МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ,
МОЛОДІ ТА СПОРТУ УКРАЇНИ

ХАРКІВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ ЕКОНОМІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ

Методичні рекомендації до самостійної роботи з теми "Інтегральне числення" навчальної дисципліни "МАТЕМАТИКА ДЛЯ ЕКОНОМІСТІВ" для студентів галузі знань 0305 "Економіка та підприємництво" всіх форм навчання

Харків. Вид. ХНЕУ, 2013

Затверджено на засіданні кафедри вищої математики та економіко-математичних методів.

Протокол № 3 від 03.10.2012 р.

Укладач Титарєв В. Г.

М54 Методичні рекомендації до самостійної роботи з теми "Інтегральне числення" навчальної дисципліни "Математика для економістів" для студентів галузі знань 0305 "Економіка та підприємництво" всіх форм навчання / укл. Титарєв В. Г. — Х. : Вид. ХНЕУ, 2013. — 40 с. (Укр. мов.)

Подано завдання для самостійної роботи та методичні рекомендації до їх розв'язання з даної навчальної дисципліни, де розглянуто теоретичні матеріали, що відповідають темі "Інтегральне числення". Викладено необхідний лекційний матеріал, подано розв'язання типових прикладів. Наведено варіанти завдань для самостійної роботи, що можуть бути використані протягом вивчення відповідного теоретичного і практичного матеріалу.

Рекомендовано для студентів галузі знань 0305 "Економіка та підприємництво".

Тема 12. Інтегральне числення. Невласні інтеграли

До важливого типу визначених інтегралів належать невласні інтеграли, які пропонуються на розгляд в цій роботі.

Існування визначеного інтеграла вимагає обмеженості підінтегральної функції на скінченому інтервалі. Якщо хоча б одна з цих умов не виконується, то маємо інтеграли, які називаються невласними інтегралами першого роду, якщо інтервал інтегрування нескінченний, і другого роду, якщо функція на інтервалі необмежена. При геометричному тлумаченні визначеного інтеграла можна говорити про площу криволінійної трапеції з нескінченною основою або з нескінченною висотою. У деяких випадках такі трапеції можуть мати скінчену площу, тоді відповідні невласні інтеграли мають і практичне застосування.

12.1. Невласні інтеграли з нескінченними границями (першого роду)

Означення 1. Нехай функція *f(x)* визначена на проміжку [a,+∞) та інтегрована на будь-якому відрізку [a,b], тобто існує визначений інтеграл

$$\int_a^b f(x)dx$$

за будь-якого $b>a$. Тоді, якщо існує скінчена границя інтеграла,

$$\lim_{b\to+\infty}\int_a^b f(x)dx, \tag{12.1}$$

то його називають невласним інтегралом першого роду і позначають

$$\int_a^\infty f(x)dx. \tag{12.2}$$

Таким чином, за означенням маємо, що:

$$\int_a^\infty f(x)dx = \lim_{b\to\infty}\int_a^b f(x)dx.$$

У такому випадку кажуть, що інтеграл існує або збігається. Якщо границя (12.1) не існує або нескінченна,то говорять, що інтеграл (12.2) не існує або розбігається.

Аналогічно інтегралу (12.2) вводиться невласний інтеграл на проміжку *(-∞,b]:*

$$\int_{-\infty}^{b} f(x)dx = \lim_{a\to-\infty}\int_{a}^{b} f(x)dx \qquad (12.3)$$

Як суму інтегралів видів (12.2) та (12.3) можна визначити невласний інтеграл з двома нескінченними границями, тобто

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = \int_{-\infty}^{c} f(x)dx + \int_{c}^{\infty} f(x)dx, \qquad (12.4)$$

де *c* – будь-яке число за умови, що інтеграли в правій частині (12.4) існують. Якщо хоча б один з інтегралів у правій частині (12.4) не збігається, то і весь інтеграл розбігається.

При дослідженні невласних інтегралів треба: по-перше, визначити збіжність або розбіжність невласного інтеграла, по-друге, обчислити вартість інтеграла, якщо він збігається. Іноді ці дві вимоги можна об’єднати.

Приклад 1. Дослідити на збіжність інтеграл $\int_{0}^{+\infty}\frac{dx}{1+x^2}$.

Розв’язання. За означенням запишемо:

$$\int_{0}^{+\infty}\frac{dx}{1+x^2} = \lim_{b\to+\infty}\int_{a}^{b}\frac{dx}{1+x^2} = \lim_{b\to+\infty} arctgx\Big|_{0}^{b} = \lim_{b\to+\infty} arctgb = \frac{\pi}{2},$$

отже, інтеграл збігається, тобто існує скінчена площа фігури на рис. 1.

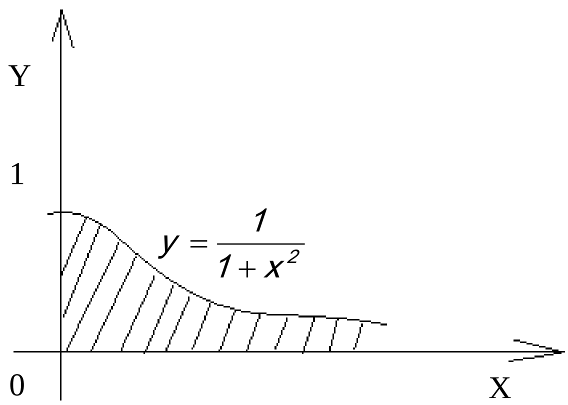

Рис. 1. **Скінчена площа фігури**

Приклад 2. Дослідити на збіжність інтеграл: $\int\limits_{\pi}^{+\infty} \sin x \, dx$.

Розв’язання.

$$\int\limits_{\pi}^{+\infty} \sin x dx = \lim_{b \to +\infty} \int\limits_{\pi}^{b} \sin x dx = -\lim_{b \to +\infty} \cos x \Big|_{\pi}^{b} = -\lim_{b \to +\infty} (\cos b - \cos \pi) = -1 - \lim_{b \to +\infty} \cos b$$

.

Оскільки границя $\lim\limits_{b \to +\infty} \cos b$ не існує, то невласний інтеграл $\int\limits_{\pi}^{+\infty} \sin x \, dx$ є розбіжним.

Приклад 3. Дослідити збіжність інтеграл $\int\limits_{1}^{+\infty} \frac{dx}{x^{\alpha}}$, $\alpha \in R$ — деяке число.

Розв’язання.

1. Якщо $\alpha \neq 1$, тоді для будь-якого $b>0$

$$\lim_{b \to +\infty} \int\limits_{1}^{b} \frac{dx}{x^{\alpha}} = \lim_{b \to +\infty} \frac{x^{1-\alpha}}{1-\alpha} \Bigg|_{1}^{b} = \lim_{b \to +\infty} \frac{b^{1-\alpha} - 1}{1-\alpha} = \begin{cases} \dfrac{-1}{1-a}, \text{ ÿêù î } \alpha > 1 \\ \infty, \text{ ÿêù î } \alpha < 1. \end{cases}$$

2. Якщо $\alpha = 1$, то для будь-якого $b>0$

$$\lim_{b \to +\infty} \int\limits_{1}^{b} \frac{dx}{x} = \lim_{b \to +\infty} \ln x \Big|_{1}^{b} = \lim_{b \to +\infty} b = \infty.$$

Таким чином, цей інтеграл збігається за всіх $\alpha > 1$ і розбігається за $\alpha \leq 1$. Геометричну інтерпретацію результату представлено на рис. 2. Для всіх кривих, що лежать вище кривої $y = \frac{1}{x}$, а також для самої цієї кривої не можна обчислити площу трапеції під нею, бо вона нескінченна. А для всіх кривих, що лежать нижче $y = \frac{1}{x}$ така площа існує, і має залежно від $\alpha > 1$ деяку вартість.

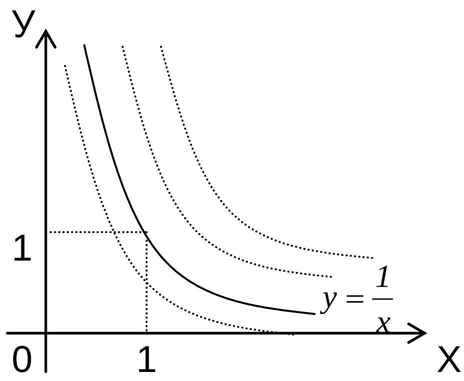

Рис. 2. **Геометрична інтерпретація результату**

12.2. Ознаки збіжності невласних інтегралів

Означення цієї ознаки формулюється таким чином. Якщо функції *f(x)* та *φ(x)* неперервні на проміжку [a,+∞) і задовольняють умову $0 \le f(x) \le \varphi(x)$, то зі збіжності інтеграла:

$$\int_a^{+\infty} \varphi(x)dx \tag{12.5}$$

випливає збіжність інтеграла:

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx. \tag{12.6}$$

А з розбіжності інтеграла (12.6) випливає і розбіжність інтеграла (12.5).

Приклад 4. Дослідити на збіжність інтеграл $\int_1^{\infty} \frac{dx}{x^2(1+x)}$.

Розв'язання. Порівняємо підінтегральну функцію $f(x) = \frac{1}{x^2(1+x)}$ з функцією $\varphi(x) = \frac{1}{x^2}$ на *[1;+∞);* зрозуміло, що $\frac{1}{x^2(1+x)} < \frac{1}{x^2}$.

Але ж інтеграл $\int\limits_1^{\infty} \frac{dx}{x^2}$, як вже було показано (приклад 3), збігається,

бо α = *2>1*. Отже, за ознакою порівняння збігається і цей інтеграл.

Приклад 5. Дослідити на збіжність інтеграл: $\int\limits_1^{+\infty} \sqrt{x}e^{-x}\,dx$.

Розв'язання. Оскільки очевидна нерівність

$\sqrt{x}e^{-x} < xe^{-x}$, при $x \ge 1$, то

$$\int\limits_1^{+\infty} \sqrt{x}e^{-x}\,dx < \int\limits_1^{+\infty} xe^{-x}\,dx = \left| \begin{matrix} u = x; & dv = e^{-x}dx \\ du = dx; & v = -e^{-x} \end{matrix} \right| = -\frac{e^{-x}}{x}\Bigg|_1^{+\infty} + \int\limits_1^{+\infty} e^{-x}\,dx = e^{-1} -$$

$$-e^{-x}\Big|_1^{+\infty} = e^{-1} + e^{-1} = 2/e.$$

Отже, досліджуваний невласний інтеграл є збіжним.

Приклад 6. Дослідити на збіжність інтеграл $\int\limits_a^{+\infty} \frac{dx}{\ln x}, \quad a > 1.$

Розв'язання. Порівняємо підінтегральну функцію $f(x) = \frac{1}{\ln x}$

з функцією $\varphi(x) = \frac{1}{x}$ на $[a,+\infty)$. Зрозуміло, що $\forall x \in (a,+\infty)$

$\ln x < x \Rightarrow \quad \frac{1}{\ln x} > \frac{1}{x}$, але ж інтеграл $\int\limits_a^{+\infty} \frac{dx}{x}$, як вже було показано, розбігається, бо α = *1*. Отже, за ознакою порівняння розбігається і цей інтеграл.

