УДК 531.01:519.876.5

С.І. ЛЯШКО
Київський національний університет імені Тараса Шевченка, Київ, Україна,
e-mail: *lyashko.serg@gmail.com.*

С.С. ЗУБ
Національний науковий центр «Інститут метрології», Харків, Україна,
e-mail: *stanislav.zub@metrology.kharkov.ua.*

І.Г. ЯЛОВЕГА
Харківський національний педагогічний університет ім. Г.С. Сковороди, Харків, Україна, e-mail: *yalovegaira@gmail.com.*

В.С. ЛЯШКО
Інститут кібернетики ім. В.М. Глушкова, Київ, Україна, e-mail: lyashko91@gmail.com.

МАТЕМАТИЧНА МОДЕЛЬ ВЗАЄМОДІЇ ПОСТІЙНИХ МАГНІТІВ ТА НАДПРОВІДНИХ КОТУШОК

Анотація. Розроблено формалізм Лагранжа, що дає змогу знаходити магнітну потенціальну енергію взаємодії в системі, яка складається з котушок індуктивності з постійним магнітним потоком (надпровідні котушки) та постійним струмом (постійні магніти). В явному вигляді отримано потенціальну енергію магнітної системи, яка складається з надпровідних котушок і постійних магнітів, що дає змогу провести повне дослідження стійкості рівноваги та руху в таких магнітних системах. Вказано роботи, в яких запропонований підхід може бути корисним для моделювання кіберфізичних або технічних систем магнітної левітації.

Ключові слова: електромеханічні системи, циклічні координати, метод Рауса, формалізм Лагранжа, стійкість.

ВСТУП

Ґрунтуючись на дослідженнях наукових публікацій, автори роботи [1] навели загальний феноменологічний підхід до визначення сил магнітної взаємодії. У цій роботі уведено поняття силових функцій, енергії і коенергії. Проте ця теорія не визначає змішані електромеханічні системи, які містять постійні магніти і надпровідні котушки.

Для отримання математичної моделі магнітної взаємодії моделюватимемо надпровідні котушки через ідеально провідні короткозамкнені контури, а постійні магніти — через контури з постійним струмом. Такі електромеханічні системи можна описати за допомогою рівнянь для квазістаціонарних ланцюгів. Проте саме такі моделі мають особливості, які недостатньо враховуються наявним варіантом формалізму Лагранжа. Модель можна використовувати для опису взаємодії між джерелами поля, розташованими на деякому віддаленні.

КВАЗІСТАЦІОНАРНЕ НАБЛИЖЕННЯ

У межах квазістаціонарного наближення для електромагнітного поля індуковані потоки, пов'язані з густиною струмів лінійними співвідношеннями з постійними коефіцієнтами

$$\Psi_i = \sum_k^N L_{ik} I_k \ (L_{ik} = L_{ki}), \quad (1)$$

де Ψ_i — потік магнітної індукції через i-й контур зі струмом I_i; L_{ik} — коефіцієнт пропорційності — взаємна індукція (або взаємна індуктивність).

У разі взаємодії двох провідників з номерами i, k коефіцієнт L_{ik} залежить тільки від властивостей середовища і взаємного розташування контурів:

$$L_{ik} = \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \oint_{(i)} \oint_{(k)} \frac{d\vec{l}_i \cdot d\vec{l}_k}{|\vec{R}_{ik}|}, \quad (2)$$

де $\vec{R}_{ik}$ — відстань між елементами довжини $d\vec{l}_i$ и $d\vec{l}_k$.

За законом Ома для ланцюга змінного струму з урахуванням (1) знаходимо рівняння для визначення струму I_i (сила струму в кожному i-му контурі):

$$I_i R_i = -\sum_k L_{ik} \frac{dI_k}{dt} + \mathrm{E}_i(t) \quad (i = 1, \ldots, N), \quad (3)$$

де R_i — електричний опір i-го контуру, L_{ik} — взаємна індуктивність i-го та k-го контурів; E_i — сторонні електрорушійні сили в i-му контурі.

Для інтегрування системи лінійних диференціальних рівнянь з постійними коефіцієнтами (3) потрібно мати геометричні характеристики лінійних контурів, які визначають L_{ik} і E_i. Магнітні поля при цьому визначаються із рівнянь

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{S} = 0$$

та

$$\oint \vec{H} \cdot d\vec{l} = I,$$

де $\vec{B}, \vec{H}$ — вектори індукції та напруженості магнітного поля; $d\vec{S}, d\vec{l}$ — вектори елементів площі та довжини.

