Фур'є?

Рекомендована література

Бахвалов Н. С. Численные методы / Н. С. Бахвалов, Н. П. Жидков, Г. М. Кобельков. – М. : Наука, 1987. – 426 с.

Вправи з курсу "Математика для економістів" для студентів усіх спец. усіх форм навчання. Ч. 4 / укл. Я. П. Бузько, Т. В. Денисова, Т. М. Травкіна. – Х. : Вид. ХДЕУ, 2003. – 82 с.

Данко П. Е. Высшая математика в упражнениях и задачах. Ч. 2 / П. Е. Данко, А. Г. Попов, Т. Я. Кожевникова. – М. : Оникс, 2003. – 416 с.

Дубовик В. П. Вища математика / В. П. Дубовик, І. І. Юрик. – К. : Вид. А.С.К., 2004. – 647 с.

Егоршин А. А. Математическое программирование / А. А. Егоршин, Л. М. Малярец. – Х. : ИД "ИНЖЭК", 2003. – 280 с.

Калихман И. Л. Сборник задач по математическому программированию / И. Л. Калихман. – М. : Высшая школа, 1975. – 270 с.

Макарова Г. В. Прикладна математика : конспект лекцій. Ч. 1 / Г. В. Макарова, О. В. Гунько, М. В. Кайдаш. – Х. : Вид. ХНЕУ, 2008. – 71 с.

Оре О. Графы и их применение / О. Оре. – М. : Мир, 1965. – 476 с.

Робоча програма навчальної дисципліни "Прикладна математика" для студентів напряму підготовки "Видавничо-поліграфічна справа" всіх форм навчання / укл. Г. В. Макарова. – Х. : Вид. ХНЕУ, 2011. – 44 с.

Сенчуков В. Ф. Дискретний аналіз. Тексти лекцій. Ч. 2 / В. Ф. Сенчуков, Т. В. Денисова. – Х. : Вид. ХДЕУ, 2000. – 104 с.

Зміст

НАВЧАЛЬНЕ ВИДАННЯ

Методичні рекомендації
та завдання до виконання контрольних робіт
з навчальної дисципліни
"ПРИКЛАДНА МАТЕМАТИКА"

для студентів напряму підготовки
6.051501 "Комп'ютерні технології та системи
видавничо-поліграфічних виробництв"
заочної форми навчання

Укладачі: **Рибалко** Антоніна Павлівна
Широкорад Ліна Данилівна

Відповідальний за випуск **Малярець Л. М.**

Редактор **Бутенко В. О.**

Коректор **Мартовицька-Максимова В. А.**

План 2014 р. Поз. № 39.
Підп. до друку Формат 60 х 90 1/16. Папір MultiCopy. Друк Riso.
Ум.-друк. арк. 4,75. Обл.-вид. арк. 5,94. Тираж прим. Зам. №

Видавець і виготівник – видавництво ХНЕУ ім. С. Кузнеця, 61166, м. Харків, пр. Леніна, 9а

Свідоцтво про внесення до Державного реєстру суб'єктів видавничої справи
Дк № 481 від 13.06.2001 р.