Приклад 7. Дослідити на збіжність інтеграл: $\int\limits_1^{+\infty} \frac{\sin^4 x}{x^3}dx.$

Розв'язання. Оскільки $\frac{\sin^4 x}{x^3} \le \frac{1}{x^3}$, а $\int\limits_1^{+\infty} \frac{1}{x^3}dx$ збігається , то на підставі порівняльної ознаки збігається й інтеграл $\int\limits_1^{+\infty} \frac{\sin^4 x}{x^3}dx$.

Досить часто порівняльну ознаку використовують у граничній формі:

1) якщо для додатних функцій $f(x)$ та $\varphi(x)$ існує скінчена границя

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{\varphi(x)}=k,(0\le k<\infty), \qquad (12.7)$$

то обидва інтеграли $\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx$, $\int\limits_a^{+\infty}\varphi(x)dx$ збігаються одночасно;

2) якщо

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{\varphi(x)}=k,(0<k<\infty), \qquad (12.8)$$

то обидва інтеграли розбігаються одночасно.

Таким чином, при $(0<k<\infty)$ обидва інтеграли збігаються або розбігаються одночасно. Зокрема, якщо

$$0\le\varphi(x)=\frac{C}{x^{\alpha}}\ \left(C=const,\ x\to+\infty\right), \qquad (12.9)$$

то інтеграл $\int\limits_a^{+\infty}\varphi(x)dx$ збігається при $\alpha>1$ і розбігається при $\alpha\le1$.

Приклад 8. Дослідити на збіжність інтеграл: $\int\limits_3^{\infty}\frac{dx}{\sqrt{x(x-1)(x-2)}}$.

Розв'язання. Оскільки $f(x)=\frac{1}{\sqrt{x(x-1)(x-2)}}=\frac{1}{x^{3/2}\sqrt{(1-1/x)(1-2/x)}}$,

то в якості $\varphi(x)=\frac{1}{x^{3/2}}$, а оскільки інтеграл від цієї функції збігається (α=3/2), та

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{\varphi(x)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\dfrac{1}{x^{3/2}\sqrt{(1-1/x)(1-2/x)}}}{\dfrac{1}{x^{3/2}}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{\sqrt{(1-1/x)(1-2/x)}}=1,$$

то досліджуваний інтеграл за порівняльною ознакою в граничній формі збігається.

Приклад 9. Дослідити на збіжність інтеграл: $\int\limits_1^{\infty}\frac{(x+\sqrt{x+1})dx}{(x^2+2\sqrt[5]{x^4+1})}$.

Розв'язання. Оскільки $f(x)=\frac{(x+\sqrt{x+1})dx}{(x^2+2\sqrt[5]{x^4+1})}=\frac{x(1+\sqrt{1/x+1/x^2})}{x^2(1+2\sqrt[5]{1/x^6+1/x^{10}})}$, то в якості $\varphi(x)=\dfrac{1}{x}$, а оскільки інтеграл від цієї функції розбігається (α=1), та

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{\varphi(x)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{1}{x}\frac{1+\sqrt{1/x+1/x^2}}{1+2\sqrt[5]{1/x^6+1/x^{10}}}}{\frac{1}{x}}=1,$$

то досліджуваний інтеграл за порівняльною ознакою в граничній формі розбігається.

Приклад 10. Дослідити на збіжність інтеграл: $\int\limits_1^{\infty}(1-cos(2/x))dx.$

Розв'язання. Оскільки $f(x)=1-cos(2/x)=2sin^2(1/x)$, то в якості

$$\phi(x)=2/x^2,\ \lim_{õ\to+\infty}\frac{f(x)}{\phi(x)}=\lim_{õ\to+\infty}\frac{2sin^2(1/x)}{\frac{2}{x^2}}=\lim_{õ\to+\infty}\frac{2\frac{1}{x^2}}{\frac{2}{x^2}}=1,$$

отже, за порівняльною ознакою в граничній формі досліджуваний інтеграл збігається.

12.3. Ознака абсолютної збіжності невласних інтегралів першого роду

До цього часу розглядали інтеграли від додатних функцій. Далі це обмеження не будемо враховувати.

Означення. Збіжний інтеграл $\int\limits_a^{+\infty}f(x)dx$ називається **абсолютно збіжним**, якщо збігається інтеграл $\int\limits_a^{+\infty}|f(x)|dx$. У випадку, коли інтеграл $\int\limits_a^{+\infty}f(x)dx$ збігається, а інтеграл $\int\limits_a^{+\infty}|f(x)|dx$ розбігається, інтеграл $\int\limits_a^{+\infty}f(x)dx$ називається **умовно збіжним**. Слід зазначити, що зі збіжності інтеграла $\int_a^{+\infty} |f(x)|dx$ випливає збіжність інтеграла $\int_a^{+\infty} f(x)dx$. Цю ознаку називають ознакою **абсолютної збіжності**.

Приклад 11. Дослідити на збіжність інтеграл $\int_{\pi/2}^{+\infty} \frac{\sin x}{x^2}dx$.

Розв'язання. У цьому прикладі підінтегральна функція знакозмінна, оскільки *sin(x)* може приймати значення різних знаків як додатні, так і від'ємні. Застосуємо порівняльну ознаку для абсолютної величини підінтегральної функції використавши очевидну нерівність:

$$\frac{|\sin x|}{x^2} \le \frac{1}{x^2}.$$

Отже, інтеграл від абсолютної величини підінтегральної функції збігається за порівняльною ознакою. Досліджуваний інтеграл збігається за ознакою абсолютної збіжності.

Приклад 12. Дослідити на збіжність інтеграл $\int_{\pi/2}^{+\infty} \frac{\sin x}{x}dx$.

Розв'язання. Припустивши, що цей інтеграл збігається, застосуємо до нього формулу інтегрування частинами для визначеного інтеграла:

$$\int_a^{+\infty} u(x)v'(x)dx = u(x)v(x)\Big|_a^{+\infty} - \int_a^{+\infty} u'(x)v(x)\,dx.$$

Для досліджуваного інтеграла отримаємо:

$$\int_{\pi/2}^{+\infty} \frac{\sin x}{x}dx = -\frac{\cos x}{x}\Bigg|_{\pi/2}^{+\infty} - \int_{\pi/2}^{+\infty} \frac{\cos x}{x^2}dx = \lim_{N\to+\infty} \frac{\cos N}{N} - \int_{\pi/2}^{+\infty} \frac{\cos x}{x^2}dx.$$

Оскільки $\frac{|\cos x|}{x^2} \le \frac{1}{x^2}$, а інтеграл $\int_{\pi/2}^{+\infty} \frac{1}{x^2}\,dx$ збігається, а поза інтегральний член прямує до нуля то на підставі ознаки порівняння збігається і інтеграл $\int_{\pi/2}^{+\infty} \frac{|\cos x|}{x^2}dx$. Звідси випливає, що інтеграл $\int_{\pi/2}^{+\infty} \frac{\cos x}{x^2}dx$ збігається абсолютно і, отже, збігається початковий інтеграл $\int_{\pi/2}^{+\infty} \frac{\sin x}{x}dx$.

Умовна збіжність цього інтеграла випливає із нерівності:

$$\left|\frac{\sin x}{x}\right| \geq \left|\frac{\sin^2 x}{x}\right| = \frac{\sin^2 x}{x} = \frac{1-\cos 2x}{x}.$$

Унаслідок порівняльної ознаки маємо умовну збіжність, оскільки інтеграл від абсолютної величини підінтегральної функції розбігається:

$$\int_{\pi/2}^{+\infty}\frac{|\sin x|}{x}dx \geq \int_{\pi/2}^{+\infty}\frac{\sin^2 x}{x}dx = \int_{\pi/2}^{+\infty}\frac{1-\cos 2x}{2x}dx = \int_{\pi/2}^{+\infty}\frac{dx}{2x} - \int_{\pi/2}^{+\infty}\frac{\cos 2x}{2x}dx.$$

Перший із інтегралів справа розбігається, а другий збігається. Таким чином, інтеграл $\int_{\pi/2}^{+\infty}\frac{|\sin x|}{x}dx$ є розбіжним. Отже, інтеграл $\int_{\pi/2}^{+\infty}\frac{\sin x}{x}dx$ є умовно збіжним.

12.4. Інтеграл Ейлера − Пуассона

У вивченні теорії ймовірностей часто зустрічається інтеграл

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{\frac{-x^2}{2}}\,dx,$$

який називається інтегралом Ейлера − Пуассона. Підінтегральну функцію $y = e^{\frac{-x^2}{2}}$, графік якої наведено на рис. 3, називають нормальною кривою або гривою Гаусса.

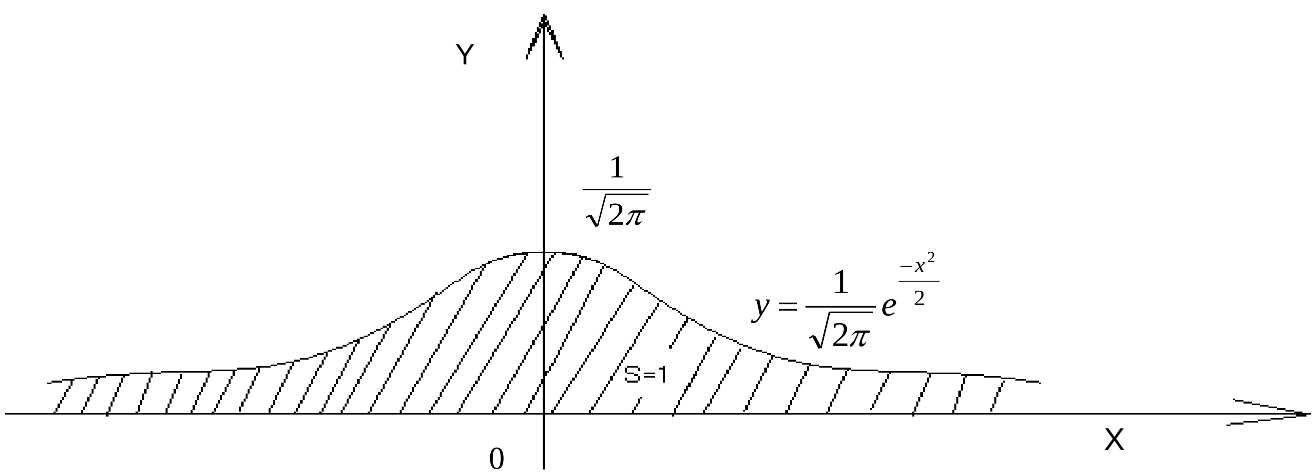

Рис. 3. **Крива Гаусса**.