Для системи лінійних провідників рівняння квазістаціонарного електромагнітного поля зводяться до системи звичайних диференціальних рівнянь з постійними коефіцієнтами.[1] Інакше кажучи, від системи з нескінченним числом ступенів свободи можна перейти до системи із скінченним числом ступенів свободи, що істотно спрощує рішення задачі. Зображемо енергію магнітного поля системи лінійних провідників через квадратичну форму від квазістаціонарних струмів, де коефіцієнтами будуть взаємні індуктивності:

$$T_{\mathrm{mag}} = \sum_i L_{ii} \frac{I_i^2}{2} + 2 \sum_{k>i} L_{ik} \frac{I_i I_k}{2}. \quad (4)$$

З урахувананям (1) магнітна енергія системи лінійних контурів також може бути представлена у вигляді

$$T_{\mathrm{mag}} = \frac{1}{2} \sum_i I_i \Psi_i, \quad (5)$$

де $\Psi_i = \oint \vec{B}_i d\vec{S}_i$.

Представлення (5) використовуватимемо для запису енергії ідеально провідних контурів. У разі зовнішнього магнітного поля до енергії (5) додається внесок, який має вигляд

$$\Delta T_{(\mathrm{extern})i} = I_i \Phi_i, \quad (6)$$

де Φ_i — магнітний потік зовнішнього поля через i-й контур зі струмом I_i. Для рухомих провідників або тих, що змінюють форму в електромагнітному полі, ємність, самоіндукція, взаємна індуктивність та інші величини є функціями деяких параметрів q_i, які визначають систему.

Для опису систем із скінченним числом ступенів свободи можна використовувати метод Лагранжа, який дозволяє формально рівноправно використовувати механічні та електричні величини. Параметри q_i, Q_i можна визначити як деякі узагальнені координати.

[1] Варіант формалізму Лагранжа, який ми розробляємо, повинен привести до рівнянь руху, що мають збігатися з відомими рівняннями для квазістаціонарних ланцюгів, які отримано за законами Кірхгофа [3, с. 783–787; 4, с. 278–308].

Підхід Лагранжа для електромеханічної аналогії вперше запропонував Максвелл [2].

Запишемо магнітну енергію системи лінійних провідників як квадратичну форму від квазістаціонарних струмів. У такому вигляді вона відповідає кінетичній енергії. Отже, маємо повну кінетичну енергію системи:

$$T = T_{\text{mech}} + T_{\text{mag}} = \frac{1}{2}\sum_{i,k} L_{ik}\dot{Q}_i\dot{Q}_k + T_{\text{mech}}, \tag{7}$$

де Q_i — заряд, що протікає через фіксований перетин i-го провідного контура; T_{mech} — механічна кінетична енергія руху провідників.

Тоді потенціальна енергія складається з електричної енергії поля і механічної потенціальної енергії:

$$U = \sum \frac{Q_i^2(t)}{2C_i(q_i, t)} + U_{\text{mech}}, \tag{8}$$

де q_i — механічна узагальнена координата, C_i — ємність i-го коливального контура.

Функцію Лагранжа електромеханічної системи можна записати у вигляді

$$L = \frac{1}{2}\sum L_{ik}\dot{Q}_i\dot{Q}_k - \frac{1}{2}\sum \frac{Q_i^2}{C_i} + (T_{\text{mech}} - U_{\text{mech}}). \tag{9}$$

А дисипативна функція системи має вигляд

$$F = \frac{1}{2}\sum R_i(q_i, t)\dot{Q}_i^2.$$

Також можна ввести довільні зовнішні сили F_{extern}, які залежать як від узагальнених координат, так і від параметрів, які не належать до розглядуваної системи.

Рівняння Лагранжа з огляду на зазначене вище мають вигляд

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{Q}_i} - \frac{\partial L}{\partial Q_i} = -\frac{\partial F}{\partial \dot{Q}_i} + F_{\text{extern}}.$$

За відсутності дисипації енергії та ємності в контурі фізична наочність змінних типу заряд втрачається, оскільки для цього випадку відповідна координата стає циклічною. Водночас зберігається магнітний потік, що відповідає узагальненому імпульсу. Саме така ситуація виникає під час опису ідеально провідного коливального контура. Це призводить до необхідності послідовного вилучення циклічних змінних за методом Рауса.

