МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ

ХАРКІВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ ЕКОНОМІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ
ІМЕНІ СЕМЕНА КУЗНЕЦЯ

ДИСКРЕТНА МАТЕМАТИКА

Методичні рекомендації
до самостійної роботи
з теми "Теорія множин і відношень"
для студентів галузі знань
12 "Інформаційні технології"
першого (бакалаврського) рівня

Харків
ХНЕУ ім. С. Кузнеця
2021

УДК 519.1(07.034)
Д48

Укладач Т. В. Денисова

Затверджено на засіданні кафедри вищої математики й економіко-математичних методів.
Протокол № 5 від 23.12.2020 р.

Самостійне електронне текстове мережеве видання

Д48 **Дискретна** математика [Електронний ресурс] : методичні рекомендації до самостійної роботи з теми "Теорія множин і відношень" для студентів галузі знань 12 "Інформаційні технології" першого (бакалаврського) рівня / уклад. Т. В. Денисова. – Харків : ХНЕУ ім. С. Кузнеця, 2021. – 80 с.

Подано теоретичний матеріал із теорії множин і відношень, запитання для самоконтролю його засвоєння, варіанти задач самостійної контрольної роботи та зразки їхнього розв'язання, тестові завдання.

Рекомендовано для студентів галузі знань 12 "Інформаційні технології" першого (бакалаврського) рівня усіх форм навчання.

УДК 519.1(07.034)

Для сприйняття чужої мудрості
потрібна, насамперед, самостійна робота.

Л. М. Толстой

Вступ

Тема "Теорія множин і відношень" є важливою складовою частиною базової (нормативної) навчальної дисципліни "Дискретна математика", яку широко застосовують у математичній кібернетиці, комп'ютерній математиці, програмуванні, а також під час створення засобів передавання й оброблення інформації, автоматизованих систем керування та проектування.

Спеціальності, які потребують знань із "Дискретної математики", такі: 121 "Інженерія програмного забезпечення", 122 "Комп'ютерні науки", 124 "Системний аналіз", 126 "Інформаційні системи та технології".

Згідно з робочою програмою навчальної дисципліни, від загального обсягу на самостійну роботу студентів відведено 60 %. Саме такими обставинами обумовлена необхідність розроблення методичних рекомендацій, що запропоновані, та їхню актуальність. Головною *метою* їхнього складання є ознайомлення студентів із фундаментальними поняттями, ідеями та методами теорії множин і відношень, сприяння розвитку їхнього логічного й аналітичного мислення, надання допомоги щодо використання здобутих знань та набутих вмінь під час розв'язування конкретних практичних задач фахової спрямованості, підготовка до вивчення спеціальних дисциплін і самостійного опрацьовування математичної та науково-технічної літератури.

На сьогодні теорія множин – це одна із основних математичних теорій, на якій ґрунтується більшість розділів сучасної математики. Саме у термінах теорії множин відбувається розподіл математичних об'єктів і теорій на неперервні та дискретні.

Бурхливий розвиток та поширення електронних обчислювальних машин викликав значне зростання ролі задач дискретного характеру. Для багатьох технічних, економічних, кібернетичних систем важливим є дискретність їх функціонування у часі і просторі, тому для опису таких систем залучають апарат дискретної математики, основним носієм якої є множина елементів, саму ж структуру дискретної моделі формують відношення між цими елементами.

Теорія множин і відношень тісно пов'язана з такими розділами математики, як теорія графів, комбінаторний аналіз, теорія матриць, математична логіка та теорія ймовірностей. В усіх цих розділах множини застосовують для подання (у відповідному вигляді) різноманітних математичних об'єктів. Водночас сама теорія множин широко використовує апарат споріднених розділів математики.

Запропоновані методичні рекомендації містять п'ять розділів. У першому розділі, який присвячено множинам, висвітлено: основні поняття теорії множин, різновиди множин, дії (операції) над ними, алгебру множин. Другий розділ присвячено бінарним відношенням, стосовно яких розглянуто: основні означення, операції, способи задання, основні властивості та типи. У третьому розділі подано варіанти самостійної контрольної роботи, кожний із яких містить набір задач, що охоплюють основні теоретичні положення теорії множин і відношень та їхнє застосування, у четвертому наведено зразок виконання типового варіанта контрольної роботи з коментарем усіх кроків розв'язання, а у п'ятому пропонується перевірити набуті знання і навички проходженням відповідного тесту. Рекомендована література має допомогти студенту поглибити та поширити власну поінформованість із питань, що його зацікавили.

Формули, рисунки, задачі тощо занумеровано парами, в яких перший елемент пари є номером розділу, а другий (після крапки) указує на порядковий номер (у межах розділу).

Попередні знання, що є основою для вивчення теорії множин і відношень, студент здобуває, вивчаючи навчальну дисципліну "Вища математика".

1. Теорія множин

1.1. Означення основних понять, способи задання

Поняття "множина" є одним із первісних (до того ж, фундаментальних) понять математики, яким неможливо дати означення, використовуючи інші математичні поняття. Тому вдаються до описового пояснення поняття множини термінами буденної (нематематичної) мови.

Засновником теорії множин як математичної дисципліни вважають німецького математика Георга Кантора (1845 – 1918 роки життя), який лаконічно висловився так: "Множина є багато що, мислиме нами як єдине".

Під **множиною** розуміють сукупність об'єктів (предметів), які об'єднано в цю сукупність за певними ознаками. Об'єкти, що утворюють множину, називають її **елементами** (**членами** або **точками**).

Наприклад, можна говорити про: множину відмінників у студентській групі; множину нервових клітин тіла людини; множину точок на заданій лінії; множину трикутників на площині; множину навчальних тижнів у семестрі; множину букв у слові тощо.

Множини позначають, як правило, великими літерами латинського або грецького алфавітів: $A, B, C, \ldots, \Phi, \Psi, \Omega, \ldots$, а їхні елементи – малими: a, b, c, …, φ, ψ, ω.

Якщо A – множина, а x – її елемент, то пишуть: $x \in A$, де $\in$ – *символ (знак) належності*; читають: "x належить множині A". У протилежному випадку, коли x не є елементом множини A, пишуть $x \notin A$ або $x \overline{\in} A$ і читають: "x не належить множині A".

Будь-яку множину вважають **заданою**, якщо зазначено характеристику її елементів, за допомогою якої стосовно кожного елемента можна сказати, належить він цій множині чи ні.

Існує два способи задання множин:

1) **спосіб переліку**, який полягає у тому, що наводять (називають) усі елементи, які містить розглядувана множина;

2) **спосіб опису**, який ґрунтується на заданні так званої *характеристичної (визначальної) властивості* $P(x)$ елементів x $(x \in A)$.

Для символьного запису множини використовують фігурні дужки ($\{\,,\}$), між якими записують її елементи (через кому або крапку з комою) чи характеристичну властивість.

Наприклад: $A=\{1,2,3,4,5\}$; $B=\{a,b,c,d\}$; $C=\{x \mid x=2n,\ n\in\mathbf{N}\}$, де n – натуральне число, $\mathbf{N}=\{1,2,3,4,...,n,...\}$ – множина натуральних чисел, | – символ (знак), який читають: "із властивістю", "які мають властивість".

Множину C можна описати інакше: $C=\{x\in\mathbf{N} \mid x-\text{парне число}\}$ або $C=\{2,4,6,8,\ ...\}$ (за умови, що зрозуміло, який смисл вкладається в три крапки).

Зрозуміло, що і спосіб переліку, і спосіб опису зручні для задання множин, які мають відносно невелику кількість елементів. У протилежному випадку, коли множини мають велику кількість елементів (або взагалі перелічити їх усі неможливо), віддають перевагу способу опису.

Множину, яка не містить жодного елемента, називають **порожньою** і позначають символом $\varnothing$. Множини, які не є порожніми, природно називати **непорожніми** множинами.

Наприклад, множина дійсних коренів рівняння $x^2+10=0$ є порожньою, оскільки не знайдеться такого числа із $\mathbf{R}$ – множини дійсних чисел, щоб сума квадрата цього числа з числом 10 дорівнювала нулю, тобто $\{x\in\mathbf{R} \mid x^2+10=0\}=\varnothing$.

Поняття порожньої множини відіграє важливу роль у разі задання множин способом опису, оскільки не завжди заздалегідь відомо, чи існує хоча б один елемент із заданою характеристичною властивістю (адже їх може й не бути, як у розглянутому прикладі).

Множини A і B називають **рівними**, якщо вони містять одні й ті самі елементи, і пишуть: $A=B$. За суттю рівні множини представляють одну і ту ж множину. Отже, символьний запис означення рівних множин виглядає так:

$$(A=B)\ \rightleftharpoons\ (\forall x: x\in A \Leftrightarrow x\in B), \tag{1.1}$$

де $\rightleftharpoons$ – *символ еквіваленції* (*рівнозначності*, *рівносильності*) *за означенням*, який читають: "те ж саме, що", "так само, як", "якщо і тільки якщо";

$\forall$ – символ, який називають *квантором загальності* і читають: "будь-який", "який би не був", "для всіх", "всі" (квантор – від лат. *quantum* – скільки);

: – *двокрапка*, читають як: "таке (такі), що", "маємо";

$\Leftrightarrow$ – *символ еквіваленції*, який читають: "тоді і тільки тоді", "якщо і тільки якщо".

Із означення рівних множин можна зробити висновок: *порядок елементів у множині несуттєвий!*

Наприклад, рівними є множини: $A=\{m, n, p\}$, $B=\{p, m, n\}$, $C=\{m, p, p, n\}$ (незважаючи на те, що елемент p записано двічі). Щоб надалі не виникало непорозумінь під час підрахунку кількості елементів множини, домовимось, що у множині не має бути однакових елементів.

Множини A і B називають **нерівними** ($A \neq B$), якщо або у множині A є елементи, які не належать множині B, або у множині B є елементи, які не належать множині A.

Для рівних множин мають місце *властивості*:

1) *симетричність*: $A=A$;

2) *рефлексивність*: $(A=B) \Rightarrow (B=A)$;

3) *транзитивність*: $(A=B \wedge B=C) \Rightarrow (A=C)$,

де $\Rightarrow$ – *символ логічного наслідку*, який читають: "якщо …, то …" або "із … випливає …", або "… тягне за собою …"; $\wedge$ – символ, який читають: "і".

Нехай A і B – дві непорожні множини. Множину A називають **підмножиною** множини B, якщо кожний елемент множини A також належить множині B, і пишуть: $A \subset B$. Отже, за означенням:

$$(A \subset B) \ \rightleftharpoons \ (\forall x : x \in A \Rightarrow x \in B), \tag{1.2}$$

де $\subset$ – *символ (знак) включення*, який читають: "є підмножиною", "міститься в", "включається в".

Наприклад, $(A=\{a,b\},\ B=\{a,b,c\}) \Rightarrow A \subset B$.

Запис $A \subset B$ можна прочитати так: "множина A є підмножиною множини B (міститься в B)", або, що те ж саме, "для всіх елементів x, що належать множині A, випливає їхня належність множині B". Крім запису $A \subset B$ використовують ще такий: $B \supset A$, де $\supset$ – теж *символ включення*, який читають: "містить у собі", "включає".

Якщо множина A не є підмножиною множини B, то пишуть: $A \not\subset B$ або $B \not\supset A$ і кажуть: "A не міститься в B" або "B не включає A".

Наприклад:

1) $(A=\{1,2,3,5\},\ B=\{1,3,5\}) \Rightarrow A \not\subset B$, оскільки елемент 2 із A не належить B;

2) $A=\{x \mid x$ – футболіст ХНЕУ ім. С. Кузнеця$\}$, $B=\{x \mid x$ – спортсмен ХНЕУ ім. С. Кузнеця $\}$, то $A \subset B$, але $B \not\subset A$.

За умови, що $A = B$, із означення підмножини (1.2) маємо: будь-яка непорожня множина A є підмножиною самої себе, адже кожний елемент із A, звісно, належить A. Таку підмножину A називають **невластивою**.

До невластивих підмножин відносять також порожню множину $\varnothing$, оскільки вона є підмножиною будь-якої непорожньої множини. Дійсно, припустімо протилежне, тобто $\varnothing \not\subset A$. Таке може бути лише у випадку, якщо існує елемент із множини $\varnothing$, який не належить A. Але це неможливо, оскільки $\varnothing$ не має елементів. Отже, твердження, що $\varnothing \subset A$, не є хибним, тобто $\varnothing$ – підмножина A.

Якщо в процесі розгляду підмножин треба підкреслити, що мають на увазі і невластиві підмножини, то використовують **знаки (символи) нестрогого включення**: $\subseteq$, $\supseteq$. Запис $A \subseteq B$ означає, що слід враховувати й такі підмножини: $A = \varnothing$, $A = B$.

На противагу знакам нестрогого включення $\subseteq$, $\supseteq$ символи $\subset$, $\supset$ називають **знаками строгого включення** і кажуть, що їм відповідають **істинні (властиві) підмножини**.

Основні властивості множин, пов'язані зі смислом знака нестрогого включення, такі:

1) *симетричність:* $A \subseteq A$;

2) *асиметричність:* $(A \subseteq B \wedge B \subseteq A) \Rightarrow (A = B)$;

3) *транзитивність:* $(A \subseteq B \wedge B \subseteq C) \Rightarrow (A \subseteq C)$.

За допомогою введеної символіки можна подати інакше означення рівних множин, а саме:

$$(A = B) \;\rightleftharpoons\; (A \subseteq B \wedge B \subseteq A). \tag{1.3}$$

Якщо розглядають декілька множин A_1, A_2, …, A_k, $k \in \mathbf{N}$, які є підмножинами однієї й тієї ж множини A, то таку множину A називають **універсальною**, або **універсумом**, і позначають через I або U:

$$A = I \;\rightleftharpoons\; (\forall i = 1, 2, ..., k : A_i \subset A). \tag{1.4}$$

Наприклад, студентська академічна група є універсумом для сукупності всіляких підмножин (відмінників; спортсменів; тих студентів, які отримують стипендію; студентів, які проживають у гуртожитку, тощо) цієї групи; у планіметрії (стереометрії) універсум I – множина точок площини (простору).

1.2. Класифікація множин

Розглянемо дві непорожні множини A і B. Елементи цих множин можна тим чи іншим чином зіставляти один з одним, утворюючи пари (x, y), де $x \in A$, $y \in B$. Якщо для кожного елемента $x \in A$ вказано елемент $y \in B$, з яким зіставляється елемент x, то кажуть, що між множинами A і B установлено **відповідність**. Разом із тим не обов'язково, щоб у зіставленні брали участь усі елементи множин A і B.

Відповідність між множинами A і B називають **взаємно однозначною** (або **бієкцією**), якщо кожному елементу множини A можна поставити у відповідність один елемент множини B так, що кожний елемент із B є відповідним тільки одному елементу із A, і пишуть: $A \leftrightarrow B$, де $\leftrightarrow$ – *символ бієкції*.

Наприклад, для множин $A = \{2, 8, 16, 1\}$ і $B = \{0, 3, 4, 1\}$ відповідність, яку описано парами $(2,1)$, $(8,3)$, $(16,4)$, $(1,0)$, є бієкцією, а пари $(2,1)$, $(8,3)$, $(16,0)$, $(1,0)$ не визначають бієкції, оскільки елемент $0 \in B$ є відповідним двом елементам із A: 16 і 1.

Для множин, між якими існує бієкція, справедливі *властивості*:

1) *симетричність:* $A \leftrightarrow A$;

2) *рефлексивність:* $(A \leftrightarrow B) \Rightarrow (B \leftrightarrow A)$;

3) *транзитивність:* $(A \leftrightarrow B \wedge B \leftrightarrow C) \Rightarrow (A \leftrightarrow C)$.

Якщо між елементами двох множин A і B можна встановити бієкцію, то їх називають **еквівалентними**, і пишуть $A \sim B$, де ~ – "тильда" – *символ еквівалентності*. Отже, за означенням:

$$(A \sim B) \rightleftharpoons (A \leftrightarrow B). \tag{1.5}$$

Непорожню множину A називають **скінченною** (**нескінченною**), якщо існує (не існує) таке натуральне число n ($n \in \mathbf{N}$), що множина A еквівалентна множині $\{1, 2, 3, ..., n\}$:

$$\begin{gathered} A \text{ – скінченна множина } \rightleftharpoons \exists n \in \mathbf{N}: A \sim \{1, 2, 3, ..., n\} \\ (A \text{ – нескінченна множина } \rightleftharpoons \bar{\exists} n \in \mathbf{N}: A \sim \{1, 2, 3, ..., n\}). \end{gathered} \tag{1.6}$$

Наприклад, множина $A = \{m, p, n, q\}$ є скінченною, оскільки $A = \{m, p, n, q\} \sim \{1, 2, 3, 4\}$ (тут $n = 4$), а один із варіантів бієкції такий: $(m,1)$, $(p, 2)$, $(n, 3)$, $(q, 4)$.

Прикладами нескінченних множин є множини:

1) *натуральних чисел* (чисел "лічби"): $\mathbf{N} = \{1, 2, 3, \ldots, n, \ldots\}$;

2) *цілих чисел*: $\mathbf{Z} = \{0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots, \pm n, \ \ldots\}$, $n \in \mathbf{N}$;

3) *раціональних чисел* (дробів): $\mathbf{Q} = \{x \,\big|\, (\exists\, p \in \mathbf{Z}, \exists q \in \mathbf{N}) : x = p/q\}$;

4) *ірраціональних чисел*: $\overline{\mathbf{Q}} = \{x \,\big|\, (\bar{\exists}\, p \in \mathbf{Z}, \bar{\exists} q \in \mathbf{N}) : x = p/q\}$;

5) *дійсних чисел:* $\mathbf{R} = \{\, x \,\big|\, x \in \mathbf{Q} \vee x \in \overline{\mathbf{Q}}\}$, де $\vee$ – символ, який читають як "або";

6) *точок* на прямій (на площині, у просторі, деякої поверхні тощо).

