МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ

ХАРКІВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ ЕКОНОМІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ

Методичні рекомендації до самостійної роботи з навчальної дисципліни "ВИЩА ТА ПРИКЛАДНА МАТЕМАТИКА"

для студентів галузі знань
0306 "Менеджмент і адміністрування"
всіх форм навчання

Харків. Вид. ХНЕУ, 2013

Затверджено на засіданні кафедри вищої математики й економіко-математичних методів.

Протокол № 7 від 20.03.2013 р.

Укладач Ковальова К. О.

М54 Методичні рекомендації до самостійної роботи з навчальної дисципліни "Вища та прикладна математика" для студентів галузі знань 0306 "Менеджмент і адміністрування" всіх форм навчання / укл. К. О. Ковальова. – Х. : Вид. ХНЕУ, 2013. – 72 с. (Укр. мов.)

Наведено матеріал змістовного модуля 1 "Лінійна алгебра. Аналітична геометрія. Диференціальне числення" за чотирма темами: "Пряма на площині", "Площина у просторі", "Пряма у просторі", "Лінії другого порядку", кожна з яких складається з теоретичних питань, практичних завдань та завдань для самостійної роботи.

Рекомендовано для студентів галузі знань 0306 "Менеджмент і адміністрування" всіх форм навчання.

Вступ

Аналітична геометрія досить поширена при вирішенні і візуалізації економічних задач. Так, одним з численних прикладів використання теоретичних основ аналітичної геометрії при вирішенні економічних задач є задача про обчислення найбільш економічної відстані для перевезень, при вирішенні якої використовуються основи аналітичної геометрії для побудови функції витрат у вигляді прямої, що проходить через дві точки, а точка беззбитковості визначається як абсциса точки перетину двох прямих – ліній витрачання і виручки. Отже, завдяки вивченню аналітичної геометрії студент зможе застосовувати набуті знання та навички до розв'язання багатьох практичних задач економіки та бізнесу.

Наведений матеріал змістового модуля 1 "Лінійна алгебра. Аналітична геометрія. Диференціальне числення" структурований за чотирма частинами: "Пряма на площині", "Площина у просторі", "Пряма у просторі", "Лінії другого порядку". Кожна частина складається зі: стислого наведення основних теоретичних понять теми, що сприяє вдосконаленню вже існуючих знань за даною темою; прикладів розв'язання типових задач даної галузі, що дозволяє самостійно засвоїти основні методи та засоби вирішення задач за темою; завдань для самостійної роботи та питань для самодіагностики.

Після вивчення зазначених тем студент вмітиме: проводити основні математичні обчислення, самостійно застосовувати отримані знання для розв'язання відповідних задач та ситуаційних вправ; аналізувати, обробляти отримані результати з урахуванням отриманих даних та робити висновки на достатньо високому професійному рівні; самостійно працювати із науково-методичною літературою; визначати ґрунтові поняття аналітичної геометрії; а також використовувати отримані знання для подальшого створення відповідних економіко-математичних моделей та їх розв'язання.

Теми, які ввійшли в роботу ("Пряма на площині", "Площина у просторі", "Пряма у просторі", "Лінії другого порядку"), було обрано згідно з робочою програмою.

Тема "Пряма на площині"

1. Різновиди рівнянь прямої на площині

Рівнянням прямої називається таке рівняння $F(x, y) = 0$ з двома змінними, якому задовольняють координати x і y кожної точки, що лежить на цій лінії, і не задовольняють координати ніякої точки, що не лежить на ній.

Висловлене визначення дає основу *методам аналітичної геометрії*; суть їх полягає в тому, що дані прямі досліджуються за допомогою аналізу їх рівнянь. У табл. 1 наведені різні види рівнянь прямих і розглянуті їх основні особливості.

Таблиця 1

Види рівнянь прямих

№	Назва	Формула запису	Опис складових
1	2	3	4
1	Канонічне рівняння прямої	$\frac{x-x_0}{l} = \frac{y-y_0}{m}$	(x_0, y_0) – точка, через яку проходить пряма; l, m – координати напрямного вектора прямої
2	Параметричні рівняння прямої	$\begin{cases} x = x_0 + \lambda l \\ y = y_0 + \lambda m \end{cases}$	(x_0, y_0) – точка, що належить прямій; $s = \{l; m\}$ – напрямний вектор прямої
3	Рівняння прямої, що проходить через дві задані точки	$\frac{x-x_1}{x_2-x_1} = \frac{y-y_1}{y_2-y_1}$	$(x_1, y_1), (x_2, y_2)$ – точки, через які проходить пряма
4	Рівняння прямої з кутовим коефіцієнтом	$y = kx + b$	$k = tg\alpha$ – кутовий коефіцієнт; b – ордината точки перетину прямої з віссю Oy

Закінчення табл. 1

1	2	3	4
5	Рівняння прямої у відрізках на осях	$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$	a,b – величини відрізків, які пряма відтинає на Ox, Oy
6	Рівняння прямої, що проходить через дану точку в заданому напрямі	$y-y_0=k(x-x_0)$	(x_0, y_0) – точка, що належить прямій; $k=tg\alpha$ – кутовий коефіцієнт, де α – кут між прямою та віссю Ох
7	Рівняння прямої із заданим нормальним вектором	$A(x-x_0)+B(y-y_0)=0$	A,B – координати нормального вектора; (x_0, y_0) – точка, що належить прямій
8	Загальне рівняння прямої	$Ax+By+C=0$	A,B – координати нормального вектора

2. Визначення кута між прямими

Кутом між двома прямими називається менший з кутів, які вони утворюють. Розглянемо прямі, задані різними видами рівнянь.

Прямі задані рівняннями з кутовими коефіцієнтами $s_1: y=k_1x+b_1; s_2: y=k_2x+b_2.$

Кут між прямими (рис. 1) рівний $\varphi=\alpha_2-\alpha_1$ і, отже, $tg\varphi=tg(\alpha_2-\alpha_1)=\frac{tg\alpha_2-tg\alpha_1}{1+tg\alpha_1 tg\alpha_2}=\frac{k_2-k_1}{1+k_1k_2}$.

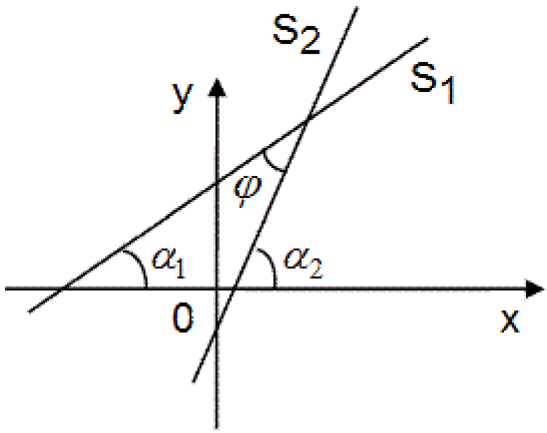

Рис. 1. **До визначення кута між прямими, заданими рівнянням з кутовим коефіцієнтом**

Щоб величина кута не залежала від нумерації прямих, вираження для тангенса треба брати по модулю.

$$tg\varphi = \left| \frac{k_2 - k_1}{1 + k_1 k_2} \right|. \qquad (1)$$

Прямі задані канонічними рівняннями $s_1 : \dfrac{x - x_1}{l_1} = \dfrac{y - y_1}{m_1}$; $s_2 : \dfrac{x - x_2}{l_2} = \dfrac{y - y_2}{m_2}$.

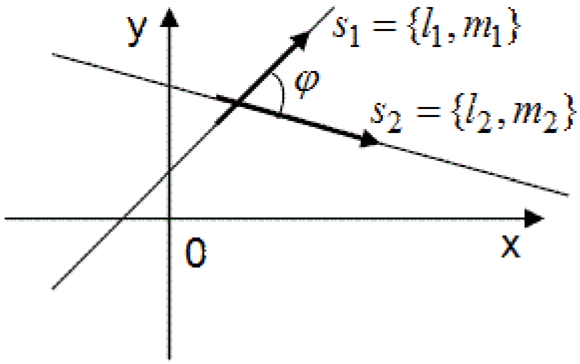

Рис. 2. **Кут між прямими, заданими канонічними рівняннями**

У цьому випадку кут φ між прямими дорівнює куту між напрямними векторами $s_1 = \{l_1, m_1\}, s_2 = \{l_2, m_2\}$ або суміжному з ним куту (рис. 2). Косинус кута φ дорівнює модулю косинуса кута між векторами і обчислюється за формулою (2).

$$\cos\varphi = \left|\frac{\overrightarrow{s_1}\cdot\overrightarrow{s_2}}{\left|\overrightarrow{s_1}\right|\cdot\left|\overrightarrow{s_2}\right|}\right| = \frac{\left|l_1 l_2 + m_1 m_2\right|}{\sqrt{l_1^2 + m_1^2}\cdot\sqrt{l_2^2 + m_2^2}}. \qquad (2)$$

Прямі задані загальними рівняннями $s_1 : A_1 x + B_1 y + C_1 = 0$; $s_2 : A_2 x + B_2 y + C_2 = 0$. S_2

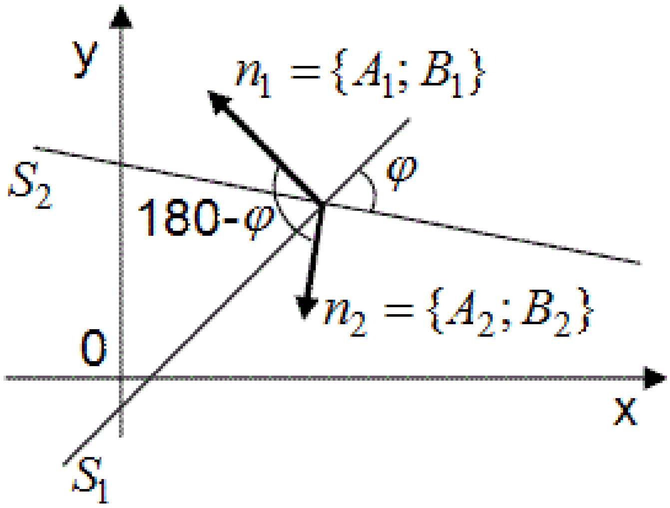

Рис. 3. **До визначення кута між прямими, заданими загальними рівняннями**

У цьому випадку кут φ між прямими дорівнює куту між векторами нормалей $\overrightarrow{n_1} = (A_1; B_1)$ і $\overrightarrow{n_2} = (A_2; B_2)$ або суміжному з ним куту (рис. 3).

Косинус кута φ дорівнює модулю косинуса кута між нормалями і обчислюється за формулою:

$$\cos\varphi = \left|\frac{\overrightarrow{n_1}\cdot\overrightarrow{n_2}}{\left|\overrightarrow{n_1}\right|\cdot\left|\overrightarrow{n_2}\right|}\right| = \frac{\left|A_1 A_2 + B_1 B_2\right|}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2}\cdot\sqrt{A_2^2 + B_2^2}}. \qquad (3)$$

Зауваження. Для визначення кута між прямими зручніше переходити до рівняння з кутовим коефіцієнтом.

3. Умови паралельності та перпендикулярності прямих

Прямі задані рівняннями з кутовими коефіцієнтами: $s_1 : y = k_1 x + b_1$; $s_2 : y = k_2 x + b_2$.

Ознака паралельності.

Прямі $s_1 : y = k_1x + b_1; s_2 : y = k_2x + b_2$ паралельні тоді, і тільки тоді, коли рівні їх кутові коефіцієнти:

$$k_1 = k_2. \qquad (4)$$

Прямі перпендикулярні, якщо кут між ними дорівнює 90º, тангенс 90º невизначений, а це згідно з формулою (5) буде, якщо $k_1k_2 = -1$.

Ознака перпендикулярності.

Прямі $s_1 : y = k_1x + b_1;\ s_2 : y = k_2x + b_2$ перпендикулярні тоді, і тільки тоді, коли виконується рівність:

$$k_1k_2 = -1. \qquad (5)$$

Прямі задані канонічними рівняннями:

$$s_1 : \frac{x - x_1}{l_1} = \frac{y - y_1}{m_1};\ s_2 : \frac{x - x_2}{l_2} = \frac{y - y_2}{m_2}.$$

Ознака паралельності.

Прямі $s_1 : \frac{x - x_1}{l_1} = \frac{y - y_1}{m_1}$ і $s_2 : \frac{x - x_2}{l_2} = \frac{y - y_2}{m_2}$ паралельні тоді, і тільки тоді, коли колінеарні напрямні вектори $s_1 = \{l_1, m_1\}, s_2 = \{l_2, m_2\}$:

$$\frac{l_1}{l_2} = \frac{m_1}{m_2}. \qquad (6)$$

Ознака перпендикулярності.

Прямі $s_1 : \frac{x - x_1}{l_1} = \frac{y - y_1}{m_1}$ і $s_2 : \frac{x - x_2}{l_2} = \frac{y - y_2}{m_2}$ перпендикулярні тоді, і тільки тоді, коли перпендикулярні напрямні вектори $s_1 = \{l_1, m_1\}, s_2 = \{l_2, m_2\}$:

$$\overrightarrow{s_1} \cdot \overrightarrow{s_2} = 0 \Leftrightarrow l_1l_2 + m_1m_2 = 0. \qquad (7)$$

Прямі задані загальними рівняннями $s_1 : A_1x + B_1y + C_1 = 0;$ $s_2 : A_2x + B_2y + C_2 = 0.$

Ознака паралельності.

Прямі $s_1 : A_1x + B_1y + C_1 = 0;\ s_2 : A_2x + B_2y + C_2 = 0$ паралельні тоді, і тільки тоді, коли колінеарні їх нормалі $\overrightarrow{n_1} = (A_1; B_1)$ і $\overrightarrow{n_2} = (A_2; B_2)$:

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} \neq \frac{C_1}{C_2}. \qquad (8)$$

Ознака перпендикулярності.

Прямі $s_1 : A_1x + B_1y + C_1 = 0;\ s_2 : A_2x + B_2y + C_2 = 0$ перпендикулярні тоді, і тільки тоді, коли перпендикулярні їх нормалі $\overrightarrow{n_1} = (A_1; B_1)$ і $\overrightarrow{n_2} = (A_2; B_2)$, тобто $\overrightarrow{n_1} \cdot \overrightarrow{n_2} = 0$:

$$A_1A_2 + B_1B_2 = 0. \tag{9}$$

4. Відстань від точки до прямої

Відстанню d від точки до прямої називається довжина перпендикуляра, опущеного з цієї точки на пряму.

Нехай дана пряма, що задана загальним рівнянням $s : Ax + By + C = 0$, і точка $M(x_1; y_1)$. Тоді запишемо формулу, що визначає відстань від точки до прямої:

$$d = \frac{|Ax_1 + By_1 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}. \tag{10}$$

5. Взаємне розташування двох прямих на площині

Розглянемо систему двох лінійних рівнянь з двома невідомими:

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1 = 0 \\ A_2x + B_2y + C_2 = 0 \end{cases}.$$

Кожне рівняння системи є загальним рівнянням прямої на площині. *Взаємне розташування двох прямих на площині* визначається рішенням системи. Існує три різні випадки.

1. *Прямі співпадають*. У цьому випадку система має нескінченно багато рішень. Рівняння системи задають одну пряму. Одне рівняння виходить з іншого множенням на константу, тобто $\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2}$. Щоб рішити систему, змінну x залишаємо в лівій частині одного з рівнянь, а змінну y переносимо праворуч. Тоді змінна x називатиметься *базисною*, а y – *вільною*. Базисна змінна виражається через вільну, і отримане вираження описуватиме всю безліч рішень.

2. *Прямі паралельні*. Згідно з формулою (8), прямі паралельні, якщо $\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} \neq \frac{C_1}{C_2}$. У цьому випадку система рішень не має.

3. *Прямі перетинаються*. У цьому випадку система має єдине рішення – точку перетину прямих.

З пункту 3 витікає, що *точка перетину двох прямих, заданих загальними рівняннями* $s_1 : A_1x + B_1y + C_1 = 0;$ $s_2 : A_2x + B_2y + C_2 = 0$, є загальна точка цих прямих. Координати цієї точки повинні одночасно задовольняти рівнянням обох прямих, тобто системі

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1 = 0 \\ A_2x + B_2y + C_2 = 0 \end{cases}. \qquad (11)$$

Вирішуючи цю систему, знаходимо координати шуканої точки.

Розв’язання типових задач по темі

Задача 1. Скласти рівняння прямої, що проходить через точки $A(-5; 2)$ і $B(4; -1)$.

Розв’язання: згідно з формулою рівняння прямої, що проходить через дві задані точки (див. табл. 1):

$$\frac{x+5}{4+5} = \frac{y-2}{-1-2}, \text{ або } x + 3y - 1 = 0.$$

Задача 2. Перевірити, чи лежать на однієї прямій точки $A(-2; -7), B(1; -1), C(4; 5)$.

Розв’язання: складемо рівняння прямої, яка проходить через точки A і B:

$$\frac{x+2}{1+2} = \frac{y+7}{-1+7}, \text{ або } 2x - y - 3 = 0.$$

Точка C лежить на цій прямій, якщо її координати задовольняють одержаному рівнянню. Перевіримо це:

$$2 \cdot 4 - 1 \cdot 5 - 3 = 0, \text{ тобто } 0 = 0.$$

Отже, точки A, B і C лежать на одній прямій.

Задача 3. Перетворити загальне рівняння прямої $x + 2y + 8 = 0$ до вигляду а) з кутовим коефіцієнтом; б) у відрізках на осях.

Розв'язання: а) розв'язуючи це рівняння відносно y, одержуємо

$$y = -\frac{1}{2}x - 4.$$

Отримали рівняння прямої з кутовим коефіцієнтом, де $k = -\frac{1}{2}$ – кутовий коефіцієнт; $b = -4$ – ордината точки перетину прямої з віссю Oy;

б) запишемо задане рівняння прямої у вигляді $x + 2y = -8$ і поділимо всі його члени на праву частину (-8). Одержимо рівняння у відрізках:

$$\frac{x}{-8} + \frac{y}{-4} = 1,$$

де $a = -8, b = -4$ – величини відрізків, які пряма відтинає на Ox, Oy.

Задача 4. Скласти рівняння прямої, яка проходить через точку $A(3; -1)$ і утворює кут 30° з віссю Ох.

Розв'язання: кутовий коефіцієнт $k = tg\alpha = tg30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{3}$, а шукане рівняння згідно з формулою рівняння прямої, що проходить через дану точку в заданому напрямі (табл. 1) має вигляд:

$$y + 1 = \frac{\sqrt{3}}{3}(x - 3) \text{ або } y = \frac{x}{\sqrt{3}} - \sqrt{3} - 1.$$

Задача 5. Скласти рівняння прямої, яка відтинає на осі Oy відрізок $b = 4$ і утворює кут $\alpha = 135^\circ$ з віссю абсцис.

Розв'язання: знайдемо $k = tg135^\circ = -tg45^\circ = -1$. Тоді шукане рівняння прямої за формулою прямої із кутовим коефіцієнтом має вигляд:

$$y = -x + 4.$$

Задача 6. Через точку $N(-3; 2)$ провести пряму, яка відтинає на осях координат рівні за величиною відрізки.

Розв'язання: Згідно з умовою задачі $a = b$. Тоді рівняння шуканої прямої має вигляд:

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{a} = 1, \text{ або } x + y = a.$$

Щоб знайти параметр a, підставимо координати точки $N(-3;2)$, яка за умовою належить прямій, у рівняння $x+y=a$, звідки дістаємо $a=-3+2=-1$. Шукане рівняння прямої має вигляд:

$$x+y=-1 \text{ або } x+y+1=0.$$

Задача 7. Дана пряма $y=2x-5$ і точка $A(1;2)$. а) написати рівняння прямою, що проходить через точку A паралельно початковій прямій; б) написати рівняння прямою, що проходить через точку A перпендикулярно початковій прямій.

