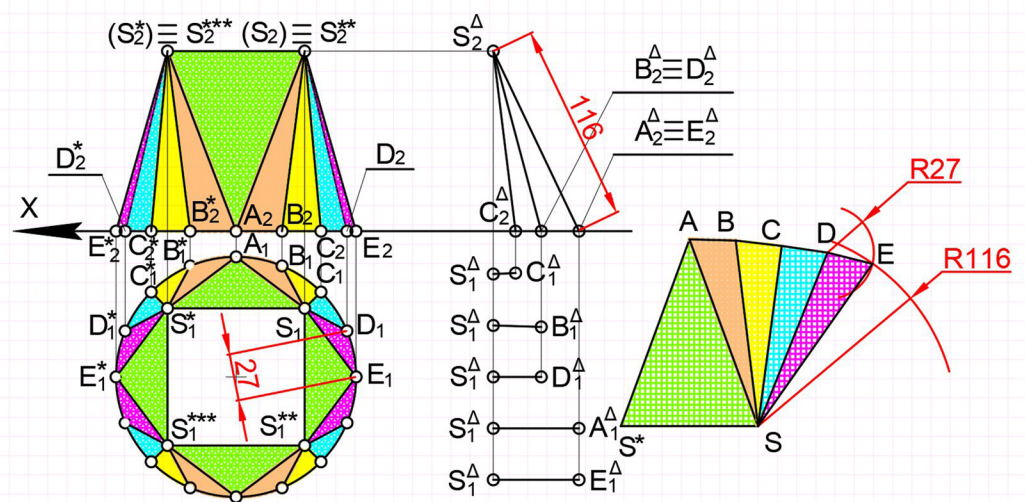
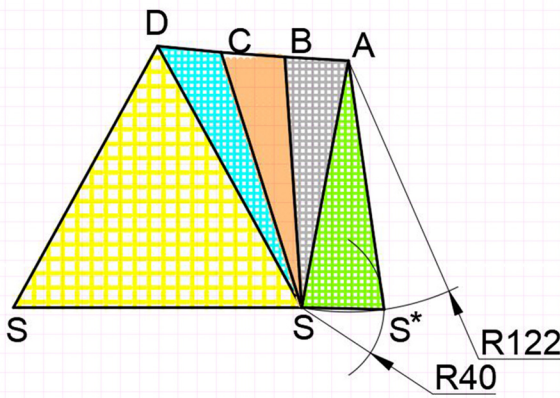
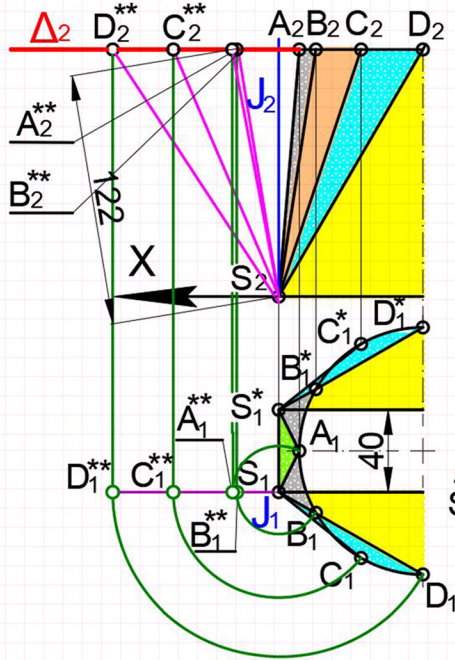
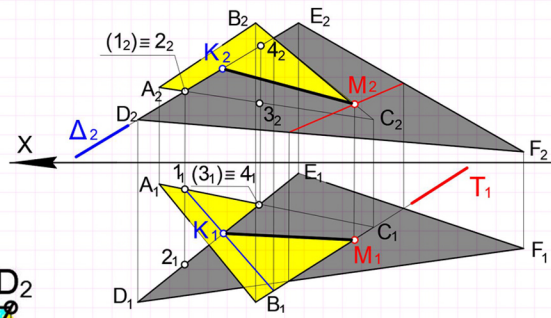
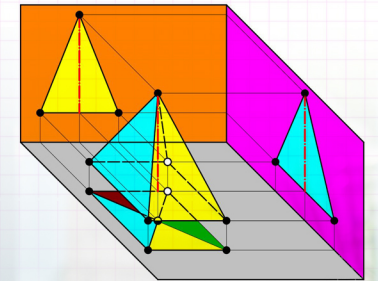


НАРИСНА ГЕОМЕТРІЯ

Л. В. Бовнегра
Ф. В. Новіков
О. О. Якімов
В. О. Жовтобрюх

Навчальний посібник



**Л. В. Бовнегра
Ф. В. Новіков
О. О. Якімов
В. О. Жовтобрюх**

НАРИСНА ГЕОМЕТРІЯ

Навчальний посібник

УДК 514.18:004(075.8)

Н 28

Рецензенти:

Т. В. Лисенко, докт. техн. наук, професор, завідувачка кафедри матеріалознавства і інженерії матеріалів Національного університету "Одеська політехніка";
С. М. Уминський, канд. техн. наук, доцент, доцент кафедри агроінженерії Одеського державного аграрного університету

*Рекомендовано до видання рішенням
Вченої ради Національного університету «Одеська політехніка».
Протокол № 7 від 19 грудня 2023 р.*

Н28 Нарисна геометрія : навчальний посібник / Л. В. Бовнегра, Ф. В. Новіков, О. О. Якімов, В. О. Жовтобрюх. Дніпро : ЛІРА, 2024. 148 с.
ISBN 978-966-981-857-7

Матеріал навчального посібника містить 7 тем: 1) утворення проєкцій; 2) комплексні креслення точок, прямих, площин, а також поверхонь, форми яких найчастіше застосовуються як конструктивні елементи машинобудівних деталей і архітектурних споруд; 3) перетин прямої з поверхнями; 4) перетин площини з поверхнями; 5) взаємне перетинання поверхонь; 6) методи перетворення комплексного креслення під час вирішення метричних завдань; 7) побудова розгорток поверхонь. Надано узагальнені алгоритми вирішення позиційних та метричних завдань. Наведено велику кількість рішень завдань. Розв'язання складних графічних завдань (у яких багато ліній побудови) показано на кількох рисунках, кожен із яких служить ілюстрацією певного етапу розв'язання завдання. У деяких випадках наводяться кілька способів вирішення одного й того ж завдання. Велика кількість ілюстрацій дозволяє полегшити засвоєння навчального матеріалу та сприяє отриманню твердих знань. Різноманітність наведених завдань має сприяти розвитку у здобувачів вищої освіти просторової уяви, необхідної для вільного читання виробничих і будівельних креслень та виконання технічних графічних побудов.

Рекомендовано для здобувачів вищої освіти інженерних та будівельних спеціальностей.

УДК 514.18:004(075.8)

ISBN 978-966-981-857-7

© Бовнегра Л. В., Новіков Ф. В.,
Якімов О. О., Жовтобрюх В. О., 2024
© ЛІРА, 2024

Вступ

Нарисна геометрія – це наука щодо операційних зображень, які застосовують у техніці.

Нарисна геометрія вивчає:

- геометричні методи зображення просторових фігур на площині, за допомогою яких фігури, що мають три виміри: ширину, висоту і довжину, зображують на плоскому кресленні за двома вимірами;
- геометричні властивості фігур за їхніми зображеннями;
- графічні методи вирішення геометричних завдань, пов'язаних із визначенням розмірів, форми та взаємного розташування фігур.

Нарисна геометрія сприяє розвитку просторового мислення, необхідного для інженерної діяльності. Метод прямокутних проекцій, яким користуються у сучасній техніці, наведено у науковій літературі французьким інженером Гаспаром Монжем. У своїй класичній роботі *Geometric descriptive* (Нарисна геометрія), опублікованій у 1799 році, Монж розробив загальну геометричну теорію, що дозволяє на плоскому аркуші, що містить ортогональні проекції тривимірного тіла, вирішувати різні стереометричні завдання. Їм було створено абстрактну геометричну модель реального простору, за якою кожній точці тривимірного простору ставляться у відповідність дві її ортогональні проекції на взаємно перпендикулярні площини. Проекційне креслення, побудоване за правилом нарисної геометрії, стає робочим інструментом інженерів та архітекторів усіх країн. Вперше вчений запропонував розглядати плоске креслення у двох проекціях як результат поєднання зображеної фігури в одній площині – комплексне (ортогональне) креслення або епюр Монжа.

Кожна нова споруда, будівля або машина вимагає попереднього розроблення креслення, на якому повинна бути показана конструкція споруди або машина як у загальному вигляді, так і їх окремі частини. Без такого графічного зображення конструктивних думок будівельника неможливо побудувати споруду взагалі. Із появою нового методу побудови графічних документів з'являється достатньо простий спосіб викладу проектних винаходів та інженерних ідей для швидкого їх застосування у машинному виробництві. Настав час промислових революцій. Почали випускати перші машини і механізми, здатні переносити

людину землею, повітрям, водою. Гаспар Монж небезпідставно стверджував, що "креслення – це мова техніки" і бачив велике значення створеної ним науки для промисловості. Із розвитком нарисної геометрії та її впровадженням у освіту і конструкторські креслення почали бурхливо розвиватися всі технічні галузі. Інженерна думка, що отримала графічний спосіб передачі ідеї, сприяла підйому автомобілебудування, літакобудування, пароплавобудування, паровозобудування, військової техніки тощо.

Рівень розвитку сучасних промислових технологій визначається якістю освіти технічних спеціалістів. Отримати фахівця, який має знання сучасних промислових технологій, неможливо без розвитку у нього просторової уяви. Просторова уява – це вид розумової діяльності, спрямованої на створення просторових образів і оперування ними у процесі вирішення різних практичних і теоретичних завдань. Просторова уява необхідна для побудови зображень просторових тіл на площині, а також для читання креслень, коли з плоских проєкцій, що мають два виміри, необхідно уявити тіло, що має три виміри: ширину, довжину та висоту. Нарисна геометрія сприяє розвитку просторового мислення, необхідного як для інженерно-технічних працівників, так і для робочих промислових підприємств. Без наявності в країні високоосвічених інженерно-технічних працівників та робітників, здатних читати креслення та виготовляти по них деталі, неможливе створення та розвиток важкої промисловості. Високорозвинена важка промисловість є гарантом економічного суверенітету та військової безпеки країни. Тому курс "Нарисна геометрія" готує здобувачів вищої освіти до виконання та читання креслень як у процесі навчання у вищому навчальному закладі, так і в подальшій практичній діяльності. Назва "Нарисна геометрія" дозволяє інженеру виконувати і читати креслення так само, як знання азбуки і граматики дозволяє людині читати і писати.

Людство ще не винайшло досконалішого засобу для розвитку просторової уяви та образного мислення, ніж навчальна дисципліна "Нарисна геометрія". Тому ця дисципліна продовжує залишатися базовою дисципліною у формуванні технічних і технологічних знань.

Розглянуті у навчальному посібнику матеріали набули застосування у Національному університеті "Одеська політехніка" та Харківському національному економічному університеті імені Семена Кузнеця під час проведення занять із технічних і технологічних дисциплін.

1. Види проєціювання

Зображення предметів на кресленнях отримують проєціюванням. Проєціювання – це процес отримання зображення предмета на будь-якій поверхні. Отримане при цьому зображення називають проєкцією предмета. Слово "проєкція" у перекладі з латинського означає "кидання вперед, вдалину". Елементами, за допомогою яких здійснюється проєціювання, є:

- центр проєціювання – точка, з якої здійснюється проєціювання;
- об'єкт проєціювання – зображуваний предмет;
- площина проєкції – площина, на яку здійснюється проєціювання;
- проєціювальні промені – уявні прямі, за допомогою яких здійснюється проєціювання.

Результатом проєціювання є зображення або проєкція об'єкта. Розрізняють центральне і паралельне проєціювання. Під час центрального проєціювання всі проєціювальні промені виходять із однієї точки – центра проєціювання, що знаходиться на певній відстані від площини проєкції. Прикладом центрального проєціювання є демонстрація фільмів у кінотеатрі. Тут центром проєціювання є об'єктив кінопроектора, об'єктом проєціювання – кінострічка, проєціювальними променями – світлові промені, що виходять із об'єктива кінопроектора, площиною проєкції – екран, а проєкцією об'єкта є зображення на цьому екрані.

Метод центрального проєціювання використовують також художники, але навіть не здогадуються про це. Художник намагається зобразити на папері чи полотні те, що він бачить. Але будь-яка людина бачить те зображення, яке проєціюється на сітківку його ока. У цьому прикладі кришталик ока є центром проєціювання. Зображення на очному дні (сітківці ока) виходить перевернутим. Але мозок справляється із цією проблемою.

Метод центрального проєціювання використовують під час побудови перспективи. Перспектива дає можливість зображати предмети такими, якими вони видаються нам у природі під час розгляду із певної точки спостереження. Зображення, отримані з використанням цього методу проєціювання, є наочними, але за цим зображенням важко судити щодо дійсних розмірів предметів та відстані між ними. Наприклад, за картиною "Ранок у сосновому лісі", намальованою у 1889 році відомим художником Іваном Шишкіним.

ним художником-пейзажистом Іваном Івановичем Шишкіним, неможливо визначити, яке із двох дерев має більший діаметр стовбура: повалене трухляве дерево, на якому граються двоє ведмежат, або дерево, яке розташоване позаду них. Неможливо визначити відстань між цими деревами. До речі, ведмежат на цій картині намалював не Шишкін І. І., а його друг – художник Костянтин Савицький.

У машинобудівних кресленнях центральні проєкції не використовують. Їх широко використовують у будівельному кресленні. Під час паралельного проєціювання проєціювальні промені паралельні між собою. Центр проєціювання у даному разі умовно видаляють у нескінченність. Тоді паралельні промені утворюють на площині проєкцій тінь, яку можна сприйняти як паралельну проєкцію зображеного предмета. У кресленні користуються паралельними проєкціями. Виконувати їх простіше за центральні. Якщо проєціювальні промені становлять із площиною проєкції прямий кут, то такі паралельні проєкції називаються *прямокутними* або *ортогональними*. Слово "ортогональний" походить від грецьких слів "ortos" – прямий або "gonia" – кут. Креслення у системі прямокутних проєкцій надає достатньо повні відомості щодо форми і розмірів предмета, оскільки предмет зображується із декількох сторін. Тому у виробничій практиці користуються кресленнями, що містять один, два, три і більше зображень предмета, отриманих у результаті прямокутного проєціювання [1].

Властивості паралельного проєціювання

Властивість 1. Проєкцією точки є точка.

Властивість 2. Якщо пряма збігається із напрямом проєціювання, то її проєкцією є точка.

Властивість 3. Якщо пряма не збігається із напрямом проєціювання, її проєкцією є пряма.

Властивість 4. Якщо плоска фігура розташована паралельно до площини проєкцій, то вона проєціюється на цю площину в натуральну величину.

Властивість 5. Якщо плоска фігура збігається із напрямом проєціювання, то вона проєціюється на площину проєкцій у вигляді прямолінійного відрізка.

Властивість 6. Якщо точка належить відрізку, то проєкція точки належить проєкції відрізка.

Властивість 7. Якщо точка ділить відрізок у будь-якому відношенні, то проекція точки ділить проекцію відрізка у тому самому відношенні.

Властивість 8. Якщо два відрізки паралельні, то їх проекції теж паралельні.

Властивість 9. Якщо два відрізки паралельні, то відношення їх довжин дорівнює відношенню довжин проекцій.

Метод ортогональних проекцій – це метод двох зображень, які являють собою систему прямокутних проекцій тривимірного простору, побудованих так, щоб на кожній проекції два виміри простору проєціювалися не спотворюючись, а третій вимір вироджувався у точку. При цьому вимір, що виродився на одній проекції, проєціюється не спотворюючись на другій проекції [2, 3].

Тривимірний простір може бути задано системою трьох взаємно перпендикулярних осей, у якому вимірюється ширина, довжина і висота будь-якого просторового предмету. На рис. 1 наведено наочне зображення системи координатних осей OXYZ.

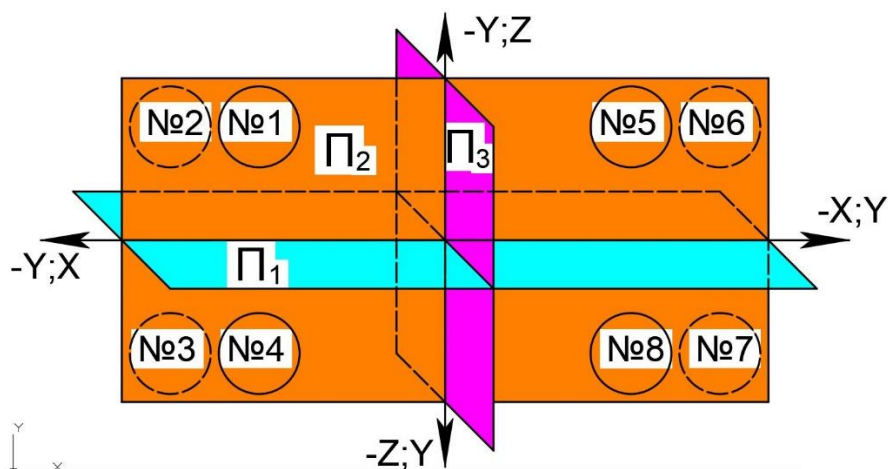


Рис. 1

Кожна пара горизонтальних осей визначає у просторі положення однієї координатної площини. Три осі попарно визначають три координатні площини: фронтальну, що визначається осями OX, OZ і позначається П₂; горизонтальну, що визначається осями OX, OY і позначаються П₁, і профільну, що визначається осями OY, OZ і позначається П₃.

Координатні площини, які є нескінченно продовжені, поділяють весь простір на 8 частин (на вісім октантів) (рис. 1). Так, на горизон-

тальній координатній площині Π_1 розташовано 1, 2, 5 і 6 октанти. Перед фронтальною координатною площиною розташовано 1, 5, 8 і 4 октанти. Координати абсцис, що відкладаються на осі X від початку координат вліво від площини Π_3 , матимуть позитивне значення; координати, що відкладаються праворуч від площини Π_3 будуть негативні. Координати ординат, що відкладаються на осі Y перед фронтальною площиною Π_2 , матимуть позитивне значення, а координати, що відкладаються за площиною Π_2 , – негативні. Координати аплікату, що відкладено на осі Z вище горизонтальної площини Π_1 , матимуть позитивне значення, а координати, що відкладено нижче цієї площини, – негативні.

У табл. 1 показано знаки координат, що визначають знаходження точки (предмета) у тому або іншому октанті.

Таблиця 1 – Знаки координат у різних октантах

Октант	1	2	3	4	5	6	7	8
X	+	+	+	+	-	-	-	-
Y	+	-	-	+	+	-	-	+
Z	+	+	-	-	+	+	-	-

Контрольні питання

1. Для чого вивчають інженерну графіку?
2. Що таке технічне креслення?
3. На якому методі базується нарисна геометрія?
4. У чому полягає сутність метода проєкцій?
5. Які існують способи проєціювання?
6. Назвіть елементи, за допомогою яких здійснюється проєціювання.
7. Чим відрізняється центральне проєціювання від паралельного проєціювання?
8. Що таке прямокутні проєкції?
9. Назвіть властивості паралельного проєціювання.
10. Сутність методу ортогональних проєкцій.
11. Назвіть знаки координат у різних октантах.

2. Комплексне креслення

Спосіб комплексних проєкцій заснований на тому, що точку (предмет) проєціюють на кілька взаємно перпендикулярних площин проєкції, використовуючи прямокутне проєціювання, а потім ці площини проєкції поєднують із однією площиною (рис. 2).

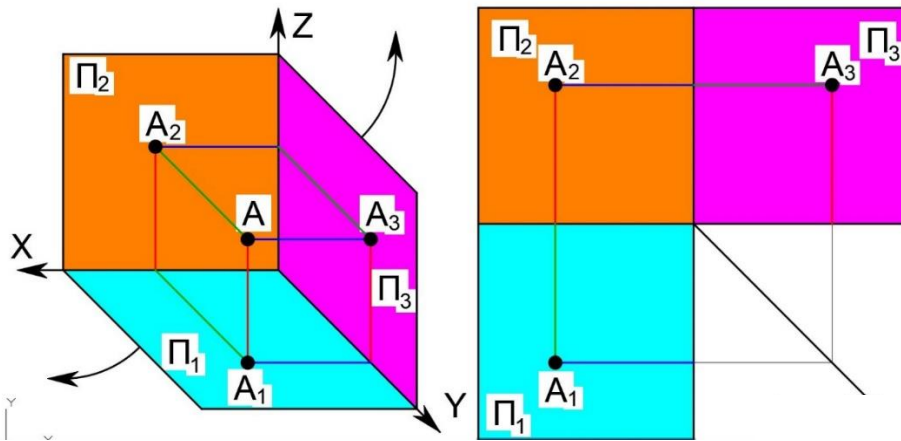


Рис. 2

Для утворення комплексного креслення горизонтальну площину проєкції Π_1 обертанням вниз навколо осі X , а профільну площину проєкції Π_3 обертанням праворуч навколо осі Z поєднують із фронтальною площиною проєкцій Π_2 . У результаті такого суміщення утворюється трипроєкційне комплексне креслення, наприклад точка A із осями X, Y, Z .

За таким поєднанням вісь Y умовно поздовжньо як би розтинають і одну її частину поєднують із продовженням осі X , а другу – із продовженням осі Z . Лінія проєкційного зв'язку AA_3 при цьому розривається.

Основні властивості трипроєкційного комплексного креслення:

- дві проєкції точки належать одній лінії зв'язку;
- лінії зв'язку перпендикулярні відповідній осі проєкції;
- дві проєкції точки визначають положення її третьої проєкції.

Комплексне креслення – це зображення на одній площині кількох взаємопов'язаних прямокутних проєкцій предмета, яке отримано після певного поєднання площин проєкцій із площиною креслення [4].

Склад комплексного (ортогонального) креслення точки:

- координатні осі X, Y, Z ;
- проєкції точки (горизонтальна, фронтальна і профільна);

- позначення проєкції точки; всі проєкції однієї й тієї ж точки позначаються однією й тією ж великою літерою латинського алфавіту із індексацією у вигляді арабських цифр 1, 2 або 3;

- *лінії проєкційного зв'язку* – це лінії, що з'єднують проєкції однієї й тієї ж точки;

- постійна комплексного креслення – бісектриса кута, що утворюється двома осями Y .

Три закони проєкційного зв'язку на комплексному (ортогональному) кресленні точки

1. Горизонтальна і фронтальна проєкції точки повинні знаходитися на вертикальній лінії проєкційного зв'язку.

2. Фронтальна і профільна проєкції точки повинні знаходитися на горизонтальній лінії проєкційного зв'язку.

3. Профільна і горизонтальна проєкції точки повинні знаходитися на вертикально-горизонтальній ламаній лінії у вигляді прямого кута, вершина якого повинна знаходитися на постійній комплексного креслення.

Приклад. Побудувати комплексне креслення точки A за координатами: $X \equiv +20$, $Y \equiv -50$, $Z \equiv +30$ мм (рис. 3).

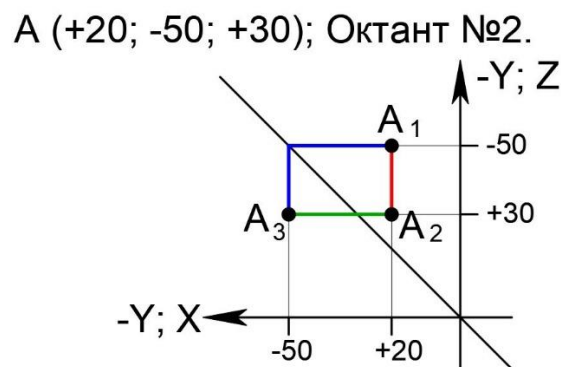


Рис. 3

Із табл. 1 встановлюємо, що точка A знаходиться у октанті №2. Будуємо горизонтальну проєкцію точки A_1 , яка визначається координатами: $X \equiv +20$ мм; $Y \equiv -50$ мм.

Потім будуємо фронтальну проєкцію точки A_2 , яка визначається координатами: $X \equiv +20$ мм, $Z \equiv +30$ мм.

Вертикальна червона лінія, що з'єднує проекції точки A_1 і A_2 , є першим законом проекційного зв'язку. Профільна проекція точки A_3 знаходиться на перетині другого (горизонтальної зеленої лінії) і третього (синього прямого кута з вершиною, що упирається в постійну комплексну креслення) законів проекційного зв'язку.

Приклад. Побудувати комплексне креслення точок A і B за координатами: $A(-20; +60; -30)$, $B(-30; +50; -70)$. На першому місці указано координати X , на другому місці – координати Y , на третьому місці – координати Z (рис. 4). Спочатку будемо горизонтальні проекції точок A_1 і B_1 , які визначаються координатами X і Y . Потім будемо фронтальні проекції точок A_2 і B_2 , які визначаються координатами X і Z . Профільні проекції точок A_3 і B_3 знаходяться на перетині другого (зелені горизонтальні лінії) і третього (сині ламані лінії) законів проекційного зв'язку. Точки перетинів синіх ламаних ліній повинні перебувати на постійному комплексному кресленні (рис. 4). Із табл. 1 визначаємо, що точки A і B знаходяться в октанті №8.

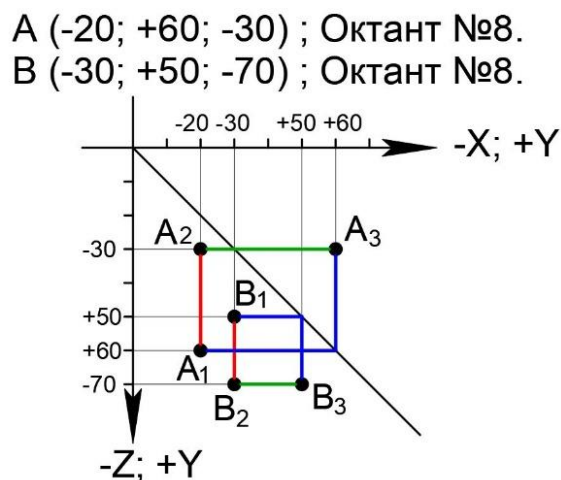


Рис. 4

На рис. 5 показано комплексні креслення точок A і B , які знаходяться у першому і сьомому октантах, відповідно. Координати кожної із цих точок за абсолютними величинами однакові, тому лінії проекційних зв'язків, що з'єднують проекції цих точок, утворюють квадрати, центральні точки яких збігаються із початком координат.

На рис. 5 показано також комплексні креслення точок C і D , які знаходяться у другому і восьмому октантах, відповідно. Координати X , Y , Z цих точок за абсолютними величинами однакові, тому горизонталь-

ні фронтальні та профільні проекції точок C і D збігаються ($C_1 \equiv C_2 \equiv C_3$; $D_1 \equiv D_2 \equiv D_3$). Комплексні креслення точок C і D не містять ліній проєкційних зв'язків, а проекції цих точок, що збігаються, розташовані на постійному комплексному кресленні.

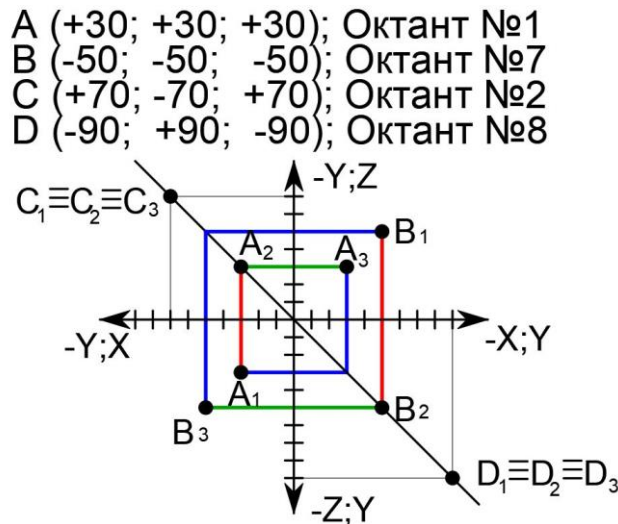


Рис. 5

Комплексне креслення прямої

Пряма лінія визначається заданням двох її точок. Частина прямої, що обмежена двома точками, називається *відрізком прямої*.

Якщо пряма перпендикулярна до однієї з площин проєкцій, то її проєкція на цій площині вироджується у точку, на інші дві координатні площини вона проєціюється у натуральну величину. У системі ортогональних проєкцій прямої, які перпендикулярні координатній площині, є проєціювальними прямими.

Фронтально-проєціювальною прямою називається пряма, яка перпендикулярна до фронтальної координатної площини. Із рис. 6 видно, що фронтальна проєкція фронтально-проєціювальної прямої CD виродилася у точку, тобто $C_2 \equiv D_2$, горизонтальна проєкція C_1D_1 і фронтальна проєкція C_3D_3 рівні натуральній величині заданого відрізка. Проекції C_1D_1 та C_3D_3 перпендикулярні координатним осям, що визначають фронтальну площину проєкції: горизонтальна проєкція C_1D_1 перпендикулярна осі X, а профільна проєкція C_3D_3 перпендикулярна осі Z.

Горизонтально-проєціювальною прямою називається пряма, яка перпендикулярна горизонтальній координатній площині. Із рис. 6 видно, що горизонтальна проєкція горизонтально-проєціювального відрізка

ка АВ вродилася у точку, тобто $A_1 \equiv B_1$. Фронтальна проекція A_2B_2 і профільна проекції A_3B_3 дорівнюють натуральній величині відрізка. Проекції A_2B_2 і A_3B_3 перпендикулярні координатним осям, що визначають горизонтальну площину проекції: фронтальна проекція A_2B_2 перпендикулярна до осі X, а профільна проекція A_3B_3 перпендикулярна до осі Y.

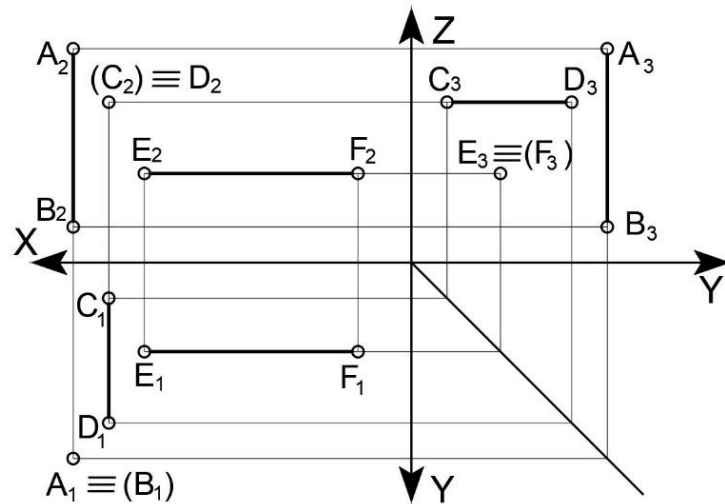


Рис. 6

Профільно-проєціювальною прямою називається пряма, яка перпендикулярна до профільної координатної площини. Із рис. 6 видно, що профільна проекція профільно-проєціювальної прямої EF вродилася у точку, тобто $E_3 \equiv F_3$. Фронтальна E_2F_2 і горизонтальна E_1F_1 проекції відрізка дорівнюють його натуральній величині і перпендикулярні координатним осям, що визначають профільну площину проекції: фронтальна проекція E_2F_2 перпендикулярна до осі Z, а горизонтальна проекція E_1F_1 перпендикулярна до осі Y.

Слідом прямої називається точка перетину даної прямої із координатною площиною. Слід прямої можна розглядати у вигляді точки, відстань від якої до відповідної площини проекції дорівнює нулю.

Горизонтально-проєціювальна пряма, що задана відрізком АВ, перетинається із горизонтальною площиною проекції Π_1 у точці G (рис. 7). Горизонтальна проекція цієї точки G_1 збігається із горизонтальними проекціями кінців відрізка: $G_1 \equiv A_1 \equiv B_1$. Оскільки точка G розташована у горизонтальній площині проекції, то дві інші її проекції знаходяться на координатних осях, що визначають цю площину: фронтальна проекція G_2 точки G_1 знаходиться на осі X, профільна проекція G_3 знаходиться на осі Y.

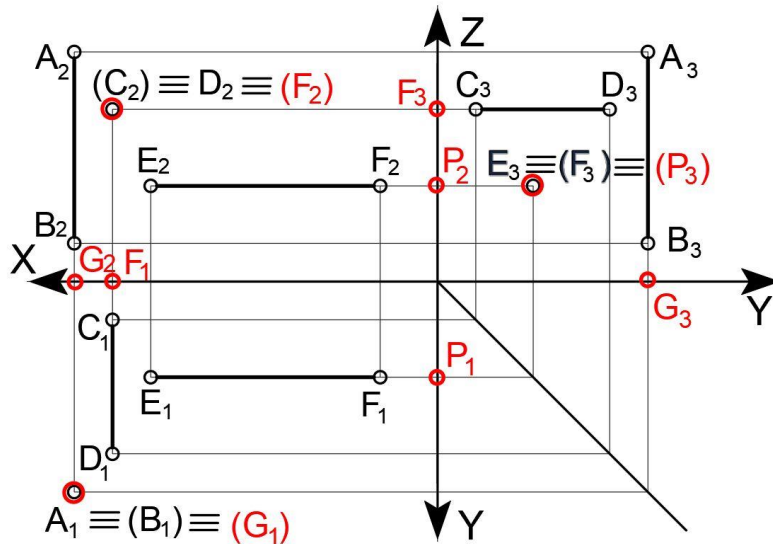


Рис. 7

Фронтально-проєціювальна пряма, що задана відрізком CD, перетинається із фронтальною площиною проєкції Π_2 у точці F (рис. 7). Фронтальна проєкція цієї точки F_2 збігається із фронтальними проєкціями кінців відрізка: $F_2 \equiv C_2 \equiv B_2$.

Оскільки точка F перебуває у фронтальній координатній площині Π_2 , то її горизонтальна проєкція F_1 знаходиться на осі X, а профільна проєкція F_3 – на осі Z, тобто на осях, що визначають фронтальну координатну площину Π_2 .

Профільний слід P_3 профільно-проєціювальної прямої EF збігається з її профільною проєкцією, що виродилася у точку: $E_3 \equiv F_3 \equiv P_3$. Інші дві проєкції точки P належать координатним осям Y і Z, які визначають фронтальну площину проєкції Π_3 : фронтальна проєкція P_2 належить осі Z, а горизонтальна проєкція P_1 розташована на осі Y.

Прямі, паралельні координатним площинам, називаються *прямими рівнями*. Якщо пряма паралельна до однієї з координатних площин, то на цю площину проєціюється у натуральну величину її відрізок і кути його нахилу до інших координатних площин. *Горизонтальною прямою рівня* називається пряма, паралельна горизонтальній координатній площині Π_1 . На рис. 8 видно, що горизонтальна проєкція A_1B_1 даного відрізка дорівнює його натуральній величині.

Дві інші проєкції цього відрізка паралельні координатним осям, що визначають горизонтальну площину проєкції: фронтальна проєкція A_2B_2 паралельна осі X, профільна проєкція A_3B_3 паралельна осі Y. Кут

між горизонтальною проекцією A_1B_1 відрізка AB і віссю X є кутом між ним та фронтальною площиною. Кут між проекцією A_1B_1 і віссю Y є кутом нахилу відрізка AB до профільної площини проекції.

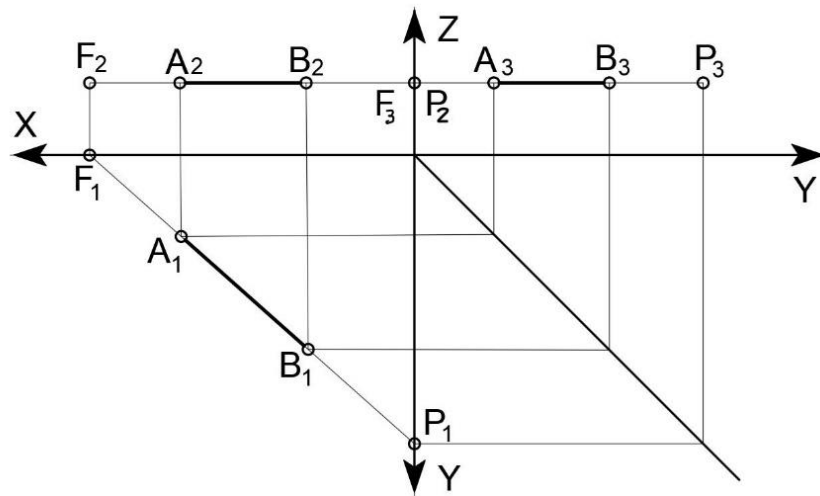


Рис. 8

Пряма AB перетинається із фронтальною площиною проекцій P_2 у точці F , тобто точка F є фронтальним слідом прямої AB . Точка перетину горизонтальної проекції прямої AB із віссю X (точка F_1) є горизонтальною проекцією точки перетину цієї прямої з площиною Π_2 . Точка перетину горизонтальної площини прямої AB із віссю Y (точка P_1) є горизонтальною проекцією профільного сліду цієї прямої. Фронтальна проекція профільного сліду (P_2) і профільна проекція фронтального сліду (F_3) розташовані на осі Z і збігаються: $P_2 \equiv F_3$.

Фронтальною прямою рівня називається пряма, яка паралельна фронтальній координатній площині. На рис. 9 показано комплексне креслення відрізка фронтальної прямої рівня.

Фронтальна проекція A_2B_2 відрізка цієї прямої дорівнює його натуральній величині. Дві інші проекції відрізка AB паралельні координатним осям, що визначають фронтальну площину проекцій: горизонтальна проекція A_1B_1 паралельна осі X , профільна проекція A_3B_3 паралельна осі Z . Кут між фронтальною проекцією A_2B_2 і віссю Z є кутом між відрізком AB і профільною площиною проекції Π_3 .

Пряма AB перетинається із горизонтальною площиною проекції Π_1 у точці G , а із профільною координатною площиною Π_3 – у точці P . Фронтальна G_2 і профільна G_3 проекції горизонтального сліду прямої AB зна-

ходяться на осях X і Y , відповідно. Фронтальним слідом прямої AB є точка P . Профільна проекція точки P збігається із точкою P : $P \equiv P_3$.

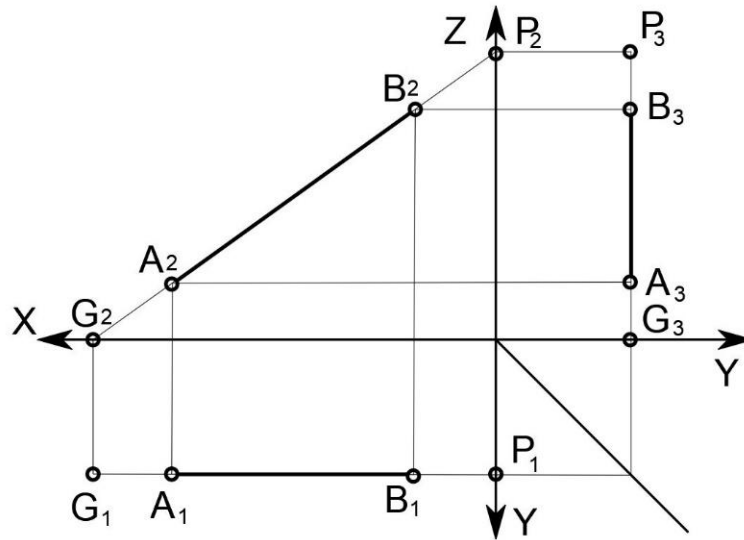


Рис. 9

Фронтальна (P_2) і горизонтальна (P_1) проекції профільного сліду P знаходяться на осях, що визначають профільну координатну площину: проекція P_2 знаходиться на осі Z , а проекція P_1 – на осі Y .

Профільною прямою рівня називається пряма, паралельна профільній координатній площині Π_3 . На рис. 10 показано комплексне креслення відрізка профільної прямої рівня.

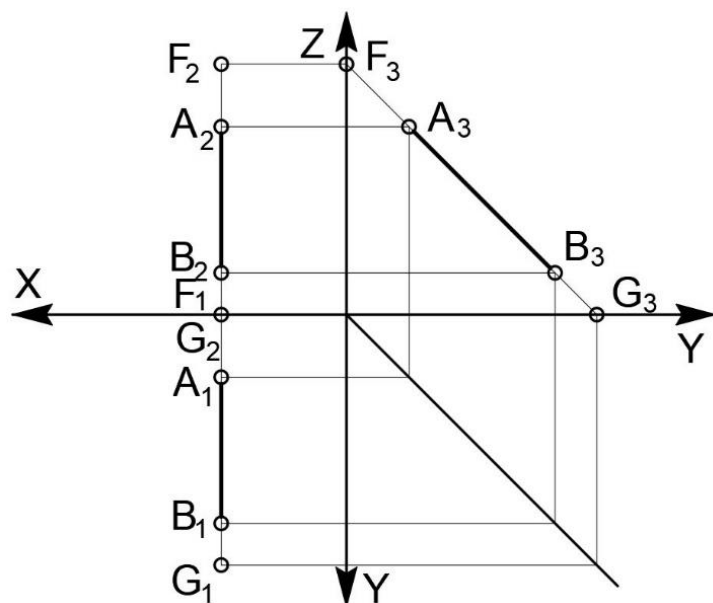


Рис. 10

Профільна проекція A_3B_3 відрізка цієї прямої дорівнює його натуральній величині. Дві інші проекції відрізка AB паралельні координатним осям, що визначають профільну площину проекцій: фронтальна проекція A_2B_2 паралельно осі Z , а горизонтальна проекція A_1B_1 паралельна осі Y . Кут між профільною проекцією A_3B_3 відрізка AB і віссю Y є кутом нахилу цієї прямої до горизонтальної координатної площини Π_1 . Кут між проекцією A_3B_3 і віссю Z є кутом нахилу прямої до фронтальної площини проекції Π_2 .

Пряма AB перетинається із фронтальною площиною проекції у точці F , із горизонтальною площиною проекцій – у точці G . Горизонтальна проекція F_1 фронтального сліду прямої AB і фронтальна проекція G_2 горизонтального сліду цієї прямої знаходяться на осі X і збігаються: $F_1 \equiv G_2$. На рис. 11 показано комплексне креслення відрізка, паралельного профільній площині проекції Π_3 , а на рис. 12 відрізок належить площині Π_3 .

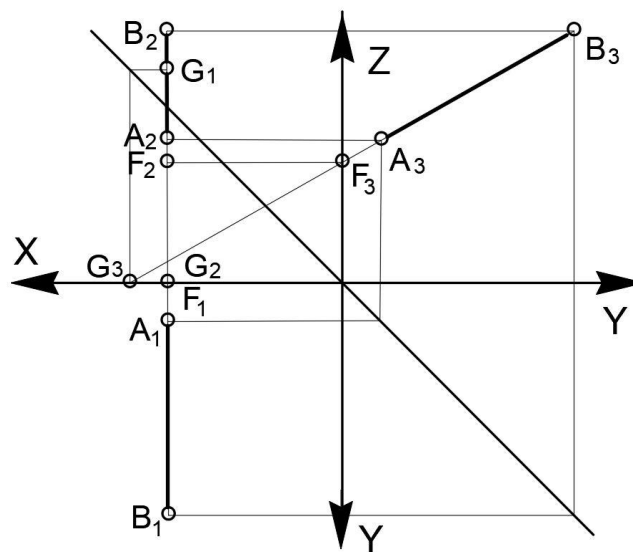


Рис. 11

На рис. 11 профільна проекція горизонтального сліду G_3 прямої AB знаходиться на негативній координатній осі Y , а фронтальна проекція G_2 цього сліду знаходиться на осі X .

На рис. 12 профільна проекція горизонтального сліду G_3 знаходиться на позитивній координатній осі Y , а профільна проекція G_2 цього сліду збігається із початком координат. На рис. 11 відстань між фронтальною і профільною проекціями фронтального сліду прямої AB (між проекціями F_2 і F_3) дорівнює відстані між прямою AB і профільною пло-

щиною проєкцій Π_3 . На рис. 12 фронтальна і профільна проєкції фронтального сліду прямої AB збігаються: $F_2 \equiv F_3$, оскільки відстань між прямою і площиною Π_3 дорівнює нулю (пряма AB знаходиться у площині Π_3).

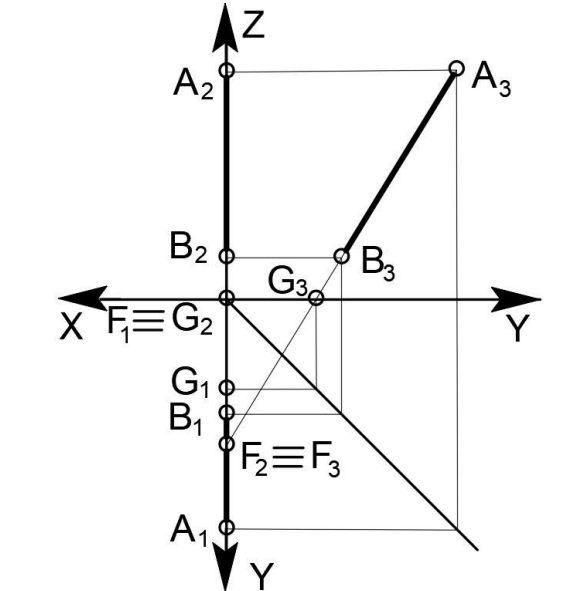


Рис. 12

Прямою загального положення називається пряма, яка не паралельна жодній із координатних площин.

Пряма загального положення, будучи не паралельною жодній із координатних площин, перетинається із ними і, отже, має три сліди: горизонтальний (точка G), фронтальний (точка F) і профільний (точка P).

На рис. 13 показано комплексне креслення відрізка AB прямого загального положення. Фронтальна проєкція горизонтального сліду G_2 прямої AB знаходиться на осі X , точка фронтальної проєкції горизонтального сліду G_3 цієї прямої знаходиться на негативній координатній осі Y , що збігається на комплексному кресленні із віссю X . Горизонтальна проєкція горизонтального сліду G_1 знаходиться на перетині першого закону проєкційного зв'язку (вертикальна лінія проєкційного зв'язку G_2G_1) із третім законом (вертикально-горизонтальною лінією проєкційного зв'язку G_3G_1).

Горизонтальна проєкція фронтального сліду F_1 прямої AB знаходиться на осі X (у точці перетину горизонтальної проєкції цієї прямої із віссю X). Профільна проєкція фронтального сліду F_3 прямої AB знаходиться у точці перетину її профільної проєкції із віссю Z .

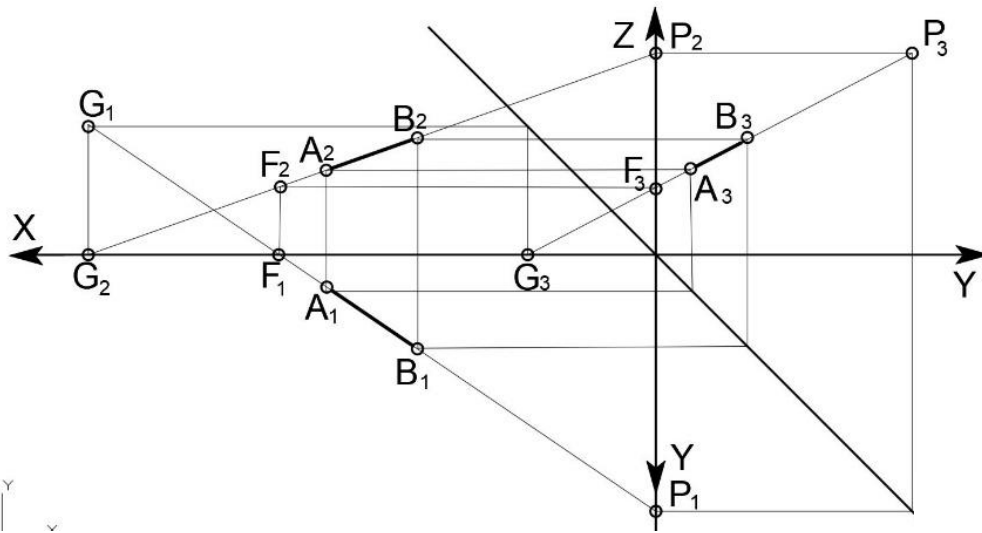


Рис. 13

На рис. 14 показано двопроєкційне комплексне креслення відрізка АВ прямого загального положення. Точка перетину горизонтальної проєкції прямої АВ із віссю Х є горизонтальною проєкцією фронтального сліду F_1 цієї прямої.

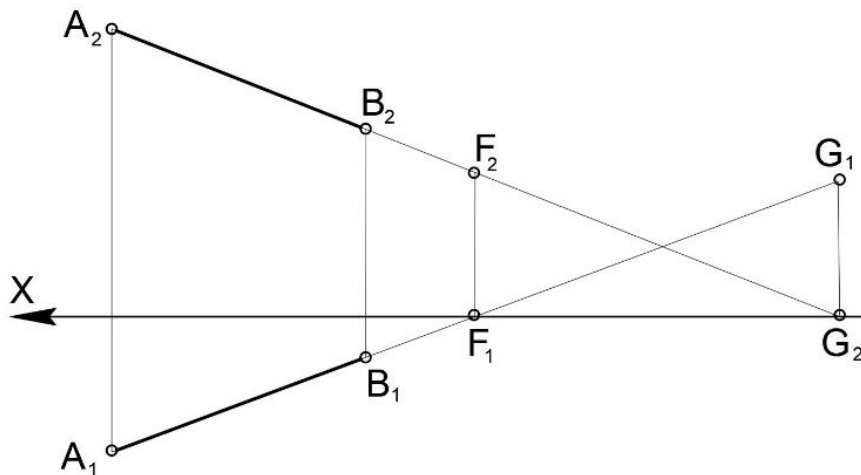


Рис. 14

Фронтальна проєкція фронтального сліду F_2 знаходиться у точці перетину вертикальної лінії проєкційного зв'язку F_1F_2 (першого закону проєкційного зв'язку) із фронтальною проєкцією прямої АВ.

Фронтальна проєкція горизонтального сліду G_2 прямої АВ знаходиться у точці перетину фронтальної проєкції цієї прямої із віссю Х. Горизонтальна проєкція горизонтального сліду G_1 знаходиться у точці перетину першого закону проєкційного зв'язку (вертикальною прямою G_2G_1) із горизонтальною проєкцією прямої АВ.

На рис. 15 показано комплексне креслення відрізка прямої АВ загального положення.

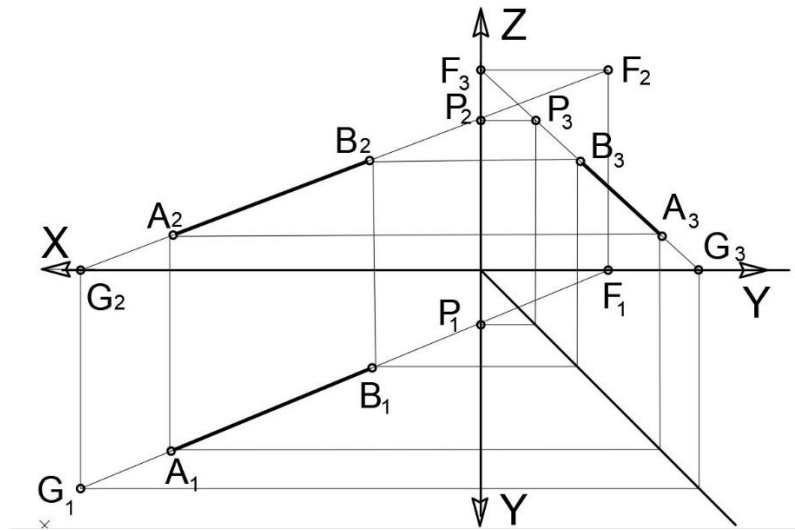


Рис. 15

Горизонтальна проекція фронтального сліду F_1 цієї прямої знаходиться у точці перетину горизонтальної проекції прямої АВ із негативною координатною віссю X , що збігається із позитивною віссю Y . Профільна проекція фронтального сліду F_3 прямої АВ знаходиться у точці перетину профільної проекції прямої із віссю Z_2 .

Фронтальна проекція фронтального сліду F_2 прямої АВ першого закону проекційного зв'язку (вертикальної лінії зв'язку F_1F_2) знаходиться у точці перетину із другим законом (горизонтальною лінією проекційного зв'язку F_3F_2).

Фронтальна проекція горизонтального сліду G_2 прямої АВ знаходиться у точці перетину прямої фронтальної проекції із віссю X .

Профільна проекція горизонтального сліду G_3 знаходиться у точці перетину профільної проекції прямої АВ із координатною віссю Y . Горизонтальна проекція горизонтального сліду G_1 знаходиться у точці перетину першого закону проекційного зв'язку (вертикальної лінії зв'язку G_2G_1) із третім законом проекційного зв'язку (вертикально-горизонтальною лінією G_3).

Фронтальна проекція профільного сліду P_2 прямої АВ знаходиться на перетині фронтальної проекції прямої АВ із координатною віссю Z . Горизонтальна проекція профільного сліду P_1 знаходиться у точці перетину горизонтальної проекції прямої АВ із віссю Y .

Профільна проекція профільного сліду P_3 знаходиться на перетині другого закону проекційного зв'язку (горизонтальної лінії P_2P_3) із третім законом проекційного зв'язку (горизонтально-вертикальної лінії зв'язку P_1P_3).

На рис. 16, рис. 17 і рис. 19 показано комплексні креслення прямої AB , а на рис. 18 – відрізка профільної прямої рівня AB .

Сліди прямої AB на цих комплексних кресленнях визначають так, як і на рис. 13 – рис. 15.

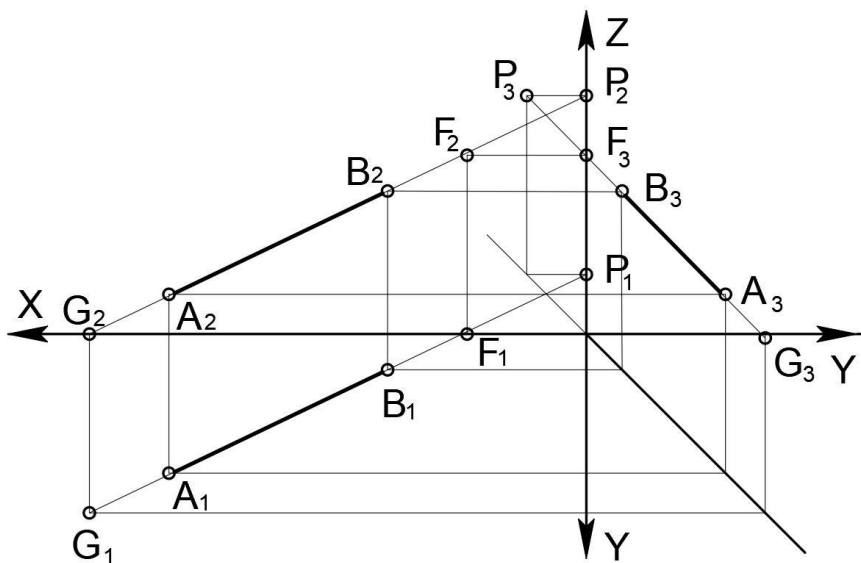


Рис. 16

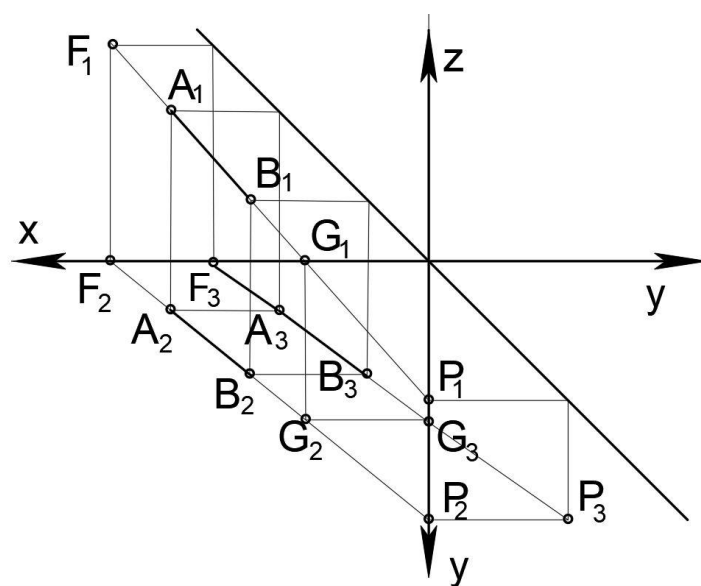


Рис. 17

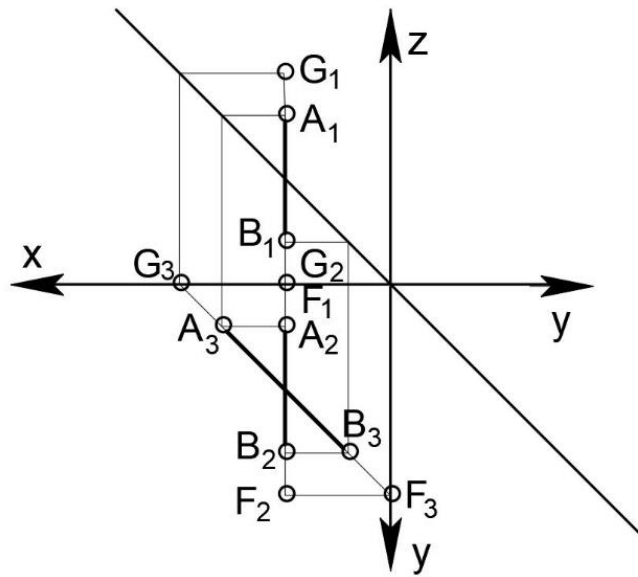


Рис. 18

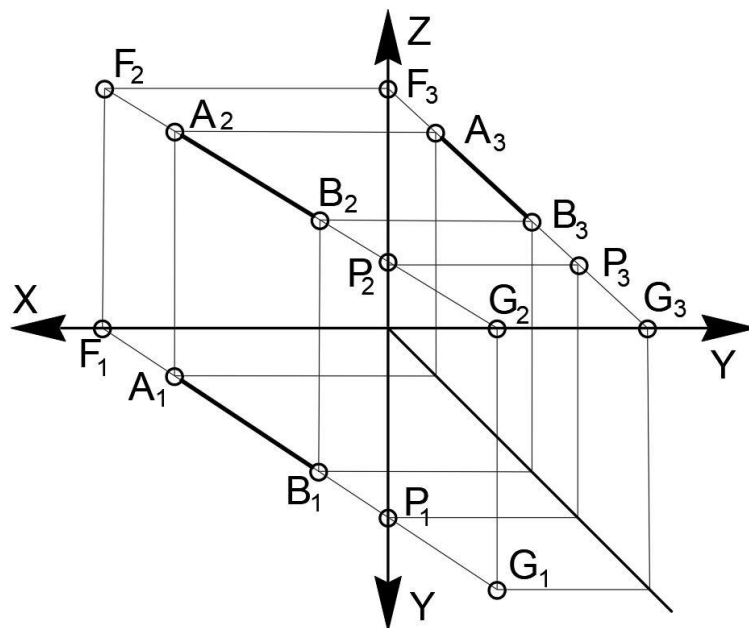


Рис. 19

Фронтальна проекція горизонтального сліду G_2 прямої AB знаходиться у точці перетину фронтальної проекції прямої AB із координатною віссю X . Профільна проекція горизонтального сліду G_3 знаходиться на перетині профільної проекції прямої AB із негативною координатною віссю Y . Горизонтальна проекція фронтального сліду F_1 знаходиться на перетині із координатною віссю X . Профільна проекція

фронтального сліду F_3 знаходиться у точці перетину профільної проекції прямої АВ із негативною координатною віссю Z.

Фронтальна проекція фронтального сліду F_2 прямої АВ знаходиться на перетині першого закону проекційного зв'язку (вертикальною лінією зв'язку $F_1 F_2$) із другим законом (горизонтальною лінією проекційного зв'язку $F_3 F_2$).

Класифікація площин

Усі площини можна розділити на дві групи:

- 1) площини загального положення – площини непаралельні та неперпендикулярні жодній із площин проекцій;
- 2) площини часткового положення – площини паралельні або перпендикулярні до будь-якої площини проекцій.