Крім того, встановлено, що *будь-яка нескінченна множина еквівалентна деякій своїй властивій підмножині (!)*.

Із означення скінченних множин випливає, що дві скінченні множини A і B еквівалентні тоді і тільки тоді, коли вони містять одну й ту саму кількість елементів:

$$(A, B \text{ – скінченні множини} \wedge \ A \sim B) \Leftrightarrow (|A| = |B|), \tag{1.7}$$

де $|A|$ $(|B|)$ – кількість елементів множини A (B).

Отже, кількість елементів – це те спільне, що властиве (притаманне) всім еквівалентним між собою скінченним множинам незалежно від природи їхніх елементів.

Щодо нескінченних множин, то їх неможливо порівняти за кількістю елементів, оскільки їх – елементів – нескінченно багато! Тому для нескінченних множин замість поняття "кількість елементів" введено поняття "потужність" і про еквівалентні між собою нескінченні множини кажуть, що вони мають *однакову потужність* (*рівнопотужні*):

$$(A, \ B \text{– нескінченні множини} \wedge \ A \sim B) \ \rightleftharpoons \ (P(A) = P(B)), \tag{1.8}$$

де $P(A)$, $P(B)$ – потужності множин A і B відповідно.

Термін "потужність" застосовують і до скінченних множин, а саме: якщо A – скінченна множина, то вважають, що: $P(A) = |\, A\,|$.

Будь-яку множину A, еквівалентну множині натуральних чисел $\mathbf{N}$, називають **зліченною**:

$$(A \text{ – зліченна множина}) \ \rightleftharpoons \ (A \sim \mathbf{N}). \tag{1.9}$$

Інакше кажучи, **зліченна множина** – це множина, елементи якої можна занумерувати (за допомогою натуральних чисел) у нескінченну послідовність: $x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n,\ \ldots$, де $x_n \in \mathbf{R}\ \ (n = 1, 2, 3, \ldots)$.

Прикладами зліченних множин є множини:

1) *парних і непарних чисел*: $\{x \mid x = 2n,\ n \in \mathbf{N}\}$, $\{x \mid x = 2n - 1,\ n \in \mathbf{N}\}$;

2) *цілих чисел* $\mathbf{Z}$;

3) *раціональних чисел* $\mathbf{Q}$;

4) *чисел, які є натуральними степенями* числа 3: $\{x \mid x = 3^n, n \in \mathbf{N}\}$ (чи будь-якого іншого числа).

Потужність множини $\mathbf{N}$, а отже, і будь-якої зліченної множини, позначають символом $\aleph_0$, який читають: "алеф нуль" (алеф – буква древньоєврейської абетки).

Нескінченну множину A, яка не є зліченною, називають **незліченною**:

$$\left(A \text{ – незліченна множина}\right) \rightleftharpoons \left(A \nsim \mathbf{N}\right). \tag{1.10}$$

Інакше кажучи, **незліченна множина** – це нескінченна множина, між елементами якої і натуральними числами неможна встановити бієкцію, тобто елементи такої множини неможливо занумерувати.

Прикладами незліченних множин є множини:

1) *ірраціональних чисел* $\overline{\mathbf{Q}}$;

2) *дійсних чисел* $\mathbf{R}$ (навіть множина $\{x \mid 0 \le x \le 1\}$, тобто відрізок $[0;1]$, і будь-який відрізок $[a;b]$ чи інтервал $(a;b)$, $a \in \mathbf{R}$, $b \in \mathbf{R}$);

3) *усіх точок* на площині у просторі; множини точок кола, круга, квадрата, сфери, кулі тощо.

Про множину дійсних чисел $\mathbf{R}$, а отже, і про кожну еквівалентну їй множину, кажуть, що вона має потужність *континуума* (континуум – від лат. *continuum* – неперервний). Цю потужність позначають символом **c** (або символом $\aleph$ – алеф).

1.3. Операції (дії) над множинами

Для кращого розуміння та засвоєння відповідного матеріалу зазвичай використовують наочне зображення множин і співвідношень між ними за допомогою **кругів (діаграм) Ейлера**, тобто зображення множин на площині у вигляді кругів або інших простих фігур, обмежених зімкненими кривими без точок самоперетину, а їхній універсум (він містить у собі усі розглядувані множини) – прямокутником (рис. 1.1).

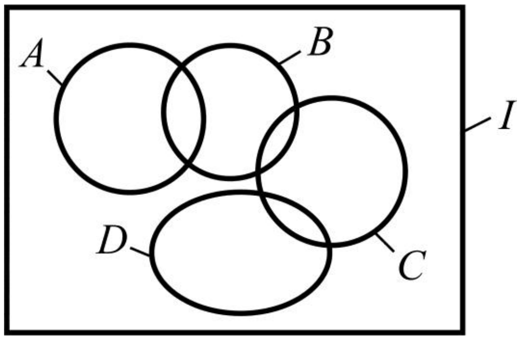


Рис. 1.1. **Діаграма Ейлера**

Теоретико-множинні операції – це один зі способів побудови (утворення) нових множин із уже заданих. Ці операції (дії) в певному сенсі аналогічні до арифметичних операцій над числами: додаванню, множенню, відніманню. Для назви певної операції і її результату використовують, зазвичай, різні терміни: "додавання" – "сума", "множення" – "добуток", "віднімання" – "різниця". У багатьох випадках для обох понять використовують один термін, адже до двозначності це не призводить, оскільки з контексту зрозуміло, про що саме йдеться.

Надалі множини, які отримують у результаті операцій над заданими множинами, зображатимемо заштрихованими областями.

Розглянемо дві непорожні множини A і B.

Об'єднанням (**сумою**) множин A і B називають множину C, яка містить усі елементи множин A, B і не містить інших елементів (рис. 1.2).

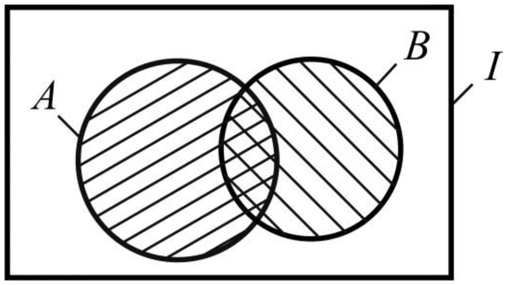


Рис. 1.2. **Ейлерова діаграма об'єднання множин**

Інакше кажучи, множина C є об'єднанням множин A і B, якщо вона складається з елементів, які належать хоча б одній із множин A і B (множині A або множині B).

Зв'язка "або" має нероздільний смисл: множині C належать також елементи, які є спільними для множин A і B, причому в C вони входять лише один раз.

Формальне (в символах) означення об'єднання множин A і B виглядає так:

$$C = A \bigcup B \;\rightleftharpoons\; C = \{\, x \mid x \in A \vee x \in B \}, \tag{1.11}$$

де $\bigcup$ – *символ об'єднання*; $A \bigcup B$ читають як "об'єднання множин A і B".

Операцію об'єднання множин можна узагальнити на будь-яку скінченну (і навіть нескінченну) кількість доданків:

$$C = A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_k = \bigcup_{i=1}^{k} A_i\,, \quad k \in \mathbf{N};$$
$$C = A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_k \cup \ldots = \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\,. \qquad (1.12)$$

Для об'єднання множин справедливі *властивості*:

1) $A \cup B = B \cup A$; (1.13)

2) $A \cup B \cup C = (A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$; (1.14)

3) $A \cup A = A$; (1.15)

4) $A \subset B \Rightarrow (A \cup B = B)$. (1.16)

Дужки в символьних записах співвідношень між множинами відіграють ту ж саму роль, що і в арифметиці чисел – вони допомагають установити порядок виконання дій.

Приклади:

1. $(A = \{1, 2, 3\},\ B = \{1, 2, 4, 5\}) \Rightarrow C = A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5\}$.

2. $(A = \{x \in \mathbf{R} \mid x^2 + 4 = 0\},\ B = \{x \in \mathbf{R} \mid e^{x^2-9} = 1\}) \Rightarrow C = A \cup B = \varnothing \cup \{-3, 3\} = \{-3, 3\}$.

3. $(A = [0; 2] = \{x \in \mathbf{R} \mid 0 \le x \le 2\},\ B = (1; 4] = \{x \in \mathbf{R} \mid 1 < x \le 4\}) \Rightarrow C = A \cup B = [0; 4] = \{x \in \mathbf{R} \mid 0 \le x \le 4\}$.

4. $(A = \{x \in \mathbf{N} \mid x = 2n\},\ B = \{x \in \mathbf{N} \mid x = 2n - 1\}) \Rightarrow (C = A \cup B = \mathbf{N})$.

Перетином (**перерізом**, **добутком**) множин A і B називають множину C, яка містить усі спільні елементи множин A, B і не містить інших елементів (рис. 1.3). Інакше кажучи, множина C є перетином множин A і B, якщо вона складається з елементів, що одночасно належать обом множинам A, B (і множині A, і множині B).

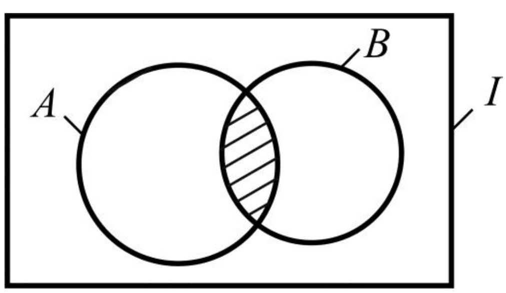


Рис. 1.3. **Ейлерова діаграма перетину множин**

Формальне означення перетину множин A і B виглядає так:

$$C = A \bigcap B \rightleftharpoons C = \{x \mid x \in A \wedge x \in B\}, \qquad (1.17)$$

де $\bigcap$ – *символ перетину*;

$A \bigcap B$ читають як "перетин множин A і B".

Якщо перетином множин A і B є порожня множина: $A \bigcap B = \varnothing$, то кажуть, що ці множини *не перетинаються*.

Операцію перетину множин (як і операцію об'єднання) можна узагальнити на будь-яку скінченну (і навіть нескінченну) кількість множин:

$$C = A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_k = \bigcap_{i=1}^{k} A_i\,, \quad k \in \mathbf{N};$$
$$C = A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_k \cap \ldots = \bigcap_{i=1}^{\infty} A_i\,. \qquad (1.18)$$

Операція перетину множин має такі *властивості*:

1) $A \bigcap B = B \bigcap A$; (1.19)

2) $(A \bigcap B) \bigcap C = A \bigcap (B \bigcap C) = A \bigcap B \bigcap C$; (1.20)

3) $A \bigcap (B \bigcup C) = (A \bigcap B) \bigcup (A \bigcap C)$; (1.21)

4) $A \bigcup (B \bigcap C) = (A \bigcup B) \bigcap (A \bigcup C)$; (1.22)

5) $A \bigcap A = A$; (1.23)

6) $A \subset B \Rightarrow (A \bigcap B = A)$. (1.24)

Приклади:

1. $(A = \{1, 2, 3\},\ B = \{1, 2, 4, 5\}) \Rightarrow C = A \bigcap B = \{1, 2\}$.

2. $(A = [0; 2] = \{x \in \mathbf{R} \mid 0 \le x \le 2\},\ B = (1; 4] = \{x \in \mathbf{R} \mid 1 < x \le 4\}) \Rightarrow$ $\Rightarrow C = A \bigcap B = (1; 2] = \{x \in \mathbf{R} \mid 1 < x \le 2\}$.

3. $(A = \{x \in \mathbf{N} \mid x = 2n\},\ B = \{x \in \mathbf{N} \mid x = 2n - 1\} \Rightarrow C = A \bigcap B = \varnothing$.

4. $(A = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid 2x + 3y = 5\},\ B = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid 5x + 7y = 13\} \Rightarrow$ $\Rightarrow C = A \bigcap B = \{(4, -1)\}$.

5. $(A = \{1, 2, 3\},\ B = \{1, 2, 4, 5\},\ C = \{2, 3\}) \Rightarrow D = A \bigcap B \bigcap C = \{2\}$.

6. Нехай A – множина паралелограмів, B – множина прямокутників, тоді $C = A \bigcap B$ є множиною прямокутників.

Різницею множин A і B називають множину C, яка містить усі елементи множини A, що не належать множині B, і не містить інших елементів (рис. 1.4).

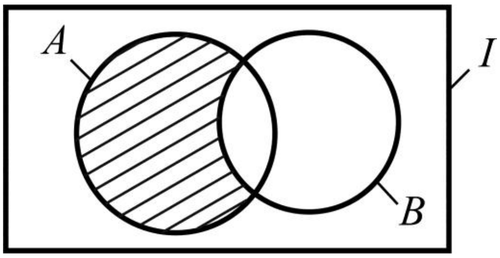


Рис. 1.4. **Ейлерова діаграма різниці множин**

Формальне означення різниці множин A і B виглядає так:

$$C = A \setminus B \;\rightleftarrows\; C = \{\, x \mid x \in A \wedge x \notin B \},\tag{1.25}$$

де \ – *символ різниці*; $A \setminus B$ читають як "різниця множин A і B".

Приклади:

1. $(A = \{m, n, p, q, r\},\ B = \{m, n, p\}) \Rightarrow C = A \setminus B = \{q, r\}$.

2. $(A = \{x \in \mathbf{R} \mid 0 \le x \le 3\},\ \ B = \{x \in \mathbf{R} \mid 2 < x < 5\}) \ \Rightarrow\ C = A \setminus B = $
$= \{\, x \in \mathbf{R} \mid 0 \le x \le 2\}$.

3. $(A = \{\, x \in \mathbf{N} \mid x = 2^n\},\ B = \{\, x \in \mathbf{N} \mid x = 3^n\}) \Rightarrow (C = A \setminus B = A)$.

4. $(A = (-\infty; 2),\ B = [1; +\infty)) \Rightarrow C = A \setminus B = (-\infty; 1) = \{x \in \mathbf{R} \mid x < 1\}$.

Для різниці множин справедливі такі *властивості:*

1) $(A \setminus B) \setminus C = (A \setminus C) \setminus (B \setminus C)$; (1.26)

2) $A \bigcap (B \setminus C) = (A \bigcap B) \setminus (A \bigcap C)$. (1.27)

Але переставна та сполучна властивості щодо різниці множин не виконуються, тобто:

$$A \setminus B \ne B \setminus A, \quad A \setminus (B \setminus C) \ne (A \setminus B) \setminus C.\tag{1.28}$$

Симетричною різницею множин A і B називають множину C, яка є об'єднанням двох різниць $A \setminus B$ і $B \setminus A$ (рис. 1.5), або інакше: множина C є симетричною різницею множин A і B, якщо вона містить усі елементи об'єднання множин A, B без елементів перетину цих множин.

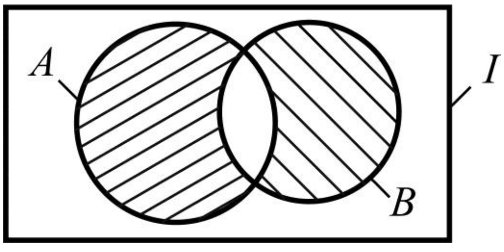


Рис. 1.5. **Ейлерова діаграма симетричної різниці множин**

Отже, за означенням:

$$C = A\Delta B = (A \setminus B)\bigcup(B \setminus A), \text{ або } C = A\Delta B = (A\bigcup B)\setminus(A\bigcap B), \qquad (1.29)$$

де Δ – *символ симетричної різниці* ("дельта").

Приклади:

1. $(A=\{m,n,p,q,r\},\ B=\{m,n,p,l\}) \Rightarrow C = A\Delta B = \{q,r,l\}$.

2. $(A=\{0,2,4,6\},\ B=\{0,3,6,9,12\}) \Rightarrow C = A\Delta B = \{2,4,3,9,12\}$.

3. $(A=\{x\in\mathbf{N} \mid x=2^n\},\ B=\{x\in\mathbf{N} \mid x=3^n\}) \Rightarrow (C = A\Delta B = A\bigcup B)$.

4. $(A=(-\infty;2),\quad B=[1;+\infty)) \quad\Rightarrow\quad C = A\Delta B = (-\infty;1)\bigcup[2,+\infty) =$
$=\{x\in\mathbf{R} \mid x<1 \vee x\geq 2\}$.

Нехай універсум I містить у собі деяку множину A.

Доповненням множини A (до універсальної множини I) називають множину $\overline{A}$, яка містить усі елементи універсуму I без елементів множини A, і тільки їх (рис. 1.6).

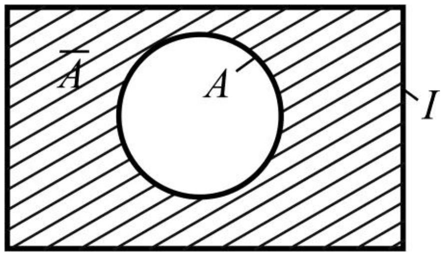


Рис. 1.6. **Ейлерова діаграма доповнення множини**

Отже, $\overline{A}$ – це множина, яку визначають співвідношенням:

$$\overline{A} = I \setminus A, \qquad (1.30)$$

де $\overline{A}$ читають як "доповнення множини A".

Таким чином, доповнення множини – це операція, яка є окремим випадком різниці множин. Доповнення множини A позначають також символом A'.

Приклади:

1. Нехай $I=\{\text{Пн.}, \text{Вт.}, \text{Ср.}, \text{Чт.}, \text{Пт.}, \text{Сб.}, \text{Нд.}\}$ – множина днів тижня, $A=\{\text{Сб.}, \text{Нд.}\}$ – множина вихідних днів. Тоді $\overline{A}=\{\text{Пн.}, \text{Вт.}, \text{Ср.}, \text{Чт.}, \text{Пт.}\}$ – множина робочих днів.