Розв'язання: а) рівняння прямої має вигляд: $y=k_1x+b_1$. З формули (4) виходить рівність кутових коефіцієнтів прямих, тобто $k_1=k=2$ і рівняння шуканої прямої набирає вигляду $y=2x+b_1$. Коефіцієнт b_1 знайдемо з умови, що пряма проходить через точку $A(1;2)$: $2=2\cdot1+b_1; b_1=0$. Отже, рівняння прямої, що проходить через точку A паралельно початковій прямій, має вигляд $y=2x$;

б) рівняння прямої має вигляд: $y=k_2x+b_2$. З формули (5) виходить, що добуток кутових коефіцієнтів прямих дорівнює -1, тобто $2k_2=-1; k_2=-0{,}5$ і рівняння прямої набирає вигляду $y=-0{,}5x+b_2$. Коефіцієнт b_2 знайти з умови, що пряма проходить через точку $A(1;2)$: $2=-0{,}5\cdot1+b_2; b_2=2{,}5$. Отже, рівняння прямої, що проходить через точку A перпендикулярно початковій прямій, має вигляд $y=-0{,}5x+2{,}5$.

Задача 8. Знайти кут між прямою $2x+y+1=0$ і прямою, що проходить через точки $A(0;1)$ і $B(1;4)$.

Розв'язання: для того, щоб знайти кут між двома прямими, необхідно отримати рівняння другої прямої. Шукане рівняння прямої, такої, що проходить через дві задані точки A і B має вигляд: $\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}$. Підставивши в це рівняння координати заданих точок отримаємо:

$$\frac{x-0}{1-0}=\frac{y-1}{4-1} \text{ або } 3x-y+1=0.$$

Оскільки обидві прямі тепер задані рівнянням прямої, що має загальний вигляд, то згідно з формулою (3) косинус кута між ними буде рівний $\cos\varphi = \dfrac{|A_1A_2 + B_1B_2|}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2} \cdot \sqrt{A_2^2 + B_2^2}} = \dfrac{|2\cdot 3 + 1\cdot(-1)|}{\sqrt{4+1}\cdot\sqrt{9+1}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

Отже, сам кут $\varphi = \arccos(\cos\varphi) = 45^\circ$.

Задача 9. Знайти точку перетину прямих $7x - 11y - 3 = 0$, $\dfrac{x}{4} + \dfrac{y}{2} = 1$.

Розв'язання: помітно, що друге рівняння прямої записане у відрізках на осях (див. табл. 1). За допомогою арифметичних перетворень запишемо це рівняння в загальному вигляді: $x + 2y - 4 = 0$. Використовуючи формулу (11) знайдемо точку перетину двох прямих, заданих загальним рівнянням:

$$\begin{cases} 7x - 11y - 3 = 0 \\ x + 2y - 4 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 28 - 25y - 3 = 0 \\ x = 4 - 2y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 1 \\ x = 2 \end{cases}.$$

Таким чином, точкою перетину двох прямих є точка з координатами (2; 1).

Задача 10. Знайти відстань від точки $M(4; -2)$ до прямої $8x - 6y + 5 = 0$.

Розв'язання: за формулою відстані точки до прямої $d = \dfrac{|Ax_1 + By_1 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$ отримаємо:

$$d = \frac{|8\cdot 4 - 6\cdot(-2) + 5|}{\sqrt{8^2 + (-6)^2}} = \frac{49}{10} = 4{,}9.$$

Задача 11. Знайти відстань між паралельними прямими $3x + 4y - 13 = 0$ і $3x + 4y + 22 = 0$.

Розв'язання: на першій прямій візьмемо будь-яку точку, наприклад, $A(3;1)$ і знайдемо відстань від цієї точки до другої прямої. Це й буде шукана відстань між паралельними прямими.

Отже, $d = \dfrac{|3\cdot 3 + 4\cdot 1 + 22|}{\sqrt{3^2 + 4^2}} = \dfrac{35}{5} = 7$.

Задача 12. Дані координати трьох точок $A(2;3), B(-1;5), C(2;-3)$. Знайти: а) площу трикутника ABC; б) рівняння висоти AH, проведеною з вершини A трикутника ABC, і її довжину; в) рівняння медіани BM, проведеної з вершини B трикутника ABC, і її довжину; г) величину кута ABC.

Розв'язання: зробимо схематичний рисунок (рис. 4), де AH – висота; BM – медіана.

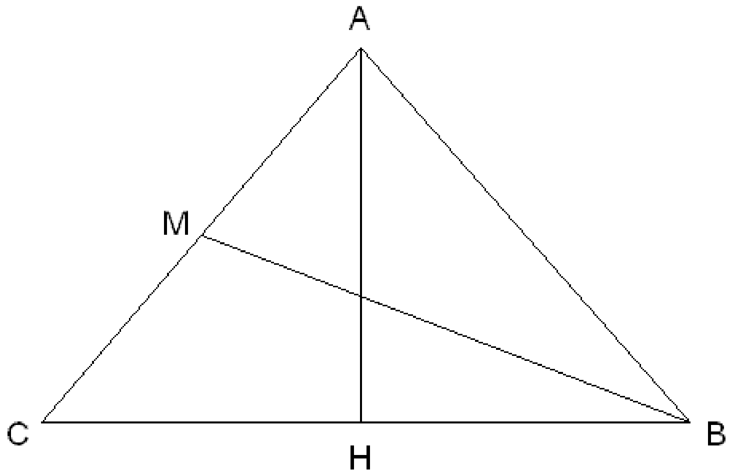

Рис. 4. **Трикутник *ABC***

а) площа трикутника $S_{\Delta} = \frac{1}{2}\left|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}\right|$. Операція векторного добутку визначена для простору. Перейдемо від плоского випадку до простору, приписавши третю координату до координат точок: A(2;3;0), B(–1;5;0), C(2;–3;0). Зробимо необхідні обчислення: $AB = \{-1-2;5-3;0-0\} = \{-3;2;0\}$, $AC = \{2-2;-3-3;0-0\} = \{0;-6;0\}$.

$$AB \times AC = \begin{vmatrix} i & j & k \\ -3 & 2 & 0 \\ 0 & -6 & 0 \end{vmatrix} = 0i + 0j + 18k.$$

$$S_{\Delta} = \frac{1}{2}\sqrt{0^2 + 0^2 + 18^2} = 9;$$

б) знайдемо рівняння прямої BC (див. табл. 1): $\frac{x - x_B}{x_C - x_B} = \frac{y - y_B}{y_C - y_B}$;

$\frac{x+1}{2+1} = \frac{y-5}{-3-5}$; $y = -\frac{8}{3}x + \frac{7}{3}$. Оскільки $BC \perp AH$, тобто

$k_{AH}\cdot k_{BC}=-1\Rightarrow k_{AH}=\frac{3}{8}$. Рівняння прямої AH: $y=\frac{3}{8}x+b_{AH}$. Коефіцієнт b_{AH} знайдемо з умови, що пряма проходить через точку $A(2;3)$: $3=\frac{3}{8}2+b_{AH}\Rightarrow b_{AH}=\frac{9}{4}$.

Рівняння AH: $y=\frac{3}{8}x+\frac{9}{4}$.

Знайдемо довжину висоти AH. $S_{\Delta}=\frac{1}{2}|BC||AH|$, звідки $|AH|=\frac{2S_{\Delta}}{|BC|}=\frac{2\cdot 9}{\sqrt{3^2+8^2}}=\frac{18}{\sqrt{73}}$, де $BC=\{3;-8\}$, а його довжина

$$|BC|=\sqrt{9+64}=\sqrt{73};$$

в) точка M ділить відрізок AC навпіл, використовуючи формулу (4) для координат середини відрізку знайдемо координати M: $x_M=\frac{x_A+x_C}{2}=2$, $y_M=\frac{y_A+y_C}{2}=0$. Маючи координати точок $M(2;0)$ і $B(-1;5)$, запишемо рівняння прямої, що проходить через ці точки: $\frac{x+1}{2+1}=\frac{y-5}{0-5}$ або $y=-\frac{5}{3}x+\frac{10}{3}$.

Довжина медіани рівна $|BM|=\sqrt{3^2+5^2}=\sqrt{34}$;

г) величину кута ABC можна знайти, використовуючи площу трикутника $S_{\Delta}=\frac{1}{2}|AB|\cdot|BC|\cdot\sin(ABC)$. $AB=\{-3;2;0\}$, довжина вектора $|AB|=\sqrt{9+4}=\sqrt{13}$; $BC=\{3;-8\}$, довжина вектора $|BC|=\sqrt{9+64}=\sqrt{73}$.

Тоді $\sin(ABC)=\frac{2\cdot S}{|AB||BC|}=\frac{18}{\sqrt{73\cdot 13}}\approx 0{,}584$.

Варіанти завдань для самостійної роботи

1. Скласти рівняння прямої, що проходить через точки A і B.

№	A	B	№	A	B	№	A	B
1	(2; 3)	(-1; 4)	**11**	(-2; 1)	(-5; 2)	**21**	(5; -3)	(1; 2)
2	(-6; 0)	(2; 2)	**12**	(1; 0)	(-4; 2)	**22**	(-3; 4)	(0; 2)
3	(-1; -1)	(3; -4)	**13**	(-1; -1)	(7; 2)	**23**	(6; -1)	(-2; 3)
4	(2; 7)	(0; -8)	**14**	(1; -5)	(0; -8)	**24**	(1; -3)	(4; 4)
5	(1; -9)	(7; 5)	**15**	(0; 9)	(-7; -5)	**25**	(-5; 1)	(0; -5)
6	(4; 4)	(-1; 2)	**16**	(2; 4)	(-1; -2)	**26**	(2; -1)	(4; 4)
7	(6; -1)	(-3; 2)	**17**	(0; -1)	(4; -5)	**27**	(1; 7)	(-1; -5)
8	(-5; 1)	(0; -2)	**18**	(5; 3)	(1; -2)	**28**	(5; 5)	(0; -2)
9	(3; 3)	(9; 4)	**19**	(-3; 3)	(-1; 4)	**29**	(-1; -2)	(9; 9)
10	(-2; 5)	(-6; -1)	**20**	(0; -4)	(2; 1)	**30**	(3; 4)	(5; 0)

2. Перевірити, чи лежать на однієї прямій точки A, B і C.

№	A	B	C	№	A	B	C
1	(1; 3)	(-4; 2)	(2; 2)	**16**	(2; -1)	(4; 4)	(2; -1)
2	(6; 0)	(3; -1)	(9; 1)	**17**	(1; 7)	(-1; -5)	(3; 3)
3	(5; 2)	(-2; -5)	(-1; -4)	**18**	(5; 4)	(-1; 0)	(-4; 2)
4	(-3; 4)	(-1; -1)	(1; -6)	**19**	(-1; -2)	(9; 9)	(2; 1)
5	(-2; 1)	(-5; 2)	(3; -1)	**20**	(2; 3)	(-1; 4)	(5; 2)
6	(1; 0)	(-4; 2)	(5; 8)	**21**	(-6; 0)	(2; 2)	(-2; 1)
7	(-1; -1)	(7; 2)	(9; 3)	**22**	(-1; -1)	(3; -4)	(3; 3)
8	(1; -5)	(0; -8)	(2; -2)	**23**	(2; 7)	(0; -8)	(4; 22)
9	(0; 9)	(-7; -5)	(-4; 1)	**24**	(1;- 9)	(7; 5)	(0; 11)
10	(2; 4)	(-1; -2)	(-3; -6)	**25**	(4; 4)	(-1; 2)	(-5; 2)
11	(0; -1)	(4; -5)	(-3; 2)	**26**	(6; -1)	(-3; 2)	(3; 0)
12	(5; 3)	(1; -2)	(5; 1)	**27**	(-5; 1)	(0; -2)	(10; -8)
13	(-3; 3)	(-1; 4)	(-2; 4)	**28**	(3; 3)	(9; 4)	(-2; 13)
14	(0; -4)	(2; 1)	(2; 3)	**29**	(-2; 5)	(-6; -1)	(-2; 5)
15	(-2; 1)	(-5; 2)	(1; 0)	**30**	(2; 3)	(-1; 4)	(3; 8)

3. Перетворити загальне рівняння прямої до вигляду а) з кутовим коефіцієнтом; б) у відрізках на осях.

№	Рівняння	№	Рівняння	№	Рівняння
1	$3x-y+5=0$	11	$-x-y+13=0$	21	$4x-2y+13=0$
2	$x-7y-4=0$	12	$2x-y-1=0$	22	$x-5y+3=0$
3	$2x+3y-6=0$	13	$y+3x-4=0$	23	$-x+y+2=0$
4	$-x+y+1=0$	14	$3x+y-9=0$	24	$5x-6y-1=0$
5	$11x-y-3=0$	15	$x+7y-21=0$	25	$x+y-10=0$
6	$x+5y+2=0$	16	$-x-2y+4=0$	26	$x-y+3=0$
7	$-2x+3y+5=0$	17	$5x-2y+15=0$	27	$2x+y-6=0$
8	$x-y-3=0$	18	$x+y+1=0$	28	$-x-2y+5=0$
9	$-4x+5y-7=0$	19	$x-2y+12=0$	29	$y-x-2=0$
10	$y-2x-3=0$	20	$-x-5y+7=0$	30	$x+y+8=0$

4. Скласти рівняння прямої, яка проходить через точку A і утворює кут з віссю Ox.

№	A	Кут	№	A	Кут	№	A	Кут
1	(2; 3)	30°	11	(-2; 1)	45°	21	(5; -3)	45°
2	(-6; 0)	45°	12	(1; 0)	30°	22	(-3; 4)	60°
3	(-1; -1)	60°	13	(-1; -1)	60°	23	(6; -1)	30°
4	(2; 7)	120°	14	(1; -5)	30°	24	(1; -3)	45°
5	(1; -9)	135°	15	(0; 9)	45°	25	(-5; 1)	30°
6	(4; 4)	45°	16	(2; 4)	120°	26	(2; -1)	30°
7	(6; -1)	30°	17	(0; -1)	60°	27	(1; 7)	60°
8	(-5; 1)	30°	18	(5; 3)	135°	28	(5; 5)	120°
9	(3; 3)	60°	19	(-3; 3)	45°	29	(-1; -2)	45°
10	(-2; 5)	45°	20	(0; -4)	30°	30	(3; 4)	135°

5. Скласти рівняння прямої, яка відтинає на осі Oy відрізок $b=4$ і утворює кут α з віссю абсцис.

№	b	Кут α	№	b	Кут α	№	b	Кут α
1	13	30°	**11**	1	45°	**21**	12	45°
2	-6	45°	**12**	9	60°	**22**	-13	30°
3	-1	60°	**13**	-4	30°	**23**	2	60°
4	7	120°	**14**	8	45°	**24**	7	30°
5	-9	135°	**15**	11	30°	**25**	-11	45°
6	14	45°	**16**	2	30°	**26**	22	120°
7	6	30°	**17**	5	60°	**27**	17	60°
8	-5	30°	**18**	3	120°	**28**	5	135°
9	3	60°	**19**	-13	45°	**29**	-12	45°
10	-2	45°	**20**	-4	135°	**30**	9	30°

6. Дана пряма і точка B. Необхідно: а) написати рівняння прямою, що проходить через точку B паралельно початковій прямій; б) написати рівняння прямої, що проходить через точку B перпендикулярно початковій прямій.

№	Пряма	B	№	Пряма	B
1	$4x-2y+13=0$	(2; 2)	**13**	$3x-y+5=0$	(2; -1)
2	$x-5y+3=0$	(9; 1)	**14**	$x-7y-4=0$	(3; 3)
3	$-x+y+2=0$	(-1; -4)	**15**	$2x+3y-6=0$	(-4; 2)
4	$5x-6y-1=0$	(1; -6)	**16**	$-x+y+1=0$	(2; 1)
5	$x+y-10=0$	(3; -1)	**17**	$11x-y-3=0$	(5; 2)
6	$x-y+3=0$	(-1; 4)	**18**	$x+5y+2=0$	(-2; 1)
7	$2x+y-6=0$	(-3; 3)	**19**	$-x-y+13=0$	(3; 3)
8	$-x-2y+5=0$	(2; -2)	**20**	$2x-y-1=0$	(4; 22)
9	$y-x-2=0$	(-4; 1)	**21**	$y+3x-4=0$	(1; -9)
10	$x+y+8=0$	(-3; -6)	**22**	$3x+y-9=0$	(-2; 1)
11	$x+7y-21=0$	(-3; 2)	**23**	$x+7y-21=0$	(3; 0)
12	$-x-2y+4=0$	(-5; 2)	**24**	$-2x+3y+5=0$	(10; -8)

№	Пряма	B	№	Пряма	B
25	$5x-2y+15=0$	(-2; 4)	**28**	$x-y-3=0$	(2; 1)
26	$x+y+1=0$	(2; 3)	**29**	$-4x+5y-7=0$	(-2; 5)
27	$x-2y+12=0$	(1; 0)	**30**	$y-2x-3=0$	(0; -4)

7. Знайти кут між прямою і прямою, що проходить через точки A і B.

№	Пряма	A	B	№	Пряма	A	B
1	$4x-2y+13=0$	(-2; 1)	(2; 2)	**16**	$3x-y+5=0$	(4; 4)	(2; -1)
2	$x-5y+3=0$	(1; 0)	(9; 1)	**17**	$x-7y-4=0$	(6; -1)	(3; 3)
3	$-x+y+2=0$	(-1; -1)	(-1; -4)	**18**	$2x+3y-6=0$	(-5; 1)	(-4; 2)
4	$5x-6y-1=0$	(1; -5)	(1; -6)	**19**	$-x+y+1=0$	(3; 3)	(2; 1)
5	$x+y-10=0$	(0; 9)	(3; -1)	**20**	$11x-y-3=0$	(-2; 5)	(5; 2)
6	$x-y+3=0$	(2; 4)	(-1; 4)	**21**	$x+5y+2=0$	(5; -3)	(-2; 1)
7	$2x+y-6=0$	(0; -1)	(-3; 3)	**22**	$-x-y+13=0$	(-3; 4)	(3; 3)
8	$-x-2y+5=0$	(5; 3)	(2; -2)	**23**	$2x-y-1=0$	(6; -1)	(4; 22)
9	$y-x-2=0$	(-3; 3)	(-4; 1)	**24**	$y+3x-4=0$	(1; -3)	(1; -9)
10	$x+y+8=0$	(0; -4)	(-3; -6)	**25**	$3x+y-9=0$	(-5; 1)	(-2; 1)
11	$x+7y-21=0$	(2; 3)	(-3; 2)	**26**	$x+7y-21=0$	(2; -1)	(3; 0)
12	$-x-2y+4=0$	(-6; 0)	(-5; 2)	**27**	$-2x+3y+5=0$	(1; 7)	(1; -8)
13	$5x-2y+15=0$	(-1; -1)	(-2; 4)	**28**	$x-y-3=0$	(5; 5)	(2; 1)
14	$x+y+1=0$	(2; 7)	(2; 3)	**29**	$-4x+5y-7=0$	(-1; 2)	(-2; 5)
15	$x-2y+12=0$	(1; -9)	(1; 0)	**30**	$y-2x-3=0$	(3; 4)	(0; -4)

8. Знайти точку перетину прямих.

№	Рівняння прямих	№	Рівняння прямих	№	Рівняння прямих
1	$3x-y+5=0$ $\frac{x}{5}+\frac{y}{2}=1$	**3**	$-x-y+13=0$ $y=5x+7$	**5**	$4x-2y+13=0$ $y-2x-3=0$
2	$x-7y-4=0$ $\frac{x}{4}+\frac{y}{2}=1$	**4**	$2x-y-1=0$ $x+y+1=0$	**6**	$x-5y+3=0$ $\frac{x}{5}+\frac{y}{2}=1$

№	Рівняння прямих	№	Рівняння прямих	№	Рівняння прямих
7	$2x+3y-6=0$ $2x-y-1=0$	**15**	$y+3x-4=0$ $\frac{x}{7}+\frac{y}{-2}=1$	**23**	$-x+y+2=0$ $y=-x+3$
8	$-x+y+1=0$ $x-5y+3=0$	**16**	$3x+y-9=0$ $\frac{x}{5}+\frac{y}{10}=1$	**24**	$5x-6y-1=0$ $3x-y+5=0$
9	$11x-y-3=0$ $\frac{x}{4}+\frac{y}{-3}=1$	**17**	$x+7y-21=0$ $3x-y+5=0$	**25**	$x+y-10=0$ $y=5x-8$
10	$x+5y+2=0$ $\frac{x}{-2}+\frac{y}{3}=1$	**18**	$-x-2y+4=0$ $y=x+11$	**26**	$x-y+3=0$ $\frac{x}{7}+\frac{y}{2}=1$
11	$-2x+3y+5=0$ $3x-y+5=0$	**19**	$5x-2y+15=0$ $-x+y+1=0$	**27**	$2x+y-6=0$ $\frac{x}{5}+\frac{y}{8}=1$
12	$x-y-3=0$ $\frac{x}{-3}+\frac{y}{2}=1$	**20**	$x+y+1=0$ $\frac{x}{3}+\frac{y}{9}=1$	**28**	$-x-2y+5=0$ $11x-y-3=0$
13	$-4x+5y-7=0$ $y=5x-6$	**21**	$x-2y+12=0$ $y=5x-6$	**29**	$y-x-2=0$ $-x-y+13=0$
14	$y-2x-3=0$ $y=x+4$	**22**	$-x-5y+7=0$ $\frac{x}{-4}+\frac{y}{-1}=1$	**30**	$x+y+8=0$ $\frac{x}{5}+\frac{y}{2}=1$

9. Знайти відстань між паралельними прямими.