Площини часткового положення теж можна поділити на дві групи:

- 1) площини рівня – це площини, паралельні будь-якій площині проекції;
- 2) проєціювальні площини – це площини, перпендикулярні до будь-якої площини проекції.

Площини рівня бувають: горизонтальні площини рівня, фронтальні площини рівня та профільні площини рівня.

Проєціювальні площини можуть бути: горизонтально-проєціювальними площинами, фронтально-проєціювальними площинами, профільно-проєціювальними площинами.

Площину на комплексному кресленні можна задати одним із таких способів:

- 1) трьома точками, що не збігаються;
- 2) прямою і точкою, що не належить цій прямій;
- 3) двома паралельними прямими;
- 4) двома прямими, що перетинаються;
- 5) плоскою фігурою;
- 6) слідами.

Слід площини – це лінія перетину цієї площини із будь-якою площиною проекцій. Залежно від того, з якою площиною проекцій перетинається задана площина, її слід може бути горизонтальним, фронтальним і профільним.

На рис. 20 показано горизонтальну площину рівня, паралельну горизонтальній площині проекції Π_1 . Фронтальний (f) і профільний (g)

сліди цієї площини паралельні осям X та Y , що визначають горизонтальну площину проєкцій. На комплексному кресленні фронтальний f_2 і профільний g_3 сліди перпендикулярні до осі Z і є продовженням один одного. Слід площини на комплексному кресленні прийнято позначати лише один раз.

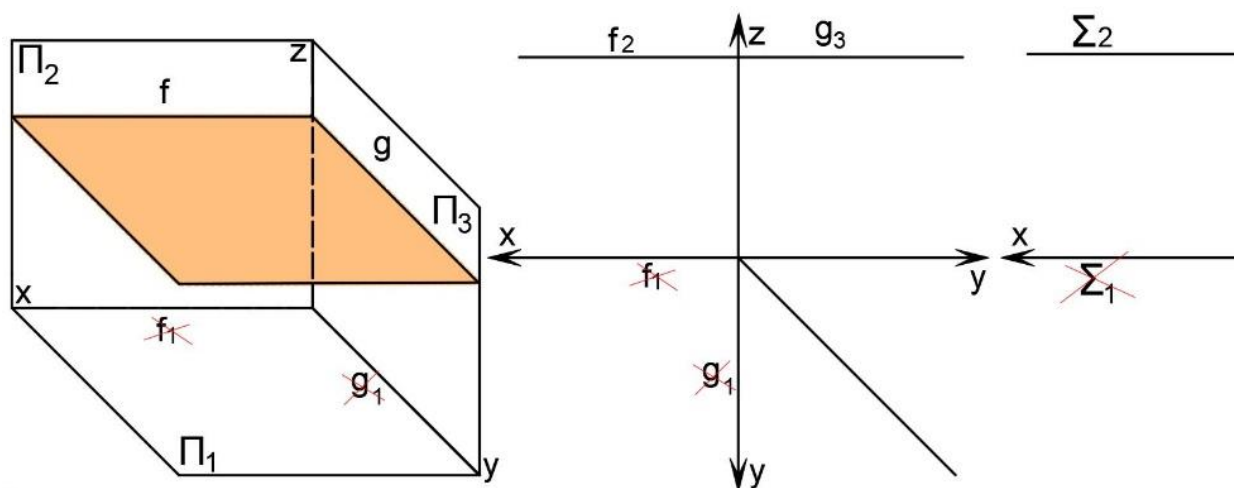


Рис. 20

Фронтальний слід площини – це пряма, що належить фронтальній площині Π_2 . Ця пряма збігається зі своєю фронтальною проєкцією і позначається f_2 . Горизонтальна проєкція цієї прямої співпадатиме із віссю X , тобто $f_1 \equiv X$. На комплексному кресленні проєкції слідів площин, що збігаються із координатними осями, не слід позначати. Якщо площина часткового положення на комплексному кресленні задається одним слідом, то цей слід необхідно позначати великою літерою грецького алфавіту. Проєкція цього сліду, яка збігається із координатною віссю, не позначається.

На рис. 21 показано фронтально-проєціювальну площину. Горизонтальний (h_1) і профільний (g_3) сліди цієї площини перпендикулярні до осей, що визначають фронтальну площину проєкцій. Сліди, перпендикулярні до координатних осей, на комплексному кресленні можна не зображати. Але якщо фронтально-проєціювальну площину задати на комплексному кресленні лише її фронтальним слідом, то цей слід необхідно позначати великою літерою грецького алфавіту.

На рис. 22 зображено площину загального положення, що перетинає всі три площини проєкцій. Площину загального положення мож-

на задати на комплексному кресленні двома слідами: горизонтальним (h_1) і фронтальним (f_2). Проекції слідів, які збігаються із координатними осями, позначати не потрібно.

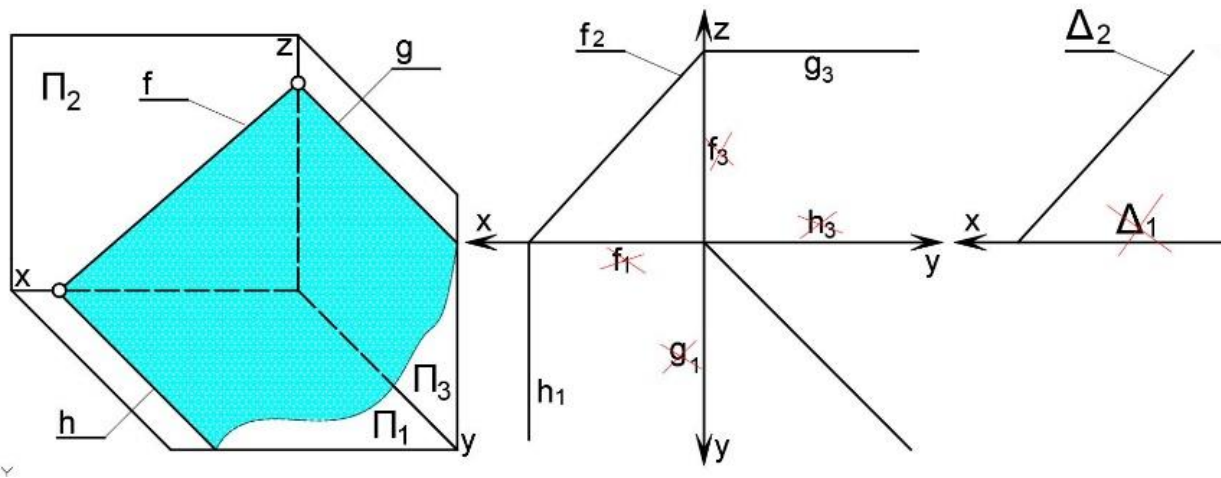


Рис. 21

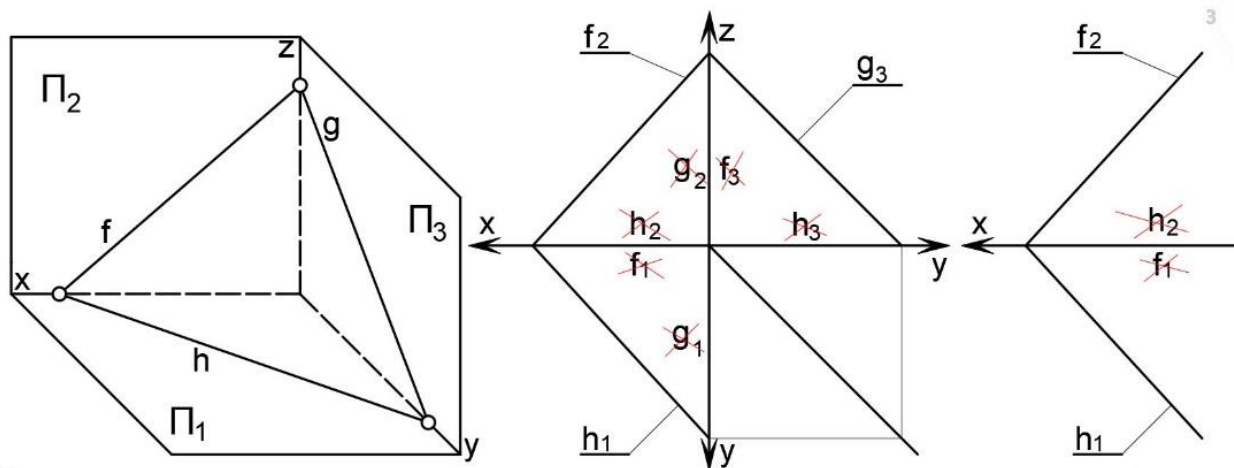


Рис. 22

До прямих, які займають особливе положення у площині, відносять (рис. 23):

1) горизонталь площини (h^*) – це пряма, що знаходиться на ній і паралельна горизонтальній площині проєкцій Π_1 ;

2) фронталь площини (f^*) – це пряма, що знаходиться на ній і паралельна фронтальній площині проєкцій Π_2 ;

3) профільна пряма площини (g^*) – це пряма, що знаходиться на ній і паралельна профільній площині проєкцій Π_3 .

Вказані прями паралельні однойменним слідам площини.

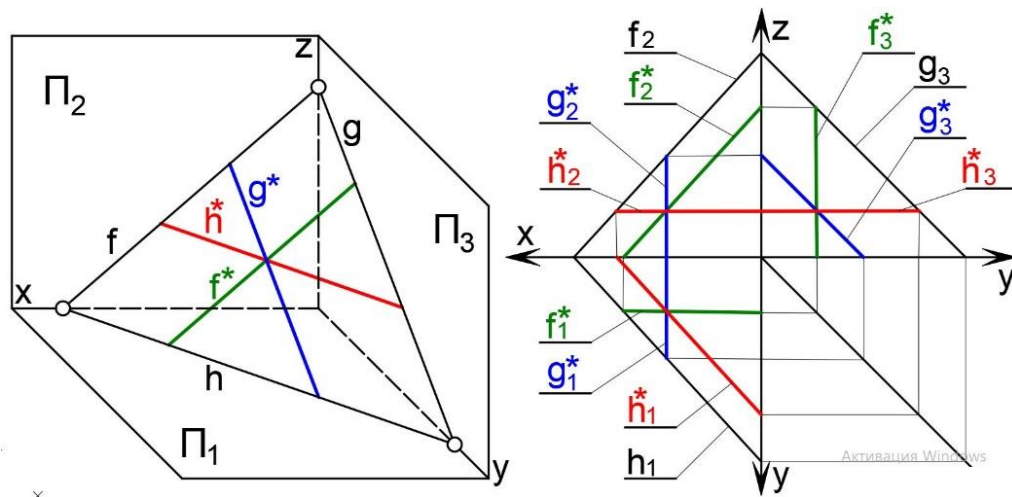


Рис. 23

На рис. 24 показано наочне зображення і комплексне креслення горизонтально-проєціювальної площини, заданої трикутником ABC. Під час прямокутного проєктування трикутника ABC горизонтальну площину проєкцій Π_1 проєціювальні промені паралельні площині трикутника. Тому його горизонтальна проєкція виродилася у прямолінійний відрізок. Фронтальна і профільна проєкції трикутника є спотвореними проєкціями, оскільки площина трикутника не паралельна координатним площинам Π_2 і Π_3 .

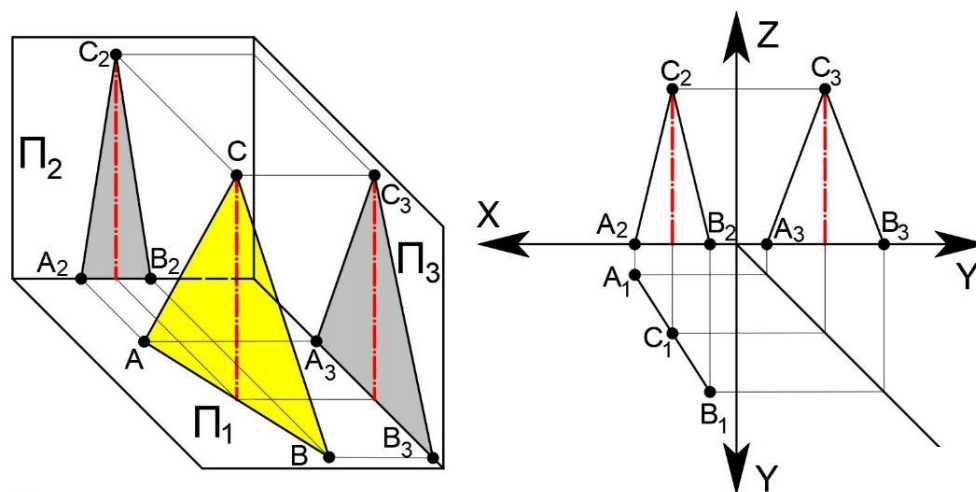


Рис. 24

На рис. 25 показано наочне зображення і комплексне креслення фронтально-проєціювальної площини, заданої трикутником ABC. Фронтальна проєкція трикутника має вигляд прямолінійного відрізка. Кут між

цим відрізком та віссю X є кутом нахилу площини трикутника до горизонтальної площини проєкцій Π_1 . Кут між цим відрізком і координатною віссю Z є кутом нахилу площини трикутника до профільної площини проєкцій Π_3 . Трикутник ABC спроеціювався на координатні площини Π_1 і Π_3 із спотворенням форми та розмірів, оскільки він не паралельний цим площинам. Сторона AB трикутника ABC є відрізком фронтально-проєціювальної прямої, що знаходиться на горизонтальній площині проєкцій Π_1 . Тому фронтальна проєкція цього відрізка виглядає як точка, що знаходиться на координатній осі X .

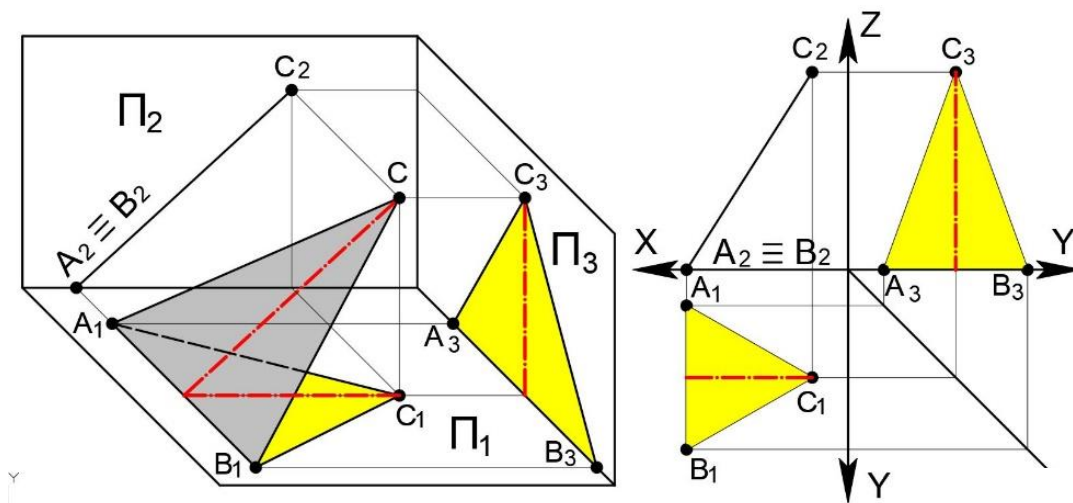


Рис. 25

На рис. 26 показано наочне зображення і комплексне креслення профільної площини рівня, заданої трикутником ABC . Цей трикутник спроеціювався на профільну площину проєкцій у натуральну величину (без спотворення форми і розмірів).

Інші проєкції трикутника ABC виглядають як прямолінійні відрізки, паралельні координатним осям, що визначають профільну площину проєкцій: горизонтальна проєкція трикутника ABC паралельна осі Y , а фронтальна проєкція – паралельна осі Z .

Поверхня – це сукупність послідовних положень лінії, що переміщається у просторі за певним законом. Для наочності зображення поверхні на комплексному кресленні закон переміщення лінії доцільно задавати графічно у вигляді однієї лінії або цілого сімейства ліній. Рухливу лінію прийнято називати *твірною*, нерухомі лінії – *напрямними*. Такий спосіб утворення поверхні прийнято називати *кінематичним*.

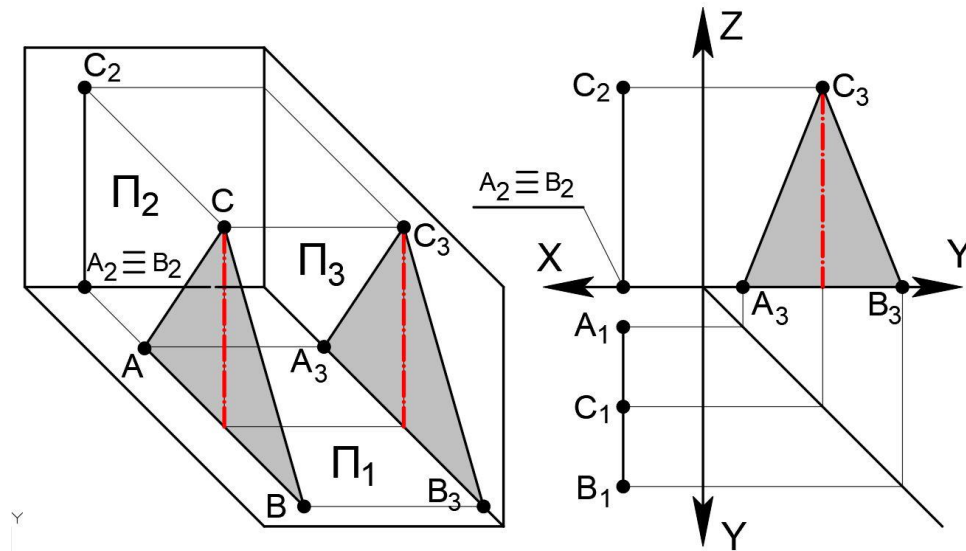


Рис. 26

За виглядом твірної розрізняють поверхні лінійчасті та нелінійчасті. У лінійчастих поверхнях твірна – пряма лінія. У нелінійчастих поверхнях твірна – крива лінія.

Якщо групувати поверхні за законом руху твірної лінії, то більшість поверхонь, що зустрічаються у техніці, можна розділити на чотири групи [5 – 7]:

- 1) поверхні обертання;
- 2) гвинтові поверхні;
- 3) поверхні із площиною паралелізму;
- 4) поверхні паралельного перенесення.

Найпростішою поверхнею є площина. Можна дати таке визначення площини: площина – це поверхня, яка утворюється у результаті переміщення прямолінійної твірної уздовж двох нерухомих напрямних – уздовж двох паралельних прямих. Якщо переміщати прямолінійну твірну уздовж двох прямих, що перетинаються, то теж буде утворюватися площина.

Для **сфери** можна надати таке визначення: сфера – це поверхня, яка утворюється у результаті обертання кола навколо нерухомої осі, що знаходиться у площині кола і проходить через її центр (рис. 27, рис. 28).

Якщо вісь обертання належить площині кола, але не проходить через її центр, то поверхня, що утворюється із застосуванням цих двох геометричних об'єктів, є **тором**.

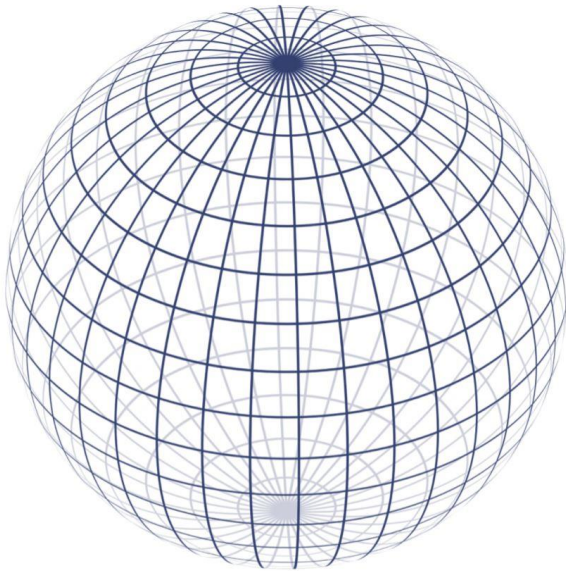


Рис. 27

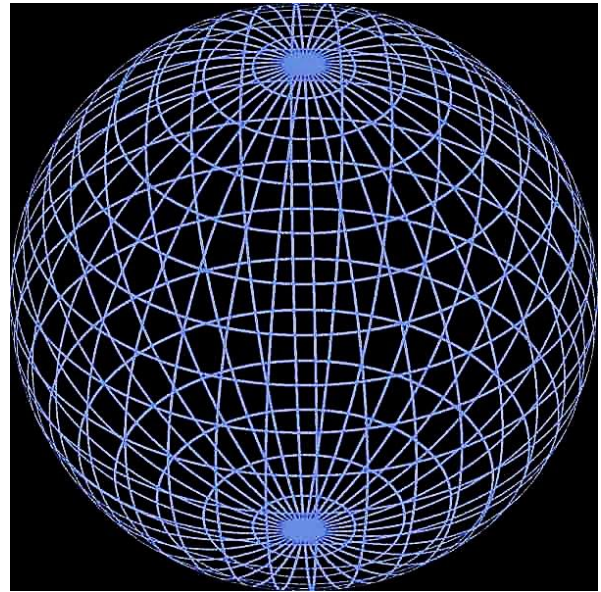


Рис. 28

Тор може бути відкритим (рис. 29) і закритим (рис. 30). У відкритого тора радіус обертання центра твірної кола R більше радіусу цього кола r . Закритий тор утворюється, якщо радіус обертання центра твірної кола R менше радіусу цього кола r . На рис. 31 – рис. 33 показано наочно зображення відкритого тора.

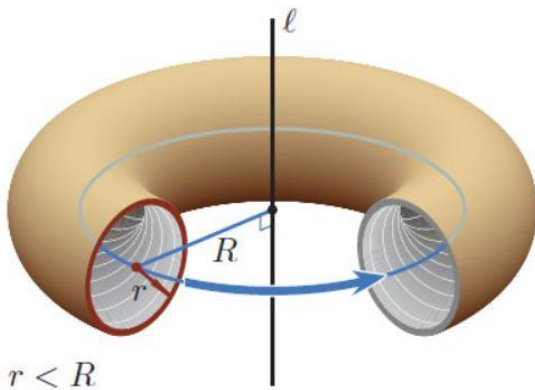


Рис. 29

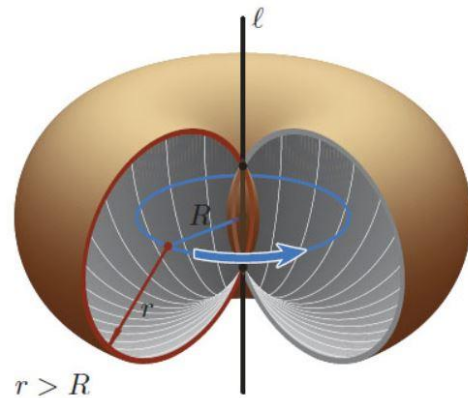


Рис. 30

Під час проектування будь-якої поверхні на координатну площину на цій поверхні утворюється контурна лінія, що складається із незліченної кількості точок торкання проєціювальних променів із цією поверхнею. Проекція цієї контурної лінії на координатну площину називається нарисом поверхні. Залежно від того, на яку координатну площину проєктується поверхню, її нарис може бути горизонтальним, фронтальним і профільним [8, 9].

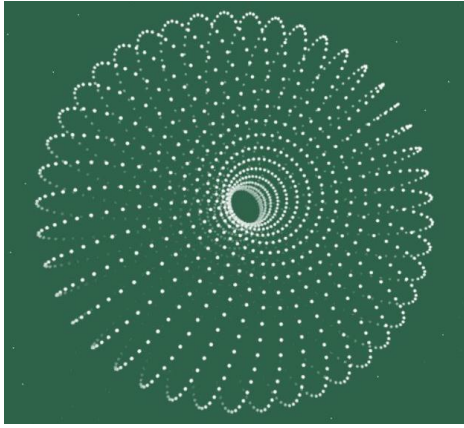


Рис. 31

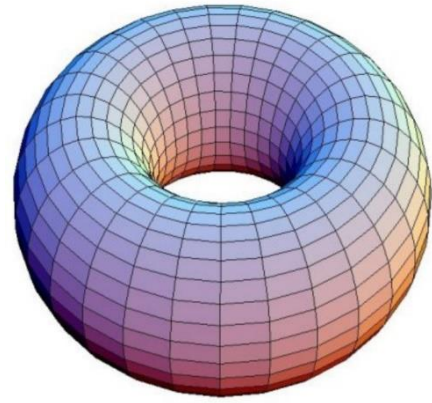


Рис. 32

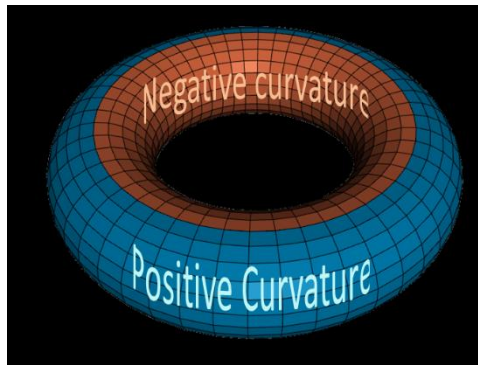


Рис. 33

На рис. 34 показано наочно зображення чотиригранної піраміди, що ортогонально проектується на три взаємно перпендикулярні площини проекцій: горизонтальну Π_1 , фронтальну Π_2 і профільну Π_3 . Основою піраміди є прямокутник, паралельний координатній площині Π_1 . Дві сторони цього прямокутника паралельні осі X , а дві інші сторони – паралельні осі Y .

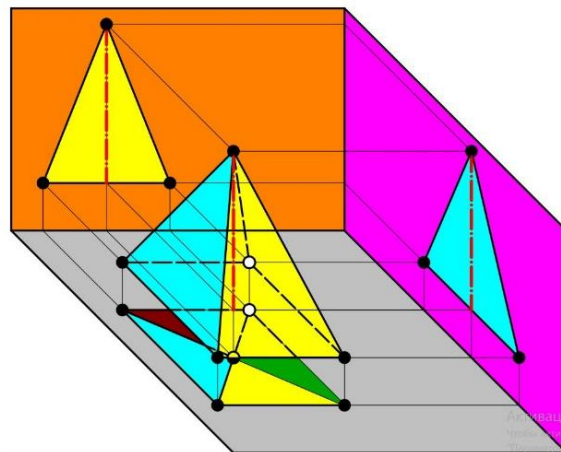


Рис. 34

На рис. 35 показано комплексне (ортогональне) креслення схожої піраміди. Горизонтальним нарисом піраміди є квадрат $A_1B_1C_1D_1$.

Фронтальним нарисом піраміди є рівнобедрений трикутник $B_2S_2C_2 \equiv A_2S_2D_2$, профільним нарисом піраміди є рівнобедрений трикутник $B_3S_3A_3 \equiv C_3S_3D_3$.

Прямі чотиригранні піраміди, зображені на рис. 34, рис. 35, є окремими випадками пірамідальної поверхні.

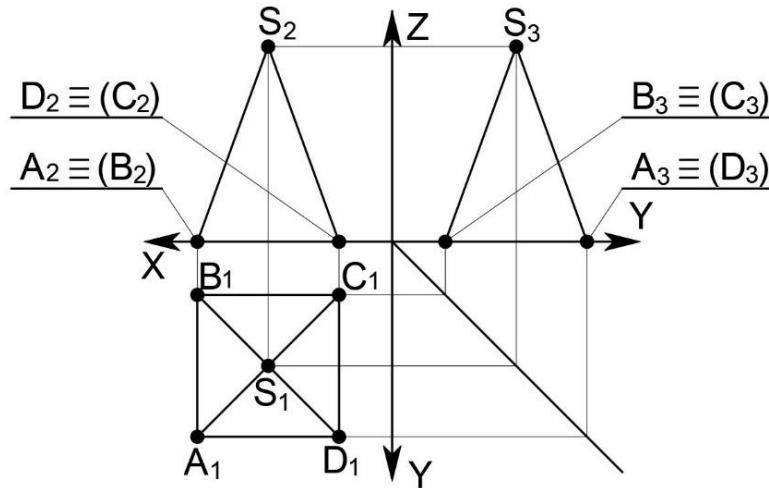


Рис. 35

Пірамідальна поверхня – це поверхня, яка утворюється у результаті переміщення прямолінійної твірної уздовж ламаної напрямної, у кожний момент руху проходячи через деяку фіксовану точку (вершину). Можна дати інше визначення пірамідальній поверхні. *Пірамідальна поверхня* – це поверхня, що утворюється під час безперервного руху прямолінійної твірної уздовж ламаної напрямної. При цьому одна точка на прямолінійній твірній нерухома.

Конічна поверхня – це поверхня, яка утворюється у результаті переміщення прямолінійної твірної уздовж криволінійної напрямної. При цьому одна точка на прямолінійній твірній повинна бути нерухома. Ця нерухома точка називається вершиною конічної поверхні.

На рис. 36 показано комплексне креслення конічної поверхні. Конічну поверхню показано в урізаному вигляді, тобто вона має основу у вигляді плоскої замкнутої кривої лінії. Ця лінія є направляючою конічної поверхні. Площина основи перпендикулярна горизонтальній площині проєкцій. Горизонтальним нарисом конуса, зображеного на рис. 36, є трикутник $N_1S_1G_1$. Фронтальний нарис цього конуса включає дві прямо-

лінійні ділянки – проєкції відрізків M_2S_2 і S_2F_2 та криволінійну ділянку M_2F_2 , що включає фронтальні проєкції точок G_2 і R_2 .

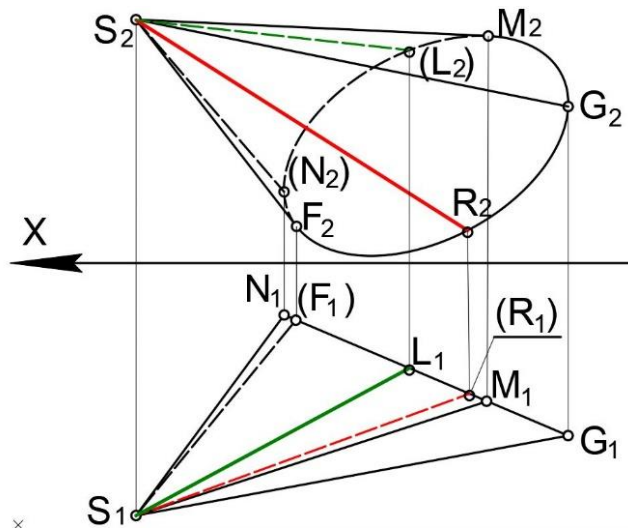


Рис. 36

Циліндрична поверхня – це поверхня, яка утворюється у результаті переміщення прямолінійної твірної уздовж криволінійної напрямної. При цьому прямолінійна утворююча під час переміщення зберігає паралельність деякому наперед заданому напрямку.

На рис. 37 показано комплексне креслення циліндра, обмеженого двома основами – еліпсами. Одна із основ належить фронтальній площині проєкцій Π_2 , а площина іншої основи паралельна цій площині проєкцій. напрямні цього циліндра паралельні заздалегідь заданому напрямку S .

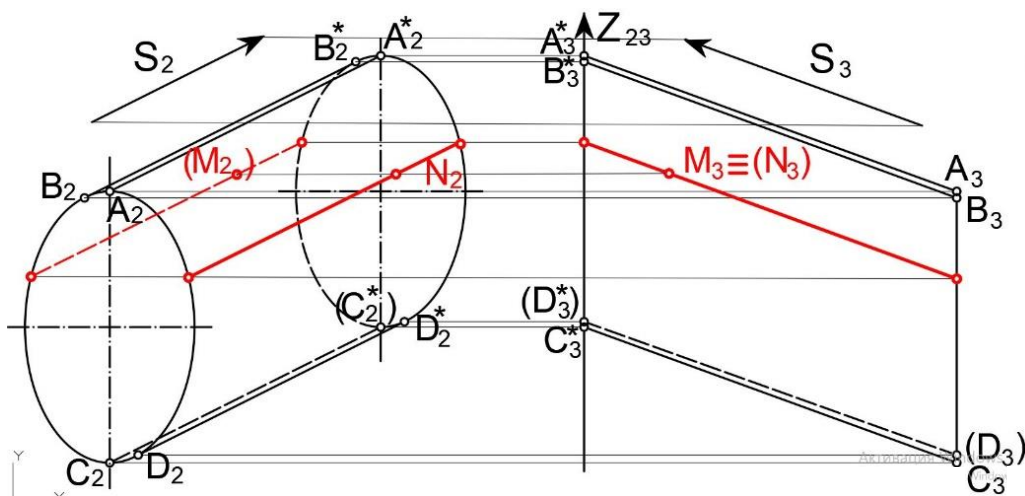


Рис. 37

Профільний нарис цього циліндра має вигляд паралелограма $A_3^*A_3C_3C_3^*$, а фронтальний нарис складається із двох прямолінійних ($B_2B_2^*$ і $D_2D_2^*$) і двох криволінійних ділянок (D_2B_2 і $D_2^*B_2^*$). Криволінійна ділянка D_2B_2 включає проєкцію точки C_2 але не включає A_2 . Криволінійна ділянка $D_2^*B_2^*$ включає проєкцію точки A_2^* , але не включає C_2^* .

Конкурентні точки – це будь-які дві точки, що знаходяться на тому самому проєціювальному промені. Як показано на рис. 37, точки M і N є конкурентними точками, оскільки їх фронтальні проєкції M_2 і N_2 знаходяться на одній і тій же лінії проєкційного зв'язку, перпендикулярній осі Z , а профільні проєкції збігаються $M_3 \equiv N_3$. Точка M знаходиться на більшій відстані від координатної площини Π_3 порівняно із точкою N , тому профільна проєкція точки M є видимою. Позначення невидимих проєкцій точок слід розміщати у круглих дужках.

Односмуговий гіперболоїд обертання – це поверхня, яка утворюється у результаті обертання прямолінійної твірної навколо нерухомої осі. При цьому прямолінійна твірна і вісь обертання повинні бути перехресними прямими.

На рис. 38 показано фронтальні і профільні проєкції нерухомої осі J і прямолінійної твірної, що схрещується із цією віссю і обертається навколо неї.

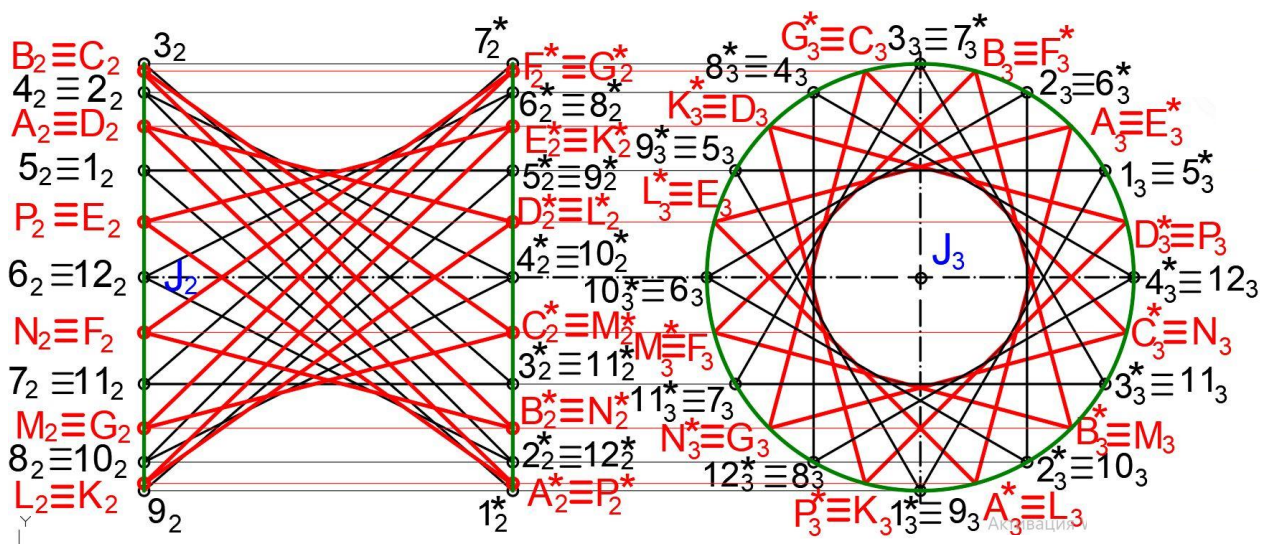


Рис. 38

На рис. 38 показано 24 положення прямолінійної твірної, які вона займає у процесі обертання навколо осі J . Вісь обертання є профільно-проєціювальною прямою. Фронтальний нарис односмугового гіпербо-

лоїда обертання включає дві прямолінійних ділянки ($9_2 3_2$ і $7_2^* 1_2^*$) і дві криволінійні ділянки (параболічні ділянки $3_2 7_2^*$ і $9_2 1_2^*$). Профільний нарис односмугового гіперболоїда обертання складається із двох концентричних кіл, що мають різні діаметри. Коло більшого діаметру є профільною проекцією основи односмугового гіперболоїда обертання, а коло меншого діаметру є проекцією так званого горла поверхні на площину Π_3 . Профільні проекції всіх прямолінійних твірних торкаються профільної проекції горла односмугового гіперболоїду обертання.

Односмуговий гіперболоїд обертання можна отримати обертанням гіперболи навколо її уявної осі. Односмуговий гіперболоїд обертання можна називати лінійчастою і нелінійчастою поверхнею, оскільки для її формування можна використати твірні лінії у вигляді прямої і гіперболи.

Циліндроїд – це поверхня, яка утворюється під час переміщення прямолінійної твірної уздовж двох криволінійних напрямних, які не знаходяться в одній площині. При цьому прямолінійна твірна під час переміщення зберігає паралельність деякої заздалегідь заданої площини (площини паралелізму).

На рис. 39 показано комплексне креслення циліндроїда, заданого двома криволінійними напрямними, які не знаходяться на одній прямій, і прямолінійною твірною, що рухається по них, як це показано на тринадцяти положеннях. Із рис. 39 видно, що прямолінійна твірна у всіх положеннях зберігає паралельність профільній площині проекцією Π_3 , тобто профільна координатна площина є площиною паралелізму для цього циліндроїда.

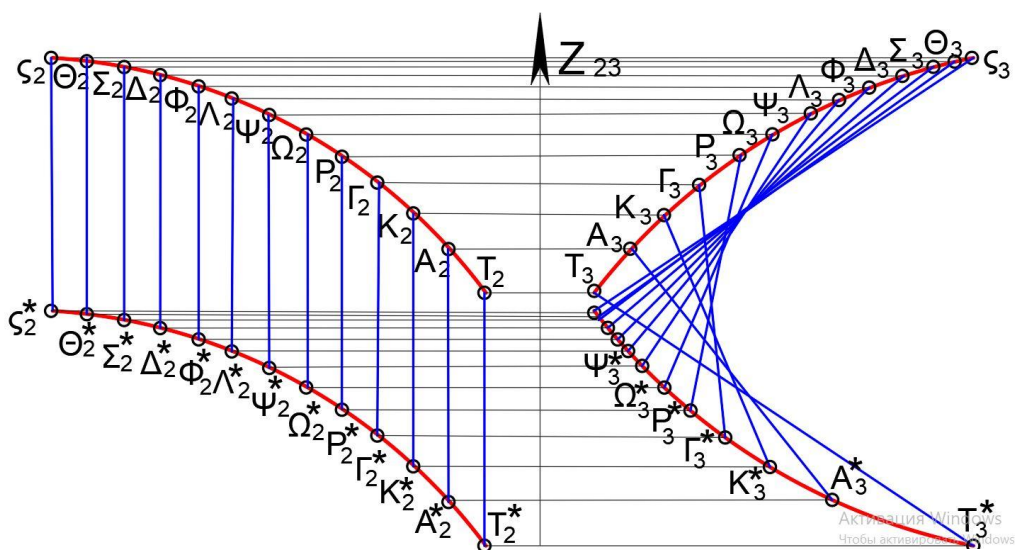


Рис. 39

Коноїд – це поверхня, яка утворюється під час переміщення прямолінійної твірної по двох нерухомих напрямних, одна із яких – пряма лінія, а друга – крива. Напрямні не належать одній площині, а прямолінійна твірна у процесі руху зберігає паралельність деякій заздалегідь заданій площині – площині паралелізму.

На рис. 40 показано комплексне креслення коноїда, заданого прямолінійною і криволінійною напрямними, які не знаходяться на одній площині, і прямолінійною твірною, що рухається по них, та зберігає у процесі переміщення паралельність профільній площині проєкцій Π_3 . На рис. 40 показано 13 положень прямолінійної твірної, у кожному з яких вона зберігає паралельність профільній координатній площині.

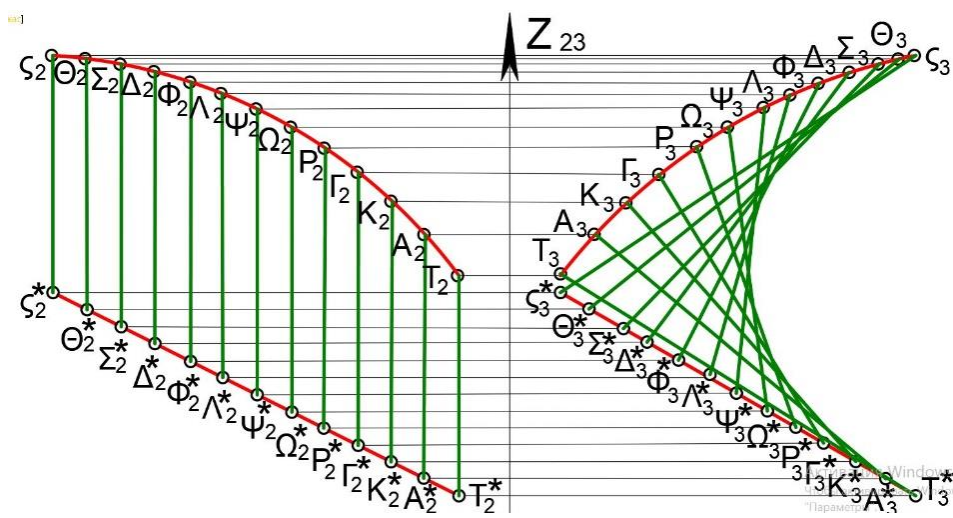


Рис. 40

Прямий гелікоїд – це поверхня, яка утворюється під час переміщення прямолінійної твірної по двох напрямних, одна з яких гвинтова лінія, а друга – вісь цієї гвинтової лінії. При цьому в процесі переміщення прямолінійна твірна зберігає паралельність площині, що перпендикулярна осі гвинтової лінії.

На рис. 41 показано комплексне креслення прямого гелікоїда, заданого фрагментом гвинтової лінії, її віссю J і прямолінійною твірною, що рухається по цих двох лініях.

Прямолінійна твірна, яка переміщуючись по гвинтовій лінії та прямолінійній осі J , зберігає паралельність площині, яка перпендикулярна до цієї осі. Вісь гвинтової лінії є фронтально-проєціювальною прямою, тому фронтальна площина проєкцій Π_2 є площиною паралелізму.

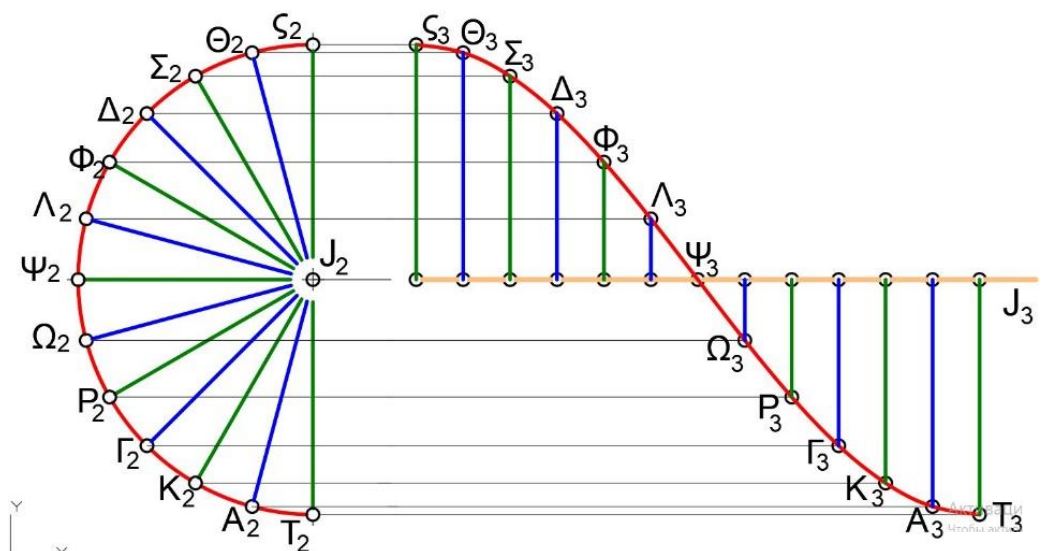


Рис. 41

Похилий гелікоїд – це поверхня, яка утворюється під час переміщення прямолінійної твірної по гвинтовій лінії та її осі. У процесі руху прямолінійна твірна зберігає паралельність твірним прямого кругового конуса, що має загальну вісь із гвинтовою лінією. Цей конус називається *напрямним конусом* і за його допомогою на комплексному кресленні можна визначити кут нахилу проекції будь-якої твірної похилого гелікоїда.

На рис. 42 показано комплексне креслення похилого гелікоїда, заданого напрямною, що є половиною витка гвинтової лінії, яка розташована на поверхні уявного співвісного прямого кругового циліндра, другою напрямною, що є віссю J цієї гвинтової лінії, і напрямним конусом із вершиною S , яка має загальну вісь із гвинтовою лінією і уявним циліндром.

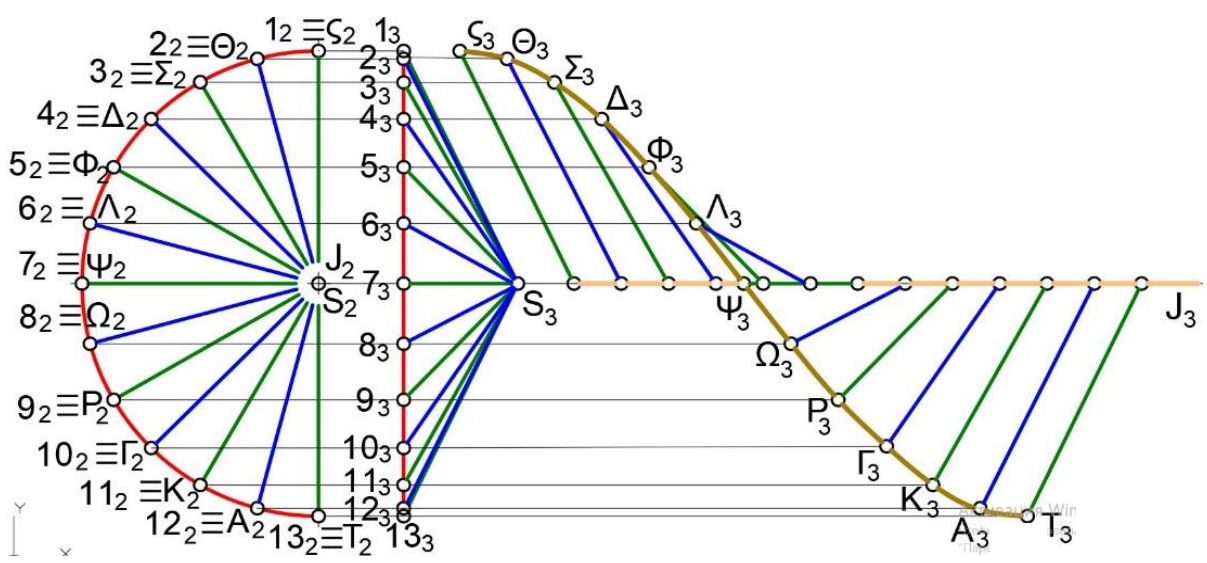


Рис. 42

Прямолинійну твірну, що переміщається по гвинтовій лінії та її осі і зберігає паралельність твірним напрямного конуса, показано у 13 положеннях. Загальна вісь гвинтової лінії, уявного циліндра, якому вона належить, і напрямного конуса є фронтально-проеціювальною прямою.

Коса площина (гіперболічний параболоїд) – це поверхня, яка утворюється під час переміщення прямолинійної твірної по двох перехресних прямих і залишається у всіх своїх положеннях паралельною деякій площині паралелізму.

На рис. 43 показано комплексне креслення косої площини, у якій площиною паралелізму є профільна площина проєкцій Π_3 .

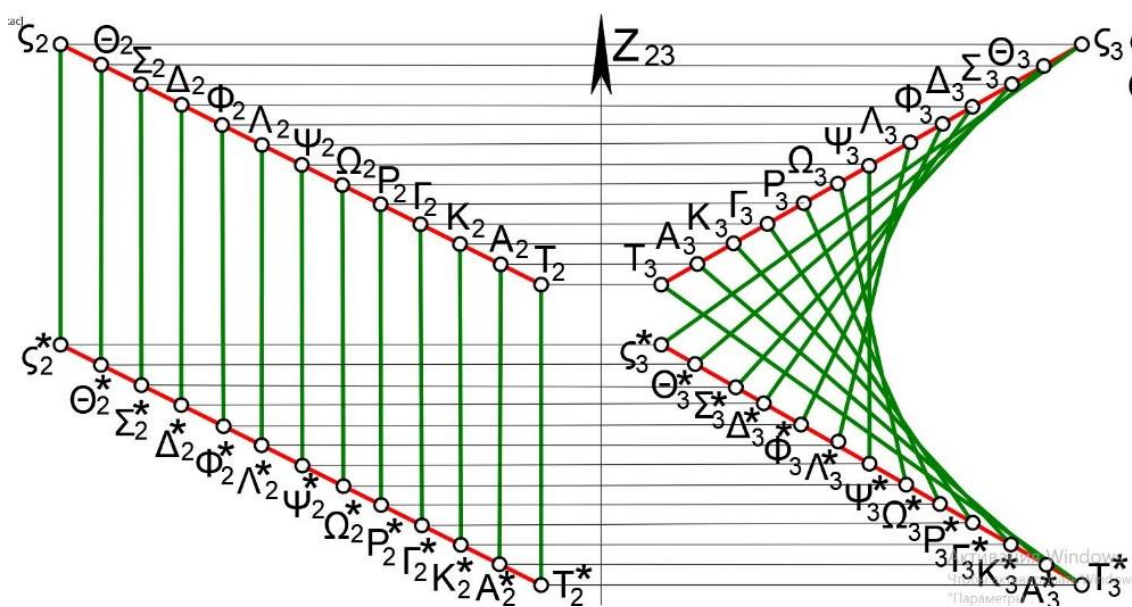


Рис. 43

Прямолинійну твірну, що рухається по двох перехресних прямих, показано у тринадцяти положеннях. Фронтальні проєкції прямолинійної твірної у всіх її положеннях паралельні осі Z . Це указує на те, що площиною паралелізму є профільна координатна площина Π_3 .

Контрольні питання

1. Що таке комплексне креслення та його склад?
2. Назвіть основні властивості трипроєкційного комплексного креслення.
3. Що таке координатні осі? Чим відрізняється їх розташування в об'ємній моделі та на площині?

4. Чим об'ємна модель відрізняється від плоскої?
5. Три закони проєкційного зв'язку на комплексному (ортогональному) кресленні точки – як формулюються?
6. Чим відрізняються комплексні креслення прямої та кривої ліній?
7. Що таке фронтально-проєційувальна пряма?
8. Що таке пряма загального положення?
9. Що таке пряма рівня?
10. Що таке проєційувальна пряма?
11. Скільки існує прямих часткового положення?
12. Що таке нарис поверхні? У яких випадках нарис може бути горизонтальним, фронтальним і профільним?
13. Як класифікують площини у нарисній геометрії?
14. Що таке площина загального положення?
15. Що таке площини часткового положення?
16. Наведіть визначення площин рівня.
17. Що таке слід площини?
18. Які точки називаються конкуруючими?
19. У чому полягає різниця між направляючою та твірною лініями?
20. Які ви знаєте поверхні з площинами паралелізму?
21. Що таке площина паралелізму?
22. Що таке поверхня?
23. Що називається контуром поверхні?
24. За якими ознаками класифікують поверхні?
25. Сутність кінематичного способу утворення поверхні.
26. Яку лінію називають твірною?
27. Як утворюється тор? Чим відрізняється відкритий тор від закритого тору?
28. Як утворюється сфера?
29. Чим відрізняється пірамідальна поверхня від конічної?
30. Як утворюється конічна поверхня?
31. Як відбувається утворення циліндричної поверхні?
32. Чим відрізняється односмуговий гіперболоїд обертання від циліндроїда?
33. Що таке коноїд, прямий та похилий гелікоїди? Назвіть їх відмінності?
34. Що таке коса площина?

3. Позиційні завдання

Позиційне завдання – це завдання, пов'язані із вирішенням питань взаємного положення геометричних об'єктів щодо один одного. Ці завдання прийнято розділяти на дві групи:

- 1) завдання на взаємну належність геометричних об'єктів;
- 2) завдання на взаємний перетин геометричних об'єктів.

3.1. Перетин прямої із площиною

Для знаходження точки перетину прямої із площиною необхідно скористатися таким алгоритмом:

1) через задану пряму проводиться допоміжна січна площина. Для спрощення графічних побудов як допоміжну січну площину зручно використовувати проєціювальну площину;

2) будується лінія перетину допоміжної січної площини із заданою;

3) визначається точка перетину лінії, побудованої за п. 2 алгоритму, із заданою прямою. Ця точка є точкою перетину заданої прямої із заданою площиною.

На рис. 44 і рис. 45 наведено пряму загального положення l , задану на комплексному кресленні відрізком 12, та площину загального положення, задану трикутником ABC . Знаходження точки перетину прямої із площиною здійснювалося за наведеним раніше алгоритмом.

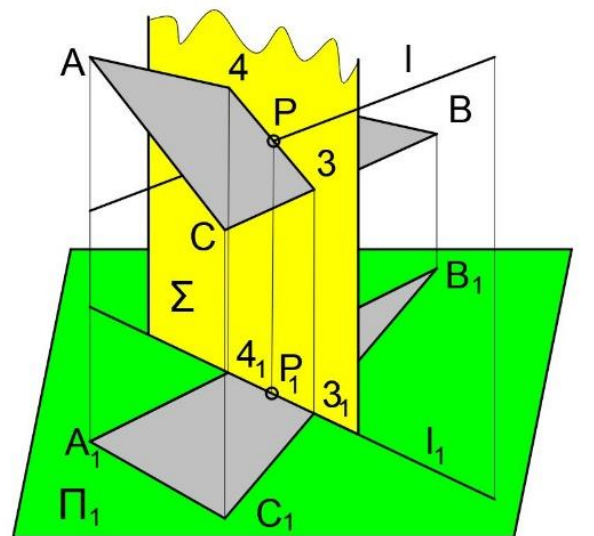


Рис. 44

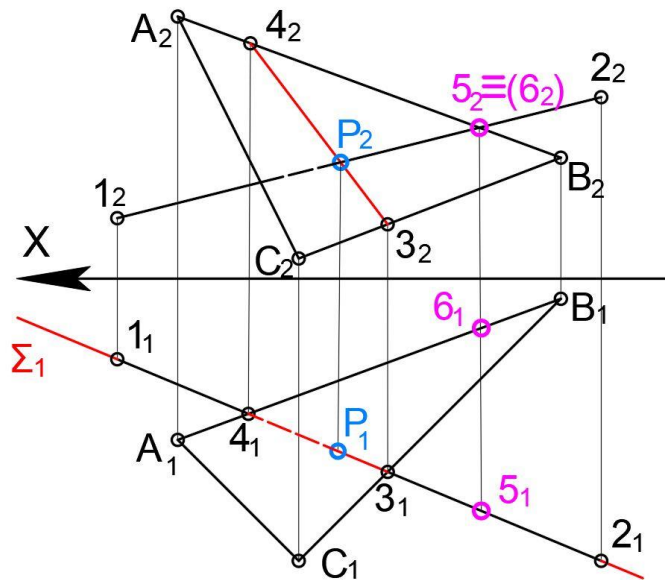


Рис. 45

Через пряму l (відрізок 12) проведено горизонтально-проеціювальну допоміжну січну площину Σ . Побудовано лінію перетину 43 допоміжної січної площини із площиною, заданою трикутником ABC .

Визначено точку перетину прямої 43 із прямою l (із відрізком 12). Точка P є точкою контакту прямої l із площиною трикутника ABC .

Якщо припустити, що задана площина непрозора, тоді необхідно на кожній проекції визначити видимі частину прямої та невидиму частину, закриту площиною. Для цього використовують конкурентні точки, одна з яких розташована на прямій, а друга – на заданій площині. Так, на рис. 45 для визначення видимості відрізка 12 на фронтальній проекції використовують конкурентні точки 5 і 6 . Точка 5 розташована на відрізку 12 , а точка 6 – на стороні AB трикутника. Будуємо горизонтальні проекції цих точок і за ними визначаємо, що видимою точкою на фронтальній проекції буде точка 5 . Отже, на фронтальній проекції частина заданого відрізка від точки 2_2 до точки P_2 є видимою, а далі від точки P_2 – закрита трикутником. Аналогічно визначається видимість горизонтальної проекції відрізка 12 .

3.2. Перетин прямої із поверхнею

Для знаходження точок перетину прямої із поверхнею необхідно використати такий алгоритм:

- 1) через задану пряму проводиться допоміжна січна площина;

2) будується лінія перетину допоміжної січної площини із заданою поверхнею;

3) визначаються точки перетину лінії, побудованої у п. 2 алгоритму, із заданою прямою.

Застосуємо цей алгоритм для вирішення позиційної задачі знаходження точок перетину прямої KL із похилою тригранною призмою (рис. 46, рис. 47).

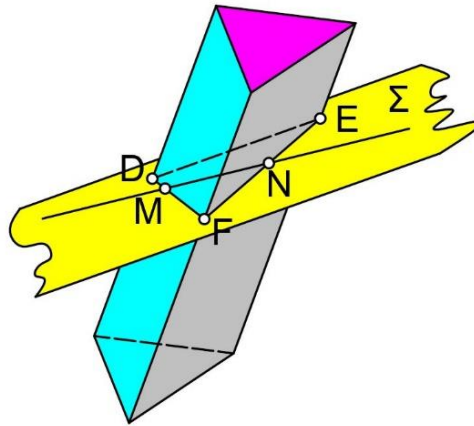


Рис. 46

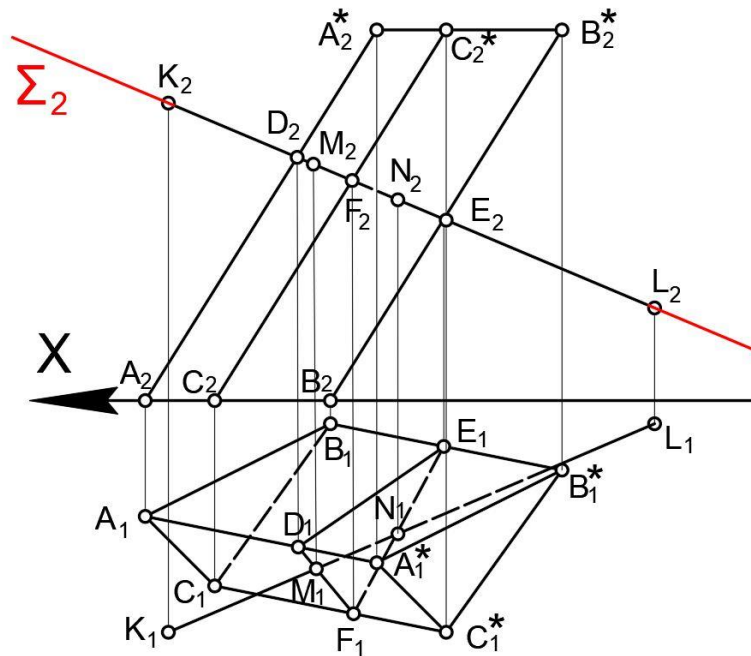


Рис. 47

Через пряму, задану відрізком KL , проводимо фронтально-проєціювальну допоміжну січну площину Σ .

Допоміжна січна площина Σ перетинає тригранну похилу призму трикутником DEF, вершини якого знаходяться на ребрах призми.