Знайдемо числове значення цього інтеграла. Нехай

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} e^{\frac{-x^2}{2}} dx \Rightarrow I^2 = \int_{-\infty}^{\infty} e^{\frac{-x^2}{2}} dx \int_{-\infty}^{\infty} e^{\frac{-y^2}{2}} dy = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{(x^2+y^2)}{2}} dxdy =$$

$$= \left| \begin{matrix} x = rcos\varphi; \, dxdy = rdrd\varphi; \\ y = rsin\varphi; \, \alpha = 0; \;\; \beta = 2\pi \end{matrix} \right| = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\infty} e^{-\frac{r^2}{2}} rdr = -2\pi \int_0^{\infty} e^{-\frac{r^2}{2}} d(-\frac{r^2}{2}) =$$

$$= -2\pi e^{\frac{-r^2}{2}} \Big|_0^{+\infty} = 2\pi \Rightarrow I = \int_{-\infty}^{\infty} e^{\frac{-x^2}{2}} dx = \sqrt{2\pi},$$

тоді площа під кривою $y = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{\frac{-x^2}{2}}$ буде $S = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{\frac{-x^2}{2}} dx = 1.$

12.5. Невласні інтеграли від розривних функцій (другого роду)

Означення. Нехай функція *f(x)* визначена на проміжку *[a,b).* Точку *x = b* будемо називати особливою, якщо функція *f(x)* необмежена в будь-якому околі цієї точки, тобто має розрив 2-го роду, але обмежена на будь-якому відрізку $[a, b-\varepsilon]$, що входить в *[a,b].* Нехай також на такому відрізку $[a, b-\varepsilon]$ функція *f(x)* інтегрована, тобто існує визначений інтеграл

$$\int_a^{b-\varepsilon} f(x)dx \qquad (12.10)$$

при будь-якому $\varepsilon > 0$, такому, що $b - \varepsilon > a$. Тоді, якщо існує скінчена границя

$$\lim_{\varepsilon \to +0} \int_a^{b-\varepsilon} f(x)dx, \qquad (12.11)$$

то її називають невласним інтегралом другого роду і позначають

$$\int_a^b f(x)dx. \qquad (12.12)$$

У такому випадку говорять, що інтеграл (12.12) існує або збігається. Якщо ж границя (12.11) не існує або ж нескінченна, то інтеграл (12.12) також не існує або розбігається.

Аналогічно, якщо $x = a$ – особлива точка розриву другого роду, тобто функція $f(x)$ необмежена в будь-якому околі цієї точки і обмежена на будь-якому відрізку $[a+\varepsilon;b]$, то невласний інтеграл має вигляд:

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{a+\varepsilon}^b f(x)dx.$$

Якщо існує розрив другого роду функції $f(x)$ в середині інтервалу (a,b), тобто в точці $c \in (a,b)$, то невласний інтеграл на $[a;b]$, подається у вигляді суми двох невласних інтегралів, розглянутих вище:

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx.$$

Тоді він існує, якщо існують обидві границі в правій частині виразу:

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\varepsilon \to 0} \int_a^{c-\varepsilon} f(x)dx + \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{c+\varepsilon}^b f(x)dx. \qquad (12.13)$$

Нарешті, якщо обидві кінцеві точки особливі, і в них функція має розриви другого роду, то інтеграл (12.12) обчислюється так:

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{a+\varepsilon}^{c-\varepsilon} f(x)dx + \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{c+\varepsilon}^{b-\varepsilon} f(x)dx. \qquad (12.14)$$

За умови існування границь у правій частині (12.14) інтеграл (12.12) збігається, в протилежному випадку, якщо хоча б один з інтегралів у (12.14) не має границі або вона нескінченна, то інтеграл розбігається.

Приклад 13. Дослідити збіжність невласного інтеграла:

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Розв'язання. Підінтегральна функція необмежена в околі точки *x*= *1,* тому точка *x* = *1* – особлива. На будь-якому відрізку $[0,1-\varepsilon]$ функція *f(x)* інтегрована, бо вона неперервна. Тому за означенням маємо:

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \lim_{\varepsilon\to 0} \int_0^{1-\varepsilon} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \lim_{\varepsilon\to 0} arcsinx \Big|_0^{1-\varepsilon} = \lim_{\varepsilon\to 0} arcsin(1-\varepsilon) = \frac{\pi}{2}.$$

Отже, інтеграл збігається.

Приклад 14. Дослідити на збіжність інтеграл Діріхле

$$\int_a^b \frac{dx}{(b-x)^\alpha}, \quad \alpha>0.$$

Розв'язання. При $\alpha>0$ цей інтеграл є невласним з особливістю у точці $x=b$:

$$\int_a^b \frac{dx}{(b-x)^\alpha} = \lim_{\varepsilon\to+0} \int_a^{b-\varepsilon} \frac{dx}{(b-x)^\alpha};$$

$\alpha=1$:

$$\lim_{\varepsilon\to+0} \int_a^{b-\varepsilon} \frac{dx}{b-x} = -\lim_{\varepsilon\to+0} \int_a^{b-\varepsilon} \frac{d(b-x)}{b-x} = \lim_{\varepsilon\to+0} ln|b-x| \Big|_a^{b-\varepsilon} = \lim_{\varepsilon\to+0} ln\varepsilon - ln|b-a| \underset{\varepsilon\to+0}{\to} +\infty;$$

при $\varepsilon\to+0$;

$$\lim_{\varepsilon\to+0} \int_a^{b-\varepsilon} \frac{dx}{(b-x)^\alpha} = -\lim_{\varepsilon\to+0} \int_a^{b-\varepsilon} (b-x)^{-\alpha}\, dx = -\lim_{\varepsilon\to+0} \frac{(b-x)^{-\alpha+1}}{-\alpha+1} \Big|_a^{b-\varepsilon} =$$

$\alpha\neq1$:

$$= -\lim_{\varepsilon\to+0} \frac{\varepsilon^{-\alpha+1} - (b-a)^{-\alpha+1}}{-\alpha+1} = \underset{\varepsilon\to+0}{\to} \begin{cases} \dfrac{(b-a)^{-\alpha+1}}{1-\alpha} & \text{при } \alpha<1, \\ +\infty & \text{при } \alpha>1. \end{cases}$$

Отже, початковий невласний інтеграл є збіжним при $0<\alpha<1$ та розбіжним при $\alpha\geq1$.

Зауваження. Для інтеграла $\int_a^b \frac{dx}{(x-a)^\alpha}$, $\alpha>0$ за попереднім дослідженням маємо також збіжність при $0<\alpha<1$ та розбіжність при $\alpha\geq1$.

Ці інтеграли надалі будуть розглядатися як еталонні інтеграли при використанні порівняльної ознаки.

Сформулюємо ознаки збіжності невласних інтегралів другого роду. Перша з них ─ це порівняльна ознака, яка формулюється таким чином:

Нехай $0 \le f(x) \le \varphi(x)$ $(x \in [a;b))$, тоді:

1) інтеграл $\int_a^b f(x)dx$ є збіжним, якщо інтеграл $\int_a^b \varphi(x)dx$ збігається;

2) інтеграл $\int_a^b \varphi(x)dx$ є розбіжним, якщо інтеграл $\int_a^b f(x)dx$ розбігається.

Наслідок (порівняльна ознака в граничній формі). Якщо для додатних функцій $f(x)$ та $\varphi(x)$ існує скінчена границя

$$\lim_{x\to b-0} \frac{f(x)}{\varphi(x)} = k,\ (0<k<\infty), \tag{12.15}$$

то обидва інтеграли $\int_a^b f(x)dx$, $\int_a^b \varphi(x)dx$ збігаються або розбігаються одночасно. Зокрема, якщо:

$$1)\quad 0 \le \varphi(x) = \frac{C}{(b-x)^{\alpha}}\quad (C=const,\ x\to b-0), \tag{12.16}$$

то інтеграл $\int_a^b \varphi(x)dx,$а отже, й інтеграл $\int_a^b f(x)dx$ збігаються при $\alpha<1$ і розбігається при $\alpha \ge 1;$

$$2)\quad 0 \le \varphi(x) = \frac{C}{(x-a)^{\alpha}}\quad (C=const,\ x\to a+0), \tag{12.17}$$

то інтеграл $\int_a^b \varphi(x)dx,$ а отже, й інтеграл $\int_a^b f(x)dx$ збігаються при $\alpha<1$ і розбігається при $\alpha \ge 1.$

Приклад 15. Дослідити на збіжність інтеграл $\int_1^2 \frac{1}{\ln x}dx.$

Розв'язання. Цей інтеграл є невласним з особливістю у точці $x=1$.

Оскільки $\frac{1}{ln\,x} \approx \frac{1}{x-1}$ еквівалентні нескінченно малі функції при $x \to 1$, оскільки

$$\lim_{x\to 1+0} \frac{1/\ln x}{1/(x-1)} = \lim_{x\to 1+0} \frac{(x-1)}{\ln x} = \lim_{x\to 1+0} \frac{1}{1/x} = \lim_{x\to 1+0} x = 1.$$

Інтеграл $\int_1^2 \frac{1}{x-1} dx$ розбігається, оскільки $\alpha = 1$, отже, інтеграл $\int_1^2 \frac{1}{ln\,x} dx$ розбігається.

Приклад 16. Дослідити на збіжність інтеграл

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sqrt{x+x^2}}{x^\alpha\left(1+x^\beta\right)} dx, \quad (\alpha, \beta > 0).$$

.

Розв'язання. Припустивши збіжність цього інтеграла, запишемо використавши властивість адитивності:

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sqrt{x+x^2}}{x^\alpha\left(1+x^\beta\right)} dx = \int_0^1 \frac{\sqrt{x+x^2}}{x^\alpha\left(1+x^\beta\right)} dx + \int_1^{+\infty} \frac{\sqrt{x+x^2}}{x^\alpha\left(1+x^\beta\right)} dx.$$

Перший доданок є невласним інтегралом другого роду з особливістю у точці $x = 0$:

$$f(x) \approx \varphi(\tilde{o}) = \frac{\sqrt{x}}{x^\alpha} = \frac{1}{x^{\alpha-\frac{1}{2}}} \Rightarrow \text{ збігається при } \alpha - \frac{1}{2} < 1 \Leftrightarrow \alpha < \frac{3}{2}.$$

Другий доданок є невласним інтегралом першого роду, тобто інтегралом по нескінченному проміжку:

$$f(x) \underset{x\to\infty}{\approx} \varphi_1(\tilde{o}) = \frac{x}{x^{\alpha+\beta}} = \frac{1}{x^{\alpha+\beta-1}} \Rightarrow \text{збігається при } \alpha+\beta-1 > 1 \Leftrightarrow \alpha+\beta > 2.$$

Отже, початковий інтеграл збігається при $\beta > 2-\alpha$, де $\alpha < \frac{3}{2}$.

Приклад 17. Дослідити на збіжність та обчислити у випадку збіжності інтеграл $\int_0^{\pi/2} ln\,sin\,x\,dx$.

Розв'язання. Припустивши збіжність цього інтеграла, використаємо метод інтегрування частинами:

$$\int_0^{\pi/2} \ln\sin x\,dx = \left| \begin{matrix} u = \ln\sin x; & dv = dx; \\ du = ctgx\,dx; & v = x \end{matrix} \right| = x\ln\sin x \Big|_0^{\pi/2} - \int_0^{\pi/2} x\,ctg\,x\,dx.$$

Дослідимо позаінтегральний член

$$x\ln\sin x\Big|_0^{\pi/2} = (\pi/2)\ln\sin(\pi/2) - \lim_{x\to 0+0} \frac{\ln\sin x}{1/x} = (\pi/2)\ln 1 - \lim_{x\to 0+0} \frac{ctg\,x}{-(1/x^2)} =$$

$= -\lim\limits_{x\to 0+0} \dfrac{x^2}{tg\,x} = -\lim\limits_{x\to 0+0} \dfrac{x}{tg\,x} \lim\limits_{x\to 0+0} x = -1\cdot 0 = 0.$ Це означає, що інтеграли

$\int\limits_0^{\pi/2} \ln\sin x\,dx$ і $\int\limits_0^{\pi/2} x\,ctgx\,dx$ поводять себе однаково, тобто обидва або збігаються або розбігаються одночасно. У випадку збіжності їх значення співпадають. Дослідимо на збіжність інтеграл $\int\limits_0^{\pi/2} x\,ctgx\,dx$.