№	Рівняння прямих	№	Рівняння прямих	№	Рівняння прямих
1	$3x-y+5=0$ $3x-y+1=0$	**2**	$x-7y-4=0$ $x-7y+11=0$	**3**	$-x-y+13=0$ $-x-y-1=0$

№	Рівняння прямих	№	Рівняння прямих	№	Рівняння прямих
4	$2x - y - 1 = 0$ $x - 0{,}5y + 1 = 0$	**13**	$-4x + 5y - 7 = 0$ $-4x + 5y - 3 = 0$	**22**	$-x - 5y + 7 = 0$ $x + 5y - 13 = 0$
5	$4x - 2y + 13 = 0$ $4x - 2y + 3 = 0$	**14**	$y - 2x - 3 = 0$ $2y - 4x + 7 = 0$	**23**	$-x + y + 2 = 0$ $-x + y + 6 = 0$
6	$x - 5y + 3 = 0$ $-x + 5y + 8 = 0$	**15**	$y + 3x - 4 = 0$ $y + 3x + 5 = 0$	**24**	$5x - 6y - 1 = 0$ $10x - 12y + 7 = 0$
7	$2x + 3y - 6 = 0$ $2x + 3y - 1 = 0$	**16**	$3x + y - 9 = 0$ $6x + 2y + 5 = 0$	**25**	$x + y - 10 = 0$ $x + y - 3 = 0$
8	$-x + y + 1 = 0$ $-2x + 2y + 9 = 0$	**17**	$x + 7y - 21 = 0$ $2x + 14y - 8 = 0$	**26**	$x - y + 3 = 0$ $3x - 3y + 4 = 0$
9	$11x - y - 3 = 0$ $11x - y + 5 = 0$	**18**	$-x - 2y + 4 = 0$ $-x - 2y + 11 = 0$	**27**	$2x + y - 6 = 0$ $4x + 2y + 5 = 0$
10	$x + 5y + 2 = 0$ $3x + 15y - 7 = 0$	**19**	$5x - 2y + 15 = 0$ $10x - 4y + 1 = 0$	**28**	$-x - 2y + 5 = 0$ $x + 2y - 1 = 0$
11	$-2x + 3y + 5 = 0$ $6x - 9y + 5 = 0$	**20**	$x + y + 1 = 0$ $x + y - 9 = 0$	**29**	$y - x - 2 = 0$ $-x - y + 13 = 0$
12	$x - y - 3 = 0$ $x - y + 4 = 0$	**21**	$x - 2y + 12 = 0$ $x - 2y + 2 = 0$	**30**	$x + y + 8 = 0$ $x + y - 10 = 0$

10. Дані координати трьох точок A, B і C. Знайти: а) площу трикутника ABC; б) рівняння висоти AH, проведеною з вершини A трикутника ABC, і її довжину; в) рівняння медіани BM, проведеної з вершини B трикутника ABC, і її довжину; г) величину кута ABC.

№	A	B	C	№	A	B	C
1	(1; 3)	(-4; 2)	(1; 2)	**3**	(5; 2)	(-2; -5)	(2; -4)
2	(6; 0)	(3; -1)	(11; 1)	**4**	(-3; 4)	(-1; -1)	(5; -6)

№	*A*	*B*	*C*	№	*A*	*B*	*C*
5	(-2; 1)	(-5; 2)	(8; -1)	**18**	(-1; -1)	(3; -4)	(7; 3)
6	(1; 0)	(-4; 2)	(2; 1)	**19**	(2; 7)	(0; -8)	(4; -8)
7	(-1; -1)	(7; 2)	(8; 3)	**20**	(1; -9)	(7; 5)	(0; 9)
8	(1; -5)	(0; -8)	(11; -2)	**21**	(4; 4)	(-1; 2)	(-5; -1)
9	(0; 9)	(-7; -5)	(6; 1)	**22**	(6; -1)	(-3; 2)	(3; 2)
10	(2; 4)	(-1; -2)	(3; -6)	**23**	(5; 3)	(1; -2)	(5; 1)
11	(0; -1)	(4; -5)	(-1; 2)	**24**	(-3; 3)	(-1; 4)	(-2; 1)
12	(2; 1)	(4; 4)	(2; -1)	**25**	(0; -4)	(2; 1)	(2; 2)
13	(1; 2)	(-1; -5)	(3; 3)	**26**	(-2; 1)	(-5; 2)	(1; 3)
14	(3; 4)	(-1; 0)	(-4; 2)	**27**	(-5; 1)	(0; -2)	(1; -8)
15	(4; -2)	(9; 9)	(2; 1)	**28**	(3; 3)	(9; 4)	(-2; 3)
16	(2; 3)	(-1; 4)	(5; 5)	**29**	(-2; 5)	(-6; -1)	(-4; 5)
17	(-6; 0)	(2; 2)	(-2; 6)	**30**	(2; 3)	(-1; 4)	(3; 5)

Запитання для самоперевірки

1. Що таке рівняння лінії?
2. Записати канонічне рівняння прямої.
3. Який вигляд мають параметричні рівняння прямої?
4. Як записати рівняння прямої, що проходить через дві задані точки?
5. Який вигляд має рівняння прямої у відрізках на осях?
6. Який вигляд має рівняння прямої, що проходити через задану точку в заданому напрямі?
7. Як записати рівняння прямої з кутовим коефіцієнтом?
8. Який вигляд має загальне рівняння прямої?
9. Як знайти відстань від точки до прямої?
10. За якою формулою обчислюється кут між двома прямими з кутовим коефіцієнтом?
11. Записати формулу обчислення кута між двома прямими.
12. Умови паралельності і перпендикулярності прямих.

Тема "Площина у просторі. Пряма у просторі"

1. Різновиди рівнянь площини у просторі

Рівняння $A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0$ називається *рівнянням площини*, що проходить через точку $M_0(x_0, y_0, z_0)$, перпендикулярно вектору $\vec{n}=\{A; B; C\}$ (рис. 5).

Точка $M_0(x_0, y_0, z_0)$ називається *начальною точкою*, а вектор $\vec{n}=\{A; B; C\}$ – вектором нормалі (нормаллю).

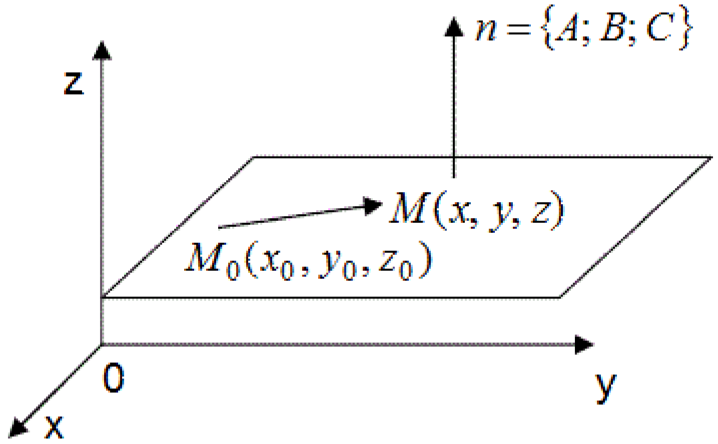

Рис. 5. **Площина, що проходить через задану точку, перпендикулярно вектору-нормалі**

Визначення рівняння площини дає основу *методам аналітичної геометрії в просторі*. Суть їх полягає в тому, що дані площини досліджуються за допомогою аналізу їх рівнянь. У табл. 2 наведені основні види рівнянь площин і розглянуті їх основні особливості.

Таблиця 2

Види рівняння площини

№ п/п	**Вид рівняння площини**	**Примітки**
1	2	3
1	**Рівняння площини, що проходить через задану точку в заданому напрямі** $A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0$	Якщо вибрати точку на площини $M_0(x_0, y_0, z_0)$ і нормальний вектор $\vec{n}=\{A; B; C\}$, перпендикулярний площині, то можна однозначно задати саму площину (рис. 5)

1	2	3
2	**Загальне рівняння площини** $Ax + By + Cz + D = 0$, де A, B, C – координати вектора нормалі $\vec{n}$	Розкриємо дужки і позначимо комбінацію констант у рівнянні площини пункту 1, табл. 2: $Ax + By + Cz + (-Ax_0 - By_0 - Cz_0) = 0;$ $D = -Ax_0 - By_0 - Cz_0;$ $Ax + By + Cz = 0.$
	Неповні рівняння площини:	
	1. $Ax + By + Cz = 0$	Якщо $D = 0$, то площина має вигляд $Ax + By + Cz = 0$. Точка (0; 0; 0) задовольняє рівнянню площини $\Rightarrow$ площина проходить через початок координат
	2. $By + Cz + D = 0$	Якщо $A = 0$, то вектор нормалі $n = \{A, B, C\}$ перпендикулярний осі Ox, а площина $By + Cz + D = 0$ паралельна осі Ox. Отже, якщо один з коефіцієнтів A, B, C при змінних x, y, z дорівнює нулю, то площина паралельна відповідній осі координат
	3. $Cz + D = 0$	Якщо два з коефіцієнтів A, B, C дорівнюють нулю, то площина буде паралельна двом координатним осям, тобто буде паралельна відповідній координатній площині. Наприклад, площина $Cz + D = 0$ буде паралельна площині Oxy
3	**Рівняння площини у відрізках на осях** $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$, де a, b, c – відрізки, що відсікаються площиною на осях координат	Перетворимо загальне рівняння площини таким чином: $Ax + By + Cz = 0 \Rightarrow \frac{x}{-D/A} + \frac{y}{-D/B} + \frac{z}{-D/C} = 1$. Рівняння площини набере вигляду $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$. Точки $A(a; 0; 0)$, $B(0; b; 0)$, $C(0; 0; c)$ розташовані на осях координат, задовольняють рівнянню площини

Закінчення табл. 2

1	2	3
4	**Рівняння площини, що проходить через три точки**: $\begin{vmatrix} x-x_a & y-y_a & z-z_a \\ x_b-x_a & y_b-y_a & z_b-z_a \\ x_c-x_a & y_c-y_a & z_c-z_a \end{vmatrix}=0$, де $A(x_a,y_a,z_a)$, $B(x_b,y_b,z_b)$, $C(x_c,y_c,z_c)$ – точки, через які проходить ця площина	З аксіоми геометрії виходить, що через три точки, що не лежать на одній прямій можна провести єдину площину. Складемо рівняння площини, що проходить через точки $A(x_a,y_a,z_a), B(x_b,y_b,z_b)$ і $C(x_c,y_c,z_c)$. Візьмемо довільну точку $M(x,\ y,\ z)$, що належить цій площині. Вектори $AM=\{x-x_a,\ y-y_a,\ z-z_a\}$, $AB=\{x_b-x_a, y_b-y_a, z_b-z_a\}$, $AC=\{x_c-x_a,\ y_c-y_a,\ z_c-z_a\}$ компланарні. Запишемо ознаку компланарності векторів: $AM\times AB\cdot AC=0 \Leftrightarrow$ $\begin{vmatrix} x-x_a & y-y_a & z-z_a \\ x_b-x_a & y_b-y_a & z_b-z_a \\ x_c-x_a & y_c-y_a & z_c-z_a \end{vmatrix}=0$
5	**Нормальне рівняння площини** $x\cos\alpha+y\cos\beta+z\cos\gamma-p=0$	α,β,γ – кути, які утворює вектор нормалі з координатами-осями Ox, Oy, Oz; р – відстань початку координат від площини

Щоб написати рівняння площини потрібно знати початкову точку і вектор нормалі або три точки, які належать площині. Таким чином, при вирішенні задач необхідно з умови знаходити одну з вказаних в табл. 2 комбінацій.

2. Кут між двома площинами, їх взаємне розташування, відстань від точки до площини

Під *кутом між двома площинами* розуміють будь-який із двох суміжних кутів між їх нормальними векторами.

Кут між площинами φ дорівнює куту між векторами нормалей $\overrightarrow{n_1}=\{A_1,B_1,C_1\}$ і $\overrightarrow{n_2}=\{A_2,B_2,C_2\}$ або суміжному з ними куту (рис. 6).

Косинус кута φ дорівнює модулю косинуса кута між нормалями й обчислюється за формулою:

$$\cos\varphi=\frac{|n_1\cdot n_2|}{|n_1|\cdot|n_2|}=\frac{|A_1A_2+B_1B_2+C_1C_2|}{\sqrt{A_1^2+B_1^2+C_1^2}\cdot\sqrt{A_2^2+B_2^2+C_2^2}}. \qquad (12)$$

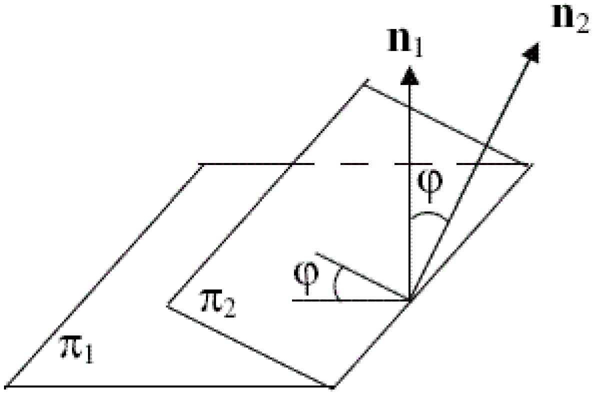

Рис. 6. **Кут між двома площинами**

Ознака паралельності площин.

Площини $\pi_1: A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0$ та $\pi_2: A_2x+B_2y+C_2z+$ $+D_2=0$ паралельні тоді і тільки тоді, коли колінеарні їх нормалі $\overrightarrow{n_1}=\{A_1,B_1,C_1\}$ та $\overrightarrow{n_2}=\{A_2,B_2,C_2\}$. Іншими словами, повинна виконуватися рівність:

$$\frac{A_1}{A_2}=\frac{B_1}{B_2}=\frac{C_1}{C_2}. \qquad (13)$$

Ознака перпендикулярності площин.

Площини $\pi_1: A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0$ та $\pi_2: A_2x+B_2y+C_2z+$ $+D_2=0$ перпендикулярні тоді і тільки тоді, коли перпендикулярні їх нормалі $\overrightarrow{n_1}=\{A_1,B_1,C_1\}$ та $\overrightarrow{n_2}=\{A_2,B_2,C_2\}$. Тобто, повинна виконуватися рівність:

$$A_1A_2=B_1B_2=C_1C_2. \qquad (14)$$

Відстань від точки до площини.

Відстанню від точки до площини називається довжина перпендикуляра, опущеного з точки на цю площину (рис. 7).

Відстань d від точки $M(x_M, y_M, z_M)$ до площини $Ax+By+Cz+$ $+D=0$ дорівнює:

$$d=\frac{|Ax_M+By_M+Cz_M+D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}. \qquad (15)$$

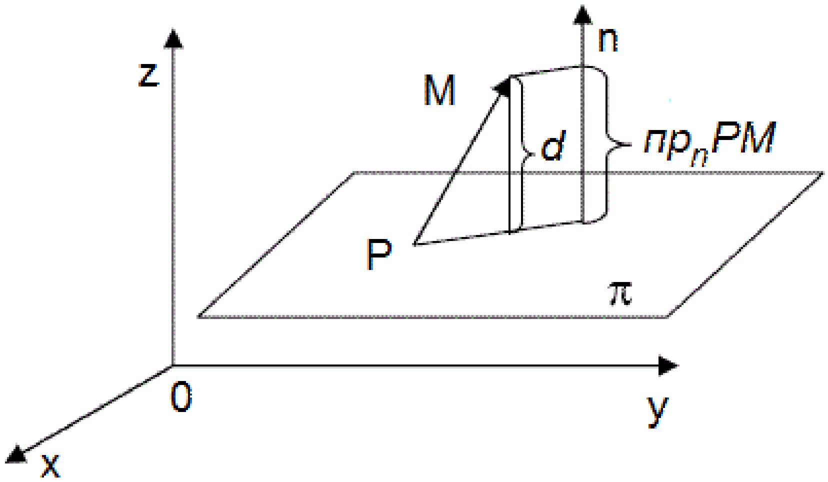

Рис. 7. **Відстань від точки до площини**

3. Рівняння прямої в просторі

Векторне рівняння прямої.

$$\vec{r_1}=\vec{r}+\lambda\vec{s}, \qquad (16)$$

де r, r_1 – радіус-вектори точок $M(x,y,z)$ і $M_1(x_1,y_1,z_1)$, що належать прямої.

Параметричні рівняння прямої.

$$\begin{cases} x_1=x+\lambda m, \\ y_1=y+\lambda n, \\ z_1=z+\lambda p, \end{cases} \qquad (17)$$

де $M(x,y,z)$ – початкова точка; $\vec{s}=\{m;n;p\}$ – напрямний вектор.

Канонічне рівняння прямої.

$$\frac{x-x_1}{m}=\frac{y-y_1}{n}=\frac{z-z_1}{p}, \qquad (18)$$

де $M(x,y,z)$ – початкова точка; $s=\{m;n;p\}$ – напрямний вектор.

Загальне рівняння прямої в просторі.

$$\begin{cases} A_1x + B_1x + C_1x + D_1 = 0 \\ A_2x + B_2x + C_2x + D_2 = 0 \end{cases}. \qquad (19)$$

Рівняння прямої, що проходить через дві точки.

$$\frac{x - x_A}{x_B - x_A} = \frac{y - y_A}{y_B - y_A} = \frac{z - z_A}{z_B - z_A}, \qquad (20)$$

де $A(x_A, y_A, z_A)$ та $B(x_B, y_B, z_B)$ – точки, через які проходить пряма.

4. Кут між прямими у просторі, їх взаємне розташування

Кут між двома прямими у просторі $s_1: \frac{x - x_1}{l_1} = \frac{y - y_1}{m_1} = \frac{z - z_1}{n_1}$ і $s_2: \frac{x - x_2}{l_2} = \frac{y - y_2}{m_2} = \frac{z - z_2}{n_2}$ обчислюється за формулою:

$$\cos\varphi = \frac{|s_1 \cdot s_2|}{|s_1| \cdot |s_2|} = \frac{|l_1l_2 + m_1m_2 + n_1n_2|}{\sqrt{l_1^2 + m_1^2 + n_1^2} \cdot \sqrt{l_2^2 + m_2^2 + n_2^2}}. \qquad (21)$$

Ознака паралельності прямих.

Прямі $s_1: \frac{x - x_1}{l_1} = \frac{y - y_1}{m_1} = \frac{z - z_1}{n_1}$ та $s_2: \frac{x - x_2}{l_2} = \frac{y - y_2}{m_2} = \frac{z - z_2}{n_2}$ паралельні тоді і тільки тоді, коли колінеарні їх напрямні вектори $\overrightarrow{s_1} = \{l_1; m_1; n_1\}$ та $\overrightarrow{s_2} = \{l_2; m_2; n_2\}$, тобто

$$\frac{l_1}{l_2} = \frac{m_1}{m_2} = \frac{n_1}{n_2}. \qquad (22)$$

Ознака перпендикулярності прямих.