Знаходяться точки перетину горизонтальних проєкцій трикутника DEF та відрізка KL. За першим законом проєкційних зв'язків визначаються фронтальні проєкції цих точок. Проєкції M_2 і N_2 належать фронтальній проєкції прямої KL та є фронтальними проєкціями точок перетину заданої прямої із похилою тригранною призмою.

На рис. 48 показано знаходження точок перетину прямолінійного відрізка 12 із прямим круговим конусом, основа якого знаходиться у площині Ω . Знаходження цих точок здійснюється за алгоритмом, викладеним раніше.

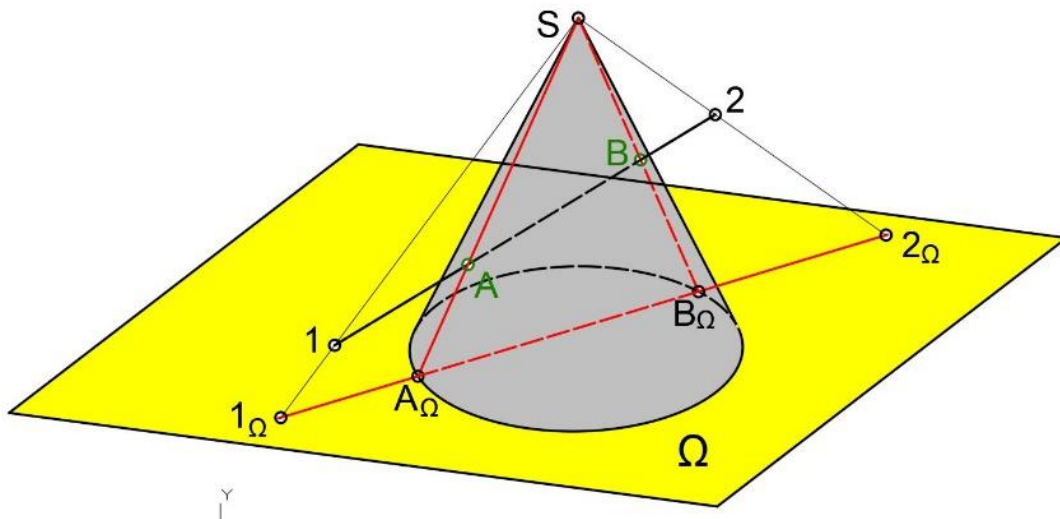


Рис. 48

1. Відрізок 12 розміщуємо на допоміжній січній площині. Площину задаємо двома променями, що виходять із вершини конуса S і проходять через кінці відрізка 12.

2. Будуємо лінію перетину допоміжної січної площини із конусом за алгоритмом:

2.1. Визначаємо точки перетину променів, що задають допоміжну січну площину із площиною Ω , в якій знаходиться основа конуса. Це точки 1_Ω і 2_Ω .

2.2. Через точки 1_Ω і 2_Ω проводимо пряму, яка є лінією перетину допоміжної січної із площиною основи Ω .

2.3. Знаходимо точки перетину прямої $1_\Omega 2_\Omega$ із основою конуса – точки A_Ω і B_Ω .

2.4. З'єднуємо ці точки прямою із вершиною конуса S . Трикутник $A_\Omega SB_\Omega$ є лінією перетину допоміжної січної площини, заданої двома променями, що виходять із вершини S , із конусом.

3. Знаходимо точки перетину прямої 12 із трикутником $A_\Omega SB_\Omega$. Точки A і B є шукані точки.

На рис. 49 показано знаходження точок перетину прямолінійних відрізків AB і CD прямим круговим конусом. Розв'язання задачі здійснюється у такій послідовності:

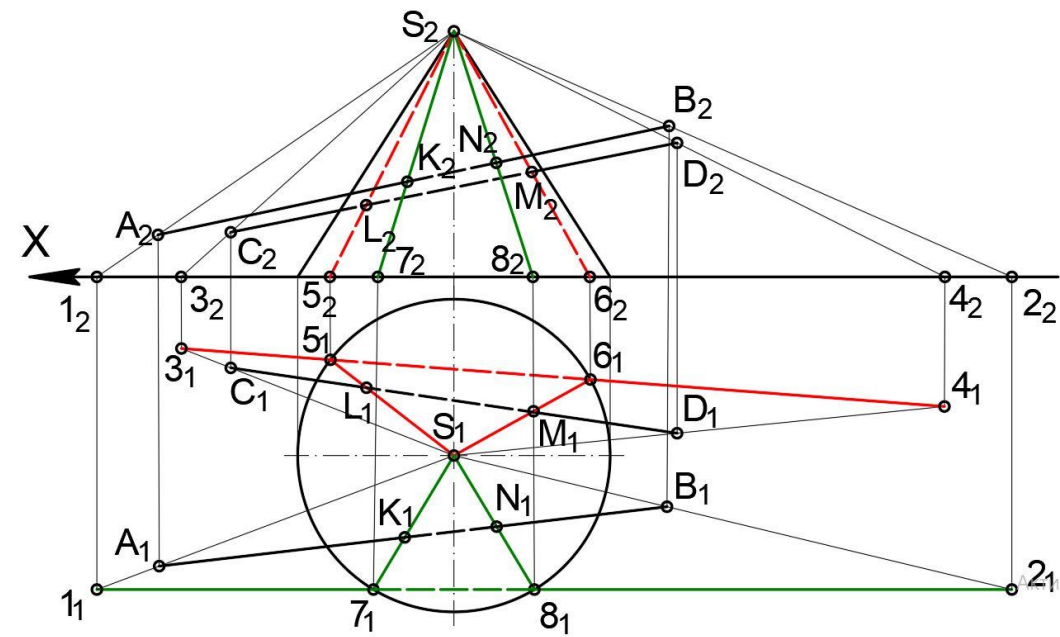


Рис. 49

1. Відрізки AB і CD розміщуємо у допоміжні січні площини. Кожну площину задаємо двома променями, що виходять із вершини конуса S і проходять через кінці цих відрізків.

2. Будуємо лінії перетину допоміжних січних площин із конусом за наступним алгоритмом:

2.1. Визначаємо точки перетину променів, що задають допоміжні січні площини, із горизонтальною площиною проєкцій Π_1 , в якій знаходиться основа конуса. Це точки $1, 2, 3$ і 4 . Фронтальні проєкції $1_2, 2_2, 3_2$ і 4_2 цих точок перебувають у точках перетину фронтальних проєкцій променів SA, SB, SC і SD із віссю X . Горизонтальні проєкції $1_1, 2_1, 3_1, 4_1$ цих точок перебувають у точках перетину горизонтальних проєкцій променів SA, SB, SC і SD із вертикальними лініями проєкційного зв'язку $1_21_1, 2_22_1, 3_23_1, 4_24_1$.

2.2. Через точки 1, 2, 3, 4 проводимо прямі, які є лініями перетину допоміжних січних площин, із горизонтальною площиною проєкцій Π_1 . Оскільки ці прямі знаходяться у горизонтальній координатній площині, їх фронтальні проєкції збігаються із віссю X. Прямі 12 і 34 є горизонтальними слідами допоміжних площин.

2.3. Знаходимо точки перетину прямих 12 і 34 із основою конуса – точки 2, 6, 7, 8.

2.4. З'єднуємо ці точки прямими лініями із вершиною S. Трикутники 5S6 і 7S8 є лініями перетину допоміжних січних площин із конусом.

3. Знаходимо точки перетину заданих прямих CD і AB із трикутниками 5S6 і 7S8. Точки L, M, K, N – шукані точки перетину заданих прямих із конусом.

На рис. 50 показано знаходження точок перетину прямої чотиригранної піраміди із прямою 62.

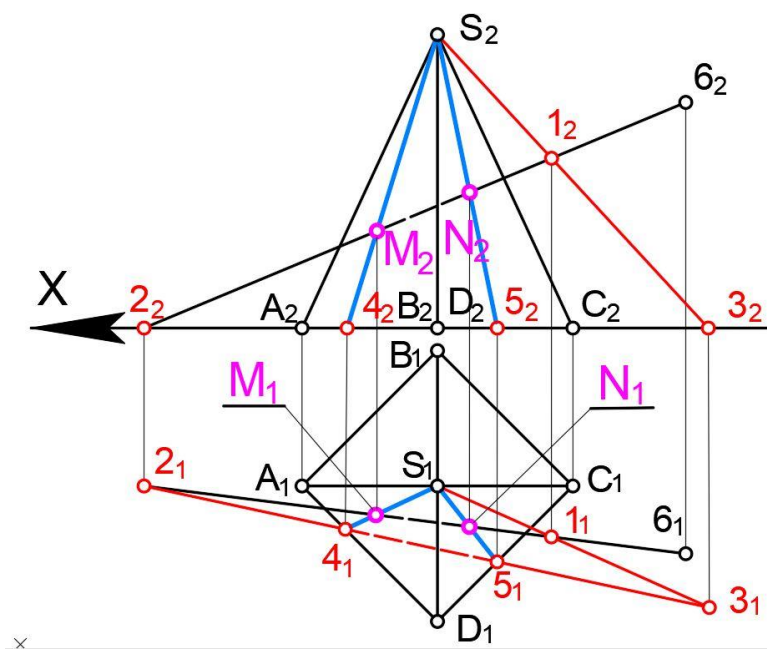


Рис. 50

Основою піраміди є квадрат, який знаходиться у горизонтальній площині проєкції Π_1 . Розв'язання задачі здійснюється за наведеним нижче алгоритмом:

1. Через задану пряму 26 проводимо допоміжну площину. Цю площину задаємо двома прямими, що перетинаються, одна із яких є заданою прямою 26, а друга – пряма, що проходить через будь-яку точку (точку 1), що знаходиться на прямій 26, і через вершину піраміди S.

2. Будуємо лінію перетину допоміжної січної площини із пірамідою.

2.1. Визначаємо точки перетину прямих b_2 і S_1 , за допомогою яких задано допоміжну січну площину, із горизонтальною площиною проєкцій Π_1 . Це точки 2 і 3. Фронтальні проєкції цих точок 2_2 і 3_2 знаходяться у точках перетину фронтальних проєкцій цих прямих b_2 і S_2 із віссю X . Місцезнаходження на комплексному кресленні горизонтальних проєкцій точок 2 і 3 визначається за першим законом проєкційних зв'язків.

2.2. Через точки 2 і 3 проводимо пряму, яка є горизонтальним слідом допоміжної січної площини.

2.3. Знаходимо точки перетину прямої 23 із основою піраміди – точки 4 і 5.

2.4. З'єднуємо ці точки за прямими лініями із вершиною піраміди S . Трикутник $4S5$ є лінією перетину допоміжної січної площини із пірамідою.

2.5. Знаходимо точки перетину заданої прямої 26 із трикутником $4S5$. Точки M і N – шукані точки перетину заданої прямої 26 із пірамідою.

На рис. 51 показано знаходження точок перетину прямої, заданої відрізком AB , із прямою шестигранною призмою, основою якої є правильний шестикутник, який знаходиться у горизонтальній площині проєкцій Π_1 .

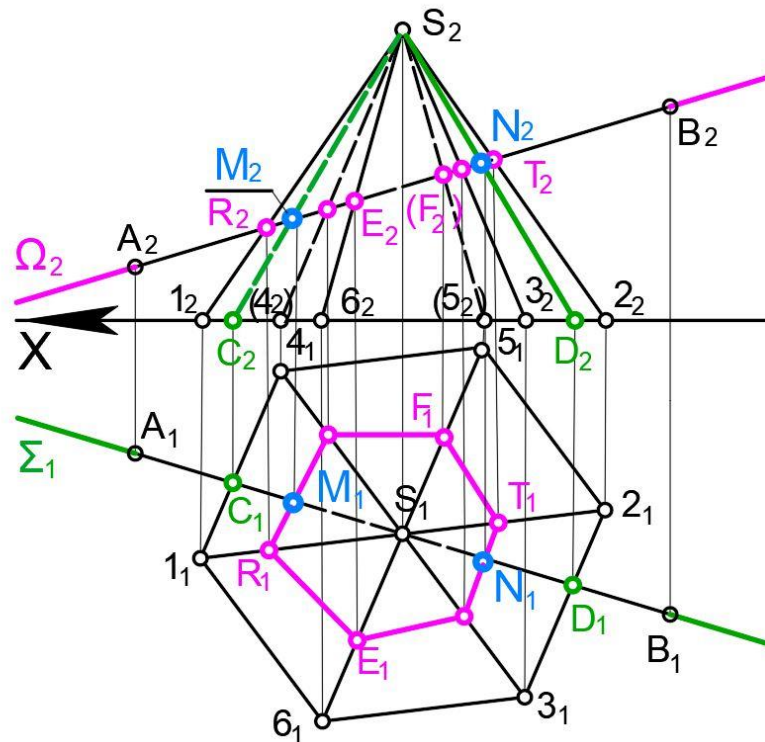


Рис. 51

Алгоритм розв'язання завдання:

1) знаходиться точка перетину сторони DE трикутника DEF із площиною трикутника ABC (точка K);

2) знаходиться точка перетину сторони BC трикутника ABC із площиною трикутника DEF (точка M);

3) прямолінійний відрізок, що з'єднує точки K і M, є лінією перетину заданих трикутників:

4) за допомогою конкурентних точок 1 і 2 визначається видимість фронтальних проекцій сторін трикутника;

5) за допомогою конкурентних точок 3 і 4 визначається видимість горизонтальних проекцій сторін трикутника.

На рис. 53 показано дві площини загального положення, заданих на комплексному кресленні трикутників ABC і DEF. Необхідно побудувати лінію перетину цих трикутників.

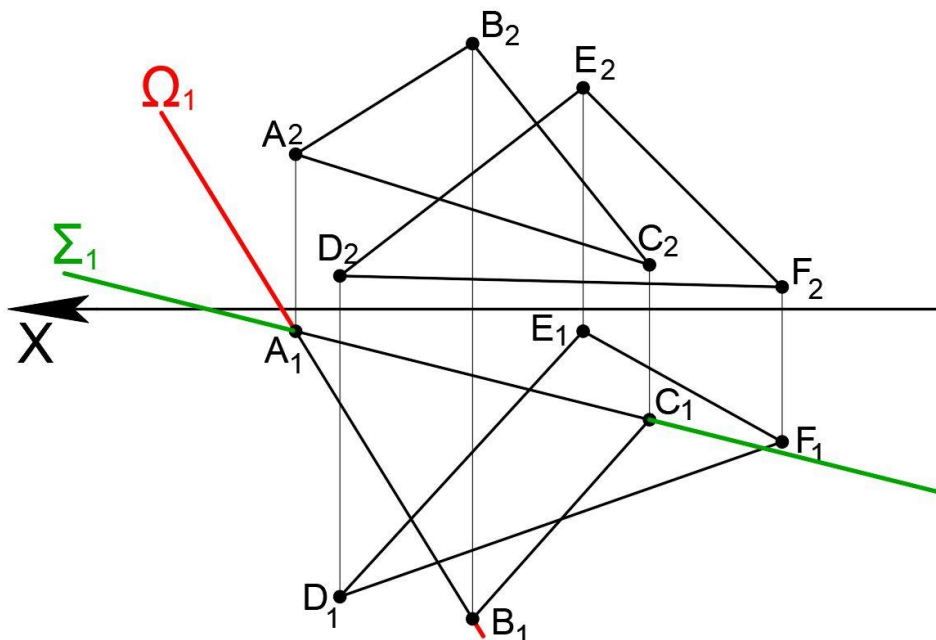


Рис. 53

1. Знаходимо точку перетину сторони AC трикутника ABC із площиною трикутника DEF (рис. 54).

1.1. Сторону AC розмістимо на допоміжній горизонтальній проєкціювальній площині Σ .

1.2. Будуємо лінію перетину площини Σ із площиною трикутника DEF. 1_12_1 – горизонтальна проєкція цієї лінії. Фронтальну проєкцію 1_22_2 цієї лінії будуємо, використовуючи перший закон проєкційного зв'язку.

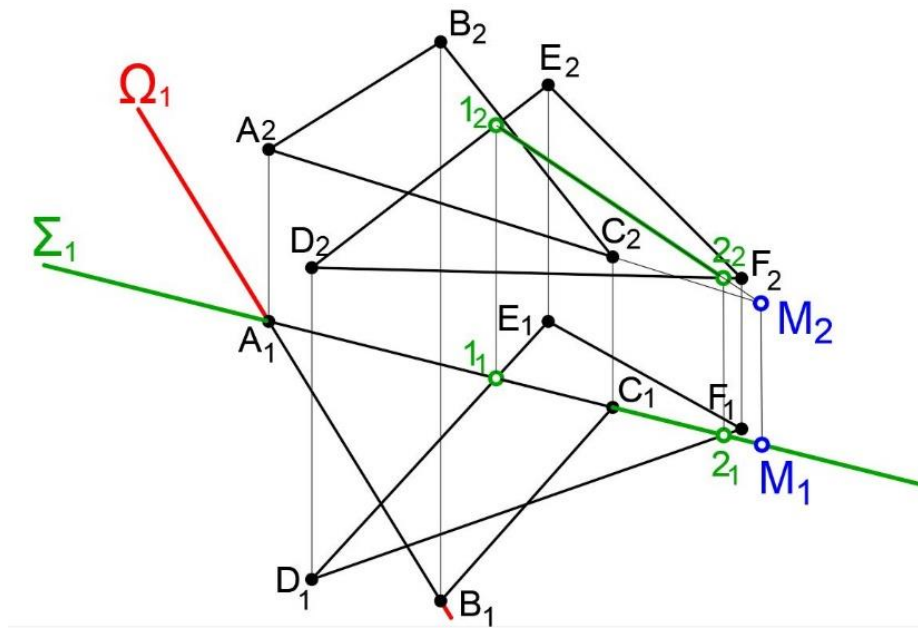


Рис. 54

1.3. Знаходимо точку перетину прямих AC і 12. Фронтальна проєкція цієї точки M_2 є точкою перетину продовжених фронтальних проєкцій відрізків A_2C_2 і 1_22_2 . Горизонтальну проєкцію точки M_1 визначаємо за першим законом проєкційного зв'язку. Горизонтальна проєкція M_1 знаходиться на продовженні горизонтальних проєкцій відрізка A_1C_1 .

2. Знаходимо точку перетину сторони AB трикутника ABC із площиною трикутника DEF (рис. 55).

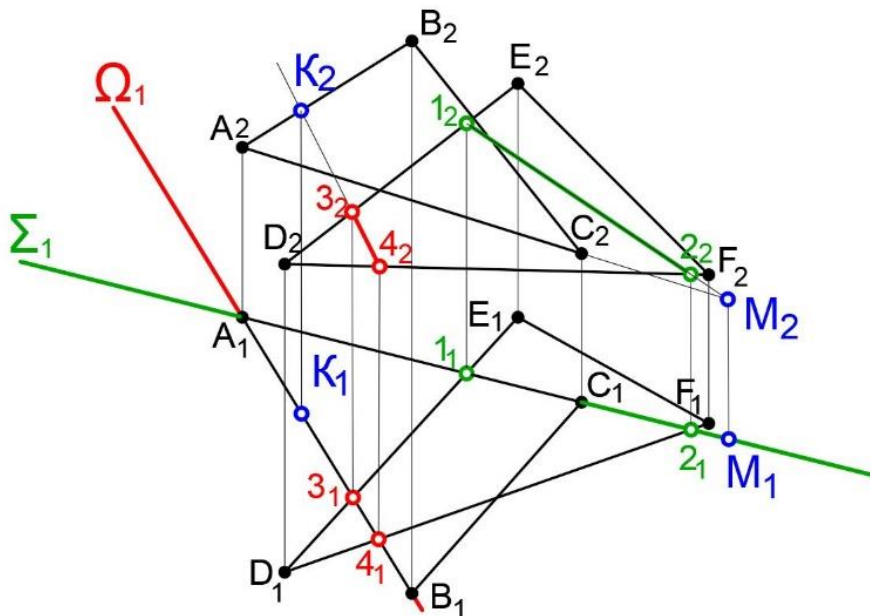


Рис. 55

2.1. Сторону АВ впишемо у допоміжну горизонтально-проеціювальну площину Ω .

2.2. Будуємо лінію перетину площини Ω із площиною трикутника DEF.

$3_1 4_1$ – це горизонтальна проекція цієї лінії. Фронтальну проекцію $3_2 4_2$ цієї лінії знаходимо за першим законом проекційного зв'язку.

2.3. Знаходимо точку перетину прямих АВ і 34. Фронтальна проекція цієї точки K_2 є точкою перетину продовженої фронтальної проекції відрізка $3_2 4_2$ із фронтальною проекцією сторони $A_2 B_2$.

Горизонтальна проекція точки K_1 визначається за першим законом проекційного зв'язку. Вона знаходиться на горизонтальній проекції сторони $A_1 B_1$.

1. Будується лінія перетину площин, заданих трикутниками ABC і DEF.

Цією лінією є пряма, яка проходить через точки K і M (рис. 56). Лінією перетину трикутників ABC і DEF є відрізок прямої KM, обмежений сторонами цих трикутників.

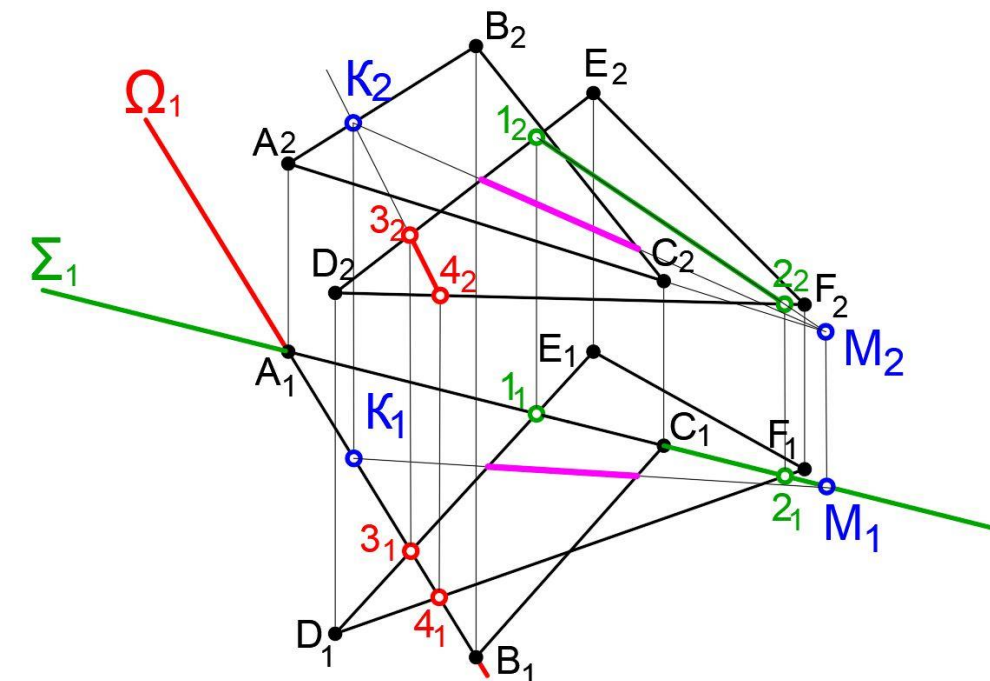


Рис. 56

2. Визначається видимість проекцій сторін трикутників. На рис. 57 показано правильно визначено видимість проекцій трикутників ABC і DEF, а на рис. 58 показано неправильну видимість.

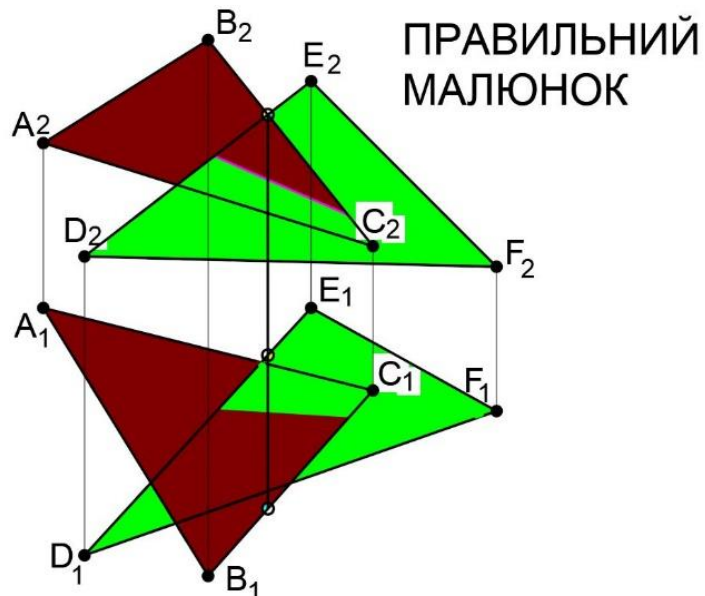


Рис. 57

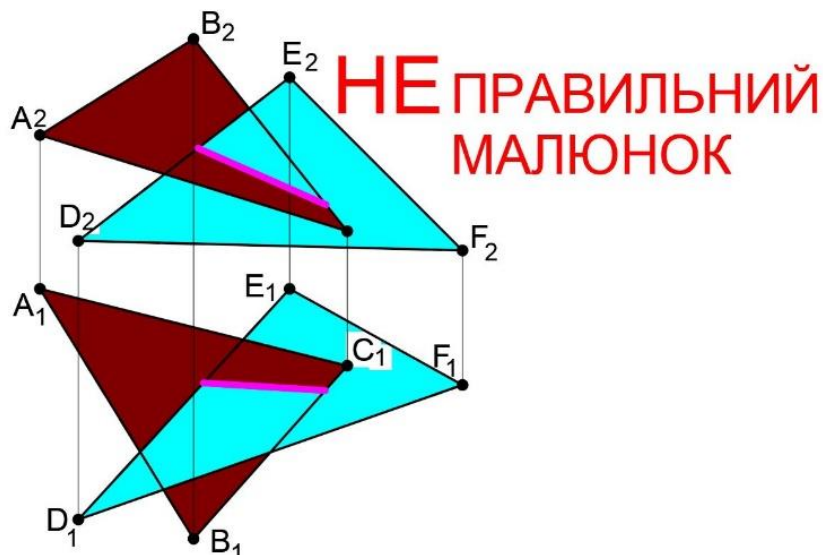


Рис. 58

3.4. Знаходження лінії перетину поверхні площиною

На рис. 59 і рис. 60 показано лінію перетину прямого кругового конуса горизонтально-проеціювальною площиною. Лінія перетину є гіперболою. Побудову гіперболи почнемо зі знаходження її вершини (найвищої точки лінії перетину – точки А). Для цієї мети необхідно провести таку горизонтальну площину рівня, яка перетне заданий конус по колу, дотичному заданій площині зрізу.

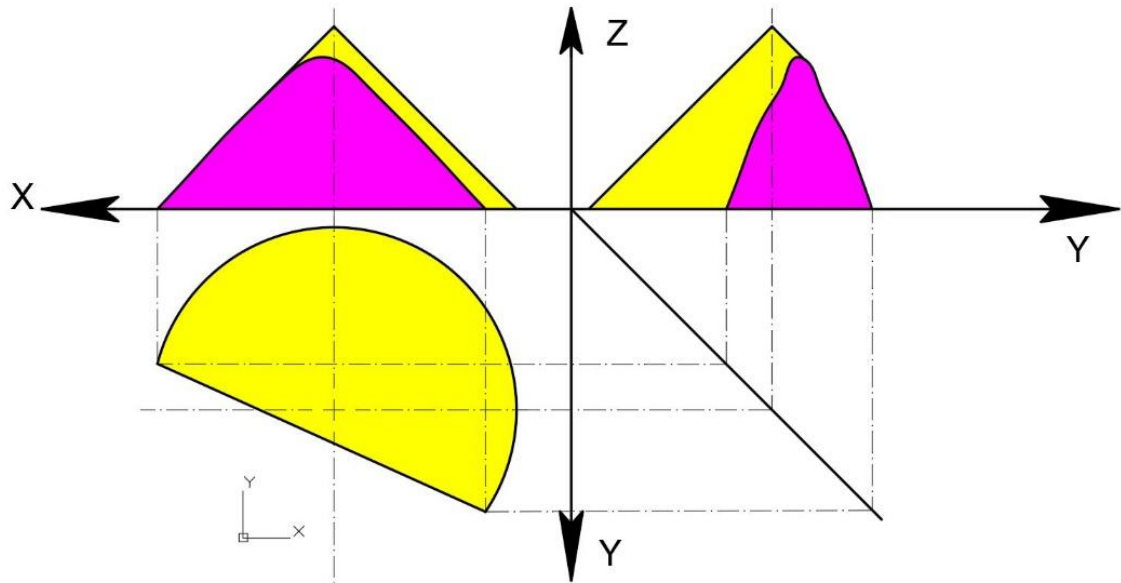


Рис. 59

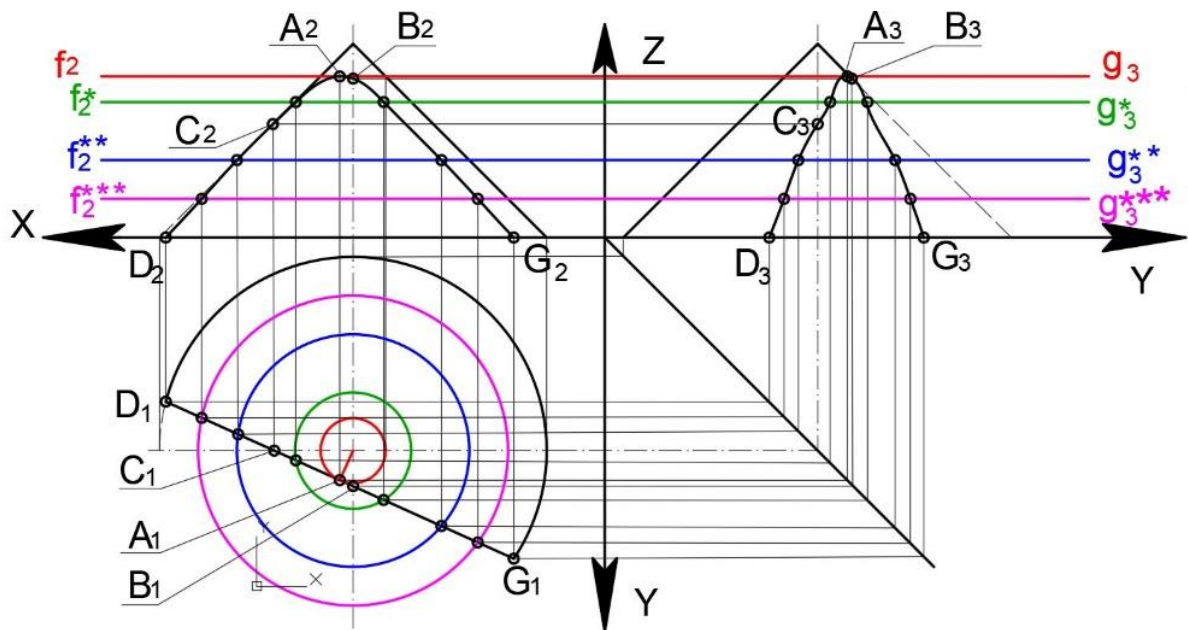


Рис. 60

Горизонтальна проекція цього кола повинна торкатися горизонтального сліду горизонтально-проєціювальної площини, тобто прямої D_1G_1 . Але нам невідомо, на якій відстані від горизонтальної площини проєкції P_1 повинна розміщатися горизонтальна площина рівня, яка б розтинала конус так, як потрібно. Тому спочатку будемо горизонтальну проєкцію кола, що торкається горизонтального сліду заданої площини перетину (прямої D_1C_1) точки A_1 . Потім проводимо вертикальну

лінію проекційного зв'язку, яка є дотичною до цього кола. Знаходимо точку перетину цієї лінії зв'язку із фронтальним нарисом конуса (рівнобедреним трикутником) і проводимо через цю точку горизонтальну пряму. Ту частину прямої, яка знаходиться ліворуч від осі Z , позначаємо f_2 (це фронтальний слід допоміжної січної площини). Частина прямої, що розташована правіше від осі Z , є профільним слідом допоміжної січної площини. Його ми позначаємо g_3 .

Фронтальна проекція A_2 точки A знаходиться на фронтальному сліді f_2 допоміжної площини, а її профільна проекція A_3 – на профільному сліді g_3 .

Визначаємо найнижчі точки та лінії перетину опорні точки гіперболи D і G . Ці точки є точками перетину основи конуса із заданою горизонтально-проеціювальною площиною. Горизонтальні проекції цих точок D_1 і G_1 є точками перетину горизонтального сліду площини перетину (прямої D_1G_1) горизонтальної проекції основи конуса. Основа конуса знаходиться у горизонтальній площині проекції P_1 , тому фронтальні проекції точок D_2 і G_2 знаходяться на осі X , а профільні проекції D_3 і G_3 – на осі Y .

Для побудови проміжних точок параболи необхідно нижче точки A провести кілька допоміжних січних площин, перпендикулярних осі конуса.

Ці площини будуть перетинати конус за колами, кожна з яких перетинатиметься із заданою горизонтально-проеціювальною площиною у двох точках. Горизонтальні проекції цих точок збігатимуться із горизонтальним слідом заданої площини зрізу (із прямою D_1G_1).

Фронтальні та профільні проекції цих точок будуть знаходитися на фронтальних і профільних слідах допоміжних площин.

На рис. 61 показано комплексне креслення відкритого тора, у якого частина поверхні зрізана фронтально-проеціювальною площиною. Фронтальна проекція лінії зрізу має вигляд похилого прямолінійного відрізка. Необхідно побудувати горизонтальну і профільну проекції лінії зрізу.

Тор – це поверхня, утворена у результаті обертання кола навколо нерухомої осі, що розташована у площині кола і не проходить через центр кола. Фронтальна і профільна проекції осі обертання показано у вигляді вертикальних штрих-пунктирних відрізків, які є осями симетрії для фронтальної і профільної проекцій тора. Горизонтальна проекція

осі обертання збігається із точкою перетину центрових штрих-пунктирних ліній.

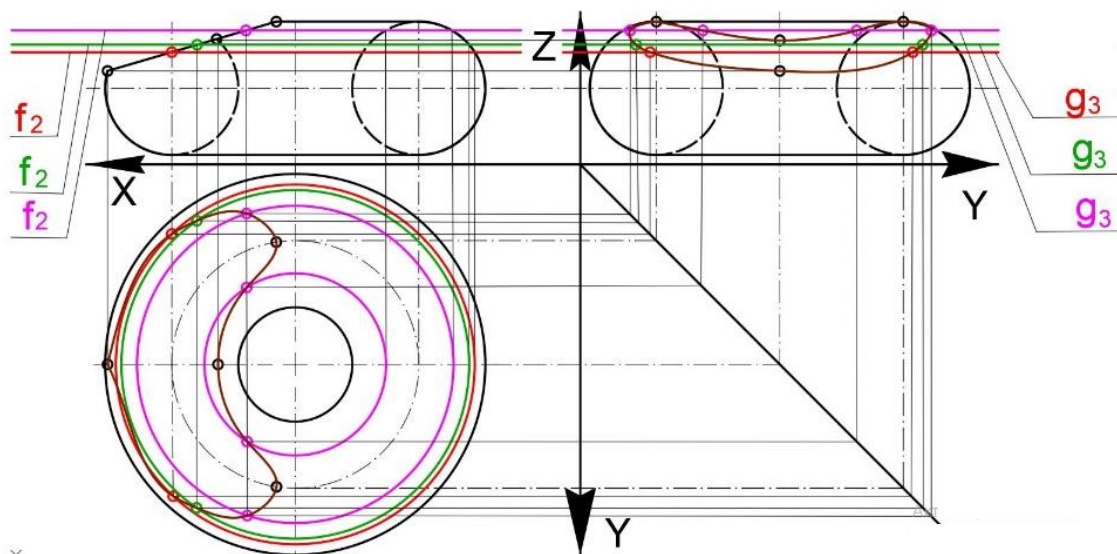


Рис. 61

Із рис. 61 витікає, що лінія зрізу тора фронтально-проеційвальною площиною є замкненою просторовою кривою лінією, горизонтальна проекція якої симетрична відносно центрної лінії, паралельної осі X , а профільна проекція симетрична відносно профільної проекції осі обертання тора. Лінія зрізу проходить через 12 точок: чотири чорні, чотири фіолетові, дві зелені та дві червоні. Найвищими точками лінії зрізу є дві чорні точки, які знаходяться на колі, радіус якого дорівнює радіусу траєкторії обертання центру твірної кола. Горизонтальну проекцію цієї траєкторії подано у вигляді штрих-пунктирного кола. Дві інші чорні точки, що належать лінії зрізу, належать твірній кола, фронтальну проекцію якої показано в урізаному вигляді, а горизонтальна проекція збігається із центрною штрих-пунктирною лінією, яка паралельна осі X .

Чотири фіолетові точки належать двом концентричним фіолетовим колам, які утворено у результаті перетину тора допоміжною секцією площини, перпендикулярною осі обертання тора і заданої на комплексному кресленні двома фіолетовими слідами (фронтальним і профільним).

Дві зелені і дві червоні точки належать двом колам відповідного кольору, які отримано у результаті перетину тора допоміжними січними площинами, перпендикулярними осі обертання тора.

Із рис. 61 видно, що місце проєкції кожної з цих 12 точок на комплексному кресленні легко визначається за допомогою трьох законів проєкційного зв'язку.

3.5. Перетин поверхонь

Технічні форми машинобудівних деталей, машин, інженерних конструкцій та споруд можна розглядати як з'єднання різних поверхонь. Ці поверхні з'єднуються між собою лініями переходу, які є лініями взаємного перетину поверхонь. Під час зображення деталей машин і споруд на кресленнях доводиться будувати проєкції цих ліній [10, 11].

Лінією взаємного перетину поверхонь називається геометричне місце точок, що належить обом поверхням, що перетинаються. Іншими словами, всі точки лінії перетину поверхонь мають подвійну належність.

Лінію перетину будують за окремими точками, використовуючи її властивість подвійної належності. Так, щоб визначити точку, що належить лінії перетину двох поверхонь, потрібно побудувати лінію, що належить першій поверхні і проходить через цю точку, та іншу лінію, що належить другій поверхні і проходить через цю точку. Тоді ці дві допоміжні лінії, у результаті перетинання, дозволять визначити точку, що належить обом поверхням.

У нарисній геометрії побудова лінії перетину двох поверхонь здійснюється за допомогою способу допоміжних січних поверхонь.

Зазвичай, як допоміжні січні поверхні використовують площини і сфери.

3.5.1. Спосіб допоміжних січних площин

Цей спосіб характеризується тим, що допоміжними січними поверхнями застосовують площини. При цьому можуть використовуватися проєціювальні площини, площини рівня і площини загального положення.

На рис. 62 показано два прямі кругові циліндри, один із яких займає вертикальне положення, а другий – горизонтальне положення відносно площини P_1 . Осі циліндрів схрещуються. Необхідно побудувати лінію перетину цих циліндрів.

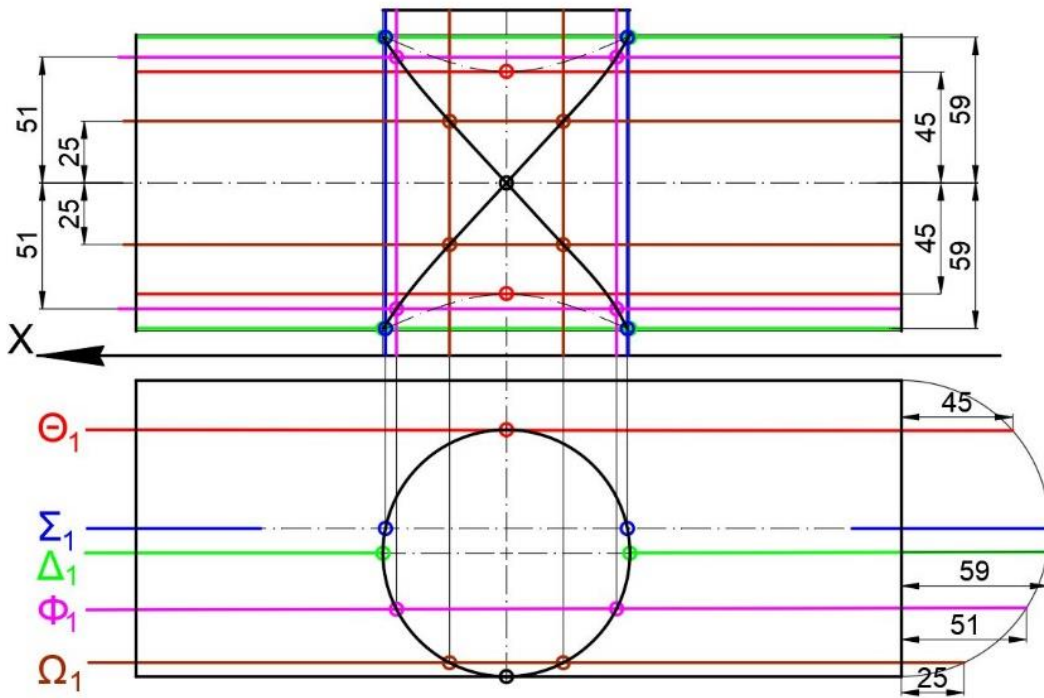


Рис. 62

Загальний алгоритм вирішення завдань, за яким потрібно побудувати лінію перетину двох поверхонь способом допоміжних січних площин:

- 1) проводиться допоміжна січна площина, що перетинає задані поверхні;
- 2) будуються лінії перетину допоміжної січної площини із заданими поверхнями;
- 3) знаходяться точки перетину знайдених ліній;
- 4) для визначення інших точок, що належать шуканій лінії перетину двох поверхонь, проводяться інші допоміжні січні площини;
- 5) знайдені точки з'єднуються із урахуванням їхньої видимості.

Послідовність розв'язання задачі, зображеної на рис. 62:

- 1) спочатку відзначаємо на комплексному кресленні точку лінії перетину, для визначення якої не потрібно ніяких додаткових побудов. Це точка перетину найбільш віддаленої від площини P_2 твірної вертикального циліндра із найбільш віддаленої від площини P_2 твірної горизонтального циліндра. Горизонтальна проекція цієї точки знаходиться у точці торкання горизонтальних нарисів, заданих циліндром у точці торкання кола з прямокутником. Фронтальна проекція цієї точки збігається із точкою перетину проекцій осей, заданих циліндром;

2) вертикальний циліндр є горизонтально – проєціювальним. Тому горизонтальна проєкція лінії перетину заданих циліндрів збігається із горизонтальним нарисом горизонтально-проєціювального циліндра (тобто із колом). Проводимо допоміжну січну площину, дотичну до вертикального циліндра і паралельну фронтальній площині проєкції P_2 . Горизонтальний слід площини дотикається горизонтального нарису вертикального циліндра і паралельний осі X ;

3) дотик допоміжної січної площини із вертикальним циліндром відбувається за твірною, фронтальна проєкція якої збігається із фронтальною проєкцією його осі. Допоміжна січна площини перетинає горизонтальний циліндр за двома твірними, фронтальні проєкції яких паралельні фронтальній проєкції осі цього циліндра і рівновіддалені від неї на відстань, що дорівнює розміру хорди кола, що є основою горизонтального циліндра. Як показано на рис. 62, довжина цієї півхорди дорівнює 45 мм;

4) визначаються точки перетину двох твірних горизонтального циліндра із твірною вертикального циліндра, що є лінією дотику площини із вертикальним циліндром. Це дві червоні точки;

5) проводиться допоміжна січна площина Σ через вісь горизонтального циліндра;

6) визначаються лінії перетину площини Σ із заданими циліндрами. Допоміжна січна площина Σ перетинає вертикальний циліндр за двома твірними, фронтальні проєкції яких перпендикулярні до осі X . Площина Σ перетинає горизонтальний циліндр прямокутником, фронтальна проєкція якого збігається із фронтальним нарисом горизонтального циліндра;

7) знаходяться точки перетину фронтальних проєкцій двох твірних вертикального циліндра із фронтальним нарисом горизонтального циліндра. Це чотири сині точки;

8) через вісь вертикального циліндра проводиться допоміжна січна площина Δ ;

9) визначаються лінії перетину допоміжної січної площини Δ із заданими циліндрами. Допоміжна січна площина Δ перетинає горизонтальний циліндр за двома зеленими твірними, фронтальні проєкції яких паралельні фронтальній проєкції осі цього циліндра і рівновіддалені від неї на відстань, що дорівнює розміру півхорди (59 мм) кола, що є основою горизонтального циліндра. Площина Δ перетинає верти-

кальний циліндр прямокутником, фронтальна проекція якого збігається із фронтальним нарисом цього циліндра;

10) знаходяться точки перетину фронтальних проекцій двох зелених твірних горизонтального циліндра із фронтальним нарисом вертикального циліндра. Це чотири зелені точки;

11) проводиться допоміжна січна площина Ω ;

12) визначаються лінії перетину площини із заданими циліндрами. Ця площина розтинає кожен циліндр за двома твірними. Фронтальні проекції твірних горизонтального циліндра паралельні фронтальній проекції його осі і рівновіддалені від неї на відстань, яка дорівнює розміру напівхорди (25 мм) кола, що є основою горизонтального циліндра. Допоміжна січна площина Ω розтинає вертикальний циліндр за двома твірними, фронтальні проекції яких перпендикулярні до осі X;

13) знаходяться точки перетину фронтальних проекцій коричневих твірних заданих циліндрів. Це чотири коричневі точки;

14) аналогічно визначаються чотири фіолетові точки, які отримано у результаті застосування допоміжної січної площини.

На рис. 63 показано побудову лінії перетину двох циліндрів, осі яких схрещуються під кутом 90° .

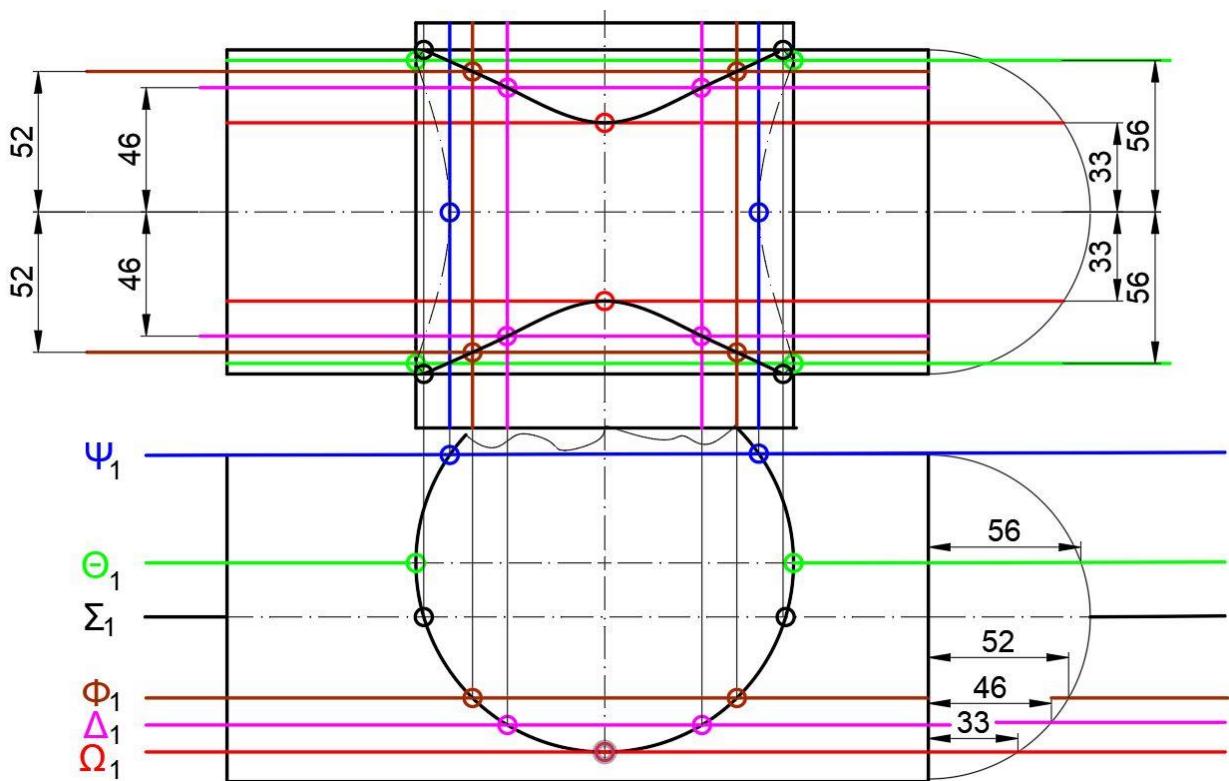


Рис. 63

Завдання вирішується у послідовності:

1) проводиться допоміжна січна площина μ , що є дотичною горизонтального циліндра;

2) будуємо лінії перетину площини μ із горизонтально-проеційвальним циліндром. Площини μ розсікають цей циліндр за двома синіми твірними, фронтальні проекції яких перпендикулярні осі X . Фронтальна проекція лінії торкання площини μ із горизонтальним циліндром співпадає із фронтальною проекцією його осі;

3) знаходимо точки перетину двох синіх твірних вертикального циліндра із твірною горизонтального циліндра (із лінією його торкання із площиною μ). Ці лінії перетинаються у двох синіх точках;

4) через вісь вертикального циліндра проводимо допоміжну січну площину;

5) лінійний перетин площини із вертикальним циліндром є прямокутник, фронтальна проекція якого збігається із його фронтальним нарисом. Площина перетинає горизонтальний циліндр за двома зеленими твірними, фронтальні проекції яких розташовані симетрично відносно фронтальної проекції його осі і рівновіддалені від цієї осі на відстані (56 мм), що дорівнює розміру півхорди кола, що знаходиться у поперечному перетині цього циліндра;

6) знаходимо точки перетину фронтальних проекцій цих двох зелених твірних із фронтальним нарисом вертикального циліндра. Ці геометричні об'єкти перетинаються у чотирьох зелених точках;

7) через вісь горизонтального циліндра проводимо допоміжну січну площину Σ ;

8) лініями перетину площини Σ із цим циліндром є прямокутник, фронтальна проекція якого збігається із фронтальним нарисом горизонтального циліндра. Площина Σ розсікає вертикальний циліндр за двома твірними;

9) фронтальна проекція цих двох твірних перетинається фронтальним нарисом горизонтального циліндра у чотирьох чорних точках;

10) по дотичній до вертикального циліндра проводимо допоміжну січну площину Ω . Горизонтальний слід площини Ω_1 торкається горизонтального нарису вертикального циліндра (кола);

11) фронтальна проекція твірної, за якою відбувається торкання вертикального циліндра із площиною Ω , збігається із передньою проекцією осі циліндра. Фронтальні проекції твірних горизонтального цилінд-

ра, отриманих у результаті його зрізу площиною Ω , рівновіддалені на 33 мм від фронтальної проекції осі горизонтального циліндра. Ця відстань дорівнює розміру напівхорди кола, що знаходиться у поперечному перетині горизонтального циліндра. Хорда цього кола є лінією перетину основи горизонтального циліндра допоміжною січною площиною Ω ;

12) знаходяться точки перетину двох твірних горизонтального циліндра із однією твірною вертикального циліндра. Це дві червоні точки, передні проекції яких знаходяться на передній проекції осі вертикального циліндра;

13) чотири фіолетові точки і чотири коричневі точки отримано у результаті застосування допоміжних січних площин Δ і μ . Кожна із цих площин розсікає кожен заданий циліндр за двома твірними. Точки, що належать лінії перетину цих циліндрів, є точками перетину цих твірних.

На рис. 64 показано прямий круговий конус і прямий круговий циліндр, у яких осі паралельні, а основи розташовано у горизонтальній площині проекцій. Необхідно побудувати лінію перетину цих поверхонь. Завдання вирішуються за такою послідовністю:

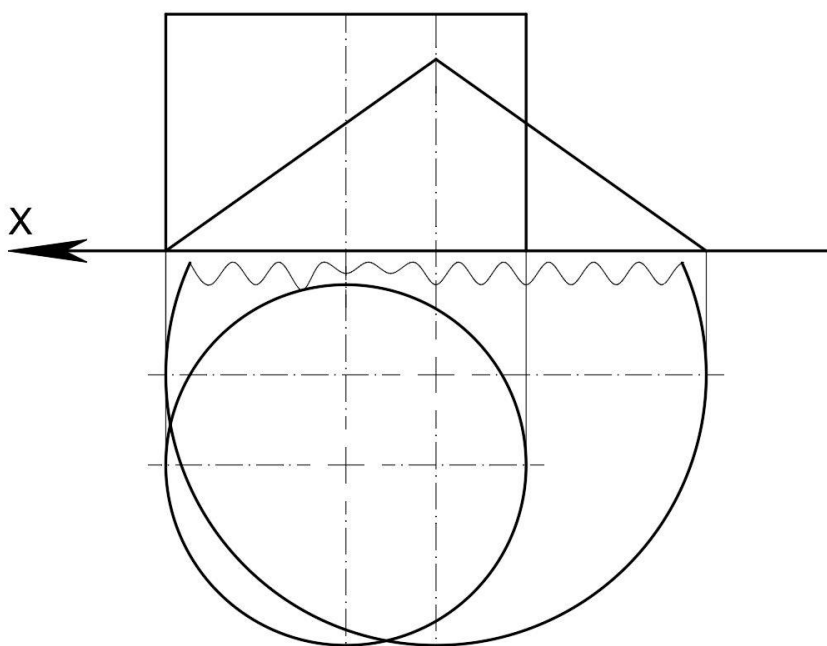


Рис. 64

1. Знаходимо найвищу точку лінії перетину та дві її найнижчі (опорні) точки. Опорні точки є точками перетину основ конуса і циліндра (рис. 65). Оскільки основи розташовано у горизонтальній площині

проекції, фронтальні проекції опорних точок лінії перетину конуса і циліндра знаходяться на осі X.

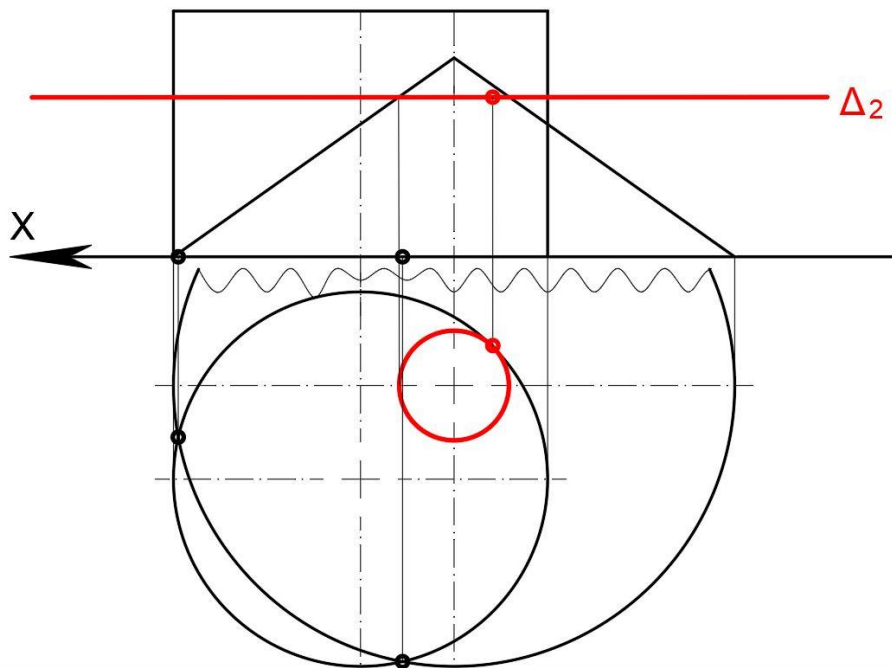


Рис. 65

Найвища точка лінії перетину (червона точка на рис. 65) знаходиться у точці дотику кіл, що утворюються у результаті розтину заданих поверхонь допоміжною січною площиною Δ .

Спочатку проводиться горизонтальна проекція червоного кола, яка дотична до горизонтального нарису заданого циліндра. Проводиться вертикальна лінія проекційного зв'язку, яка дотична до червоного кола. Через точку перетину цієї вертикальної лінії із фронтальним нарисом конуса (із рівнобедреним трикутником) проводимо фронтальний слід допоміжної січної площини Δ_2 , паралельний осі X.

2. Знаходимо точку лінії перетину заданих поверхонь, яка є межею видимості для передньої проекції лінії перетину. Ця точка повинна бути розташована на фронтальній нарисовій твірній циліндра, а циліндр – на двох твірних. Точки перетину синього трикутника із синіми твірними циліндра належать шуканій лінії перетину заданих поверхонь.

3. Для знаходження інших точок, що належать лінії перетину конуса і циліндра, проводимо допоміжні січні площини, паралельні горизонтальній площині проекції P_1 : рис. 66 – рис. 72. Всі ці площини розтинають конус по колах різного діаметру, а циліндр – по колах одного

діаметру, горизонтальні проєкції яких збігаються із горизонтальними нарисами циліндра. Точки перетину цих кіл належать шуканій лінії перетину заданих поверхонь.