2. Якщо $I=\mathbf{R}$ – множина дійсних чисел, $A=\mathbf{Q}$ – множина раціональних чисел, то $\overline{A}=\overline{\mathbf{Q}}$ – множина ірраціональних (нераціональних) чисел, оскільки $\mathbf{Q}\bigcup\overline{\mathbf{Q}}=\mathbf{R}$.

3. Візьмемо $A=\{1,2,3\}$, $B=\{3,4,6,7\}$, $C=\{4,5,6\}$. Об'єднання цих множин приймемо за універсум: $I = A\bigcup B\bigcup C = \{1,2,3,4,5,6,7\}$. Тоді $\overline{A}=\{4,5,6,7\}$.

Із означення доповнення множини випливають такі *властивості*:

$$A \bigcup \overline{A} = I\,, \tag{1.31}$$

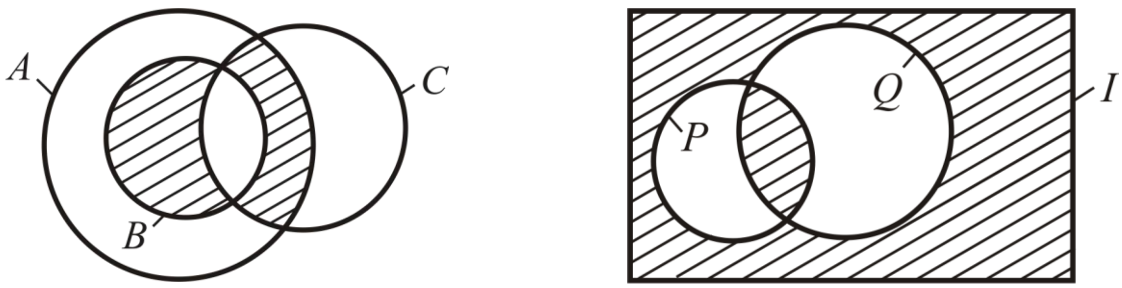
$$A \bigcap \overline{A} = \varnothing, \tag{1.32}$$

$$\overline{(\overline{A})} = \overline{\overline{A}} = A. \tag{1.33}$$

Якщо A і B – підмножини деякого універсуму I, то їхню різницю можна подати через операцію доповнення у вигляді:

$$A \setminus B = A \bigcap \overline{B}. \tag{1.34}$$

Задача 1.1. Опишіть за допомогою операцій $\bigcup$, $\bigcap$, \ над заданими множинами множину $M_З$, яка відповідає заштрихованій області (рис. 1.7); дайте словесне формулювання.



а б

Рис. 1.7. **Заштриховані області, які підлягають опису**

Розв'язання:

а) візуальний аналіз рис. 1.7а показує, що заштрихована область складається з двох частин, одна з яких містить елементи множини B за виключенням елементів множини C, а інша є спільною частиною множин A, C без елементів множини B. Таким чином, за означеннями теоретико-множинних операцій $\bigcup$, $\bigcap$, \ маємо:

$$M_З = (B \setminus C) \bigcup ((A \bigcap C) \setminus B),$$

тобто множина $M_З$, що відповідає заштрихованій області, є об'єднанням різниці множин B, C з різницею між перетином множин A, C і множиною B.

б) аналіз рис. 1.7б дає: заштрихована область містить елементи універсуму за виключенням елементів, які належать тільки множині P, або – тільки множині Q. За означеннями операцій $\bigcup$, $\bigcap$, \ маємо:

$$M_3 = I \setminus ((P \setminus Q) \bigcup (Q \setminus P)).$$

Якщо ж залучити означення симетричної різниці двох множин (1.29) і доповнення множини (1.30), то можна записати:

$$M_3 = I \setminus (P \Delta Q) = \overline{P \Delta Q},$$

тобто множина M_3, що відповідає заштрихованій області, є доповненням симетричної різниці множин P і Q.

1.4. Алгебра множин: означення, закони, принцип двоїстості

У разі розгляду складніших питань (ніж ті, що вивчалися раніше), які стосуються різноманітних співвідношень між множинами, виникає необхідність у систематизованому методі (підході) до вивчення властивостей, пов'язаних з операціями над множинами. Саме пошуки такого підходу і привели до поняття "алгебра множин".

Нехай A, B, C, …, Z – деякі множини. Символьний запис F, створений зі знаків, що позначають множини: A, B, C, …, Z, теоретико-множинні операції: $\bigcup$, $\bigcap$, $\setminus$, Δ, $\overline{}$, і дужок: (,), називають **теоретико-множинною формулою**, або стисло – **формулою**: $F = F(A, B, C, ..., Z)$. Оскільки результатом виконання операцій над множинами є множина, то формула F визначає певну множину.

Якщо дві формули $F = F(A, B, C, ..., Z)$ і $\Phi = \Phi(A, B, C, ..., Z)$, побудовані за допомогою тих чи інших операцій над множинами A, B, C, …, Z за довільного вибору цих множин, описують (дають) одну й ту саму множину, то кажуть, що ці формули **тотожні** (**утворюють тотожність**) або **рівносильні**, і пишуть:

$$F(A, B, C, ..., Z) \equiv \Phi(A, B, C, ..., Z). \tag{1.35}$$

Тотожностями є, наприклад, усі співвідношення, які відповідають розглянутим властивостям операцій об'єднання, перетину, різниці та доповнення множин (замість знака "≡" часто використовують звичайний знак рівності).

Завдяки співвідношенню (1.34): $A \setminus B = A \bigcap \overline{B}$, будь-яку формулу можна подати лише через три операції: об'єднання ($\bigcup$), перетин ($\bigcap$), доповнення ($\overline{}$), які називають **головними теоретико-множинними операціями**: $\Omega = \{\bigcup, \bigcap, \overline{}\}$.

Нехай маємо сукупність (систему) множин $M = \{A_1, A_2, ..., A_m\}$, $m \in \mathbf{N}$. Якщо система M така, що внаслідок виконання головних операцій над множинами із M дістаємо множину, яка міститься в M, то її називають **замкненою** (відносно операцій $\bigcup$, $\bigcap$, $\overline{}$).

Замкненою відносно головних операцій ($\bigcup$, $\bigcap$, $\overline{}$) є множина всіх підмножин деякої множини A, яку називають **булеаном** множини A і позначають B_A.

Наприклад,

$$A = \{1, 2, 3\} \Rightarrow B_A = \{\{1, 2, 3\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \varnothing\}.$$

Найпростішим прикладом замкненої системи є система $M = \{A, \varnothing\}$, де A – будь-яка непорожня множина.

Алгеброю множин $\mathcal{A}_M$ називають упорядковану пару $(M; \Omega)$, де M – система множин, замкнена відносно операцій із $\Omega = \{\bigcup, \bigcap, \overline{}\}$:

$$\mathcal{A}_M = (M; \Omega) = (M; \bigcup, \bigcap, \overline{}). \tag{1.36}$$

Властивості головних операцій ($\bigcup$, $\bigcap$, $\overline{}$) над множинами, виражені у вигляді тотожностей, називають **законами алгебри множин**. До них можна віднести не тільки властивості теоретико-множинних операцій, які розглядалися раніше, а й безліч інших (які, безумовно, виражаються тотожностями).

Серед безлічі законів алгебри множин $\mathcal{A}_M$ виокремлюють **основні закони** – закони, яких достатньо для виконання тотожних перетворень складних формул із метою їх спрощення. Основні закони алгебри множин подано в табл. 1.1.

Не всі з наведених законів незалежні між собою, тобто частина з них є наслідком інших. Наприклад, із перших п'яти тотожностей і двох законів поглинання ($A \bigcup \varnothing = A$, $A \bigcap I = A$) виводять решту.

Таблиця 1.1

Основні закони алгебри множин

№ з/п	Назва закону	Запис закону в символах	
		для об'єднання	для перетину
1	Комутативний (переставний)	$A\cup B=B\cup A$	$A\cap B=B\cap A$
2	Асоціативний (сполучний)	$A\cup(B\cup C)=(A\cup B)\cup C$	$A\cap(B\cap C)=(A\cap B)\cap C$
3	Дистрибутивний (розподільний)	$A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C)$	$A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)$
4	Виключення третьої можливості	$A\cup\overline{A}=I$	—
5	Суперечності	—	$A\cap\overline{A}=\varnothing$
6	Ідемпотентності	$A\cup A=A$	$A\cap A=A$
7	Де Моргана	$\overline{A\cup B}=\overline{A}\cap\overline{B}$	$\overline{A\cap B}=\overline{A}\cup\overline{B}$
8	Поглинання	$A\cup\varnothing=A,\ A\cup I=I$, $A\cup(A\cap B)=A$	$A\cap\varnothing=\varnothing,\ A\cap I=A$, $A\cap(A\cup B)=A$
9	Склеювання	$(A\cap B)\cup(A\cap\overline{B})=A$	$(A\cup B)\cap(A\cup\overline{B})=A$
10	Подвійного доповнення	$\overline{\overline{A}}=A$	

Примітка. Ідемпотентність – від лат. *idem* – той самий (те ж), *potencio* – сила, могутність; Август Морган – французький математик (1806 – 1871 роки життя).

Алгебра множин є аналогом "звичайної" (відомої зі школи) алгебри дійсних чисел, але не всі властивості множин, справедливі для чисел, і навпаки.

За допомогою законів 1 – 10 теоретико-множинні співвідношення $L=P$ доводять так: із лівої частини L тотожними перетвореннями дістають праву частину P, чи навпаки, із P здобувають L, або ліву і праву частини зводять до однієї й тієї ж формули.

Приклад 1. Доведемо, розподільний закон перетину щодо різниці:

$$\underbrace{(A\setminus B)\cap C}_{L}=\underbrace{(A\cap C)\setminus(B\cap C)}_{P}.$$

Позначимо ліву частину рівності через L, а праву – через P. На кожному кроці тотожних перетворень у вертикальних рисках будемо наводити символьний запис формули або основного закону алгебри множин (див. табл. 1.1), які слід застосувати для перетворення виразу:

$$L = (A \setminus B) \bigcap C = \left| A \setminus B = A \bigcap \overline{B} \right| = (A \bigcap \overline{B}) \bigcap C =$$

$$= \left| (X \bigcap Y) \bigcap Z = X \bigcap Y \bigcap Z \right| = A \bigcap \overline{B} \bigcap C;$$

$$P = (A \bigcap C) \setminus (B \bigcap C) = \left| X \setminus Y = X \bigcap \overline{Y} \right| = (A \bigcap C) \bigcap \overline{(B \bigcap C)} =$$

$$= \left| \overline{B \bigcap C} = \overline{B} \bigcup \overline{C} \right| = (A \bigcap C) \bigcap (\overline{B} \bigcup \overline{C}) =$$

$$= \left| X \bigcap (Y \bigcup Z) = (X \bigcap Y) \bigcup (X \bigcap Z) \right| = ((A \bigcap C) \bigcap \overline{B}) \bigcup ((A \bigcap C) \bigcap \overline{C}) =$$

$$= \left| (X \bigcap Y) \bigcap Z = X \bigcap (Y \bigcap Z) = X \bigcap Y \bigcap Z \right| = (A \bigcap C \bigcap \overline{B}) \bigcup (A \bigcap (C \bigcap \overline{C})) =$$

$$= \left| C \bigcap \overline{C} = \varnothing \right| = (A \bigcap C \bigcap \overline{B}) \bigcup (A \bigcap \varnothing) = \left| A \bigcap \varnothing = \varnothing \right| =$$

$$= (A \bigcap C \bigcap \overline{B}) \bigcup \varnothing = \left| X \bigcup \varnothing = X \right| = A \bigcap C \bigcap \overline{B} =$$

$$= \left| X \bigcap Y = Y \bigcap X \right| = A \bigcap \overline{B} \bigcap C.$$

Отже, $L = P = A \bigcap \overline{B} \bigcap C$, тобто L і P – рівносильні формули.

Приклад 2. Доведемо, що $((A \bigcap B) \bigcap (A \bigcup B)) \setminus A = \varnothing$.

Аналогічно попередньому прикладу позначимо ліву частину рівності через L, а праву – через P:

$$\underbrace{((A \bigcap B) \bigcap (A \bigcup B)) \setminus A}_{L} = \underbrace{\varnothing}_{P}.$$

Із лівої частини рівності тотожними перетвореннями здобудемо праву частину:

$$L = ((A \bigcap B) \bigcap (A \bigcup B)) \setminus A = \left| X \setminus Y = X \bigcap \overline{Y} \right| = ((A \bigcap B) \bigcap (A \bigcup B)) \bigcap \overline{A} =$$

$$= \left| (X \bigcap Y) \bigcap Z = X \bigcap Y \bigcap Z \right| = A \bigcap B \bigcap (A \bigcup B) \bigcap \overline{A} =$$

$$= \left| X \bigcap Y = Y \bigcap X \right| = A \bigcap \overline{A} \bigcap B \bigcap (A \bigcup B) = \left| A \bigcap \overline{A} = \varnothing \right| =$$

$$= \varnothing \bigcap B \bigcap (A \bigcup B) = \left| \varnothing \bigcap B = \varnothing \right| = \varnothing \bigcap \underbrace{(A \bigcup B)}_{X} = \left| \varnothing \bigcap X = \varnothing \right| = \varnothing = P.$$

Отже, $L = P = \varnothing$, тобто L і P – рівносильні формули.

Звісно, можна знайти й інші варіанти доведення.

Для доведення властивостей множин, які містять символ включення ($\subset$, $\supset$, $\subseteq$, $\supseteq$), корисним є ланцюжок рівносильних співвідношень:

$$A \subseteq B \Leftrightarrow A \bigcup B = B \Leftrightarrow A \bigcap B = A \Leftrightarrow A \setminus B = \varnothing. \qquad (1.37)$$

Наприклад, доведемо справедливість співвідношення:

$$\underbrace{(A \bigcap B) \bigcup C}_{L} = \underbrace{A \bigcap (B \bigcup C)}_{P} \Leftrightarrow C \subset A. \qquad (1.38)$$

Дійсно, з урахуванням (1.37), маємо:

$$L = P \Rightarrow L \bigcap \overline{A} = P \bigcap \overline{A} \Rightarrow ((A \bigcap B) \bigcup C) \bigcap \overline{A} = (A \bigcap (B \bigcup C)) \bigcap \overline{A} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left| X \bigcap Y = Y \bigcap X \right| \Rightarrow \overline{A} \bigcap ((A \bigcap B) \bigcup C) = \overline{A} \bigcap (A \bigcap (B \bigcup C)) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left| \begin{array}{c} X \bigcap (Y \bigcup Z) = (X \bigcap Y) \bigcup (X \bigcap Z) \\ M \bigcap (N \bigcap K) = (M \bigcap N) \bigcap K \end{array} \right| \Rightarrow$$

$$\Rightarrow ((\overline{A} \bigcap A) \bigcap B) \bigcup (\overline{A} \bigcap C) = (\overline{A} \bigcap A) \bigcap (B \bigcup C) \Rightarrow \left| \overline{A} \bigcap A = A \bigcap \overline{A} = \varnothing \right| \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (\varnothing \bigcap B) \bigcup (\overline{A} \bigcap C) = \varnothing \bigcap (B \bigcup C) \Rightarrow \left| \varnothing \bigcap X = X \bigcap \varnothing = \varnothing \right| \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \varnothing \bigcup (\overline{A} \bigcap C) = \varnothing \Rightarrow \left| \varnothing \bigcup X = X \bigcup \varnothing = X \right| \Rightarrow \overline{A} \bigcap C = \varnothing \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left| X \bigcap Y = Y \bigcap X \right| \Rightarrow C \bigcap \overline{A} = \varnothing \Rightarrow \left| C \bigcap \overline{A} = C \setminus A \right| \Rightarrow$$

$$\Rightarrow C \setminus A = \varnothing \Rightarrow C \subset A.$$

І навпаки,

$$C \subset A \Rightarrow L = (A \bigcap B) \bigcup C = \left| X \bigcup Y = Y \bigcup X \right| = C \bigcup (A \bigcap B) =$$

$$= \left| X \bigcup (Y \bigcap Z) = (X \bigcup Y) \bigcap (X \bigcup Z) \right| = (C \bigcup A) \bigcap (C \bigcup B) =$$

$$= \left| (C \subset A) \Rightarrow (C \bigcup A = A) \right| = A \bigcap (C \bigcup B) = \left| C \bigcup B = B \bigcup C \right| =$$

$$= A \bigcap (B \bigcup C) = P.$$

Отже, співвідношення (1.38) є правильним.

Аналізуючи табл. 1.1 за стовпцями, можна помітити, що тотожності для перетину (об'єднання) можна дістати з тотожностей для об'єднання (перетину), якщо символ $\bigcup$ замінити на $\bigcap$, і навпаки, а символ $\varnothing$ замінити на символ I, і навпаки. Пари символів $\bigcup$, $\bigcap$ і $\varnothing$, I називають **двоїстими** (**дуальними**) символами (дуальний – від лат. *dualis* – двоїстий).

Формулу $F^* = F^*(A, B, C, \ldots, Z)$ називають **двоїстою** відносно формули $F = F(A, B, C, \ldots, Z)$, якщо її дістають заміною у F символів операцій на двоїсті символи.

Стосовно "двоїстості" справедливе твердження: якщо F і Φ є рівносильними формулами, то двоїсті формули F^* і Φ^* теж рівносильні:

$$F = \Phi \Rightarrow F^* = \Phi^*. \tag{1.39}$$

Принцип двоїстості полягає в тому, що з будь-якої тотожності теорії множин цілком "автоматично" можна дістати іншу – двоїсту – тотожність, спираючись на твердження (1.39). Розглядають також *розширений принцип двоїстості*, коли до двоїстих символів відносять також знаки включення: $\subset$, $\supset$, $\subseteq$, $\supseteq$.

Наприклад, твердження, двоїсте відносно твердження (1.38), буде таким: $(A \bigcup B) \bigcap C = A \bigcup (B \bigcap C) \Leftrightarrow C \supset A$.