Прямі $s_1: \frac{x - x_1}{l_1} = \frac{y - y_1}{m_1} = \frac{z - z_1}{n_1}$ та $s_2: \frac{x - x_2}{l_2} = \frac{y - y_2}{m_2} = \frac{z - z_2}{n_2}$ перпендикулярні тоді і тільки тоді, коли перпендикулярні їх напрямні вектори $\overrightarrow{s_1} = \{l_1; m_1; n_1\}$ та $\overrightarrow{s_2} = \{l_2; m_2; n_2\}$, тобто

$$l_1l_2 + m_1m_2 + n_1n_2 = 0. \qquad (23)$$

5. Взаємне розташування прямої і площини у просторі

Кутом між прямою і площиною називається кут φ між прямою та її проекцією на площину.

Синус кута φ обчислюється за формулою:

$$\sin\varphi = \frac{\left|\vec{n}\cdot\vec{s}\right|}{\left|\vec{n}\right|\cdot\left|\vec{s}\right|} = \frac{\left|Al+Bm+Cn\right|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}\cdot\sqrt{l^2+m^2+n^2}}. \qquad (24)$$

Розглянемо площину, задану загальним рівнянням, $Ax+By+Cz+$ $+D=0$ і пряму, задану канонічним рівнянням $\dfrac{x-x_0}{l}=\dfrac{y-y_0}{m}=\dfrac{z-z_0}{n}$. Пряма може перетинати, бути їй паралельна, належати площині.

Пряма паралельна площині, якщо вектор нормалі площини $\vec{n}=\{A;B;C\}$ перпендикулярний напрямному вектору прямої $\vec{s}=\{l;m;n\}$, тобто $\vec{s}\cdot\vec{n}=0$:

$$Al+Bm+Cn=0. \qquad (25)$$

Пряма перпендикулярна площині, якщо вектор нормалі площини $\vec{n}=\{A;B;C\}$ колінеарний напрямному вектору прямої $\vec{s}=\{l;m;n\}$, тобто

$$\frac{A}{l}=\frac{B}{m}=\frac{C}{n}. \qquad (26)$$

Пряма належить площині, якщо вектор нормалі площини $\vec{n}=\{A;B;C\}$ перпендикулярний напрямному вектору прямої $\vec{s}=\{l;m;n\}$, і початкова точка прямої $M_0(x_0,y_0,z_0)$ належить площині, тобто

$$\begin{gathered} Al+Bm+Cn=0; \\ Ax_0+By_0+Cz_0+D=0. \end{gathered} \qquad (27)$$

Якщо пряма не паралельна площині, і не належить їй, то **пряма перетинає площину.** Для того, щоб знайти точку перетину прямої і площини, треба вирішити систему рівнянь:

$$\begin{cases} Ax+By+Cz+D=0 \\ \dfrac{x-x_0}{l}=\dfrac{y-y_0}{m}=\dfrac{z-z_0}{n} \end{cases}. \qquad (28)$$

При вирішенні системи рівнянь (28) слід перейти від канонічних рівнянь прямої до параметричних, підставити вирази для x, y, z у рівняння площини, з отриманого рівняння знайти параметр, а потім x, y, z.

Розв’язання типових задач по темі

Задача 1. Скласти рівняння площини, що проходить через три точки $M_1(1; -2; 3), M_2(0; 1; 5)$ та $M_3(4; -1; 2)$.

Розв’язання: згідно з пунктом 4 табл. 2, рівняння площини, що проходить через три задані точки M_1, M_2, M_3 має вигляд:

$$\begin{vmatrix} x-1 & y+2 & z-3 \\ 0-1 & 1+2 & 5-3 \\ 4-1 & -1+2 & 2-3 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \begin{vmatrix} x-1 & y+2 & z-3 \\ -1 & 3 & 2 \\ 3 & 1 & -1 \end{vmatrix} =$$

$$= -3(x-1) + 6(y+2) - (z-3) - 9(z-3) - (y+2) - 2(x-1) =$$
$$= -5x + 5y - 10z + 45 = 0$$ або $-x + y - 2z + 9 = 0$.

Задача 2. Написати рівняння площини, що проходить через точки $A(1; 2; 3)$ і $B(-2; 3; 1)$, паралельно вектору $a = \{2; 5; 2\}$.

Розв’язання: з умови завдання виходить, що вектори $AB = \{-2-1; 3-2; 1-3\} = \{-3; 1; -2\}$ AB = {–2 – 1; і $a = \{2; 5; 2\}$ паралельні площини. Їх векторний добуток перпендикулярний площині і є вектором нормалі, тобто

$$n = AB \times a = \begin{vmatrix} i & j & k \\ -3 & 1 & -2 \\ 2 & 5 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 5 & 2 \end{vmatrix} i - \begin{vmatrix} -3 & -2 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} j + \begin{vmatrix} -3 & 1 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} k =$$

$$= 12i + 2j - 17k.$$

За початкову точку візьмемо точку $A(1; 2; 3)$. Рівняння шуканої площини, що проходить через точку A з вектором нормалі n, має вигляд:

$$12(x-1) + 2(y-2) - 17(z-3) = 0 \Leftrightarrow 12x + 2y - 17z - 35 = 0.$$

Задача 3. Визначити кут між площинами $x + 2y - 3z + 4 = 0$ і $2x + 3y + z + 8 = 0$.

Розв'язання: згідно з формулою (19) косинус кута між заданими площинами обчислюється за формулою:

$$\cos\varphi = \frac{|1\cdot 2 + 2\cdot 3 - 3\cdot 1|}{\sqrt{1^2 + 2^2 + (-3)^2}\cdot\sqrt{2^2 + 3^2 + 1^2}} = \frac{|2+6-3|}{\sqrt{14}\cdot\sqrt{14}} = \frac{5}{14},\ \varphi \approx 69^\circ.$$

Задача 4. Скласти рівняння площини, що проходить через точку $M(-2;1;4)$ паралельно площини $3x + 2y - 7z + 8 = 0$.

Розв'язання: рівняння площини шукатимемо у загальному виді $Ax + By + Cz + D = 0$ (див. табл. 2).

З умови паралельності площин виходить, що $\dfrac{A}{3} = \dfrac{B}{2} = \dfrac{C}{-7}$.

Тому можна покласти $A = 3, B = 2, C = -7$. Тоді рівняння шуканої площини набере вигляду $3x + 2y - 7z + D = 0$. Крім того, оскільки точка $M(-2;1;4)$ належить цій площині, то її координати задовольнятимуть рівнянню шуканої площини, іншими словами:

$$-6 + 2 - 28 + D = 0 \Rightarrow D = 32.$$

Отже, шукане рівняння $3x + 2y - 7z + 32 = 0$.

Задача 5. Скласти рівняння площини, що проходить через точки $M_1(1;1;1)$, $M_2(0;1;-1)$ перпендикулярно площині $x + y + z = 0$.

Розв'язання: оскільки точка M_1 належить прямій, то використовуючи рівняння площини, що проходить через задану точку, матимемо $A(x-1) + B(y-1) + C(z-1) = 0$.

Отже, оскільки точка M_2 так само належить шуканій площині, то підставивши координати точки в отримане вище рівняння, отримаємо рівність $-A - 2C = 0$ або $A + 2C = 0$.

Врахуємо, що шукана площина перпендикулярна заданій. Тому $A + B + C = 0$. Виразимо коефіцієнти Aі B через C $A = -2C, B = C$ та підставимо їх в отримане вище рівняння:

$$-2C(x-1) + C(y-1) + C(z-1) = 0.$$

Остаточно отримаємо: $-2x + y + z = 0$.

Задача 6. Скласти рівняння площини, що проходить через точку $M(-2;3;6)$ перпендикулярно площинам $2x + 3y - 2z - 4 = 0$ та $3x + 5y +$ $+ z = 0$.

Розв'язання: оскільки точка $M(-2;3;6)$ належить шуканій площині, то $A(x+2)+B(y-3)+C(z-6)=0$. По умові задачі шукана площина перпендикулярна заданим, тому $\begin{cases} 2A+3B-2C=0 \\ 3A+5B+C=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2A+3B=2C \\ 3A+5B=-C \end{cases} \Rightarrow$

$\begin{cases} A=13C \\ B=-8C \end{cases}$. Отже, рівняння площини набирає вигляду

$13C(x+2)-8C(y-3)+C(z-6)=0$ або $13x-8y+z+44=0$.

Задача 7. Знайти відстань від точки $K(6;-7;1)$ до площини $-5x+2y-5z+2=0$.

Розв'язання: згідно з формулою (22), відстань d від точки K до заданої площини дорівнює:

$$d=\frac{\left|Ax_M+By_M+Cz_M+D\right|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}=\frac{\left|-5\cdot 6+2\cdot(-7)-5\cdot 1+2\right|}{\sqrt{(-5)^2+2^2+(-5)^2}}=\frac{47}{\sqrt{54}}.$$

Задача 8. Записати рівняння прямої $\frac{x-2}{3}=\frac{y+1}{2}=\frac{z-1}{-1}$ у параметричному виді.

Розв'язання: позначимо $\frac{x-2}{3}=\frac{y+1}{2}=\frac{z-1}{-1}=t$. Звідси

$$\begin{cases} x-2=3\lambda \\ y+1=2\lambda \\ z-1=-\lambda \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=2+3\lambda \\ y=-1+2\lambda \\ z=1-\lambda \end{cases}.$$

Задача 9. Скласти канонічні і параметричні рівняння прямої, такою, що проходить через точку $M(1;0;-2)$ паралельно вектору $\vec{s}=2\vec{i}-3\vec{j}$.

Розв'язання: канонічні рівняння: $\frac{x-1}{2}=\frac{y}{-3}=\frac{z+2}{0}$.

Параметричні рівняння: $\begin{cases} x=1+2\lambda \\ y=-3\lambda \\ z=-2 \end{cases}$.

Задача 10. Перейти від загального вигляду рівняння прямої $\begin{cases} 2x - 3y + z - 5 = 0 \\ 3x + y - 2z - 4 = 0 \end{cases}$ до канонічної форми.

Розв'язання: знайдемо точку, що лежить на прямій. Для цього як і в попередньому прикладі виберемо довільно одну з координат, наприклад $y = 0$, і вирішимо систему рівнянь: $\begin{cases} 2x + z = 5 \\ 3x - 2z = 4 \end{cases}$. Отримаємо точку $M(2;0;1)$. Нормальні вектори площин, що визначають пряму, мають координати $\overrightarrow{n_1} = \{2;-3;1\}, \overrightarrow{n_2} = \{3;1;-2\}$. Тому напрямний вектор прямої буде $\vec{s} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & -3 & 1 \\ 3 & 1 & -2 \end{vmatrix} = 5\vec{i} + 7\vec{j} + 11\vec{k}$. Отже, шукане рівняння матиме вигляд: $\dfrac{x-2}{5} = \dfrac{y}{7} = \dfrac{z-1}{11}$.

Задача 11. Знайти кут між прямими $\dfrac{x-1}{1} = \dfrac{y}{-4} = \dfrac{z+3}{1}$ і $\dfrac{x}{2} = \dfrac{y+2}{-2} = \dfrac{z}{-1}$.

Розв'язання: напрямні вектора заданих прямих дорівнюють $\overrightarrow{s_1} = \{1;-4;1\}$, $\overrightarrow{s_2} = \{2;-2;-1\}$. Косинус кута між ними визначається по формулі (28) як $\cos\varphi = \dfrac{2+8+1}{\sqrt{18}\sqrt{9}} = \dfrac{1}{\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \varphi = \dfrac{\pi}{4}$.

Задача 12. Знайти рівняння прямою, що проходить через точку $M(1;2;3)$ паралельно прямій $\begin{cases} 2x + 3y + 5z - 7 = 0 \\ 3x - 4y + z - 8 = 0 \end{cases}$.

Розв'язання: оскільки шукана пряма паралельна заданій, то за напрямний вектор шуканої прямої можна взяти напрямний вектор заданої прямої: $\vec{s} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & 3 & 5 \\ 3 & -4 & 1 \end{vmatrix} = 23\vec{i} + 13\vec{j} - 17\vec{k}$. Тоді шукане рівняння прямої набере вигляду $\dfrac{x-1}{23} = \dfrac{y-2}{13} = \dfrac{z-3}{17}$.

Задача 13. Скласти рівняння прямої, що проходить через точку $M(-4;0;2)$ перпендикулярно прямим $\frac{x+1}{2}=\frac{y+1}{3}=\frac{z}{4}$ і $\frac{x-2}{3}=\frac{y-3}{2}=\frac{z-5}{2}$.

Розв'язання: напрямний вектор шуканої прямої можна знайти як векторний добуток векторів $\overrightarrow{s_1}$ і $\overrightarrow{s_2}$:

$$\vec{s}=\overrightarrow{s_1}\times\overrightarrow{s_2}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 2 & 3 & 4\\ 3 & 2 & 2\end{vmatrix}=-2\vec{i}+8\vec{j}-5\vec{k}.$$ Тоді $\frac{x+4}{2}=\frac{y}{8}=\frac{z-2}{-5}$.

Задача 14. Написати рівняння площини, що проходить через точку $M(2;-3;4)$ паралельно прямим $\frac{x}{1}=\frac{y-1}{2}=\frac{z-3}{8}$ і $\frac{x+1}{4}=\frac{y-1}{0}=\frac{z+5}{2}$.

Розв'язання: оскільки точка $M(2;-3;4)$ належить площині, то її рівняння шукатимемо у виді $A(x-2)+B(y+3)+C(z-4)=0$. Застосовуючи умову паралельності прямої і площини, отримаємо систему лінійних рівнянь $\begin{cases}A+2B+8C=0\\ 4A+2C=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}B=\frac{15}{2}A\\ C=-2A\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}A=2\\ B=15\\ C=-4\end{cases}$. Тоді

$2(x-2)+15(y+3)-4(z-4)=0$ або $2x+15y-4z+57=0$.

Задача 15. Знайти кут між прямою $\begin{cases}x-3y-1=0\\ z=4\end{cases}$ і площиною $3x+y+4=0$.

Розв'язання: напрямний вектор прямої $\vec{s}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 1 & -3 & 0\\ 0 & 0 & 4\end{vmatrix}=-3\vec{i}-\vec{j}$.

Нормальний вектор площини $\vec{n}=(3;1;0)$. Отже, $\sin\varphi=\frac{10}{10}=1$, $\varphi=90^\circ$.

Задача 16. Знайти точку, симетричну даній $M(0;-3;-2)$ відносно прямої $\frac{x-0.5}{0}=\frac{y+1.5}{-1}=\frac{z-1.5}{1}$.

Розв'язання: складемо рівняння площини, перпендикулярній цій прямій. Оскільки точка $M(0;-3;-2)$ належить площині, то $\vec{n}=\vec{s}=\{0;-1;1\}$. Отже, $0(x-0)-(y+3)+(z+2)=0$ або $-y+z-1=0$ – рівняння площини, перпендикулярній цій прямій. Знайдемо точку перетину прямої і площини:

$$\begin{cases} \frac{x-0.5}{0}=\frac{y+1.5}{-1}=\frac{z-1.5}{1}=t \\ -y+z-1=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=0.5 \\ y=-t-1.5 \\ z=t+1.5 \\ t+1.5+t+1.5-1=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=0.5 \\ y=-0.5 \\ z=0.5 \\ t=-1 \end{cases}.$$

Отже, координати точки перетину прямої і площини $N(0{,}5;-0{,}5;0{,}5)$. Нехай шукана точка M_1 має координати $M_1(x;y;z)$.

Тоді очевидна рівність векторів $MN=NM_1$, тобто $(0.5;2.5;2.5)$ = $(x-0.5;\ y+0.5;\ z-0.5)$. Звідки $x=1, y=2, z=3$ або $M_1(1;2;3)$.

Варіанти завдань для самостійної роботи

Площина

1. Скласти рівняння площини, що проходить через три точки.

№	*A*	*B*	*C*	**№**	*A*	*B*	*C*
1	(1; 3; 2)	(-4; 2; 1)	(1; 2; -3)	**11**	(0; -1; 3)	(4; -5; 1)	(-1; 2; 3)
2	(6; 0; -2)	(3; -1; 2)	(11; 1; 0)	**12**	(5; 3; -2)	(1; -2; 3)	(5; 1; 4)
3	(5; 2; -3)	(-2; -5; 1)	(2; -4; 3)	**13**	(-3; 3; 0)	(-1; 4; 9)	(-2; 1; 7)
4	(-3; 4; -5)	(-1; -1; 3)	(5; -6; 4)	**14**	(0; -4; 2)	(2; 1; 3)	(2; 2; -1)
5	(-2; 1; 6)	(-5; 2; 1)	(8; -1; 2)	**15**	(-2; 1; 0)	(-5; 2; 3)	(1; 3; -1)
6	(1; 0; 4)	(-4; 2; -3)	(2; 1; 1)	**16**	(2; 1; 7)	(4; 4; 0)	(2; 1; 2)
7	(-1; -1; 6)	(7; 2; 0)	(8; 3; 3)	**17**	(1; 2; 3)	(1; 5; 3)	(3; 3; 6)
8	(1; 1; 1)	(0; -8; 3)	(1; -2; 4)	**18**	(3; 4; 2)	(1; 0; 1)	(4; 2; 0)
9	(0; 9; -6)	(-7; -5; 2)	(6; 1; 3)	**19**	(4; -2; 3)	(9; 9; 3)	(2; 1; 5)
10	(2; 4; -5)	(-1; 2; 3)	(3; -6; 0)	**20**	(2; 3; -7)	(1; 4; 0)	(0; 5; 5)

№	A	B	C	№	A	B	C
21	(-6; 0; 2)	(2; 2; -2)	(2; 6; 1)	**26**	(6; 0; -1)	(-3; 2; 1)	(1; 3; 2)
22	(-1; -1; 3)	(3; -4; 1)	(7; 3; 2)	**27**	(4; -5; 1)	(0; -2; 4)	(1; 8; 3)
23	(2; 7; -1)	(0; -8; 1)	(4; 8; 3)	**28**	(3; 3; 3)	(9; 4; -1)	(2; 3; 1)
24	(1; -9; -1)	(7; 5; 7)	(0; 9; 5)	**29**	(-2; 5; 2)	(3; -6; 1)	(4; 5; 0)
25	(4; 4; 2)	(-3; 1; 2)	(5; 6; 1)	**30**	(1; 2; 3)	(0; -1; 4)	(3; 5; 4)

2. Написати рівняння площини, що проходить через точки $A(0;-2;1)$ і $B(4;1;-2)$:

а) паралельно вектору $\vec{a}$;

б) перпендикулярно вектору $\vec{b}$.

№	$\vec{a}$	$\vec{b}$	№	$\vec{a}$	$\vec{b}$
1	(1; 3; 2)	(-4; 2; 1)	**16**	(2; 1; 7)	(4; 4; 0)
2	(6; 0; -2)	(3; -1; 2)	**17**	(1; 2; 3)	(-1; -5; 3)
3	(5; 2; -3)	(-2; -5; 1)	**18**	(3; 4; 2)	(-1; 0; 1)
4	(-3; 4; -5)	(-1; -1; 3)	**19**	(4; -2; 3)	(9; 9; 3)
5	(-2; 1; 6)	(-5; 2; 1)	**20**	(2; 3; -7)	(-1; 4; 0)
6	(1; 0; 4)	(-4; 2; -3)	**21**	(-6; 0; 2)	(2; 2; -2)
7	(-1; -1; 6)	(7; 2; 0)	**22**	(-1; -1; 3)	(3; -4; 1)
8	(1; 1; 1)	(0; -8; 3)	**23**	(2; 7; -1)	(0; -8; 1)
9	(0; 9; -6)	(-7; -5; 2)	**24**	(1; -9; -1)	(7; 5; 7)
10	(2; 4; -5)	(-1; -2; 3)	**25**	(4; 4; 2)	(-3; 1; 2)
11	(0; -1; 3)	(4; -5; 1)	**26**	(6; 0; -1)	(-3; 2; 1)
12	(5; 3; -2)	(1; -2; 3)	**27**	(4; -5; 1)	(0; -2; 4)
13	(-3; 3; 0)	(-1; 4; 9)	**28**	(3; 3; 3)	(9; 4; -1)
14	(0; -4; 2)	(2; 1; 3)	**29**	(-2; 5; 2)	(3; -6; -1)
15	(-2; 1; 0)	(-5; 2; 3)	**30**	(1; 2; 3)	(0; -1; 4)

3. Скласти рівняння площини, що проходить через точку $M(-2;1;4)$ паралельно площині.