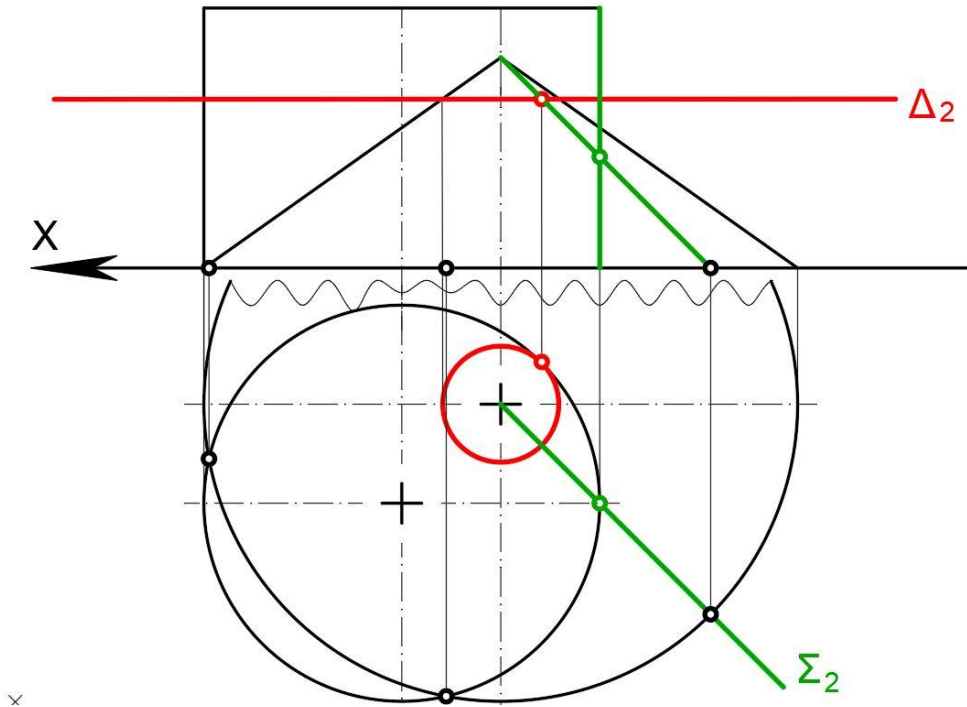


Рис. 66

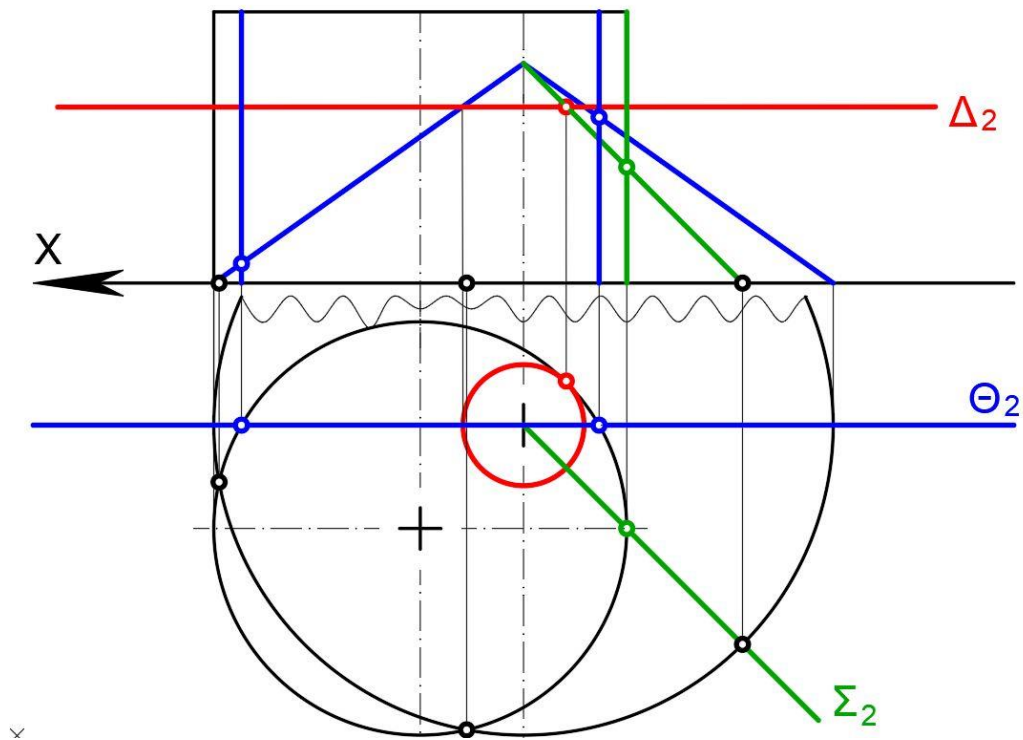


Рис. 67

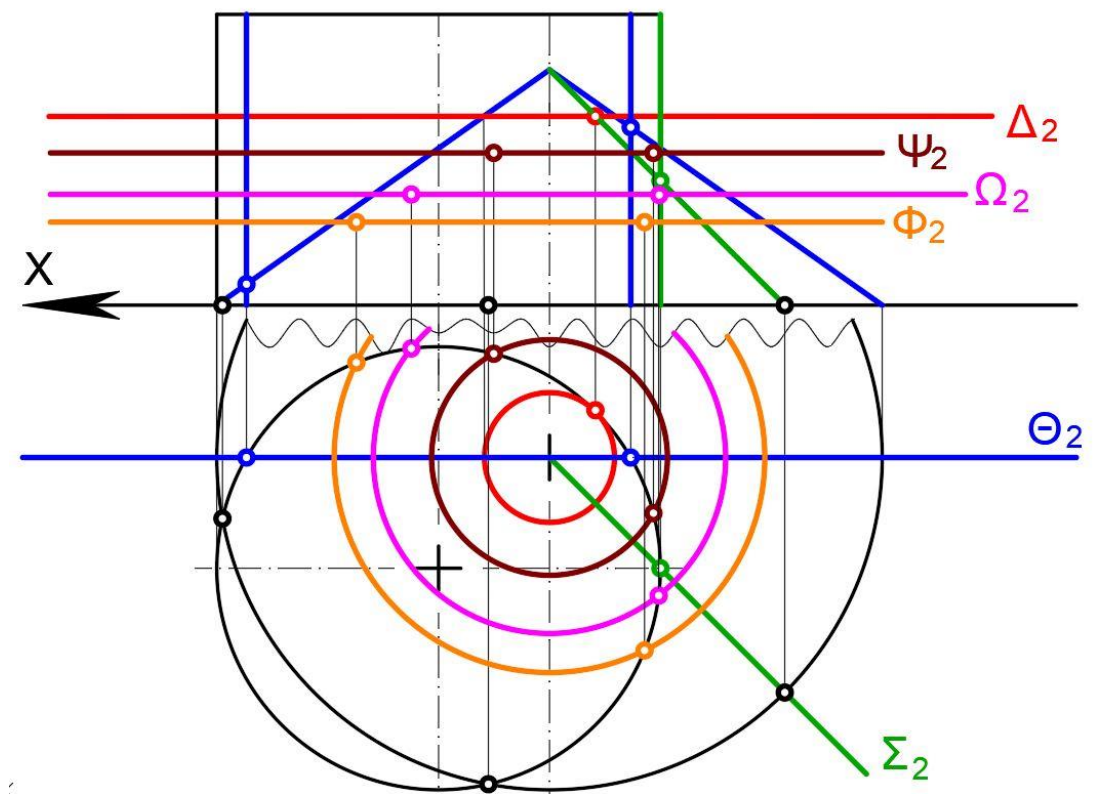


Рис. 70

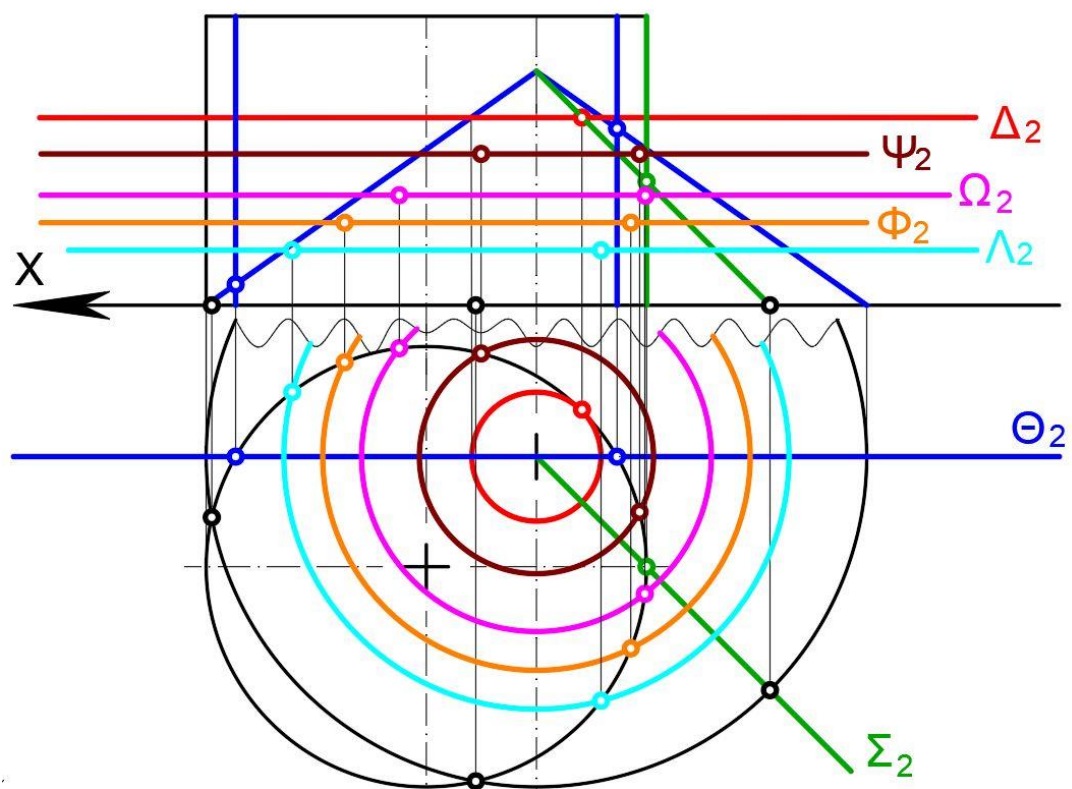


Рис. 71

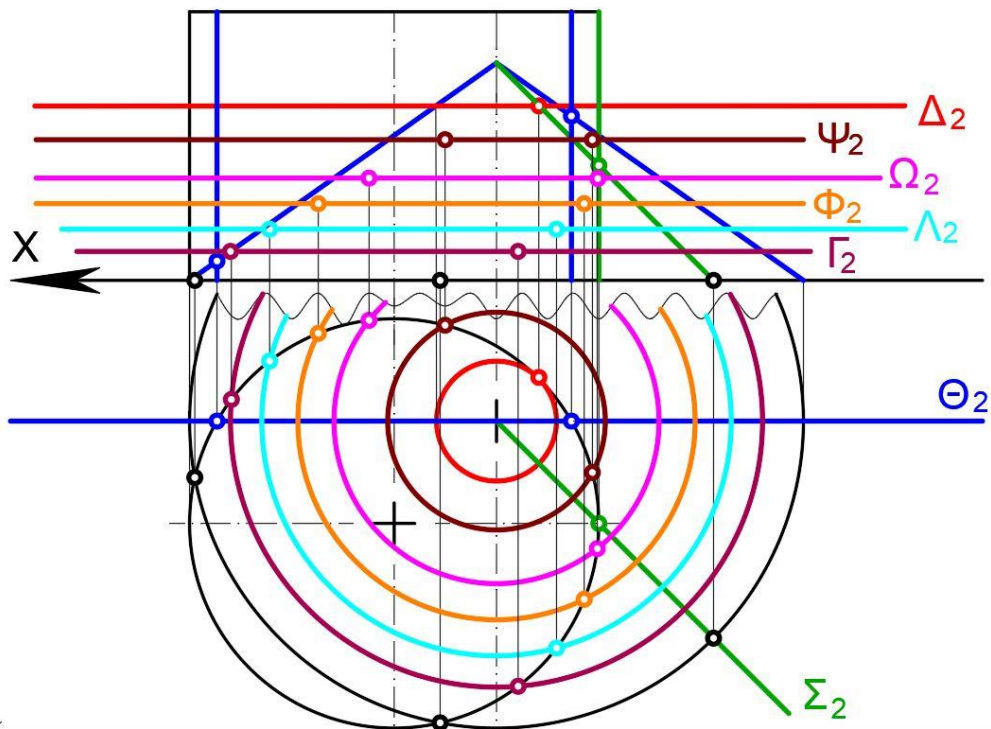


Рис. 72

4. Горизонтальна проекція лінії перетину конуса і циліндра збігається із горизонтальним слідом циліндра, а фронтальні проекції точок необхідно з'єднати плавною кривою із урахуванням їхньої видимості (рис. 73, рис. 74).

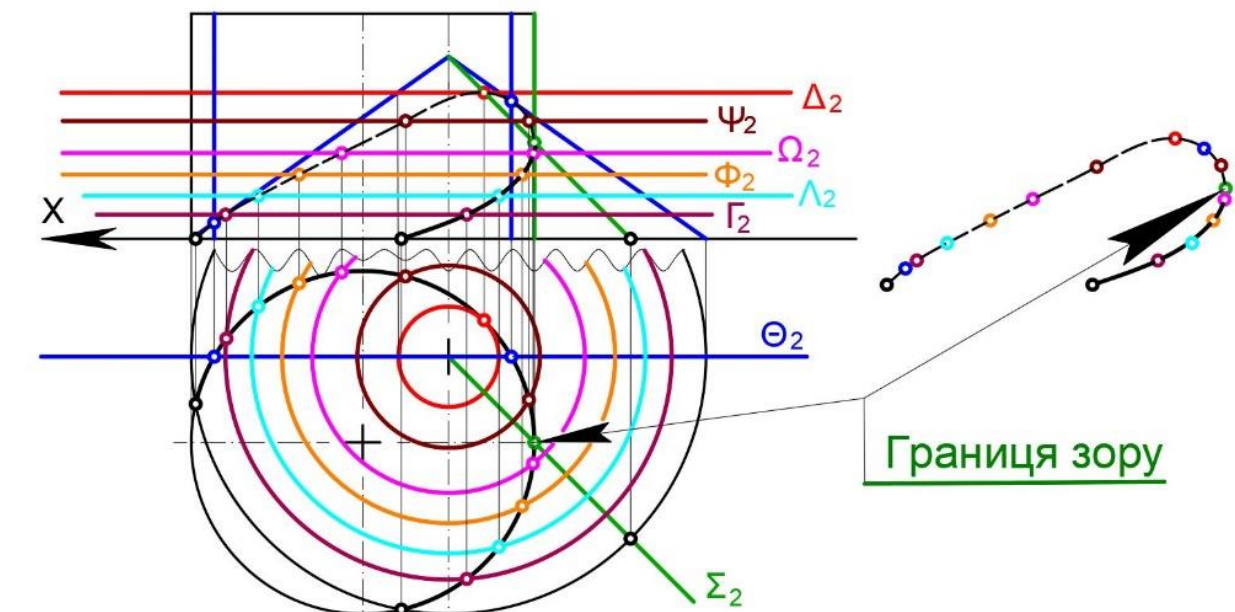


Рис. 73

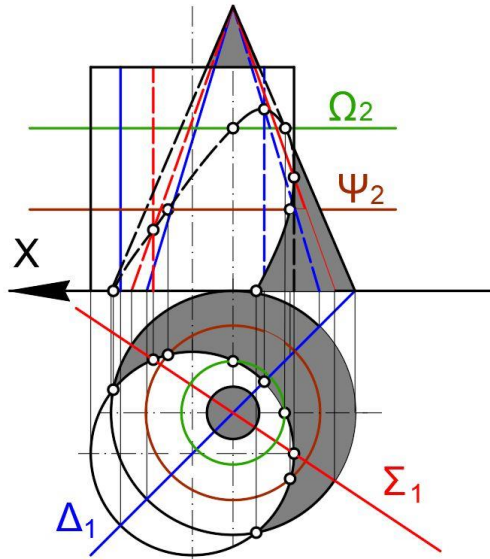


Рис. 74

На рис. 75 показано похилий конус і сферу, що мають загальну площину симетрії, паралельну фронтальній площині проєкції P_2 . Необхідно побудувати лінію перетину заданих поверхонь.

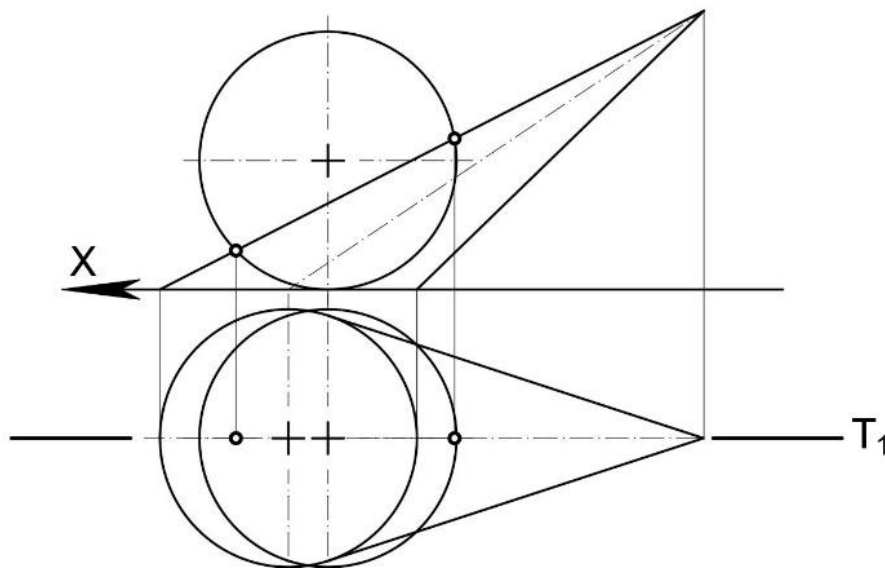


Рис. 75

1. Проводимо допоміжну січну площину T , що збігається із загальною площиною симетрії конуса і сфери. Фронтальний нарис цих поверхонь є фронтальними проєкціями лінії перетину цих поверхонь із площиною T (рис. 75). Точки перетину фронтальних нарисів (дві чорні точки) є точками, що належать шуканій лінії перетину заданих поверхонь.

2. Лінія перетину похилого конуса зі сферою є просторовою кривою, для побудови якої потрібно мати багато точок, що належать їй. Для знаходження цих точок скористаємося кількома допоміжними січними площинами – горизонтальними площинами рівня. Одну із цих площин (найвищу) Σ проведемо трохи нижче верхньої точки перетину фронтальних нарисів конуса і сфери (рис. 76). Допоміжна січна площина Σ перетинає сферу по колу, горизонтальна проекція якого збігається з її горизонтальним нарисом. Площина Σ перетинає похилий конус по колу радіусом 34,93 мм. Центр цього кола знаходиться на осі похилого циліндра. Всі кола, які знаходяться у перетині конуса і сфери площиною Σ , перетинаються у двох червоних точках, фронтальні проекції яких збігаються.

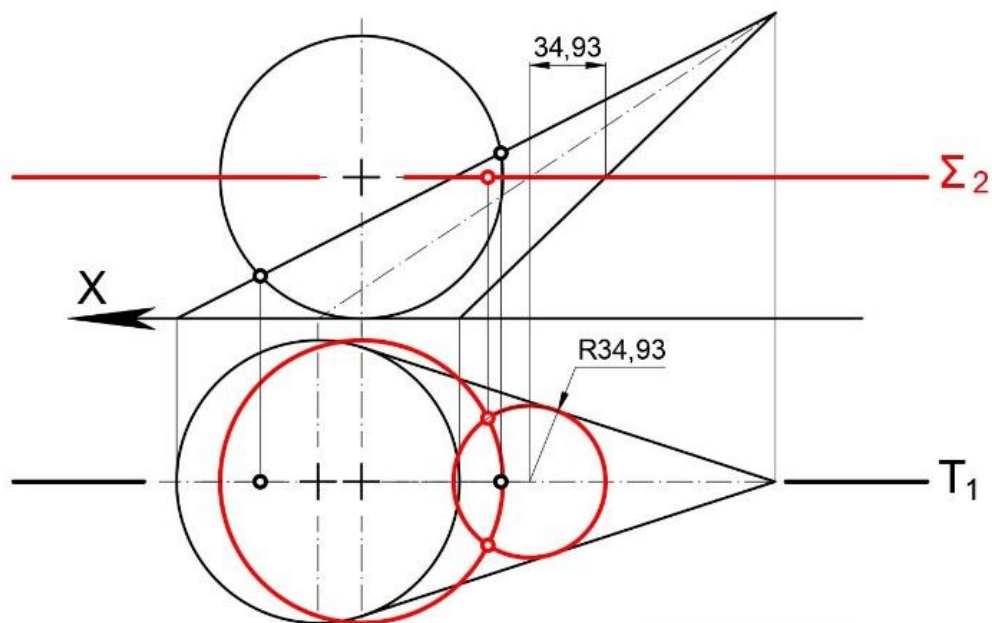


Рис. 76

3. Проводимо допоміжну січну площину Ω (найнижчу) декілька вище нижньої точки перетину фронтальних нарисів конуса і сфери (рис. 77). Площина Ω розтинає похилий конус і сферу по колах, радіуси яких дорівнюють 53, 44 мм і 51, 23 мм, відповідно. Ці кола перетинаються у двох зелених точках, фронтальні проекції яких збігаються.

4. У проміжку між площинами Σ і Ω проводимо допоміжну січну площину Δ , яка розтинає похилий конус і сферу по колах, радіуси яких дорівнюють 48, 81 мм і 57, 66 мм, відповідно. Ці кола перетинаються у двох синіх точках, фронтальні проекції яких збігаються (рис. 78).

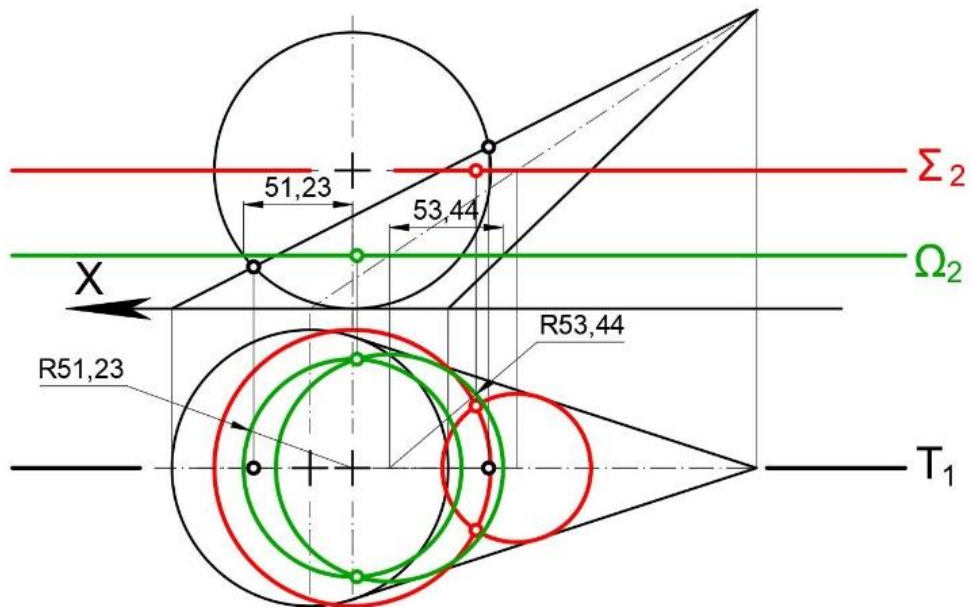


Рис. 77

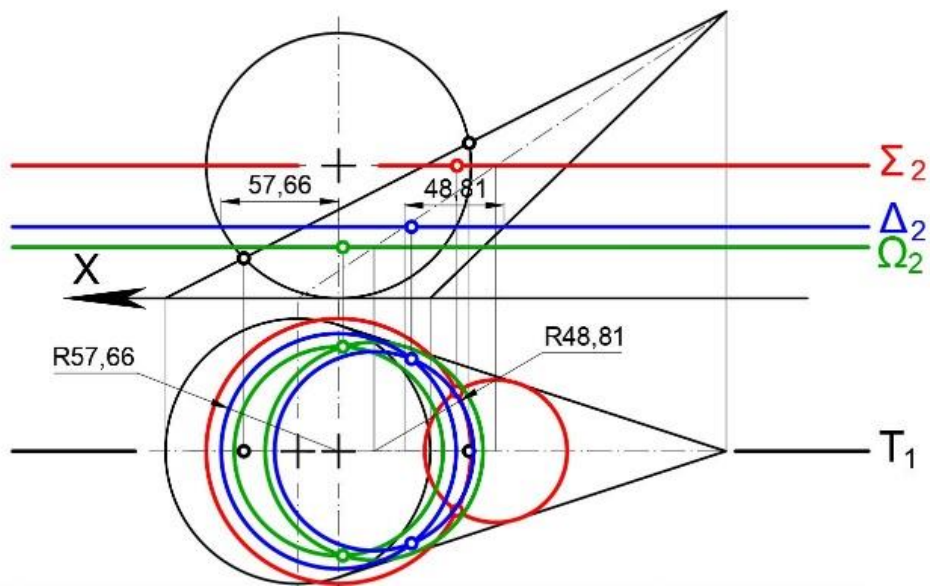


Рис. 78

5. Знайдені точки з'єднуємо плавною кривою із урахуванням їхньої видимості. Фронтальна проекція лінії перетину видима на всій її довжині між нижньою і верхньою точками перетину фронтальних нарисів заданих поверхонь. Більшу частину горизонтальної проекції лінії перетину не видно, оскільки вона знаходиться у нижній частині сфери. Видимою є тільки верхня частина горизонтальної проекції лінії перетину, яка обмежена двома червоними точками, розташованими на екваторі сфери (рис. 79).

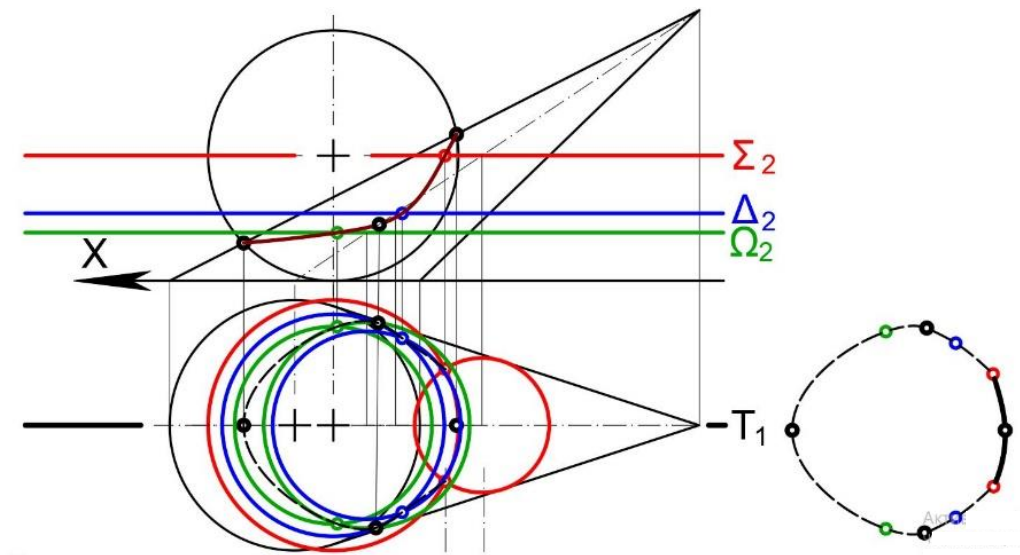


Рис. 79

На рис. 80 показано фронтальні та профільні проекції 1/4 частини тора і прямого кругового циліндра, що мають загальну площину симетрії, паралельну фронтальній площині проекції P_2 . Необхідно побудувати лінію перетину цих поверхонь:

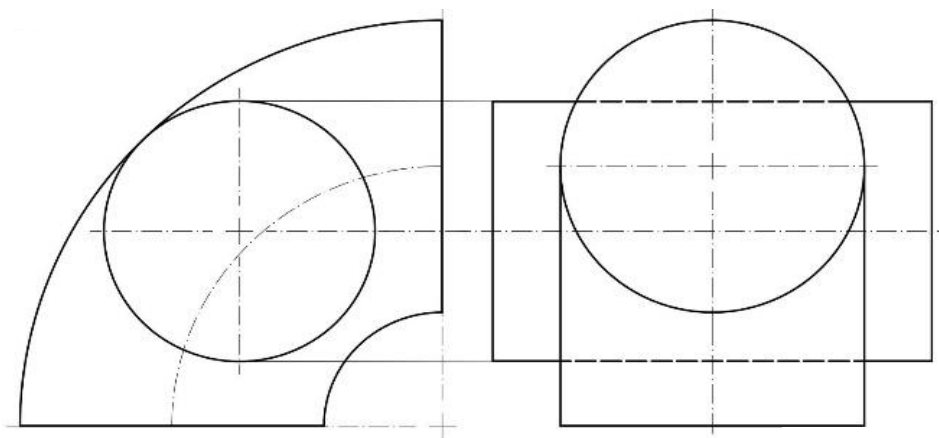


Рис. 80

1. Загальну площину симетрії заданих поверхонь будемо використовувати як допоміжну січну площину Σ . Ця площина розтинає тор і циліндр лініями, фронтальні проекції яких збігаються із фронтальними нарисами заданих проекцій (рис. 81).

Точка 1_2 – це точка торкання фронтального нарису циліндра (кола) із фронтальною нарисовою лінією тора (дугою). Точка 1 належить шуканій лінії перетину двох поверхонь. Для знаходження інших точок,

що належать цій лінії, будемо розтинати тор і циліндр допоміжними січними площинами, паралельними їхній загальній площині симетрії Σ .

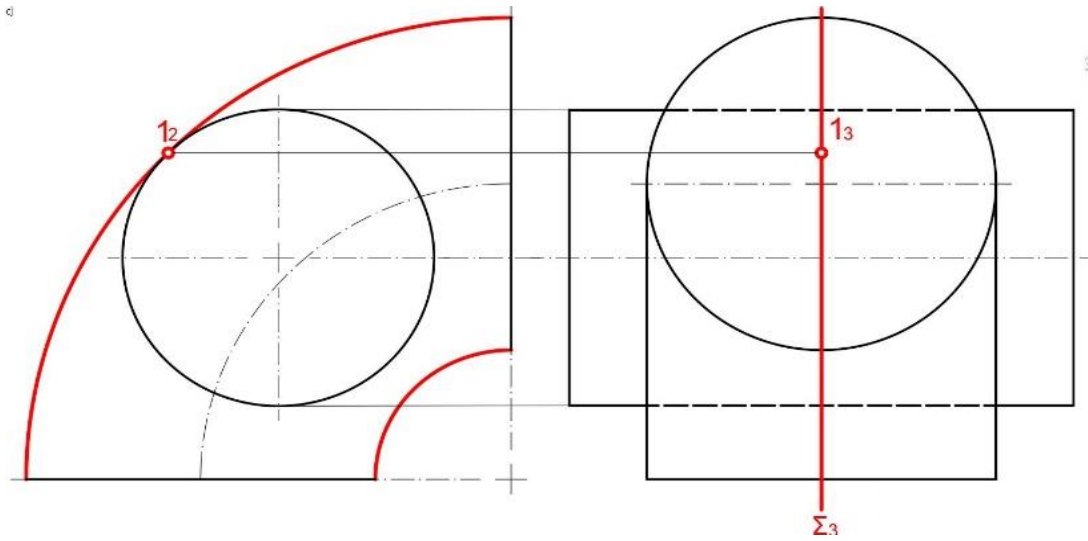


Рис. 81

2. Проводимо площину Δ , яка є дотичною до тору. Фронтальна проекція лінії торкання цієї площини із тором збігається із фронтальною проекцією траєкторії переміщення центру твірної кола тора. Площина Δ перетинає циліндр по колу, фронтальна проекція якого збігається із його фронтальним нарисом (рис. 82). Знаходимо точки 1 і 2, що є точками перетину двох ліній: лінії перетину допоміжної січної площини Δ із циліндром і лінії торкання цієї площини із тором.

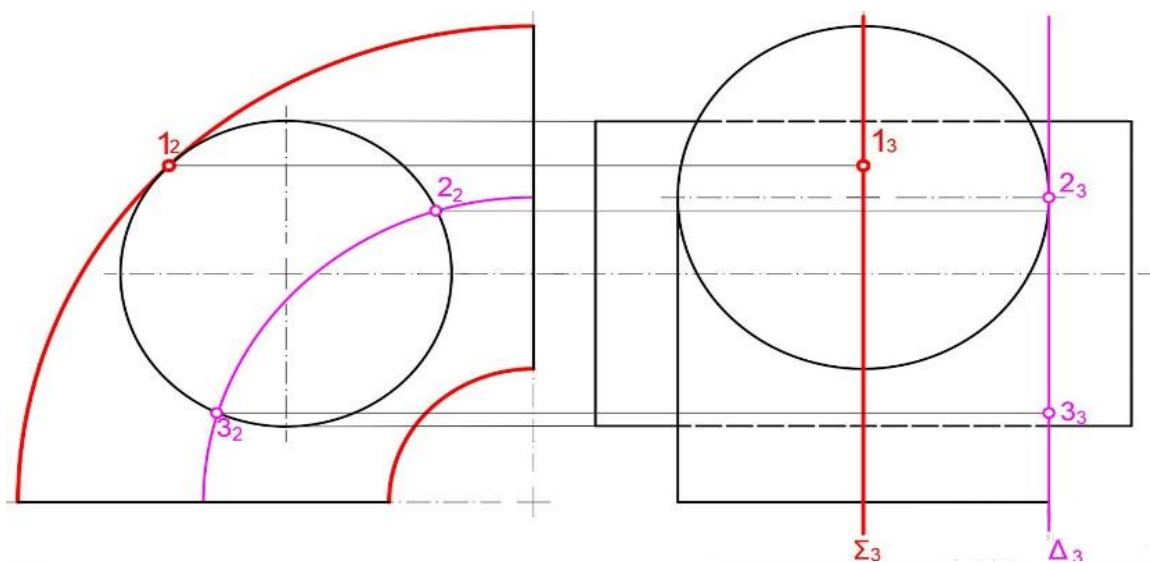


Рис. 82

3. Проводимо допоміжну січну площину Ω , паралельну загальній площині симетрії Σ тора і циліндра (рис. 83). Фронтальна проекція лінії перетину цієї площини із циліндром збігається із фронтальним нарисом. Фронтальні проекції ліній перетину площини Σ із $1/4$ частиною тора мають вигляд двох зелених дуг. Точки перетину цих дуг із фронтальним нарисом циліндра є фронтальними проекціями $4_2, 5_2, 6_2, 7_2$ точок, що належать шуканій лінії перетину заданих поверхонь. Профільні проекції $4_3, 5_3, 6_3, 7_3$ цих точок належать профільному сліду Ω_3 допоміжної січної площини Ω і визначаються за другим законом проекційних зв'язків.

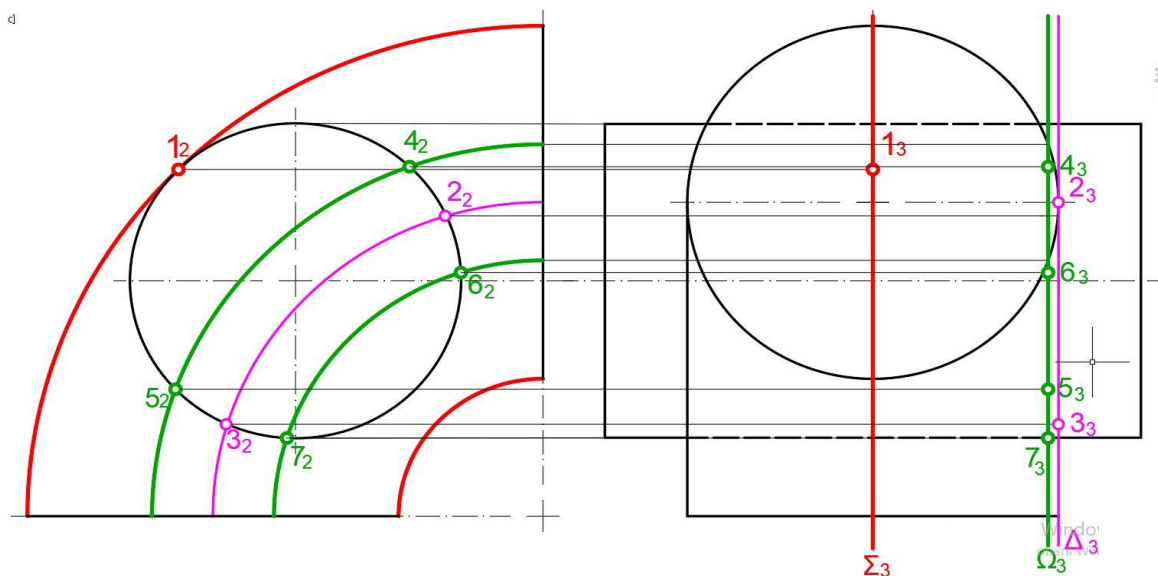


Рис. 83

4. За допомогою допоміжних площин Ψ (рис. 84) і θ (рис. 85) визначаються точки 8, 9, 14, 10, 11, 12, 13, що належать лінії перетину тора із циліндром. Ці площини розсікають тор по концентричних дугах, а циліндр по колах одного і того ж діаметру, фронтальні проекції яких збігаються із фронтальним нарисом циліндра.

5. З'єднуємо знайдені точки плавною кривою із урахуванням їхньої видимості. Оскільки заданий циліндр є фронтально-проєкційною поверхнею, то фронтальна проекція лінії його перетину із тором збігається із фронтальним нарисом цього циліндра. Профільні проекції точок слід з'єднувати так, як вони з'єднані на передній проекції (рис. 86). Враховуючи, що циліндр має наскрізне проникнення у тор, профільна проекція лінії перетину цих поверхонь симетрична відносно профільного сліду Σ_3 допоміжної січної площини Σ (рис. 87).

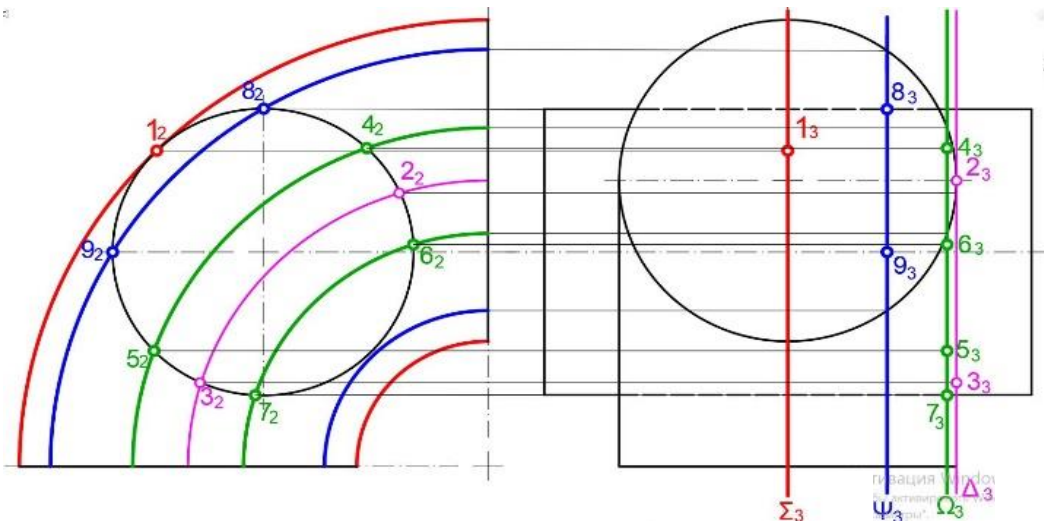


Рис. 84

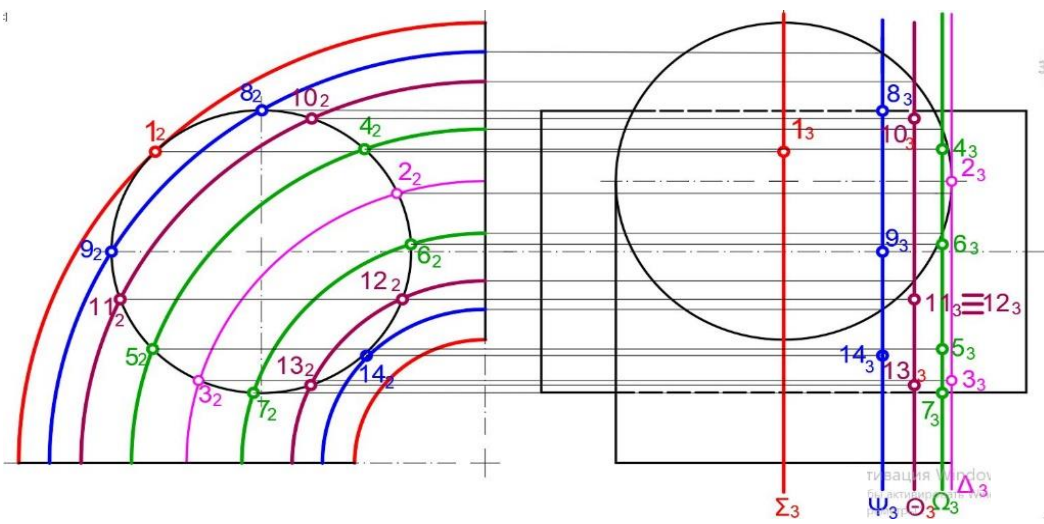


Рис. 85

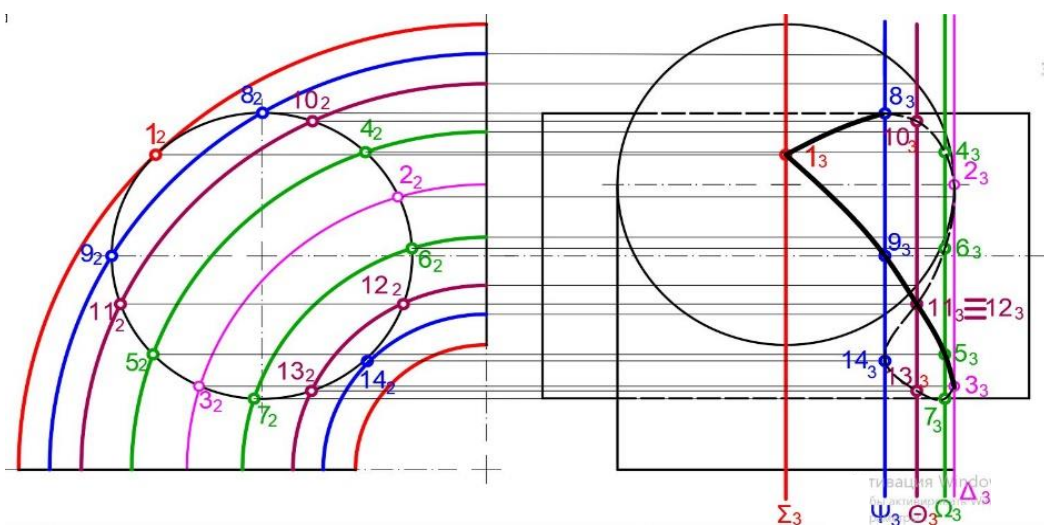


Рис. 86

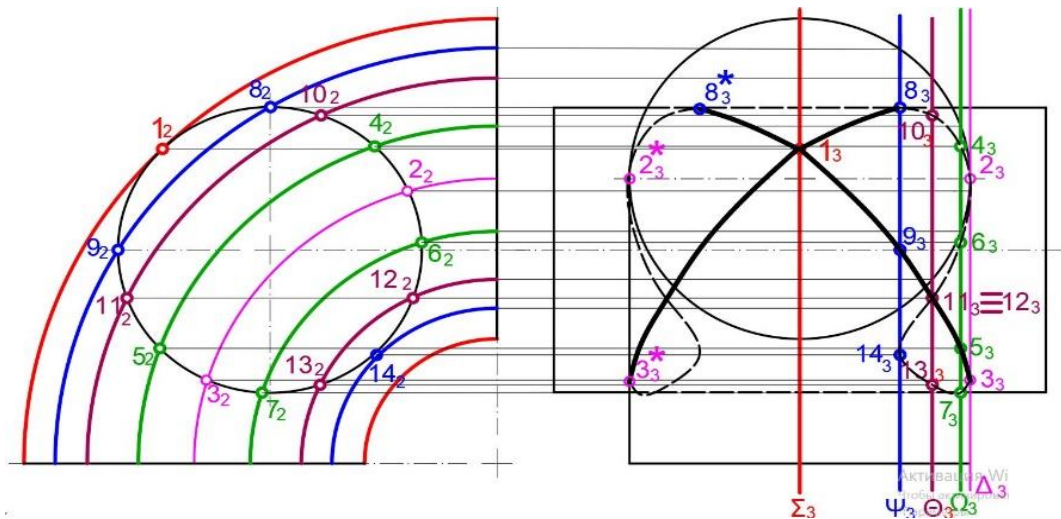


Рис. 87

Із рис. 87 видно, що межами видимості для профільної проекції лінії перетину тора і циліндра є проекції точок 8_3^* , 8_3 , 3_3^* , 3_3 . Оскільки лінія перетину циліндра із тором є лінією, що належить однакою як одній, так і іншій поверхням, то під час визначення видимості її профільної проекції потрібно враховувати її належність до кожної із цих поверхонь окремо.

Будемо вважати, що лінія перетину заданих поверхонь – це лінія, яка належить лише циліндру. Вплив тора на видимість її профільної проекції поки не будемо враховувати. У цьому випадку невидимими будуть профільні проекції тільки точок, які знаходяться на поверхні циліндра, зверненої до профільної площини проекції Π_3 . Фронтальні проекції цих точок 10_2 , 4_2 , 6_2 , 2_2 , 12_2 , 14_2 , 13_2 знаходяться на правій половині фронтального нарису циліндра, а точка 8_2 , що розташована на вертикальній центровій лінії кола, яка є фронтальним нарисом лінії циліндра, визначає межу видимості профільної поверхні лінії перетину.

Будемо вважати, що лінія перетину тора із циліндром належить лише тору. Вплив циліндра на видимість її профільної проекції враховувати не будемо. Поверхня тора складається із двох частин: ділянки поверхні із позитивною кривизною і ділянки із негативною кривизною (рис. 33). Межею між цими ділянками є коло, по якому відбувається торкання площини із тором. У цьому випадку невидимими будуть профільні проекції тільки тих точок, які знаходяться на ділянці поверхні тора, що має негативну кривизну. Фронтальні проекції цих точок 6_2 , 12_2 , 14_2 , 13_2 ,

7_2 розташовані правіше фіолетової дуги 2_23_2 , радіус якої дорівнює радіусу траєкторії переміщення центру твірної кола тора. Точки $2, 2^*, 3, 3^*$ є точками, що визначають межі видимості профільної проекції лінії перетину, розташованої на торі. На рис. 87 видимість профільної проекції лінії перетину тора і циліндра визначено із урахуванням впливу на неї обох поверхонь.

На рис. 88 показано два прямих кругових конуси із паралельними осями, основи яких знаходяться на горизонтальній площині проекції Π_1 . Необхідно побудувати лінію перетину цих конусів:

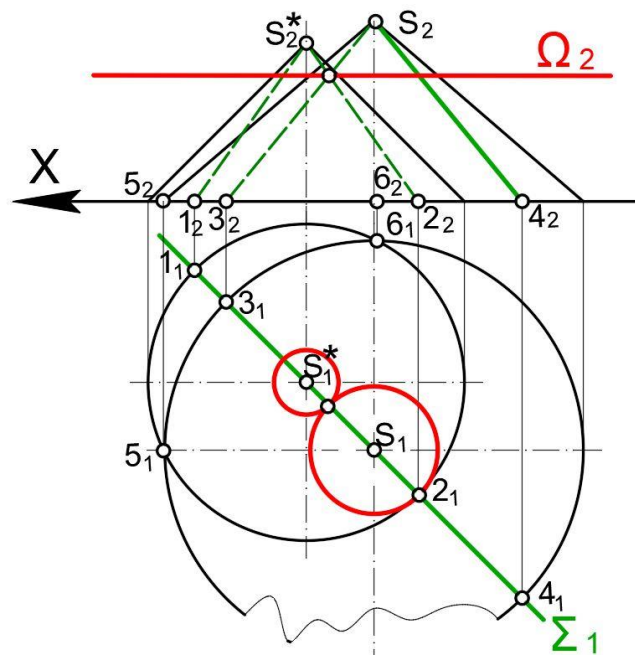


Рис. 88

1. Опорними точками ліній перетину заданих поверхонь є точки перетину їх основ. Фронтальні проекції 5_2 і 6_2 опорних точок знаходяться на осі X (рис. 88).

2. Для знаходження верхньої точки ліній перетину прямих кругових циліндрів проводимо через їх вершини S і S^* допоміжну горизонтально-проєціювальну площину Σ . Ця площина перетинає ці циліндри по двох рівнобедрених трикутниках $1S^*2$ і $3S4$. Точка перетину цих трикутників є верхньою точкою лінії перетину конусів. Якщо через цю точку провести допоміжну січну площину Ω , перпендикулярну їх осям, то вона буде перетинати ці конуси по двох колах, які торкатимуться один одного у цій же самій точці.

3. Для знаходження інших точок, що належать лінії перетину двох конусів, проводимо інші допоміжні січні площини, перпендикулярні їх осям: Σ (рис. 89) і Δ (рис. 90). Кожна із цих площин перетинає конус по двох колах, на перетині яких розташовуються точки, що належать шуканій лінії перетину заданих поверхонь.

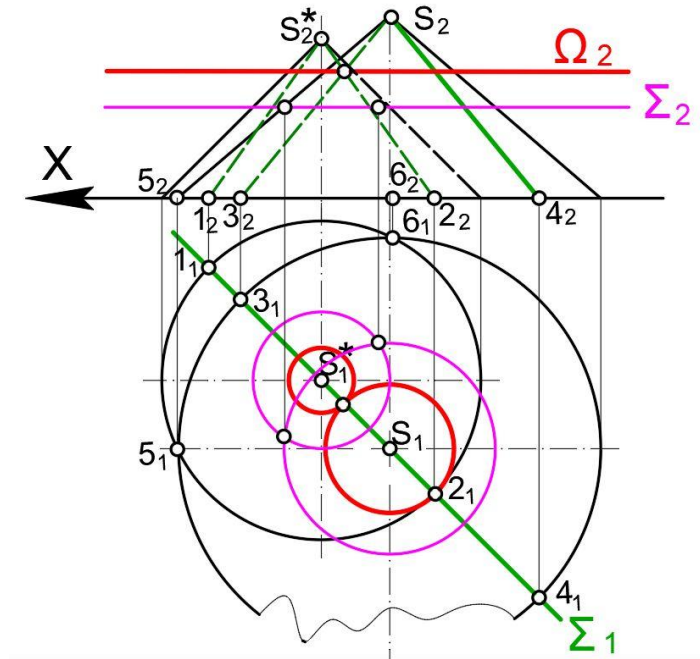


Рис. 89

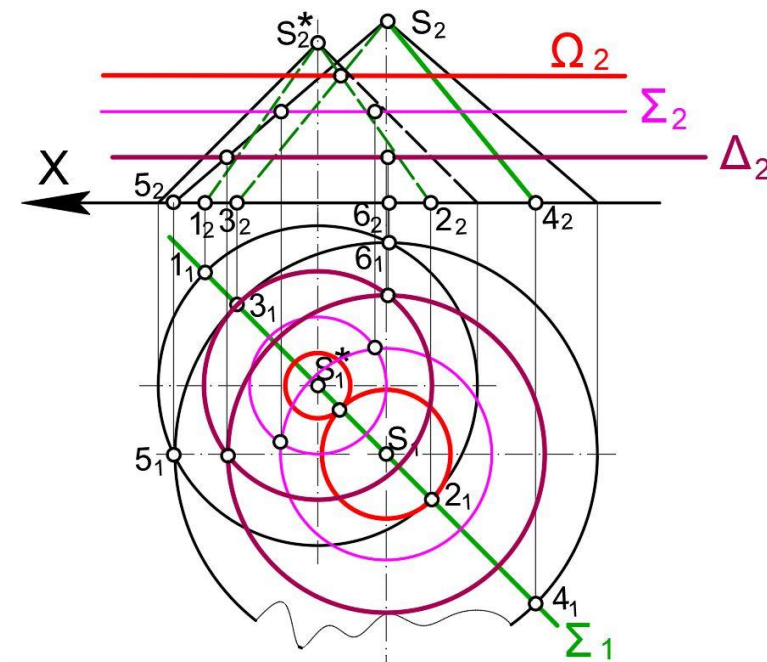


Рис. 90

4. Знайдені точки з'єднують плавною кривою із урахуванням їхньої видимості (рис. 91).

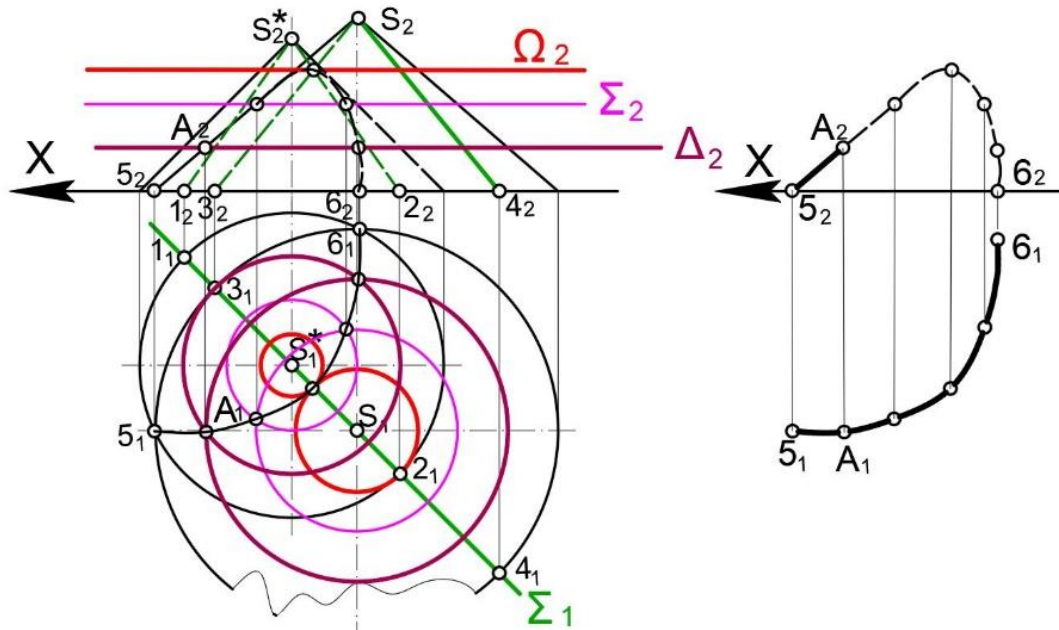


Рис. 91

Горизонтальна проекція лінії перетину буде видимою на всій її довжині. Більшість фронтальної проекції лінії перетину буде невидимою, оскільки вона знаходиться у задній частині великого конуса, тобто на ділянці поверхні, зверненої до фронтальної площини проекції Π_2 . Видимим буде лише невеликий відрізок 5_2A_2 фронтальної проекції лінії перетину, що збігається із фронтальною нарисовою твірною 5_2S_2 великого конуса.

3.5.2. Спосіб допоміжних січних сфер

Із загального способу допоміжних січних поверхонь виділяється спосіб допоміжних сфер, які мають або один загальний центр, або різні центри. У першому випадку маємо так званий спосіб концентричних сфер, а в другому – спосіб ексцентричних сфер.

Спосіб концентричних сфер застосовують для побудови лінії перетину поверхонь обертання довільного виду за умови, що осі поверхонь перетинаються. Крім того, для зручності вирішення осі повинні бути паралельні одній із площин проекції.

Основою способу концентричний сфер є властивість сфери перетинатися із співвісною поверхнею обертання по колу. На рис. 92 показано окремі випадки торкання та перетину сфери із співвісними їй поверхнями обертання: із конусом, циліндром та іншою сферою. У цих прикладах сферою умовно розглядається тенісний м'ячик (кулька), а як співвісні їй поверхні застосовують фужери, що мають конічну, сферичну і циліндричну форми. Із рис. 92 видно, що торкання та перетин тенісної кульки із стінками конічних, циліндричних і сферичних фужерів відбувається по колах, площини яких перпендикулярні їх загальним осям.

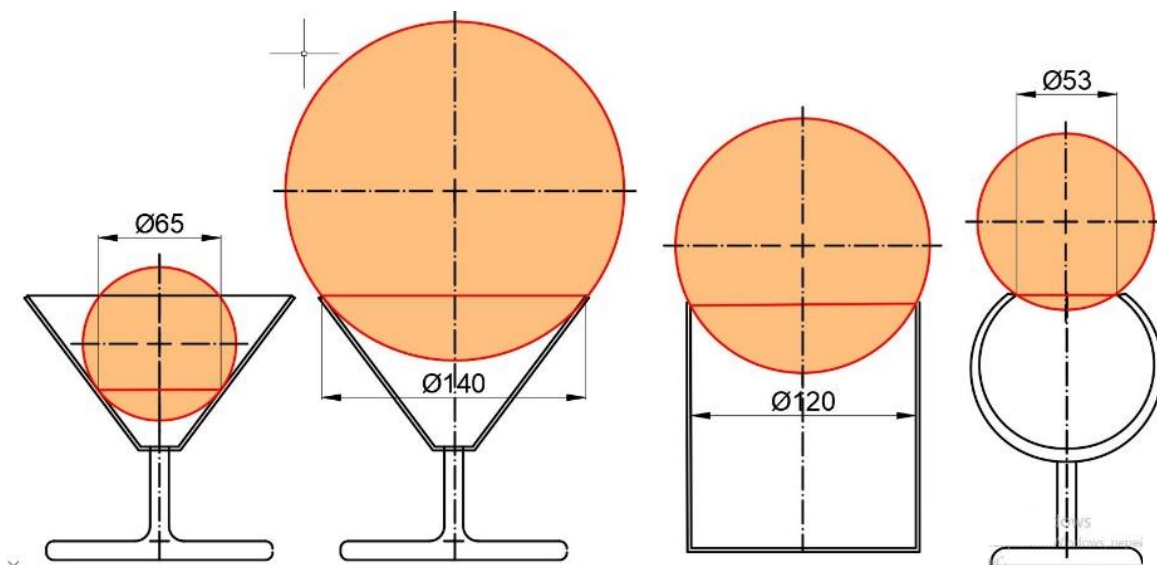


Рис. 92

Оскільки осі перерахованих поверхонь (предметів) паралельні фронтальній площині проєкцій, то ці кола проєктуються на площину Π_2 у вигляді прямолінійних відрізків, обмежених точками перетину нарисів поверхонь.

На рис. 93 – рис. 95 наведено побудову ліній перетину двох поверхонь обертання – прямого кругового конуса і кругового циліндра. Осі цих поверхонь перетинаються і паралельні до фронтальної площини проєкції Π_2 .

Насамперед відзначаємо точки перетину нарисових твірних поверхонь, оскільки ці твірні поверхні розташовані у загальній площині симетрії конуса і циліндра. Отримаємо на фронтальній площині проєк-

цій нарисові точки $1_2, 2_2, 3_2, 4_2$ (рис. 93, рис. 94) і B_2, B_2^*, A_2, A_2^* (рис. 95), горизонтальні проєкції яких знаходимо за належністю.

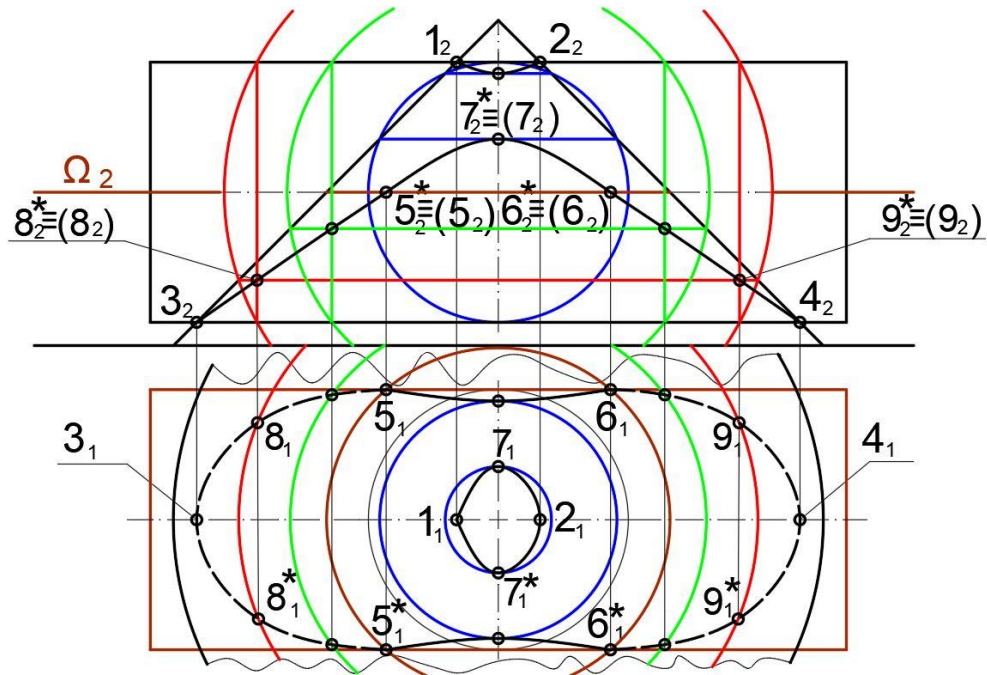


Рис. 93

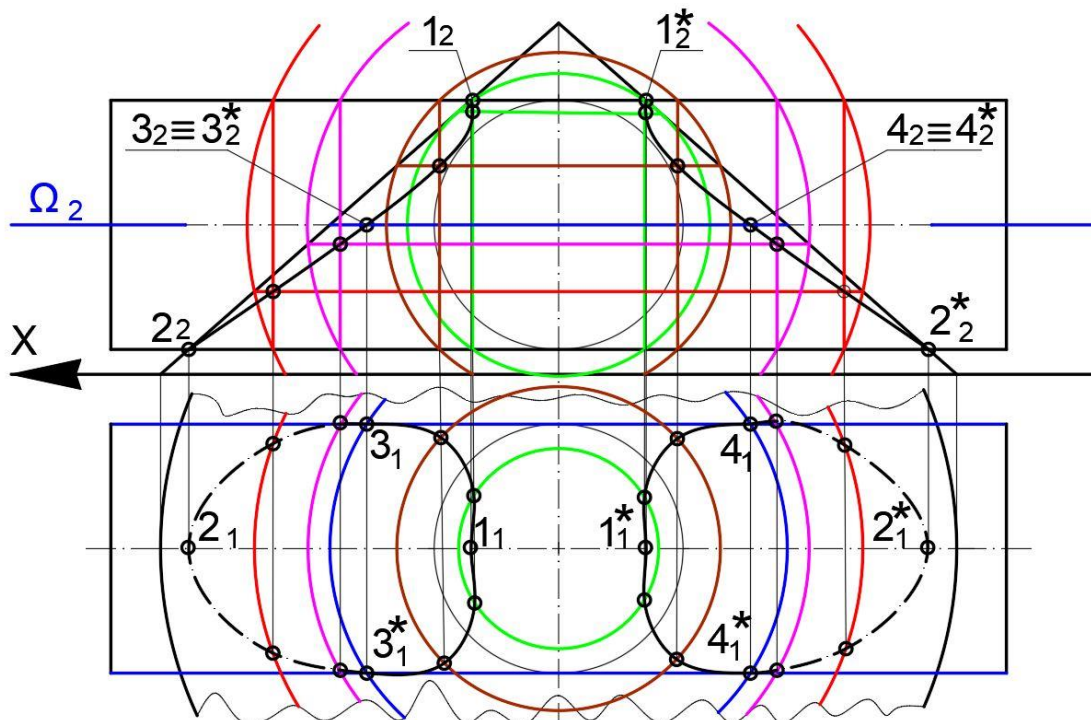


Рис. 94

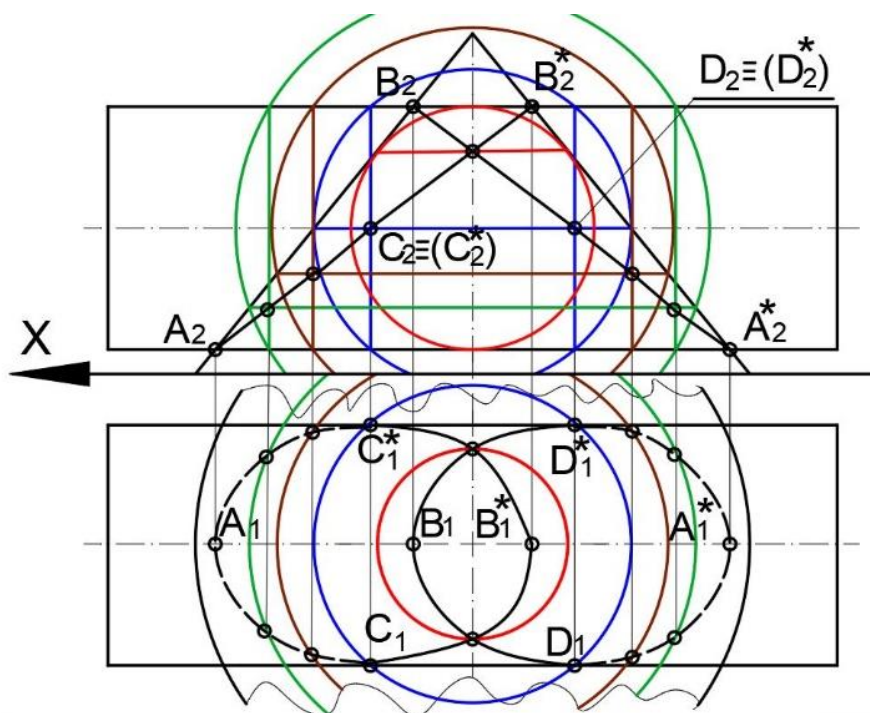


Рис. 95

Центр допоміжних січних сфер вибирається у точці перетину осей конуса і циліндра. Визначимо розміри радіусів найбільшої і найменшої сфер, придатних для вирішення цього завдання. Очевидно, максимальний радіус допоміжної січної сфери не може бути обраний більше відстані від фронтальної проекції центру сфери до найбільш віддаленої точки перетину фронтальних нарисів 4_2 (рис. 93), 2_2 (рис. 94), A_2 (рис. 95).