Оскільки $\int\limits_0^{\pi/2} x\,ctgx\,dx = \int\limits_0^{\pi/2} x/tgx\,dx,$ а $\lim\limits_{x\to 0+0} \dfrac{x}{tg\,x} = 1,$ то підінтегральна функція *f(x)=x/tgx* має усувний розрив у точці *x=0*, отже цей інтеграл збігається. Звідси робимо висновок, що збігається також інтеграл $\int\limits_0^{\pi/2} \ln\sin x\,dx$, причому $\int\limits_0^{\pi/2} \ln\sin x\,dx = -\int\limits_0^{\pi/2} x\,ctgx\,dx.$ Для обчислення початкового інтеграла здійснимо заміну змінної, поклавши *x=2t, dx=2dt.* Внаслідок заміни маємо:

$$\int_0^{\pi/2} \ln\sin x\,dx = 2\int_0^{\pi/4} \ln 2dt + 2\int_0^{\pi/4} \ln\sin t\,dt + 2\int_0^{\pi/4} \ln\cos t\,dt =$$

Для останнього інтеграла використаємо заміну змінної

$$\left| \begin{matrix} t = \pi/2 - x; \quad dt = -dx; \\ x = \pi/2 - t; \alpha = \pi/2; \beta = \pi/4 \end{matrix} \right|$$

$$=\pi ln2/2+2\int_0^{\pi/4} ln sint dt-2\int_{\pi/2}^{\pi/4} ln sint dt=\pi ln2/2+2\int_0^{\pi/4} ln sint dt+$$

$$+2\int_{\pi/4}^{\pi/2} ln sint dt=\pi ln2/2+2\int_0^{\pi/2} ln sint dt \Rightarrow \int_0^{\pi/2} ln sin x dx=-\pi ln2/2.$$

Приклад 18. Обчислити інтеграл $\int_0^{\pi} x ln\, sin x\, dx$.

Розв'язання. Припустивши збіжність цього інтеграла, використаємо його адитивність:

$$\int_0^{\pi} x ln\, sin\, x\, dx=\int_0^{\pi/2} x ln\, sin\, x\, dx+\int_{\pi/2}^{\pi} x ln\, sin\, x\, dx=\begin{vmatrix} x=\pi-t; \quad dx=-dt; \\ t=\pi-x; \alpha=\pi/2; \beta=0 \end{vmatrix}=$$

$$=\int_0^{\pi/2} x ln sin x dx-\int_{\pi/2}^{0}(\pi-t) ln sin t dt=\int_0^{\pi/2} x ln sin x dx+$$

$$+\int_0^{\pi/2}(\pi-x) ln sin x dx=\int_0^{\pi/2} x ln sin x dx+\pi\int_0^{\pi/2} ln sin x dx-\int_0^{\pi/2} x ln sin x dx=$$

$$=\pi\int_0^{\pi/2} ln sin x dx=\pi(-\pi ln2/2)=-\pi^2 ln2/2.$$

Приклад 19. Обчислити інтеграл $\int_0^{\pi/2} x\, ctgx\, dx$.

Розв'язання. Оскільки $\int_0^{\pi/2} x\, ctgx\, dx=-\int_0^{\pi/2} ln sin x\, dx=\pi ln2/2$.

Приклад 20. Обчислити інтеграл $\int_0^{1}\frac{arcsin x}{x}dx$.

Розв'язання. Оскільки

$$\int_0^{1}\frac{arcsin x}{x}dx=\begin{vmatrix} arcsin x=t; \; x=sint \\ dx=cost dt; \; \alpha=0; \; \beta=\pi/2 \end{vmatrix}=\int_0^{\pi/2} t\, ctgt\, dt=\pi ln2/2.$$

Приклад 21. Обчислити інтеграл $\int\limits_0^1 \frac{ln\,x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx.$

Розв'язання. Оскільки

$$\int\limits_0^1 \frac{ln\,x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \left| \begin{array}{l} sin\,x = t;\ dt = cos\,x\,dx \\ \sqrt{1-x^2} = cos\,t;\ \alpha = 0;\ \beta = \pi/2 \end{array} \right| = \int\limits_0^{\pi/2} \frac{ln\,sin\,t \cdot cos\,t}{cos\,t}\,dt =$$

$$= \int\limits_0^{\pi/2} ln\,sin\,t\,dt = -\pi\,ln\,2/2.$$

Приклад 22. Обчислити інтеграл $\int\limits_0^1 \frac{ln(1+x)}{1+x^2}\,dx.$

Розв'язання.

$$\int\limits_0^1 \frac{ln(1+x)}{1+x^2}dx = \left| \begin{array}{l} x = tg\,t;\ t = arctg\,x;\ dt = \dfrac{dx}{1+x^2}; \\ 1+x^2 = \dfrac{1}{cos^2 t};\ \alpha = 0;\ \beta = \pi/4 \end{array} \right| = \int\limits_0^{\pi/4} \frac{ln(1+\dfrac{sin\,t}{cos\,t})}{\dfrac{1}{cos^2 t}} \frac{dt}{cos^2 t} =$$

$$= \int\limits_0^{\pi/4} (\,ln(sin\,t + cos\,t\,) - ln\,cos\,t\,)dt = \int\limits_0^{\pi/4} ln\sqrt{2}\,sin(\pi/4+t\,)dt -$$

$$- \int\limits_0^{\pi/4} ln\,cos\,tdt = \int\limits_0^{\pi/4} ln\sqrt{2}dt + \int\limits_0^{\pi/4} ln\,sin(\pi/4+t\,)dt - \int\limits_0^{\pi/4} ln\,cos\,tdt = \frac{\pi\,ln\,2}{8} +$$

$$+ \int\limits_0^{\pi/4} ln\,sin(\pi/4+t\,)dt - \int\limits_0^{\pi/4} ln\,cos\,tdt = \left| \begin{array}{l} \pi/4+t = \pi/2 - z; \\ dt = -dz;\alpha = \pi/4;\beta = 0 \end{array} \right| = \frac{\pi\,ln\,2}{8} -$$

$$- \int\limits_{\pi/4}^{0} ln\,cos\,zdz - \int\limits_0^{\pi/4} ln\,cos\,tdt = \frac{\pi\,ln\,2}{8} + \int\limits_0^{\pi/4} ln\,cos\,zdz - \int\limits_0^{\pi/4} ln\,cos\,tdt = \frac{\pi\,ln\,2}{8}.$$

Приклад 23. Дослідити на збіжність та обчислити у випадку збіжності інтеграл $\int\limits_0^{\infty} \frac{ln\,x}{x^2+a^2}\,dx, \quad a>0.$

Розв'язання. Припустивши збіжність досліджуваного інтеграла, застосуємо його адитивність

$$\int\limits_0^{\infty} \frac{ln\,x}{x^2+a^2}\,dx = \int\limits_0^{1} \frac{ln\,x}{x^2+a^2}\,dx + \int\limits_1^{\infty} \frac{ln\,x}{x^2+a^2}\,dx.$$

Перший із інтегралів праворуч є невласний інтеграл другого роду, другий – невласний інтеграл першого роду. У першому інтегралі x= 0 є точкою розриву. Дослідимо цей інтеграл на збіжність. Нехай 1>λ>0, тоді

$$\varphi(x) = \frac{1}{\tilde{o}^{\lambda}},\ \lim_{x\to 0+0} \frac{ln\,x}{\left(x^2+a^2\right)\tilde{o}^{-\lambda}} = \frac{1}{a^2}\lim_{x\to 0+0}\frac{ln\,x}{\tilde{o}^{-\lambda}} = \left\{\frac{\infty}{\infty}\right\} = \frac{1}{a^2}\lim_{x\to 0+0}\frac{\tilde{o}^{-1}}{-\lambda x^{-\lambda-1}} =$$

$= -\frac{1}{\lambda a^2}\lim\limits_{x\to 0+0} x^{\lambda} = 0.$ Î äæå, ï ðè $1>\lambda>0$ ³í òåãðàë çá³ãàºòüñÿ. Äî ñë³äèì î í à

çá³æí ³ñòü äðóãèé ³ç ³í òåãðàë³â. Í åõàé $2>\lambda>1$, $\lim\limits_{x\to +\infty} \frac{ln\,x}{\left(x^2+a^2\right)\tilde{o}^{-\lambda}} =$

$$= \lim_{x\to +\infty}\frac{\tilde{o}^2}{\tilde{o}^2+a^2}\frac{ln\,x}{x^{2-\lambda}} = \lim_{x\to +\infty}\frac{\tilde{o}^2}{\tilde{o}^2+a^2}\lim_{x\to +\infty}\frac{ln\,x}{x^{2-\lambda}} == \left\{\frac{\infty}{\infty}\right\} = \lim_{x\to +\infty}\frac{\tilde{o}^{-1}}{(2-\lambda)x^{1-\lambda}} =$$

$= \lim\limits_{x\to +\infty}\frac{x^{\lambda-2}}{2-\lambda} = 0.$ Отже, і другий із інтегралів праворуч збігається, таким чином, досліджуваний інтеграл збігається. Знайдемо його чисельне значення:

$$\int\limits_0^{\infty}\frac{ln\,x}{\tilde{o}^2+a^2}\,dx = \begin{vmatrix} x = at \\ dx = adt \end{vmatrix} = a\int\limits_0^{\infty}\frac{ln\,at}{a^2t^2+a^2}\,dt = \frac{1}{a}\int\limits_0^{\infty}\frac{ln\,a + ln\,t}{t^2+1}\,dt = \frac{1}{a}\int\limits_0^{\infty}\frac{ln\,a}{t^2+1}\,dt +$$

$$+\frac{1}{a}\int\limits_0^{\infty}\frac{ln\,t}{t^2+1}\,dt = \frac{ln\,a}{a}\int\limits_0^{\infty}\frac{1}{t^2+1}\,dt + \frac{1}{a}\int\limits_0^{\infty}\frac{ln\,t}{t^2+1}\,dt = \frac{ln\,a}{a}arctgt\Big|_0^{\infty} + \frac{1}{a}\int\limits_0^{1}\frac{ln\,t}{t^2+1}\,dt +$$

$$+\frac{1}{a}\int\limits_1^{\infty}\frac{ln\,t}{t^2+1}\,dt = \frac{\pi\,ln\,a}{2a} + \frac{1}{a}\int\limits_0^{1}\frac{ln\,t}{t^2+1}\,dt + \frac{1}{a}\int\limits_1^{\infty}\frac{ln\,t}{t^2+1}\,dt = \begin{vmatrix} t = \frac{1}{z};\ dt = -\frac{dz}{z^2}; \\ \alpha = 1; \quad \beta = 0. \end{vmatrix} =$$

$$=\frac{\pi\ln a}{2a}+\frac{1}{a}\int\limits_0^1\frac{\ln t}{t^2+1}\,dt-\frac{1}{a}\int\limits_0^1\frac{\ln z}{z^2+1}\,dt=\frac{\pi\ln a}{2a}.$$