Особливу увагу приділяють контурам з ідеальним джерелом струму — моделям постійного магніту в межах квазістаціонарного наближення лінійних провідників. Цей випадок не належить до відомих варіантів формалізму Лагранжа, які описано в роботах [1–4].

Далі покажемо, як із використанням формалізму Лагранжа можна вирішити зазначені проблеми. Формалізм Лагранжа надає зручний математичний апарат для знаходження сил, моментів сил, які діють на контур у магнітному полі. Узагальнена сила має вигляд

$$F_q = \frac{1}{2}\sum_{i,k} I_i I_k \frac{\partial L_{ik}}{\partial q}, \tag{10}$$

де q — механічна узагальнена координата.

Для диференціювання за механічною узагальненою координатою вважатимемо струми постійними. Це формально докладно пояснюється в роботі [4, с. 175–176].

У разі поступального руху одного з двох взаємодіючих контурів щодо другого формулу (10) можна безпосередньо отримати із закону Ампера для сили, яка діє між лінійними провідниками зі струмами. Загальновідома формула сили взаємодії між двома струмами I_1 та I_2:

$$F_q = I_1 I_2 \frac{\partial L_{12}}{\partial q}. \tag{11}$$

Таким чином, вираз (11) можна використовувати для перевірки формули потенціальної енергії системи.

Поняття квазістаціонарної теорії: коефіцієнти самоіндукції, взаємної індуктивності та потік мають місце так само для багатозв'язних надпровідних тіл як для лінійних провідників, так і для загального випадку багатозв'язних тіл.

Для надпровідних тіл будь-якого ступеня зв'язності виконуються співвідношення [4, с. 222]

$$\sum_k L_{ik} I_k + \Psi_i^{(e)} = \Psi_{i0},$$

де $\Psi_i^{(e)}$ — потік зовнішнього поля через *i*-й контур; Ψ_{i0} — сумарний потік через поверхню.

Для одного надпровідного кільця в зовнішньому магнітному полі маємо

$$LI + \Psi_e = \text{const} \equiv \Psi_0.$$

ПОТЕНЦІАЛЬНА ЕНЕРГІЯ ВЗАЄМОДІЇ ПОСТІЙНИХ МАГНІТІВ І НАДПРОВІДНИХ КОТУШОК

Як було зазначено, для дослідження взаємодії на деякій відстані постійний магніт може бути промодельований котушкою індуктивності з постійним струмом. У контексті електромеханічної аналогії вимогу сталості струму природно описати деякою реакцією зв'язку. Використовуючи підхід Лагранжа щодо опису такої системи, потрібно враховувати зв'язки цього типу для вилучення залежних змінних.

Наявність у системі ідеально провідних контурів призводить до циклічності відповідної електричної координати. Проте відповідні циклічним координатам швидкості залежать від часу і явно присутні в базових співвідношеннях існуючого лагранжевого формалізму [3, с. 783–787].

Загальний підхід до виведення рівнянь Лагранжа в незалежних координатах [5, с. 47–66] передбачає, по-перше, вираз кінетичної енергії через незалежні змінні, по-друге, проєктування сил на простір, обмежений зв'язками (відповідні проєкції Q_i називають узагальненими силами). Рівняння Лагранжа мають вигляд [5, с. 49]

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_i} = Q_i. \tag{12}$$

Розглянемо систему з n контурів, які пронумеруємо малими літерами латинського алфавіту $i, j, k, l = 1, \ldots, n$. З них ν контурів ідеально провідні, а $n - \nu$ контурів із струмом мають постійну величину. Контури першого типу будемо нумерувати малими літерами грецького алфавіту $\alpha, \beta, \gamma = 1, \ldots, \nu$, а контури другого типу — першими малими літерами латинського алфавіту $a, b, c = (\nu + 1), \ldots, n$.

Позначимо q_α заряд, що протікає через фіксований перетин ідеально провідного контура, тобто $q_\alpha = \int I_\alpha dt$, а через q_a — аналогічну величину для контура із струмом постійної величини, тобто $q_a = \int I_a dt = I_a t$.

Механічний рух котушок без урахування магнітної взаємодії, тобто для нульових токів, описують набором незалежних змінних X_I, де великі латинські літери мають значення $I, J, K, L = 1, \ldots, M$.