Максимальним радіусом сфери буде більший із радіусів двох сфер, вписаних у поверхні, що перетинаються. Приймаючи радіуси допоміжних січних сфер менше максимального і більше мінімального радіусів, отримаємо сферичні поверхні, які придатні для вирішення даних завдань.

Побудуємо довільну сферу із центру, фронтальна проекція якого буде точкою перетину фронтальних проекцій осей конуса і циліндра. Фронтальна проекція цієї сфери виглядатиме у вигляді кола, центр якого знаходиться у точці перетину фронтальних проекцій осей заданих поверхонь обертання. Ця сфера є співвісною із конусом і циліндром, тому вона розсікає їх по колу. Фронтальні проекції цих кіл мають вигляд прямолінійних відрізків, кінці яких є точками перетину фронтального нарису сфери із фронтальними нарисовими твірними конуса і циліндра.

Проекції точок перетину цих відрізків належать обом поверхням, тобто проекції – лінії перетину. Щоб побудувати горизонтальні проекції цих точок, необхідно провести горизонтальну проекцію кола перетину допоміжної січної сфери із конусом і за допомогою лінії зв'язку визначити ці точки.

Змінюючи радіус допоміжної січної сфери, можна отримати достатню кількість точок лінії перетину.

Крім того, слід визначити горизонтальні проекції точок лінії перетину, що належать горизонтальному нарисові циліндра. Ці точки є межами видимості горизонтальної проекції лінії перетину. Їх можна визначити точно та наближено. Розглянемо спочатку наближений спосіб визначення цих точок. Спочатку потрібно визначити їх на фронтальній проекції як точки $5_2, 5_2^*, 6_2, 6_2^*$ (рис. 93), $3_2, 3_2^*, 4_2, 4_2^*$ (рис. 94), C_2, C_2^*, D_2, D_2^* (рис. 95) перетину фронтальної проекції лінії перетину з фронтальними проекціями твірних горизонтального нарисові циліндра, які в даному випадку збігаються з фронтальною проекцією осі циліндра, а потім знайти за приналежністю горизонтальні проекції цих точок. Фронтальна проекція лінії перетину складається із подвійних точок, оскільки видима і невидима її частини збігаються.

Для точного визначення горизонтальних проекцій точок, що визначають видимість горизонтальної проекції лінії перетину конуса і циліндра, необхідно через вісь циліндра провести допоміжну січну площину Ω , паралельну площині Π_1 .

Горизонтальні проекції лінії перетину площини із заданими поверхнями є коло і прямокутник (горизонтальний нарис циліндра) (рис. 93, рис. 94). Точки перетину прямокутника із колом визначатимуть видимість горизонтальної проекції лінії перетину конуса і циліндра.

Видимими будуть горизонтальні проекції тих точок, які знаходяться вище площини Ω , тобто у верхній частині циліндра.

Із аналізу рис. 93 – рис. 95 можна зробити такі висновки:

1) фронтальні проекції ліній перетину двох поверхонь обертання, що мають загальну площину симетрії, яка паралельна площині Π_2 , увігнуті у бік найбільш "товстої" поверхні, в яку вписується мінімальна допоміжна січна сфера;

2) якщо дві поверхні обертання описано навколо загальної сфери (рис. 95), то їхня лінія перетину розпадається на дві плоскі фігури – на два еліпси.

На рис. 96 наведено побудову лінії перетину тора (кільця) із прямим конусом, які мають загальну площину симетрії, паралельну фронтальній площині проєкції Π_2 . Насамперед відзначаємо точки перетину нарисових ліній тора і конуса. Для побудови довільних точок, що належать лінії перетину заданих поверхонь, неможливо скористатися способом концентричних сфер, оскільки осі конуса і тора не перетинаються, а схрещуються під кутом 90° . Тому слід використати ексцентричні сфери. Умови побудови лінії перетину конуса із циліндром, на підставі методу концентричних сфер, показано на рис. 97.

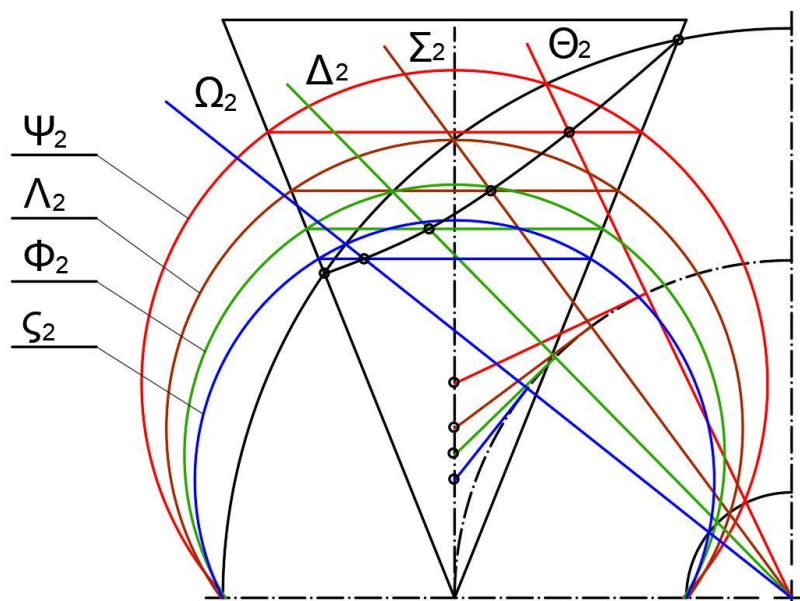


Рис. 96

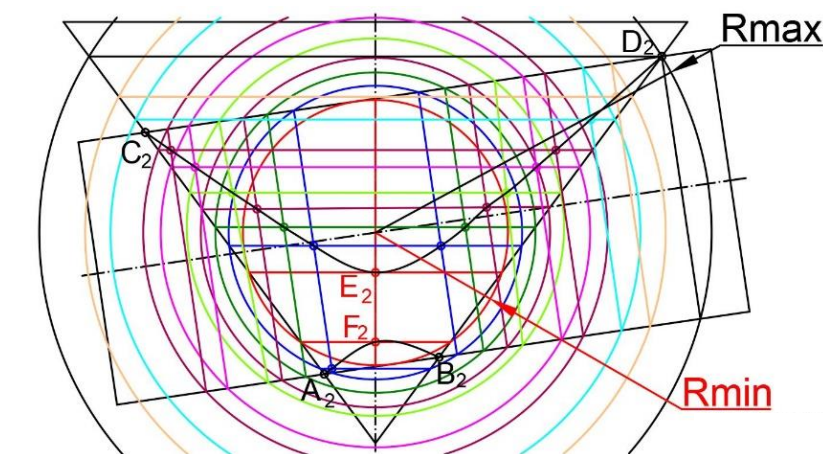


Рис. 97

Якщо розбити кільце на окремі циліндри малої висоти: червоний, зелений (рис. 98), синій, коричневий (рис. 99) тощо, то це кільце буде схоже на вентиляційне відведення (коліно) із кутом повороту 90° . Відводи призначено для зміни траєкторії руху повітряного потоку на необхідний кут. Застосування вентиляційних відводів дозволяє під час монтажу привести систему вентиляції у відповідність до плану приміщення, забезпечуючи трубам можливість обходу перешкод.

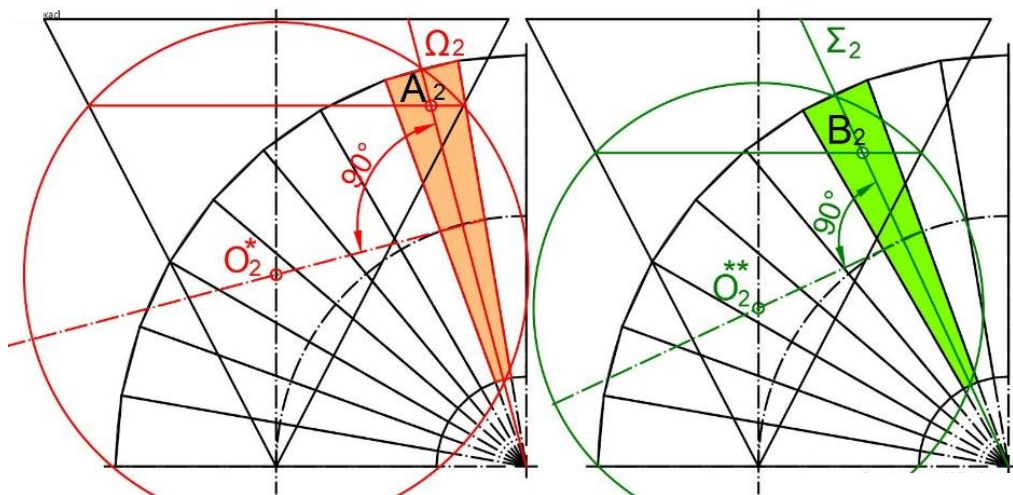


Рис. 98

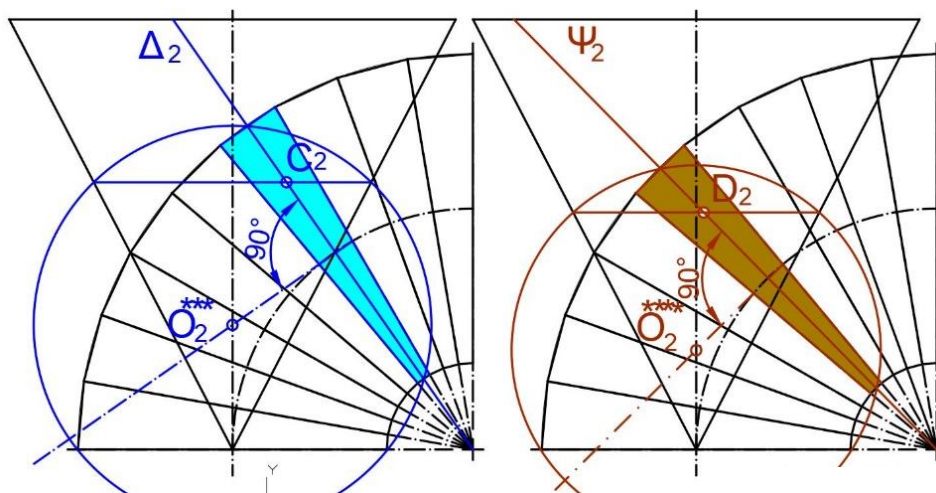


Рис. 99

Якщо вважати, що кільце (тор) складається із окремих циліндрів малої висоти, то перетин конуса із тором можна було б звести до побудови ліній перетину конуса із окремо взятими циліндрами. У цьому випадку для побудови кожної лінії можна було б використати спосіб кон-

центричних сфер. Центр концентричних сфер знаходиться у точці перетину осей конуса і окремо взятого маленького циліндра. На рис. 98 і рис. 99 показано осі цих циліндрів, які проведено перпендикулярно до їх нормальних перетинів. Січні площини Ω , Σ , Δ , ψ тощо, що утворюють нормальні перетини червоного, зеленого, синього, коричневого та ін. циліндрів, перпендикулярні прямолінійним твірним цих циліндрів. На рис. 97 показано умови побудови лінії перетину конуса із циліндром на підставі методу концентричних сфер.

Подібні побудови довелося б здійснювати для кожної циліндричної ділянки кільця. Лінія перетину конуса із кільцем складалася б із ліній перетину конуса із циліндрами, що утворюють це кільце. Але б, навіть, після проведення всіх цих трудомістких побудов, ми отримали б дуже наближену лінію перетину. Чим більше циліндрів задіяно у формуванні кільця (тобто, чим менше їх висота), тим точніше буде лінія перетину.

Січні площини Ω , Σ , Δ , ψ тощо проходять через вісь тора, тому розсікають його по колу. Вважатимемо ці кола за нескінченно малі циліндри, висота яких близька до нуля. Осями цих циліндрів (кіл) будуть прямі, що проходять через центри кіл і перпендикулярні січним площинам Ω , Σ , Δ , ψ тощо, у яких вони знаходяться. Центри допоміжних січних сфер знаходяться у точках перетину осей нескінченно малих циліндрів (кіл) із віссю заданого конуса. Ці точки не збігаються. Отже сфери будуть ексцентричними. На рис. 98 та рис. 99 показано знаходження точок перетину нескінченно малих циліндрів (кіл), що утворюють кільце із конусом (точки А, В, С, D). Із центрів O_2^* , O_2^{**} , O_2^{***} , O_2^{****} проводимо фронтальні нариси допоміжних січних сфер таким чином, щоб кола, які ми приймаємо за нескінченно малі циліндри, не знаходилися на цих сферах. Тобто фронтальні нариси допоміжних січних сфер повинні торкатися кінців прямолінійних відрізків, які є фронтальними проекціями кіл, які ми приймаємо за циліндри нескінченно малої висоти. Точки A_2 , B_2 , C_2 , D_2 є точками перетину цих відрізків із іншими відрізками, що є фронтальними проекціями кіл, утворених у результаті перетину допоміжних січних сфер із заданим конусом. Знайдені точки необхідно з'єднати плавною кривою.

На рис. 100 показано побудову лінії перетину тора із зрізаним прямим круговим конусом. Задані поверхні мають загальну площину симетрії, паралельну фронтальній площині проекцій Π_2 . Завдання вирі-

шується шляхом допоміжних ексцентричних сфер. Рішення аналогічне рішенню попереднього завдання.

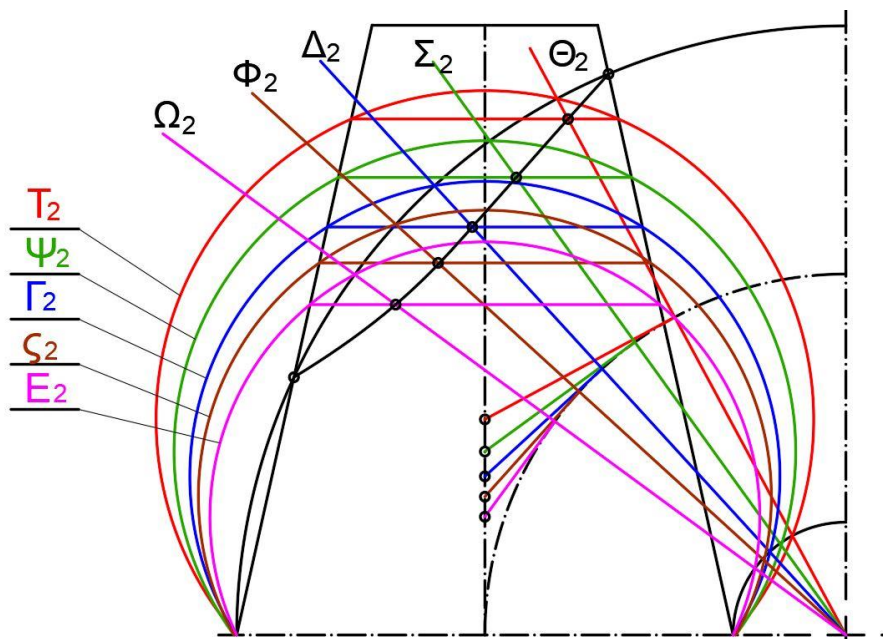


Рис. 100

На рис. 101 показано побудову лінії перетину двох поверхонь обертання, що мають загальну площину симетрії. Осі поверхонь обертання перетинаються під прямим кутом. Знаходження точок, що належать лінії перетину заданих поверхонь, здійснювалося методом концентричних сфер.

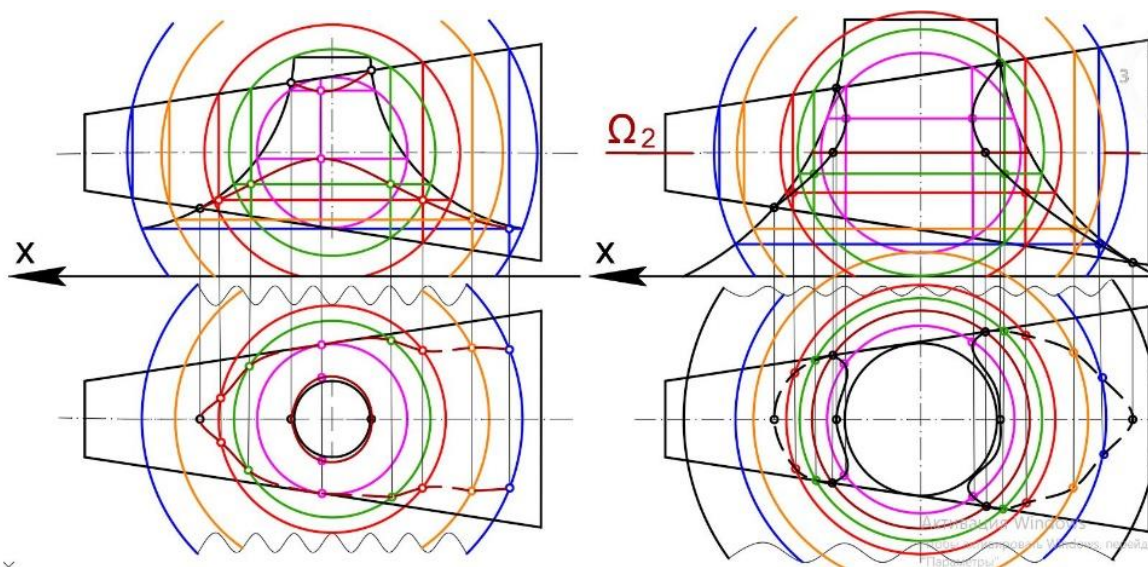


Рис. 101

Рис. 101 складається із двох частин. У лівій частині рисунка мінімальна допоміжна січна сфера вписана у поверхню обертання із горизонтальною віссю, тому фронтальні проекції перетину ліній увігнуті у напрямку цієї осі. У правій частині рисунка мінімальна січна сфера торкається поверхні обертання із вертикальною віссю, тому у цій осі вигнуті фронтальні проекції ліній перетину заданих поверхонь.

Розв'язання завдань зводилося до наступного: будувалися довільні січні сфери із центру, що знаходиться у точці перетину осей заданих поверхонь обертання. Ці сфери співвісні із заданими поверхнями, тому розтинають їх по колу. Фронтальні проекції цих кіл виродилися у вигляді прямолінійних відрізків. Проекції точок перетину цих відрізків належать обом заданим поверхням, тобто належать проекціям їхньої лінії перетину. Щоб побудувати горизонтальні проекції цих точок, необхідно провести горизонтальні проекції кіл, утворених у результаті перетину сфер із заданою поверхнею обертання, що має вертикальну вісь, і за допомогою першого закону проекційного зв'язку визначити ці проекції.

У правій частині рисунка задані поверхні обертання перетинаються двома замкнутими просторовими кривими. У лівій частині рисунка одна із ліній перетину (нижня) розімкнена. Це пояснюється тим, що фронтальні нарисові твірні заданих поверхонь обертання не перетинаються біля більшої основи зрізаного конуса.

Межею видимості горизонтальної проекції лінії перетину є горизонтальна площина рівня, яку проведено через вісь усіченого конуса. Вона ділить конус на дві частини: верхню і нижню. Лінію перетину або її частину, що знаходиться вище за цю площину (у верхній частині конуса), на горизонтальній проекції буде видно, а якщо нижче (у нижній частині конуса) – то не буде видно.

На рис. 102 показано побудову лінії перетину двох прямих кругових конусів із осями, що перетинаються, паралельними фронтальній площині проекцій. Завдання вирішується із застосуванням методів концентричних сфер.

Центр допоміжних січних сфер S знаходиться у точці перетину осей заданих конусів. Мінімальна сфера, яка дозволяє встановити знаходження точок лінії перетину заданих поверхонь, вписана у конус із вертикальною віссю. Із двох заданих конусів цей конус є найбільш "товстим", тому фронтальна проекція лінії перетину має бути увігнута у його бік.

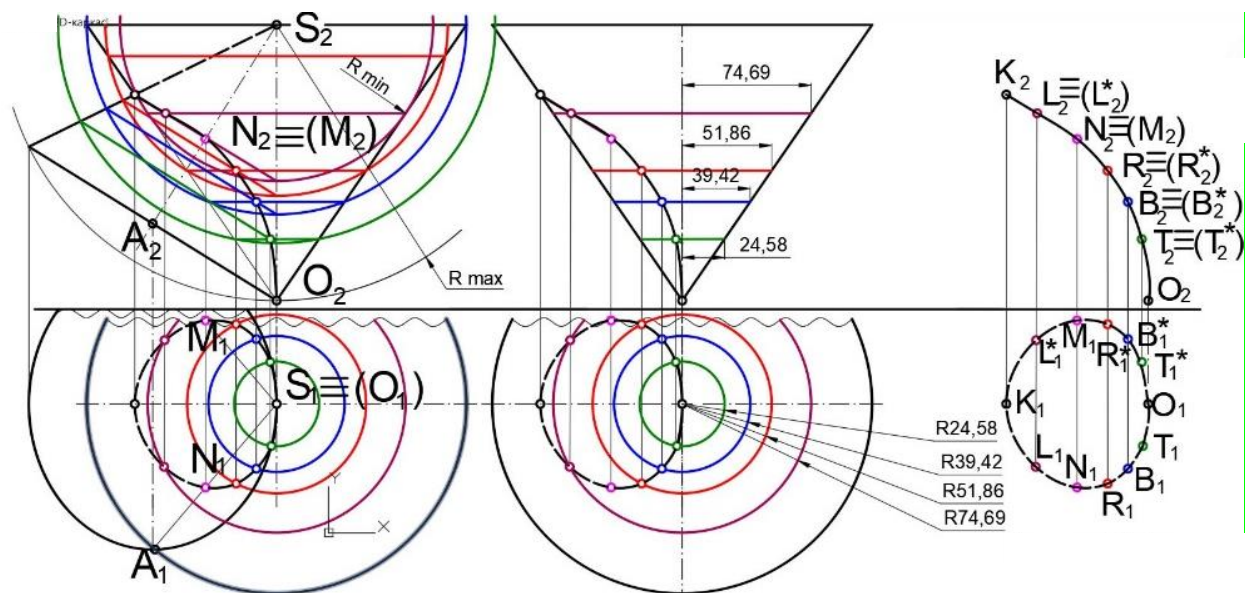


Рис. 102

Горизонтальна проекція лінії перетину двох конусів невидима, оскільки вона перекривається основою вертикального конуса.

На рис. 103 показано побудову лінії перетину двох сфер. Будь-які дві сфери повинні перетинатися по колу. Сфери, зображені на рис. 103, перетинаються по колу, яке на горизонтальну та фронтальну координатні площини проєціюється у вигляді прямолінійних відрізків, $A_1^*A_1$ і K_2L_2 , перпендикулярних до осі X . Таке положення проєкцій відносно осі X указує на те, що лінія перетину двох заданих сфер (кіл) знаходиться у площині, паралельній профільній площині проєкцій Π_3 . Використовуючи метод концентричних сфер, знайдено окремі точки, що належать лінії перетину двох сфер. Під час знаходження цих точок має місце одна мета: продемонструвати можливості методу концентричних сфер. Насправді, не було жодної потреби у знаходженні цих точок. Для побудови горизонтальної проєкції лінії перетину достатньо було з'єднати прямою лінією точки перетину горизонтальних нарисів заданих сфер, тобто провести відрізок $A_1^*A_1$.

Для побудови фронтальної проєкції лінії перетину необхідно було з'єднати прямою точки перетину фронтальних нарисів сфер, тобто провести відрізок K_2L_2 .

Для знаходження точок, що належать лінії перетину заданих сфер, слід провести 4 концентричні допоміжні січні сфери. Ці сфери перетинають задані сфери за колами, фронтальні проєкції яких мають вигляд прямолінійних відрізків. Ці відрізки являють собою хорди фронт-

тальних нарисів заданих сфер, кінці яких є точками перетину фронтальних нарисів допоміжних сфер із фронтальними нарисами заданих сфер. Знаходяться точки перетину цих відрізків (хорд). Для знаходження горизонтальних проекцій точок лінії перетину необхідно спочатку провести горизонтальні проекції кіл, на яких вони знаходяться. Радіуси цих кіл дорівнюють розмірам півхорд (рис. 103).

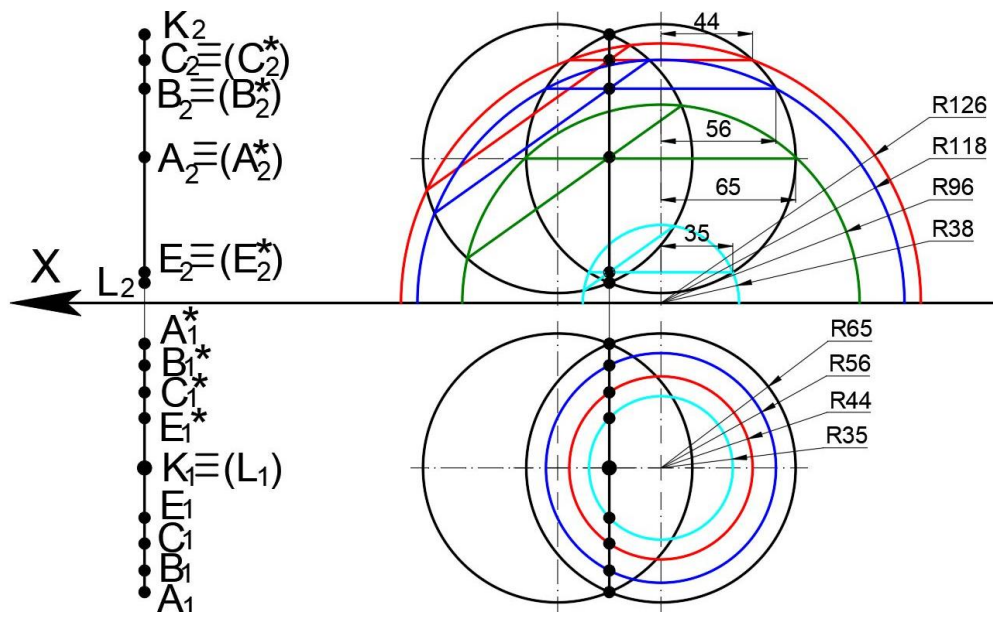


Рис. 103

На рис. 104 показано побудову лінії перетину прямого кругового конуса із сферою. Ці поверхні мають загальну площину симетрії, паралельну до фронтальної площини проєкцій. Завдання вирішене методом концентричних січних сфер. Центр січних сфер знаходиться на вершині заданого конуса. Допоміжні січні сфери перетинають задані поверхні по колу, фронтальні проєкції яких приймають вигляд прямолінійних відрізків – хорд, кінці яких є точками перетину фронтальних нарисів допоміжних концентричних сфер із фронтальними нарисами заданих поверхонь. Знаходяться точки перетину цих хорд. Горизонтальні проєкції цих точок знаходяться за належністю до кіл, які розміщені на прямому круговому конусі. Знайдені точки з'єднуються плавними кривими. Фронтальні та горизонтальні проєкції лінії перетину є видимими.

На рис. 105 – рис. 109 наведено побудову лінії перетину кільця із конічною поверхнею, що мають загальну фронтальну площину симетрії.

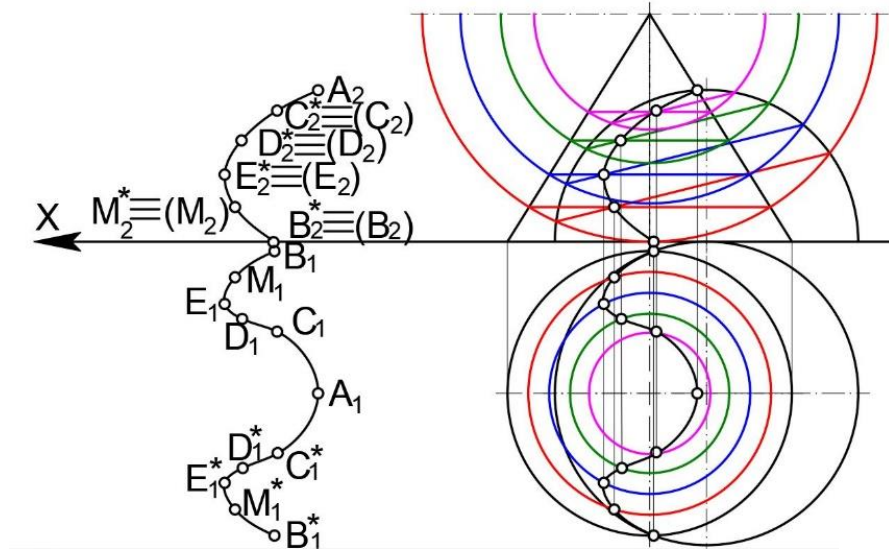


Рис. 104

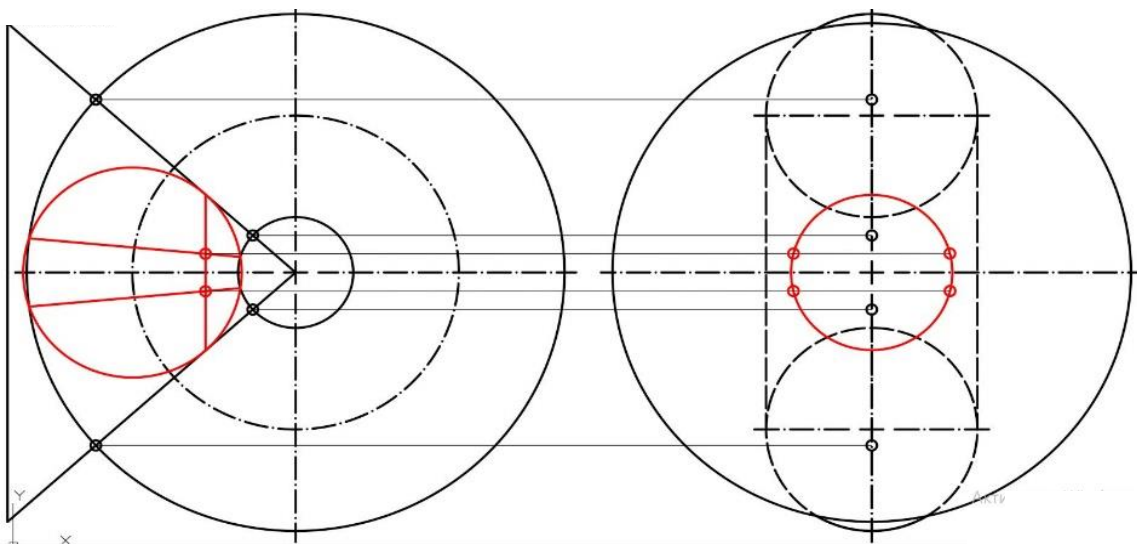


Рис. 105

Насамперед відзначаємо точки перетину фронтальних нарисів прямого кругового конуса і тора (рис. 105). Профільні проекції цих точок знаходяться на профільному сліді загальної площини симетрії заданих поверхонь та визначаються за другим законом проекційних зв'язків. Проводимо фронтальний нарис найменшої допоміжної січної сфери, що торкається фронтальних нарисових твірних конуса. Центр цього кола (фронтального нарису сфери) знаходиться у точці перетину фронтальних проекцій осі конуса і середньої лінії кільця. Допоміжна січна сфера торкається конуса по колу, площина якого перпендикулярна

його осі, і перетинається із кільцем по двох колах, площини яких перетинаються по осі тора (рис. 105).

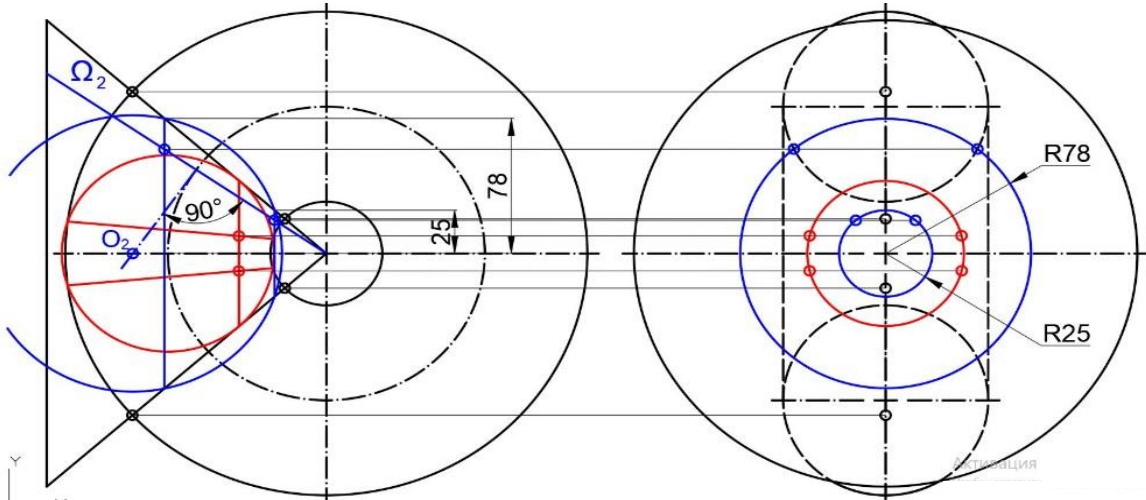


Рис. 106

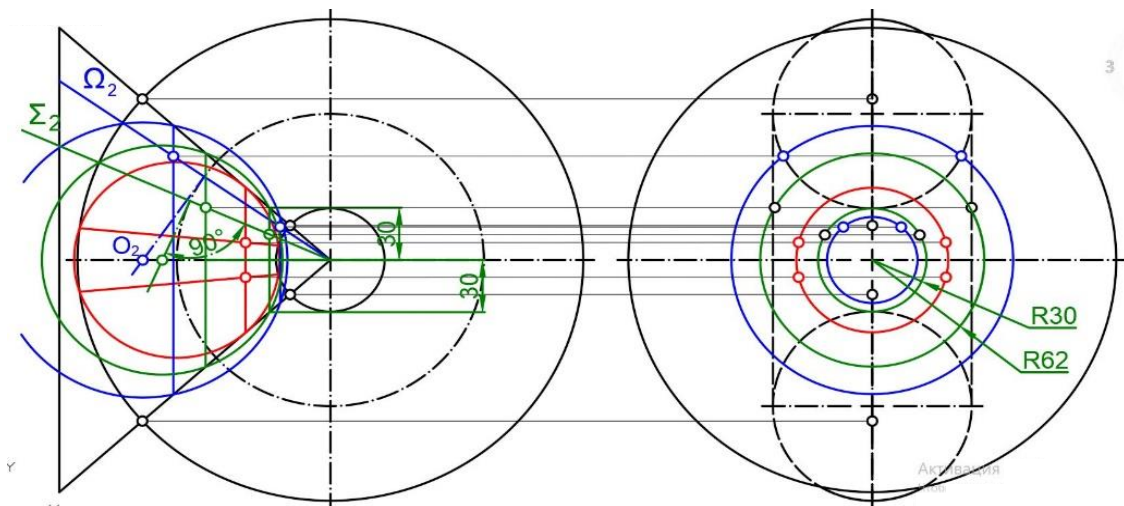


Рис. 107

Фронтальна проекція лінії торкання допоміжної сфери із конусом має вигляд прямолінійного відрізка, паралельного осі Z. Кінці цього відрізка є точками торкання фронтального нарису допоміжної січної сфери із фронтальними нарисовими твірними конуса. Фронтальні проекції ліній перетину мінімальної січної сфери із кільцем мають вигляд прямолінійних відрізків, кінці яких є точками перетину фронтальних нарисових ліній конуса і допоміжної сфери. Знаходяться точки перетину цих трьох кіл (ліній торкання та перетину сфери із заданими поверхнями).

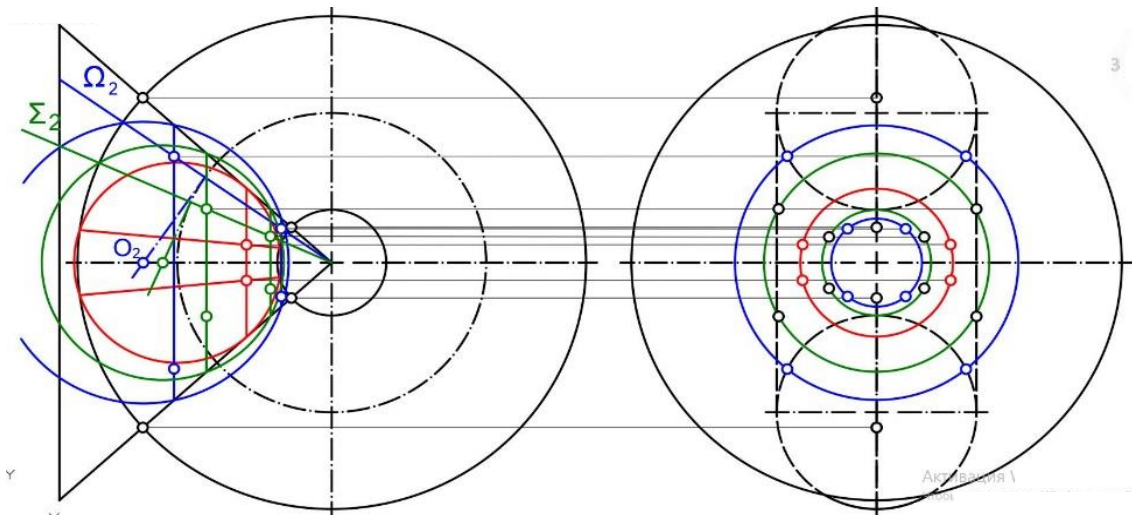


Рис. 108

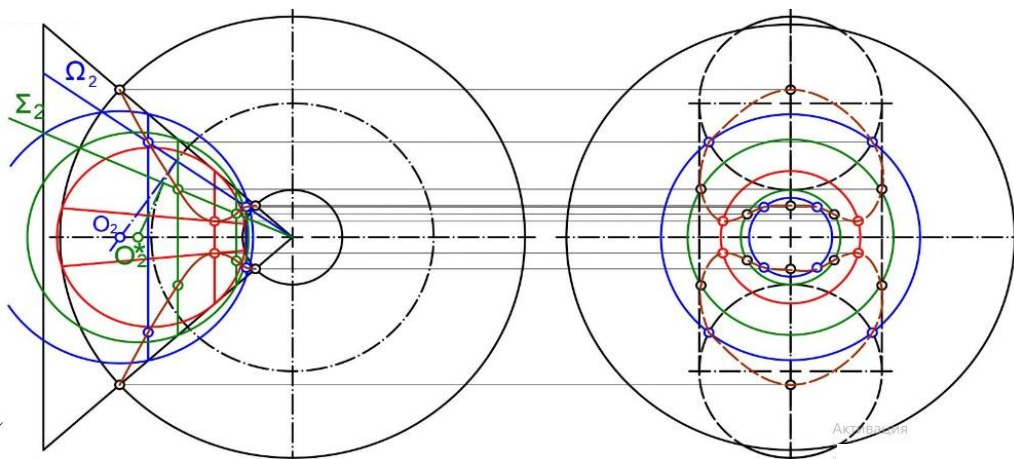


Рис. 109

Профільні проекції цих точок визначаються за другим законом проекційного зв'язку. Вони знаходяться на профільній проекції кола, що є лінією дотику допоміжної сфери із конусом.

Для побудови довільних точок, що належать лінії перетину конуса і кільця, слід використати спосіб ексцентричних сфер. Тому на рис. 106 проводимо через вісь кільця допоміжну фронтально-проеціювальну площину, задаючи її фронтальним слідом Ω_2 . Ця площина здійснить розтин кільця по колу, передньою проекцією центру якого буде точка перетину сліду Ω_2 із передньою проекцією середньої лінії кільця. Проведемо із цієї точки перпендикуляр до площини отриманого кола (до фронтального сліду площини Ω_2). Цей перпендикуляр, будучи дотичною середньої лінії кільця, перетинає у точці O_2 фронтальну проекцію осі конуса. Приймавши цю точку за центр, проводимо сферу так, щоб

на ній лежало коло, яке належить площині Ω . Побудована допоміжна сфера перетинає конус та кільце по колу, у перетині яких будуть отримані точки шуканої лінії перетину (рис. 106). Для знаходження інших точок, що належать лінії перетину кільця і конуса, проводимо ще одну фронтально-проєціювальну допоміжну площину Σ , що проходить через вісь кільця. Центр нової допоміжної січної сфери теж перебуватиме на осі конуса, але не співпадатиме із центром допоміжної січної сфери, яку використано на попередньому етапі вирішення цього завдання (рис. 107).

Точки, що належать шуканій лінії перетину, матимуть симетричне розташування відносно загальної площини симетрії заданих поверхонь (рис. 108).

З'єднуємо знайдені точки плавними лініями із урахуванням їхньої видимості. Фронтальні проєкції цих ліній будуть видимими, оскільки їх затуляє основа прямого кругового конуса (рис. 109).

3.5.3. Взаємний перетин багатогранників

Лінія перетину поверхонь двох багатогранників – деяка просторова замкнута ламана лінія.

Для того щоб побудувати лінію перетину двох багатогранників, необхідно побудувати точки перетину ребер першого багатогранника із гранями другого і ребер другого багатогранника із гранями першого. Отримані точки необхідно з'єднати так, щоб пара з'єднаних точок знаходилася на одній і тій же грані першого багатогранника і, водночас, на одній і тій же грані другого багатогранника.

На рис. 110 наведено побудову лінії перетину тригранної піраміди із призми. На площині Π_1 будуються проєкції точок перетину ребер піраміди із гранями призми. Фронтальні проєкції точок визначаються, відповідно. Визначаються проєкції точок перетину ребра призми із гранями ABS і CBS піраміди.

Для цього через горизонтальні проєкції ребра призми і вершини піраміди S_1 проводиться горизонтальний слід Σ_1 допоміжної горизонтально-проєціювальної січної площини Σ_1 . Знаходяться лінії перетину площини із гранями ABS і CBS піраміди (два прямолінійних відрізка, що з'єднують вершину піраміди S із двома точками, що знаходяться на трикутній основі ABS піраміди). Знаходяться точки перетину знайдених

ліній із ребром призми, через яку було проведено допоміжну площину Σ . Лінії перетину призми із пірамідою приймають вигляд замкненої ламаної лінії.

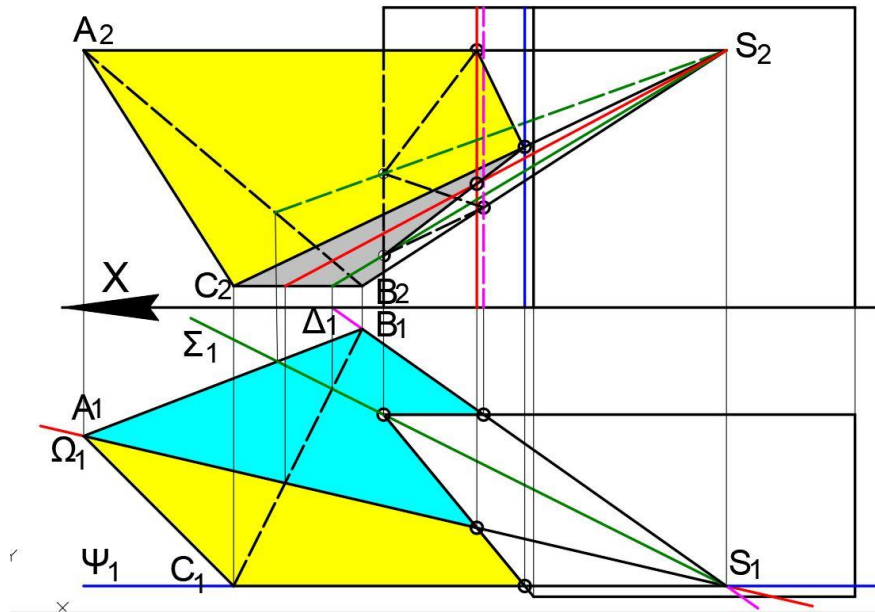


Рис. 110

3.5.4. Спосіб площин, що обертаються

Цей спосіб застосовують для побудови лінії перетину призматичних і пірамідальних поверхонь. Для простоти і точності графічних побудов застосовують допоміжні площини – посередники, що перетинають обидві поверхні за прямолінійними твірними.

На рис. 111 показано побудову лінії перетину тригранної похилої піраміди із тригранною похилою призмою. Основи заданих поверхонь знаходяться у горизонтальній площині проєкцій. Для того, щоб допоміжна січна площина (посередник) перетинала піраміду за твірними, вона повинна проходити через її вершину, а горизонтальний слід цієї площини повинен перетинати або торкатися основи піраміди.

Для того, щоб площина – посередник перетинала призму за твірними, вона має бути паралельна її ребрам, а горизонтальний слід цієї площини повинен перетинати або торкатися основи призми.

Для того щоб допоміжна січна площина перетинала призму і піраміду за їх твірними, вона повинна проходити через пряму, що торкається вершини піраміди і паралельну ребрам призми. На рис. 111 такою прямою є пряма SE. Її проєкції паралельні проєкціям ребер приз-

ми. Горизонтальним слідом цієї проєкції є точка E. Через горизонтальний слід прямої SE – (через проєкцію E₁) проведено горизонтальні сліди зеленої, синьої і червоної допоміжних січних площин. Всі ці площини проходять через пряму SE і утворюють пучок площин, лінія перетину яких (пряма SE) називається *віссю пучка*.

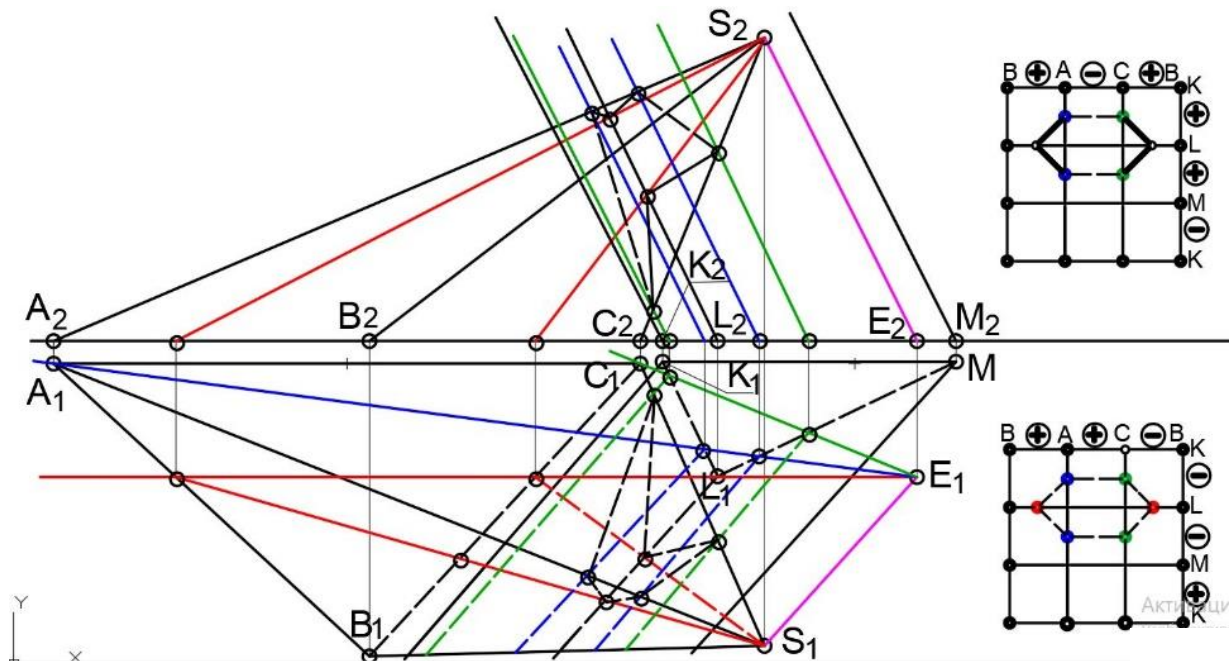


Рис. 111

Розглянемо зелену допоміжну січну площину, горизонтальний слід якої проходить через горизонтальну проєкцію C₁ вершини основи піраміди C і перетинає проєкції K₁L₁ і L₁M₁ сторін KL і LM основи призми.

Зелена смужка буде торкатися піраміди уздовж ребра CS і перетинати призму за двома зеленими твірними. Точки перетину цих твірних із ребром CS піраміди належать шуканій лінії перетину заданих поверхонь.

Розглянемо червону допоміжну січну площину, горизонтальний слід якої проходять через горизонтальну проєкцію L₁ вершини L основи призми і перетинає горизонтальні проєкції C₁B₁ та A₁B₁ сторін CB та AB основи піраміди. Червона площина торкається призми по ребру, що виходить із точки L і перетинає піраміду за двома червоними твірними. Ребро призми і дві твірні піраміди розташовані на одній і тій самій площині і тому перетинаються у двох точках. Ці точки належать обом заданим поверхням і, отже, належать лінії перетину цих поверхонь.

Розглянемо синю допоміжну площину, горизонтальний слід якої проходить через горизонтальну проекцію A_1 вершини A основи піраміди та перетинає і горизонтальні проекції K_1L_1 і L_1M_1 сторін KL і LM основи призми.

Синя площина торкається ребра піраміди AS і перетинає призму двома твірними. Точки перетину двох твірних призми із ребром піраміди належать лінії перетину заданих поверхонь. Лінією перетину піраміди та призми є замкнена просторова ламана лінія. Для з'єднання знайдених точок визначення видимості проекцій ланок цієї ламаної лінії застосуємо діаграму, показану на рис. 111.

Ця діаграма є схематичним розкладом бічних поверхонь призми і піраміди. Прямі лінії цієї діаграми є ребрами, а простори, укладені між ними – гранями. Видимі та невидимі грані на діаграмі відзначимо умовно знаками плюс і мінус. Наприклад, сині точки на діаграмі нанесемо на вертикальному відрізку, що проходить через точку A (це ребро піраміди), у просторах між горизонтальними відрізками, що проходять через точки K, L, M , оскільки сині точки належать граням призми KL і LM . За таким самим принципом наносяться зелені і червоні точки.

На рис. 112 показано побудову лінії перетину двох похилих тригранних призм, основи яких знаходяться у горизонтальній площині проекції Π_1 , а ребра є прямими загального положення.

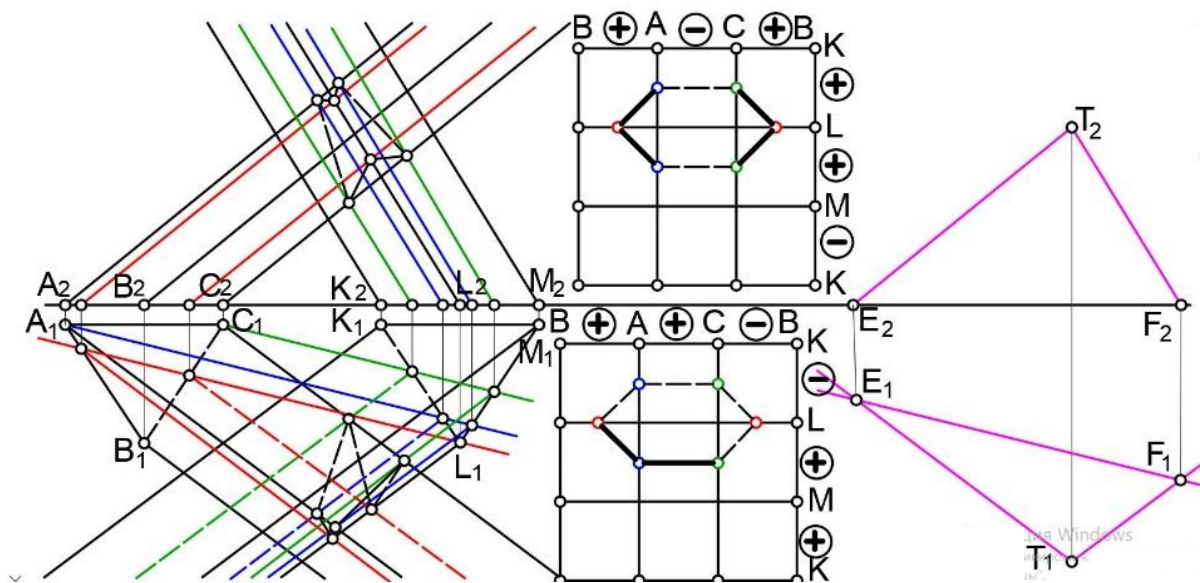


Рис. 112

Для того, щоб допоміжна січна площина перетинала призму за двома твірними, необхідно, щоб вона включала пряму, паралельну ребрам призми, а горизонтальний слід цієї площини перетинав основу призми. Для того щоб допоміжна січна площина перетинала одночасно дві призми за твірними, необхідно щоб вона була паралельна площині, заданої двома прямими, що перетинаються, одна з яких паралельна ребрам першої призми, а друга – ребрам другої призми. Через довільну точку T проводимо дві прямі: пряму TE , паралельну ребрам призми із основою у вигляді трикутника ABC , і пряму TF , паралельну ребрам призми із основою KML . Прямі TE і TF визначають допоміжну січну площину. Знаходимо точки перетину цих прямих із горизонтальною площиною проєкцій Π_1 , якими є точки E і F . Через горизонтальні проєкції цих точок проводимо пряму. Ця пряма є горизонтальним слідом площини, заданої двома прямими, що перетинаються. Паралельно цьому сліду проводимо горизонтальні сліди 3 допоміжних січних площин. Зелений та синій сліди проводимо через проєкції A_1C_1 вершин A і C трикутника ABC , який є основою лівої заданої призми. Ці сліди перетинають сторони KL і LM , основи правої заданої призми. Червоний слід проводимо через горизонтальну проєкцію L_1 вершини L трикутника KML , який є основою правої заданої призми. Цей слід перетинає дві сторони основи лівої призми.

Таким чином, кожна із трьох допоміжних січних площин торкається ребра призми і перетинає грані іншої призми за двома твірними. Кожне ребро, що торкається допоміжної січної площини, буде перетинатися із двома твірними другої призми. Знаходимо їх точки перетину. Лінією перетину двох призм є просторова замкнена ламана лінія. Для визначення видимості проєкцій ланок цієї ламаної лінії застосуємо діаграму, показану на рис. 112.

На рис. 113 задані дві піраміди $SABC$ і $PKLM$. Визначимо їх лінію перетину способом площин, що обертаються. Через вершини пірамід P і S проводимо пряму та знаходимо її горизонтальний слід E .

Якщо будемо проводити допоміжні січні площини через відрізок PS , то під час перетину ними пірамід будемо отримувати у перетинах трикутники, однією із вершин яких будуть точки P і S , а дві інші вершини будуть завжди знаходитися на ребрах основи піраміди.

На рис. 113 проведено три допоміжні січні площини. Зелена площину проведено дотичною до ребра CS піраміди $ABCS$, яка перетинає

піраміду KLMP уздовж зеленого трикутника. Синя площина торкається ребра AS піраміди ABCS і перетинає піраміду KLMP уздовж синього трикутника. Червона площина торкається ребра LP піраміди KLMP і перетинає піраміду ABCS уздовж червоного трикутника. Точки перетину ребер, через які проводилися допоміжні січні площини, із трикутниками, утвореними у результаті розсічення призм цими площинами, належать лінії перетину заданих призм.

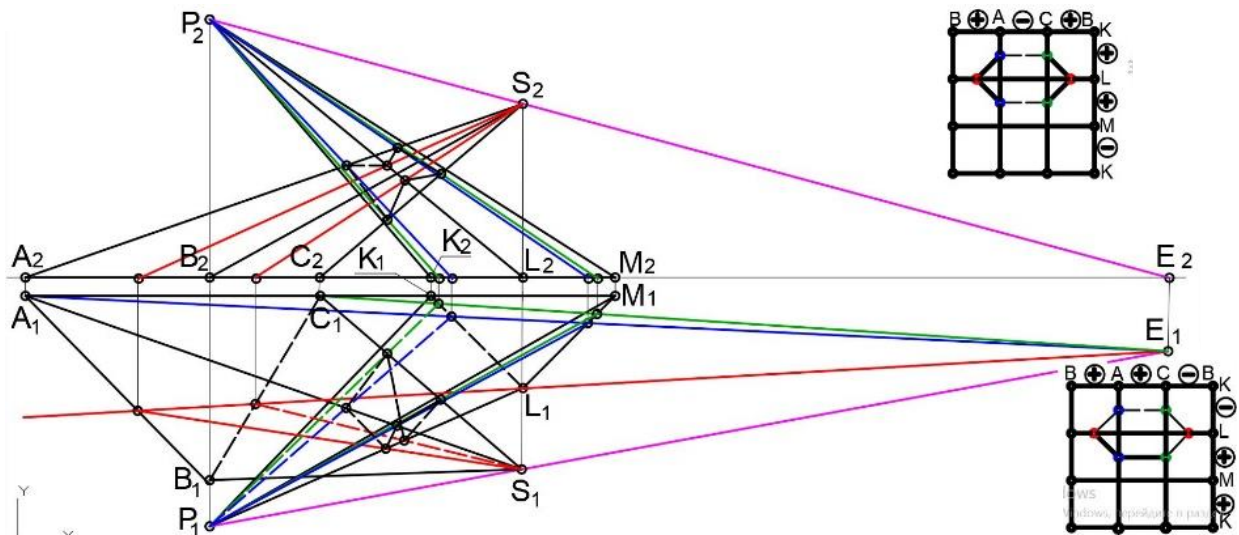


Рис. 113

На рис. 113 наведено діаграму, побудовану так, як було показано вище. За цією діаграмою з'єднуємо отримані точки і визначаємо види-мість ланок ламаної лінії перетину двох пірамід. У цьому завданні має місце випадок неповного перетину.