Аналогічно розширений принцип двоїстості застосовують для нестрогих знаків включення.

В алгебрі множин є своя *теорія рівнянь*, яка значно відрізняється від тієї, яку ми знаємо з курсу елементарної алгебри.

Наприклад, рівняння $(x + a) - b = 0$, де $a, b \in \mathbf{R}$, в алгебрі чисел має єдиний розв'язок: $x = b - a$. Розглянемо аналогічне рівняння в алгебрі множин: $(X \bigcup A) \setminus B = \varnothing$. Після тотожних перетворень лівої частини рівняння із застосуванням співвідношення (1.34) та розподільної властивості (1.21) матимемо:

$$(X \bigcup A) \setminus B = \varnothing \Leftrightarrow (X \bigcup A) \bigcap \overline{B} = \varnothing \Leftrightarrow \overline{B} \bigcap (X \bigcup A) = \varnothing \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow (\overline{B} \bigcap X) \bigcup (\overline{B} \bigcap A) = \varnothing \Leftrightarrow (X \bigcap \overline{B}) \bigcup (A \bigcap \overline{B}) = \varnothing \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow (X \setminus B) \bigcup (A \setminus B) = \varnothing \Leftrightarrow (X \setminus B = \varnothing \vee A \setminus B = \varnothing) \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow (X \subseteq B,\ A \subseteq B).$$

Отже, рівняння розв'язуване тоді і тільки тоді, коли $A \subseteq B$, а його розв'язками є всі підмножини множини B: $X \subseteq B$.

Запитання для самоконтролю засвоєння матеріалу

Відповіді на всі запитання сформулюйте словесно, запишіть у символьній формі, обґрунтуйте (на підставі означень, теорем, правил, формул тощо), наведіть відповідні конкретні приклади.

1. У чому полягає канторове поняття множини?
2. Що розуміють під елементом (членом) множини?
3. За якої умови кажуть, що множину задано?
4. Які існують способи задання множин?
5. Чому не можна ідентифікувати математичне поняття "множина" з буденним уявленням про множину?
6. Що називають підмножиною деякої множини?
7. У чому полягає сутність символів належності та строгого і нестрогого включення?
8. Які підмножини називають невластивими; властивими?
9. Яку множину називають порожньою; універсальною?
10. У яких випадках кажуть, що між множинами має місце бієкція?
11. Які множини називають рівними; еквівалентними? У чому полягає принципова відмінність між цими поняттями?
12. Яку множину називають скінченною; нескінченною; зліченною; незліченною?
13. Що розуміють під потужністю множини і чому вона дорівнює у випадку скінченної множини?
14. Яке співвідношення пов'язує потужності еквівалентних множин?
15. Що називають об'єднанням; перетином; різницею; симетричною різницею множин; доповненням множини? Як виглядають діаграми Ейлера для цих операцій над множинами?
16. Які теоретико-множинні операції називають головними?
17. Яку множину називають замкненою відносно головних операцій?
18. Що називають алгеброю множин?
19. Як виглядають символьні записи основних законів алгебри множин та як ці закони формулюються?
20. У чому полягає принцип двоїстості (розширений принцип двоїстості) в алгебрі множин?
21. Яку формулу називають двоїстою відносно заданої формули?
22. Які пари символів називають двоїстими (дуальними)?

2. Бінарні відношення

2.1. Прямий (декартів) добуток множин

Згідно з означенням рівних множин порядок (розташування) елементів у множині несуттєвий, тобто неважливо, на якому місці (у поданні множини) розташований той чи інший елемент. Але в багатьох випадках (задачах застосовного характеру) доводиться зважати на цю обставину.

Наприклад, множини $M=\{1,3\}$ і $N=\{3,1\}$ рівні між собою. Якщо ж їхні елементи трактувати як координати точки на площині, то здобудемо дві різні точки: $M(1,3)$ і $N(3,1)$.

Нехай A – скінченна множина, яка містить n елементів, тобто $|A|=n$, $n\in\mathbf{N}$. Надалі таку множину A будемо називати ***n*-елементною множиною**, або просто ***n*-множиною**.

Дво-, три-, …, n-елементну множину із фіксованим (певним) порядком елементів називають відповідно **упорядкованою парою**, **трійкою**, …, ***n*-кою** або **дво-**, **три-**, …, ***n*-елементним кортежем** (**кортежем довжини *n***, або ***n*-кортежем**). Елементи n-кортежу називають також його **компонентами** (**координатами**). Для позначення n-кортежу використовують круглі дужки, між якими записують через кóму або крапку з комою його елементи.

Приклади: множина студентів, які стоять у черзі в буфеті; множина букв (слів) у слові (реченні); шеренга військових, які вишикувані за рангуванням.

Із множини $\{a,b\}$ можна утворити 2-кортежі: (a,b), (b,a); для множини $\{a,b,c\}$ маємо: (a,b,c), (a,c,b), (b,a,c), (b,c,a), (c,a,b), (c,b,a); n-множина $A=\{x_1,x_2,x_3,...,x_n\}$ "породжує" такі n-кортежі:

$$(x_1,x_2,x_3,...,x_n),\ (x_2,x_1,x_3,...,x_n),\ \ldots,\ (x_n,x_{n-1},x_{n-2},...,x_1).$$

Частинними випадками кортежу є кортеж (a) довжини 1 і *порожній кортеж* довжини 0, який позначають через $(\ )$ або Λ (лямбда).

На відміну від множини, в кортежі допускають наявність однакових елементів: однакові букви у слові, однакові координати вектора тощо. Прикладами нескінченних кортежів є відомі зі шкільної математики числові послідовності, зокрема послідовність натуральних чисел.

Нехай A і B – дві непорожні скінченні множини з кількістю елементів n і m відповідно, тобто $|A|=n$, $n\in\mathbf{N}$; $|B|=m$, $m\in\mathbf{N}$. Надалі будемо замість записів $A=\{x_1,x_2,...,x_n\}$, $B=\{y_1,y_2,...,y_m\}$ стисло писати: $A=\{x_i\}_1^n$, $B=\{y_j\}_1^m$. З елементів множин A і B можна утворювати (будувати, складати) різні впорядковані пари (x,y) – двоелементні кортежі.

Прямим, або **декартовим**, **добутком** множин A і B називають множину всіх упорядкованих пар (x,y) – таких, що перша компонента пари належить множині A, а друга компонента – множині B:

$$A\times B=\{(x,y)\,|\,\forall x\in A, \forall y\in B\}, \tag{2.1}$$

де $\times$ – *символ (знак) прямого добутку*.

Щоб знайти декартів добуток множин A і B, діють (згідно з означенням) так: беруть елемент $x_1\in A$ і залучають до нього в пару по черзі всі елементи y_j, $j=\overline{1,m}$, із множини B; потім таким самим чином утворюють пари з елементами $x_2\in A$, $x_3\in A$, …; процес побудови пар продовжують доти, поки не буде перебрано всі елементи множини A.

Потужність прямого добутку множин A і B визначають співвідношенням:

$$|A\times B|=|A|\cdot|B|=n\cdot m. \tag{2.2}$$

Приклад, $(A=\{a,b,c,d\},\ B=\{4,5\})\ \Rightarrow\ A\times B=\{(a,4),(a,5),(b,4),$ $(b,5),(c,4),(c,5),(d,4),(d,5)\}$; $|A\times B|=4\cdot 2=8$.

Зрозуміло, що прямий добуток множин також може містити пари з однаковими першим і другим елементами.

На підставі означення (2.1) робимо висновок, що для операції прямого добутку не виконуються закони комутативності та асоціативності:

$$A\times B\neq B\times A,\quad A\times(B\times C)\neq(A\times B)\times C,$$

але справедливі розподільні закони відносно об'єднання, перетину та різниці:

$$A\times(B\bigcup C)=(A\times B)\bigcup(A\times C),\quad A\times(B\bigcap C)=(A\times B)\bigcap(A\times C),$$
$$A\times(B\setminus C)=(A\times B)\setminus(A\times C).$$

Операцію прямого добутку можна узагальнити на довільну скінченну кількість множин.

Прямим, або **декартовим**, **добутком** $\boldsymbol{n}$ **множин** A_1, A_2, ..., A_n, $n \in \mathbf{N}$, називають множину всіх n-елементних кортежів $(x_1, x_2, ..., x_n)$, таких, що $x_i \in A_i$, $\forall i = \overline{1, n}$:

$$A_1 \times A_2 \times ... \times A_n = \{(x_1, x_2, ..., x_n) \mid x_1 \in A_1, x_2 \in A_2, ..., x_n \in A_n\}. \qquad (2.3)$$

У частинних випадках маємо:

$A^2 = A \times A$ – декартів квадрат множини A;

$A^3 = A \times A \times A$ – декартів куб множини A;

$A^n = \underbrace{A \times A \times ... \times A}_{n \text{ разів}}$ $(n \geq 1)$ – n-й декартів степінь множини A.

Наприклад, $A = \{1, 2\} \Rightarrow A^3 = \{1, 2\} \times \{1, 2\} \times \{1, 2\} = \{(1,1,1), (1,1,2), (1,2,1), (1,2,2), (2,1,1), (2,1,2), (2,2,1), (2,2,2)\}$.

2.2. Бінарні відношення: основні означення, дії (операції) з ними

Під час вивчення різноманітних явищ (процесів) часто доводиться, спираючись на ті чи інші властивості об'єктів, зіставляти між собою елементи однієї й тієї ж множини або різних множин і описувати відношення, в яких вони перебувають один щодо одного.

Наприклад, якщо a, b, c, d – послідовні сторони квадрата, то перпендикулярними серед них будуть тільки такі пари сторін: $a \perp b$, $a \perp d$, $b \perp a$, $b \perp c$, $c \perp b$, $c \perp d$, $d \perp a$, $d \perp c$.

Щоб не писати щоразу один і той самий знак перпендикулярності ($\perp$), ми можемо просто перелічити всі пари сторін (a,b), (a,d), (b,a), (b,c), (c,b), (c,d), (d,a), (d,c), зазначивши, що елементи кожної пари перебувають у відношенні перпендикулярності.

Відношення як математичний об'єкт стали предметом вивчення спеціальної математичної теорії – *теорії відношень*, елементи якої розглянемо на прикладі найпростіших і найпоширеніших відношень – бінарних, тобто відношень пар елементів.

Нехай A і B – деякі множини, а $A\times B$ – їхній декартів добуток (див. формулу (2.1)): $A\times B \rightleftharpoons \{(x,y)\,|\,\forall x\in A, \forall y\in B\}$.

Бінарним, або **двомісним**, **відношенням** (**БВ**) між елементами множин A і B називають будь-яку підмножину R упорядкованих пар $(x,y)\in A\times B$, тобто

$$\big(R - \text{БВ між елементами } A \text{ і } B\big) \rightleftharpoons R=\{(x,y)\,|\,(x,y)\in A\times B\}, \qquad (2.4)$$

і кажуть, що: x та y *пов'язані відношенням* R, або елемент x *перебуває у відношенні* R до y, або для x і y *виконується відношення* R.

Замість запису $(x,y)\in R\subseteq A\times B$ часто використовують більш простий: $x\,R\,y$.

Множину всіх перших (других) елементів пар із R називають **областю визначення**, або **існування**, БВ R (**областю значень** БВ R) і позначають через $D(R)$ $(E(R))$:

$$\begin{gathered} D(R)=\{x\,|\,\exists y:(x,y)\in R\} \\ (E(R)=\{y\,|\,\exists x:(x,y)\in R\}). \end{gathered} \qquad (2.5)$$

Об'єднання множин $D(R)$ і $E(R)$ називають **областю** БВ R:

$$O(R)=D(R)\bigcup E(R). \qquad (2.6)$$

Якщо $R\subseteq A\times A$, то кажуть, що R є бінарним відношенням *на множині* A. Зокрема, $R\subseteq O(R)\times O(R)$.

Наприклад, для БВ $R=\{(2,1),(1,2),(1,3),(2,4)\}$ маємо: $D(R)=\{2,1\}$, $E(R)=\{1,2,3,4\}$, тоді $O(R)=D(R)\bigcup E(R)=\{1,2,3,4\}$.

Бінарні відношення R і S називають **рівними** $\big(R=S\big)$, якщо R і S рівні як множини:

$$(R=S) \rightleftharpoons (\forall x,\forall y:(x,y)\in R \Leftrightarrow (x,y)\in S). \qquad (2.7)$$

БВ i_A, яке містить усі пари вигляду (x,x) $\forall x\in A$, називають **одиничним**, або **тотожним**:

$$i_A=\{(x,x)\,|\,\forall x\in A\}. \qquad (2.8)$$

Наприклад, для БВ $R = \{(2,1),(1,2),(1,3),(2,4)\}$ одиничне БВ i_A має вигляд: $i_A = \{(1,1),(2,2),(3,3),(4,4)\}$.

Множину всіх упорядкованих пар (y,x) таких, що $(x,y) \in R$, називають **інверсією** відношення R, або БВ, **оберненим до** R, і позначають через R^{-1}:

$$R^{-1} = \{(y,x) \mid (x,y) \in R\}. \tag{2.9}$$

Наприклад, для $R = \{(2,1),(1,2),(1,3),(2,4)\}$ обернене БВ R^{-1} згідно з означенням (2.9) дістають переставленням елементів кожної пари БВ R: $R^{-1} = \{(1,2),(2,1),(3,1),(4,2)\}$.

Якщо (x,y) і (u,v) – дві впорядковані пари, то їхні елементи x і v назвемо *крайніми*, а y і u – *середніми* (за аналогією з пропорціями).

Нехай R і S – бінарні відношення на деякій множині A.

Множину пар (x,y), які утворюються із крайніх елементів двох пар із S і R, середні члени яких рівні між собою, тобто $(x,z) \in S$ і $(z,y) \in R$, називають **композицією**, або **суперпозицією**, відношень S і R і позначають через $R \circ S$:

$$R \circ S = \{(x,y) \mid \exists z : xSz \wedge zRy\}. \tag{2.10}$$

Наприклад, якщо $S = \{(1,2),(2,4),(3,6)\}$, $R = \{(1,3),(2,6),(3,9),(4,12)\}$, то $R \circ S = \{(1,6),(2,12)\}$.

Оскільки БВ – множини (множини впорядкованих пар), то для них залишаються чинними всі положення теорії множин, зокрема основні способи задання: *перелік* і *опис*. Переліком і описом користуються, коли БВ містить скінченну множину елементів (пар). БВ, що мають нескінченну множину пар, можна задати лише за допомогою характеристичної властивості її елементів (опису).

Наприклад, $R = \{(x,y) \mid x,y \in \mathbf{Z} \wedge (x+y=1)\}$ – бінарне відношення пар цілих чисел x і y, сума яких дорівнює одиниці.

Розглядають також **порожнє** БВ – відношення, яке не містить жодної пари:

$$(R - \text{порожнє БВ}) \rightleftharpoons (R = \varnothing). \tag{2.11}$$

Повним, або **універсальним**, БВ на множині A називають відношення, яке містить всі елементи із A^2:

$$(R - \text{повне БВ}) \rightleftharpoons (R = A \times A). \tag{2.12}$$

Над бінарними відношеннями (крім операцій знаходження інверсії і композиції) можна виконувати всі теоретико-множинні операції, а саме: об'єднання $(\bigcup)$, перетин $(\bigcap)$, різницю $(\backslash)$.

Узагальненням поняття БВ є n-місне відношення $(n \geq 1)$ як будь-яка множина кортежів довжини n, причому число n називають **рангом** відношення.

2.3. Геометричні та матричне подання бінарних відношень

1. Зображення БВ графіком на декартовій площині. Нехай A – скінченна або нескінченна множина дійсних чисел $(A \subset \mathbf{R})$, R – БВ на A. Кожній парі $(x, y) \in R \subseteq A^2 \subset \mathbf{R}^2$ на декартовій площині xOy відповідає точка з координатами x, y. Отже, множина точок $(x, y) \in R$ визначає геометричний образ (графік) БВ R на площині xOy.

Приклад. На рис. 2.1 зображено БВ $R = \{(x, y) \mid x, y \in \mathbf{Z} \wedge (y^2 \leq x)\}$, яке є множиною точок із цілими координатами, що задовольняють умову $y^2 \leq x$; причому: $D(R) = \{x \mid x \in \mathbf{Z} \wedge x \geq 0\}$, $E(R) = \{y \mid y \in \mathbf{Z}\}$, $O(R) = \mathbf{Z}$.

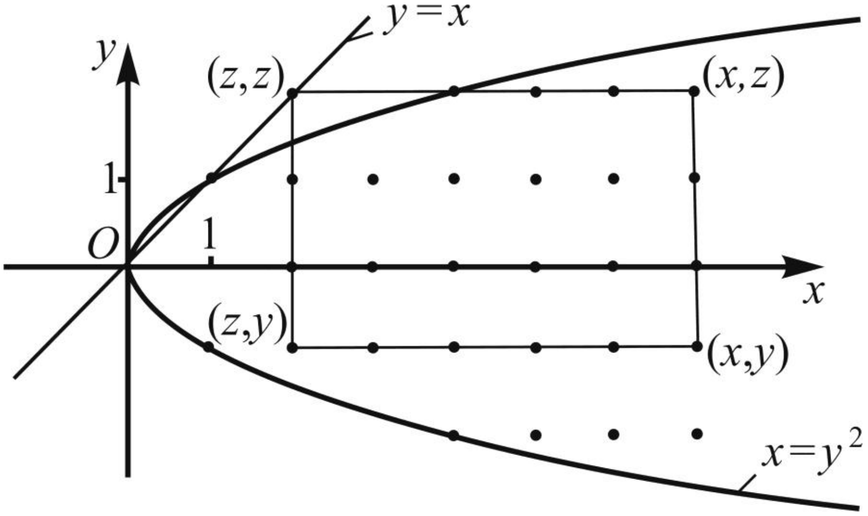


Рис. 2.1. **Графік бінарного відношення**

Зауважимо, що:

коли БВ R містить пари (x,x), то відповідні точки лежать на прямій l: $y=x$, тобто на бісектрисі першого і третього координатних кутів;

якщо у БВ входить як пара (x,y), так і пара (y,x), то відповідні точки розташовані симетрично відносно l;

елементи композиції $R\circ R$ знаходять так: із точки $(x,z)\in R$ проводять горизонтальний відрізок до перетину з l у точці (z,z), потім проводять вертикальний відрізок із кінцями (z,z) і $(z,y)\in R$ (рис. 2.1). Парі $(x,y)\in R\circ R$ відповідає точка, яка є четвертою вершиною прямокутника з вершинами в точках (x,z), (z,z), (z,y), (x,y). Якщо $(z,z)\in R$, то прямокутник вироджується у відрізок.