У визначених змінних повна кінетична енергія системи має вигляд

$$T = T_e + T_m,$$

де T_m — кінетична енергія механічного руху котушок, яка залежить від X та dX/dt, а T_e — електрична складова енергії. Умови сталості струму в котушках розглядатимемо як голономні зв'язки, які залежать від часу:

$$q_a = I_a \cdot t. \tag{13}$$

За припущенням функція $T_m(X, \dot{X})$ вже виражена в незалежних змінних Лагранжа, тому всі подальші перетворення будуть стосуватися лише T_e. Запишемо енергію T_e в незалежних змінних X, q_α, dq_α/dt, використовуючи зв'язки (13):

$$T_e = \frac{1}{2}\sum_{\alpha,\beta} L_{\alpha\beta}\dot{q}_\alpha \dot{q}_\beta + \sum_{\alpha,a} L_{\alpha a}\dot{q}_\alpha I_a + \frac{1}{2}\sum_{a,b} L_{ab} I_a I_b. \tag{14}$$

З огляду на поділ контурів на два типи матриця індуктивностей L_{ik} розбивається на чотири блоки. Таким чином, $L_{\alpha\beta}$ — квадратна симетрична матриця індуктивностей ідеально провідних контурів, L_{ab} — квадратна симетрична матриця індуктивностей контурів із заданим струмом, $L_{\alpha a}$ — прямокутна матриця індуктивностей, яка описує взаємодію контурів різного типу і відповідає правому верхньому блоку вихідної матриці індуктивностей. Величини I_a не є динамічними змінними, а являють собою параметри зв'язків (13).

Рівняння Лагранжа (12) також поділяється на дві групи рівнянь відностно координат (електричні q_α для ідеально провідних контурів та механічні q_m для всіх контурів); у той же час координати контурів із струмом постійної величини q_a вже вилучені за допомогою зв'язків (13):

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_\alpha}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_\alpha} = Q_\alpha, \tag{15}$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_m}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_m} = Q_m. \tag{16}$$

У рівнянні (15) узагальнена сила Q_α збігається з вихідною силою, що діє на контур. Оскільки в рівняннях Кірхгофа для ідеально провідних контурів опір та електрорушійна сила дорівнюють нулю, то в рівнянні (15) маємо $Q_\alpha = 0$.

В (16) узагальнені сили Q_m є вихідними силами, оскільки механічні змінні не використовують у проєктуванні. Через те, що для нульових струмів механічна сила дорівнює похідній зі знаком мінус за механічною координатою від потенціалу неелектромагнітного походження, отримуємо

$$Q_m = -d\Pi / dX_I.$$

Сила електромагнітної природи описується величиною $-dT_e/dX_I$ з рівняння (16) відповідно до формули для сили з теорії квазістаціонарних ланцюгів.

У змінних X_I, dX_I/dt, q_α і dq_α/dt функція Лагранжа для запропонованої системи з n контурів має вигляд

$$T_m - \Pi + T_e,$$

разом з тим змінні q_α не належать до цього виразу і тому є циклічними.

Для вилучення змінних dq_α/dt скористаємося методом Рауса [5, с. 270– 277]. Відмінність нашого випадку полягає в тому, що у нас кінетична енергія не є квадратичною формою швидкостей як зазначено в роботі [5]. Тому безпосередньо скористатися співвідношеннями, отриманими в цій роботі, не можна.

Зазначимо, що механічні змінні X_I і T_m пасивні щодо вилучення електричних швидкостей (струмів) dq_α/dt, а отже для повного вилучення циклічних координат можна застосувати метод Рауса тільки до електричної частини енергії нашої системи.

Будемо шукати кінетичну енергію в змінних Рауса p_α. Скористаємося (14), щоб відобразити всі $\dot{q}_\alpha$ через p_α:

$$p_\alpha = \frac{\partial T_e}{\partial \dot{q}_\alpha} = \sum_\beta L_{\alpha\beta}\dot{q}_\beta + \sum_b L_{\alpha b} I_b. \tag{17}$$

Вважаємо, що $D = \det(L_{\alpha\beta}) \neq 0$. Використовуючи (17), знаходимо

$$\dot{q}_\alpha = \sum_\beta L^{-1}_{\alpha\beta}\left(p_\beta - \sum_b L_{\beta b} I_b \right), \tag{18}$$

де $L^{-1}_{\alpha\beta}$ — обернена до $L_{\alpha\beta}$ матриця.

Якщо надпровідні контури в системі відсутні, то $\nu = 0$; отже, у вихідній L_{ik} відсутні елементи $L_{\alpha\beta}$. Цей варіант буде розглянуто нижче.