Контрольні питання

1. Що ви знаєте щодо позиційних завдань?
2. В якому випадку точка належить площині?
3. Як визначити, чи належить якась лінія заданій поверхні?
4. Як можуть розташовуватися прямі в просторі одна відносно одної?
5. В якому випадку дві площини є паралельними?
6. Що таке лінії рівня площини? Які лінії рівня ви знаєте?

7. В якому випадку прямий кут проєціюється прямим на площину проєкцій?
8. Як виглядає перпендикулярність прямої і площини на кресленні?
9. В якому випадку дві площини в нарисній геометрії є перпендикулярними?
10. Яка лінія називається лінією найбільшого ухилу площини?
11. Навести приклади взаємного розташування прямої та площини.
12. Як вирішуються задачі взаємного розташування прямої і площини в різних випадках?
13. Який алгоритм знаходження точок входу та виходу прямої до гранної поверхні?
14. Загальний алгоритм перетину прямої з поверхнею.
15. Які умови повинен забезпечити вибір площини посередника?
16. Навести приклад перетину прямої загального положення з конічною поверхнею.
17. Алгоритм побудови лінії перетину прямої загального положення з поверхнею.
18. Які існують конічні перетини?
19. Повний і неповний перетин поверхонь – як він називається?
20. Який вигляд має лінія перетину?
21. Алгоритм побудови перетину двох поверхонь.
22. Які поверхні обирають в якості посередника?
23. Умови видимості точок і ліній перетину?
24. Алгоритм перетину двох площин загального положення.
25. Чи можуть бути площини-посередники площинами часткового положення?
26. Що таке характерні точки?
27. В яких випадках використовують спосіб площин рівня для побудови ліній перетину кривих поверхонь?
28. Що таке характерні точки ліній перетину?
29. Сутність способу допоміжних січних площин.
30. Сутність способу допоміжних січних сфер.
31. Сутність способу площин, що обертаються.
32. Поясніть алгоритм побудови лінії перетину кільця із конічною поверхнею.

4. Метричні завдання

Під час прямокутного (ортогонального) проектування геометричні об'єкти, які довільно розташовані відносно площин проєкцій, проектуються на ці площини із спотворенням їх метричних характеристик. Для того щоб мати можливість за метрично спотвореними проєкціями судити щодо розмірів і форм оригіналу, необхідно знати способи вирішення завдань визначення спотворених лінійних і кутових величин [10, 11].

Метричними називаються завдання, вирішення яких пов'язане зі знаходженням характеристик геометричних фігур, які вимірюються лінійними і кутовими величинами.

Завдання прямих ліній і плоских фігур у часткових положеннях щодо площини проєкцій значно спрощує розв'язання завдань.

Існують способи, що дозволяють переходити від загальних положень прямих ліній і плоских фігур відносно площин проєкцій до часткових положень. Це досягається:

1) зміною положення прямої лінії або плоскої фігури шляхом їх обертання навколо деякої осі так, щоб пряма або фігура опинилися у частковому положенні щодо незмінної системи плоских проєкцій (спосіб обертання);

2) заміною системи площин проєкції новою системою так, щоб пряма лінія або плоска фігура, не змінюючи свого положення у просторі, опинилася в якомусь частковому положенні нової системи площин проєкцій (спосіб зміни площин проєкцій).

4.1. Спосіб зміни площин проєкції

Сутність способу зміни площин проєкції полягає у тому, що задані площини проєкції послідовно змінюються на нові за умови незмінного положення геометричних фігур у просторі. Кожну нову площину проєкції розташовують перпендикулярно незмінній площини проєкцій i , зазвичай, так відносно, як мінімум, однієї із заданих геометричних фігур, щоб отримати часткові положення цієї фігури щодо нової площини проєкцій. На рис. 114 показано визначення натуральної величини відрізка АВ способом зміни площин проєкції. Відрізок АВ є відрізком прямого загального положення. Він проектується на площини Π_1 та Π_2 із спотворенням. Вводимо додаткову площину проєкцій Π_4 , паралельну

відрізку AB і перпендикулярну горизонтальній площині проєкцій Π_1 . Здійснюємо проєціювання відрізка AB на додаткову площину проєкцій Π_4 та отримуємо його неспотворену проєкцію. Горизонтальний слід площини Π_4 (лінію перетину площин Π_1 і Π_4) приймаємо за нову координатну вісь X_{14} . Провертаємо додаткову площину проєкцій Π_4 навколо осі X_{14} до суміщення із горизонтальною площиною проєкцій Π_1 . Для побудови проєкції A_4B_4 відрізка AB на площину Π_4 необхідно через проєкції точок A_1 і B_1 провести перпендикулярні до нової осі та на цих перпендикулярах відкласти відстані від фронтальних проєкцій A_2 і B_2 точок A і B до осі X_{12} (рис. 114).

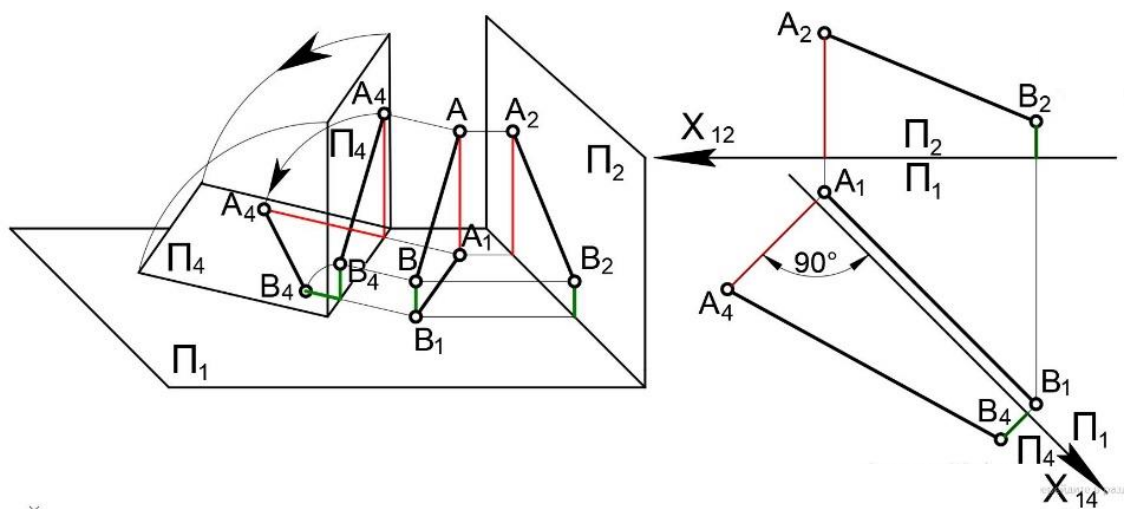


Рис. 114

На рис. 115 показано комплексні креслення точки S і площини, заданої трикутником ABC . Необхідно визначити відстань від точки S до площини трикутника ABC .

Послідовність розв'язання задачі складається із трьох етапів:

- 1) із точки S опустити перпендикуляр на площину трикутника ABC ;
- 2) знайти точку перетину цього перпендикуляра із площиною трикутника ABC ;
- 3) визначити відстань від цієї точки до заданої точки S .

Побудова перпендикуляра до площини загального положення на комплексному ортогональному кресленні ґрунтується на властивості проєкцій прямого кута. Ця властивість полягає у тому, що якщо одна сторона прямого кута (рис. 116) паралельна до площини проєкцій, то на цю площину прямий кут спроеціюється без спотворення. Отже, фронтальна проєкція перпендикуляра до площини ABC має бути

один катет є проекцією цього відрізка, а інший катет – перевищенням одного кінця відрізка над іншим.

На рис. 115 (ліворуч) показано визначення натуральної величини перпендикуляра SN способом прямокутного трикутника.

Один катет цього трикутника є горизонтальною проекцією S_1N_1 перпендикуляра SN, а інший катет – відрізком, довжина якого дорівнює перевищенню фронтальної поверхні N_2 точки N над фронтальною проекцією S_2 точки S. Гіпотенуза прямокутного трикутника (фіолетовий відрізок) є дійсною відстанню від точки S до площини трикутника ABC. Неважко перекопатися, що спосіб прямокутного трикутника базується на визначенні натуральної величини відрізка прямого загального положення за допомогою способу зміни площин проекцій (рис. 114). Якщо на комплексному кресленні (рис. 114) із проекції B_2 провести пряму, паралельну осі X_{12} , із проекції B_4 провести пряму, паралельну осі X_{14} , а самі осі X_{12} і X_{14} прибрати, то отримаємо картинку, аналогічну лівій частині (рис. 115).

На рис. 117 трикутник ABC задано двома проекціями: горизонтальною A, B, C , і фронтальною A_2, B_2, C_2 . Необхідно визначити натуральну величину цього трикутника, використовуючи спосіб зміни площин проекцій.

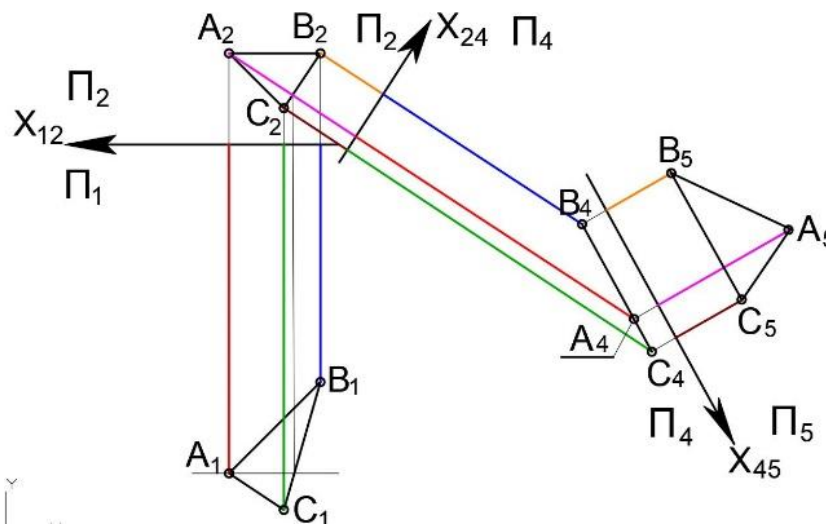


Рис. 117

Завдання вирішується у два етапи. На першому етапі горизонтальну площину проекцій замінюємо додатковою площиною проекцій Π_4 , перпендикулярною до фронтальної площини проекцій. Додаткову

площину проєкцій Π_4 розташуємо перпендикулярно площині трикутника ABC. У цьому випадку проєкція цього трикутника на додаткову площину Π_4 вироджується у прямолінійний відрізок. Площина Π_4 буде перпендикулярна до площини трикутника ABC, якщо вона буде перпендикулярна до прямої, що знаходиться у площині цього трикутника. Тому у площині цього трикутника ABC через вершину A проводимо фронталь. Горизонтальна проєкція фронталі паралельна осі X_{12} . Фронтальну проєкцію точки перетину фронталі зі стороною BC трикутника визначаємо за першим законом проєкційного зв'язку.

Через цю точку проводимо фронтальну проєкцію та перпендикулярно їй проводимо нову координатну вісь X_{24} . Із проєкцій A_2, C_2, B_2 вершин трикутника проводимо лінії проєкційного зв'язку, перпендикулярні осі X_{24} , і на них відкладаємо відстані, рівні віддаленню точок A, B і C від фронтальної площини проєкцій. Іншими словами, відстані від проєкцій B_4, A_4, C_4 , вершин трикутника до осі X_{24} повинні дорівнювати відстаням від проєкцій B_1, A_1, C_1 до осі X_{12} . Оскільки площина трикутника ABC перпендикулярна додатковій площині проєкцій Π_4 , то він спроеціюється на неї у вигляді прямолінійного відрізка.

На другому етапі вводимо додаткову площину проєкцій Π_5 . Для цього проводимо нову координатну вісь X_{45} паралельно проєкції $B_4A_4C_4$ трикутника ABC, що має вигляд прямолінійного відрізка. Із проєкцій B_4, A_4, C_4 вершин цього трикутника проводимо перпендикуляр до осі X_{45} (лінії проєкційного зв'язку) і відкладаємо від неї на цих перпендикулярах відстані, рівні величинам віддалення точок A, B, C від додаткової площини проєкцій Π_4 . Іншими словами, відстані між проєкціями A_2, B_2, C_2 вершин трикутника і віссю X_{24} повинні дорівнювати відстаням між проєкціями A_5, B_5, C_5 і віссю X_{45} . Проєкція $A_5B_5C_5$ є натуральною величиною трикутника ABC, оскільки площина Π_5 паралельна площині цього трикутника. На рис. 118 показано побудову точок перетину прямої AB із поверхнею сфери способом заміни площини проєкцій.

Через задану пряму AB проводимо допоміжну горизонтально – проєціювальну площину Σ , яка розтинає сферу по колу радіусом $R=45$ мм. Нам потрібно знайти точки перетину прямої AB із цим колом. Оскільки площина кола не паралельна площині Π_2 , її фронтальна проєкція буде спотвореною і мати вигляд еліпса. Це нас не влаштовує. Тому замінюємо фронтальну площину проєкцій Π_2 на додаткову площину проєкцій Π_4 , паралельну площині Σ . На комплексному кресленні

ми повинні провести нову координатну вісь X_{14} , паралельну горизонтальній сліду додаткової площини проєкцій Σ_1 . Оскільки фронтальна проєкція A_2 кінця відрізка AB знаходиться на осі X_{12} , проєкція точки A на додаткову площину проєкцій Π_4 належатиме осі X_{14} . Із проєкції O_1 центру сфери і проєкції B_1 кінця відрізка AB проводимо перпендикуляри до нової координатної осі X_{14} і відкладаємо від неї на продовженні цих перпендикулярів відстані, рівні величинам віддалення центру сфери O і кінця B відрізка AB від горизонтальної площини проєкцій Π_1 . З'єднаємо прямою лінією проєкції кінців відрізка AB на площину Π_4 , а з проєкції центру сфери на цю площину проводимо радіус кола $R = 45$ мм.

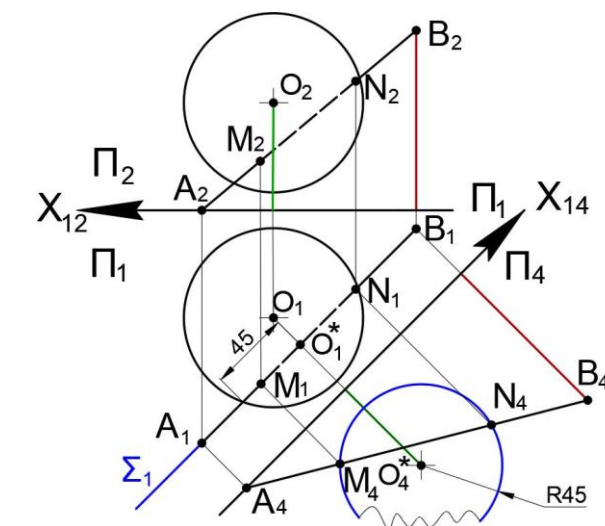


Рис. 118

Знаходимо проєкції M_4, N_4 точок перенесення цього кола із відрізком AB на площину Π_4 . Знаходимо горизонтальні та фронтальні проєкції точок M і N за належністю їх прямих AB .

На рис. 119 показано два варіанти вирішення однієї і тієї самої задачі. Задані горизонтальні E_1F_1, L_1M і фронтальні E_2F_2, L_2M проєкції відрізків EF і LM , що схрещуються. Необхідно визначити найкоротшу відстань між ними. Відстанню між двома прямими, що схрещуються, є загальний перпендикуляр, проведений до них. У побудові, показаній на рис. 119 (ліворуч), одна із схрещуючих (LM) спроектована у точку на другу нову площину проєкцій (Π_5). Виконано наступний план побудови:

1) від системи площин проєкцій Π_1, Π_2 , перейшли до системи Π_1, Π_4 , де додаткова площина проєкцій Π_4 перпендикулярна до основної площини проєкцій Π_1 і паралельна прямій LM ;

2) від системи площин проєкцій Π_1, Π_4 перейшли до системи Π_4, Π_5 , де додаткова площина проєкцій Π_5 перпендикулярна до додаткової площини проєкцій Π_4 і перпендикулярна до прямої LM .

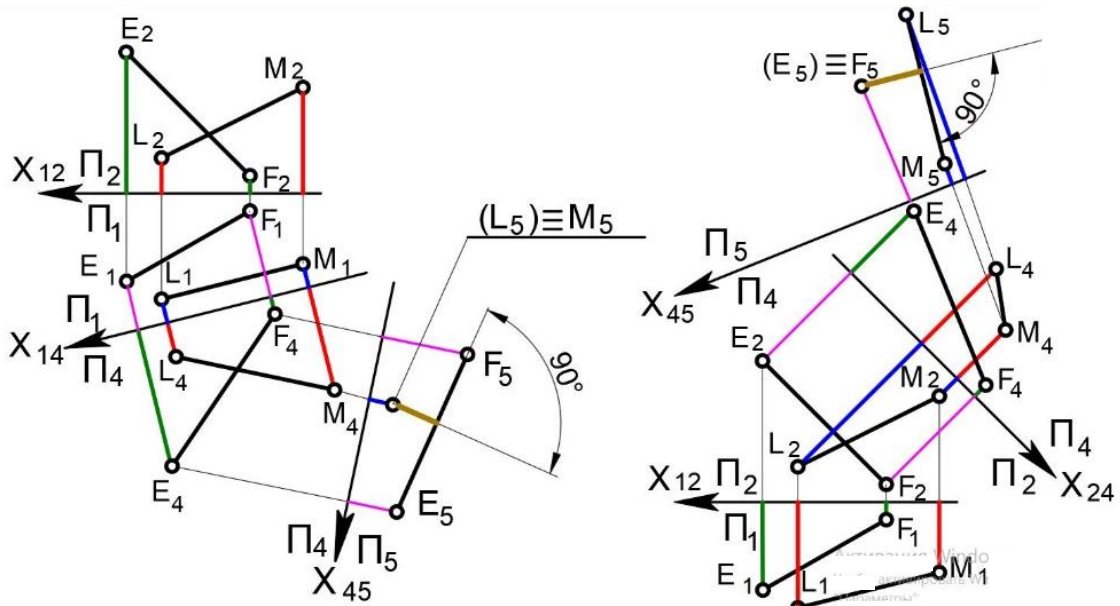


Рис. 119

Отримавши на площині проєкцій Π_5 проєкцію прямої LM у вигляді точки і проєкцію прямої EF і провівши із $L_5 - (M_5)$ перпендикуляр до проєкції E_5F_5 прямої EF , отримаємо шукану відстань між даними схрещуючими прямими LM і EF . У побудові, показаній на рис. 119 (справа) одна із прямих, що схрещуються (EF), спроектована у точку на другу нову площину проєкцій (Π_5). План розв'язання завдання полягає у наступному:

1) від системи площин проєкцій $\Pi_1\Pi_2$ перейшли до системи $\Pi_2\Pi_4$, де додаткова площина Π_4 перпендикулярна основній площині проєкцій Π_2 і паралельна прямій EF ;

2) від системи площин проєкцій $\Pi_2\Pi_4$ перейшли до системи $\Pi_4\Pi_5$, де додаткова площина проєкцій Π_5 перпендикулярна додатковій площині проєкції Π_4 і перпендикулярна прямій EF .

Отримавши на площині проєкцій Π_5 проєкцію прямої EF у вигляді точки і проєкцію прямої LM , та провівши перпендикуляр із $(E_5) \equiv F_5$ до проєкції L_5M_5 прямої LM , отримаємо відстань між заданими прямими EF і LM , що схрещуються.

На рис. 120 показано два варіанти вирішення одного і того завдання. Задано горизонтальні C_1D_1 і A_1B_1 та фронтальні проєкції

C_2D_2 і A_2B_2 проєкції паралельних відрізків CD і AB . Необхідно визначити відстань між цими відрізками.

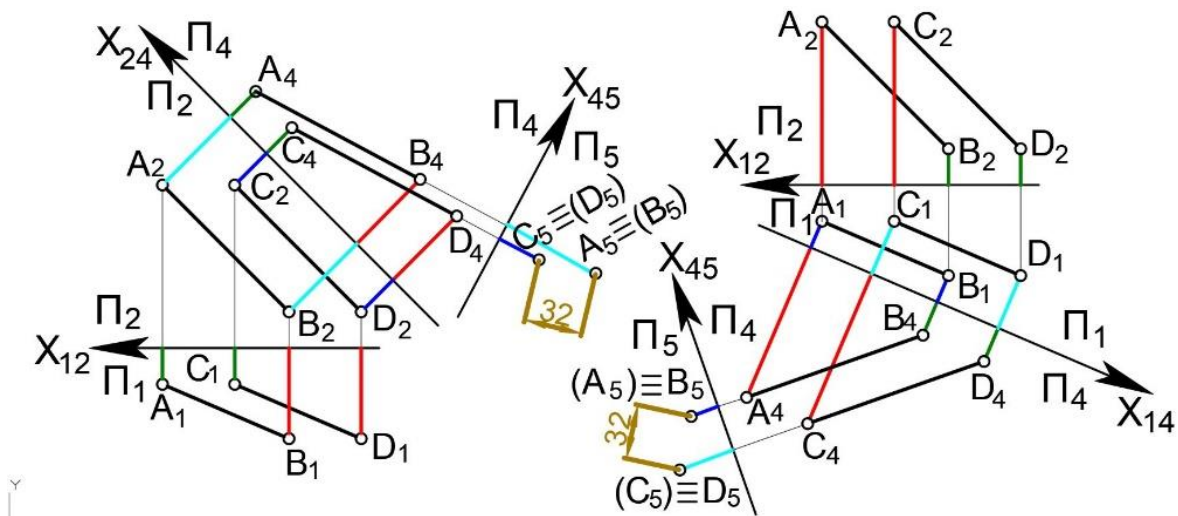


Рис. 120

У побудові, показаній на рис. 120 (ліворуч), шляхом введення додаткової площини проєкцій Π_4 замість основної площини проєкцій Π_1 , прямі AB і CD виявилися паралельними до нової площини проєкцій. Площину Π_4 проведено паралельно заданим прямим AB і CD .

Другу зміну здійснено так, щоб прямі AB і CD виявилися перпендикулярними до площини проєкцій. Площину Π_2 замінено додатковою площиною проєкцій Π_5 , нову вісь X_{45} проведено перпендикулярно до проєкцій A_4B_4 і C_4D_4 . На новій додатковій площині проєкцій Π_5 прямі AB і CD зображено у вигляді точок $C_5 \equiv (D_5)$ і $A_5 \equiv (B_5)$, відстань між якими і буде відстанню між цими прямими.

У побудові, показаній на рис. 120 (праворуч), шляхом введення додаткової площини проєкцій Π_4 замість площини Π_2 прямі AB і CD зайняли положення, паралельне додатковій площині проєкцій Π_4 . Нову вісь X_{14} проведено паралельно горизонтальним проєкціям заданих прямих. На наступному етапі розв'язання задачі задані прямі перетворюємо на проєктовані прямі. Для цього горизонтальну площину проєкцій Π_1 замінюємо на додаткову площину проєкцій Π_5 , нову вісь X_{45} проводимо перпендикулярно до проєкцій A_4B_4 і C_4D_4 . Тобто прямі AB і CD виявилися перпендикулярними до нової додаткової площини проєкцій. Задані прямі проєктуються на цю площину у вигляді точок $(A_5) \equiv B_5$ і $(C_5) \equiv D_5$, відстань між якими і буде відстанню між цими прямими.

На рис. 121 показано визначення відстані між сторонами AB і CD паралелограма ABCD.

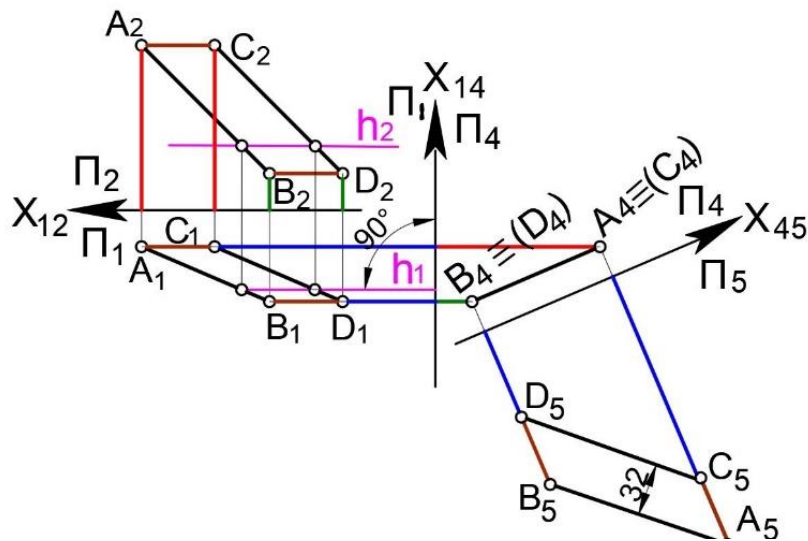


Рис. 121

Розв'язання завдання зводиться до визначення натуральної величини паралелограма, на якому можна виміряти потрібну відстань. Завдання вирішується у два етапи. На першому етапі проводять заміну фронтальної площини проєкцій Π_2 на додаткову площину проєкцій Π_4 , перпендикулярну до основної площини проєкцій Π_1 і площини паралелограма ABCD. Для цього на комплексному кресленні проводять нову координатну вісь X_{14} , перпендикулярну до горизонтальної проєкції h_1 горизонталі площини паралелограма. Ці дії ґрунтуються на теоремі щодо перпендикулярності двох площин: дві площини взаємно перпендикулярні, якщо одна із них перпендикулярна до прямої, що знаходиться в іншій площині. Такою прямою у даній задачі обрано горизонталь h площини паралелограма. А перпендикулярність горизонталі h_1 і осі X_{14} узгоджується із властивістю проєкції прямого кута: якщо одна сторона прямого кута (у даному випадку h_1) паралельна площині проєкцій (у даному випадку площині Π_1), то на цю площину прямий кут спроеціюється без спотворення. Оскільки паралелограм ABCD займає проєкційне положення відносно додаткової площини проєкцій Π_4 , то його проєкція на цю площину має вигляд прямолінійного відрізка.

На другому етапі розв'язання завдання проводять заміну горизонтальної площини проєкцій Π_1 на додаткову площину проєкцій Π_5 , перпендикулярну до площини Π_4 і паралельну площині паралелограма

ABDC. Для цього на комплексному кресленні проводять нову координатну вісь X_{45} , паралельну проєкції $A_4B_4D_4C_4$ паралелограма ABDC, яка має вигляд прямолінійного відрізка. Оскільки площина паралелограма є площиною рівня відносно додаткової площини проєкцій Π_5 , то паралелограм ABDC спроеціюється на неї у натуральну величину. Відстань між сторонами AB і CD паралелограма ABDC дорівнює довжині загального перпендикуляра, проведеного до проєкцій A_5B_5 і C_5D_5 (рис. 121).

4.2. Спосіб обертання

Під час обертання навколо нерухомої осі (осі обертання) кожна точка фігури, що обертається, переміщується у площині, перпендикулярній до осі обертання, (площина обертання). Точка переміщується колом, центр якого знаходиться у точці перетину осі із площиною обертання (центр обертання), а радіус кола дорівнює відстані від точки, що обертається, до центру (радіусу обертання) [12, 13].

Якщо якась із точок даної системи знаходиться на самій осі, то під час обертання цієї системи навколо осі ця точка залишається нерухомою. Вісь обертання можна задати або вибрати: у останньому випадку вигідно розташувати вісь перпендикулярно до однієї із площин проєкцій, оскільки при цьому спрощуються побудови. На рис. 122 показано знаходження натуральної величини відрізка AS, заданого горизонтальною A_1S_1 і фронтальною A_2S_2 проєкціями. Оскільки відрізок AS є відрізком прямої загального положення, то він проєктується на площини проєкції Π_1 і Π_2 із спотворенням. Через точку S, що належить горизонтальній площині проєкції Π_1 , проведемо вісь обертання J, перпендикулярну до цієї площини.

Фронтальна проєкція J_2 осі J є прямою, перпендикулярною до осі X. Площина обертання точки A перпендикулярна до осі обертання J, тому фронтальний слід Δ_2 площини обертання точки A перпендикулярний до фронтальної проєкції J_2 осі J. Визначення натуральної величини відрізка SA зводиться до повороту радіуса точки A (відрізка OA, що знаходиться у площині Δ) навколо осі J до положення, паралельного передній площині проєкцій Π_2 . Нижній кінець відрізка AS (точка S) належить осі обертання, тому буде нерухомим. Під час обертання точка A описує у площині Δ дугу, яка проєціюється на площину Π_1 без спотворення.

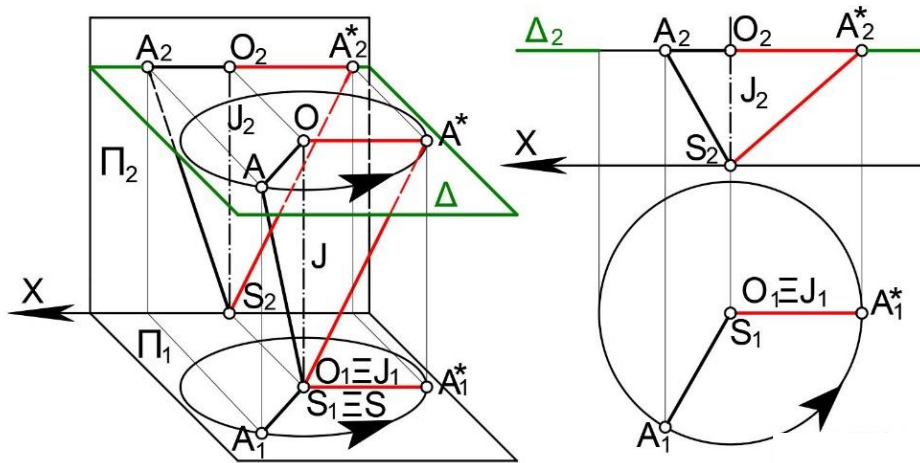


Рис. 122

Оскільки площина займає проєціювальне положення відносно фронтальної площини проєцій Π_2 , то проєкції точок дуги на площину Π_2 знаходяться на прямій, паралельній осі X . Натуральною величиною відрізка SA є його фронтальна проєкція $S_2A_2^*$. Горизонтальна проєкція цього відрізка після повороту (проєкція $S_1A_1^*$) паралельна осі (рис. 122).

Нехай (рис. 123) відрізок AB задано горизонтальною (A_1B_1) і фронтальною (A_2B_2) проєкціями. Потрібно повернути відрізок AB навколо осі J , перпендикулярній горизонтальній площині проєцій Π_1 , на кут φ у напрямі проти годинникової стрілки (якщо дивитися на площину Π_1 зверху).

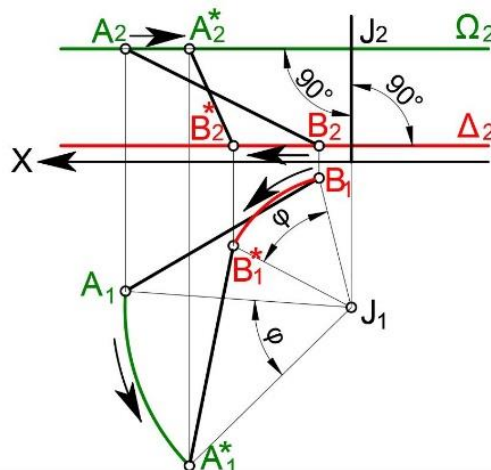


Рис. 123

Для знаходження проєкцій нового положення відрізка слід знайти нові положення проєкцій двох його кінців A і B . Для цього необхідно:

1) через фронтальні проєкції A_2 і B_2 кінців відрізка провести фронтальні сліди Ω_1 і Δ_2 площин обертання точок A і B , які паралельні осі X ;

2) із точки J_1 (горизонтальної проєкції осі обертання) радіусами J_1B_1 і J_1A_1 описати дуги $B_1B_1^*$ і $A_1A_1^*$, що відповідають заданому куту φ та заданому напрямку обертання;

3) із точок A_1^* і B_1^* провести перпендикуляри до осі X і продовжити їх до перетину із слідами Ω_2 і Δ_2 площин обертання точок A і B . З'єднавши прямими лініями точку A_1^* із точкою B_1^* і точку A_2^* із точкою B_2^* , ми отримаємо відповідно нове положення горизонтальної і фронтальної проєкцій відрізка AB .

Розглянемо трикутники $A_1B_1J_1$ і $A_1^*B_1^*J_1^*$. Сторони B_1J_1 і A_1J_1 трикутника $A_1B_1J_1$ рівні (як радіуси), відповідно, сторонам $B_1^*J_1^*$ і $A_1^*J_1^*$ трикутника $A_1^*B_1^*J_1^*$. Кути, укладені між зазначеними сторонами, так само рівні. Отже, ці трикутники рівні між собою. Тому $A_1B_1 = A_1^*B_1^*$, тобто відстань між горизонтальними проєкціями точок, що повертаються у одному і тому ж напрямку на один і той же кут біля осі, що перпендикулярна горизонтальній площині проєкцій Π_1 , не змінюється.

Віссю обертання іноді вигідно приймати лінію нульового рівня – лінію перетину площини фігури, що обертається, із площиною проєкцій. Тоді спосіб обертання навколо цієї осі називається *способом поєднання*.

На рис. 124 показано знаходження натуральної величини перетину прямої п'ятигранної призми фронтально-проєціювальною площиною Δ способом поєднання із горизонтальною площиною проєкцій.

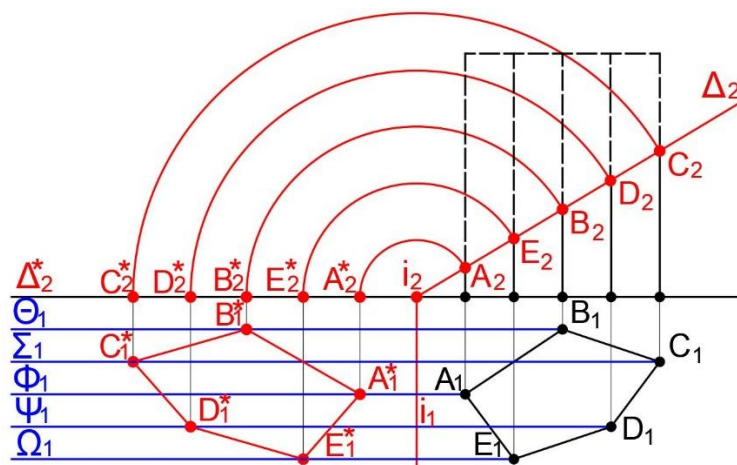


Рис. 124

Віссю обертання приймемо горизонталь і площини Δ – лінію перетину цієї площини із горизонтальною площиною проєкцій. У нашому

випадку горизонталь і вироджується у фронтально-проеціювальну пряму. Тому площини обертання θ , Σ , Θ , Ψ , Ω вершин B , C , A , D , E обертового п'ятикутника паралельні фронтальній площині проєкцій Π_2 , а траєкторії обертання цих вершин (дуги BB^* , CC^* , AA^* , DD^* , EE^*) проєктуються на площину Π_2 без спотворення.

Горизонтальні проєкції B_1^* , C_1^* , A_1^* , D_1^* , E_1^* вершин п'ятикутника після його суміщення із площиною Π_1 визначаються за належністю до відповідних горизонтальних слідів θ_1 , Σ_1 , Θ_1 , Ψ_1 , Ω_1 площин обертання цих вершин.

На рис. 125 наведено два варіанти розв'язання завдання, в якому потрібно визначити найвищу (A) і найнижчу (B) точки лінії перетину прямого кругового конуса із сферою. Загальна площина симетрії Ω заданих геометричних об'єктів не паралельна фронтальній площині проєкцій. Тому фронтальні проєкції трикутника і кола, утворених під час розтину конуса і сфери цією площиною, мають вигляд спотвореного трикутника та еліпса (ліва частина задачі на рис. 125).

Фронтальні проєкції A_2 і B_2 найвищої (A) і нижчої (B) точок лінії перетину конуса із сферою знаходяться на перетині цього спотвореного трикутника та еліпса.

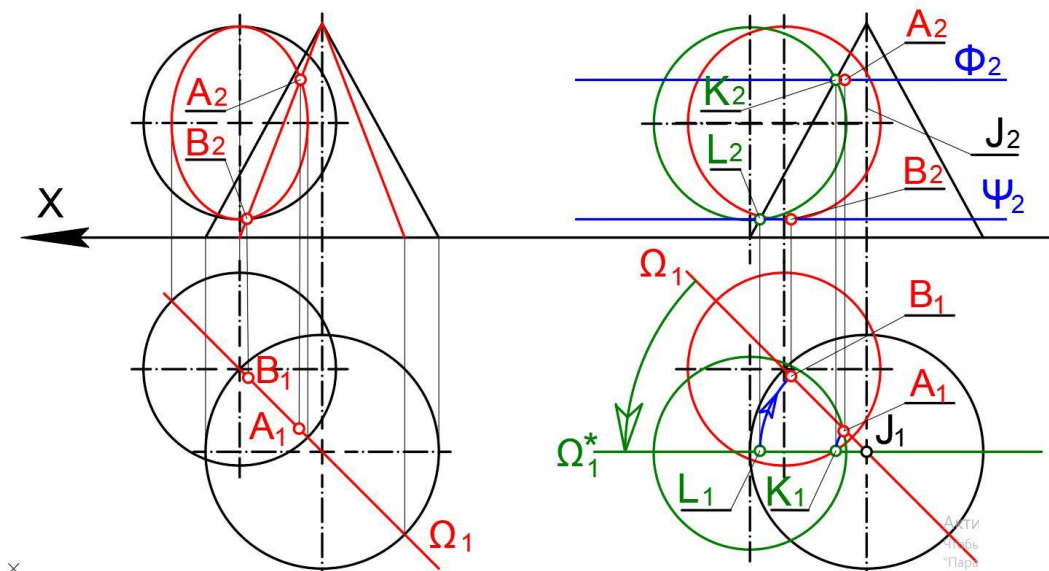


Рис. 125

Горизонтальні проєкції A_1 і B_1 цих точок, виходячи із рис. 125, визначаються за належністю горизонтальному сліду Ω_1 , допоміжній січній площині Ω .

4.3. Спосіб плоскопаралельного руху

Якщо обертати плоску фігуру навколо осі, яка перпендикулярна площині проєкцій, то проєкція на цю площину не змінюється ні за виглядом, ні за величиною – змінюється лише положення проєкції відносно координатної осі. Щодо іншої проєкції – на площину, яка паралельна осі обертання, – то всі точки цієї проєкції переміщуються уздовж прямих, паралельних координатній осі, і проєкція взагалі змінюється за формою і величиною. Користуючись цими властивостями, можна застосувати спосіб обертання, не задаючи зображення осі обертання і не встановлюючи величини радіусу обертання; достатньо лише, не змінюючи вигляду і величини однієї з проєкцій аналізованої фігури, перемістити цю проєкцію відносно координатної осі, а потім побудувати іншу проєкцію.

Плоскопаралельний рух фігури у просторі називається таким її переміщенням, під час якого всі точки фігури переміщуються у паралельних площинах [14, 15].

На рис. 126 показано знаходження натуральної величини трикутника ABC , використовуючи спосіб плоскопаралельного руху.

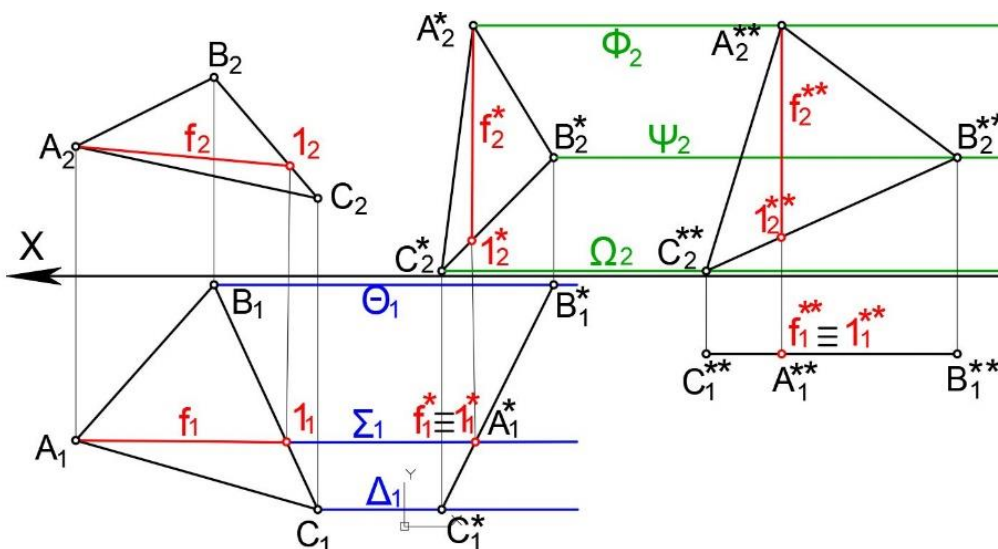


Рис. 126

Для вирішення цього завдання необхідно площину ABC загального положення перетворити на площину рівня. Одним плоскопаралельним рухом площину загального положення не можна перетворити на

площину рівня. Тому виконаємо послідовно два плоскопаралельні рухи трикутника ABC : спочатку відносно фронтальної площини проєкцій Π_2 , а потім відносно горизонтальної площини Π_1 .

Під час першого плоскопаралельного руху площину трикутника ABC перетворимо на проєціювальну площину. Для цього фронтальну проєкцію $A_2^*B_2^*C_2^*$ зображення розташуємо так, щоб фронталь f стала горизонтально-проєціювальною прямою. При цьому форма і розміри трикутників $A_2B_2C_2$ і $A_2^*B_2^*C_2^*$, а також горизонтальні проєкції $A_1B_1C_1$ вершин A, B, C трикутника перемістяться по прямих, що збігаються із горизонтальними слідами $\Sigma_1, \Theta_1, \Delta_1$ їх площин обертання.

Другим плоскопаралельним рухом відносно горизонтальної площини проєкцій Π_1 трикутник $A^*B^*C^*$ перетворимо на трикутник $A_2^{**}B_2^{**}C_2^{**}$, який розташовано у фронтальній площині рівня. При цьому відрізки $B_1^*C_1^*, B_1^{**}C_1^{**}$ конгруентні, і останній розмістимо перпендикулярно до ліній проєкційного зв'язку. Тому фронтальна проєкція $A_2^*B_2^*C_2^*$ визначає натуральні розміри трикутника ABC .

4.4. Спосіб обертання навколо лінії рівня

На відміну від розглянутих вище способів, це завдання вирішується одним перетворенням, що визначає раціональність його вирішення обертанням навколо лінії рівня [16, 17].

Як приклад розглянемо визначення натуральної величини трикутника ABC обертанням навколо горизонталі (рис. 127).

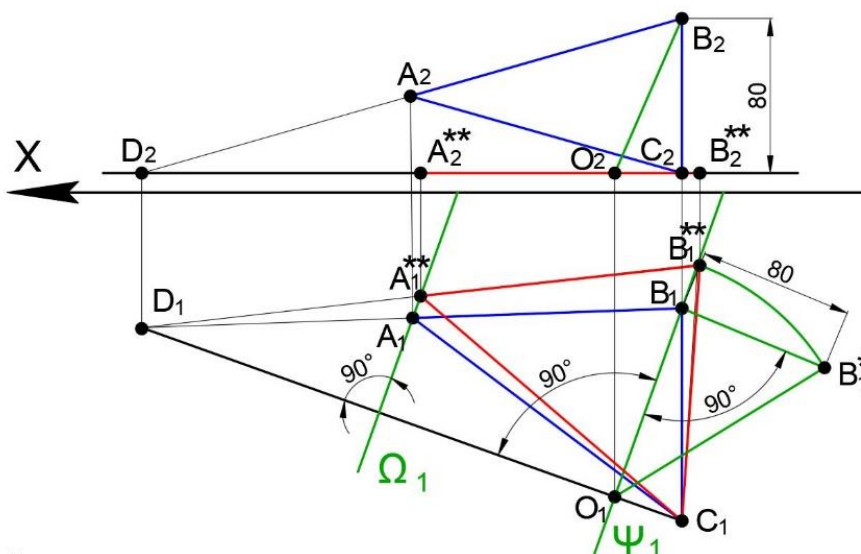


Рис. 127

Горизонталь проведемо через вершину цього трикутника. Фронтальна проекція горизонталі має бути паралельна осі X .

Точка знаходиться на осі обертання, тому вона буде нерухома. Вершини A і B трикутника ABC будуть обертатися у площинах Ω і Ψ , перпендикулярних до осі CD . Через проекції A_1 і B_1 вершин трикутника проводимо горизонтальні сліди Ω_1 і Ψ_1 площин обертання цих точок.

Будуємо проекції O_1 і O_2 центру обертання точки B . Горизонтальна проекція O_1 цього центру розташована у точці перетину горизонтального сліду Ψ_1 площини обертання точки із горизонтальною проекцією D_1C_1 осі обертання трикутника ABC . Фронтальна проекція O_2 центру обертання точки знаходиться на фронтальній проекції D_2C_2 осі обертання.

Прямолінійні відрізки O_2B_2 і O_1B_1 – фронтальна і горизонтальна проекції радіуса обертання точки B . Горизонтальна проекція радіуса обертання точки B збігається із горизонтальним слідом Ψ_1 площини обертання.

Після повороту трикутника ABC до положення, паралельного площині Π_1 , він проектуватиметься на неї у натуральну величину. Отже, радіус обертання точки на площину Π_1 спроеціюється теж без спотворення.

Способом прямокутного трикутника визначимо натуральну величину радіуса обертання точки B (це відрізок $O_1B_1^*$) і відкладемо знайдене значення на горизонтальному сліді Ψ_1 площини обертання цієї точки (це відрізок $O_1B_1^{**}$).

Оскільки точка A знаходиться на прямій BD , її горизонтальна проекція A_1^{**} після повороту трикутника ABC повинна знаходитися у точці перетину горизонтальної проекції $B_1^{**}D_1$ прямої BD із горизонтальним слідом Ω_1 площини обертання точки A . Фронтальна проекція A_2^{**} точки A після повороту трикутника збігатиметься із фронтальною проекцією C_2D_2 осі обертання CD трикутника ABC . Проекція $C_1A_1^{**}B_1^{**}$ дорівнює натуральній величині трикутника CAB .

4.5. Визначення кута між площинами

Якщо із довільної точки опустити перпендикуляри на дві площини, що перетинаються, і заміряти кут між цими перпендикулярами Ψ , то кут між площинами γ можна розрахувати за формулою: $\gamma = 180^\circ - \Psi$.

Пряма перпендикулярна площині у тому випадку, якщо вона перпендикулярна двом прямим, що перетинаються та знаходяться у цій площині.

На рис. 128 показано пряму, перпендикулярну площині загального положення. Ця пряма перпендикулярна двом прямим, що перетинаються та знаходяться у цій площині: горизонталі (червона лінія, паралельна горизонтальному сліду площини) і фронталі (зелена пряма, паралельна фронтальному сліду площини).

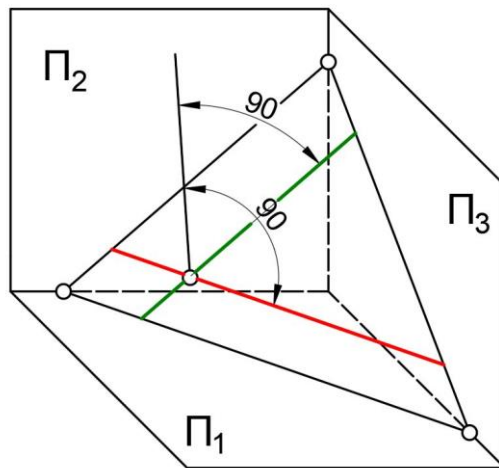


Рис. 128

На рис. 129 показано перпендикуляри, які опущено із точки на площину загального положення, задану трикутником ABC. Фронтальна проекція перпендикуляра перпендикулярна до фронтальної проекції фронталі (Ф.П.Ф.) трикутника ABC, а горизонтальна проекція перпендикуляра перпендикулярна до горизонтальної проекції горизонталі (Г.П.Г.) цього трикутника.

На рис. 130 показано перпендикуляри, які опущено із точки K на дві площини загального положення, заданих трикутниками ABC і MNG. Відзначимо на цих перпендикулярах дві довільні точки F і L і з'єднаємо ці точки прямою лінією. Отримаємо трикутник KFL. Якщо визначити натуральну величину кута між сторонами KF і KL, то можна розрахувати кут γ між заданими площинами за формулою: $\gamma = 180^\circ - \psi$.

Способом плоскопаралельного руху визначаємо натуральну величину трикутника KFL (рис. 131).

Спочатку площину трикутника KFL перетворимо на фронтально-проєціювальну площину. Для цього здійснимо плоскопаралельний рух,

у результаті якого горизонталь площини трикутника займе положення, перпендикулярне до фронтальної площини проєкцій. При цьому на комплексному кресленні горизонтальна проєкція горизонталі (Г.П.Г.) стане перпендикулярною до осі X , а фронтальна проєкція трикутника KLF виродиться у прямолінійний відрізок $K_2^*F_2^*$.

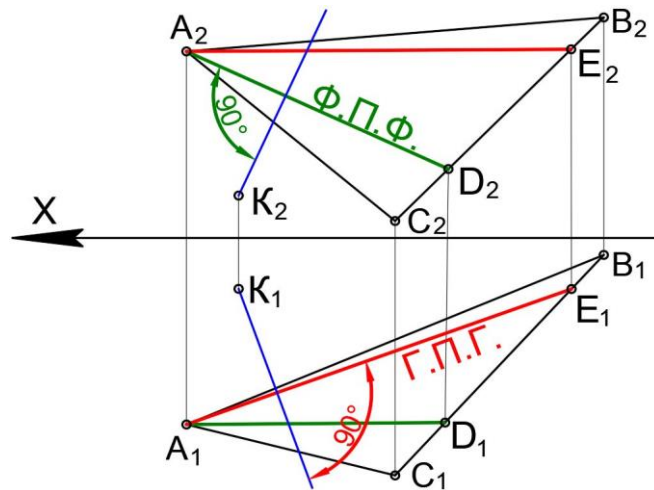


Рис. 129

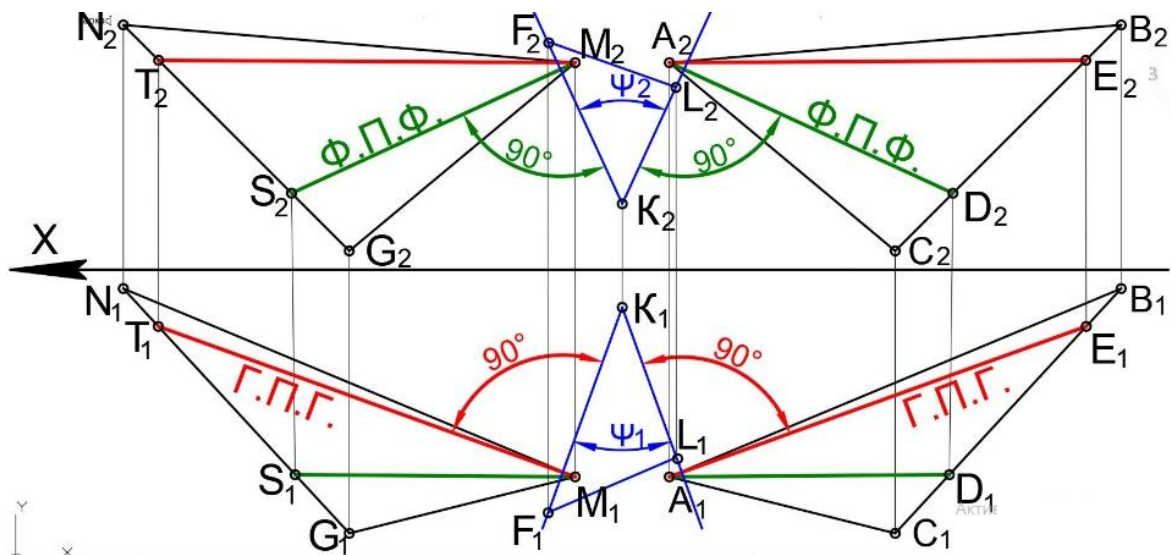


Рис. 130

За допомогою другого плоскопаралельного руху перетворимо площину трикутника $K^*L^*F^*$ на горизонтальну площину рівня. При цьому на комплексному кресленні фронтальна проєкція трикутника $K_2^{**}L_2^{**}F_2^{**}$, яка має вигляд прямолінійного відрізка $K_2^{**}F_2^{**}$, буде па-

паралельна осі X , а горизонтальна проекція $K_1^{**}L_1^{**}F_1^{**}$ дорівнюватиме натуральній величині трикутника KLF . Вимірявши у цьому трикутнику величину кута у вершини K_1^{**} (кут Ψ), можна розрахувати величину кута γ між заданими площинами за схемою, наведеною на рис. 132.

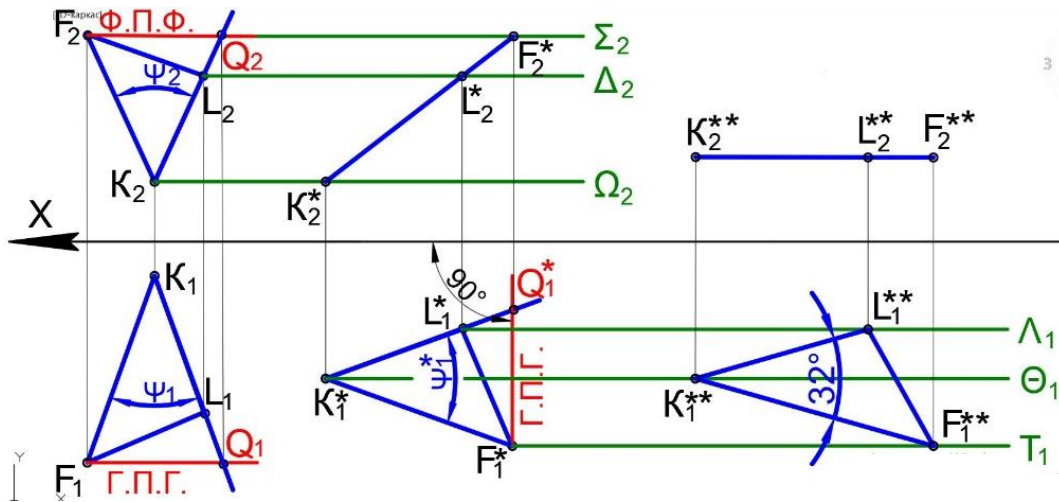


Рис. 131

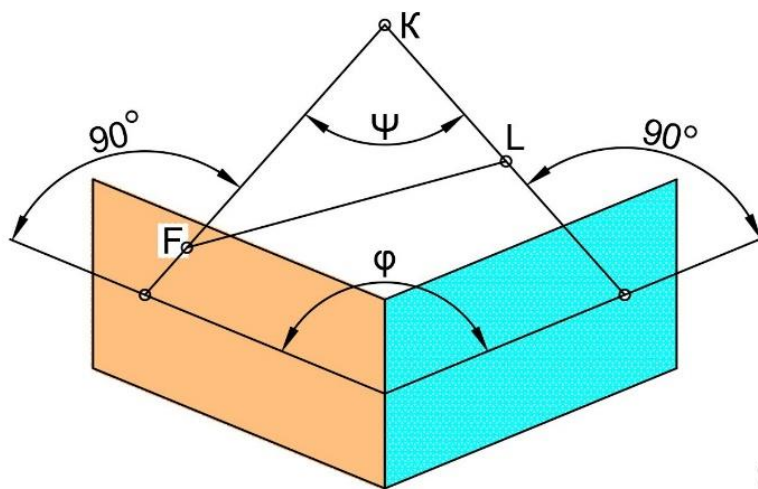


Рис. 132

4.6. Визначення кута між прямою та площиною

На рис. 133 показано площину загального положення, яку задано трикутником ABC , та відрізок RK прямого загального положення. Потрібно визначити кут між ними.

Завдання можна вирішити так:

1) із кінця К відрізка KR опускається перпендикуляр на задану площину;

2) на цьому перпендикулярі відзначається довільна точка Н і з'єднується прямою із кінцем R відрізка KR;

3) визначається натуральна величина трикутника KРН способом плоскопаралельного руху (рис. 134);

4) у трикутнику KРН заміряється кут Ψ у вершині К. Це кут між заданим відрізком KR і перпендикуляром, опущеним із точки К на задану площину;

5) за схемою, наведеною на рис. 135, розраховується кут γ між відрізком КР і заданою площиною: $\gamma = 90^\circ - \Psi$.

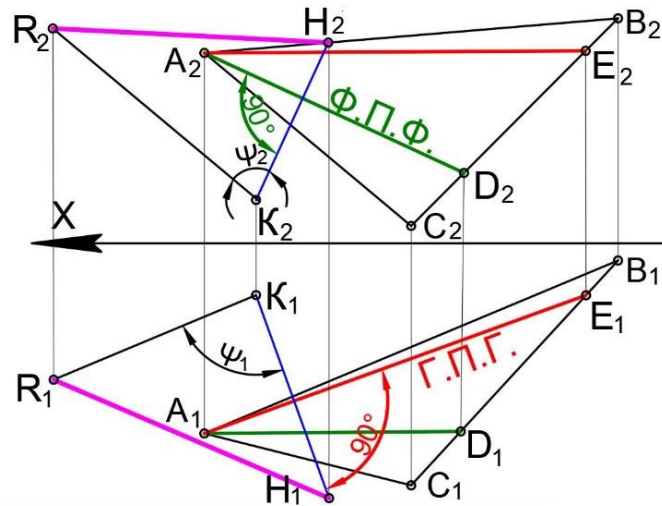


Рис. 133

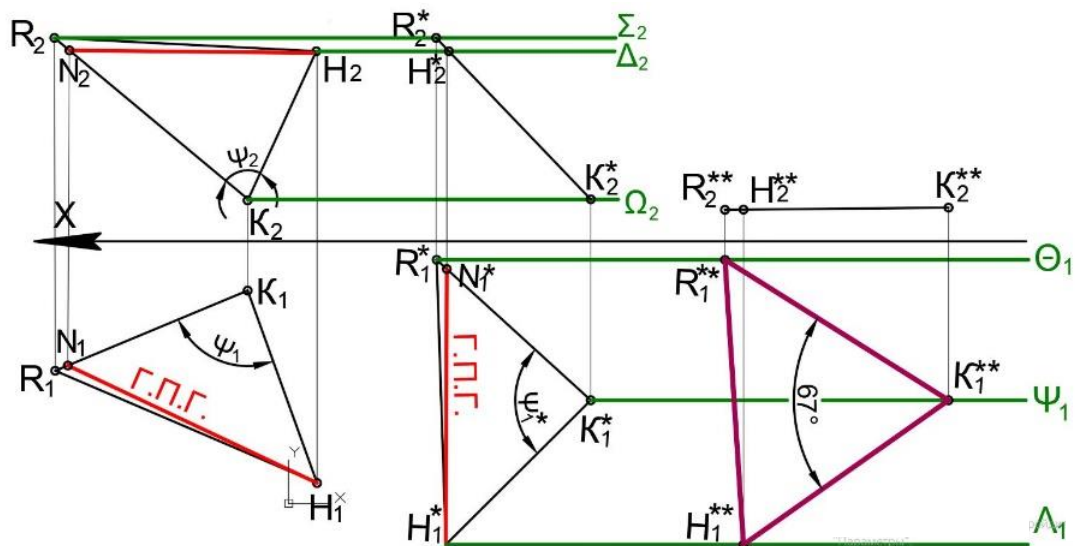


Рис. 134

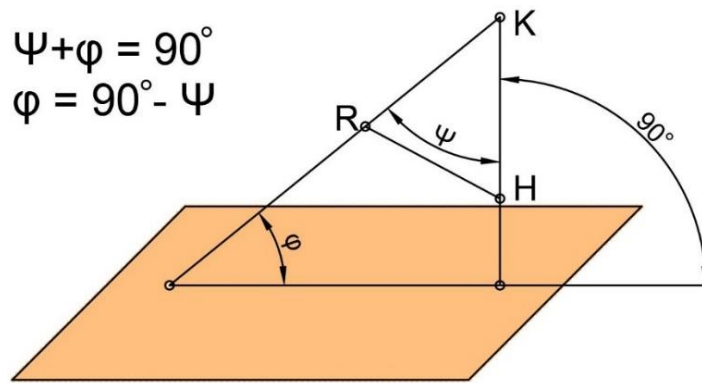


Рис. 135

На рис. 136 показано площину загального положення, задану трикутником ABC . Потрібно побудувати точку, віддалену від неї на 60 мм.