Наприклад, для $(x,z)=(1,0)$ і $(z,y)=(0,0)$ маємо: $(x,y)=(1,0)$.

2. Зображення БВ за допомогою графа. Нехай R – бінарне відношення, областю якого є непорожня скінченна множина A, тобто $O(R)=A$. Проробимо таке:

Рис. 2.2. **Точки площини, що відповідають елементам пари (x, y)**

Рис. 2.3. **Орієнтоване ребро**

Рис. 2.4. **Петля**

1) кожному елементу пари $(x,y)\in R$ поставимо у відповідність точку площини (рис. 2.2);

2) кожній парі (x,y), такій, що $(x,y)\in R$ і $x\neq y$, – напрямлений відрізок від x до y (прямолінійний або криволінійний), який назвемо **орієнтованим ребром** (рис. 2.3);

3) парам виду (x,x) $\forall x\in A$ – **петлю** з фіксованим напрямком обходу (наприклад, проти руху годинникової стрілки) (рис. 2.4).

Геометричну фігуру, побудовану згідно з кроками 1, 2, 3, називають **орієнтованим графом БВ** R, або просто **графом БВ** R,а елементи із A – **вершинами** графа.

Якщо у відношення R входить як пара (x,y), так і пара (y,x), то в графі буде два ребра з вершинами x і y, які орієнтовані в протилежні боки. У цьому випадку два ребра замінюють (для спрощення зображення) одним ребром з двома стрілками (або зовсім без стрілок), яке називають **неорієнтованим ребром**.

Приклад. Граф БВ $R=\{(a,b),(b,c),(d,d),(e,a),(e,e),(b,a)\}$ зображено на рис. 2.5.

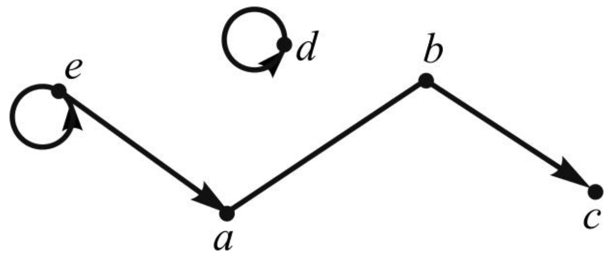


Рис. 2.5. **Граф бінарного відношення**

Зрозуміло, що коли БВ подано у вигляді графа, то його (БВ) легко записати і як множину пар.

Висновок: кожне бінарне відношення на скінченній множині можна подати у вигляді орієнтованого графа. З іншого боку, кожний орієнтований граф визначає бінарне відношення на множині його вершин.

3. Зображення БВ матрицями. Нехай A – скінченна множина і $R=\{(x,y)\,|\,(x,y)\in A^2\}$, $D(R)=\{x_1,x_2,...,x_m\}$, $E(R)=\{y_1,y_2,...,y_n\}$.

Тоді БВ R відповідає матриця $B=(b_{ij})_{m\times n}$ з m рядками і n стовпцями, елементи якої b_{ij} визначають таким чином:

$$b_{ij}=\begin{cases}1, & (x_i,y_j)\in R,\\ 0, & (x_i,y_j)\notin R.\end{cases}$$

Приклад. Матриця B БВ $R=\{(a,b),(b,c),(c,d),(b,a),(c,c)\}$ з $D(R)=\{a,b,c\}$ і $E(R)=\{a,b,c,d\}$ має вигляд:

$$B=(b_{ij})_{3\times 4}=\begin{array}{c} \\ a\\ b\\ c\end{array}\!\!\begin{array}{c}\begin{array}{cccc} a & b & c & d\end{array}\\ \begin{bmatrix}0 & 1 & 0 & 0\\ 1 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 1\end{bmatrix}\end{array}.$$

Якщо ж виходити з області БВ $O(R)=D(R)\cup E(R)=\{a,b,c,d\}$, то його можна подати у вигляді квадратної матриці:

$$B=(b_{ij})_{4\times 4}=\begin{array}{c} \\ a \\ b \\ c \\ d \end{array}\!\!\begin{array}{c} \begin{array}{cccc} a & b & c & d \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{array}.$$

Порожньому (повному) БВ відповідає квадратна матриця, яка містить тільки одні нулі (одиниці), тотожному БВ – одинична матриця.

Геометричні та матричне зображення бінарних відношень використовують для полегшення їх аналізу з точки зору певних властивостей.

2.4. Основні характеристики бінарних відношень

До найвідоміших характеристик (властивостей) бінарних відношень належать: рефлексивність (r), антирефлексивність $(\bar{r})$, симетричність (s), антисиметричність $(\bar{s})$, асиметричність (as), транзитивність (t).

Нехай R – деяке БВ з областю $O(R)=A=D(R)\bigcup E(R)$; x, y, z – довільні елементи із A.

Рефлексивність. Бінарне відношення $R\subseteq A^2$ називають **рефлексивним** (R_r), якщо воно містить тотожне БВ $(R\supseteq i_A)$, тобто:

$$R_r \;\rightleftharpoons\; \forall x\in A\colon (x,x)\in R. \tag{2.13}$$

Прикладами R_r є: відношення подібності на множині трикутників; відношення рівності на числових множинах.

Мовою зображень рефлексивність описують так:

$R_r \Leftrightarrow$ (кожна вершина графа БВ має петлю);

$R_r \Leftrightarrow$ (декартів графік БВ містить точки прямої $y=x$ $\forall x\in A$);

$R_r \Leftrightarrow$ (усі елементи головної діагоналі матриці БВ дорівнюють одиниці).

Антирефлексивність. БВ $R\subset A^2$ називають **антирефлексивним** $(R_{\bar{r}})$, якщо воно не містить жодної пари з однаковими елементами $(R\bigcap i_A=\varnothing)$, тобто:

$$R_{\bar{r}} \;\rightleftharpoons\; \forall x\in A\colon (x,x)\notin R. \tag{2.14}$$

Прикладами $R_{\bar{r}}$ є відношення строгої нерівності; відношення "бути молодшим"; "бути сильнішим".

Мовою зображень антирефлексивність описують так:

$R_{\bar{r}} \Leftrightarrow$ (жодна з вершин графа БВ не має петлі);

$R_{\bar{r}} \Leftrightarrow$ (жодна з точок графіка БВ не лежить на прямій $y = x$);

$R_{\bar{r}} \Leftrightarrow$ (усі елементи головної діагоналі матриці БВ дорівнюють нулю).

Симетричність. БВ $R \subseteq A^2$ називають **симетричним** (R_s), якщо воно разом із кожною парою (x, y) містить і пару (y, x) $(R = R^{-1})$, тобто:

$$R_s \rightleftharpoons \forall\, x, y \in A\colon (x, y) \in R \Rightarrow (y, x) \in R. \qquad (2.15)$$

Приклади R_s: відношення паралельності на множині прямих; подібності на множині трикутників; дружби на множині людей.

Симетричність мовою зображень описують так:

$R_s \Leftrightarrow$ (усі ребра графа БВ неорієнтовані);

$R_s \Leftrightarrow$ (графік БВ симетричний відносно прямої $y = x$);

$R_s \Leftrightarrow$ (матриця БВ симетрична відносно головної діагоналі).

Антисиметричність. БВ $R \subset A^2$ називають **антисиметричним** $(R_{\bar{s}})$, якщо воно не містить разом пари (x, y) і (y, x) з різними компонентами x, y $(R \cap R^{-1} \subseteq i_A)$, тобто:

$$R_{\bar{s}} \rightleftharpoons \forall\, x, y \in A\colon (x, y) \in R \wedge (y, x) \in R \Rightarrow x = y. \qquad (2.16)$$

Приклади $R_{\bar{s}}$: відношення нестрогої нерівності на множині дійсних чисел; включення $(\subseteq)$ на множинах; "бути командиром" на множині військовослужбовців.

Антисиметричність мовою зображень описують так:

$R_{\bar{s}} \Leftrightarrow$ (граф БВ не має неорієнтованих ребер, але має петлі);

$R_{\bar{s}} \Leftrightarrow$ (графік БВ не має точок, симетричних відносно прямої $y = x$, але має точки, що лежать на цій прямій);

$R_{\bar{s}} \Leftrightarrow$ (матриця БВ не має одиничних елементів, симетричних відносно головної діагоналі, на якій є одиниці (хоча б одна)).

Асиметричність. БВ $R \subset A^2$ називається **асиметричним** (R_{as}), або **несиметричним**, якщо воно не містить разом пари (x, y) і (y, x) $(R \bigcap R^{-1} = \varnothing)$, тобто:

$$R_{as} \rightleftharpoons \forall\, x, y \in A \colon (x, y) \in R \Rightarrow (y, x) \notin R. \qquad (2.17)$$

Приклади R_{as}: відношення строгої нерівності $(<, >)$ на множині дійсних чисел; строге включення $(\subset)$ на множинах; відношення "бути батьком" на множині людей.

Асиметричність мовою зображень описують так:

$R_{as} \Leftrightarrow$ (граф БВ не має ні неорієнтованих ребер, ні петель);

$R_{as} \Leftrightarrow$ (графік БВ не має точок, які симетричні відносно прямої $y = x$ або лежать на ній);

$R_{as} \Leftrightarrow$ (матриця БВ не має одиничних елементів, симетричних відносно головної діагоналі, яка містить тільки нулі).

Транзитивність. БВ $R \subset A^2$ називають **транзитивним** (R_t), якщо з умови, що елементи x і z, z і y перебувають у відношенні R, випливає, що елементи x і y також пов'язані відношенням R $(R \circ R \subseteq R)$, тобто:

$$R_t \rightleftharpoons \forall\, x, y, z \in A : (x, z) \in R \wedge (z, y) \in R \Rightarrow (x, y) \in R. \qquad (2.18)$$

Приклади R_t: відношення паралельності на множині прямих, адже для прямих x, y, z є слушним: якщо $x \| z$ і $z \| y$, то $x \| y$; відношення подібності на множині трикутників; відношення "більше" ("менше") на множині дійсних чисел $\mathbf{R}$; відношення "бути дільником" на множині натуральних чисел $\mathbf{N}$; відношення "бути родичем" на множині людей.

Транзитивність мовою зображень БВ описують так:

$R_t \Leftrightarrow$ (граф БВ для кожної пари ребер виду (x, z), (z, y) має замикальне ребро (x, y) і кожна вершина неорієнтованого ребра має петлю);

$R_t \Leftrightarrow$ (графік БВ разом із точками (x, z) і (z, y) містить точку (x, y), тобто точку композиції $R \circ R$ (рис. 2.1));

$R_t \Leftrightarrow$ (матриця БВ така, що для кожної пари одиничних елементів, один із яких стоїть в i-му рядку і k-му стовпці, а другий в k-му рядку і j-му стовпці, існує одиничний елемент, розташований на перетині i-го рядка і j-го стовпця). Крім того, наявність одиниць на головній діагоналі ніколи не порушує транзитивності.

Користуються й іншим критерієм транзитивності: якщо $B=(b_{ij})$ – матриця БВ, а $K=(k_{ij})$ – її квадрат: $K=B^2$, то:

$$R_t \Leftrightarrow (k_{ij}>0 \Rightarrow b_{ij}>0). \qquad (2.19)$$

Задача 2.1. Оцініть БВ $R=\{(1,2),(3,4),(2,1),(3,3)\}$, задане множиною пар, із точки зору його властивостей r, $\bar{r}$, s, $\bar{s}$, as, t чотирма способами: 1) аналітичним; 2) матрицею; 3) графом; 4) декартовим графіком.

Розв'язання.

1 спосіб – аналітичний.

1. *Знаходимо* область існування $D(R)$, область значень $E(R)$ і область $O(R)$ БВ R:

$$(D(R)=\{1,2,3\},\ E(R)=\{1,2,3,4\}) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow O(R)=D(R)\bigcup E(R)=\{1,2,3,4\}=A.$$

2. *Знаходимо* одиничне БВ (i_A), обернене БВ (R^{-1}), композицію БВ $R\circ R$:

$i_A=\{(x,x)\ |\ \forall x\in A\}=\{(1,1),(2,2),(3,3),(4,4)\}$;

$R^{-1}=\{(y,x)\ |\ (x,y)\in R\}=\{(2,1),(4,3),(1,2),(3,3)\}$;

$R\circ R=\{(x,y)\ |\ \exists z:\ xRz\wedge zRy\}=\{(1,1),(2,2),(3,4),(3,3)\}$.

3. *Установлюємо* наявність (або відсутність) тих чи інших властивостей БВ: r, $\bar{r}$, s, $\bar{s}$, as, t, залучаючи означення (2.13) – (2.18):

R *не є рефлексивним*, оскільки $i_A \not\subseteq R$ (наприклад, $(1,1)\in i_A$, але $(1,1)\notin R$);

R *не є антирефлексивним*, оскільки $R\bigcap i_A\neq\varnothing$ ($(3,3)\in R$ і $(3,3)\in i_A$);

R *не є симетричним*, оскільки $R\neq R^{-1}$ ($(3,4)\in R$, але $(3,4)\notin R^{-1}$);

R *не є антисиметричним*, оскільки $R\bigcap R^{-1}\not\subseteq i_A$ (наприклад, $(1,2)\in R\bigcap R^{-1}$, але $(1,2)\notin i_A$);

R *не є асиметричним*, оскільки $R \cap R^{-1} \neq \varnothing$ (наприклад, $(2,1) \in R$ і $(2,1) \in R^{-1}$);

R *не є транзитивним*, оскільки $R \circ R \not\subseteq R$ (наприклад, $(1,1) \in R \circ R$, але $(1,1) \notin R$.

Отже, *задане БВ R не володіє жодною властивістю*.

Такі ж висновки робимо, аналізуючи матрицю, граф і графік БВ.

2 спосіб – матрицею БВ.

1. *Знаходимо* область БВ R (див. 1 спосіб): $O(R) = A = \{1,2,3,4\}$.

2. *Будуємо* матрицю БВ:

$$B = \begin{array}{c c} & \begin{array}{cccc} 1 & 2 & 3 & 4 \end{array} \\ \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{array} & \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{array}.$$

3. *Установлюємо* наявність (або відсутність) тих чи інших властивостей БВ: r, $\bar{r}$, s, $\bar{s}$, as, t, аналізуючи матрицю B:

R *не є рефлексивним*, оскільки не всі елементи головної діагоналі матриці дорівнюють одиниці (наприклад, $b_{22} = 0$);

R *не є антирефлексивним*, оскільки не всі елементи головної діагоналі матриці дорівнюють нулю ($b_{33} = 1$);

R *не є симетричним*, оскільки матриця БВ не є симетричною відносно головної діагоналі ($b_{34} = 1$, але $b_{43} = 0$);

R *не є антисиметричним*, оскільки матриця БВ має одиничні елементи, симетричні відносно головної діагоналі ($b_{12} = b_{21} = 1$);

R *не є асиметричним*, оскільки матриця БВ має одиничні елементи, симетричні відносно головної діагоналі ($b_{12} = b_{21} = 1$) і на головній діагоналі не всі нулі ($b_{33} = 1$);

R *не є транзитивним*, оскільки не для кожної пари одиничних елементів $b_{ik} = b_{kj} = 1$ знайдеться третій елемент $b_{ij} = 1$, $i, j, k \in \{1,2,3,4\}$ ($b_{12} = 1$ і $b_{21} = 1$, але $b_{11} = 0$).

3 спосіб – графом БВ.

1. *Знаходимо* область БВ R (див. 1 спосіб): $O(R)=A=\{1,2,3,4\}$.

2. *Будуємо* граф БВ (рис. 2.6).

3. *Установлюємо* наявність (або відсутність) тих чи інших властивостей БВ: r, $\bar{r}$, s, $\bar{s}$, as, t, аналізуючи його граф:

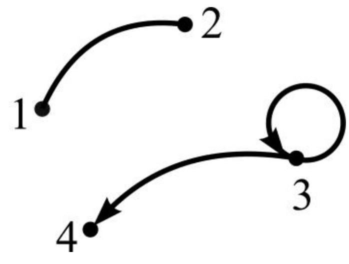


Рис. 2.6. **Граф БВ**

R *не є рефлексивним*, оскільки не всі вершини графа мають петлі (наприклад, вершина 1);

R *не є антирефлексивним*, оскільки одна з вершин графа має петлю (вершина 3);

R *не є симетричним*, оскільки на графі є орієнтоване ребро (ребро $(3,4)$);

R *не є антисиметричним*, оскільки на графі є неорієнтоване ребро (ребро $(1,2)$);

R *не є асиметричним*, оскільки на графі є неорієнтоване ребро (ребро $(1,2)$) і петля (у вершини 3);

R *не є транзитивним*, оскільки вершини неорієнтованого ребра не мають петель (наприклад, вершина 1).

4 спосіб – декартовим графіком БВ.

1. *Будуємо* декартів графік БВ (рис. 2.7).

2. *Знаходимо* область БВ R (див. 1 спосіб): $O(R)=A=\{1,2,3,4\}$.