Приклад 24. Обчислити інтеграл $\int\limits_0^{\pi/2}\sqrt{tgx}\,dx.$

Розв'язання. Припустивши збіжність досліджуваного інтеграла, застосуємо його адитивність

$$\int\limits_0^{\pi/2}\sqrt{tgx}\,dx=\left|\begin{array}{l} tgx=z^2;\ x=arctg\,z^2; \\ dx=\dfrac{2zdz}{1+z^4};\ \alpha=0;\beta=+\infty \end{array}\right|=2\int\limits_0^{\infty}\frac{z^2dz}{1+z^4}=\left|\begin{array}{l} z=\dfrac{1}{t};\ dz=-\dfrac{dt}{t^2}; \\ \alpha=+\infty;\quad \beta=0. \end{array}\right|=$$

$$=-2\int\limits_{+\infty}^{0}\frac{\frac{1}{t^2}\frac{dt}{t^2}}{1+\frac{1}{t^4}}=2\int\limits_0^{+\infty}\frac{dt}{t^4+1}=\int\limits_0^{+\infty}\frac{z^2+1}{z^4+1}dz=\int\limits_0^{+\infty}\frac{1+\frac{1}{z^2}}{z^2+\frac{1}{z^2}}dz=\left|\begin{array}{l} z-\dfrac{1}{z}=u; \\ (1+\dfrac{1}{z^2})dz=du; \\ \alpha=-\infty;\beta=+\infty \end{array}\right|=$$

$$=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{du}{u^2+2}du=\frac{1}{\sqrt{2}}arctg\frac{u}{\sqrt{2}}\Bigg|_{-\infty}^{+\infty}=\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2}\right)=\frac{\pi}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}\pi}{2}.$$

Приклад 25. Дослідити на збіжність інтеграл $\int\limits_0^{+\infty}\frac{\sin x}{x}dx.$

Розв'язання. Цей інтеграл відомий як інтегральний сінус. Припустивши, що цей інтеграл збігається, застосуємо його адитивність:

$$\int\limits_0^{+\infty}\frac{\sin x}{x}dx=\int\limits_0^{\pi/2}\frac{\sin x}{x}dx+\int\limits_{\pi/2}^{+\infty}\frac{\sin x}{x}dx.$$

Перший із цих інтегралів праворуч є невласний інтеграл другого роду, а другий – є невласний інтеграл першого роду. Збіжність другого інтеграла була встановлена в прикладі 12. Умовна збіжність випливає із нерівності:

$$\left|\frac{\sin x}{x}\right|\geq\left|\frac{\sin^2 x}{x}\right|=\frac{\sin^2 x}{x}=\frac{1-\cos 2x}{x}.$$

Унаслідок порівняльної ознаки другий із інтегралів праворуч збігається умовно:

$$\int_{\pi/2}^{+\infty}\frac{|sin\,x|}{x}dx\geq\int_{\pi/2}^{+\infty}\frac{sin^2x}{x}dx=\int_{\pi/2}^{+\infty}\frac{1-cos2x}{2x}dx=\int_{\pi/2}^{+\infty}\frac{dx}{2x}-\int_{\pi/2}^{+\infty}\frac{cos2x}{2x}dx.$$

Оскільки $\lim\limits_{x\to 0+0}\frac{sin\,x}{x}=1$, то в точці розриву *x=0* маємо усувний розрив, одже, і другий із інтегралів праворуч збігається. Таким чином, досліджуваний інтеграл збігається.

Приклад 26. Дослідити на збіжність інтеграл $\int_{0}^{+\infty}sin(x^2)dx.$

Розв'язання. Цей інтеграл відомий як інтеграл Френеля. Припустивши, що цей інтеграл збігається, застосуємо до нього адитивність:

$$\int_{0}^{+\infty}sin(x^2)dx=\int_{0}^{\sqrt{\pi/2}}sin(x^2)dx+\int_{\sqrt{\pi/2}}^{+\infty}sin(x^2)dx.$$

До отриманого співвідношення використаємо заміну змінної:

$$\int_{0}^{+\infty}sin(x^2)dx=\left|\begin{array}{l}x^2=t;\,2xdx=dt;\\ x=\sqrt{t};\,dx=\dfrac{dt}{2\sqrt{t}}\end{array}\right|=\int_{0}^{\pi/2}\frac{sin(t)}{2\sqrt{t}}+\int_{\pi/2}^{+\infty}\frac{sin(t)}{2\sqrt{t}}.$$

Перший із цих інтегралів праворуч є невласний інтеграл другого роду, а другий – є невласний інтеграл першого роду. Для першого інтеграла від необмеженої функції в точці *t=0* маємо усувний розрив:

$$\lim_{t\to 0+0}\frac{sint}{2\sqrt{t}}=\frac{1}{2}\lim_{t\to 0+0}\frac{sint}{\sqrt{t}}\frac{\sqrt{t}}{\sqrt{t}}=\frac{1}{2}\lim_{t\to 0+0}\frac{sint}{t}\lim_{t\to 0+0}\sqrt{t}=1\cdot 0=0.$$

Одже, цей інтеграл збігається. Для встановлення збіжності другого інтеграла використаємо інтегрування частинами (припустивши його збіжність):

$$\int_{\pi/2}^{+\infty}\frac{sin(t)dt}{2\sqrt{t}}=\left|\begin{array}{ll}u=\dfrac{1}{\sqrt{t}}; & dv=sintdt;\\ du=-\dfrac{dt}{2t^{3/2}};\,v=-cost & \end{array}\right|=-\frac{cost}{2\sqrt{t}}\Big|_{\pi/2}^{+\infty}-\int_{\pi/2}^{+\infty}\frac{cos(t)dt}{4t^{3/2}}=-\int_{\pi/2}^{+\infty}\frac{cos(t)dt}{4t^{3/2}}.$$

Оскільки, позаінтегральний член в указаних межах звертається до нуля. Отриманий же інтеграл збігається абсолютно за порівняльною ознакою, оскільки:

$$\left|\frac{cos\,t}{t^{3/2}}\right| \le \frac{1}{t^{3/2}}.$$

Таким чином, інтеграл Френеля збігається. Аналогічно можна встановити збіжність подібного інтеграла:

$$\int_0^{+\infty} cos(x^2)dx.$$

Приклад 27. Дослідити на збіжність та обчислити у випадку збіжності інтеграл $\displaystyle\int_0^{\infty}\frac{x^{2005}dx}{(1+x^2)(1+x^{2005})}$.

Розв'язання. Припустивши збіжність досліджуваного інтеграла, застосуємо його адитивність

$$\int_0^{\infty}\frac{x^{2005}dx}{(1+x^2)(1+x^{2005})}=\int_0^{1}\frac{x^{2005}dx}{(1+x^2)(1+x^{2005})}+\int_1^{\infty}\frac{x^{2005}dx}{(1+x^2)(1+x^{2005})}.$$

Перший із інтегралів праворуч є звичайний визначений інтеграл, другий – невласний інтеграл першого роду. Дослідимо цей інтеграл на збіжність. Нехай

$$\varphi(x)=\frac{1}{x^2},\quad \lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^{2005}}{x^2\left(1+1/x^2\right)\left(1+1/x^{2005}\right)x^{2005}}:\frac{1}{x^2}\right)=1,$$ отже, інтеграл

збігається. Для обчислення цього інтеграла використаємо заміну змінної:

$$\int_0^{\infty}\frac{x^{2005}dx}{(1+\tilde{o}^2)(1+\tilde{o}^{2005})}=\int_0^{1}\frac{x^{2005}dx}{(1+\tilde{o}^2)(1+\tilde{o}^{2005})}+\int_1^{\infty}\frac{x^{2005}dx}{(1+\tilde{o}^2)(1+\tilde{o}^{2005})}=\left|\begin{array}{l} x=\frac{1}{t};\quad dx=-\frac{dt}{t^2} \\ t=\frac{1}{x};\,\alpha=1;\,\beta=0\end{array}\right|=$$

$$=\int_0^{1}\frac{x^{2005}dx}{(1+\tilde{o}^2)(1+\tilde{o}^{2005})}-\int_1^{0}\frac{\frac{dt}{t^{2005}t^2}}{(1+\frac{1}{t^2})(1+\frac{1}{t^{2005}})}=\int_0^{1}\frac{x^{2005}dx}{(1+\tilde{o}^2)(1+\tilde{o}^{2005})}+\int_0^{1}\frac{dt}{(1+t^2)(1+t^{2005})}=$$

$$= \int_0^1 \frac{x^{2005}dx}{(1+\tilde{o}^2)(1+\tilde{o}^{2005})} + \int_0^1 \frac{dx}{(1+x^2)(1+x^{2005})} = \int_0^1 \frac{(x^{2005}+1)dx}{(1+\tilde{o}^2)(1+\tilde{o}^{2005})} = \int_0^1 \frac{dx}{(1+\tilde{o}^2)} =$$

$$= arctg\,x\Big|_0^1 = \frac{\pi}{4}.$$

Приклад 28. Дослідити на збіжність та обчислити у випадку збіжності інтеграл $\int_0^\pi \frac{x^2dx}{1-\cos x}$.

Розв’язання. Маємо невласний інтеграл другого роду з особливістю в точці x=0. Дослідимо характер цієї особливості:

$$\lim_{x\to 0+0} \frac{x^2}{1-\cos x} = \lim_{x\to 0+0} \frac{x^2}{2\sin^2\frac{x}{2}} = \lim_{x\to 0+0} \frac{x^2}{2\frac{x^2}{4}} = 2,$$

отже, маємо усувний розрив, таким чином, досліджуваний інтеграл збігається. Для обчислення інтеграла використаємо метод інтегрування частинами:

$$\int_0^\pi \frac{x^2dx}{1-\cos x} = \int_0^\pi \frac{x^2dx}{2\sin^2\frac{x}{2}} = \left| \begin{matrix} u = x^2;\ dv = \dfrac{dx}{2\sin^2\frac{x}{2}}; \\ du = 2xdx;\ v = -ctg\,\dfrac{x}{2} \end{matrix} \right| = -\lim_{x\to\pi-0} \frac{\tilde{o}^2}{tg\,\frac{x}{2}} + \lim_{x\to 0+0} \frac{\tilde{o}^2}{tg\,\frac{x}{2}} +$$

$$+2\int_0^\pi x\,ctg\,\frac{x}{2}dx = \left| \begin{matrix} x = 2t; & dx = 2dt; \\ \alpha = 0; & \beta = \dfrac{\pi}{2} \end{matrix} \right| = 8\int_0^{\pi/2} t\,ctgt\,dt = 8\frac{\pi \ln 2}{2} = 4\pi \ln 2.$$

Приклад 29. Обчислити інтеграл

$$\int_0^\infty \left(\frac{1}{1+x^\alpha} - \frac{1}{1+x^\beta} \right) \frac{dx}{x}, \quad \alpha, \beta \in R;\ \alpha\beta > 0.$$

Розв’язання. Маємо невласний інтеграл першого та другого роду з особливістю в точці $x=0$. Припустимо, що цей інтеграл збігається. Для обчислення розкладемо доданки підінтегральної функції на складові:

$$\frac{1}{(1+x^\alpha)\tilde{o}} = \frac{1}{x} - \frac{\tilde{o}^{\alpha-1}}{1+x^\alpha}; \quad \frac{1}{(1+x^\beta)\tilde{o}} = \frac{1}{x} - \frac{x^{\beta-1}}{1+x^\beta}.$$