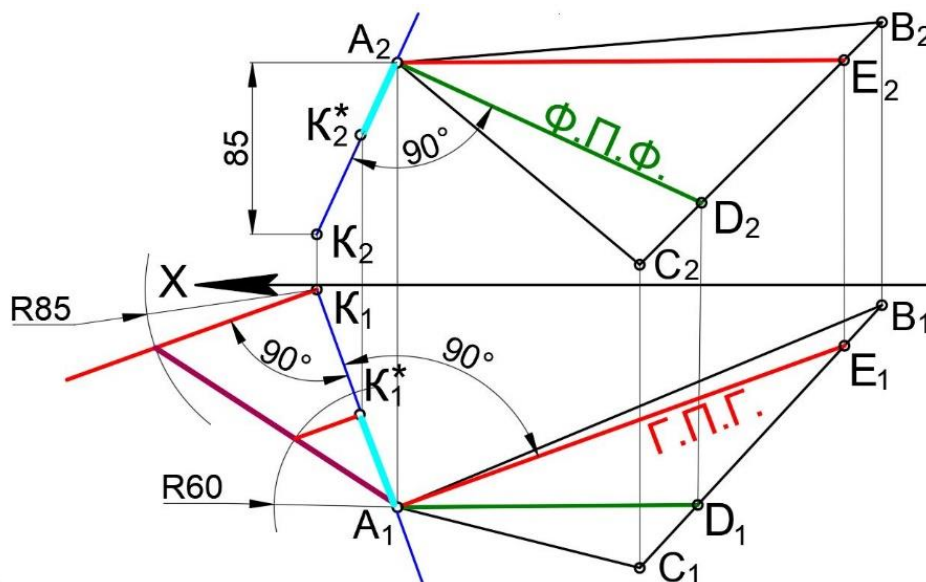


Рис. 136

Через вершину трикутника ABC проводимо перпендикуляр до заданої площини. Фронтальна проекція перпендикуляра має бути перпендикулярна до фронтальної проекції фронталі (Ф.П.Ф.), а горизонтальна проекція перпендикуляра – до горизонтальної проекції горизонталі (Г.П.Г.). На цьому перпендикулярі відзначаємо довільну точку і способом прямокутного трикутника визначаємо довжину відрізка KA (відстань від точки K до площини трикутника ABC). Натуральна величина відрізка KA – це гіпотенуза прямокутного трикутника, у якому один катет – горизонтальна проекція A_1K_1 відрізка AK , а другий катет – пере-

вищення фронтальної проекції A_2 точки A над фронтальною проекцією K_2 точки K . За умовою завдання потрібно побудувати точку, віддалену на 60 мм від площини трикутника ABC . Тому із проекції A_1 точки A проводимо дугу радіусом 60 мм, що перетинає гіпотенузу прямокутного трикутника. Із точки перетину дуги із гіпотенузою проводимо пряму, паралельну до другого катету прямокутного трикутника. Точка перетину цієї прямої із першим катетом (точка K_1^*) є горизонтальною проекцією точки, віддаленої від площини трикутника ABC на 60 мм. Фронтальну проекцію K_2^* цієї точки визначаємо за першим законом проекційного зв'язку та за належністю її фронтальної проекції перпендикуляру $A_2 K_2$.

Контрольні питання

1. Сутність метричних завдань.
2. Сутність способу зміни площин проекції.
3. Що таке допоміжна січна площина?
4. Визначення натуральної величини перпендикуляра способом прямокутного трикутника.
5. Надайте характеристику способу обертання.
6. Як називається лінія перетину площини фігури, що обертається, із площиною проекцій?
7. Сутність способу поєднання із горизонтальною площиною проекцій.
8. Сутність способу плоскопаралельного руху.
9. Наведіть методику визначення натуральної величини трикутника, використовуючи спосіб плоскопаралельного руху.
10. Наведіть алгоритм визначення відстані між сторонами паралелограма.
11. Сутність способу обертання навколо лінії рівня.
12. Наведіть методику визначення натуральної величини трикутника обертанням навколо горизонталі.
13. Методика визначення кута між площинами.
14. Що таке фронтальна проекція фронталі (Ф.П.Ф.) трикутника?
15. Що таке горизонтальна проекція горизонталі (Г.П.Г.) трикутника?
16. Методика визначення кута між прямою та площиною.

5. Розгортки поверхонь

Якщо абстрактну математичну поверхню подати у вигляді тонкої гнучкої та нерозтяжної плівки, то деякі з поверхонь можна шляхом вигину поєднати із площиною без розривів та складок. Поверхні, що мають цю властивість, називаються такими, що **розгортаються**, а фігура, отримана у результаті поєднання поверхні з площиною, називається **розгорткою**.

Побудова розгорток представляє важливе технічне завдання [18 – 20], оскільки безліч виробів різних галузей промисловості виготовляють із листового матеріалу шляхом вигину (резервуари і трубопроводи у нафтовій та газовій промисловості).

Розгорнення бічної поверхні похилого циліндра

На рис. 137 показано побудову нормального перетину похилого циліндра, вісь якого паралельна фронтальній площині проєкцій Π_2 .

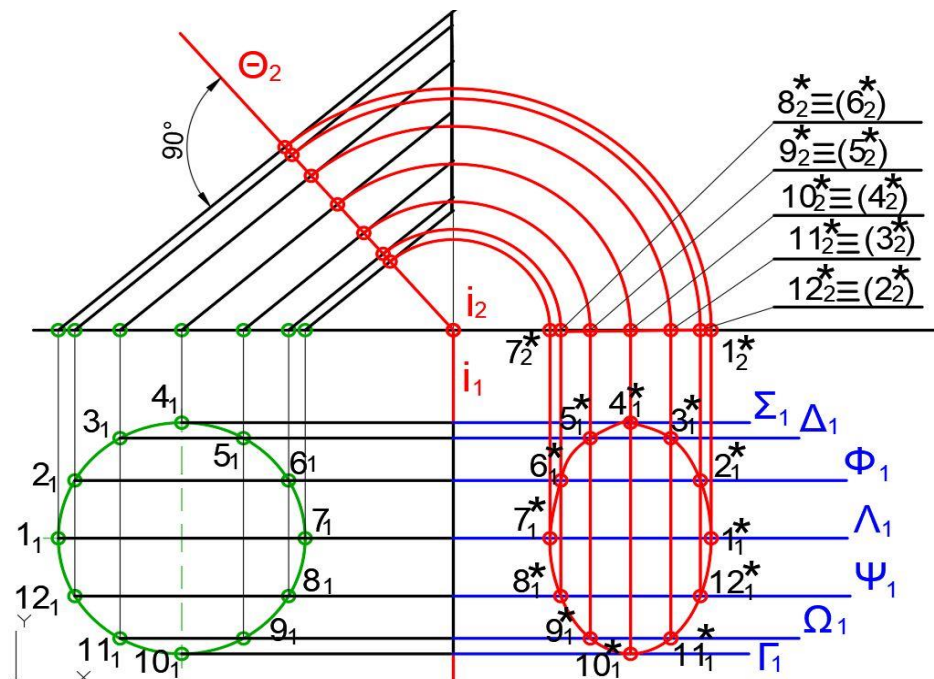


Рис. 137

У цьому випадку січна площина Θ , перпендикулярна до осі циліндра, є фронтально-проєціювальною площиною. Фігурою нормально-го перетину є еліпс. Отримання нормального перетину необхідне для побудови розгортки.

Під час розгортання циліндра крива нормального перетину розгорнеться у пряму лінію, і від цієї прямої, перпендикулярно до неї, необхідно відкласти відрізки твірних, узятих із фронтальної проекції. Твірні показано на поверхні циліндра за допомогою розподілу кола основи на 12 рівних частин. Еліпс при цьому розділився на таку ж кількість частин, але не всі ці частини мають рівну довжину.

Розгортання еліпса у пряму лінію здійснено шляхом послідовного відкладання на ній окремих його фрагментів (рис. 138 – рис. 151).

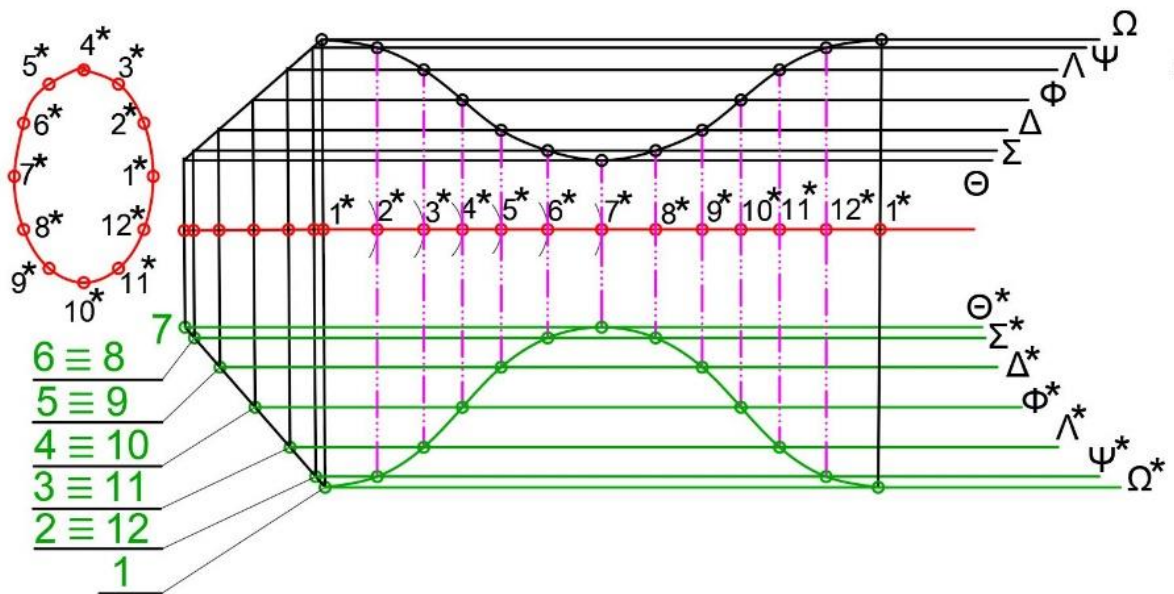


Рис. 138

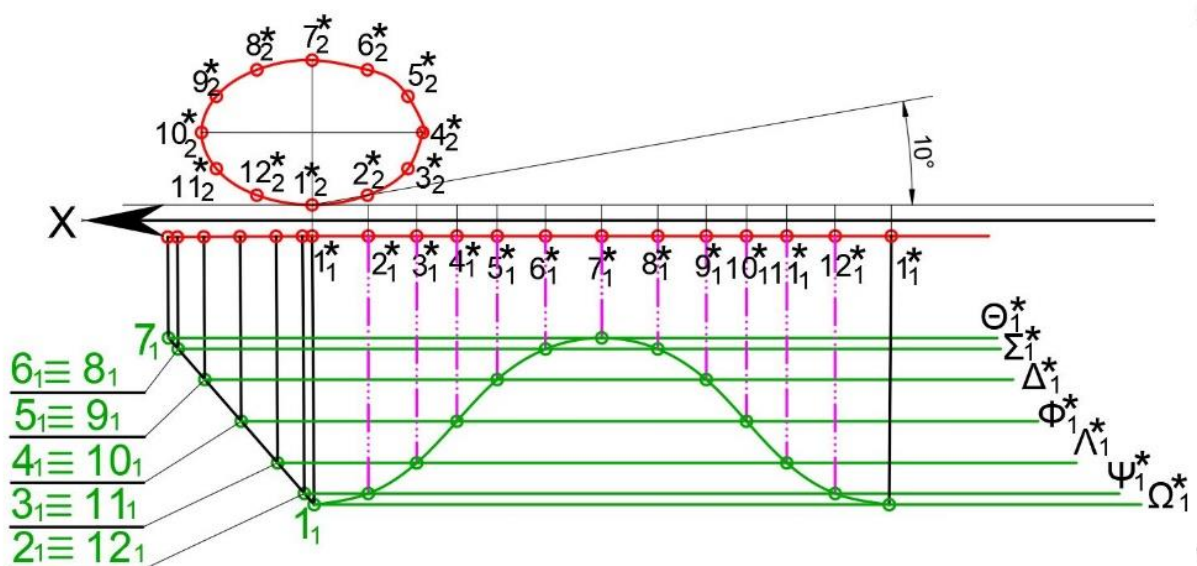


Рис. 139

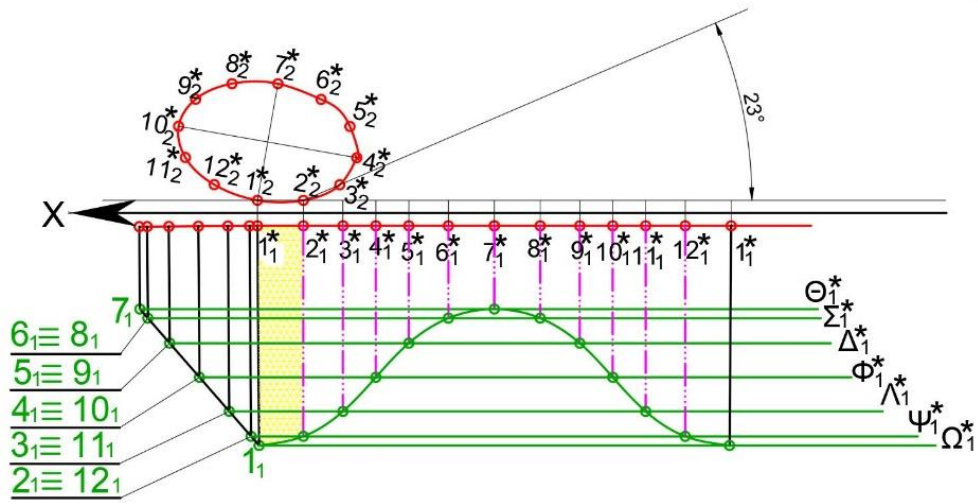


Рис. 140

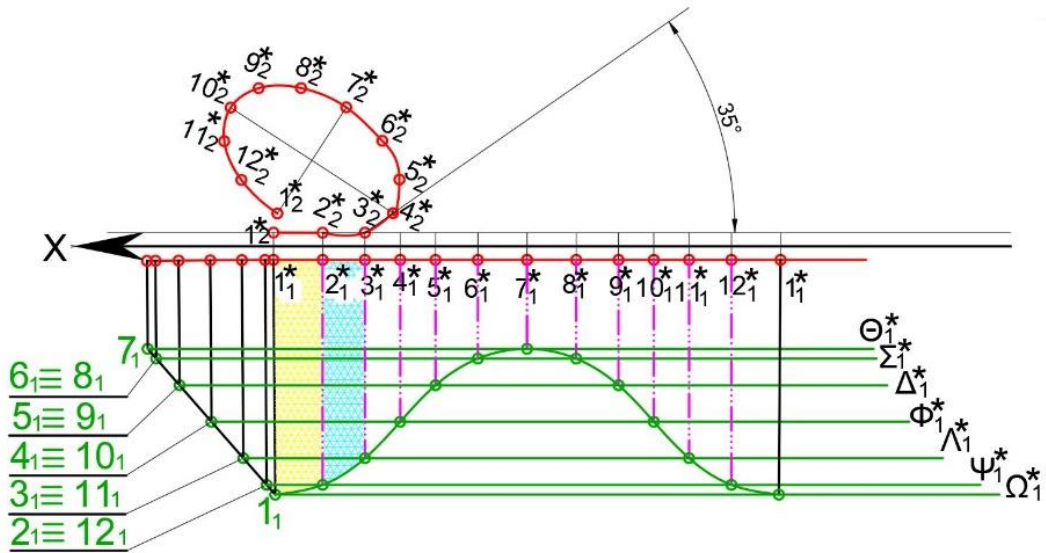


Рис. 141

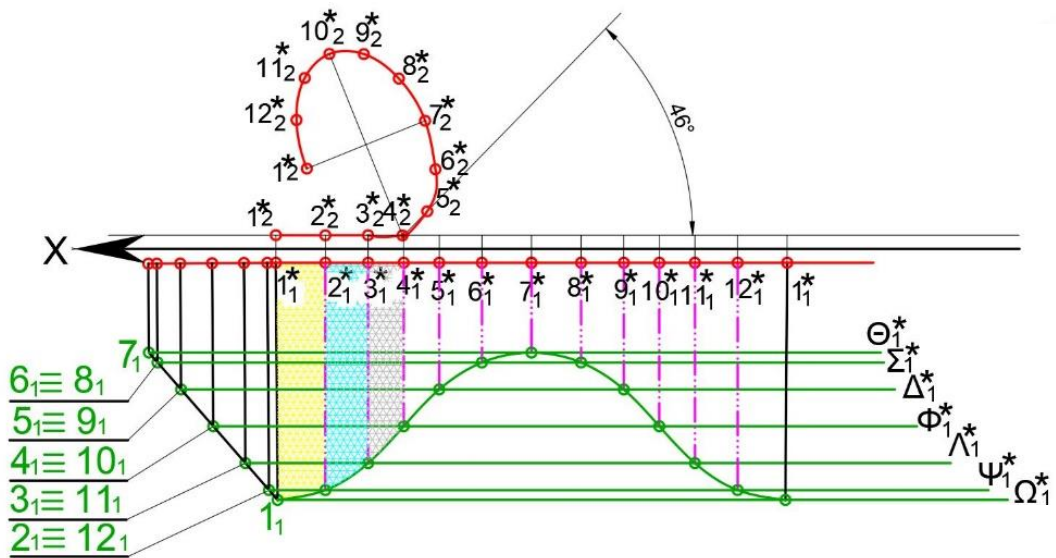


Рис. 142

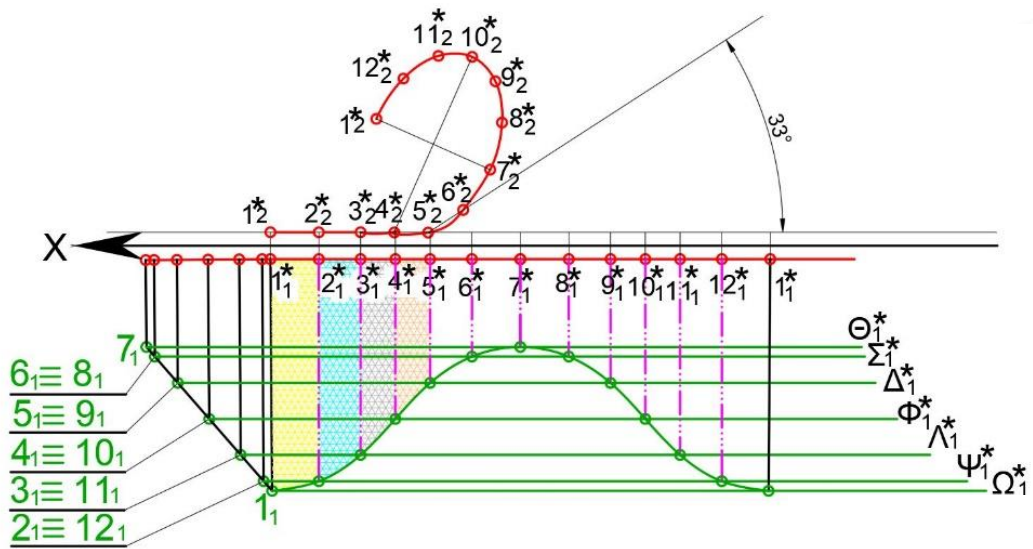


Рис. 143

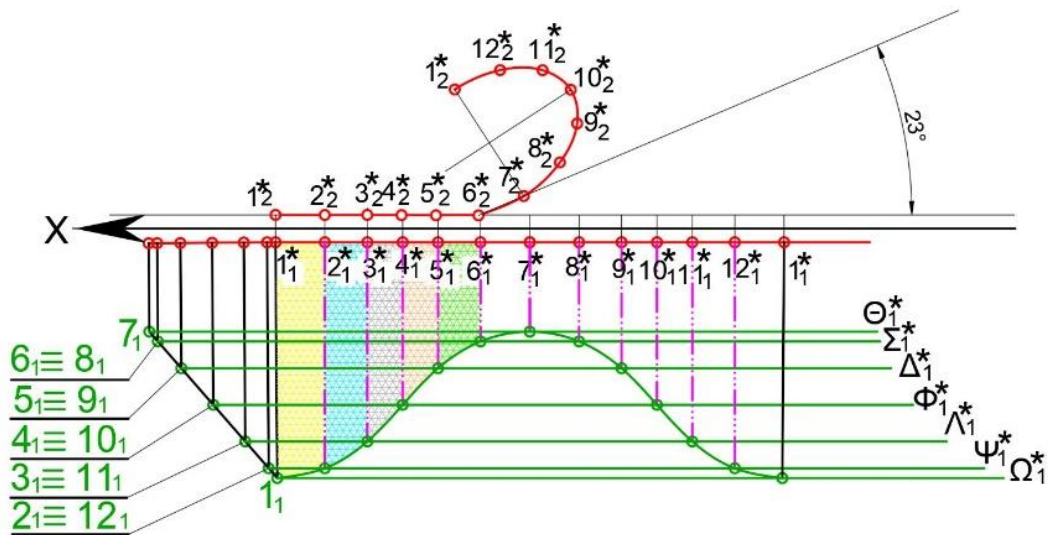


Рис. 144

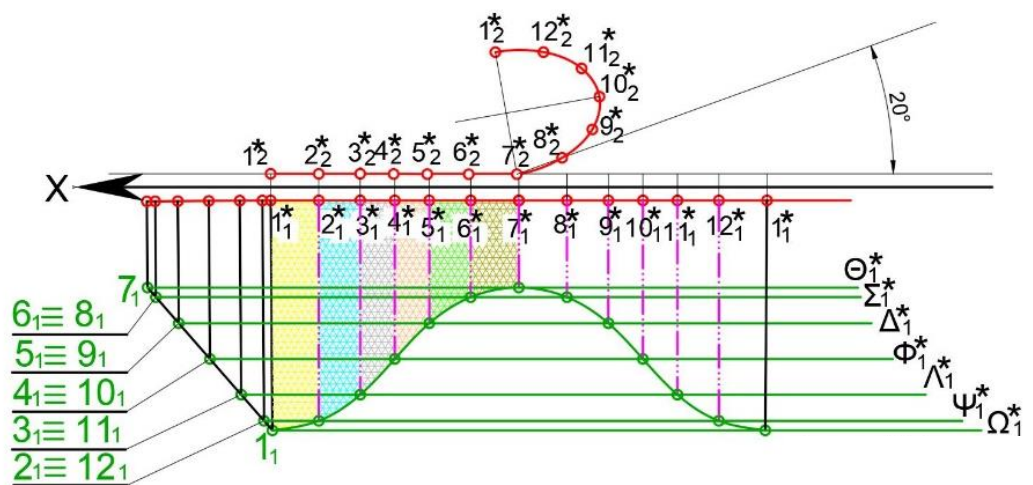


Рис. 145

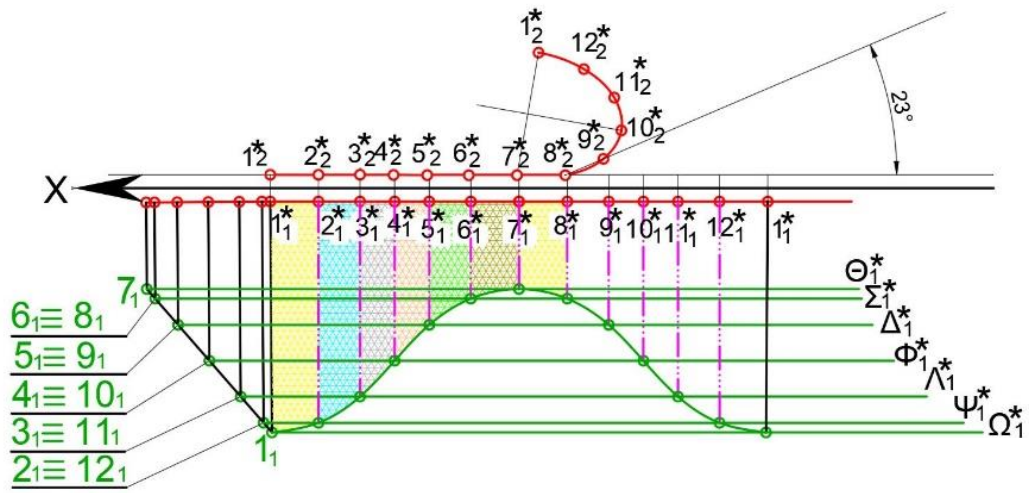


Рис. 146

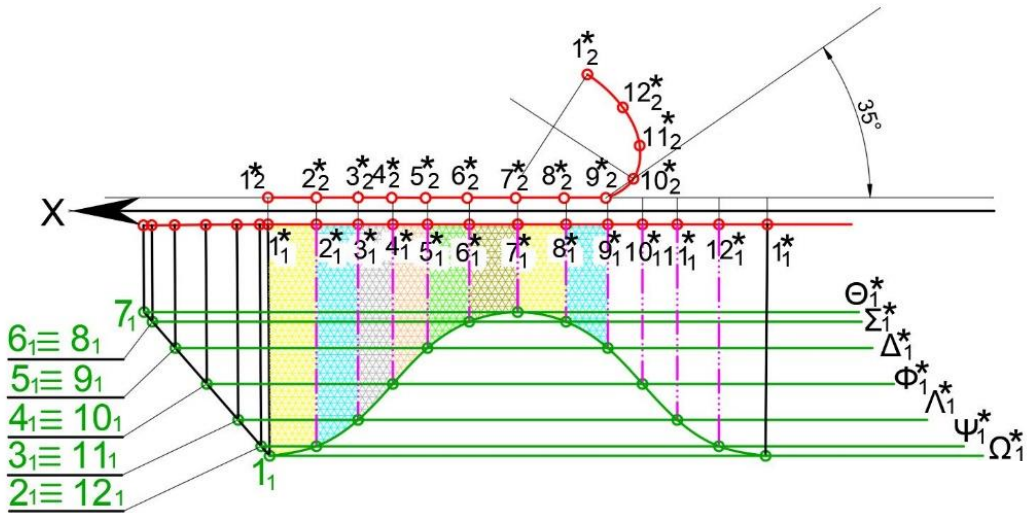


Рис. 147

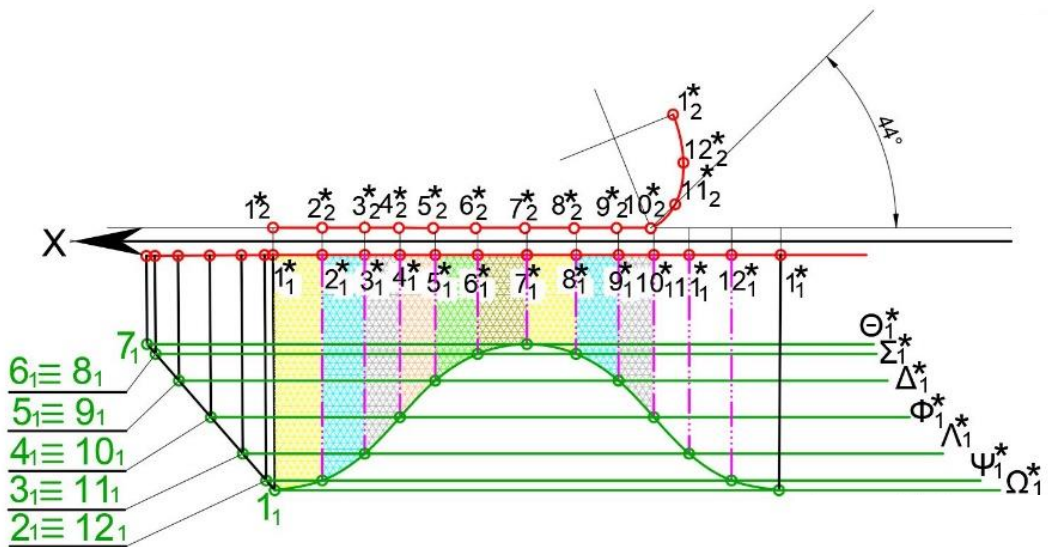


Рис. 148

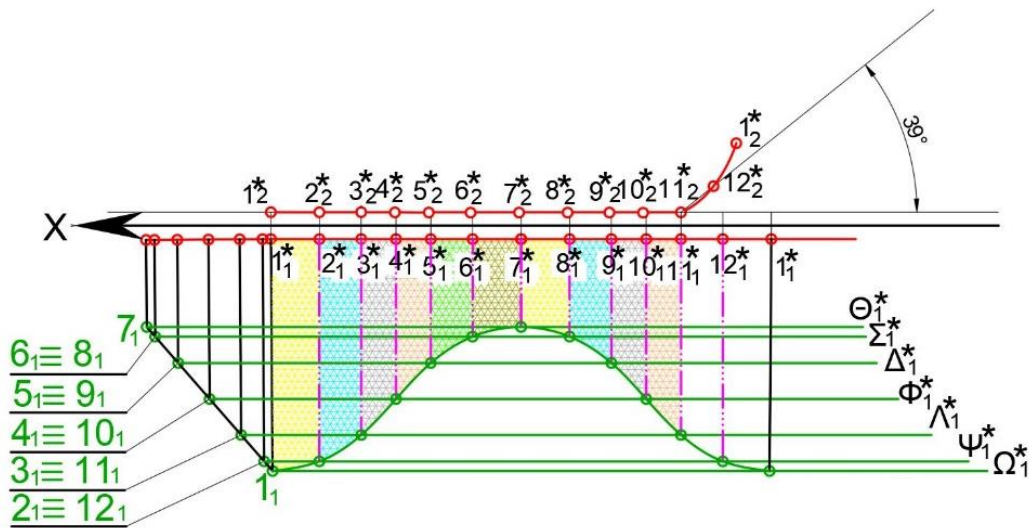


Рис. 149

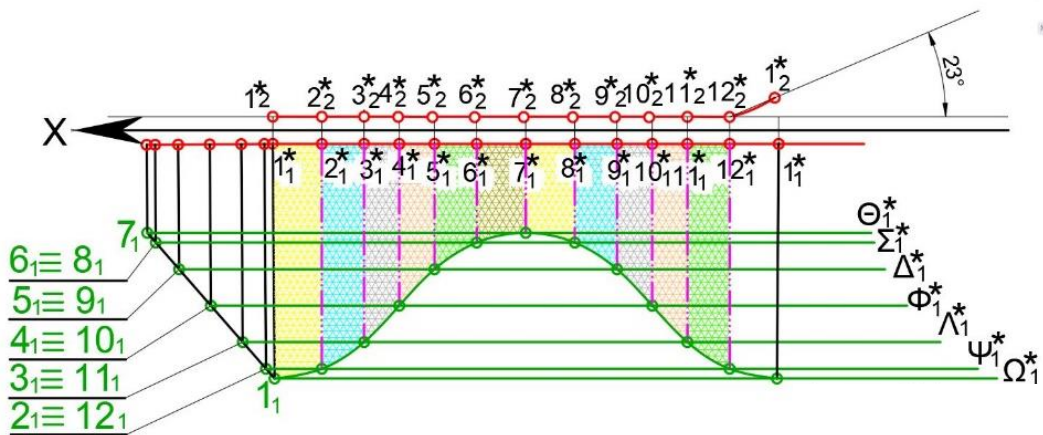


Рис. 150

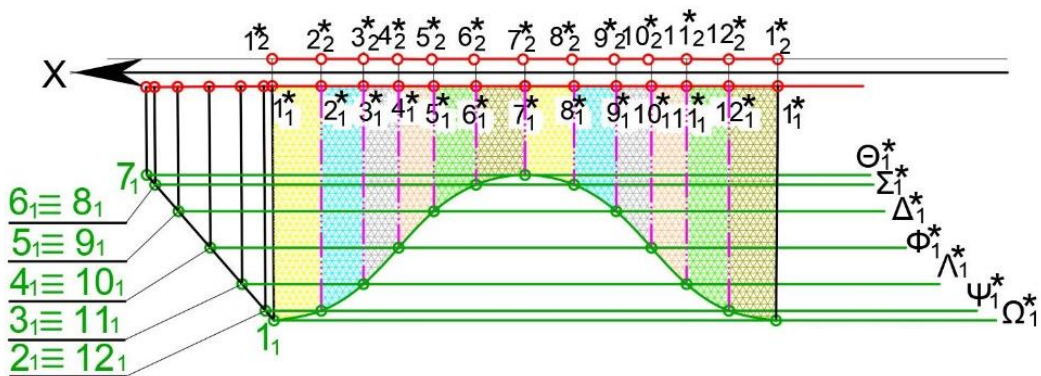


Рис. 151

На рис. 152 показано комплексне креслення бункера для зберігання сипких матеріалів. Основа бункера має прямокутну форму і збігається із горизонтальною площиною проєкцій Π_1 . Бічна поверхня бункера складається із двох жовтих рівнобедрених трикутників, двох

зелених рівнобедрених трикутників і чотирьох однакових червоних конічних поверхонь. Кожна із цих конічних поверхонь може бути утворена під час руху прямолінійної твірної по криволінійній напрямній – $\frac{1}{4}$ частини кола, площина якої паралельна площині Π_1 . Прямолінійна твірна має одну нерухому точку – вершину конічної поверхні, що збігається із вершиною прямокутної основи бункера. Необхідно побудувати розгортку бічної поверхні бункера. Розбиваємо верхню основу бункера (коло) на 12 рівних частин і проводимо через точки поділу твірні. Кожну конічну поверхню розбиваємо на три криволінійні трикутники (сірий, коричневий та блакитний), які з достатньою для практики точністю можна замінити плоскими трикутниками.

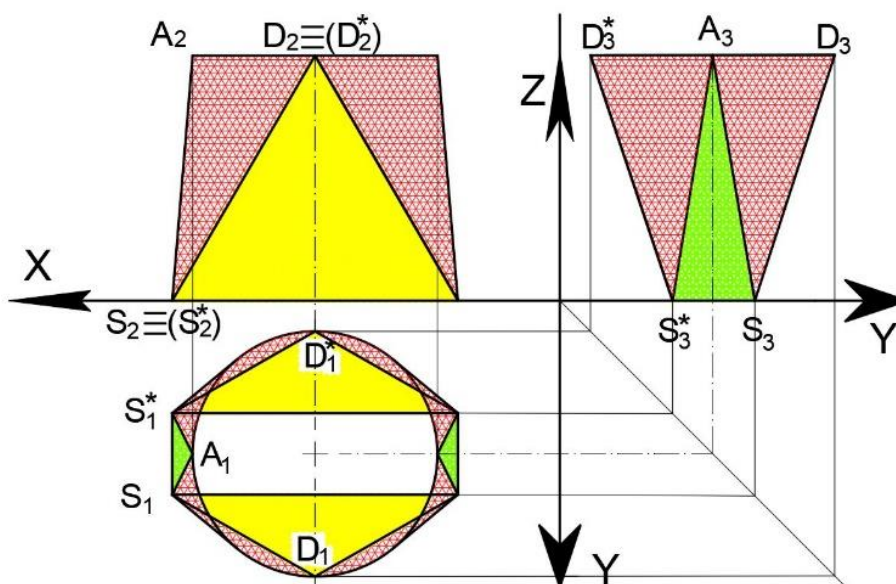


Рис. 152

Отже, кожен конічний поверхню замінюємо тригранною пірамідалною поверхнею (рис. 153).

Таким чином, бічна поверхня бункера почала складатися тільки із трикутників. Способом обертання навколо осі J , перпендикулярної горизонтальній площині проєкцій Π_1 , що проходить через вершину S прямокутної нижньої основи бункера, визначаємо натуральні величини ребер пірамід. Відрізки $S_2D_2^{**}$, $S_2C_2^{**}$, $S_2A_2^{**}$, $S_2B_2^{**}$ є натуральними величинами однойменних ребер (рис. 154).

Побудова розгортки бічної поверхні бункера зводиться до послідовної побудови плоских трикутників: DSS (рис. 155), DCS (рис. 156), CBS (рис. 157), BAS (рис. 158), ASS (рис. 159), тощо (рис. 160).

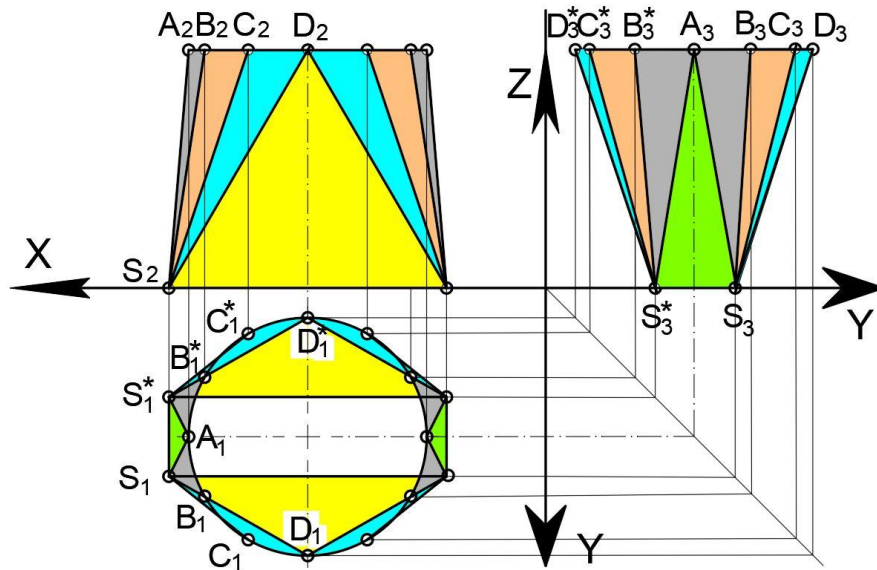


Рис. 153

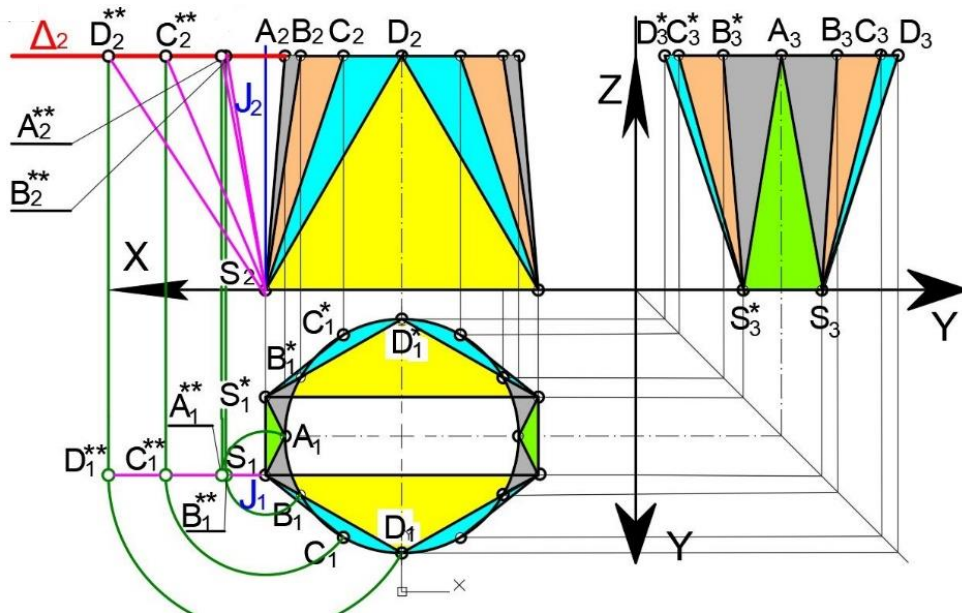


Рис. 154

На рис. 161 показано комплексне креслення бункера для зберігання сипких матеріалів, що має дві площини симетрії. Нижньою основою бункера є коло, а верхньою основою – квадрат. Бічна поверхня бункера складається із чотирьох однакових зелених трикутників і чотирьох однакових червоних конічних поверхонь, вершини яких є вершинами квадрата. Необхідно побудувати розгортку бічної поверхні бункера.

Розбиваємо коло (нижню основу бункера) на 16 рівних частин і проводимо через точки поділу твірні конічних поверхонь. Кожну конічну

поверхню розбиваємо на 4 криволінійних трикутники (коричневий, жовтий, блакитний, фіолетовий), які з достатньою для практики точністю можна замінити плоскими трикутниками. Таким чином, кожену конічну поверхню ми замінюємо чотиригранною пірамідальною поверхнею (рис. 162). Таким чином, бічна поверхня бункера стала складатися тільки з трикутників.

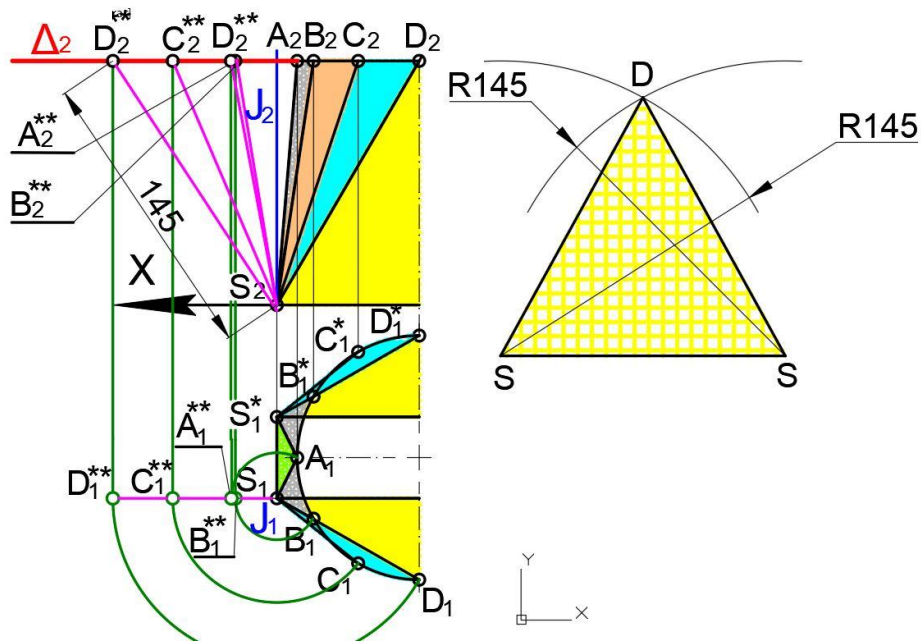


Рис. 155

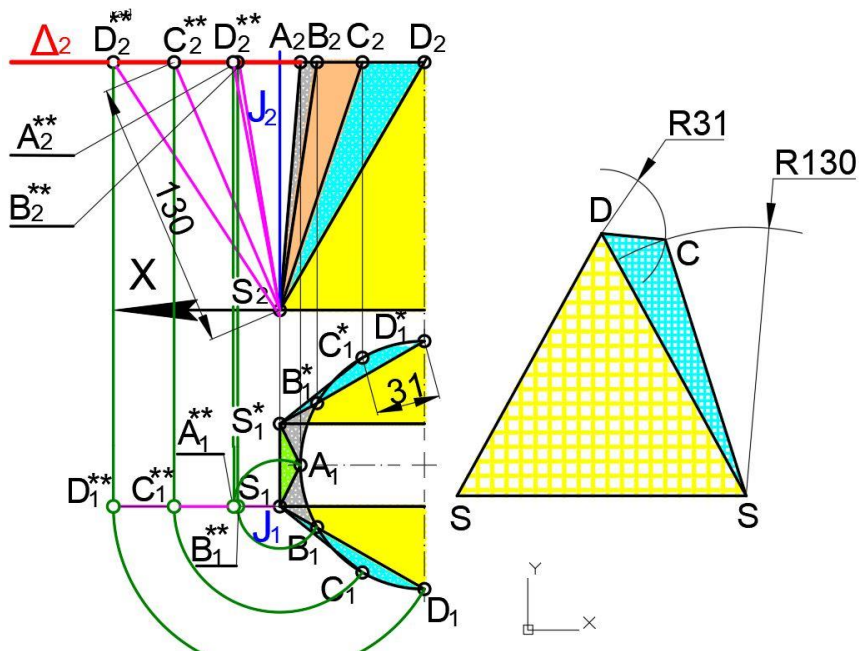


Рис. 156

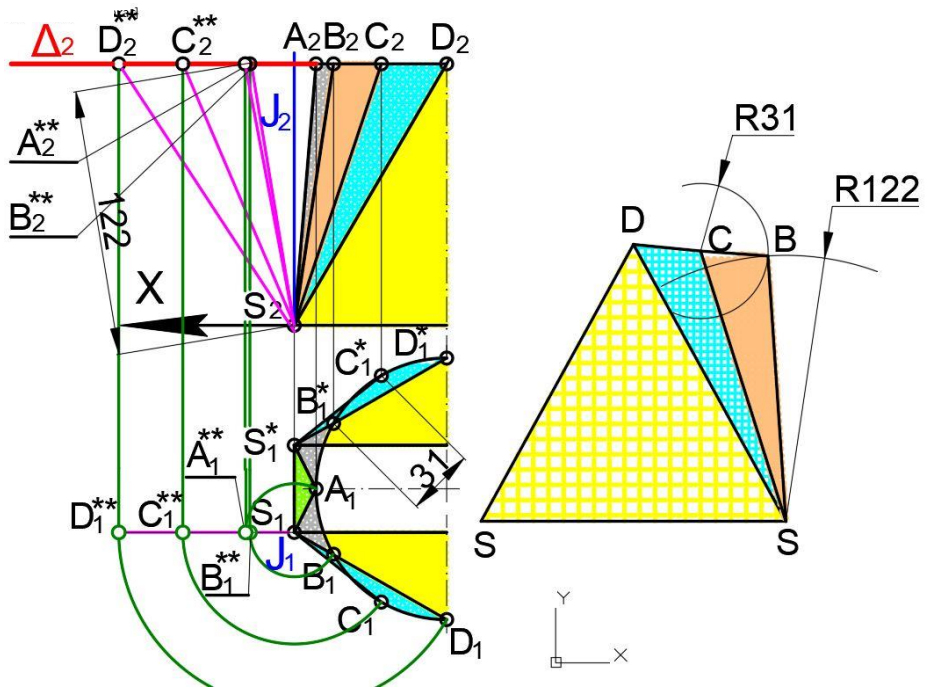


Рис. 157

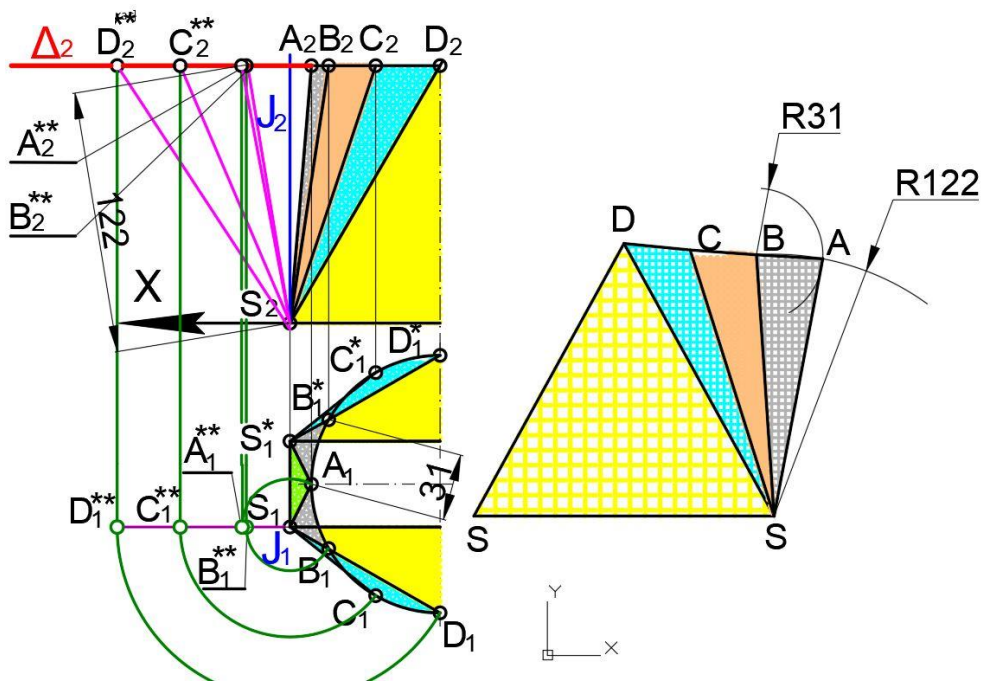


Рис. 158

Використовуючи спосіб плоскопаралельного руху, визначаємо натуральні величини ребер пірамід. Для цього всі ребра пірамід розміщуємо паралельно до фронтальної площини проєкцій Π_2 (їх горизонтальні проєкції – паралельні осі X). Фронтальні проєкції $S_2\Delta C_2\Delta$, $S_2\Delta B_2\Delta$, $S_2\Delta D_2\Delta$, $S_2\Delta A_2\Delta$, $S_2\Delta E_2\Delta$ ребер є натуральними величинами (рис. 163).

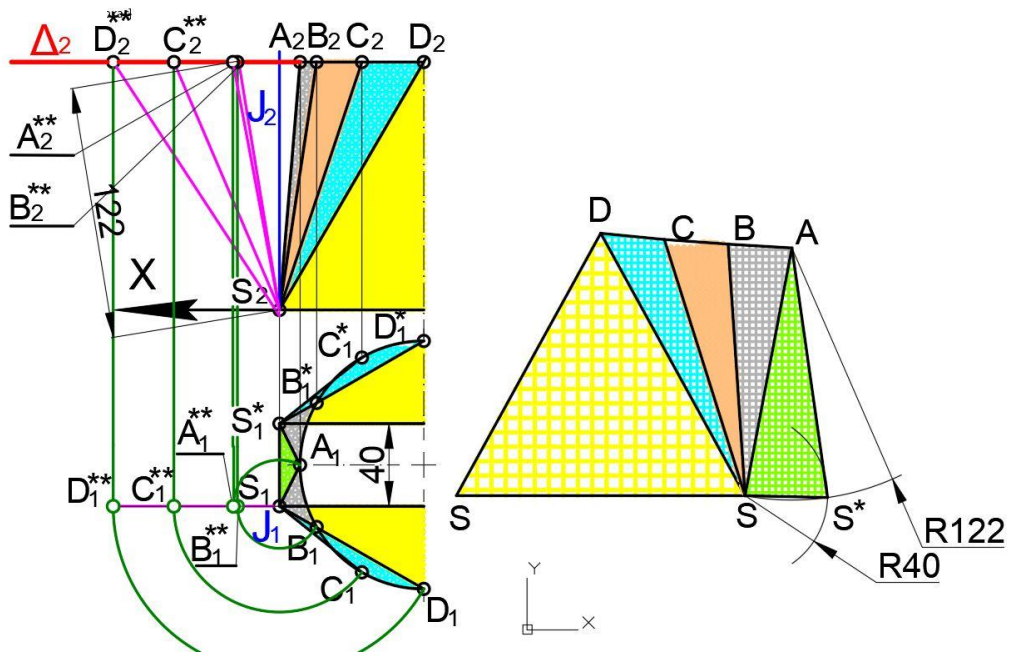


Рис. 159

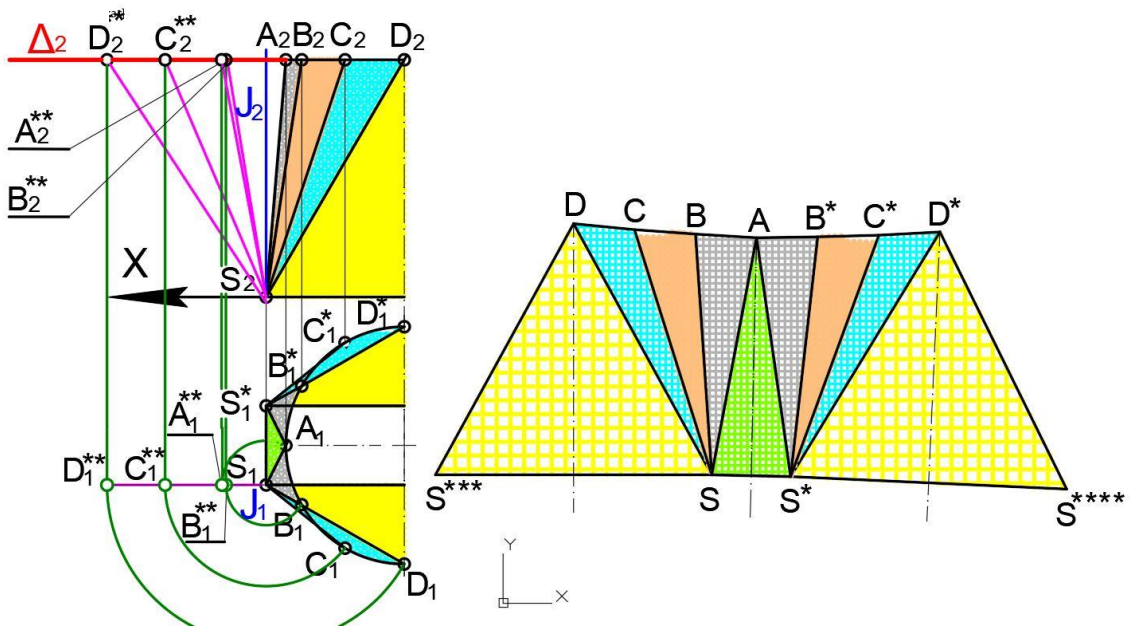


Рис. 160

Побудова розгортки бічної поверхні бункера зводиться до послідовної побудови плоских трикутників: ASS^* (рис. 164), ABS (рис. 165), BCS (рис. 166), CDS (рис. 167), DES (рис. 168), ESS^{**} (рис. 169) тощо (рис. 170).