3. *Установлюємо* наявність (або відсутність) тих чи інших властивостей БВ: r, $\bar{r}$, s, $\bar{s}$, as, t, аналізуючи його графік:

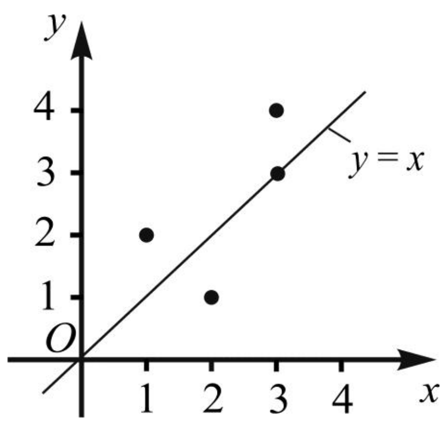


Рис. 2.7. **Декартів графік БВ**

R *не є рефлексивним*, оскільки не для кожного $x\in A$ графік містить точку прямої $y=x$ (наприклад, для $x=1$ відповідна точка прямої $y=x$ не є точкою графіка);

R *не є антирефлексивним*, оскільки є точка графіка, що лежить на прямій $y=x$ (точка $(3,3)$);

R *не є симетричним*, оскільки графік не є симетричним відносно прямої $y=x$ (точка $(3,4)$ є точкою графіка, а точка $(4,3)$ – ні);

R *не є антисиметричним*, оскільки графік має точки, симетричні відносно прямої $y = x$ (точки $(1,2)$ і $(2,1)$);

R *не є асиметричним*, оскільки графік має точки, симетричні відносно прямої $y = x$ (точки $(1,2)$ і $(2,1)$) і точку, що лежить на цій прямій (точка $(3,3)$);

R *не є транзитивним*, оскільки не для кожної пари точок (x,z) і (z,y) графіка точка (x,y) також є точкою графіка БВ (точки $(1,2)$ і $(2,1)$ є точками графіка, а точка $(1,1)$ – ні).

Висновок: задане БВ R не володіє жодною властивістю.

2.5. Основні типи бінарних відношень

До основних типів бінарних відношень належать: відношення еквівалентності $R_{\sim}$ (рівнозначності, рівносильності, рівноцінності), порядку $R_{\leq}$, $R_{<}$ (передування, "іти за"), домінування $R_{>>}$ (перевищення, переважання), толерантності $R_{\backsim}$ (схожості, терпеливості, поблажливості).

Відношення еквівалентності. БВ R на множині A $(R \subseteq A^2)$ називають **відношенням еквівалентності** $(R_{\sim})$, якщо воно водночас рефлексивне, симетричне і транзитивне:

$$R_{\sim} \rightleftharpoons R_r \wedge R_s \wedge R_t. \tag{2.20}$$

Приклади $R_{\sim}$: рівносильність на множині рівнянь; подібність на множині трикутників; рівновеликість на множині многокутників; відношення "бути студентом однієї групи" на множині студентів ХНЕУ ім. С. Кузнеця.

Найважливіше значення еквівалентності полягає в тому, що це відношення визначає ознаку, яка допускає подання множини A у вигляді об'єднання підмножин, що не перетинаються, або, інакше кажучи, *розбиття множини A на класи еквівалентності*. І навпаки, будь-яке розбиття множини A на підмножини, що не перетинаються, визначає між елементами цієї множини деяке відношення еквівалентності.

Множину всіх класів еквівалентності на A називають **фактор-множиною** множини A за еквівалентністю $R_{\sim}$ і позначають $A/R_{\sim}$. Так, якщо A – множина всіх студентів університету, $R_{\sim}$ – відношення "бути студентом однієї групи", то фактор-множиною є множина всіх студентських груп університету. Зрозуміло, що елементами фактор-множини є підмножини вихідної множини.

Відношення порядку. БВ $R \subset A^2$ називають **відношенням нестрогого порядку** $(R_{\leq})$, якщо воно водночас рефлексивне, антисиметричне і транзитивне:

$$R_{\leq} \rightleftharpoons R_r \wedge R_{\bar{s}} \wedge R_t. \tag{2.21}$$

Приклади $R_{\leq}$: відношення "не більше" $(\leq)$ на множині дійсних чисел; включення $(\subseteq)$ на множинах; "бути командиром" на множині військовослужбовців, якщо, звичайно, вважати, що кожний військовослужбовець – командир над собою.

БВ $R \subset A^2$ називають **відношенням строго порядку** $(R_{<})$, якщо воно водночас антирефлексивне, асиметричне і транзитивне:

$$R_{<} \rightleftharpoons R_{\bar{r}} \wedge R_{as} \wedge R_t. \tag{2.22}$$

Оскільки антирефлексивність $(\bar{r})$ і транзитивність (t) БВ тягне за собою асиметричність (as): $R_{\bar{r}} \wedge R_t \Rightarrow R_{as}$, то можна дати еквівалентне означення відношення строгого порядку:

$$R_{<} \rightleftharpoons R_{\bar{r}} \wedge R_t. \tag{2.23}$$

Приклади $R_{<}$: відношення "більше" $(>)$, "менше" $(<)$ на множині дійсних чисел; строге включення $(\subset)$ на множинах; "бути сильнішим", "бути вищим на зріст" на множині людей.

Множину A називають **упорядкованою**, якщо будь-які два її елементи є порівнянними, тобто якщо для них має місце співвідношення: $x < y$ або $x = y$ або $x > y$. У загальному випадку може виявитись, що для деяких пар (x, y) жодне зі співвідношень $x < y$ і $y < x$ (або $x \leq y$ і $y \leq x$) не виконується. Такі елементи x і y називають **непорівнянними**, а множину A – **частково впорядкованою**.

Відношення домінування. БВ $R \subset A^2$ називають **відношенням домінування** $(R_{>>})$, якщо воно водночас антирефлексивне й асиметричне:

$$R_{>>} \rightleftharpoons R_{\bar{r}} \wedge R_{as}. \tag{2.24}$$

Із відношенням $R_{>>}$ найчастіше стикаються тоді, коли A є множиною людей (колективів, груп, команд тощо) чи множиною властивостей (якостей) якихось об'єктів. Кажуть, що x домінує над y, коли, *наприклад*, спортсмен x переміг у змаганнях спортсмена y; особа x користується авторитетом у особи y; якість x переважає якість y. Жоден індивідуум не може домінувати над самим собою (антирефлексивність), у кожній парі (x, y) тільки один індивідуум домінує над іншим, тобто $x >> y$ і $y >> x$ – взаємовиключні (асиметричність).

У БВ домінування властивість транзитивності не має місця. Дійсно, якщо у змаганнях команда x перемогла команду z, а команда z перемогла команду y, то це не означає, що команда x переможе команду y. У разі виконання (додатково) умови транзитивності приходять до відношення строгого порядку $R_{<}$. Отже, $R_{<}$ можна означити так:

$$R_{<} \rightleftharpoons R_{>>} \wedge R_t . \qquad (2.25)$$

Відношення толерантності. БВ $R \subset A^2$ називають **відношенням толерантності** $(R_{\backsim})$, якщо воно водночас рефлексивне і симетричне:

$$R_{\backsim} \rightleftharpoons R_r \wedge R_s . \qquad (2.26)$$

У БВ толерантності властивість транзитивності теж не має місця. У разі виконання (додатково) умови транзитивності приходимо до відношення еквівалентності $R_{\sim}$. Отже, $R_{\sim}$ можна означити інакше:

$$R_{\sim} \rightleftharpoons R_{\backsim} \wedge R_t . \qquad (2.27)$$

Відношення толерантності є тлумаченням інтуїтивного відчуття схожості й нерозрізнюваності. Кожен об'єкт нерозрізнюваний сам із собою (рефлексивність), а схожість двох об'єктів не залежить від того, у якому порядку їх порівнюють (симетричність). Водночас, якщо один об'єкт схожий на другий, а другий схожий на третій, то це зовсім не означає, що всі вони схожі між собою, тобто властивість транзитивності не виконується.

Приклади $R_{\backsim}$: толерантність на множині точок круга радіуса r: $x R_{\backsim} y$, якщо відстань між точками x і y не перевищує r; толерантність на множині слів: $x R_{\backsim} y$, якщо слова x і y мають по три однакові букви (пара – паша́ – каша – Маша – Даша – душа); толерантність на множині кортежів: наявність у парі кортежів хоча б однієї спільної компоненти; толерантність на множині числових функцій: наявність однакових значень двох функцій, що відповідають одному й тому ж значенню аргументу.

2.6. Функціональне бінарне відношення

Функціональним БВ (**функцією**, **відображенням**) між елементами множин A і B $(f \subseteq A \times B)$ називають відношення, усі впорядковані пари якого мають різні перші елементи. Інакше кажучи, кожному елементу x із A – такому, що $(x, y) \in f$, – відповідає один і тільки один елемент y із B, тобто:

$$(f - \text{функціональне БВ}) \rightleftharpoons ((x, y) \in f \wedge (x, z) \in f \Rightarrow y = z). \qquad (2.28)$$

Елемент y називають **значенням** (**образом**) функції у точці x (за заданого значення аргументу x); x – **прообраз** образу функції. При цьому важливо розрізнювати функцію f як множину впорядкованих пар (x, y) і значення функції як другий елемент однієї з таких пар.

Для позначення відображення застосовують таку символіку:

$$x f y,\ (x, y) \in f,\ y = f(x),\ f : x \to y,\ x \xrightarrow{f} y,\ x \to f(x).$$

Областю визначення і **областю значень** функції f називають відповідно множини:

$$D(f) = \{x \mid \exists y : (x, y) \in f\} \text{ і } E(f) = \{y \mid \exists x : (x, y) \in f\}.$$

Залежно від того, як співвідносяться між собою множини $D(f)$ і A, $E(f)$ і B, розрізняють такі типи відображень:

1) відображення **із $\boldsymbol{A}$ в $\boldsymbol{B}$**, коли: $D(f) \subset A$ і $E(f) \subset B$ (рис. 2.8а);

2) відображення **$\boldsymbol{A}$ в $\boldsymbol{B}$** $(A \xrightarrow{f} B)$, коли: $D(f) = A$ і $E(f) \subset B$ (рис. 2.8б);

3) відображення **із $\boldsymbol{A}$ на $\boldsymbol{B}$**, коли: $D(f) \subset A$ і $E(f) = B$ (рис. 2.8в);

4) відображення **$\boldsymbol{A}$ на $\boldsymbol{B}$**, коли: $D(f) = A$ і $E(f) = B$ (рис. 2.8г).

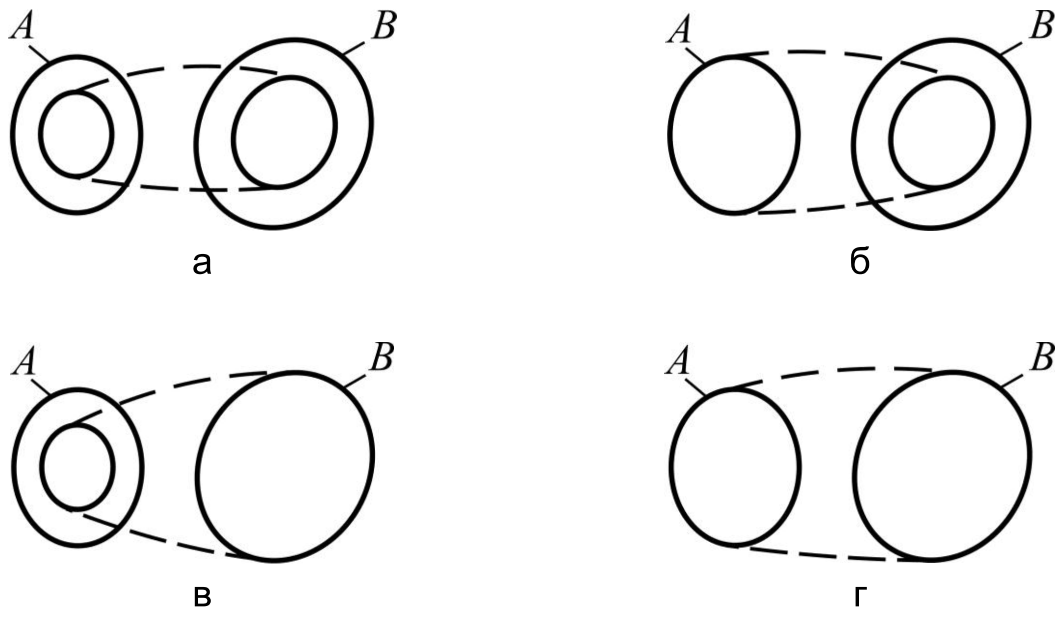


Рис. 2.8. **Типи відображень:**

а) відображення із A в B; б) відображення A в B;

в) відображення із A на B; г) відображення A на B

Відображення A в B називають **ін'єкцією**, якщо різним значенням аргументу відповідають різні значення функції (ін'єкція – від лат. *injectio* – вкладення): $x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$.

Відображення A на B називають **сюр'єкцією** (сюр'єкція – від лат. *surjectio* – покриття).

Сюр'єктивну ін'єкцію, або ін'єктивну сюр'єкцію, називають **взаємо-однозначним відображенням**, або **бієкцією**.

Граф відображення f такий, що з кожної вершини його може виходити тільки одне орієнтоване ребро (враховуючи й петлі); графік функції може мати не більш ніж одну точку перетину з будь-якою вертикальною прямою; матриця відображення містить у кожному рядку не більш ніж один одиничний елемент.

Залежно від природи множин A і B розрізняють такі відображення:

числові функції (A, B – числові множини);

функціонали (A – множина функцій, B – числова множина);

оператори (A, B – множини функцій).

Запитання для самоконтролю засвоєння матеріалу

Відповіді на всі запитання сформулюйте словесно, запишіть у символьній формі, обґрунтуйте (на підставі означень, теорем, правил, формул тощо), наведіть відповідні конкретні приклади.

1. Що називають n-кортежем, n-підмножиною?

2. Що називають прямим (декартовим) добутком множин; n-м степенем множини $(n > 2)$? Які властивості вони мають?

3. Що називають бінарним відношенням між елементами двох множин?

4. Що називають областю визначення, областю значень та областю БВ?

5. Чи можна встановити БВ між елементами однієї множини?

6. Яке БВ називають: одиничним; оберненим; композицією двох відношень; повним; порожнім?

7. Які теоретико-множинні операції можна виконувати над БВ?

8. Які існують способи задання БВ?

9. Як здійснюють задання БВ за допомогою графа; графіком на декартовій площині; матрицею?

10. Які існують основні характеристики БВ і як виглядає відповідне зображення БВ графом, графіком на декартовій площині, матрицею?

11. Які існують основні типи БВ і які властивості вони мають?

12. Яке БВ називають функціональним?

13. Як дати мовою відображень "в" і "на" означення ін'єкції (сюр'єкції, бієкції)?

14. Як дати мовою відображень означення числової функції (функціоналу, оператора)?

3. Варіанти задач самостійної контрольної роботи

Задача 1. Для заданої теоретико-множинної формули $F(A,B,C)$, складовими якої є числові множини A, B, C, задані способом опису, тобто за допомогою характеристичної (визначальної) властивості $P(x)$ їхніх елементів, необхідно:

1) указати явно елементи кожної множини: A, B, C (якщо вони є);

2) виконати операції (дії), що визначаються формулою F;

3) установити, яка з основних множин: $\mathbf{N}$, $\mathbf{Z}$, $\mathbf{Q}$, $\overline{\mathbf{Q}}$, $\mathbf{R}$, містить отриманий результат.

1.1. $F=((A\Delta B)\bigcup(A\bigcap C))\setminus(A\setminus B)$; $A=\{x\,|\,x=2^n\wedge x<33,\ n\in\mathbf{N}\}$, $B=\{x\,|\,(x-3)(x^2-6x+8)=0\wedge x\in\mathbf{R}\}$, $C=\{x\,|\,x=4k\wedge|x|<9, k\in\mathbf{Z}\}$.

1.2. $F=((A\setminus B)\bigcup(C\setminus A))\bigcap(B\Delta C)$; $A=\{x\,|\,x=2k\wedge|x|<5, k\in\mathbf{Z}\}$, $B=\{x\,|\,x=2n-1\wedge x<7, n\in\mathbf{N}\}$, $C=\{x\,|\,(x^2-4)(x^2+2x-15)=0\wedge x\in\mathbf{R}\}$.

1.3. $F=((B\bigcap C)\bigcup(C\Delta A))\setminus(A\bigcap B)$; $A=\{x\,|\,(x-3)(x^3+27)=0\wedge x\in\mathbf{R}\}$, $B=\{x\,|\,x=n^2-1\wedge x\leq 9, n\in\mathbf{N}\}$, $C=\{x\,|\,x=3k\wedge|x|<7, k\in\mathbf{Z}\}$.

1.4. $F=(B\setminus(A\bigcup C))\setminus((C\Delta A)\bigcap B)$; $A=\{x\,|\,x=2n+1\wedge x<8, n\in\mathbf{N}\}$, $B=\{x\,|\,x/2\notin\mathbf{Z}\wedge|x|\leq 5, x\in\mathbf{Z}\}$, $C=\{x\,|\,(x^2-16)(x^2-7x+10)=0\wedge x\in\mathbf{R}\}$.

1.5. $F=(A\Delta C)\bigcap((A\setminus B)\bigcup(C\setminus A))$; $A=\{x\,|\,(x^2-1)(x^2-2x)=0\wedge x\in\mathbf{R}\}$, $B=\{x\,|\,x/4\in\mathbf{Z}\wedge|x|<9\}$, $C=\{x\,|\,x=3n-4\wedge x\leq 10, n\in\mathbf{N}\}$.

1.6. $F=((B\setminus A)\bigcup(C\bigcap A))\bigcap(B\Delta A)$; $A=\{x\,|\,x=2k\wedge|x|\leq 6, k\in\mathbf{Z}\}$ $B=\{x\,|\,x^3-6x^2-40x=0\wedge x\in\mathbf{R}\}$, $C=\{x\,|\,x=4n-2\wedge x<20,\ n\in\mathbf{N}\}$.