Таким чином, підінтегральна функція має вигляд:

$$\frac{1}{(1+x^{\alpha})\tilde{o}}-\frac{1}{(1+x^{\beta})\tilde{o}}=\frac{1}{x}-\frac{\tilde{o}^{\alpha-1}}{1+x^{\alpha}}-\frac{1}{x}+\frac{x^{\beta-1}}{1+x^{\beta}}=\frac{x^{\beta-1}}{1+x^{\beta}}-\frac{\tilde{o}^{\alpha-1}}{1+x^{\alpha}}.$$

Підставивши отримане співвідношення в досліджуваний інтеграл, отримаємо:

$$\int_0^{\infty}\frac{x^{\beta-1}dx}{1+x^{\beta}}-\int_0^{\infty}\frac{\tilde{o}^{\alpha-1}dx}{1+x^{\alpha}}=\frac{1}{\beta}ln\left(1+x^{\beta}\right)-\frac{1}{\alpha}ln\left(1+x^{\alpha}\right)\Big|_0^{\infty}=ln\frac{\left(1+x^{\beta}\right)^{1/\beta}}{\left(1+x^{\alpha}\right)^{1/\alpha}}\Big|_0^{\infty}=0,$$

оскільки

$$\lim_{x\to+\infty} ln\frac{x\left(x^{-\beta}+1\right)^{1/\beta}}{x\left(x^{-\alpha}+1\right)^{1/\alpha}}-\lim_{x\to0+0} ln\frac{\left(x^{\beta}+1\right)^{1/\beta}}{\left(x^{\alpha}+1\right)^{1/\alpha}}=0, \text{ при } \alpha>0, \beta>0.$$

$$\lim_{x\to+\infty} ln\frac{\left(x^{\beta}+1\right)^{1/\beta}}{\left(x^{\alpha}+1\right)^{1/\alpha}}-\lim_{x\to0+0} ln\frac{x\left(1+x^{-\beta}\right)^{1/\beta}}{x\left(1+x^{-\alpha}\right)^{1/\alpha}}=0, \text{ при } \alpha<0, \beta<0.$$

Таким чином, при *αβ>0* $\int_0^{\infty}\left(\frac{1}{1+x^{\alpha}}-\frac{1}{1+x^{\beta}}\right)\frac{dx}{x}=0.$

Приклад 30. Обчислити інтеграл

$$\int_{-1}^{1}\frac{dx}{(\alpha^2-x^2)\sqrt{1-x^2}}, \quad \alpha>1.$$

Розв'язання. Маємо невласний інтеграл другого роду з особливістю в точках $x=-1$ та $x=1$. Оскільки

$$\lim_{x\to-1+0}\frac{1}{(\alpha^2-x^2)\sqrt{(1-x)(1+x)}}:\frac{1}{(1+x)^{1/2}}=\lim_{x\to-1+0}\frac{1}{(\alpha^2-x^2)\sqrt{(1-x)}}=\frac{1}{(\alpha^2-1)\sqrt{2}},$$

$$\lim_{x\to1-0}\frac{1}{(\alpha^2-x^2)\sqrt{(1-x)(1+x)}}:\frac{1}{(1-x)^{1/2}}=\lim_{x\to1-0}\frac{1}{(\alpha^2-x^2)\sqrt{(1+x)}}=\frac{1}{(\alpha^2-1)\sqrt{2}},$$

інтеграл збігається. Враховуючи збіжність інтеграла і парність підінтегральної функції та використавши заміну змінної, отримаємо:

$$\int_{-1}^{1}\frac{dx}{(\alpha^2-\tilde{\delta}^2)\sqrt{1-\tilde{\delta}^2}}=\int_{0}^{1}\frac{2dx}{(\alpha^2-\tilde{\delta}^2)\sqrt{1-\tilde{\delta}^2}}=\left|\begin{matrix} x=sint; \quad t=arcsin\,x; \\ dx=cos\,tdt; \alpha=0;\ \beta=\dfrac{\pi}{2}\end{matrix}\right|=\int_{0}^{\pi/2}\frac{dt}{\alpha^2-sin^2t)}=$$

$$=2\int_{0}^{\pi/2}\frac{\dfrac{dt}{cos^2t}}{\alpha^2(tg^2t+1)-tg^2t)}=2\int_{0}^{\pi/2}\frac{d\,tgt}{\alpha^2(tg^2t+1)-tg^2t}=2\int_{0}^{\pi/2}\frac{d\,tgt}{(\alpha^2-1)tg^2t+\alpha^2}=$$

$$=\frac{2}{\alpha^2-1}\int_{0}^{\pi/2}\frac{d\,tgt}{tg^2t+\gamma^2}=\frac{2}{(\alpha^2-1)\gamma}arctg\frac{tgt}{\gamma}\Big|_{0}^{\pi/2}=\frac{2\pi\sqrt{\alpha^2-1}}{2(\alpha^2-1)\alpha}=\frac{\pi}{\alpha\sqrt{\alpha^2-1}}.$$

Зауваження. Можна α покладати різні значення більші за одиницю і отримувати різні інтеграли та їх значення.

Приклад 31. Обчислити інтеграл

$$\int_{-1}^{1}\frac{dx}{(\alpha^2+x^2)\sqrt{1-x^2}}\ .$$

Розв'язання. Маємо невласний інтеграл другого роду з особливістю в точках $x=-1$ та $x=1$. Оскільки

$$\lim_{x\to-1+0}\frac{1}{(\alpha^2+x^2)\sqrt{(1-x)(1+x)}}:\frac{1}{(1+x)^{1/2}}=\lim_{x\to-1+0}\frac{1}{(\alpha^2+x^2)\sqrt{(1-x)}}=\frac{1}{(\alpha^2+1)\sqrt{2}},$$

$$\lim_{x\to1-0}\frac{1}{(\alpha^2+x^2)\sqrt{(1-x)(1+x)}}:\frac{1}{(1-x)^{1/2}}=\lim_{x\to1-0}\frac{1}{(\alpha^2+x^2)\sqrt{(1+x)}}=\frac{1}{(\alpha^2+1)\sqrt{2}},$$

інтеграл збігається. Ураховуючи збіжність інтеграла і парність підінтегральної функції та використавши заміну змінної, отримаємо:

$$\int_{-1}^{1}\frac{dx}{(\alpha^2+\tilde{\delta}^2)\sqrt{1-\tilde{\delta}^2}}=\int_{0}^{1}\frac{2dx}{(\alpha^2+\tilde{\delta}^2)\sqrt{1-\tilde{\delta}^2}}=\left|\begin{matrix} x=sint; \quad t=arcsin\,x; \\ dx=cos\,tdt; \alpha=0;\ \beta=\dfrac{\pi}{2}\end{matrix}\right|=\int_{0}^{\pi/2}\frac{dt}{\alpha^2+sin^2t)}=$$

$$=2\int_{0}^{\pi/2}\frac{\dfrac{dt}{cos^2t}}{\alpha^2(tg^2t+1)+tg^2t}=2\int_{0}^{\pi/2}\frac{d\,tgt}{(1+\alpha^2)tg^2t+\alpha^2}=\frac{2}{\alpha^2+1}\int_{0}^{\pi/2}\frac{d\,tgt}{tg^2t+\gamma^2}=$$

$$=\frac{2\sqrt{\alpha^2+1}}{(\alpha^2+1)\alpha}arctg\frac{tgt}{\gamma}\Big|_{0}^{\pi/2}=\frac{2\pi\sqrt{\alpha^2+1}}{2(\alpha^2+1)\alpha}=\frac{\pi}{\alpha\sqrt{\alpha^2+1}}.$$

Зауваження. Можна α покладати різні значення і отримувати різні інтеграли та їх значення.

Приклад 32. Обчислити інтеграл $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-x^2}dx}{\left(x^2+\frac{1}{2}\right)^2}$.

Розв'язання. Маємо невласний інтеграл першого роду. Припустивши збіжність інтеграла розглянемо відповідний невизначений інтеграл:

$$\int \frac{e^{-x^2}dx}{\left(x^2+\frac{1}{2}\right)^2} = \int \frac{e^{-x^2}(-2x)\,dx}{(-2x)\left(x^2+\frac{1}{2}\right)^2} = \int \frac{-e^{-x^2}}{-2x}\,d\left(x^2+\frac{1}{2}\right) = \left| \begin{array}{l} u=-\frac{e^{-x^2}}{2x};\ dv=d\left(x^2+\frac{1}{2}\right); \\ du=\frac{2x^2+1}{2x^2}e^{-x^2}dx;\ v=x^2+\frac{1}{2} \end{array} \right| =$$

$$= \frac{e^{-x^2}}{-2x}\frac{1}{x^2+\frac{1}{2}} - \int \frac{1}{x^2+\frac{1}{2}}\frac{x^2+\frac{1}{2}}{x^2}e^{-x^2}dx = \frac{e^{-x^2}}{-2x}\frac{1}{x^2+\frac{1}{2}} + \int e^{-x^2}d\left(\frac{1}{x}\right) =$$

$$= \left| \begin{array}{l} u=e^{-x^2};\ dv=d\left(\frac{1}{x}\right); \\ du=-2xe^{-x^2}dx;\ v=\frac{1}{x} \end{array} \right| = \frac{e^{-x^2}}{-2x}\frac{1}{x^2+\frac{1}{2}} + \frac{e^{-x^2}}{x} + 2\int e^{-x^2}dx = e^{-x^2}\left(\frac{1}{x} -\right.$$

$$\left. -\frac{1}{x(2x^2+1)}\right) + 2\int e^{-x^2}dx = \frac{e^{-x^2}}{x}\frac{2x^2}{2x^2+1} + 2\int e^{-x^2}dx = \frac{2xe^{-x^2}}{2x^2+1} + 2\int e^{-x^2}dx.$$

Знайшовши первісну, перейдемо до обчислення визначеного інтеграла:

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-x^2}dx}{\left(x^2+\frac{1}{2}\right)^2} = 2\int\limits_{0}^{+\infty} \frac{e^{-x^2}dx}{\left(x^2+\frac{1}{2}\right)^2} = \left.\frac{4xe^{-x^2}}{2x^2+1}\right|_{0}^{+\infty} + 4\int\limits_{0}^{+\infty} e^{-x^2}dx = 4\frac{\sqrt{\pi}}{2} = 2\sqrt{\pi}.$$

При обчисленні використали числове значення інтеграла Пуассона, який широко застосовується в задачах теорії ймовірності.