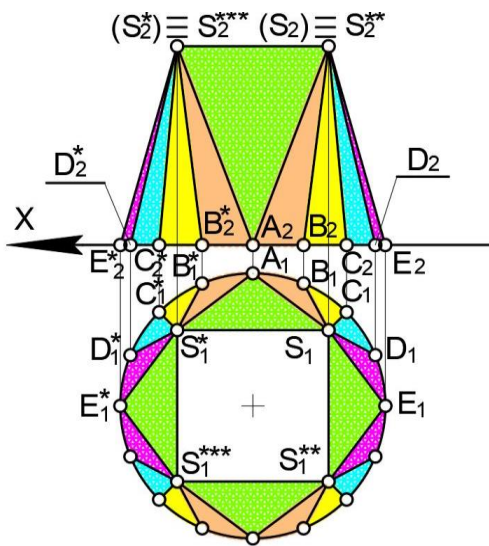


Рис. 161

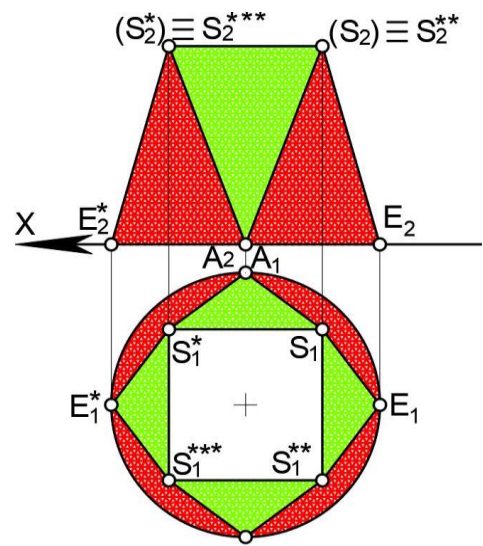


Рис. 162

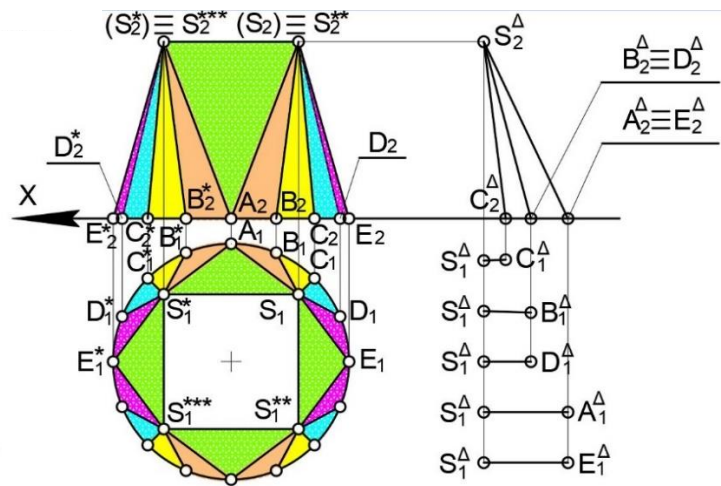


Рис. 163

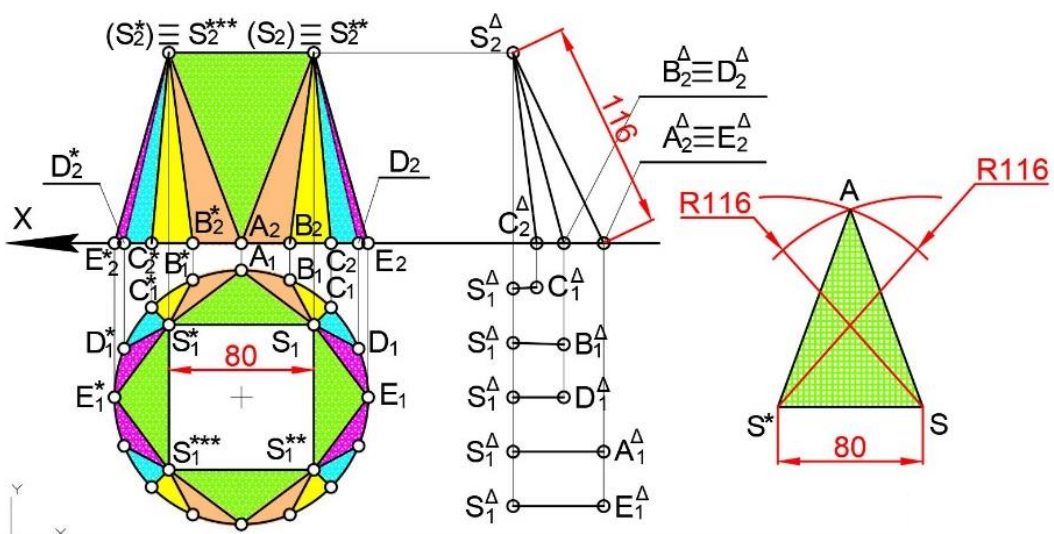


Рис. 164

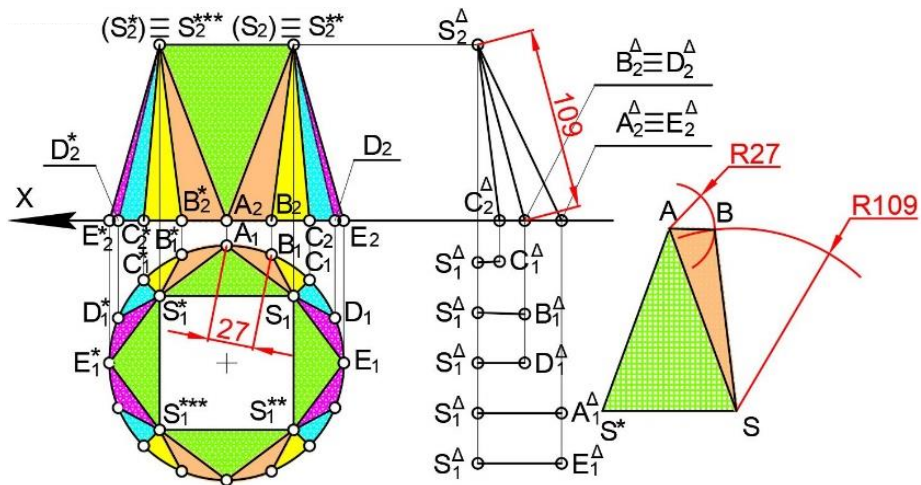


Рис. 165

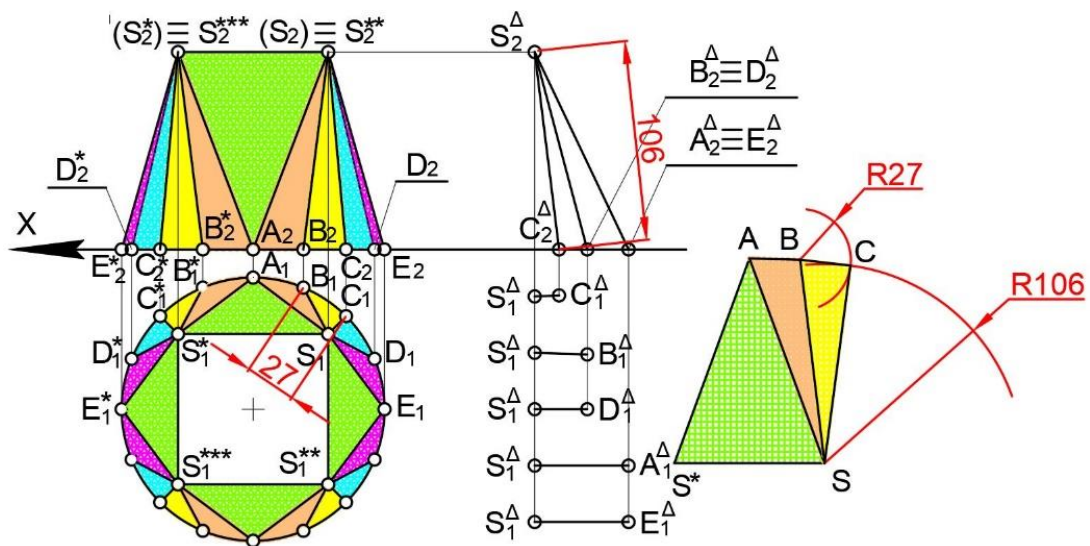


Рис. 166

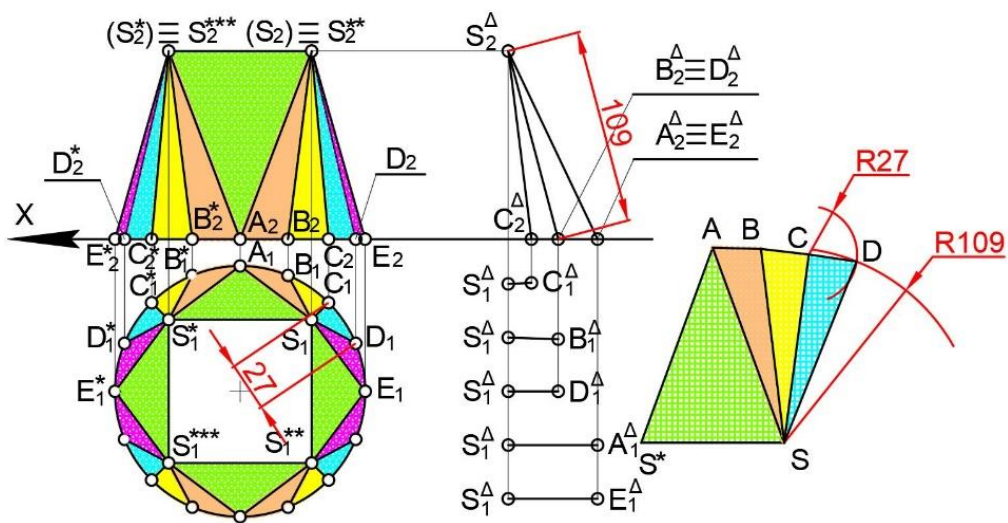


Рис. 167

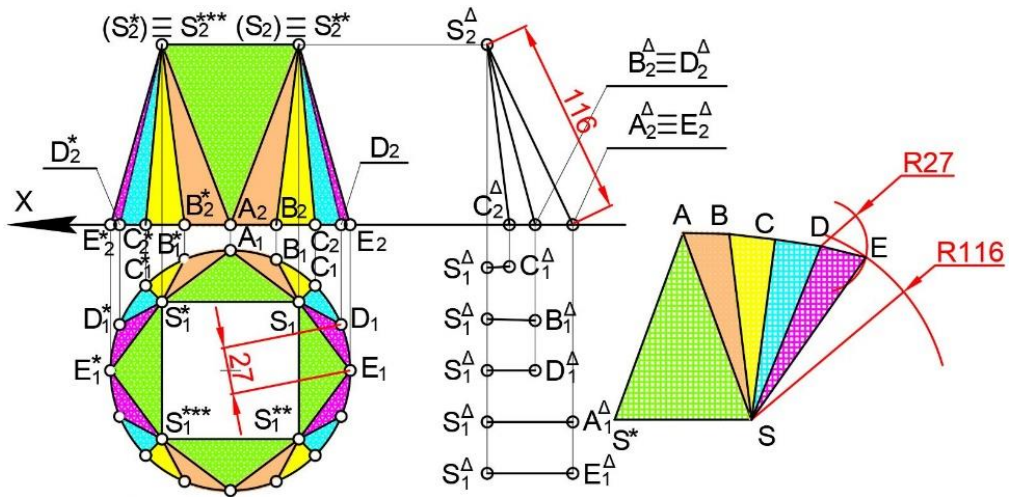


Рис. 168

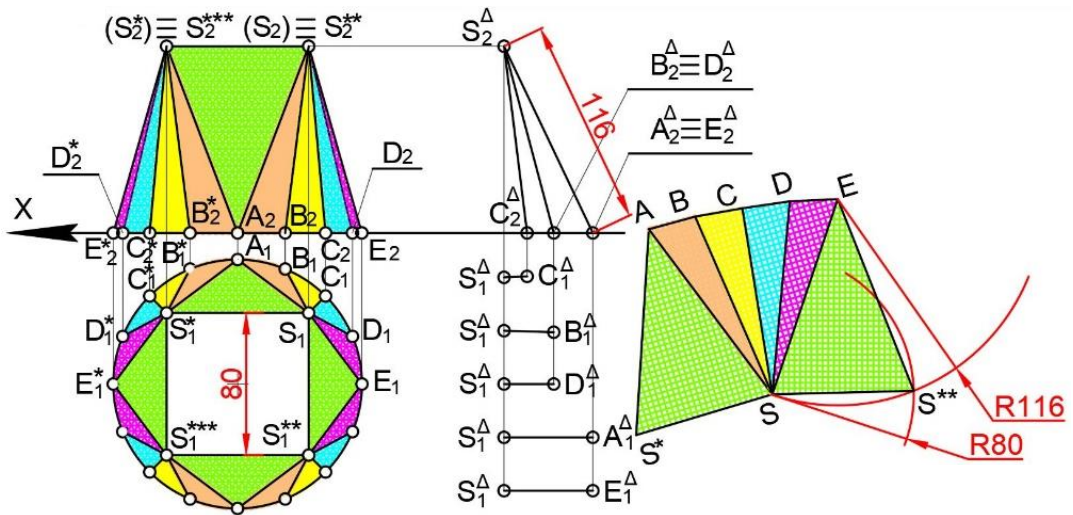


Рис. 169

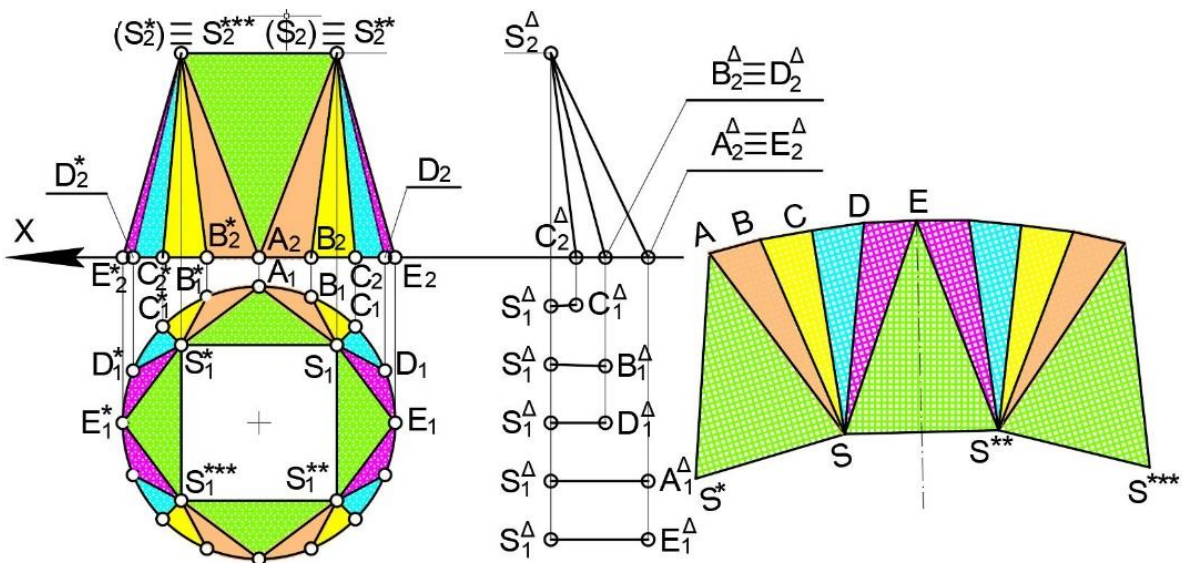


Рис. 170

На рис. 171 показано комплексне креслення похилого конуса з еліпсною основою, що знаходиться на горизонтальній площині проекції Π_1 . Необхідно побудувати розгортку бічної поверхні конуса.

Ділимо основу конуса на 8 рівних частин і проводимо через точки поділу твірні.

Таким чином, всю бічну частину конуса розбиваємо на 8 криволінійних трикутників, які з достатньою для практики точністю можна замінити плоскими трикутниками; отже, бічна поверхня конуса замінюється бічною поверхнею 8-кутової піраміди, вписаною у цей конус. Способом обертання навколо осі і, перпендикулярної горизонтальній площині проекцій Π_1 , знаходимо натуральні величини всіх бічних ребер піраміди (рис. 171).

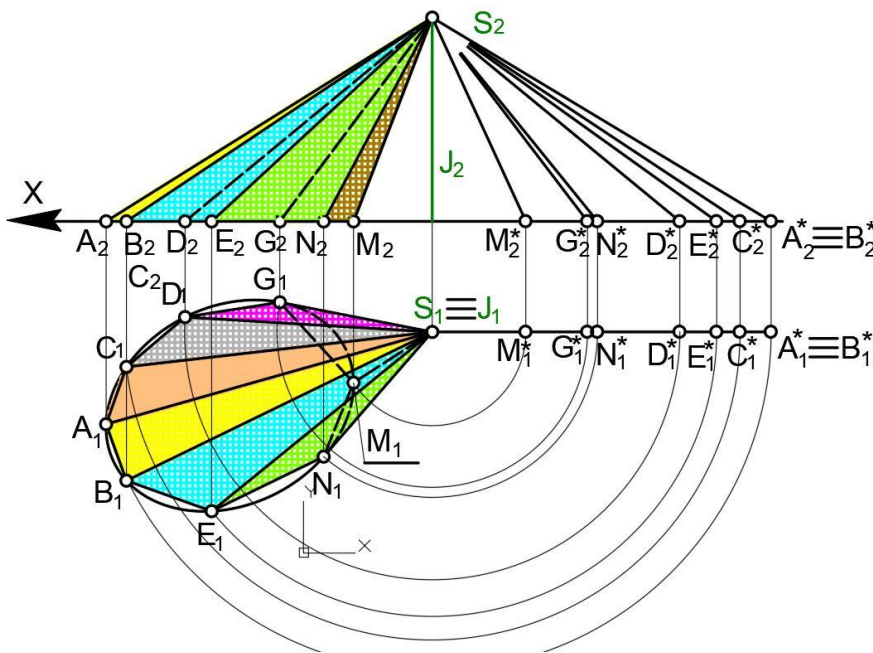


Рис. 171

Побудова розгортки бічної поверхні конуса (піраміди) зводиться до послідовної побудови плоских трикутників SAB (рис. 172), SAC (рис. 173), SCD (рис. 174), SDG (рис. 175), SGM (рис. 176), SMN (рис. 177), SBE (рис. 178), SEN (рис. 179).

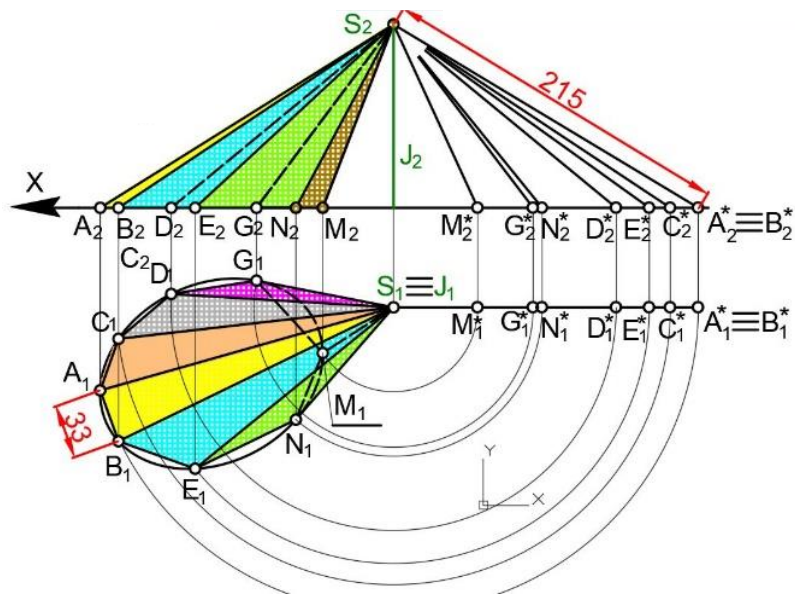


Рис. 172

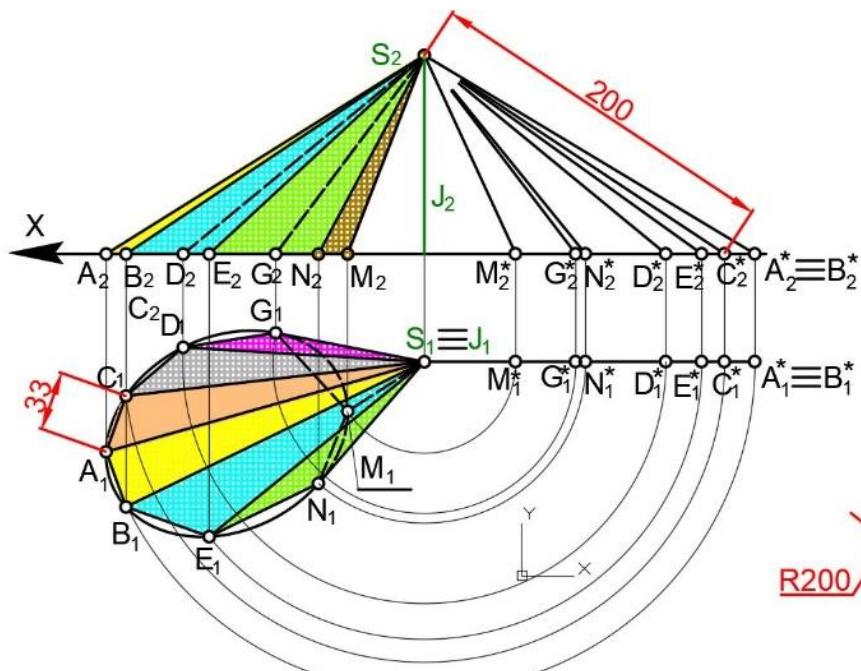


Рис. 173

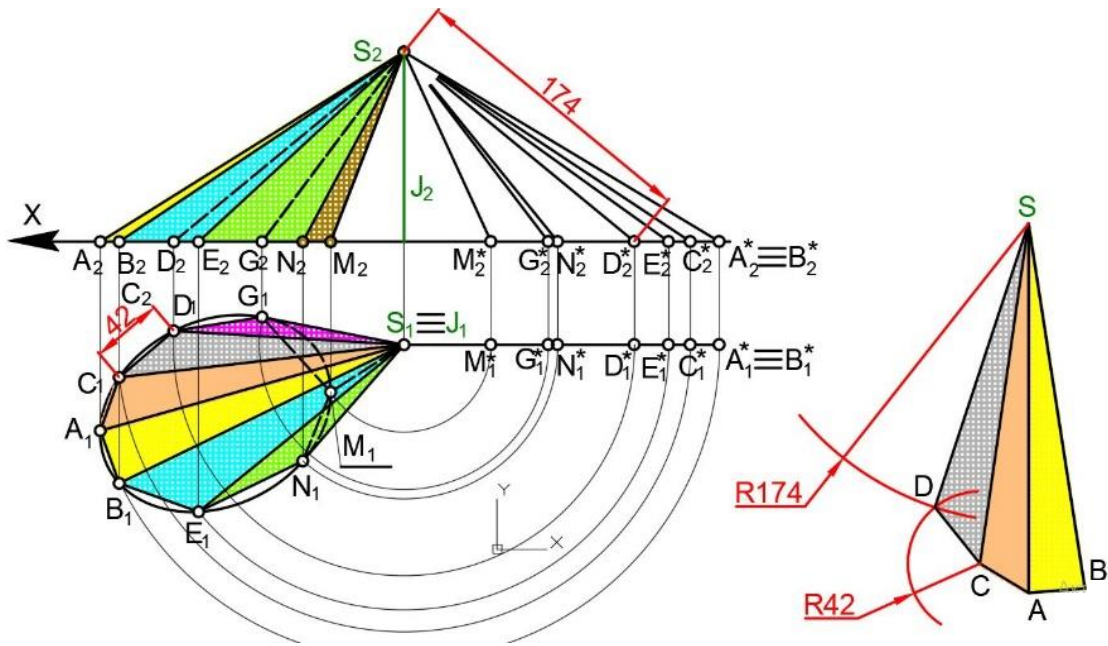


Рис. 174

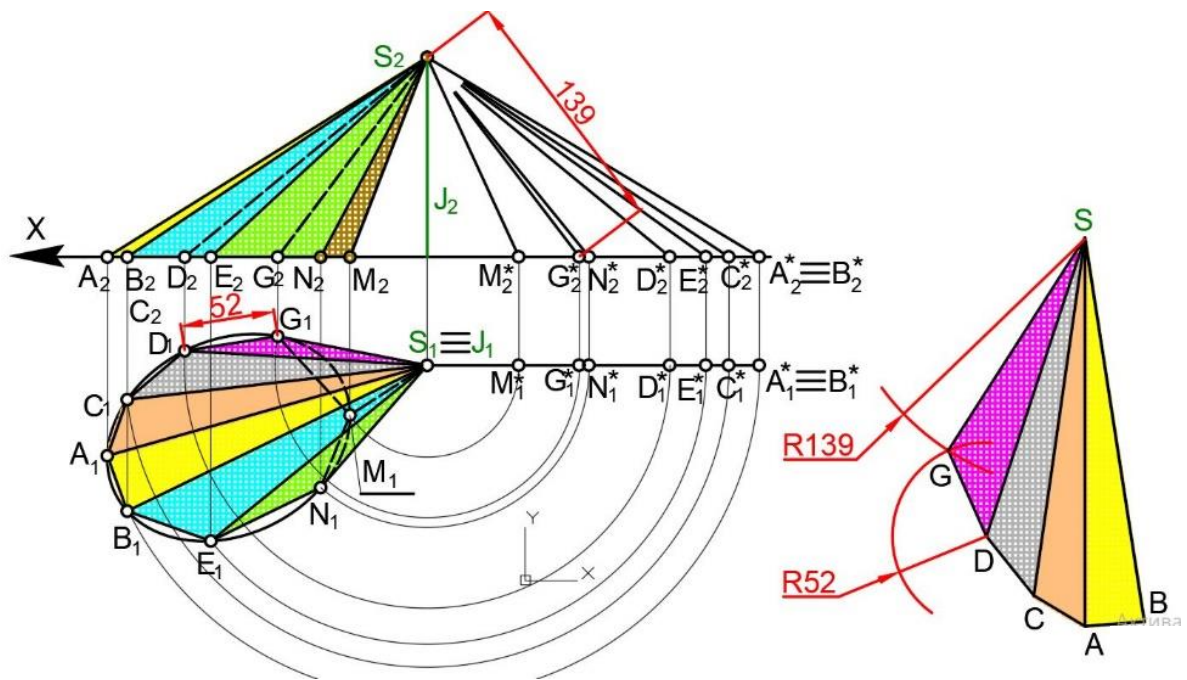


Рис. 175

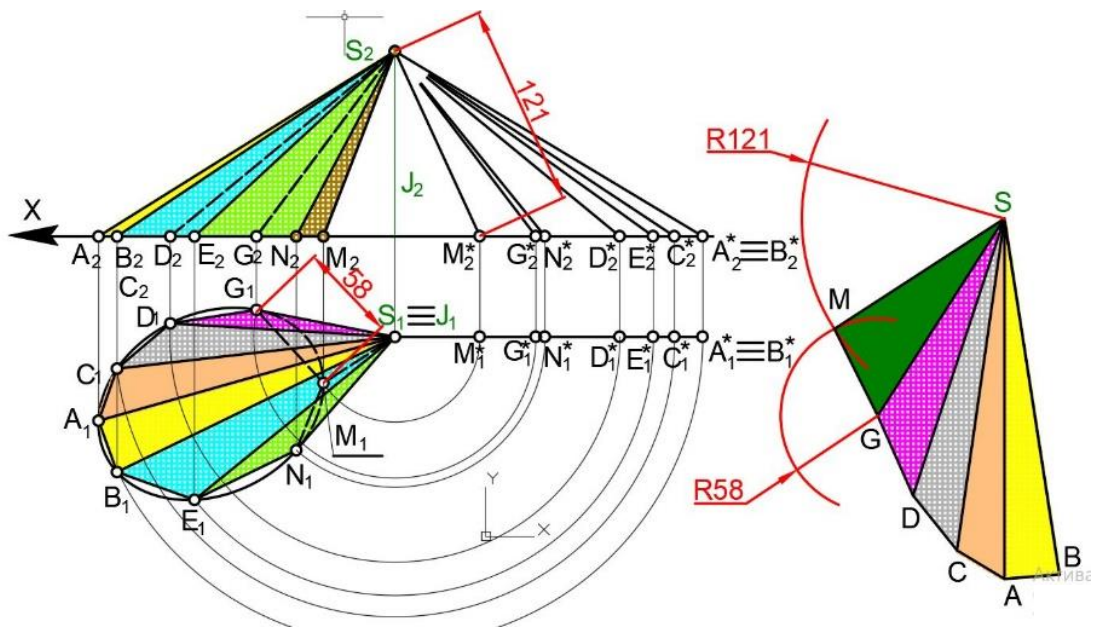


Рис. 176

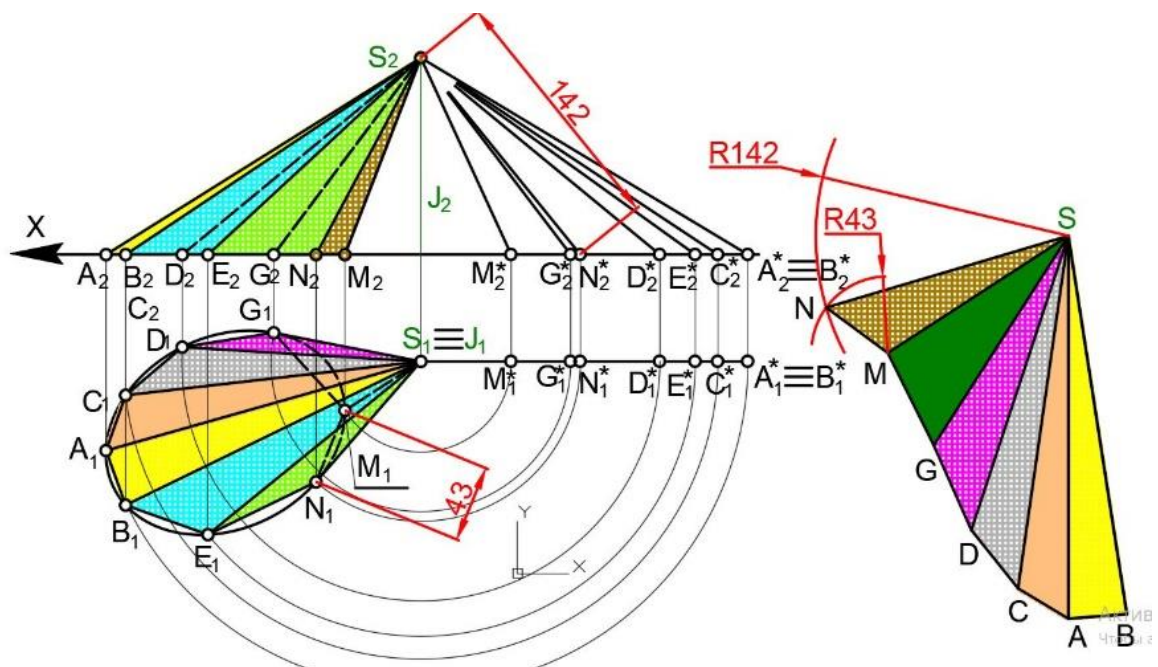


Рис. 177

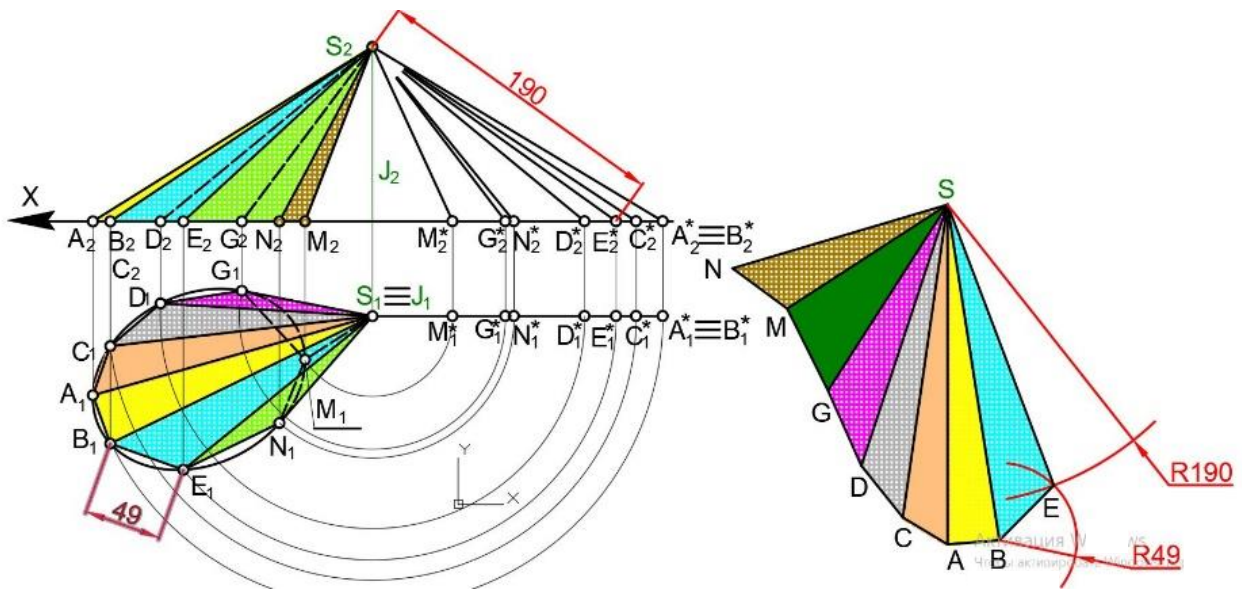


Рис. 178

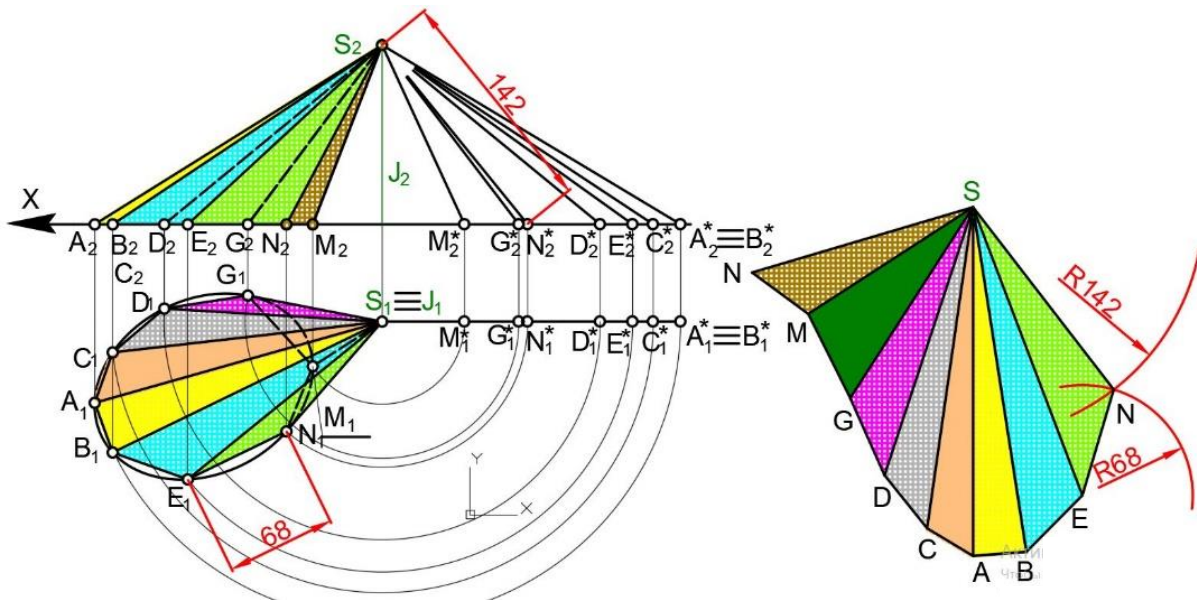


Рис. 179

На рис. 180 показано комплексне креслення зрізаного похилого конуса.

Ділимо верхню і нижню основи конуса на 12 рівних частин і з'єднуємо прямими (твірними) точки 1-1*, 2-2*, 3-3* тощо, тобто вписуємо в усічений конус 12-гранну усічену піраміду. Замінивши кожен криволінійну трапецію плоскою, розбиваємо їх на трикутники. Способом плоскопаралельного руху визначаємо натуральні величини всіх твірних і діагоналей. Побудова розгортки бічної поверхні зрізаного конуса зводиться до послідовної побудови плоских трикутників: 7*78, 7*88*, 88*9

тощо (рис. 181). Необхідно побудувати розгортку його бічної поверхні, не користуючись його вершиною.

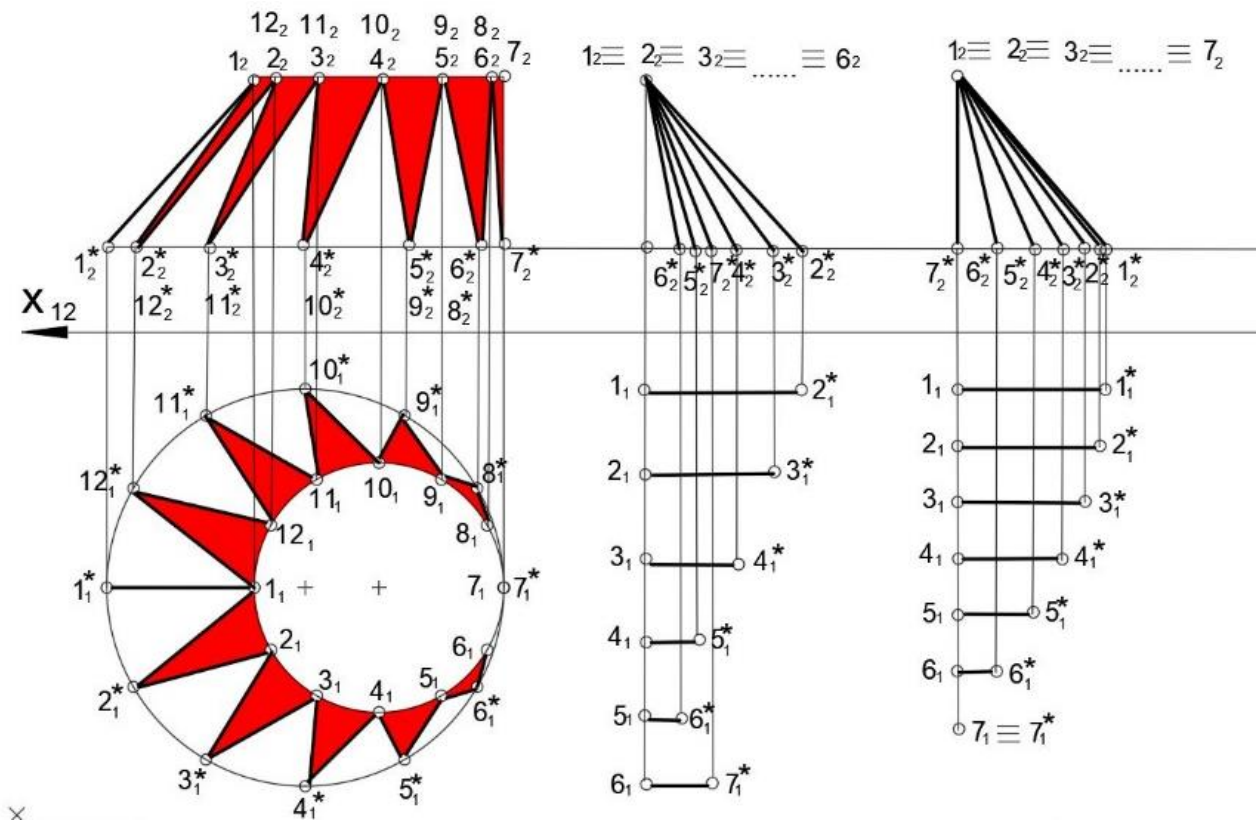


Рис. 180

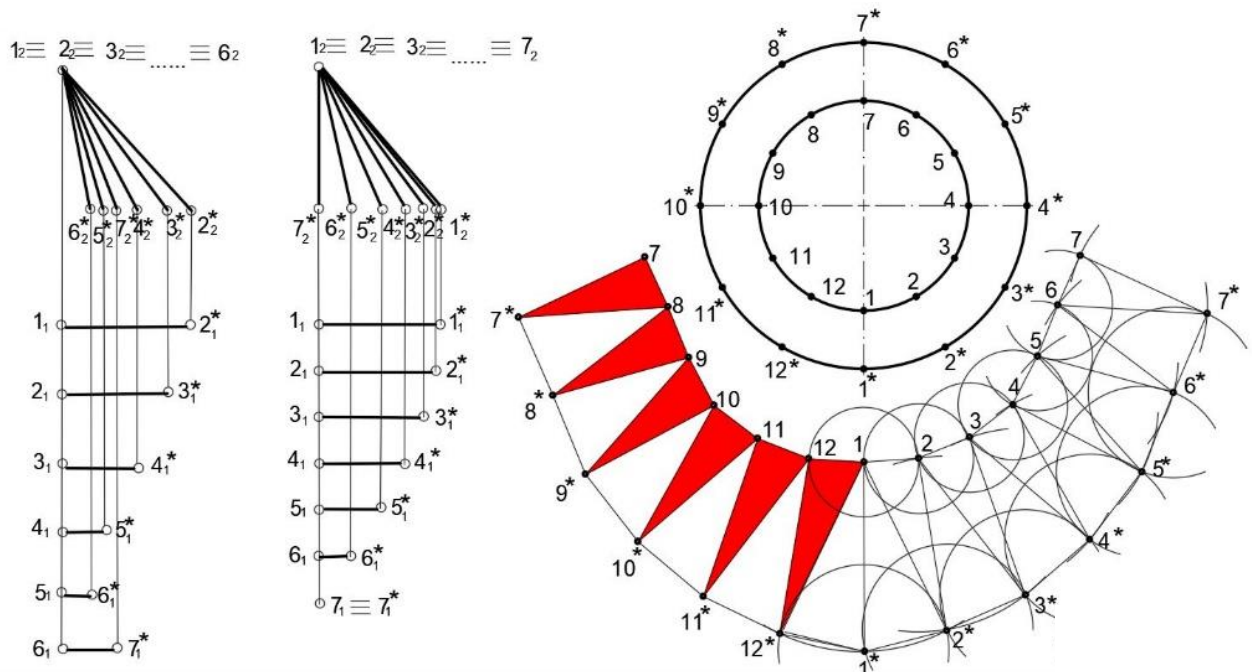


Рис. 181

На рис. 182 показано комплексне креслення бункера для зберігання сипких матеріалів, що має дві площини симетрії. Нижня основа бункера кругла, а верхня має вигляд двох розсунутих півкіл, які з'єднуються прямолінійними відрізками 10^*-10^{**} , 4^*-4^{**} .

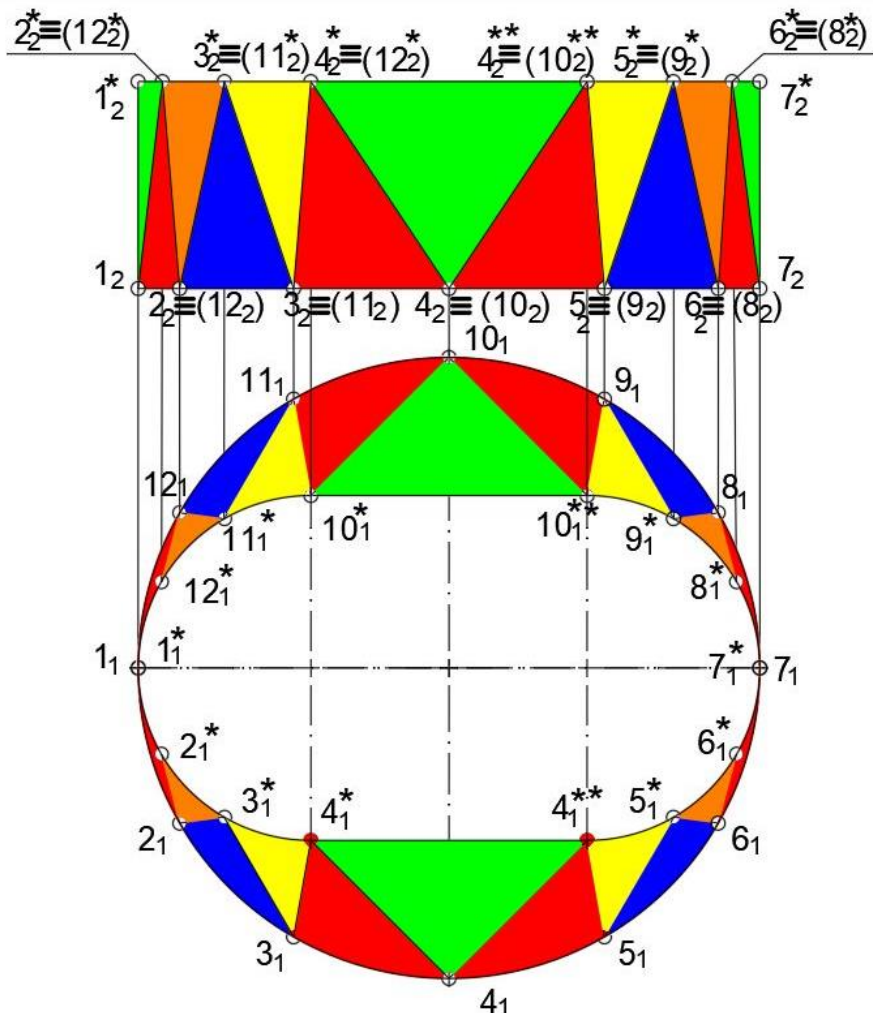


Рис. 182

Необхідно побудувати розгортку бічної поверхні бункера.

Коло нижньої основи розбиваємо на 12 рівних частин, а кожну із півкол верхньої основи – на 6 рівних частин. Точки, що знаходяться на колі нижньої основи, нумеруємо арабськими цифрами від 1 до 12. Точки верхньої основи нумеруємо аналогічним чином, причому, кінцям прямолінійних відрізків, що з'єднують напівдуги, надамо однакові номери: 10^* і 10^{**} , 4^* і 4^{**} .

З'єднуємо прямою точки 4 і 10 нижньої основи з однойменними точками (4^* , 4^{**} , 10^* , 10^{**}) верхньої основи. Отримуємо два плоскі зелені трикутники. З'єднуємо всі інші точки нижньої основи з одноймен-

ними точками верхньої основи. Отримуємо 12 криволінійних трапецій, які замінюємо плоскими трапеціями. У кожній із цих трапецій проводимо діагоналі.

Таким чином, бічна поверхня бункера почала складатися тільки із плоских трикутників.

Способом плоскопаралельного руху визначаємо натуральні величини сторін трапецій і діагоналей. Побудова розгортки бічної поверхні бункера зводиться до послідовних побудов трикутників $44^{**}4^*$, 44^*3 , 34^*3^* тощо (рис. 183).

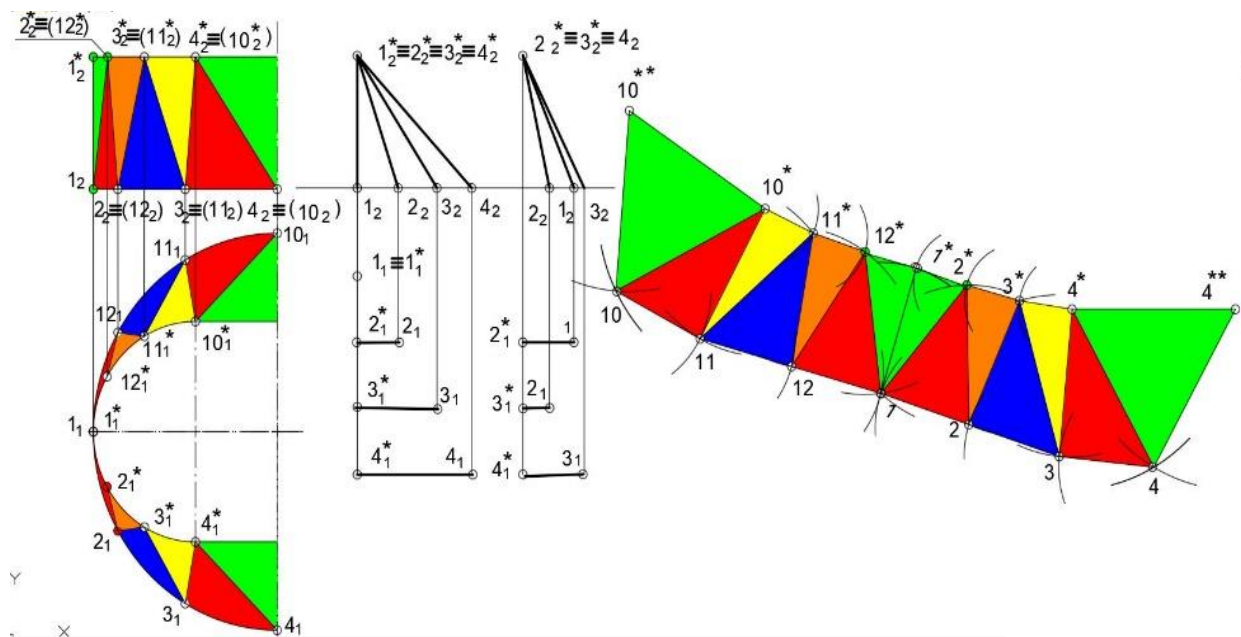


Рис. 183

На рис. 184 показано комплексне креслення бункера для зберігання сипких матеріалів, що має площину симетрії, паралельну фронтальній площині проєкції Π_2 . До складу бічної поверхні бункера входять 4 плоскі трикутники і 4 конічні поверхні, вершини яких збігаються із вершинами А, В, С, D прямокутної нижньої основи. Необхідно побудувати розгортку бічної поверхні бункера. Конічні поверхні апроксимуємо тригранними пірамідальними поверхнями. За допомогою способу плоскопаралельного руху розміщуємо ребра пірамід паралельно фронтальній площині проєкції Π_2 і визначаємо їх натуральні величини. На рис. 185 показано розгортку бічної поверхні цього бункера, що складається лише із трикутників.

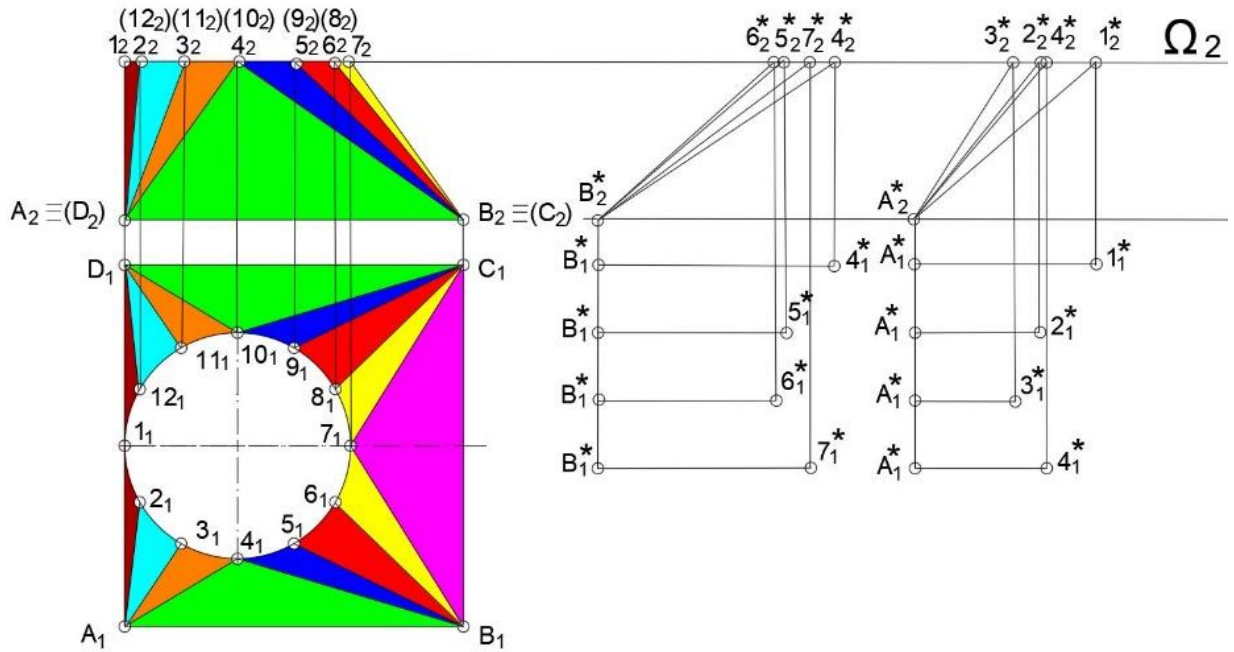


Рис. 184

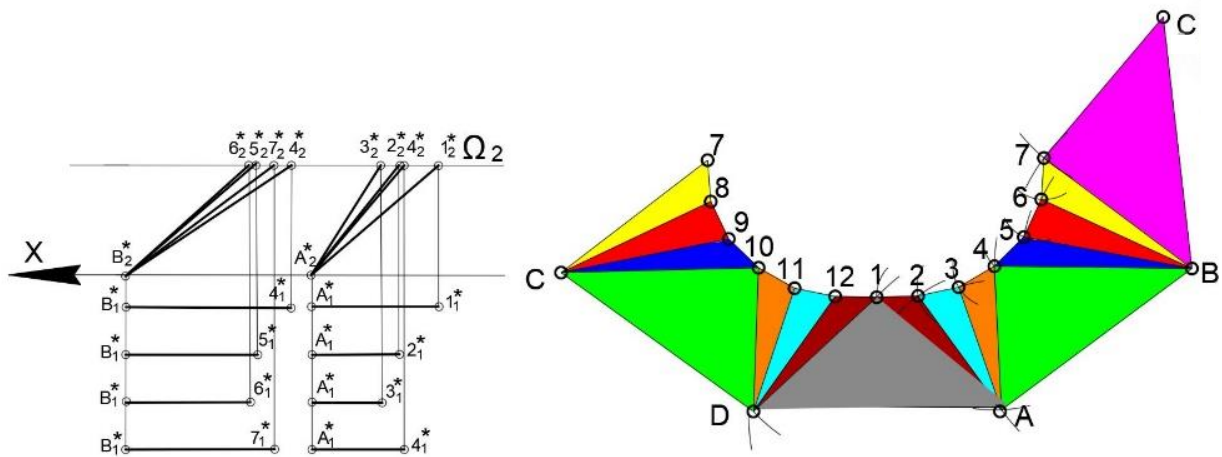


Рис. 185

На рис. 186 показано комплексне креслення похилої чотиригранної призми, ребра якої є відрізками прямих загального положення. Потрібно побудувати розгортку бічної поверхні призми. Використовуючи заміну площини проєкції, спроектуємо призму на додаткову площину проєкції Π_4 , паралельну її ребрам. Тоді щодо цієї нової площини проєкцій ребра призми займуть часткове положення (стануть прямими рівня) і будуть проєціюватися без спотворення на цю нову площину проєкцій. Розгортку бічної поверхні призми будуватимемо способом розкочування. Під час розкочування цим способом кінці A, B, C, D ребер призми будуть переміщатися у площинах, перпендикулярних цим

ребрам (ребра будуть осями обертання точок). Розсічемо умовно призмку уздовж ребра DD^* і за чергою будемо поєднувати (розкочувати) грані з площиною розкочування. За умови суміщення грані DAA^*D^* положення точок D і D^* не зміниться. Положення A_4 точки A на розгортці визначається за умови, що вона віддалена від точки D_4 на відстань $D_4A_4=D_1A_1$ і належить сліду Σ_4 площини Σ , у якій вона обертається. Використовуючи циркуль, знаходимо точку A_4 на розгортці. Аналогічно визначаються положення інших точок на розгортці.

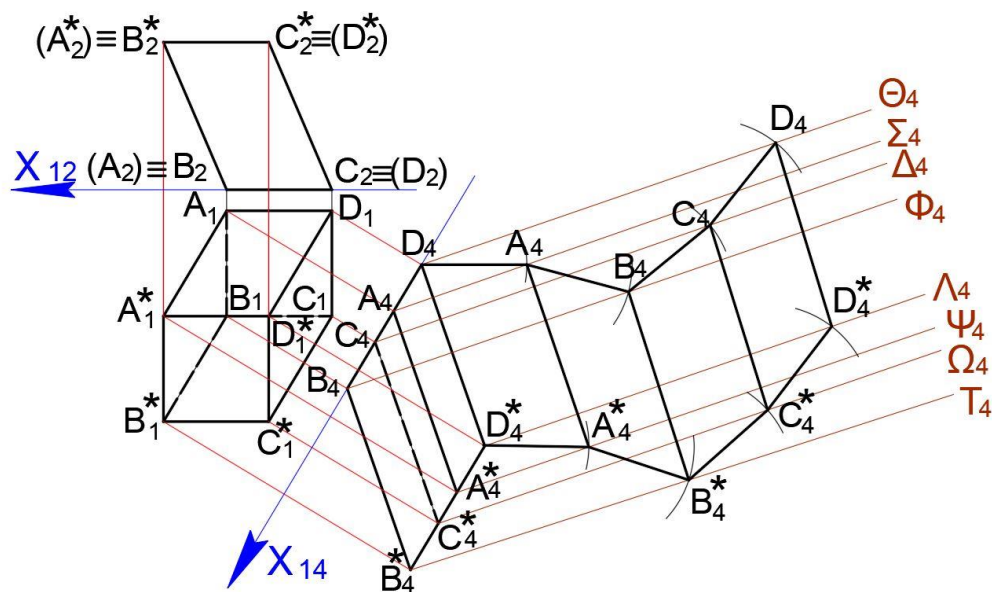


Рис. 186

Контрольні питання

1. Як будується лінія розгортки поверхні?
2. Що таке поверхня, яка розгортається?
3. Як збільшити точність під час побудови розгортки поверхні?
4. У чому сутність способу нормального перетину, який застосовується для розгортки поверхонь?
5. Методика побудови розгортки бічної поверхні конуса.
6. Визначення натуральних величин сторін трапецій і діагоналей способом плоскопаралельного руху.
7. Методика побудови розгортки бічної поверхні призми.
8. Визначення натуральних величин сторін трапецій і діагоналей способом плоскопаралельного руху.

гранника з гранями першого. У навчальному посібнику наводиться узагальнений алгоритм побудови вершин просторової ламаної лінії, а також алгоритм визначення видимості проєкцій її ланок. Використовуючи ці алгоритми, можна, не напружуючи просторову уяву, правильно поєднати знайдені проєкції вершин просторових ламаних ліній з урахуванням видимості проєкцій їх ланок. Кожне завдання на побудову лінії перетину двох багатогранників проілюстровано одним рисунком (на відміну від завдань на перетин кривих поверхонь, в яких кожен етап рішення представлено на окремому рисунку). Але при цьому можна легко простежити хронологію вирішення завдання, оскільки кожен його етап виділено окремим кольором.

В загальному вигляді у навчальному посібнику наведено узагальнені алгоритми вирішення позиційних та метричних завдань. Матеріал навчального посібника містить 7 тем:

- 1) утворення проєкцій;
- 2) комплексні креслення точок, прямих, площин, а також поверхонь, форми яких найчастіше застосовуються як конструктивні елементи машинобудівних деталей і архітектурних споруд;
- 3) перетин прямої з поверхнями;
- 4) перетин площини з поверхнями;
- 5) взаємне перетинання поверхонь;
- 6) методи перетворення комплексного креслення під час вирішення метричних завдань;
- 7) побудова розгортки поверхонь.

У теперішній період часу дисципліна "Нарисна геометрія" отримала новий розвиток у зв'язку із широким застосуванням комп'ютерної техніки. На промислових підприємствах конструктори і технологи не використовують традиційні креслярські інструменти (олівець, циркуль, лінійку тощо), оскільки їм на зміну прийшов більш зручний та продуктивний інструмент – комп'ютер. Це дозволяє значно прискорити процес побудови виробничих і будівельних креслень, виконання технічних графічних побудов та визначення необхідних геометричних параметрів. Однак комп'ютер – це лише інструмент і замінити роботу інженера із його просторовою уявою і просторовим мисленням, чому сприяє нарисна геометрія, не може. Отже, дисципліна "Нарисна геометрія" як і раніше продовжує залишатися базовою дисципліною у формуванні технічних і технологічних знань.

Список використаних джерел

1. Нарисна геометрія : навч. посібник / уклад. Василь Іванович Ковба-шин, Андрій Іванович Пік ; Терноп. Нац. техн. ун-т ім. Івана Пулюя. – Тернопіль : ТНТУ ім. Пулюя, 2020. – 201 с.
2. Кривцов В. В. Розв'язування задач підвищеної складності з нарисної геометрії : навч. посібник / В. В. Кривцов, М. М. Козяр, А. Е. Полінчук. – Ужгород: Гельветика, 2019. – 224 с.
3. Кривцов В. В. Нарисна геометрія (з використанням іноземних мов) : навч. посібник / В. В. Кривцов, І. О. Тимощук, С. А. Приймак; Нац. ун-т водного госп-ва та природокористування. – Рівне: НУВГП, 2016. – 280 с.
4. Козяр М. М. Інженерна графіка. Машинобудівне креслення : підруч-ник / М. М. Козяр, О. Р. Стрілець, А. П. Сафоник. – Херсон: Олді+, 2022. – 476 с. <http://ep3.nuwm.edu.ua/id/eprint/24560>
5. Jeurooovan T. Engineering Graphics.; Vikas Publishing, 2018. – 435 p.
6. Shah P.J. Engineering Graphics (For First Year B.E. Students); Gujarat Technological University, Ahmedabad. – 2019. – 426 p.
7. Jain P.H. Engineering Graphics; Soham Publications. – 2018. – 334 p.
8. Vivek Er. Goel; Engineering Graphics-1 (For First Semester Diploma Students); Khanna Publishers. – 2019. – 235 p.
9. Engineering Graphics (with AUTOCAD) / V. Gambhir, K.K. Dhiman, D.V. Singh. – IshanPublications. – 2020. – 456 p.
10. Phull G.S., Sandhu H.S. Engineering Graphics. Publisher: Wiley India Pvt. Ltd. – 2014. – 404 p.
11. Pawar Avinashm Dr. Engineering Graphics. – Publisher: Nirali Prakashan; – 2020. – 310 p.
12. Anna Blach, Anita Pavlak-Jakubowska. Inzynierska Geometria wykres- lna (zbior zadan). – 2016. – 354 st.
13. Grafika Inzynierska : Podrecznik / Tomasz Geisler, Wojciech Sochacki. – Skrypt, Wyd.1; 2018. – 118 s.
14. Козяр М. М. Комп'ютерна графіка: AutoCAD / М.М. Козяр, Ю.В. Фе- щук. – Ужгород: Гельветика, 2020. – 304 с.
15. Никола Стоянов Николов. Приложна геометрия и инженерна графи- ка. – 1 част. – Болгария, Русенский университет "Ангел Кънчев". – 2020. – 64 с.

16. Афтаназів І. С. Практикум з інженерної графіки до курсу "Нарисна геометрія, інженерна та комп'ютерна графіка" / І. С. Афтаназів. – Частина 1.– 2015. – 236 с.
17. Афтаназів І. С. Практикум з нарисної геометрії до курсу "Нарисна геометрія, інженерна та комп'ютерна графіка" / І. С. Афтаназів. – Частина 2. – 2017. – 192 с.
18. Райковська Г. О. Інженерна графіка. Практикум : навч. посібник / Г. О. Райковська, В. Д. Головня, Л. Є. Глембоцька. – Частина 2. – Житомир: ЖДТУ, 2017. – 116 с.
19. Балабан С. М. Інженерна графіка та САД системи. Частина 1. Основи нарисної геометрії : навч. посібник / С. М. Балабан. – Тернопіль: Вид-во ТНТУ ім. Івана Пулюя, 2023. – 204 с.
20. Ковальов Ю. М. Прикладна геометрія, інженерна та комп'ютерна графіка, сучасні розділи : підручник. Гриф МОНМС "Підручник для вищих навчальних закладів" / Ю. М. Ковальов, В. М. Верещага. – Київ: ППП ОМЕГА-Л, 2013. – 472 с.

Зміст

Вступ	3
1. Види проєціювання	5
2. Комплексне креслення	9
3. Позиційні завдання	39
3.1. Перетин прямої із площиною	39
3.2. Перетин прямої із поверхнею	40
3.3. Перетин двох площин	46
3.4. Знаходження лінії перетину поверхні площиною	50
3.5. Перетин поверхонь	54
3.5.1. Спосіб допоміжних січних площин	54
3.5.2. Спосіб допоміжних січних сфер	75
3.5.3. Взаємний перетин багатогранників	90
3.5.4. Спосіб площин, що обертаються	91
4. Метричні завдання	97
4.1. Спосіб зміни площин проєкції	97
4.2. Спосіб обертання	106
4.3. Спосіб плоскопаралельного руху	110
4.4. Спосіб обертання навколо лінії рівня	111
4.5. Визначення кута між площинами	112
4.6. Визначення кута між прямою та площиною	115
5. Розгортки поверхонь	119
Висновки	143
Список використаних джерел	145

Навчальне видання

**Любов Віталійовна Бовнегра
Федір Васильович Новіков
Олексій Олександрович Якімов
Валерій Олексійович Жовтобрюх**

НАРИСНА ГЕОМЕТРІЯ

Навчальний посібник

Відповідальний за випуск **Новіков Ф. В.**

В авторській редакції

На обкладинці використані фрагменти зображень,
https://freepik.com/free-photo/asian-businesswoman-sitting-at-desk-in-office-and-studying-graphs-on-large-computer-screen_5839495.htm

Image by pressfoto

Підп. до друку 19.01.2024 р.
Формат 60x84/16. Друк офсетний. Ум.-друк. арк. 8,6.
Наклад 300 пр. Заказ № 9

Видавництво та друкарня ПП "Ліра ЛТД"
49107, м. Дніпро, вул. Наукова, 5
Свідоцтво про внесення до Держреєстру
ДК № 6042 від 26.02.2018.