1.7. $F=((B\bigcup A)\setminus C)\bigcup((A\Delta B)\bigcap C)$; $A=\{x\,|\,x^3+6x^2+8x=0\wedge x\in\mathbf{R}\}$, $B=\{x\,|\,x=4k\wedge|x|<5, k\in\mathbf{Z}\}$, $C=\{x\,|\,x=(-2)^n\wedge -2\leq x<17,\ n\in\mathbf{N}\}$.

1.8. $F=((A\setminus C)\bigcup(C\setminus B))\Delta(A\bigcap C)$; $A=\{x\,|\,3x-19<0\wedge x\in\mathbf{N}\}$, $B=\{x\,|\,x/3\in\mathbf{Z}\wedge|x|<7\}$, $C=\{x\,|\,(x^2-36)(x^2-2x+1)=0\wedge x\in\mathbf{R}\}$.

1.9. $F=((A\bigcup C)\bigcap(C\Delta A))\setminus(B\setminus A)$; $A=\{x\,|\,x^3-2x^2-24x=0\wedge x\in\mathbf{R}\}$, $B=\{x\,|\,x=2(n+1)\wedge x<13, n\in\mathbf{N}\}$, $C=\{x\,|\,x/4\in\mathbf{Z}\wedge|x|<10\}$.

1.10. $F=(C\bigcap A)\Delta((A\setminus B)\bigcup(B\setminus C))$; $A=\{x\,|\,4x-18<0\wedge x\in\mathbf{N}\}$, $B=\{x\,|\,x=2k\wedge|x|\le 4, k\in\mathbf{Z}\}$, $C=\{x\,|\,(x^2-4)(x^2-4x+3)=0\wedge x\in\mathbf{R}\}$.

1.11. $F=((B\Delta C)\bigcap(B\setminus A))\bigcup(C\setminus B)$; $A=\{x\,|\,x=3k\wedge|x|\le 9, k\in\mathbf{Z}\}$, $B=\{x\,|\,x\in\mathbf{N}\wedge 3<x+5<12\}$, $C=\{x\,|\,(x^2-3x)(x^2-9x+20)=0\wedge x\in\mathbf{R}\}$.

1.12. $F=((C\setminus A)\bigcup(B\bigcap A))\bigcap(A\Delta B)$; $A=\{x\,|\,x\in\mathbf{N}\wedge 2x-13<0\}$, $B=\{x\,|\,x/2\in\mathbf{Z}\wedge -2\le x\le 8\}$, $C=\{x\,|\,(x^2-7x+10)(x^2-8x)=0\wedge x\in\mathbf{R}\}$.

1.13. $F=(A\Delta B)\setminus((A\bigcap C)\bigcup(C\bigcap B))$; $A=\{x\,|\,x=2n\wedge x<10, n\in\mathbf{N}\}$, $B=\{x\,|\,x=4k\wedge|x|<12, k\in\mathbf{Z}\}$, $C=\{x\,|\,x^3+2x^2-48x=0\wedge x\in\mathbf{R}\}$.

1.14. $F=((C\setminus A)\bigcap(B\Delta A))\bigcup(A\setminus B)$; $A=\{x\,|\,x=5k\wedge|x|<6, k\in\mathbf{Z}\}$, $B=\{x\,|\,(x^2-25)(x^2-1)=0\wedge x\in\mathbf{R}\}$, $C=\{x\,|\,x=2n-3\wedge x\le 7, n\in\mathbf{N}\}$.

1.15. $F=((C\bigcap A)\bigcup(B\Delta A))\setminus(A\setminus B)$; $A=\{x\,|\,x=2^n\wedge x<45, n\in\mathbf{N}\}$, $B=\{x\,|\,(x-4)(x^2-5x+6)=0\wedge x\in\mathbf{R}\}$, $C=\{x\,|\,x=4k\wedge|x|<11, k\in\mathbf{Z}\}$.

1.16. $F=(B\Delta C)\bigcap((A\setminus B)\bigcup(C\setminus A))$; $A=\{x\,|\,x=2k\wedge|x|<6, k\in\mathbf{Z}\}$, $B=\{x\,|\,x=2n-1\wedge x\le 5, n\in\mathbf{N}\}$, $C=\{x\,|\,(x^2-4)(x^2+2x-15)=0\wedge x\in\mathbf{R}\}$.

1.17. $F=((C\bigcap B)\bigcup(A\Delta C))\setminus(B\bigcap A)$; $A=\{x\,|\,(x+1)(x^2-9)=0\wedge x\in\mathbf{R}\}$, $B=\{x\,|\,x=n^2-1\wedge x\le 12, n\in\mathbf{N}\}$, $C=\{x\,|\,x=3k\wedge|x|<9, k\in\mathbf{Z}\}$.

1.18. $F=(B\setminus(C\bigcup A))\setminus(B\bigcap(A\Delta C))$; $A=\{x\,|\,x=2n+1\wedge x<8, n\in\mathbf{N}\}$, $B=\{x\,|\,x/2\notin\mathbf{Z}\wedge|x|<6, x\in\mathbf{Z}\}$, $C=\{x\,|\,(x^2-7x+10)(x^2-16)=0\wedge x\in\mathbf{R}\}$.

1.19. $F=(C\Delta A)\bigcap((A\setminus C)\bigcup(C\setminus B))$; $A=\{x\,|\,x=3n-4\wedge x<9, n\in\mathbf{N}\}$, $B=\{x\,|\,x/4\in\mathbf{Z}\wedge|x|<10\}$, $C=\{x\,|\,(x^2-3x+2)(x^2+x)=0\wedge x\in\mathbf{R}\}$.

1.20. $F=((C\bigcap A)\bigcup(B\setminus A))\bigcap(A\Delta B)$; $A=\{x\,|\,x=2k\wedge|x|<7, k\in\mathbf{Z}\}$ $B=\{x\,|\,(x^2-10x)(x+4)=0\wedge x\in\mathbf{R}\}$, $C=\{x\,|\,x=4n-2\wedge x\le 19, n\in\mathbf{N}\}$.

1.21. $F=((A\bigcup B)\setminus C)\bigcup(C\bigcap(B\Delta A))$; $A=\{x\,|\,x=4k\wedge|\,x\,|\le 7, k\in\mathbf{Z}\}$, $B=\{x\,|\;x^3+6x^2+8x=0\wedge x\in\mathbf{R}\}$, $C=\{x\,|\,x=(-2)^n\wedge -3<x\le 16, n\in\mathbf{N}\}$.

1.22. $F=(A\bigcap C)\Delta((C\setminus B)\bigcup(A\setminus C))$; $A=\{x\,|\;5x-31<0\wedge x\in\mathbf{N}\}$, $B=\{x\,|\;x/3\in\mathbf{Z}\wedge|x|<9\}$, $C=\{x\,|\;(x+6)(x^2-7x+6)=0\wedge x\in\mathbf{R}\}$.

1.23. $F=((A\Delta C)\bigcap(C\bigcup A))\setminus(B\setminus A)$; $A=\{x\,|\;x/4\in\mathbf{Z}\wedge -9<x\le 10\}$, $B=\{x\,|\,x=2(n+1)\wedge x<14, n\in\mathbf{N}\}$, $C=\{x\,|\;x^3-2x^2-24x=0\wedge x\in\mathbf{R}\}$.

1.24. $F=((B\setminus C)\bigcup(A\setminus B))\Delta(A\bigcap C)$; $A=\{x\,|\;7x-30\le 0\wedge x\in\mathbf{N}\}$, $B=\{x\,|\,x=2k\wedge|x|<5,\ k\in\mathbf{Z}\}$, $C=\{x\,|\,(x^2-4)(x^2-4x+3)=0\wedge x\in\mathbf{R}\}$.

1.25. $F=(C\setminus A)\bigcup((A\Delta C)\bigcap(A\setminus B))$; $A=\{x\,|\;x\in\mathbf{N}\wedge 6x-43<0\}$, $B=\{x\,|\;x=3k\wedge|x|\le 11, k\in\mathbf{Z}\}$, $C=\{x\,|\,(x^2-5x)(x^2-7x+12)=0\wedge x\in\mathbf{R}\}$.

Задача 2. Для заданого теоретико-множинного твердження:

$$F_1(A,B,C)=F_2(A,B,C),$$

необхідно:

1) дати його словесне формулювання;

2) підтвердити або спростувати його правильність для заданих в умовах задачі 1 числових множин A, B, C.

2.1. $(A\setminus B)\setminus(A\bigcap C)=A\setminus(B\bigcup C)$.

2.2. $A\setminus(B\setminus C)=(A\setminus C)\setminus(B\setminus C)$.

2.3. $(B\setminus C)\bigcap A=(A\bigcap B)\setminus(A\bigcap B\bigcap C)$.

2.4. $A\setminus(B\bigcup C)=(A\setminus B)\bigcap(A\setminus C)$.

2.5. $A\setminus(B\bigcap C)=(A\setminus B)\bigcup(A\setminus C)$.

2.6. $(A\bigcap B)\setminus(A\bigcap C)=(A\bigcap B)\setminus C$.

2.7. $A\bigcap(B\setminus C)=(A\bigcap B)\setminus C$.

2.8. $A\bigcap(B\bigcup C)=A\setminus((A\setminus B)\bigcap(A\setminus C))$.

2.9. $A\bigcup(B\bigcap C)=(A\bigcup B)\bigcap(A\bigcup C)$.

2.10. $(A\setminus B)\bigcup(A\bigcap C)=A\setminus(B\setminus C)$.

2.11. $A\bigcap B\bigcap C=A\setminus(A\setminus(B\bigcap C))$.

2.12. $(B\bigcap C)\setminus A=(C\bigcap B)\setminus(A\bigcap C)$.

2.13. $(A\bigcup B)\setminus C=(A\setminus C)\bigcup(B\setminus C)$.

2.14. $C\bigcap(A\bigcup B)=((C\bigcap B)\setminus A)\bigcup(A\bigcap C)$.

2.15. $B\setminus(A\bigcup C)=B\setminus((A\bigcup C)\bigcap B)$.

2.16. $(A\bigcup B)\setminus C=(B\setminus(A\bigcup C))\bigcup(A\setminus C)$.

2.17. $(A\setminus B)\bigcap C=(A\bigcap C)\setminus(B\bigcap C)$.

2.18. $A\setminus(B\bigcap C)=(A\setminus B)\bigcup(A\setminus C)$.

2.19. $A\setminus C=A\setminus((A\bigcap C)\bigcup(B\bigcap C))$.

2.20. $A\setminus(B\bigcup C)=(A\setminus B)\setminus C$.

2.21. $A\bigcap(B\bigcup C)=(A\bigcap B)\bigcup(A\bigcap C)$.

2.22. $A\setminus(B\bigcap C)=A\setminus(B\bigcap C\bigcap A)$.

2.23. $C\setminus(A\setminus B)=(B\bigcap C)\bigcup(C\setminus A)$.

2.24. $C\setminus(A\bigcup B)=C\setminus((A\bigcap C)\bigcup(B\bigcap C))$.

2.25. $(A\setminus C)\bigcup(A\bigcap B)=A\setminus(C\setminus B)$.

Задача 3. Для заданих множин A, B, C, елементами яких є пари $(x,y)\in\mathbf{R^2}$ і теоретико-множинної формули $F=F(A,B,C)$ зобразіть в системі координат xOy множину, що описується заданою формулою F, і наведіть словесне формулювання.

3.1. $F=(A\setminus B)\bigcup(C\bigcap B\bigcap A)$; якщо: $A=\{(x,y)\mid x^2+(y-4)^2\le 9\}$, $B=\{(x,y)\mid y-4+x^2\le 0\}$, $C=\{(x,y)\mid y-2x+4\ge 0\}$.

3.2. $F=((C\bigcap B)\setminus A)\bigcup(A\setminus C)$, якщо: $A=\{(x,y)\mid x^2+4y^2-16\le 0\}$, $B=\{(x,y)\mid y\ge x^2\}$, $C=\{(x,y)\mid x+y-4\le 0\}$.

3.3. $F=((B\bigcap A)\setminus C)\bigcup(C\bigcap B)$, якщо: $A=\{(x,y)\mid 4x^2-9y^2\ge 36\}$, $B=\{(x,y)\mid 9x^2+25y^2\le 225\}$, $C=\{(x,y)\mid 3y-2x\le 0\}$.

3.4. $F=(A\bigcap B)\bigcup((C\setminus A)\setminus B)$, якщо: $A=\{(x,y)\mid y^2-x-3\le 0\}$, $B=\{(x,y)\mid 5x+3y-15\le 0\}$, $C=\{(x,y)\mid (x-2)^2+(y-5)^2\le 16\}$.

3.5. $F=((C\setminus B)\bigcap A)\bigcup(A\setminus C)$, якщо: $A=\{(x,y)\mid 36x^2+9y^2\le 324\}$, $B=\{(x,y)\mid 4x-3y+12\ge 0\}$, $C=\{(x,y)\mid y-e^{-x}\ge 0\}$.

3.6. $F=((B\setminus A)\bigcap C)\bigcup(C\bigcap A)$, якщо: $A=\{(x,y)\mid 9x^2-4y^2\le -36\}$, $B=\{(x,y)\mid x^2+(y-3)^2\le 9\}$, $C=\{(x,y)\mid 2y^2+12y-9x\le 0\}$.

3.7. $F=((B\bigcap C)\setminus A)\bigcup(A\setminus C)$, якщо: $A=\{(x,y)\mid(x-4)^2+(y-2)^2\le 16\}$, $B=\{(x,y)\mid y^2+x-4\le 0\}$, $C=\{(x,y)\mid 3y-2x-6\le 0\}$.

3.8. $F=(A\setminus C)\bigcup((C\bigcap B)\setminus A)$, якщо: $A=\{(x,y)\mid x^2+(y-3)^2\le 9\}$, $B=\{(x,y)\mid y+3-(x-3)^2\ge 0\}$, $C=\{(x,y)\mid 3x+2y-12\le 0\}$.

3.9. $F=((A\bigcap C)\setminus B)\bigcup(B\setminus C)$, якщо: $A=\{(x,y)\mid x^2+y-6\le 0\}$, $B=\{(x,y)\mid 9(x-5)^2+16(y-3)^2\le 144\}$, $C=\{(x,y)\mid 4y-3x\ge 0\}$.

3.10. $F=(A\bigcap B)\bigcup((C\setminus B)\setminus A)$, якщо: $A=\{(x,y)\mid 9x^2-16^2\ge 144\}$, $B=\{(x,y)\mid x^2+y^2-8x+7\le 0\}$, $C=\{(x,y)\mid y^2-x-5\le 0\}$.

3.11. $F=((C\setminus B)\setminus A)\bigcup(B\bigcap A)$, якщо: $A=\{(x,y)\mid(x-4)^2+y^2\le 9\}$, $B=\{(x,y)\mid y^2+x-4\le 0\}$, $C=\{(x,y)\mid x+5-y^2\ge 0\}$.

3.12. $F=(A\bigcap B\bigcap C)\bigcup(B\setminus(A\bigcup C))$, якщо: $A=\{(x,y)\mid y-1\ge -(x-2)^2\}$, $B=\{(x,y)\mid (x-2)^2+(y-2)^2\le 16\}$, $C=\{(x,y)\mid(x+3)^2+(y-3)^2\le 9\}$.

3.13. $F=(A\bigcap B)\bigcup(C\setminus(B\bigcup A))$, якщо: $A=\{(x,y)\mid 2x-y+2\ge 0\}$, $B=\{(x,y)\mid (x-1)^2+(y-4)^2\le 4\}$, $C=\{(x,y)\mid x+3\ge (y-2)^2\}$.

3.14. $F=((B\bigcap C)\setminus A)\bigcup((B\bigcap A)\setminus C)$, якщо: $A=\{(x,y)\mid y+2\ge x^2\}$, $B=\{(x,y)\mid y^2-x-4\le 0\}$, $C=\{(x,y)\mid x^2+(y+2)^2-4\le 0\}$.

3.15. $F=(A\setminus(B\bigcup C))\bigcup(C\bigcap B\bigcap A)$, якщо: $A=\{(x,y)\mid x^2+4y^2\le 16\}$, $B=\{(x,y)\mid y^2-x\le 0\}$, $C=\{(x,y)\mid x-y-2\ge 0\}$.

3.16. $F=((C\setminus B)\bigcap A)\bigcup(C\setminus A)$, якщо: $A=\{(x,y)\mid x^2-4y^2-4\le 0\}$, $B=\{(x,y)\mid 4x^2+9y^2-36\le 0\}$, $C=\{(x,y)\mid 9x^2+16y^2-144\le 0\}$.

3.17. $F=(A\setminus B)\bigcup(C\bigcap A)$, якщо: $A=\{(x,y)\mid x^2+(y-4)^2\le 16\}$, $B=\{(x,y)\mid y-6+x^2\le 0\}$, $C=\{(x,y)\mid 3-y-x^2\ge 0\}$.

3.18. $F=(A\bigcap B)\bigcup((C\setminus A)\setminus B)$, якщо: $A=\{(x,y)\mid x^3-2y\le 0\}$, $B=\{(x,y)\mid 8x-y^2\ge 0\}$, $C=\{(x,y)\mid x^2+(y+4)^2\le 16\}$.

3.19. $F=((A\bigcap B)\setminus C)\bigcup(C\setminus B)$, якщо: $A=\{(x,y)\mid y-e^{x}+1\le 0\}$, $B=\{(x,y)\mid y\ge(x-3)^2\}$, $C=\{(x,y)\mid (x-5)^2+y^2-4\le 0\}$.

3.20. $F=((B\bigcap C)\setminus A)\bigcup((C\bigcap A)\setminus B)$, якщо: $A=\{(x,y)\mid 25x^2+4y^2\le 100\}$, $B=\{(x,y)\mid (x-3)^2+(y-2)^2\le 4\}$, $C=\{(x,y)\mid y-x+3\ge 0\}$.