№	Площина	№	Площина
1	$4x-2y+z-13=0$	**4**	$5x-6y-z+1=0$
2	$x-5y+3z-6=0$	**5**	$x+y-3z-10=0$
3	$-x+y+z-2=0$	**6**	$x-y+3=0$

№	Площина	№	Площина
7	$2x+y+4z-6=0$	19	$x+y+8z-4=0$
8	$-x-2y+5z+6=0$	20	$x+7y-z+21=0$
9	$y-x-z-2=0$	21	$-x-2y+5z-4=0$
10	$3x-y+z-5=0$	22	$5x-2y+4z+15=0$
11	$x-7y-z-4=0$	23	$x+y-z+1=0$
12	$2x+3y-z-6=0$	24	$x-2y+5z-12=0$
13	$-x+y+3z+1=0$	25	$3x+y-z-9=0$
14	$11x-y+7z+3=0$	26	$x+7y-3z-21=0$
15	$x+y+z-2=0$	27	$-2x+3y-2z+5=0$
16	$-x-y-z+13=0$	28	$x-y-z-3=0$
17	$2x-y+2z-1=0$	29	$-4x+5y-2z+7=0$
18	$y+3x-z-4=0$	30	$y-2x+z-3=0$

4. Визначити кут між площинами.

№	Площина 1	Площина 2
1	$4x-2y+z-13=0$	$3x-y+z-5=0$
2	$x-5y+3z-6=0$	$x-7y-z-4=0$
3	$-x+y+z-2=0$	$2x+3y-z-6=0$
4	$5x-6y-z+1=0$	$-x+y+3z+1=0$
5	$x+y-3z-10=0$	$11x-y+7z+3=0$
6	$x-y+3=0$	$x+y+z-2=0$
7	$2x+y+4z-6=0$	$-x-y-z+13=0$
8	$-x-2y+5z+6=0$	$2x-y+2z-1=0$
9	$y-x-z-2=0$	$y+3x-z-4=0$
10	$x+y+8z-4=0$	$3x+y-z-9=0$
11	$x+7y-z+21=0$	$x+7y-3z-21=0$
12	$-x-2y+5z-4=0$	$-2x+3y-2z+5=0$
13	$5x-2y+4z+15=0$	$x-y-z-3=0$
14	$x+y-z+1=0$	$-4x+5y-2z+7=0$
15	$x-2y+5z-12=0$	$y-2x+z-3=0$

№	Площина 1	Площина 2
16	$x+y+z-2=0$	$4x-2y+z-13=0$
17	$-x-y-z+13=0$	$x-5y+3z-6=0$
18	$2x-y+2z-1=0$	$-x+y+z-2=0$
19	$y+3x-z-4=0$	$5x-6y-z+1=0$
20	$3x+y-z-9=0$	$x+y-3z-10=0$
21	$-2x+3y-2z+5=0$	$x-y+3=0$
22	$x-y-z-3=0$	$2x+y+4z-6=0$
23	$-4x+5y-2z+7=0$	$-x-2y+5z+6=0$
24	$y-2x+z-3=0$	$y-x-z-2=0$
25	$x+y+z-2=0$	$x+y+8z-4=0$
26	$-x-y-z+13=0$	$x+7y-z+21=0$
27	$2x-y+2z-1=0$	$-x-2y+5z-4=0$
28	$y+3x-z-4=0$	$5x-2y+4z+15=0$
29	$3x+y-z-9=0$	$4x-2y+z-13=0$
30	$x+7y-3z-21=0$	$x+y+8z-4=0$

5. Скласти рівняння площини, що проходить через точку $A(1;-6;2)$ перпендикулярно площинам.

№	Площина 1	Площина 2
1	$3x-y+z-5=0$	$4x-2y+z-13=0$
2	$x-7y-z-4=0$	$x-5y+3z-6=0$
3	$2x+3y-z-6=0$	$-x+y+z-2=0$
4	$-x+y+3z+1=0$	$5x-6y-z+1=0$
5	$11x-y+7z+3=0$	$x+y-3z-10=0$
6	$x+y+z-2=0$	$x-y+3=0$
7	$-x-y-z+13=0$	$2x+y+4z-6=0$
8	$2x-y+2z-1=0$	$-x-2y+5z+6=0$
9	$y+3x-z-4=0$	$y-x-z-2=0$
10	$3x+y-z-9=0$	$x+y+8z-4=0$
11	$x+7y-z+21=0$	$x+7y-z+21=0$

№	Площина 1	Площина 2
12	$-x-2y+5z-4=0$	$-2x+3y-2z+5=0$
13	$5x-2y+4z+15=0$	$x-y-z-3=0$
14	$x+y-z+1=0$	$-4x+5y-2z+7=0$
15	$x-2y+5z-12=0$	$y-2x+z-3=0$
16	$x+y+z-2=0$	$4x-2y+z-13=0$
17	$-x-y-z+13=0$	$x-5y+3z-6=0$
18	$2x-y+2z-1=0$	$-x+y+z-2=0$
19	$y+3x-z-4=0$	$5x-6y-z+1=0$
20	$3x+y-z-9=0$	$x+y-3z-10=0$
21	$-2x+3y-2z+5=0$	$x-y+3=0$
22	$x-y-z-3=0$	$2x+y+4z-6=0$
23	$-4x+5y-2z+7=0$	$-x-2y+5z+6=0$
24	$y-2x+z-3=0$	$y-x-z-2=0$
25	$x+y+z-2=0$	$x+y+8z-4=0$
26	$-x-y-z+13=0$	$x+7y-z+21=0$
27	$2x-y+2z-1=0$	$-x-2y+5z-4=0$
28	$y+3x-z-4=0$	$5x-2y+4z+15=0$
29	$3x+y-z-9=0$	$4x-2y+z-13=0$
30	$x+7y-3z-21=0$	$x+y+8z-4=0$

6. Знайти відстань від точки M до площини.

№	M	Площина
1	(4; 4; 0)	$3x-y+z-5=0$
2	(-1; -5; 3)	$x-7y-z-4=0$
3	(-1; 0; 1)	$2x+3y-z-6=0$
4	(9; 9; 3)	$-x+y+3z+1=0$
5	(-1; 4; 0)	$11x-y+7z+3=0$
6	(2; 2; -2)	$x+y+z-2=0$
7	(3; -4; 1)	$-x-y-z+13=0$
8	(0; -8; 1)	$2x-y+2z-1=0$

№	M	Площина
9	(7; 5; 7)	$y+3x-z-4=0$
10	(-3; 1; 2)	$3x+y-z-9=0$
11	(-3; 2; 1)	$x+7y-3z-21=0$
12	(0; -2; 4)	$-2x+3y-2z+5=0$
13	(9; 4; -1)	$x-y-z-3=0$
14	(3; -6; -1)	$-4x+5y-2z+7=0$
15	(0; -1; 4)	$y-2x+z-3=0$
16	(1; 3; 2)	$4x-2y+z-13=0$
17	(6; 0; -2)	$x-5y+3z-6=0$
18	(5; 2; -3)	$-x+y+z-2=0$
19	(-3; 4; -5)	$5x-6y-z+1=0$
20	(-2; 1; 6)	$x+y-3z-10=0$
21	(1; 0; 4)	$x-y+3=0$
22	(-1; -1; 6)	$2x+y+4z-6=0$
23	(1; 1; 1)	$-x-2y+5z+6=0$
24	(0; 9; -6)	$y-x-z-2=0$
25	(2; 4; -5)	$x+y+8z-4=0$
26	(0; -1; 3)	$x+7y-z+21=0$
27	(5; 3; -2)	$-x-2y+5z-4=0$
28	(-3; 3; 0)	$5x-2y+4z+15=0$
29	(0; -4; 2)	$4x-2y+z-13=0$
30	(-2; 1; 0)	$x+y+8z-4=0$

7. Скласти рівняння площини, що проходить через точку K перпендикулярно площинам.

№	K	Площина 1	Площина 2
1	(4; 4; 0)	$3x-y+z-5=0$	$4x-2y+z-13=0$
2	(-1; -5; 3)	$x-7y-z-4=0$	$x-5y+3z-6=0$
3	(-1; 0; 1)	$2x+3y-z-6=0$	$-x+y+z-2=0$
4	(9; 9; 3)	$-x+y+3z+1=0$	$5x-6y-z+1=0$

№	K	Площина 1	Площина 2
5	(-1; 4; 0)	$11x-y+7z+3=0$	$x+y-3z-10=0$
6	(2; 2; -2)	$x+y+z-2=0$	$x-y+3=0$
7	(3; -4; 1)	$-x-y-z+13=0$	$2x+y+4z-6=0$
8	(0; -8; 1)	$2x-y+2z-1=0$	$-x-2y+5z+6=0$
9	(7; 5; 7)	$y+3x-z-4=0$	$y-x-z-2=0$
10	(-3; 1; 2)	$3x+y-z-9=0$	$x+y+8z-4=0$
11	(-3; 2; 1)	$x+7y-3z-21=0$	$x+y+8z-4=0$
12	(0; -2; 4)	$-2x+3y-2z+5=0$	$x+7y-z+21=0$
13	(9; 4; -1)	$x-y-z-3=0$	$-x-2y+5z-4=0$
14	(-2; 9; -3)	$-4x+5y-2z+7=0$	$5x-2y+4z+15=0$
15	(3; -6; -1)	$y-2x+z-3=0$	$4x-2y+z-13=0$
16	(0; -1; 4)	$4x-2y+z-13=0$	$3x+y-z-9=0$
17	(1; 3; 2)	$x-5y+3z-6=0$	$-2x+3y-2z+5=0$
18	(6; 0; -2)	$-x+y+z-2=0$	$x-y-z-3=0$
19	(5; 2; -3)	$5x-6y-z+1=0$	$-4x+5y-2z+7=0$
20	(-3; 4; -5)	$x+y-3z-10=0$	$y-2x+z-3=0$
21	(-2; 1; 6)	$x-y+3=0$	$x+y+z-2=0$
22	(1; 0; 4)	$2x+y+4z-6=0$	$-x-y-z+13=0$
23	(-1; -1; 6)	$-x-2y+5z+6=0$	$2x-y+2z-1=0$
24	(1; 1; 1)	$y-x-z-2=0$	$y+3x-z-4=0$
25	(0; 9; -6)	$x+y+8z-4=0$	$3x+y-2z-9=0$
26	(2; 4; -5)	$x+7y-z+21=0$	$x+y-3z-10=0$
27	(0; -1; 3)	$-x-2y+5z-4=0$	$x-y+3=0$
28	(5; 3; -2)	$5x-2y+4z+15=0$	$2x+y+4z-6=0$
29	(-3; 3; 0)	$4x-2y+z-13=0$	$-x-2y+5z+6=0$
30	(0; -4; 2)	$x+y+8z-4=0$	$y-x-z-2=0$

8. Перейти від загального вигляду рівняння прямої до канонічної форми.

№	Пряма	№	Пряма
1	$\begin{cases} 3x-y+z-5=0 \\ x-7y-z-4=0 \end{cases}$	**13**	$\begin{cases} -x-y+z+3=0 \\ x-7y-z-4=0 \end{cases}$
2	$\begin{cases} 2x+3y-z-6=0 \\ -x+y+3z+1=0 \end{cases}$	**14**	$\begin{cases} y+3x-z+6=0 \\ y-x+2z-8=0 \end{cases}$
3	$\begin{cases} 3x-4y+5z-16=0 \\ 6x-5y+z-24=0 \end{cases}$	**15**	$\begin{cases} x-y+z+1=0 \\ 5x+y-2z-2=0 \end{cases}$
4	$\begin{cases} x+5y+z-9=0 \\ x+y-3z-12=0 \end{cases}$	**16**	$\begin{cases} 4x-5y-2z+21=0 \\ x-7y+7z-4=0 \end{cases}$
5	$\begin{cases} 2x+3y-z-7=0 \\ -5x+y-3z+1=0 \end{cases}$	**17**	$\begin{cases} -x-y-z+3=0 \\ -x+8y+2z-9=0 \end{cases}$
6	$\begin{cases} -4x+5y-8z-1=0 \\ x+y+z-11=0 \end{cases}$	**18**	$\begin{cases} 2x-3y-z+10=0 \\ 4x+5y+z-24=0 \end{cases}$
7	$\begin{cases} x+y+z-9=0 \\ x+4y-z-12=0 \end{cases}$	**19**	$\begin{cases} -x-y-z+3=0 \\ -x+y+2z-7=0 \end{cases}$
8	$\begin{cases} x+y+z-21=0 \\ 5x+4y-z+11=0 \end{cases}$	**20**	$\begin{cases} x+5y+z+10=0 \\ x-8y-3z-2=0 \end{cases}$
9	$\begin{cases} 2x+y-7z-12=0 \\ 4x-6y-z+13=0 \end{cases}$	**21**	$\begin{cases} x-y+7z+18=0 \\ 3x-7y-z+21=0 \end{cases}$
10	$\begin{cases} 11x-y+7z+3=0 \\ 5x+y-z-2=0 \end{cases}$	**22**	$\begin{cases} 3x-4y-z-16=0 \\ x-5y+z-24=0 \end{cases}$
11	$\begin{cases} -x-y-z+13=0 \\ 2x-y+2z-1=0 \end{cases}$	**23**	$\begin{cases} x+8y-z+13=0 \\ -x+6y+5z-19=0 \end{cases}$
12	$\begin{cases} y+3x-z-4=0 \\ y+x+2z-8=0 \end{cases}$	**24**	$\begin{cases} x-y-z+13=0 \\ x+8y+2z-9=0 \end{cases}$

№	Пряма	№	Пряма
25	$\begin{cases}4x-5y-2z+21=0\\3x-7y+7z-14=0\end{cases}$	**28**	$\begin{cases}2x+3y-z-16=0\\-x+y-z+21=0\end{cases}$
26	$\begin{cases}y-x-7z-14=0\\y+x+9z-18=0\end{cases}$	**29**	$\begin{cases}5x-3y+2z-10=0\\x+4y-z-12=0\end{cases}$
27	$\begin{cases}2x-3y-z-7=0\\5x+y-3z+10=0\end{cases}$	**30**	$\begin{cases}-x-4y+7z+12=0\\5x+3y-12z-1=0\end{cases}$

9. Скласти параметричні рівняння прямої, яка проходить через точки A і B.

№	A	B	№	A	B
1	(1; 3; 2)	(-4; 2; 1)	**16**	(0; -4; 2)	(2; 1; 3)
2	(6; 0; -2)	(3; -1; 2)	**17**	(-2; 1; 0)	(-5; 2; 3)
3	(2; 1; 7)	(4; 4; 0)	**18**	(3; 4; 2)	(-1; 0; 1)
4	(1; 2; 3)	(-1; -5; 3)	**19**	(4; -2; 3)	(9; 9; 3)
5	(5; 2; -3)	(-2; -5; 1)	**20**	(2; 3; -7)	(-1; 4; 0)
6	(-3; 4; -5)	(-1; -1; 3)	**21**	(-6; 0; 2)	(2; 2; -2)
7	(-2; 1; 6)	(-5; 2; 1)	**22**	(-1; -1; 3)	(3; -4; 1)
8	(1; 0; 4)	(-4; 2; -3)	**23**	(2; 7; -1)	(0; -8; 1)
9	(-1; -1; 6)	(7; 2; 0)	**24**	(1; -9; -1)	(7; 5; 7)
10	(1; 1; 1)	(0; -8; 3)	**25**	(4; 4; 2)	(-3; 1; 2)
11	(0; 9; -6)	(-7; -5; 2)	**26**	(6; 0; -1)	(-3; 2; 1)
12	(2; 4; -5)	(-1; -2; 3)	**27**	(4; -5; 1)	(0; -2; 4)
13	(0; -1; 3)	(4; -5; 1)	**28**	(3; 3; 3)	(9; 4; -1)
14	(5; 3; -2)	(1; -2; 3)	**29**	(-2; 5; 2)	(3; -6; -1)
15	(-3; 3; 0)	(-1; 4; 9)	**30**	(1; 2; 3)	(0; -1; 4)

10. Знайти рівняння прямої, що проходить через точку $M(-2;4;-1)$ паралельно прямій.

№	Пряма	№	Пряма
1	$\begin{cases}3x-y+z-5=0\\x-7y-z-4=0\end{cases}$	**2**	$\begin{cases}2x+3y-z-6=0\\-x+y+3z+1=0\end{cases}$

№	Пряма	№	Пряма
3	$\begin{cases} 3x-4y+5z-16=0 \\ 6x-5y+z-24=0 \end{cases}$	**17**	$\begin{cases} x-y+z+1=0 \\ 5x+y-2z-2=0 \end{cases}$
4	$\begin{cases} x+5y+z-9=0 \\ x+y-3z-12=0 \end{cases}$	**18**	$\begin{cases} 4x-5y-2z+21=0 \\ x-7y+7z-4=0 \end{cases}$
5	$\begin{cases} 2x+y-7z-12=0 \\ 4x-6y-z+13=0 \end{cases}$	**19**	$\begin{cases} -x-y-z+3=0 \\ -x+8y+2z-9=0 \end{cases}$
6	$\begin{cases} 11x-y+7z+3=0 \\ 5x+y-z-2=0 \end{cases}$	**20**	$\begin{cases} 2x-3y-z+10=0 \\ 4x+5y+z-24=0 \end{cases}$
7	$\begin{cases} 2x+3y-z-7=0 \\ -5x+y-3z+1=0 \end{cases}$	**21**	$\begin{cases} -x-y-z+3=0 \\ -x+y+2z-7=0 \end{cases}$
8	$\begin{cases} -4x+5y-8z-1=0 \\ x+y+z-11=0 \end{cases}$	**22**	$\begin{cases} 3x-4y-z-16=0 \\ x-5y+z-24=0 \end{cases}$
9	$\begin{cases} x+y+z-9=0 \\ x+4y-z-12=0 \end{cases}$	**23**	$\begin{cases} x+8y-z+13=0 \\ -x+6y+5z-19=0 \end{cases}$
10	$\begin{cases} x+y+z-21=0 \\ 5x+4y-z+11=0 \end{cases}$	**24**	$\begin{cases} x-y-z+13=0 \\ x+8y+2z-9=0 \end{cases}$
11	$\begin{cases} x+5y+z+10=0 \\ x-8y-3z-2=0 \end{cases}$	**25**	$\begin{cases} 4x-5y-2z+21=0 \\ 3x-7y+7z-14=0 \end{cases}$
12	$\begin{cases} x-y+7z+18=0 \\ 3x-7y-z+21=0 \end{cases}$	**26**	$\begin{cases} y-x-7z-14=0 \\ y+x+9z-18=0 \end{cases}$
13	$\begin{cases} -x-y-z+13=0 \\ 2x-y+2z-1=0 \end{cases}$	**27**	$\begin{cases} 2x-3y-z-7=0 \\ 5x+y-3z+10=0 \end{cases}$
14	$\begin{cases} y+3x-z-4=0 \\ y+x+2z-8=0 \end{cases}$	**28**	$\begin{cases} 2x+3y-z-16=0 \\ -x+y-z+21=0 \end{cases}$
15	$\begin{cases} -x-y+z+3=0 \\ x-7y-z-4=0 \end{cases}$	**29**	$\begin{cases} 5x-3y+2z-10=0 \\ x+4y-z-12=0 \end{cases}$
16	$\begin{cases} y+3x-z+6=0 \\ y-x+2z-8=0 \end{cases}$	**30**	$\begin{cases} -x-4y+7z+12=0 \\ 5x+3y-12z-1=0 \end{cases}$

11. Скласти рівняння прямої, яка проходить через точку $A(-2;0;4)$ і перпендикулярна до двох прямих 1 і 2. Знайти кут між прямими 1 і 2.