Приклад 33. Дослідити на збіжність та обчислити інтеграл:

$$\int\limits_{0}^{+\infty} \frac{x^m arctg\, x\, dx}{\left(x^{2m+2}+1\right)},\ m>0.$$

Розв'язання. Маємо невласний інтеграл першого роду. Оскільки:

$$f(x)=\frac{x^m arctg\,x}{\left(x^{2m+2}+1\right)}=\frac{x^m arctg\,x}{x^{2m+2}(1+\frac{1}{x^{2m+2}})}\le\frac{\pi}{2x^{m+2}},$$

за порівняльною ознакою при *m>0* досліджуваний інтеграл збігається. Для обчислення цього інтеграла використаємо його адитивність:

$$\int_0^{+\infty}\frac{x^m arctg\,x\,dx}{\left(x^{2m+2}+1\right)}=\int_0^1\frac{x^m arctg\,x\,dx}{\left(x^{2m+2}+1\right)}+\int_0^{+\infty}\frac{x^m arctg\,x\,dx}{\left(x^{2m+2}+1\right)}=\int_0^1\frac{x^m arctg\,x\,dx}{\left(x^{2m+2}+1\right)}+$$

$$+\int_1^{+\infty}\frac{x^m arctg\,x\,dx}{\left(x^{2m+2}+1\right)}=\left|\begin{array}{l}x=\frac{1}{t};\,t=\frac{1}{x};\,\alpha=1;\beta=0;\\ dx=-\frac{dt}{t^2};\;arctg\left(\frac{1}{t}\right)=\frac{\pi}{2}-arctgt\end{array}\right|=\int_0^1\frac{x^m arctg\,x\,dx}{\left(x^{2m+2}+1\right)}-$$

$$-\int_1^0\frac{\frac{1}{t^m}arctg\left(\frac{1}{t}\right)\frac{dt}{t^2}}{\left(\frac{1}{t^{2m+2}}+1\right)}=\int_0^1\frac{x^m arctg\,xdx}{\left(x^{2m+2}+1\right)}+\int_0^1\frac{t^m\left(\frac{\pi}{2}-arctg\,t\right)dt}{\left(1+t^{2m+2}\right)}=\int_0^1\frac{x^m arctg\,x\,dx}{\left(x^{2m+2}+1\right)}-$$

$$-\int_0^1\frac{t^m arctgtdt}{\left(t^{2m+2}+1\right)}+\frac{\pi}{2}\int_0^1\frac{t^m}{\left(t^{2m+2}+1\right)}dt=\left|\begin{array}{l}t^{m+1}=z;\\(m+1)t^m dt=dz\end{array}\right|=\frac{\pi}{2(m+1)}\int_0^1\frac{dz}{\left(z^2+1\right)}=$$

$$=\frac{\pi}{2(m+1)}arctg\,z\Big|_0^1=\frac{\pi}{2(m+1)}\cdot\frac{\pi}{4}=\frac{\pi^2}{8(m+1)}.$$

Зауваження. При *m=1* обчислений інтеграл набуває вигляду:

$$\int_0^{+\infty}\frac{xarctg\,x\,dx}{\left(x^4+1\right)}=\frac{\pi^2}{16}.$$

12.6. Застосування невласних інтегралів у задачах теорії ймовірності

Невласні інтеграли першого та другого роду широко використовуються в задачах теорії ймовірності, а саме при обчисленні чисельних характеристик неперервної випадкової величини, заданої на всій числовій осі. До основних чисельних характеристик належать математичне сподівання, дисперсія та середнє квадратичне відхилення. Їх формули мають вигляд:

$$M(x)=\int_{-\infty}^{+\infty} x\,f(x)dx; \quad D(x)=\int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x)dx - M^2(x); \quad \sigma(x)=\sqrt{D(x)}.$$

Приклад 34. Знайти чисельні характеристики неперервної випадкової величини, заданої диференціальною функцією розподілу (закон арксінуса):

$$f(x)=\frac{c}{\sqrt{a^2-x^2}} \quad (-a\le x\le a).$$

Розв'язання. Перш за все, знайдемо значення параметра *c*, при якому *f*(*x*) може бути диференціальною функцією розподілу. Для цього використаємо умову нормування диференціальної функції розподілу:

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{cdx}{\sqrt{a^2-x^2}}=1.$$

Маємо невласний інтеграл другого роду, з особливістю в точках $x=\pm a$. Оскільки:

$$f(x)=\frac{c}{\sqrt{a^2-x^2}}=\frac{c}{\sqrt{a-x}}\cdot\frac{1}{\sqrt{a+x}}\approx\varphi(x)=\frac{c}{(a\pm x)^{1/2}},$$

то у вказаних точках досліджуваний інтеграл збігається (*α* = 1/2).

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{cdx}{\sqrt{a^2-x^2}}=\int_{-a}^{+a}\frac{cdx}{\sqrt{a^2-x^2}}=2\int_{0}^{+a}\frac{cdx}{\sqrt{a^2-x^2}}=2c\arcsin\frac{x}{a}\bigg|_0^a=2c\frac{\pi}{2}=1\Rightarrow$$

$$\Rightarrow c=\frac{1}{\pi}. \quad M(x)=\int_{-a}^{+a}\frac{xdx}{\pi\sqrt{a^2-x^2}}=0.$$

Математичне сподівання дорівнює нулю, оскільки інтеграл від непарної функції в симетричних межах дорівнює нулю.

Інтегральна функція розподілу має вигляд:

$$F(x) = 0,\ \ x < -a;$$

$$F(x) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{x}\frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \frac{1}{\pi}\int_{-a}^{x}\frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \frac{1}{\pi}arcsin\frac{x}{a}\Bigg|_{-a}^{x} = \frac{1}{\pi}\left(arcsin\frac{x}{a}+\frac{\pi}{2}\right) =$$

$$= \frac{1}{\pi}arcsin\frac{x}{a}+\frac{1}{2},\quad (-a \le x \le a);$$

$$F(x) = 1,\ \ x > a.$$

$$D(x) = \int_{-a}^{+a}\frac{x^2dx}{\pi\sqrt{a^2-x^2}} - M^2(x) = \frac{2}{\pi}\int_{0}^{+a}\frac{x^2dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \begin{vmatrix} x = a\,sint; \\ dx = acostdt \end{vmatrix} = \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi/2}\frac{a^2\,sin^2t\;a\,costdt}{a\,cos\,t} =$$

$$= \frac{2a^2}{\pi}\int_{0}^{\pi/2}sin^2tdt = \frac{2a^2}{\pi}\int_{0}^{\pi/2}\frac{1-cos\,2t}{2}dt = \frac{a^2}{\pi}\int_{0}^{\pi/2}dt - \frac{a^2}{\pi}\int_{0}^{\pi/2}cos\,2tdt = \frac{a^2t}{\pi}\Bigg|_{0}^{\frac{\pi}{2}} - \frac{a^2}{2\pi}sin\,2t\Bigg|_{0}^{\frac{\pi}{2}} =$$

$$= \frac{a^2}{2};\ \ \sigma(x) = \sqrt{D(x)} = \frac{a}{\sqrt{2}}.$$

Приклад 35. Знайти значення параметра *с*, чисельні характеристики неперервної випадкової величини, заданої диференціальною функцією розподілу (закон Коші):

$$f(x) = \frac{c}{1+x^2},\quad (-\infty < x < +\infty).$$

Розв'язання. Маємо невласний інтеграл першого роду. Оскільки:

$$f(x) = \frac{c}{1+x^2} = \frac{c}{x^2\left(\frac{1}{x^2}+1\right)} \approx \varphi(x) = \frac{c}{x^2},$$

то досліджуваний інтеграл збігається (α = 2). Перш за все, знайдемо значення параметра *с*, при якому *f*(*x*) може бути диференціальною функцією розподілу. Для цього використаємо умову нормування диференціальної функції розподілу:

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{cdx}{1+x^2} = c\,arctgx\Bigg|_{-\infty}^{+\infty} = c\left(\frac{\pi}{2}-\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right) = c\pi = 1 \Rightarrow c = \frac{1}{\pi}.$$

Інтегральна функція розподілу має вигляд:

$$F(x)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{x}\frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}}=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{x}\frac{dx}{1+x^2}=\frac{1}{\pi}arctg\,x\left|_{-\infty}^{x}\right.=\frac{1}{\pi}\left(arctg\,x+\frac{\pi}{2}\right)=$$

$$=\frac{1}{\pi}arctg\frac{x}{a}+\frac{1}{2}.$$

Математичне сподівання та дисперсія не існують, оскільки відповідні інтеграли розбігаються:

$$M(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{xdx}{\pi(1+x^2)},\ f(x)=\frac{x}{\pi(1+x^2)}=\frac{x}{\pi x^2\left(\frac{1}{x^2}+1\right)}\approx\varphi(x)=\frac{1}{x},\alpha=1.$$

$$D(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{x^2dx}{\pi\left(1+x^2\right)}-M^2(x),\qquad \lim_{x\to+\infty}f(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2dx}{\pi\left(1+x^2\right)}=\frac{1}{\pi}\neq 0.$$

Приклад 36. Знайти інтегральну функцію розподілу, чисельні характеристики неперервної випадкової величини, заданої диференціальною функцією розподілу (показниковий закон):

$$f(x)=\begin{cases}0, & x<0;\\ \lambda e^{-\lambda x}, x\geq 0, \lambda>0.\end{cases}$$

Розв'язання. Інтегральна функція розподілу має вигляд:

$$F(x)=\lambda\int_{-\infty}^{x}e^{-\lambda x}dx=\lambda\int_{0}^{x}e^{-\lambda x}dx=-e^{-\lambda x}\left|_{0}^{x}\right.=1-e^{-\lambda x}.$$

Математичне сподівання, дисперсія та середнє квадратичне відхилення:

$$M(x)=\lambda\int_{-\infty}^{+\infty}xe^{-\lambda x}dx=\lambda\int_{0}^{+\infty}xe^{-\lambda x}dx=\begin{vmatrix}u=x; & dv=e^{-\lambda x}dx;\\ du=dx; & v=-\dfrac{e^{-\lambda x}}{\lambda}\end{vmatrix}=-xe^{-\lambda x}\left|_{0}^{+\infty}\right.+$$

$$+\int_{0}^{+\infty}e^{-\lambda x}dx=-\lim_{x\to+\infty}\frac{\tilde{o}}{e^{\lambda x}}-\frac{e^{-\lambda x}}{\lambda}\left|_{0}^{+\infty}\right.=\frac{1}{\lambda};$$

$$D(x)=\lambda\int\limits_{-\infty}^{+\infty} x^2e^{-\lambda x}dx-M^2(x)=\lambda\int\limits_{0}^{+\infty} x^2e^{-\lambda x}dx-\frac{1}{\lambda^2}=\left|\begin{matrix} u=x^2; & dv=e^{-\lambda x}dx; \\ du=2\tilde{o}dx; & v=-\dfrac{e^{-\lambda x}}{\lambda}\end{matrix}\right|=$$

$$-x^2e^{-\lambda x}\Big|_0^{+\infty}+2\int\limits_0^{+\infty}\tilde{o}e^{-\lambda x}dx=-\lim_{x\to+\infty}\frac{\tilde{o}^2}{e^{\lambda x}}+\frac{2}{\lambda}-\frac{1}{\lambda^2}=\frac{1}{\lambda^2};\ \sigma(x)=\frac{1}{\lambda}.$$

Приклад 37. Знайти значення параметра *c*, інтегральну функцію розподілу, чисельні характеристики неперервної випадкової величини, заданої диференціальною функцією розподілу (закон Лапласа):

$$f(x)=ce^{-\lambda|\tilde{o}|},\quad (\lambda>0).$$

Розв'язання. Перш за все, знайдемо значення параметра *c*, при якому *f*(*x*) може бути диференціальною функцією розподілу. Для цього, припустивши збіжність відповідного інтеграла, використаємо умову нормування диференціальної функції розподілу:

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\tilde{n}e^{-\lambda|x|}dx=\int\limits_{-\infty}^{0}\tilde{n}e^{-\lambda|x|}dx+\int\limits_{0}^{+\infty}\tilde{n}e^{-\lambda|x|}dx=\int\limits_{-\infty}^{0}\tilde{n}e^{\lambda\tilde{o}}dx+\int\limits_{0}^{+\infty}\tilde{n}e^{-\lambda\tilde{o}}dx=$$

$$=\tilde{n}\frac{e^{\lambda\tilde{o}}}{\lambda}\Big|_{-\infty}^{0}-\tilde{n}\frac{e^{-\lambda\tilde{o}}}{\lambda}\Big|_{0}^{+\infty}=\frac{\tilde{n}}{\lambda}+\frac{\tilde{n}}{\lambda}=1\Rightarrow\tilde{n}=\frac{\lambda}{2}.$$

Інтегральна функція розподілу має вигляд:

$$F(x)=\begin{cases}\dfrac{\lambda}{2}\displaystyle\int\limits_{-\infty}^{x}e^{-\lambda|x|}dx=\dfrac{\lambda}{2}\int\limits_{-\infty}^{x}e^{\lambda x}dx=\dfrac{e^{\lambda x}}{2}\Big|_{-\infty}^{\tilde{o}}=\dfrac{e^{\lambda x}}{2}, & x<0;\\ \dfrac{\lambda}{2}\displaystyle\int\limits_{-\infty}^{x}e^{-\lambda|x|}dx=\dfrac{\lambda}{2}\int\limits_{-\infty}^{0}e^{\lambda x}dx+\dfrac{\lambda}{2}\int\limits_{0}^{\tilde{o}}e^{-\lambda x}dx=\dfrac{e^{\lambda x}}{2}\Big|_{-\infty}^{0}-\dfrac{e^{-\lambda x}}{2}\Big|_{0}^{\tilde{o}}=\dfrac{1}{2}-\dfrac{e^{-\lambda x}}{2}+ & \\ +\dfrac{1}{2}=1-\dfrac{e^{-\lambda x}}{2}, & x\ge 0.\end{cases}$$

Математичне сподівання, дисперсія та середнє квадратичне відхилення:

$$M(x)=\frac{\lambda}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} xe^{-\lambda|x|}dx=0,\, D(x)=\frac{\lambda}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} x^2e^{-\lambda|x|}dx-M^2(x)=\frac{\lambda}{2}\int_{-\infty}^{0} x^2e^{\lambda\tilde{o}}dx+$$

$$+\int_{0}^{+\infty} x^2e^{-\lambda\tilde{o}}dx=I_1+I_2=\frac{1}{\lambda^2}+\frac{1}{\lambda^2}=\frac{2}{\lambda^2};\quad \sigma(x)=\frac{\sqrt{2}}{\lambda}.$$

$$I_1=\frac{\lambda}{2}\int_{-\infty}^{0} x^2e^{\lambda\tilde{o}}dx=\left|\begin{matrix} u=x^2; \quad dv=e^{\lambda x}dx; \\ du=2\tilde{o}dx;\ v=\dfrac{e^{\lambda x}}{\lambda}\end{matrix}\right|=\frac{\lambda}{2}\left(\left.\frac{x^2e^{-\lambda x}}{\lambda}\right|_{-\infty}^{0}-\frac{2}{\lambda}\int_{-\infty}^{0} xe^{\lambda\tilde{o}}dx\right)=$$

$$=-\int_{-\infty}^{0} xe^{\lambda\tilde{o}}dx=\left|\begin{matrix} u=x;\ dv=e^{\lambda x}dx; \\ du=dx;\ v=\dfrac{e^{\lambda x}}{\lambda}\end{matrix}\right|=-\left(\left.\frac{\tilde{o}e^{\lambda x}}{\lambda}\right|_{-\infty}^{0}-\frac{1}{\lambda}\int_{-\infty}^{0} e^{\lambda\tilde{o}}dx\right)=\left.\frac{e^{\lambda\tilde{o}}}{\lambda^2}\right|_{-\infty}^{0}=\frac{1}{\lambda^2};$$

$$I_2=\frac{\lambda}{2}\int_{0}^{+\infty} x^2e^{-\lambda\tilde{o}}dx=\left|\begin{matrix} u=x^2; \quad dv=e^{-\lambda x}dx; \\ du=2\tilde{o}dx;\ v=-\dfrac{e^{-\lambda x}}{\lambda}\end{matrix}\right|=\frac{\lambda}{2}\left(-\left.\frac{x^2e^{-\lambda x}}{\lambda}\right|_{0}^{+\infty}+\frac{2}{\lambda}\int_{0}^{+\infty} xe^{-\lambda\tilde{o}}dx\right)=$$

$$=\int_{0}^{+\infty} xe^{-\lambda\tilde{o}}dx=\left|\begin{matrix} u=x;\ dv=e^{-\lambda x}dx; \\ du=dx;\ v=-\dfrac{e^{-\lambda x}}{\lambda}\end{matrix}\right|=\left(-\left.\frac{\tilde{o}e^{-\lambda x}}{\lambda}\right|_{0}^{+\infty}+\frac{1}{\lambda}\int_{0}^{+\infty} e^{-\lambda\tilde{o}}dx\right)=-\left.\frac{e^{-\lambda\tilde{o}}}{\lambda^2}\right|_{0}^{+\infty}==\frac{1}{\lambda^2}.$$

Запитання до самодіагностики

1. Що означає термін "невласні інтеграли першого роду"?
2. Який вигляд має інтеграл Діріхле?
3. Наведіть формулювання порівняльної ознаки.
4. Наведіть формулювання ознаки абсолютної збіжності.
5. Як використовуються невласні інтеграли першого роду в задачах теорії ймовірності та математичної статистики.

6. Що означає термін "невласні інтеграли другого роду"?

7. Який вигляд має інтеграл Діріхле для невласних інтегралів другого роду?

8. Наведіть порівняльну ознаку для невласних інтегралів другого роду.

9. Що означає ознака абсолютної збіжності для невласних інтегралів другого роду?

10. Наведіть інтеграл Пуассона та покажіть його використання в задачах теорії ймовірності і математичної статистики.

Завдання до самостійної роботи

Обчислити невласні інтеграли (або встановити їх розбіжність):

1.1. $\int\limits_1^{+\infty} \frac{1}{x\sqrt[3]{x^2}}dx$. **1.2.** $\int\limits_1^{+\infty} \frac{x}{1+x^2}\,dx$. **1.3.** $\int\limits_3^{+\infty} \frac{1}{x^2+9}\,dx$. **1.4.** $\int\limits_1^{+\infty} \frac{1}{x(1+x)}\,dx$.

1.5. $\int\limits_0^1 \frac{1}{(1+x)\sqrt{x}}dx$. **1.6.** $\int\limits_1^2 \frac{1}{x(2-x)}dx$. **1.7.** $\int\limits_1^{+\infty} ln\,x\,dx$. **1.8.** $\int\limits_9^1 \frac{ln\,x}{\sqrt[3]{x}}dx$.

1.9. $\int\limits_{\frac{6}{\pi}}^{+\infty} \frac{1}{x^2}cos\frac{1}{x}\,dx$. **1.10.** $\int\limits_9^1 \frac{ln\,x}{\sqrt[5]{x}}dx.$ **1.11.** $\int\limits_{\frac{6}{\pi}}^{+\infty} \frac{1}{x^2}sin\frac{1}{x}\,dx.$ **1.12.** $\int\limits_e^{+\infty} \frac{dx}{x\,ln^3 x}.$

Дослідити невласні інтеграли на збіжність:

2.1. $\int\limits_0^{+\infty} \frac{\sqrt{x}}{1+x^2}\,dx$. **2.2.** $\int\limits_1^{+\infty} \frac{1}{x\sqrt{1+x}}dx$. **2.3.** $\int\limits_0^{+\infty} \frac{arctgx}{x^p}dx$. **2.4.** $\int\limits_0^{+\infty} \frac{arctg\sqrt[3]{x}}{\sqrt{x^2+2x^3}}dx.$

2.5. $\int_0^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{x}+x^3}dx$. **2.6.** $\int_0^1 \frac{\sqrt{ln(1+x)}}{arctgx}dx$. **2.7.** $\int_0^1 \frac{\sqrt{ln(1+x^3)}}{1-\cos x}dx$. **2.8.** $\int_0^{+\infty} \frac{1-\cos x}{x^p}dx$.

2.9. $\int_0^1 \frac{\sqrt{ln(1+x)}}{arctgx}dx$. **2.10.** $\int_0^{+\infty} \frac{\sqrt{x}}{1+x^2}dx$. **2.11.** $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x\sqrt{1+x}}dx$. **2.12.** $\int_0^{+\infty} \frac{arctgx}{x^p}dx$.

Рекомендована література

Основна

Робоча програма навчальної дисципліни "Математика для економістів" для студентів галузі знань "Економіка і підприємництво" всіх форм навчання / укл. Л. М. Малярець, О. Д. Анохіна, І. Л. Лебедева. – Х. : ХНЕУ, 2010. – 84 с.

Травкін Ю. І. Математика для економістів / укл. Травкін Ю. І., Малярець Л. М. – Х. : ІНЖЕК, 2005. – 816 с.

Додаткова

Барабаумов В. Е. Справочник по математике для экононономистов / В. Е. Барабаумов, В. И. Ермаков, Н. Н. Кривенцова. – М. : Высшая школа, 1987.– 336 с.

Бермант А. Ф. Краткий курс математического анализа / Бермант А. Ф. – М. : Наука, Глав. ред. физ.-мат. лит.,1973. – 720 с.

Берман Г. Н. Сборник задач по курсу математического анализа / Берман Г. Н. – М. : Наука, Глав. ред. физ.-мат. лит., 1975. – 416 с.

Высшая математика для экономистов : учебн. пособ. для вузов / Н. Ш. Кремер, Б. А. Путко, И. М. Тришин, М. Н. и др. – М. : Банки и биржи ; ЮНИТИ, 1997. – 439 с.

Панова Н. В. Тексти лекцій "Елементи математичного аналізу" з курсу "Математика для економістів" / Панова Н. В., Титарєв В. Г. – Х. : ХДЕУ, 2003. – 80 с.

Титарєв В. Г. Індивідуальні завдання та методичні рекомендації до їх виконання з розділу "Невизначений та визначений інтеграл" навчальної дисципліни "Вища математика"для студентів спеціальності 8.050102 денної форми навчання / Титарєв В. Г., Шупіков О. М. – Х. : ХНЕУ, 2006. – 48 с.

НАВЧАЛЬНЕ ВИДАННЯ

Методичні рекомендації до самостійної роботи з теми "Інтегральне числення" навчальної дисципліни "МАТЕМАТИКА ДЛЯ ЕКОНОМІСТІВ" для студентів галузі знань 0305 "Економіка та підприємництво" всіх форм навчання

Укладач **Титарєв** Віктор Георгійович

Відповідальний за випуск **Малярець Л. М.**

Редактор **Бутенко В. О.**

Коректор **Мартовицька-Максимова В. А.**

План 2013 р. Поз. № 188.

Підп. до друку Формат 60 х 90 1/16. Папір MultiCopy. Друк Riso.

Ум.-друк. арк. 2,5. Обл.-вид. арк. 3,13. Тираж прим. Зам. №

Видавець і виготівник — видавництво ХНЕУ, 61166, м. Харків, пр. Леніна, 9а

Свідоцтво про внесення до Державного реєстру суб'єктів видавничої справи
Дк № 481 від 13.06.2001 р.