Введемо позначення:

$$T_e^{(0)} = \frac{1}{2}\sum_{a,b} L_{ab} I_a I_b, \tag{19}$$

$$T_e^{(1)} = \sum_{\alpha,a} L_{\alpha a}\dot{q}_\alpha I_a, \tag{20}$$

$$T_e^{(2)} = \frac{1}{2}\sum_{\alpha,\beta} L_{\alpha\beta}\dot{q}_\alpha \dot{q}_\beta, \tag{21}$$

отже $T_e = T_e^{(0)} + T_e^{(1)} + T_e^{(2)}$.

Підставляючи (18) в (19–21), отримаємо вираз для T_e в змінних Рауса:

$$T_e = \frac{1}{2}\sum_{\alpha,\beta} L^{-1}_{\alpha\beta} p_\alpha p_\beta + \frac{1}{2}\sum_{a,b} L^{*}_{ab} I_a I_b,$$

де $L^{*}_{ab} = \left(L_{ab} - \sum{}_{\alpha,\beta} L^{-1}_{\alpha\beta} L_{\alpha a} L_{\beta b} \right)$.

Функція Рауса має вигляд

$$R = p_\alpha \dot{q}_\alpha - L = \frac{1}{2}\sum_{\alpha,\beta} L^{-1}_{\alpha\beta} p_\alpha p_\beta - \frac{1}{2}\sum_{a,b} L^{*}_{ab} I_a I_b - \sum_{\alpha,b} \Gamma_{\alpha b} p_\alpha I_b + \Pi - T_m, \tag{22}$$

де $\Gamma_{\alpha b} = \sum_\beta L^{-1}_{\alpha\beta} L_{\beta b}$.

Із (22) функція $(-R)$ відіграє роль функції Лагранжа для механічних координат і має вигляд

$$T_m - V,$$

де V — узагальнений потенціал,

$$V = \frac{1}{2}\sum_{\alpha,\beta} L^{-1}_{\alpha\beta} p_\alpha p_\beta - \frac{1}{2}\sum_{a,b} L^*_{ab} I_a I_b - \sum_{\alpha,b} \Gamma_{\alpha b} p_\alpha I_b + \Pi .$$

Розглянемо довільний рух вихідної системи, вважаючи, що в русі

$$p_\alpha = \Psi_\alpha = \text{const}.$$

Тоді координати $X_I = X_I(t)$ визначатимемо з рівнянь

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial R}{\partial \dot{x}_i} - \frac{\partial R}{\partial x_i} = 0, \tag{23}$$

в яких p_α потрібно замінити на Ψ_α. Маємо рівняння Лагранжа з функцією Лагранжа у вигляді $(-R) = T_m - V$ для деякої допоміжної системи з ν ступенями свободи, яка має кінетичну енергію T_m та узагальнений силовий потенціал у вигляді

$$V = \frac{1}{2}\sum_{\alpha,\beta} L^{-1}_{\alpha\beta} \Psi_\alpha \Psi_\beta - \frac{1}{2}\sum_{a,b} L^*_{ab} I_a I_b - \sum_{\alpha,b} \Gamma_{\alpha b} \Psi_\alpha I_b + \Pi(t, X_I). \tag{24}$$

Із рівняння (24) випливає, що узагальнений потенціал залежить тільки від механічних координат. Всі інші множники постійні або внаслідок накладених зв'язків I_a, або як інтеграли руху $p_\alpha = \Psi_\alpha$. Отриману допоміжну систему називають зведеною.

Отже, зміна механічних координат X_I визначає рух зведеної системи з ν ступенями свободи, з кінетичною енергією T_m та узагальненим потенціалом V. У разі відповідних рухів вихідної і зведеної систем їхні повні енергії дорівнюють одна одній.

Після знаходження механічних координат X_I зведеної системи (23) циклічні координати вихідної системи отримуємо з рівності

$$q_\alpha = \int \frac{\partial R}{\partial \Psi_\alpha} dt + \Psi_\alpha .$$

Г. Герц довів, що потенціальну енергію консервативної системи завжди можна представити у вигляді кінетичної енергії прихованих рухів, тобто рухів, які спричиняють лише зміну циклічних координат. Концепцію щодо кінетичного походження потенціальної енергії називають принципом Герца [5, с. 281–285].