№	Пряма 1	№	Пряма 2
1	$\frac{x-1}{1}=\frac{y}{-4}=\frac{z+3}{1}$ $\frac{x}{2}=\frac{y+2}{-2}=\frac{z}{-1}$	**8**	$\frac{x+5}{1}=\frac{y-6}{-3}=\frac{z+4}{-1}$ $\frac{x-1}{2}=\frac{y+5}{6}=\frac{z-3}{2}$
2	$\frac{x-1}{5}=\frac{y+5}{-4}=\frac{z-3}{2}$ $\frac{x+1}{2}=\frac{y+2}{3}=\frac{z-8}{4}$	**9**	$\frac{x-1}{1}=\frac{y+2}{-4}=\frac{z-7}{1}$ $\frac{x-6}{-1}=\frac{y+2}{2}=\frac{z}{8}$
3	$\frac{x-1}{-7}=\frac{y+5}{4}=\frac{z+3}{6}$ $\frac{x+5}{1}=\frac{y-2}{2}=\frac{z+4}{11}$	**10**	$\frac{x+6}{2}=\frac{y}{-4}=\frac{z+3}{-1}$ $\frac{x+1}{2}=\frac{y-2}{3}=\frac{z-8}{4}$
4	$\frac{x+4}{2}=\frac{y-3}{1}=\frac{z-1}{-7}$ $\frac{x}{9}=\frac{y}{-3}=\frac{z-8}{1}$	**11**	$\frac{x-1}{-7}=\frac{y+5}{4}=\frac{z+3}{6}$ $\frac{x+5}{1}=\frac{y-2}{2}=\frac{z+4}{11}$
5	$\frac{x-1}{2}=\frac{y+5}{1}=\frac{z-2}{-3}$ $\frac{x+2}{4}=\frac{y-2}{6}=\frac{z-3}{-5}$	**12**	$\frac{x+5}{2}=\frac{y+1}{1}=\frac{z-2}{3}$ $\frac{x}{3}=\frac{y}{-3}=\frac{z-7}{11}$
6	$\frac{x-7}{2}=\frac{y+5}{5}=\frac{z}{8}$ $\frac{x}{-1}=\frac{y+2}{2}=\frac{z-3}{-5}$	**13**	$\frac{x-2}{4}=\frac{y+4}{3}=\frac{z-1}{-2}$ $\frac{x-3}{4}=\frac{y-1}{2}=\frac{z+2}{3}$
7	$\frac{x-1}{-2}=\frac{y+2}{3}=\frac{z}{-1}$ $\frac{x+2}{-5}=\frac{y-4}{3}=\frac{z-5}{2}$	**14**	$\frac{x+11}{1}=\frac{y}{1}=\frac{z}{16}$ $\frac{x-5}{-3}=\frac{y+7}{2}=\frac{z-3}{4}$

№	Пряма 1	№	Пряма 2
15	$\frac{x-1}{2}=\frac{y-4}{-3}=\frac{z+2}{11}$ $\frac{x+6}{5}=\frac{y-7}{-3}=\frac{z+1}{2}$	**23**	$\frac{x-1}{1}=\frac{y-2}{-4}=\frac{z-5}{1}$ $\frac{x-6}{-1}=\frac{y}{2}=\frac{z+4}{-3}$
16	$\frac{x+7}{5}=\frac{y}{-2}=\frac{z-6}{3}$ $\frac{x+2}{-2}=\frac{y-4}{4}=\frac{z+6}{1}$	**24**	$\frac{x-1}{-1}=\frac{y+3}{1}=\frac{z-1}{6}$ $\frac{x-5}{3}=\frac{y+7}{-2}=\frac{z-3}{-4}$
17	$\frac{x-4}{2}=\frac{y+6}{-2}=\frac{z-1}{-7}$ $\frac{x+7}{-2}=\frac{y}{-3}=\frac{z-8}{1}$	**25**	$\frac{x+7}{5}=\frac{y}{-2}=\frac{z-6}{3}$ $\frac{x+2}{-2}=\frac{y-4}{4}=\frac{z+6}{1}$
18	$\frac{x-7}{2}=\frac{y+5}{5}=\frac{z}{8}$ $\frac{x}{-1}=\frac{y+2}{2}=\frac{z-3}{-5}$	**26**	$\frac{x-1}{2}=\frac{y-4}{-3}=\frac{z+2}{11}$ $\frac{x-6}{-4}=\frac{y}{1}=\frac{z+5}{3}$
19	$\frac{x-3}{-4}=\frac{y+1}{-2}=\frac{z+2}{3}$ $\frac{x-1}{7}=\frac{y+2}{-3}=\frac{z-2}{1}$	**27**	$\frac{x+7}{5}=\frac{y}{-2}=\frac{z-6}{3}$ $\frac{x+2}{-2}=\frac{y-4}{4}=\frac{z+6}{1}$
20	$\frac{x-4}{5}=\frac{y+2}{6}=\frac{z-1}{7}$ $\frac{x-1}{8}=\frac{y+2}{-2}=\frac{z-3}{-5}$	**28**	$\frac{x-1}{1}=\frac{y+2}{-2}=\frac{z}{6}$ $\frac{x+3}{-1}=\frac{y+2}{3}=\frac{z-1}{-4}$
21	$\frac{x+5}{-2}=\frac{y}{3}=\frac{z-2}{1}$ $\frac{x+2}{-5}=\frac{y-4}{3}=\frac{z-5}{2}$	**29**	$\frac{x-4}{2}=\frac{y-5}{3}=\frac{z+7}{-4}$ $\frac{x-5}{-3}=\frac{y+7}{2}=\frac{z-3}{4}$
22	$\frac{x-4}{2}=\frac{y}{-2}=\frac{z-1}{3}$ $\frac{x+7}{-2}=\frac{y+6}{-3}=\frac{z-2}{4}$	**30**	$\frac{x+5}{-2}=\frac{y}{3}=\frac{z-2}{1}$ $\frac{x-1}{2}=\frac{y+5}{6}=\frac{z-3}{2}$

12. Скласти рівняння прямої, яка проходить через точки M і N, знайти їх напрямні косинуси.

№	M	N	№	M	N
1	(1; 3; 2)	(-4; 2; 1)	**16**	(-1; -1; 3)	(3; -4; 1)
2	(6; 0; -2)	(3; -1; 2)	**17**	(2; 7; -1)	(0; -8; 1)
3	(5; 2; -3)	(-2; -5; 1)	**18**	(1; -9; -1)	(7; 5; 7)
4	(-3; 4; -5)	(-1; -1; 3)	**19**	(2; 4; -5)	(-1; -2; 3)
5	(-2; 1; 6)	(-5; 2; 1)	**20**	(0; -1; 3)	(4; -5; 1)
6	(1; 0; 4)	(-4; 2; -3)	**21**	(5; 3; -2)	(1; -2; 3)
7	(-1; -1; 6)	(7; 2; 0)	**22**	(-3; 3; 0)	(-1; 4; 9)
8	(1; 1; 1)	(0; -8; 3)	**23**	(0; -4; 2)	(2; 1; 3)
9	(0; 9; -6)	(-7; -5; 2)	**24**	(-2; 1; 0)	(-5; 2; 3)
10	(2; 1; 7)	(4; 4; 0)	**25**	(4; 4; 2)	(-3; 1; 2)
11	(1; 2; 3)	(-1; -5; 3)	**26**	(6; 0; -1)	(-3; 2; 1)
12	(3; 4; 2)	(-1; 0; 1)	**27**	(4; -5; 1)	(0; -2; 4)
13	(4; -2; 3)	(9; 9; 3)	**28**	(3; 3; 3)	(9; 4; -1)
14	(2; 3; -7)	(-1; 4; 0)	**29**	(-2; 5; 2)	(3; -6; -1)
15	(-6; 0; 2)	(2; 2; -2)	**30**	(1; 2; 3)	(0; -1; 4)

Пряма і площина

13. Написати рівняння площини, що проходить через точку $M(0;1;-3)$ паралельно прямим.

№	Прямі	№	Прямі
1	$\frac{x-1}{1}=\frac{y}{-4}=\frac{z+3}{1}$ $\frac{x}{2}=\frac{y+2}{-2}=\frac{z}{-1}$	**4**	$\frac{x-7}{2}=\frac{y+5}{5}=\frac{z}{8}$ $\frac{x}{-1}=\frac{y+2}{2}=\frac{z-3}{-5}$
2	$\frac{x-1}{5}=\frac{y+5}{-4}=\frac{z-3}{2}$ $\frac{x+1}{2}=\frac{y+2}{3}=\frac{z-8}{4}$	**5**	$\frac{x-1}{-2}=\frac{y+2}{3}=\frac{z}{-1}$ $\frac{x+2}{-5}=\frac{y-4}{3}=\frac{z-5}{2}$
3	$\frac{x-1}{2}=\frac{y+5}{1}=\frac{z-2}{-3}$ $\frac{x+2}{4}=\frac{y-2}{6}=\frac{z-3}{-5}$	**6**	$\frac{x-1}{-7}=\frac{y+5}{4}=\frac{z+3}{6}$ $\frac{x+5}{1}=\frac{y-2}{2}=\frac{z+4}{11}$

№	Прямі	№	Прямі
7	$\frac{x+4}{2}=\frac{y-3}{1}=\frac{z-1}{-7}$ $\frac{x}{9}=\frac{y}{-3}=\frac{z-8}{1}$	**15**	$\frac{x+5}{2}=\frac{y+1}{1}=\frac{z-2}{3}$ $\frac{x}{3}=\frac{y}{-3}=\frac{z-7}{11}$
8	$\frac{x-2}{4}=\frac{y+4}{3}=\frac{z-1}{-2}$ $\frac{x-3}{4}=\frac{y-1}{2}=\frac{z+2}{3}$	**16**	$\frac{x+5}{-2}=\frac{y}{3}=\frac{z-2}{1}$ $\frac{x+2}{-5}=\frac{y-4}{3}=\frac{z-5}{2}$
9	$\frac{x+11}{1}=\frac{y}{1}=\frac{z}{16}$ $\frac{x-5}{-3}=\frac{y+7}{2}=\frac{z-3}{4}$	**17**	$\frac{x-4}{2}=\frac{y}{-2}=\frac{z-1}{3}$ $\frac{x+7}{-2}=\frac{y+6}{-3}=\frac{z-2}{4}$
10	$\frac{x-1}{2}=\frac{y-4}{-3}=\frac{z+2}{11}$ $\frac{x+6}{5}=\frac{y-7}{-3}=\frac{z+1}{2}$	**18**	$\frac{x+7}{5}=\frac{y}{-2}=\frac{z-6}{3}$ $\frac{x+2}{-2}=\frac{y-4}{4}=\frac{z+6}{1}$
11	$\frac{x+5}{1}=\frac{y-6}{-3}=\frac{z+4}{-1}$ $\frac{x-1}{2}=\frac{y+5}{6}=\frac{z-3}{2}$	**19**	$\frac{x-4}{2}=\frac{y+6}{-2}=\frac{z-1}{-7}$ $\frac{x+7}{-2}=\frac{y}{-3}=\frac{z-8}{1}$
12	$\frac{x-1}{1}=\frac{y+2}{-4}=\frac{z-7}{1}$ $\frac{x-6}{-1}=\frac{y+2}{2}=\frac{z}{8}$	**20**	$\frac{x-7}{2}=\frac{y+5}{5}=\frac{z}{8}$ $\frac{x}{-1}=\frac{y+2}{2}=\frac{z-3}{-5}$
13	$\frac{x+6}{2}=\frac{y}{-4}=\frac{z+3}{-1}$ $\frac{x+1}{2}=\frac{y-2}{3}=\frac{z-8}{4}$	**21**	$\frac{x-3}{-4}=\frac{y+1}{-2}=\frac{z+2}{3}$ $\frac{x-1}{7}=\frac{y+2}{-3}=\frac{z-2}{1}$
14	$\frac{x-1}{-7}=\frac{y+5}{4}=\frac{z+3}{6}$ $\frac{x+5}{1}=\frac{y-2}{2}=\frac{z+4}{11}$	**22**	$\frac{x-4}{5}=\frac{y+2}{6}=\frac{z-1}{7}$ $\frac{x-1}{8}=\frac{y+2}{-2}=\frac{z-3}{-5}$

№	Прямі	№	Прямі
23	$\frac{x-1}{2}=\frac{y-4}{-3}=\frac{z+2}{11}$ $\frac{x-6}{-4}=\frac{y}{1}=\frac{z+5}{3}$	**27**	$\frac{x+7}{5}=\frac{y}{-2}=\frac{z-6}{3}$ $\frac{x+2}{-2}=\frac{y-4}{4}=\frac{z+6}{1}$
24	$\frac{x+7}{5}=\frac{y}{-2}=\frac{z-6}{3}$ $\frac{x+2}{-2}=\frac{y-4}{4}=\frac{z+6}{1}$	**28**	$\frac{x-1}{1}=\frac{y+2}{-2}=\frac{z}{6}$ $\frac{x+3}{-1}=\frac{y+2}{3}=\frac{z-1}{-4}$
25	$\frac{x-1}{1}=\frac{y-2}{-4}=\frac{z-5}{1}$ $\frac{x-6}{-1}=\frac{y}{2}=\frac{z+4}{-3}$	**29**	$\frac{x-4}{2}=\frac{y-5}{3}=\frac{z+7}{-4}$ $\frac{x-5}{-3}=\frac{y+7}{2}=\frac{z-3}{4}$
26	$\frac{x-1}{-1}=\frac{y+3}{1}=\frac{z-1}{6}$ $\frac{x-5}{3}=\frac{y+7}{-2}=\frac{z-3}{-4}$	**30**	$\frac{x+5}{-2}=\frac{y}{3}=\frac{z-2}{1}$ $\frac{x-1}{2}=\frac{y+5}{6}=\frac{z-3}{2}$

14. Знайти кут між прямою $\begin{cases} x-3y-1=0 \\ z=4 \end{cases}$ і площиною.

№	Площина	№	Площина
1	$3x-y+2z-5=0$	**11**	$x+7y-3z-21=0$
2	$x-7y-z-1=0$	**12**	$-x+3y-z+1=0$
3	$2x+3y-z+2=0$	**13**	$x-y-z+3=0$
4	$-x+y+3z-1=0$	**14**	$y-2x+z+3=0$
5	$x-y-7z+1=0$	**15**	$-4x+5y-z-1=0$
6	$x+y+z-2=0$	**16**	$4x-2y+z-3=0$
7	$-x-y-z+6=0$	**17**	$x-5y+z-10=0$
8	$2x-y+2z+5=0$	**18**	$-x+y+z-2=0$
9	$y-z-4=0$	**19**	$5x+6y-3z+4=0$
10	$3x+y-z-9=0$	**20**	$x+y+z-4=0$

№	Площина	№	Площина
21	$x-y+3=0$	**26**	$x-2y-3z+2=0$
22	$2x+y+4z-3=0$	**27**	$x+7y-z-4=0$
23	$x-2y+5z-8=0$	**28**	$-x-2y+z-5=0$
24	$y-x-z-2=0$	**29**	$5x-2y+4z+7=0$
25	$x+y+z-7=0$	**30**	$4x-2y+z-3=0$

15. Знайти точку, симетричну даній $M(-1;2;-4)$ відносно прямої.

№	Пряма	№	Пряма
1	$\frac{x-1}{1}=\frac{y}{-4}=\frac{z+3}{1}$	**10**	$\frac{x}{3}=\frac{y}{-3}=\frac{z-7}{11}$
2	$\frac{x+1}{2}=\frac{y+2}{3}=\frac{z-8}{4}$	**11**	$\frac{x+5}{-2}=\frac{y}{3}=\frac{z-2}{1}$
3	$\frac{x+2}{4}=\frac{y-2}{6}=\frac{z-3}{-5}$	**12**	$\frac{x-4}{2}=\frac{y}{-2}=\frac{z-1}{3}$
4	$\frac{x}{-1}=\frac{y+2}{2}=\frac{z-3}{-5}$	**13**	$\frac{x-6}{-1}=\frac{y}{2}=\frac{z+4}{-3}$
5	$\frac{x+2}{-5}=\frac{y-4}{3}=\frac{z-5}{2}$	**14**	$\frac{x-5}{3}=\frac{y+7}{-2}=\frac{z-3}{-4}$
6	$\frac{x-1}{2}=\frac{y+5}{6}=\frac{z-3}{2}$	**15**	$\frac{x+5}{1}=\frac{y-2}{2}=\frac{z+4}{11}$
7	$\frac{x-6}{-1}=\frac{y+2}{2}=\frac{z}{8}$	**16**	$\frac{x+4}{2}=\frac{y-3}{1}=\frac{z-1}{-7}$
8	$\frac{x+1}{2}=\frac{y-2}{3}=\frac{z-8}{4}$	**17**	$\frac{x-3}{4}=\frac{y-1}{2}=\frac{z+2}{3}$
9	$\frac{x-1}{-7}=\frac{y+5}{4}=\frac{z+3}{6}$	**18**	$\frac{x+11}{1}=\frac{y}{1}=\frac{z}{16}$

№	Пряма	№	Пряма
19	$\frac{x-1}{2}=\frac{y-4}{-3}=\frac{z+2}{11}$	**25**	$\frac{x-6}{-4}=\frac{y}{1}=\frac{z+5}{3}$
20	$\frac{x+7}{5}=\frac{y}{-2}=\frac{z-6}{3}$	**26**	$\frac{x+2}{-2}=\frac{y-4}{4}=\frac{z+6}{1}$
21	$\frac{x-4}{2}=\frac{y+6}{-2}=\frac{z-1}{-7}$	**27**	$\frac{x-1}{1}=\frac{y+2}{-2}=\frac{z}{6}$
22	$\frac{x}{-1}=\frac{y+2}{2}=\frac{z-3}{-5}$	**28**	$\frac{x-4}{2}=\frac{y-5}{3}=\frac{z+7}{-1}$
23	$\frac{x-3}{-4}=\frac{y+1}{-2}=\frac{z+2}{3}$	**29**	$\frac{x+2}{-2}=\frac{y-4}{4}=\frac{z+6}{1}$
24	$\frac{x-1}{8}=\frac{y+2}{-2}=\frac{z-3}{-5}$	**30**	$\frac{x+5}{-2}=\frac{y}{3}=\frac{z-2}{1}$

Запитання для самоперевірки

1. Записати рівняння площини, що проходить через задану точку в заданому напрямі.
2. Який вигляд має загальне рівняння площини? Перерахувати окремі випадки загального рівняння площини в просторі.
3. Який вигляд має рівняння площини у відрізках на осях?
4. Записати рівняння площини, що проходить через три задані точки.
5. Який вигляд має нормальне рівняння площини?
6. Навести формулу для обчислення відстані від точки до площини.
7. Як знайти кут між двома площинами?
8. Записати умови паралельності та перпендикулярності двох площин.
9. Записати всі відомі форми рівняння прямої у просторі.
10. Як обчислити кут між двома прямими?
11. Умови паралельності та перпендикулярності прямих у просторі.
12. Взаємне розташування прямої та площини у просторі.

Тема "Лінії другого порядку"

1. Основні визначення і класифікація прямих другого порядку

Еліпсом називається геометричне місце точок площини, для яких сума відстаней від двох фіксованих точок, які називаються фокусами, є сталою величиною (рис. 8).

Канонічне рівняння еліпса має вигляд:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1. \qquad (29)$$

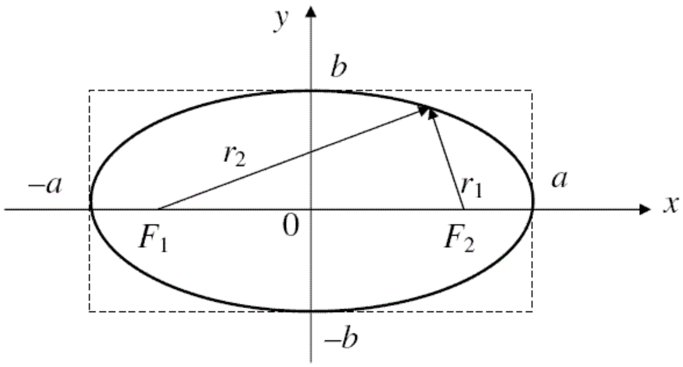

Рис. 8. **Еліпс:** F_1, F_2 **– фокуси еліпса,** r_1, r_2 **– фокальні радіуси;**

$$r_1 + r_2 = const = 2a > F_1F_2.$$

Усі точки еліпса лежать у середині прямокутника, який обмежений прямими $x=\pm a$ і $y=\pm b$ (рис. 8). Точки $(0;\ \pm b)$ та $(\pm a;\ 0)$ називаються *вершинами еліпса*, а числа a і b – *півосями*. Прямокутник із сторонами $2a$ та $2b$ називається *основним*.

Ексцентриситетом називається відношення $\varepsilon=\frac{c}{a}$, $c=\sqrt{a^2-b^2}$ при $a>b$ або $\varepsilon=\frac{c}{a}$, $c=\sqrt{b^2-a^2}$ при $a<b$.

Фокальні радіуси можна знайти по формулах $r_{1,2}=a\pm\varepsilon x$, при $a>b$; $r_{1,2}=b\pm\varepsilon x$ при $a<b$.

Рівняння дотичної до еліпса в точці $M(x_0; y_0)$ має вигляд: $\frac{xx_0}{a^2}+\frac{yy_0}{b^2}=1$.

Вектор нормальний до дотичної має координати: $\left\{\frac{x_0}{a^2}; \frac{y_0}{b^2}\right\}$.

Колом називається множина точок, відстань кожної з яких до однієї точки, що називається центром, є сталою величиною. Відстань будь-якої точки кола від її центра називається *радіусом* R кола.

Канонічне рівняння кола радіусу R з центром у точці $M(a;b)$ має вигляд:

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 = R^2. \quad (30)$$

Тобто коло – це еліпс, у якого півосі a і b є рівними

Гіперболою називається геометричне місце точок, абсолютна величина різниці відстаней від кожної з яких до двох заданих точок F_1 і F_2, званих фокусами, є сталою величиною, яка дорівнює $2a$, тобто, $|r_1 - r_2| = 2a$ (рис. 9). Для гіперболи характерно $F_1F_2 > 2a$.

Канонічне рівняння гіперболи має вигляд*:*

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1. \quad (31)$$

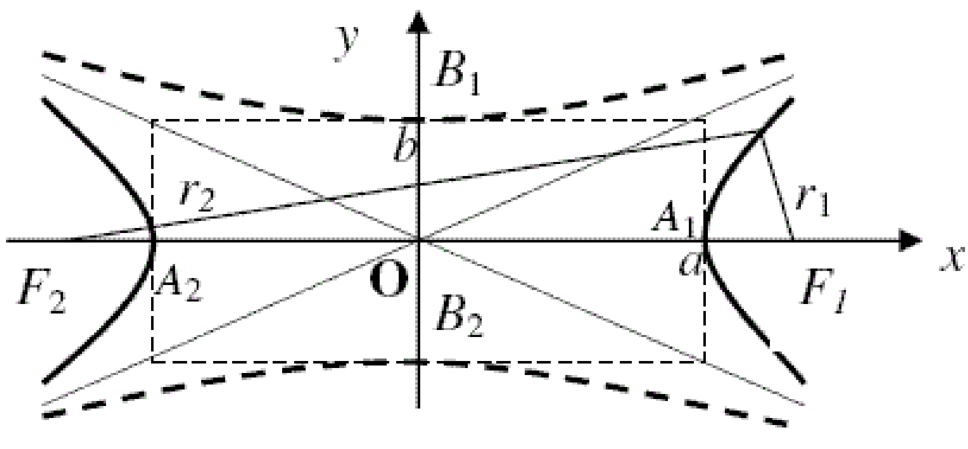

Рис. 9. **Гіпербола**

Точки $A_1(a;0)$ та $A_2(-a;0)$ називаються *вершинами*. Фокуси мають координати $F_1(-c;0), F_2(c;0)$. Відрізок $A_1A_2 = 2a$ називається *дійсною віссю* і $B_1B_2 = 2b$ – *уявною віссю* гіперболи. Відстань від фокусу до центру – $c = \sqrt{a^2 + b^2}$. Величина $\varepsilon = \frac{c}{a}$ називається *ексцентриситетом* гіперболи ($\varepsilon > 1$). Гіпербола має *дві асимптоти*: $y = \frac{b}{a}x, y = -\frac{b}{a}x$. Ці асимптоти є продовженням діагоналей основного прямокутника (на рис. 9 він позначений дрібним пунктиром). Величини r_1 та r_2 називаються *фокальними радіусами* і визначаються по формулах: $r_1 = |\varepsilon x - a|, r_2 = |\varepsilon x + a|$.

Гіпербола з параметрами $a = b$ називається *рівносторонньою*.

Рівняння $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = -1$ описує гіперболу, гілки якої спрямовані вгору і вниз (пунктирні лінії на рис. 9), $2a$ – *уявна вісь*, $2b$ – *дійсна вісь*. Ця гіпербола називається *спряженою*, вона має той же основний прямокутник і ті ж асимптоти.

Рівняння дотичної в точці $M(x_0; y_0)$ має вигляд:

$$\frac{xx_0}{a^2} - \frac{yy_0}{b^2} = 1. \tag{32}$$

Нормальний вектор – $\overrightarrow{N} = \left\{ \frac{x_0}{a^2}; \frac{y_0}{b^2} \right\}$.

Параболою називається геометричне місце точок, рівновіддалених від деякої фіксованої точки, званої фокусом F і від фіксованої прямої d, званою директрисою параболи, $FM = DM$ (рис. 10).

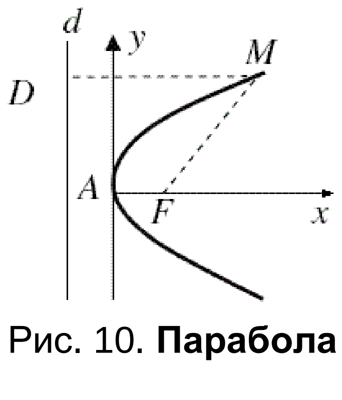

Рис. 10. **Парабола**

Точка $A(0; 0)$ називається вершиною параболи. Координати фокусу параболи – $F(p/2; 0)$.

Канонічне рівняння параболи має вигляд:

$$y^2 = 2px. \tag{33}$$

Відстань p від фокусу до директриси називається *фокальним параметром*.

Зауваження: еліпс і гіпербола мають властивості осьової та центральної симетрії і називаються центральними. Парабола має властивості тільки осьової симетрії і не є центральною.

Розв'язання типових задач по темі

Задача 1. Складіть рівняння кола з центром у точці $M(2;-3)$ і з радіусом, що дорівнює 2.

Розв'язання: за умовою задачі маємо: $a=2, b=-3, R=2$. Підставивши ці значення в рівняння кола, отримаємо:

$(x-2)^2+(y-(-3))^2=4$ або $(x-2)^2+(y+3)^2=4$.

Задача 2. Складіть рівняння кола, яке має центр у точці $(5;-7)$ і проходить через точку $(2;-3)$.

Розв'язання: знайдемо радіус кола як відстань від центра до його точки: $R=\sqrt{(2-5)^2+(-3-(-7))^2}=5$.

У рівняння кола підставимо координати центра і знайдену величину радіуса: $(x-5)^2+(y+7)^2=25$.

Задача 3. Знайдіть координати точок перетину кола $3x^2+3y^2-18x-10y-48=0$ з осями координат.

Розв'язання: коло перетинається з віссю абсцис у точках, ординати яких дорівнюють нулю. Припустивши, що рівнянні кола $y=0$, отримаємо:

$$3x^2-18x-48=0 \Rightarrow x^2-6x-16=0;$$

$$x_{1,2}=\frac{6\pm\sqrt{36-4(-16)}}{2}=\frac{6\pm 10}{2},\ x_1=8\ i\ x_2=-2.$$

Отже, коло перетинається з віссю абсцис у точках $(-2;0)$ і $(8;0)$.

Коло перетинається з віссю ординат у точках, абсциси яких дорівнюють нулю. Припустивши, що в рівнянні кола $x=0$, отримаємо:

$$3y^2-10y^2-48=0;$$

$$y_{1,2}=\frac{10\pm\sqrt{100-4(-48)\cdot 3}}{2\cdot 3}=\frac{10\pm 26}{6};\ y_1=8\ i\ y_2=-\frac{8}{3}.$$

Отже, коло перетинається з віссю ординат у точках $\left(0;-\dfrac{8}{3}\right)$ і $(0;6)$.

Задача 4. Складіть рівняння кола, яке проходить через точки $A(3;1)$, $B(-2;6)$, $C(-5;-3)$.

Розв'язання: нехай точка $O_1(a;b)$ – центр шуканого кола, тоді $|O_1A|=|O_1B|=|O_1C|$ – радіуси того самого кола. Маємо:

$$|O_1A|=\sqrt{(a-3)^2+(b-1)^2}\ ,$$

$$|O_1B|=\sqrt{(a+2)^2+(b-6)^2}\ ,$$

$$|O_1C|=\sqrt{(a+5)^2+(b+3)^2}\ .$$

Складемо систему рівнянь відносно невідомих a і b та розв'яжемо її:

$$\begin{cases}\sqrt{(a-3)^2+(b-1)^2}=\sqrt{(a+2)^2+(b-6)^2};\\ \sqrt{(a-3)^2+(b-1)^2}=\sqrt{(a+5)^2+(b+3)^2};\end{cases}\Rightarrow$$

$$\begin{cases}a^2+b^2+9+1-6a-2b=a^2+b^2+4+36+4a-12b,\\ a^2+b^2+9+1-6a-2b=a^2+b^2+25+9+10a+6b;\end{cases}\Rightarrow$$

$$\begin{cases}a-b+3=0,\\ 2a+b+3=0;\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a-b=-3,\\ 2a+b=-3;\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}3a=-6,\\ b=a+3;\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a=-2,\\ b=1.\end{cases}$$

$O_1(-2;1)$. Знаходимо $R=|O_1A|=\sqrt{(-2-3)^2+(1-1)^2}=5$.

Отже, шукане рівняння кола має вигляд: $(x+2)^2+(y-1)^2=25$.

Задача 5. Знайдіть координати центра і радіус кола $x^2+y^2-8x-10y-8=0$.

Розв'язання: перетворимо задане рівняння до найпростішого вигляду таким чином:

$x^2-8x+y^2-10y=8$, $\quad x^2-2\cdot 4x+4^2+y^2-2\cdot 5y+5^2=8+4^2+5^2$ або $(x-4)^2+(y-5)^2=49$.

Звідки $a=4$, $b=5$, $R=7$, тобто центр кола – точка $(4;5)$, а радіус дорівнює 7.

Задача 6. Скласти рівняння еліпса з фокусами на осі Ox, якщо велика вісь дорівнює 12, а відстань між фокусами дорівнює 8.

Розв'язання: з умови впливає, що $a=6$ і $c=4$. Знаходимо $b=\pm\sqrt{20}$. Підставивши значення a і b у рівняння еліпса, отримаємо $\dfrac{x^2}{36}+\dfrac{y^2}{20}=1.$

Задача 7. Дано еліпс $\dfrac{x^2}{36}+\dfrac{y^2}{20}=1.$ Знайти координати фокусів еліпса і відстань між ними.

Розв'язання: З рівняння еліпса маємо $a^2=100$ і $b^2=36$. Тоді $c=\sqrt{a^2-b^2}=\sqrt{100-36}=8$. Отже, координати фокусів $F_1\,(-8;0)$ і $F_2\,(8;0)$, а відстань між ними $2c=2\cdot 8=16$.

Задача 8. Скласти рівняння еліпса з фокусами на осі Ox, якщо його велика вісь дорівнює 14, а ексцентриситет $\dfrac{2}{3}$.

Розв'язання: маємо $a=7$, $\varepsilon=\dfrac{c}{a}=\dfrac{2}{3}$.

Підставивши в це співвідношення значення a, отримаємо $c=\dfrac{14}{3}$.

Далі знаходимо $b^2=7^2-\left(\dfrac{14}{3}\right)^2=\dfrac{245}{9}$. Отже, шукане рівняння має вигляд: $\dfrac{x^2}{49}+\dfrac{y^2}{245/9}=1$ або $\dfrac{x^2}{49}+\dfrac{9y^2}{245}=1.$

Задача 9. Скласти рішення еліпса з фокусами на осі Ox, якщо він проходить через точки $A(\sqrt{3};\sqrt{6})$ і $B(3;\ \sqrt{2})$.

Розв'язання: щоб скласти рівняння еліпса, треба знайти параметри a і b. Підставивши в рівняння еліпса координати даних точок, отримаємо систему рівнянь:

$$\begin{cases} \dfrac{3}{a^2}+\dfrac{6}{b^2}=1, \\ \dfrac{9}{a^2}+\dfrac{2}{b^2}=1; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{1}{a^2}=\dfrac{1}{3}\left(1-\dfrac{6}{b^2}\right), \\ \dfrac{9}{3}\left(1-\dfrac{6}{b^2}\right)+\dfrac{2}{b^2}=1; \end{cases} \Rightarrow \quad 3-\frac{18}{b^2}+\frac{2}{b^2}=1; \quad \Rightarrow$$

$\dfrac{16}{b^2}=2$; $b^2=8$;

$$\frac{1}{a^2}=\frac{1}{3}\left(1-\frac{6}{8}\right); \Rightarrow \frac{1}{a^2}=\frac{1}{3}-\frac{1}{4}; \Rightarrow \frac{1}{a^2}=\frac{1}{12};\ a^2=12.$$

Отже, шукане рівняння має вигляд: $\dfrac{x^2}{12}+\dfrac{y^2}{8}=1.$

Задача 10. Привести рівняння гіперболи $9x^2-16y^2-144=0$ до канонічного виду. Знайти фокуси, ексцентриситет, рівняння асимптот та директрис.

Розв'язання: приведемо рівняння кривої до канонічного виду:

$$9x^2-16y^2=144 : 144 \Rightarrow \frac{9x^2}{144}-\frac{16y^2}{144}=1;\ \frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{9}=1.$$

Таким чином, $a^2=16$, $b^2=9$; $a=4$, $b=3$ – півосі гіперболи.

Знайдемо відстань фокусів від центра симетрії:

$$c=\sqrt{a^2+b^2}=\sqrt{16+9}=\sqrt{25}=5.$$

Фокуси гіперболи $F_1(-5;0)$, $F_2(5;0)$.

Ексцентриситет $\varepsilon=\dfrac{c}{a}=\dfrac{5}{4}>1.$

Рівняння асимптот $y=\pm\dfrac{3}{4}x.$

Рівняння директрис $x=\pm\dfrac{4}{\left(\dfrac{5}{4}\right)}$; $x=\pm\dfrac{16}{5}.$

Задача 11. Скласти рівняння гіперболи з фокусами на осі Ox, якщо її дійсна вісь дорівнює 24, а відстань між фокусами дорівнює $8\sqrt{34}$.

Розв'язання: для складання рівняння гіперболи треба знайти параметри a і b. З умови маємо: $2a=24,\quad 2c=8\sqrt{34}$.

Знайдемо a, c і b:

$$a=12, c=4\sqrt{34}\text{,}\; b=\sqrt{c^2-a^2}=\sqrt{544-144}=20$$

Підставивши a^2 і b^2 у рівняння $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$, отримаємо $\frac{x^2}{144}-\frac{y^2}{400}=1.$

Задача 12. Скласти рівняння гіперболи за координатами її фокусів $(-20;0)$, $(20;0)$ та ексцентриситетом $\varepsilon=\frac{4}{3}$.

Розв'язання: з умови маємо $c=20$, $\varepsilon=\frac{c}{a}=\frac{4}{3}$. Підставивши у цю рівність c, отримаємо: $\frac{20}{a}=\frac{3}{4}$, тобто $a=\frac{20\cdot 3}{4}=15$. Далі знайдемо $b=\sqrt{c^2-a^2}=\sqrt{400-225}=\sqrt{175}=5\sqrt{7}$. Підставивши a^2 і b^2 у рівняння (31), отримаємо $\frac{x^2}{225}-\frac{y^2}{175}=1.$

Задача 13. Скласти рівняння гіперболи з фокусами на осі Ox, якщо довжина її дійсної осі дорівнює 16, і гіпербола проходить через точку $(-10;3)$.

Розв'язання: за умовою $2a=16$, тобто $a=8$. Підставивши в рівняння (31) значення $a=8$ і координати даної точки, отримаємо:

$$\frac{(-10)^2}{8^2}-\frac{(-3)^2}{b^2}=1;\; \frac{100}{64}-\frac{9}{b^2}=1;\; \frac{9}{b^2}=\frac{25}{16}-1=\frac{9}{16};\; b^2=16.$$

Підставивши a^2 і b^2 у рівняння (31), отримаємо $\frac{x^2}{64}-\frac{y^2}{16}=1.$

Задача 14. Скласти рівняння гіперболи за рівнянням її асимптот $y=\pm\frac{\sqrt{3}}{2}x$ і координатами точки, через яку вона проходить $\left(4\sqrt{3};3\sqrt{3}\right)$.

Розв'язання: рівняння асимптот гіперболи $y = \pm \frac{b}{a} x$. За умовою $\frac{b}{a} = \frac{\sqrt{3}}{2}$. Підставимо в рівняння (31) координати точки і розв'яжемо систему рівнянь:

$$\begin{cases} \frac{(4\sqrt{3})^2}{a^2} - \frac{(3\sqrt{3})^2}{b^2} = 1, \\ \frac{b}{a} = \frac{\sqrt{3}}{2}; \end{cases} \qquad \begin{cases} \frac{48}{a^2} - \frac{27}{b^2} = 1, \\ 2b = \sqrt{3a}; \end{cases} \qquad \frac{48}{a^2} - \frac{27}{\left(\frac{\sqrt{3a}}{2}\right)^2} = 1;$$

$$\frac{48}{a^2} - \frac{36}{a^2} = 1;\ a^2 = 12;\ a = \sqrt{12};\ b = \frac{\sqrt{3} \cdot \sqrt{12}}{2} = 3.$$

Рівняння гіперболи $\frac{x^2}{12} - \frac{y^2}{9} = 1$.

Задача 15. Скласти рівняння параболи з вершиною у початку координат, якщо її фокус лежить у точці $F(1; 0)$.

Розв'язання: фокус лежить на осі Ox, тобто рівняння параболи має вигляд $y^2 = 2px$. Оскільки координати фокуса $F\left(\frac{p}{2}; 0\right)$, то $\frac{p}{2} = 1$, $p = 2$. Підставивши значення p у рівняння (33), отримаємо $y^2 = 4x$.

Задача 16. Скласти рівняння параболи з вершиною у початку координат, яка симетрична відносно осі Oy і проходить через точку $A(-2; -4)$.

Розв'язання: шукана парабола симетрична відносно осі Oy, отже її рівняння має вигляд $x^2 = 2py$. Підставивши в це рівняння координати точки A, знайдемо p:

$$(-2)^2 = 2p \cdot (-4);\ 4 = -8p;\ p = -\frac{1}{2}.$$

Після підстановки значення p у рівняння параболи отримаємо $x^2 = -y$.

Задача 17. За даним рівнянням параболи $y^2 = -8x$ обчислити координати її фокуса, одержати рівняння директриси.

Розв'язання: з рівняння параболи $y^2 = -8x$ маємо $2p = -8$, $\frac{p}{2} = -2$.

Парабола симетрична відносно осі Ox, її фокус лежить на осі симетрії і має координати $F\left(\frac{p}{2}; 0\right)$, тобто $F(-2;\ 0)$. Рівняння директриси $x = -\frac{p}{2}$, тобто $x = 2$.

Задача 18. Привести рівняння параболи $x^2 - 6x + 2y + 7 = 0$ до канонічного виду. Знайти координати фокуса та рівняння директриси.

Розв'язання: знайдемо канонічне рівняння параболи, перетворивши рівняння $x^2 - 6x + 2y + 7 = 0$ до вигляду $(x - x_0)^2 = 2p(y - y_0)$:

$$x^2 - 6x = -2y - 7;\ (x^2 - 2 \cdot x \cdot 3 + 3^2) - 3^2 = -2y - 7;$$

$$(x-3)^2 = -2y - 7 + 9;\ (x-3)^2 = -2(y-1).$$

З цього рівняння $x_0 = 3,\ y_0 = 1,\ C(3;1)$ – вершина параболи.

Знайдемо координати фокуса. З рівняння $(x-3)^2 = -2(y-1)$ маємо: $4p = -2$, $\frac{p}{2} = -\frac{1}{2} = -0{,}5$. Координати фокуса $F\left(x_0;\ y_0 + \frac{p}{2}\right)$, тобто $F(3; 1 - 0{,}5)$, $F(3; 0{,}5)$.

Рівняння директриси: $y = y_0 - \frac{p}{2}$, тобто $y = 1 + 0{,}5;\ y = 1{,}5$.

Варіанти завдань для самостійної роботи

Коло, еліпс

1. Задано еліпс. Визначити його вісі, вершини, фокуси, директриси.