ВИСНОВОК

Розроблено математичну модель, що дає змогу знаходити магнітну потенціальну енергію взаємодії в системі, яка складається з котушок індуктивності з постійними магнітними потоками та постійним струмом (тобто з постійних магнітів). Для вилучення циклічних координат використовують метод Рауса, який перетворює вихідні рівняння руху в еквівалентні їм рівняння зведеної системи. Функція Лагранжа зведеної системи записується через функцію Рауса вихідної системи. Водночас частина кінетичної енергії вихідної системи перетворюється в потенціальну енергію зведеної системи.

Цей факт є проявом принципу Герца про кінетичне походження потенціальної енергії. Докладний алгоритм застосування методу Рауса і принципу Герца описано в праці [5]. Але отримання функції Лагранжа зведеної системи в цій роботі дано в припущенні, що характер зв'язків є склерономним, тоді як у нашому випадку в системі електричні зв'язки явним чином залежать від часу. Тобто безпосередньо скористатися результатами з книги [5] не можна і тому потрібно виконувати всі етапи зведення.

Отже, електрична частина кінетичної енергії T_e перейшла в потенціальну енергію зведеної системи із зменшенням числа ступенів свободи. Тут електричні процеси мають значення прихованих рухів, тобто формально математично магнітна взаємодія повністю відповідає принципу Герца. Магнітна енергія вихідної системи за формою є кінетичною, але у зведеній системі вона є потенціальною.

Отримана потенціальна енергія може бути використана в математичних моделях взаємодії, розглянутих в роботах [6–11]. Для розпаралелювання обчислень системи рівнянь руху можна використовувати комп'ютерну архітектуру, яка запропонована в [12].

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Уайт Д., Вудсон Г. Электромеханическое преобразование энергии. Москва; Ленинград: Энергия, 1964. 528 с.
2. Максвелл Дж.К. Трактат об электричестве и магнетизме. Москва: Наука, 1989. 416 с.
3. Левич В.Г. Курс теоретической физики. Т. 1. Москва: Наука, 1969. 910 с.
4. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Электродинамика сплошных сред. Москва: Гостехиздат, 1957. 532 с.
5. Гантмахер Ф.Р. Лекции по аналитической механике. Москва: Наука, 1966. 300 с.
6. Zub S.I., Zub S.S., Lyashko S.I. Method of magnetic separation in flight. *Problems of Atomic Science and Technology.* 2019. Vol. 3, N 121. P. 135–140.
7. Lyashko S.I., Zub S.S., Lyashko V.S., Lyashko N.I., Chernyavskiy A.Yu. Layering $0^+(E^3)$ as configuration space while modeling rigid body. *Journal of Automation and Information Sciences.* 2018. Vol. 50, N 5. P. 1–10.
8. Tymoshenko A., Klyushin D., Lyashko S. Optimal control of point sources in Richards–Klute equation. *Advances in Intelligent Systems and Computing.* 2019. Vol. 754. P. 194–203.
9. Sandrakov G.V., Lyashko S.I., Bondar E.S., Lyashko N.I. Modeling and optimization of microneedle systems. *Journal of Automation and Information Sciences.* 2019. Vol. 51, N 6. P. 1–11.
10. Chikrii A.A., Matychyn I.I., Chikrii G.Ts. Conflict controlled processes with discontinuous trajectories. *Cybernetics and Systems Analysis.* 2004. Vol. 40, N 6. P. 800–811.
11. Gerasin S.N., Yakovlev S.V., Yalovega I.G. Qualitative analysis of one class of population models with commensal interaction. *Cybernetics and Systems Analysis.* 2012. Vol. 48, N 2. P. 192–199.
12. Khimich A.N., Dekret V.A., Popov A.V., Chistyakov A.V. Numerical study of the stability of composite materials on computers of hybrid architecture. *Journal of Automation and Information Sciences.* 2018. Vol. 50, N 7. P. 7–24.

S.I. Lyashko, S.S. Zub, I.G. Yalovega, V.S. Lyashko

MATHEMATICAL MODEL OF PERMANENT MAGNETS AND SUPERCONDUCTING COILS INTERACTION

Abstract. A Lagrangian formalism is developed, which allows finding the magnetic potential energy of interactions in a system of superconducting inductors (coils with constant magnetic flux) and permanent magnets (coils with direct current). The explicit form of potential energy for a magnetic system with constant magnetic fluxes and direct currents allows the stability analysis in such magnetic systems both at equilibrium and motion. A number of applications are indicated, which will benefit from this approach such as modelling of cyber-physical or technical systems of magnetic levitation.

Keywords: electromechanical systems, cyclic coordinates, Rauss method, Lagrange formalism, stability.

Надійшла до редакції 13.04.2021