№	Еліпс	№	Еліпс	№	Еліпс
1	$4x^2 + 9y^2 = 36$	**3**	$2x^2 + y^2 = 4$	**5**	$4x^2 + 5y^2 = 40$
2	$9x^2 + 16y^2 = 144$	**4**	$x^2 + 9y^2 = 54$	**6**	$x^2 + 3y^2 = 18$

№	Еліпс	№	Еліпс	№	Еліпс
7	$2x^2+11y^2=22$	**15**	$3x^2+5y^2=30$	**23**	$x^2+8y^2=256$
8	$4x^2+y^2=36$	**16**	$7x^2+2y^2=28$	**24**	$3x^2+4y^2=36$
9	$2x^2+y^2=256$	**17**	$5x^2+7y^2=105$	**25**	$4x^2+y^2=32$
10	$6x^2+y^2=30$	**18**	$2x^2+5y^2=60$	**26**	$9x^2+y^2=54$
11	$3x^2+4y^2=12$	**19**	$x^2+11y^2=22$	**27**	$4x^2+5y^2=20$
12	$x^2+25y^2=50$	**20**	$x^2+4y^2=32$	**28**	$6x^2+y^2=18$
13	$4x^2+y^2=16$	**21**	$9x^2+8y^2=72$	**29**	$x^2+7y^2=126$
14	$6x^2+4y^2=48$	**22**	$6x^2+7y^2=126$	**30**	$25x^2+4y^2=200$

2. Складіть рівняння еліпса з фокусами на осі Ox, якщо відстань між фокусами дорівнює l, ексцентриситет ε.

№	l	ε	№	l	ε
1	12	$\frac{2}{3}$	**13**	3	$\frac{3}{4}$
2	10	$\frac{1}{8}$	**14**	17	$\frac{4}{9}$
3	5	$\frac{5}{6}$	**15**	4	$\frac{3}{10}$
4	6	$\frac{4}{5}$	**16**	15	$\frac{2}{7}$
5	9	$\frac{9}{11}$	**17**	12	$\frac{5}{13}$
6	14	$\frac{5}{7}$	**18**	9	$\frac{3}{5}$
7	20	$\frac{1}{2}$	**19**	2	$\frac{7}{11}$
8	15	$\frac{6}{7}$	**20**	5	$\frac{6}{15}$
9	7	$\frac{2}{5}$	**21**	13	$\frac{2}{3}$
10	3	$\frac{1}{3}$	**22**	7	$\frac{1}{8}$
11	10	$\frac{1}{4}$	**23**	1	$\frac{5}{6}$
12	5	$\frac{1}{5}$	**24**	6	$\frac{4}{5}$

№	l	ε	№	l	ε
25	18	$\frac{9}{11}$	**28**	8	$\frac{3}{8}$
26	3	$\frac{5}{7}$	**29**	3	$\frac{5}{7}$
27	3	$\frac{3}{4}$	**30**	8	$\frac{1}{2}$

3. Скласти рівняння еліпса з фокусами на осі Ox, якщо він проходить через точки A і B.

№	A	B	№	A	B
1	(1; 3)	(-4; 2)	**16**	(2; 1)	(4; 4)
2	(6; 0)	(3; -1)	**17**	(1; 2)	(-1; -5)
3	(5; 2)	(-2; -5)	**18**	(3; 4)	(-1; 0)
4	(-3; 4)	(-1; -1)	**19**	(4; -2)	(9; 9)
5	(-2; 1)	(-5; 2)	**20**	(2; 3)	(-1; 4)
6	(1; 0)	(-4; 2)	**21**	(-6; 0)	(2; 2)
7	(-1; -1)	(7; 2)	**22**	(-1; -1)	(3; -4)
8	(1; -5)	(0; -8)	**23**	(2; 7)	(0; -8)
9	(0; 9)	(-7; -5)	**24**	(1; -9)	(7; 5)
10	(2; 4)	(-1; -2)	**25**	(4; 4)	(-1; 2)
11	(0; -1)	(4; -5)	**26**	(6; -1)	(-3; 2)
12	(5; 3)	(1; -2)	**27**	(-5; 1)	(0; -2)
13	(-3; 3)	(-1; 4)	**28**	(3; 3)	(9; 4)
14	(0; -4)	(2; 1)	**29**	(-2; 5)	(-6; -1)
15	(-2; 1)	(-5; 2)	**30**	(2; 3)	(-1; 4)

4. Скласти рівняння кола, яке проходить через три точки M, N, P.

№	M	N	P	№	M	N	P
1	(-1; 3)	(4; -2)	(-3; 2)	**8**	(1; -5)	(0; -8)	(11; -2)
2	(5; 0)	(1; -1)	(-2; 1)	**9**	(0; 9)	(-7; -5)	(6; 1)
3	(-5; -2)	(1; 6)	(4; 2)	**10**	(2; 4)	(-1; -2)	(3; -6)
4	(-3; -4)	(3; -1)	(5; 0)	**11**	(1; 1)	(-4; -3)	(-2; -1)
5	(-2; -1)	(7; 2)	(-3; -1)	**12**	(-6; -7)	(1; 5)	(0; 3)
6	(1; 0)	(-4; 2)	(2; 1)	**13**	(-3; -2)	(-1; 4)	(4; -3)
7	(-1; -1)	(7; 2)	(8; 3)	**14**	(2; -2)	(0; 9)	(-2; -5)

№	M	N	P	№	M	N	P
15	(-2; -3)	(1; -4)	(0; 5)	**23**	(-3; 3)	(-1; 4)	(-2; 1)
16	(-6; 0)	(2; 2)	(-2; 6)	**24**	(0; -4)	(2; 1)	(2; 2)
17	(-1; -1)	(3; -4)	(7; 3)	**25**	(-2; 1)	(-5; 2)	(1; 3)
18	(2; 7)	(0; -8)	(4; -8)	**26**	(6; -1)	(-3; 2)	(3; 2)
19	(1; -9)	(7; 5)	(0; 9)	**27**	(-5; 1)	(0; -2)	(1; -8)
20	(4; 4)	(-1; 2)	(-5; -1)	**28**	(3; 3)	(9; 4)	(-2; 3)
21	(0; -1)	(4; -5)	(-1; 2)	**29**	(-2; 5)	(-6; -1)	(-4; 5)
22	(5; 3)	(1; -2)	(5; 1)	**30**	(2; 3)	(-1; 4)	(3; 5)

5. Скласти рівняння кола, яке має центр у точці C і дотикається прямої.

№	Пряма	C	№	Пряма	C
1	$4x-2y+13=0$	(2; 2)	**16**	$3x-y+5=0$	(4; 4)
2	$x-5y+3=0$	(9; 1)	**17**	$x-7y-4=0$	(6; -1)
3	$-x+y+2=0$	(-1; -4)	**18**	$2x+3y-6=0$	(-5; 1)
4	$5x-6y-1=0$	(1; -6)	**19**	$-x+y+1=0$	(3; 3)
5	$x+y-10=0$	(3; -1)	**20**	$11x-y-3=0$	(-2; 5)
6	$x-y+3=0$	(-1; 4)	**21**	$x+5y+2=0$	(5; -3)
7	$2x+y-6=0$	(-3; 3)	**22**	$-x-y+13=0$	(-3; 4)
8	$-x-2y+5=0$	(2; -2)	**23**	$2x-y-1=0$	(6; -1)
9	$y-x-2=0$	(-4; 1)	**24**	$y+3x-4=0$	(1; -3)
10	$x+y+8=0$	(-3; -6)	**25**	$3x+y-9=0$	(-5; 1)
11	$x+7y-21=0$	(-3; 2)	**26**	$x+7y-21=0$	(2; -1)
12	$-x-2y+4=0$	(-5; 2)	**27**	$-2x+3y+5=0$	(1; 7)
13	$5x-2y+15=0$	(-2; 4)	**28**	$x-y-3=0$	(5; 5)
14	$x+y+1=0$	(2; 3)	**29**	$-4x+5y-7=0$	(-1; -2)
15	$x-2y+12=0$	(1; 0)	**30**	$y-2x-3=0$	(3; 4)

6. Складіть рівняння кола, яке проходить через точки A і B, якщо центр його лежить на прямій.

№	Пряма	A	B	№	Пряма	A	B
1	$4x-2y+13=0$	(-2; 1)	(2; 2)	**2**	$x-5y+3=0$	(1; 0)	(9; 1)

№	Пряма	A	B	№	Пряма	A	B
3	$-x+y+2=0$	(-1; 1)	(-1; 4)	**17**	$5x-2y+15=0$	(-1; 1)	(-2; 4)
4	$5x-6y-1=0$	(1; -5)	(1; -6)	**18**	$x+y+1=0$	(2; 7)	(2; 3)
5	$3x-y+5=0$	(4; 4)	(2; -1)	**19**	$x-2y+12=0$	(1; -9)	(1; 0)
6	$x-7y-4=0$	(6; -1)	(3; 3)	**20**	$11x-y-3=0$	(-2; 5)	(5; 2)
7	$2x+3y-6=0$	(-5; 1)	(-4; 2)	**21**	$x+5y+2=0$	(5; -3)	(-2; 1)
8	$-x+y+1=0$	(3; 3)	(2; 1)	**22**	$-x-y+13=0$	(-3; 4)	(3; 3)
9	$x+y-10=0$	(0; 9)	(3; -1)	**23**	$2x-y-1=0$	(6; -1)	(4; 22)
10	$x-y+3=0$	(2; 4)	(-1; 4)	**24**	$y+3x-4=0$	(1; -3)	(1; -9)
11	$2x+y-6=0$	(0; -1)	(-3; 3)	**25**	$3x+y-9=0$	(-5; 1)	(-2; 1)
12	$-x-2y+5=0$	(5; 3)	(2; -2)	**26**	$x+7y-21=0$	(2; -1)	(3; 0)
13	$y-x-2=0$	(-3; 3)	(-4; 1)	**27**	$-2x+3y+5=0$	(1; 7)	(1; -8)
14	$x+y+8=0$	(0; -4)	(-3; 6)	**28**	$x-y-3=0$	(5; 5)	(2; 1)
15	$x+7y-21=0$	(2; 3)	(-3; 2)	**29**	$-4x+5y-7=0$	(-1; 2)	(-2; 5)
16	$-x-2y+4=0$	(-6; 0)	(-5; 2)	**30**	$y-2x-3=0$	(3; 4)	(0; -4)

Гіпербола, парабола

7. Привести рівняння гіперболи до канонічного виду. Знайти фокуси, ексцентриситет, рівняння асимптот і директрис.

№	Гіпербола	№	Гіпербола
1	$8x^2-2y^2-16=0$	**6**	$4x^2-6y^2+16x+12y-26=0$
2	$4x^2-3y^2+8x-12y-20=0$	**7**	$8x^2-12y^2+112x-48y+248=0$
3	$8x^2-9y^2-32x-40=0$	**8**	$2x^2-3y^2+4x+12y-16=0$
4	$6x^2-4y^2-8y-28=0$	**9**	$36x^2-64y^2-2304=0$
5	$16x^2-9y^2-64x-54y-161=0$	**10**	$4x^2-y^2-8=0$

№	Гіпербола	№	Гіпербола
11	$2x^2-3y^2-6y-15=0$	**21**	$9x^2-16y^2-144=0$
12	$6x^2-11y^2-66=0$	**22**	$7x^2-2y^2-42x+49=0$
13	$4x^2-y^2-16=0$	**23**	$2x^2-3y^2+28x-12y+62=0$
14	$8x^2-6y^2-48=0$	**24**	$3x^2-4y^2+48x-8y+176=0$
15	$5x^2-4y^2-30x-8y+21=0$	**25**	$3x^2-2y^2-4y-14=0$
16	$5x^2-2y^2-30x+28y-63=0$	**26**	$2x^2-3y^2+8x+6y-13=0$
17	$8x^2-2y^2-16x-12y-26=0$	**27**	$2x^2-3y^2-4x+6y-7=0$
18	$4x^2-6y^2-12y-30=0$	**28**	$8x^2-9y^2-32x-40=0$
19	$14x^2-8y^2-84x+32y-18=0$	**29**	$8x^2-6y^2+16x-24y-40=0$
20	$2x^2-3y^2-4x+6y-7=0$	**30**	$4x^2-2y^2-24=0$

8. Скласти рівняння гіперболи з фокусами на осі Ox, якщо довжина її уявної осі дорівнює l і гіпербола проходить через точку O.

№	l	O	№	l	O
1	12	(-4; 2)	**9**	7	(-1; -2)
2	10	(3; -1)	**10**	3	(4; -5)
3	5	(-2; -5)	**11**	10	(1; -2)
4	6	(-1; -1)	**12**	5	(-1; 4)
5	9	(-5; 2)	**13**	3	(2; 1)
6	14	(-4; 2)	**14**	8	(-5; 2)
7	20	(7; 2)	**15**	2	(-4; 2)
8	15	(0; -8)	**16**	17	(2; -1)

№	l	O	№	l	O
17	4	(1; 7)	**24**	7	(1; -9)
18	15	(5; 4)	**25**	1	(4; 4)
19	12	(-1; -2)	**26**	6	(6; -1)
20	9	(2; 3)	**27**	18	(-5; 1)
21	2	(-6; 0)	**28**	3	(3; 3)
22	5	(-1; -1)	**29**	8	(-2; 5)
23	13	(2; 7)	**30**	11	(2; 3)

9. Скласти рівняння гіперболи, якщо відстань між фокусами дорівнює l, а рівняння асимптот y.

№	l	y	№	l	y
1	4	$y=\pm\frac{5}{6}x$	**16**	2	$y=\pm\frac{9}{13}x$
2	10	$y=\pm\frac{1}{8}x$	**17**	5	$y=\pm\frac{2}{9}x$
3	5	$y=\pm\frac{5}{6}x$	**18**	13	$y=\pm\frac{1}{5}x$
4	6	$y=\pm\frac{4}{5}x$	**19**	7	$y=\pm\frac{1}{4}x$
5	9	$y=\pm\frac{9}{11}x$	**20**	1	$y=\pm\frac{6}{13}x$
6	6	$y=\pm\frac{4}{9}x$	**21**	2	$y=\pm\frac{7}{11}x$
7	9	$y=\pm\frac{3}{10}x$	**22**	5	$y=\pm\frac{6}{15}x$
8	14	$y=\pm\frac{2}{7}x$	**23**	13	$y=\pm\frac{2}{3}x$
9	20	$y=\pm\frac{5}{13}x$	**24**	7	$y=\pm\frac{4}{15}x$
10	15	$y=\pm\frac{3}{5}x$	**25**	1	$y=\pm\frac{1}{8}x$
11	17	$y=\pm\frac{5}{7}x$	**26**	6	$y=\pm\frac{5}{6}x$
12	4	$y=\pm\frac{1}{2}x$	**27**	18	$y=\pm\frac{4}{5}x$
13	15	$y=\pm\frac{2}{3}x$	**28**	3	$y=\pm\frac{9}{11}x$
14	12	$y=\pm\frac{7}{12}x$	**29**	8	$y=\pm\frac{5}{7}x$
15	9	$y=\pm\frac{5}{9}x$	**30**	11	$y=\pm\frac{1}{2}x$

10. Скласти рівняння параболи з вершиною у початку координат, яка симетрична відносно осі Ox і проходить через точку K. Знайти координати фокуса, рівняння директриси.

№	K	№	K
1	(-2; 1)	**16**	(6; -1)
2	(1; 0)	**17**	(-5; 1)
3	(-1; -1)	**18**	(3; 3)
4	(1; -5)	**19**	(-2; 5)
5	(0; 9)	**20**	(5; -3)
6	(2; 4)	**21**	(-3; 4)
7	(0; -1)	**22**	(6; -1)
8	(5; 3)	**23**	(1; -3)
9	(-3; 3)	**24**	(-5; 1)
10	(0; -4)	**25**	(2; -1)
11	(2; 3)	**26**	(1; 7)
12	(-6; 0)	**27**	(5; 5)
13	(-1; -1)	**28**	(-1; -2)
14	(2; 7)	**29**	(1; -9)
15	(4; 4)	**30**	(3; 4)

11. Скласти рівняння геометричного місця точок, які однаково віддалені від точки A та від прямої.

№	Пряма	A	№	Пряма	A
1	$4x-2y+13=0$	(2; 2)	**12**	$-x-2y+4=0$	(-5; 2)
2	$x-5y+3=0$	(9; 1)	**13**	$5x-2y+15=0$	(-2; 4)
3	$-x+y+2=0$	(-1; 4)	**14**	$x+y+1=0$	(2; 3)
4	$5x-6y-1=0$	(1; -6)	**15**	$x-2y+12=0$	(1; 0)
5	$x+y-10=0$	(3; -1)	**16**	$3x-y+5=0$	(2; -1)
6	$x-y+3=0$	(-1; 4)	**17**	$x-7y-4=0$	(3; 3)
7	$2x+y-6=0$	(-3; 3)	**18**	$2x+3y-6=0$	(-4; 2)
8	$-x-2y+5=0$	(2; -2)	**19**	$-x+y+1=0$	(2; 1)
9	$y-x-2=0$	(-4; 1)	**20**	$11x-y-3=0$	(5; 2)
10	$x+y+8=0$	(-3; 6)	**21**	$x+5y+2=0$	(-2; 1)
11	$x+7y-21=0$	(-3; 2)	**22**	$-x-y+13=0$	(3; 3)

№	Пряма	A	№	Пряма	A
23	$2x - y - 1 = 0$	(4; 2)	**27**	$-2x + 3y + 5 = 0$	(0; -8)
24	$y + 3x - 4 = 0$	(1; -9)	**28**	$x - y - 3 = 0$	(2; 1)
25	$3x + y - 9 = 0$	(-2; 1)	**29**	$-4x + 5y - 7 = 0$	(-2; 5)
26	$x + 7y - 21 = 0$	(3; 0)	**30**	$y - 2x - 3 = 0$	(0; -4)

Запитання для самоперевірки

1. Надати визначення кола, еліпса, параболи, гіперболи.
2. Який вигляд має канонічне рівняння кола, еліпса, гіперболи, параболи?
3. Що називається ексцентриситетом еліпса, гіперболи?
4. Де знаходяться фокуси цих кривих?
5. Навести визначення рівнобічної гіперболи.
6. Записати рівняння асимптот гіперболи.
7. Які криві володіють властивостями центральної симетрії, а які ні?

Використана література

Клетеник Д. В. Сборник задач по аналитической геометрии / Д. В. Клетеник. – М. : Наука, 1980. – 240 с.

Малярець Л. М. Математика для економістів. Вища математика для економістів : навчальний посібник. Ч. 1 / Л. М. Малярець, Л. М. Афанасьєва, А. В. Ігначкова. – Х. : Вид. ХНЕУ, 2011. – 396 с.

Малярець Л. М. Практичний посібник до розв'язання задач з курсу "Математика для економістів". Ч. 1 / Л. М. Малярець, Л. Д. Широкорад. – Х. : ХНЕУ, 2008. – 304 с.

Робоча програма навчальної дисципліни "Вища та прикладна математика" для студентів галузі знань "Менеджмент і адміністрування" всіх форм навчання / укл. О. Д. Бабіна, О. В. Лежепьокова. – Х. : Вид. ХНЕУ, 2011. – 84 с.

Зміст

НАВЧАЛЬНЕ ВИДАННЯ

Методичні рекомендації до самостійної роботи з навчальної дисципліни "ВИЩА ТА ПРИКЛАДНА МАТЕМАТИКА" для студентів галузі знань 0306 "Менеджмент і адміністрування" всіх форм навчання

Укладач **Ковальова** Катерина Олександрівна

Відповідальний за випуск **Маляреця Л. М.**

Редактор **Пушкар І. П.**

Коректор **Мартовицька-Максимова В. А.**

План 2013 р. Поз. № 212.
Підп. до друку Формат 60 х 90 1/16. Папір MultiCopy. Друк Riso.
Ум.-друк. арк. 4,5. Обл.-вид. арк. 5,63. Тираж прим. Зам. №

Видавець і виготівник – видавництво ХНЕУ, 61166, м. Харків, пр. Леніна, 9а

Свідоцтво про внесення до Державного реєстру суб'єктів видавничої справи

Дк № 481 від 13.06.2001 р.