3.21. $F=(C\setminus(B\bigcup A))\bigcup(A\bigcap B)$, якщо: $A=\{(x,y)\mid y-(x-2)^2\ge 0\}$, $B=\{(x,y)\mid (x-2)^2+y^2\le 4\}$, $C=\{(x,y)\mid 9x^2+25y^2\le 225\}$.

3.22. $F=((C\bigcap A)\setminus B)\bigcup(A\setminus C)$, якщо: $A=\{(x,y)\mid (x-3)^2\le 4-y\}$, $B=\{(x,y)\mid 5x+6y+15\ge 0\}$, $C=\{(x,y)\mid 5x+3y+15\ge 0\}$.

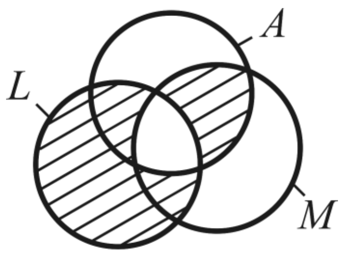
3.23. $F=((C\bigcup B)\bigcap A)\setminus(B\bigcap C)$, якщо: $A=\{(x,y)\mid x+2-y^2\ge 0\}$, $B=\{(x,y)\mid (x-7)^2+(y+1)^2\le 4\}$, $C=\{(x,y)\mid (x-7)^2+(y-3)^2\le 16\}$.

3.24. $F=((A\bigcap C)\setminus B)\bigcup((B\bigcap A)\setminus C)$, якщо: $A=\{(x,y)\mid 2x+6\ge 3y\}$, $B=\{(x,y)\mid (x+3)^2+(y-1)^2\le 9\}$, $C=\{(x,y)\mid 9(y+4)\ge 4(x-2)^2\}$.

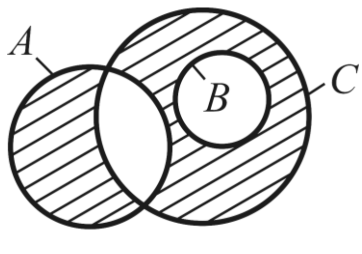
3.25. $F=(B\setminus C)\bigcup(C\bigcap A)$, якщо: $A=\{(x,y)\mid y-7+(x-1)^2\le 0\}$, $B=\{(x,y)\mid 9(x-5)^2+4(y-4)^2\le 36\}$, $C=\{(x,y)\mid 4(x-3)^2+25(y-4)^2\le 100\}$.

Задача 4. Опишіть за допомогою операцій $\bigcup$, $\bigcap$, \ над заданими множинами множину $M_{з}$, яка відповідає заштрихованій області; дайте словесне формулювання.

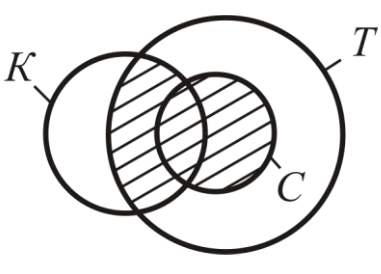
4.1. а)



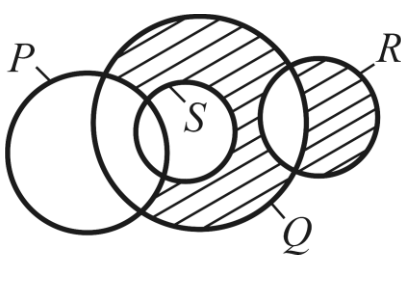
б)



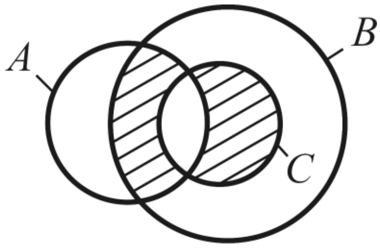
4.2. а)



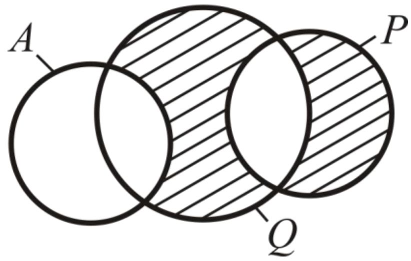
б)



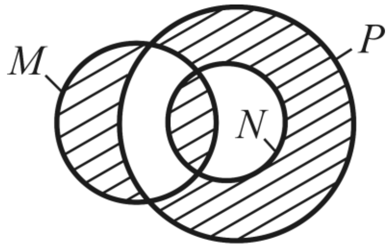
4.3. а)



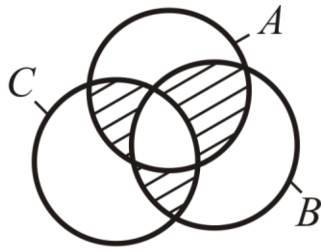
б)



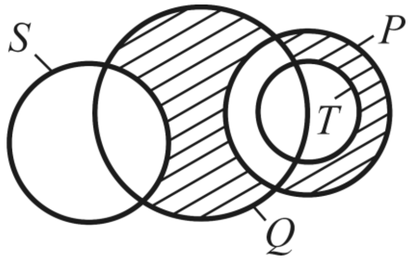
4.4. а)



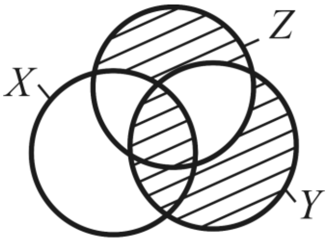
б)



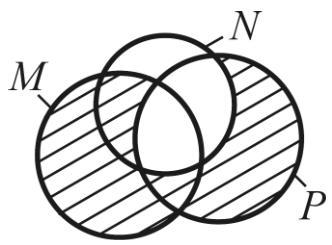
4.5. а)



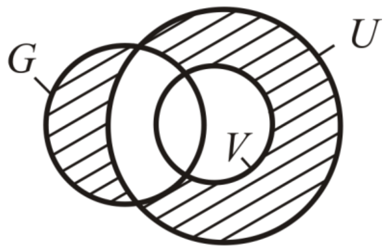
б)



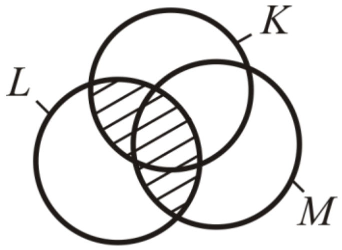
4.6. а)



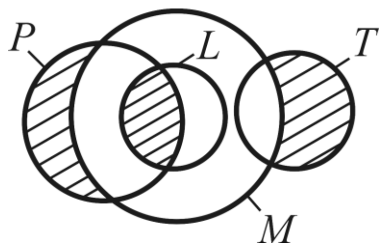
б)



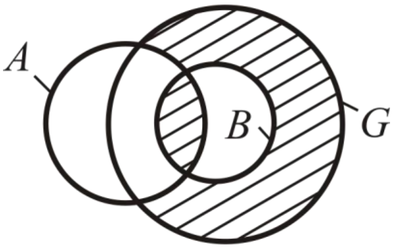
4.7. а)



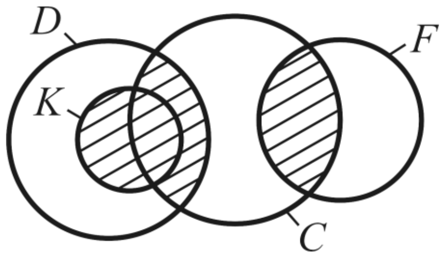
б)



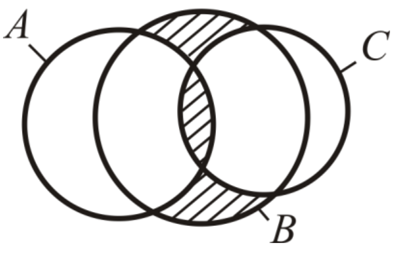
4.8. а)



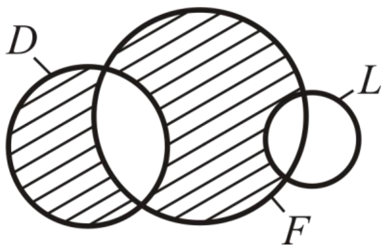
б)

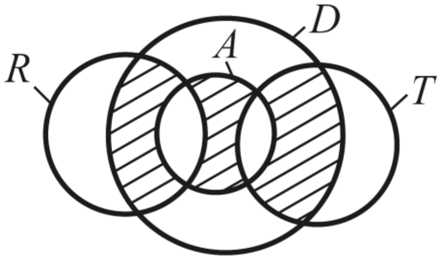


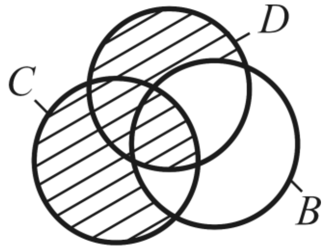
4.9. а)

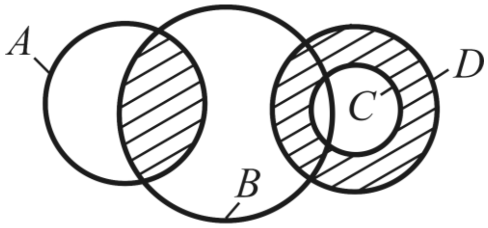


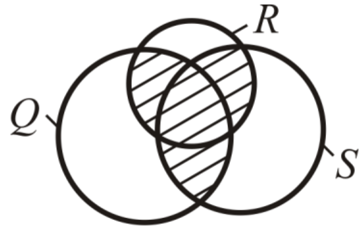
б)



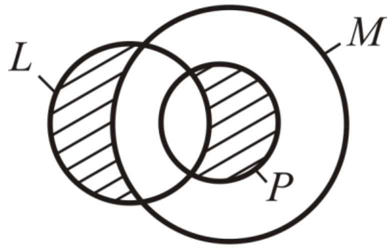
4.10. а) 

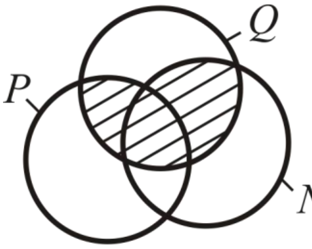
б) 

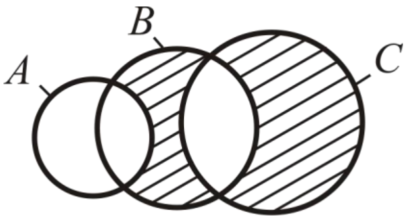
4.11. а) 

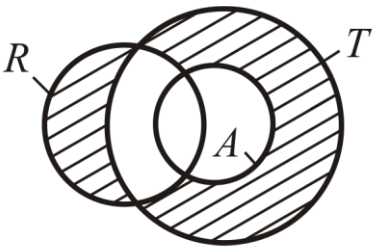
б) 

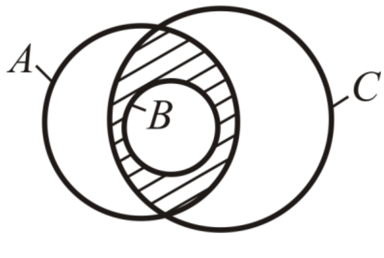
4.12. а) 

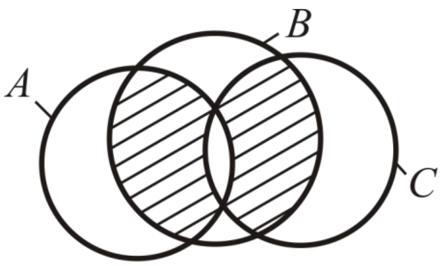
б) 

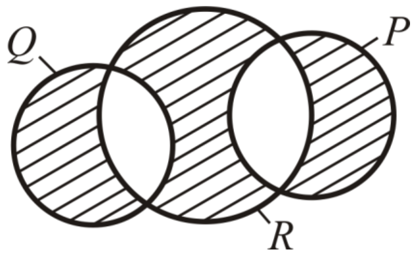
4.13. а) 

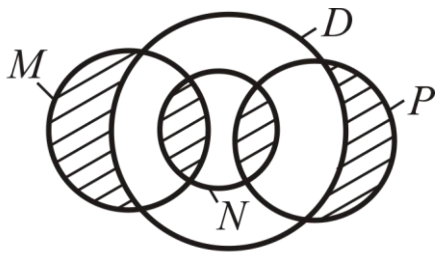
б) 

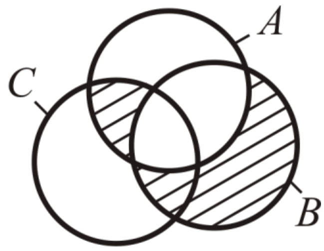
4.14. а) 

б) 

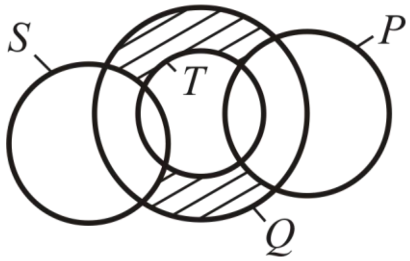
4.15. а) 

б) 

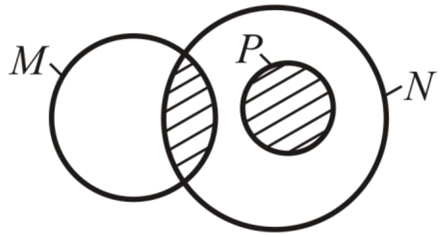
4.16. а) 

б) 

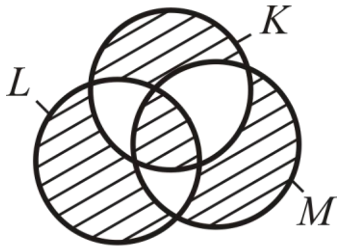
4.17. а)



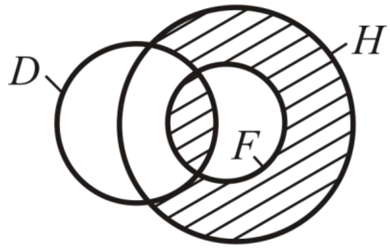
б)



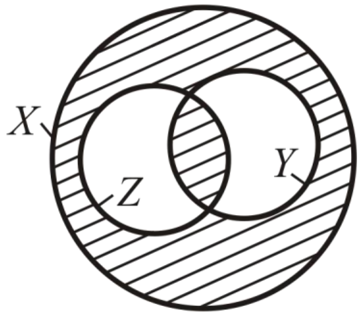
4.18. а)



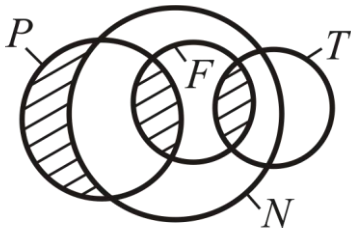
б)



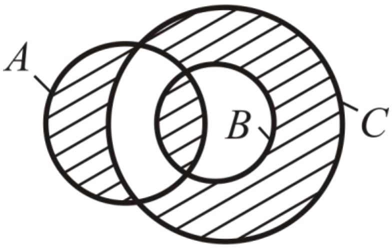
4.19. а)



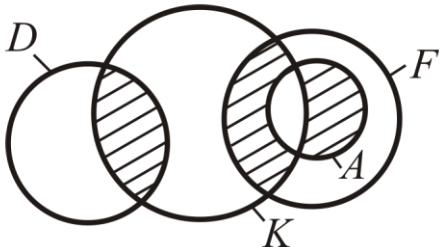
б)



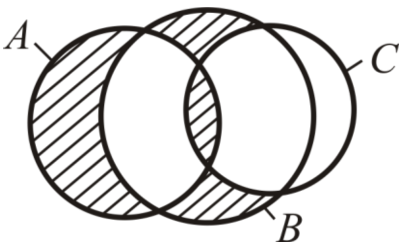
4.20. а)



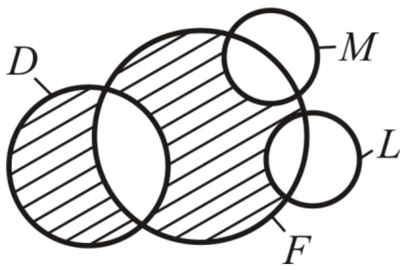
б)



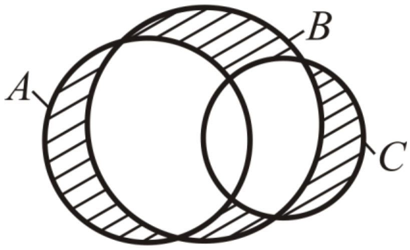
4.21. а)



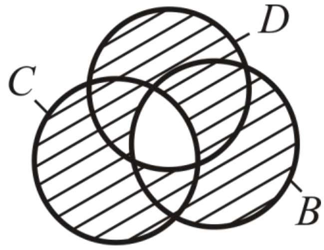
б)

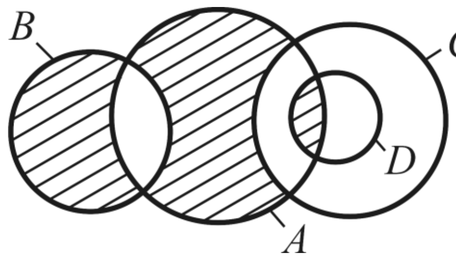


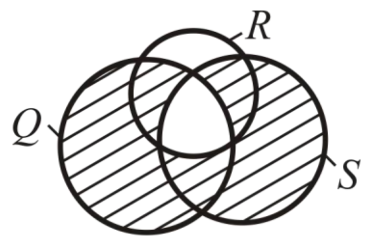
4.22. а)

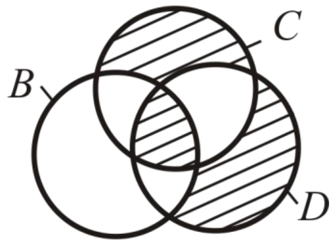


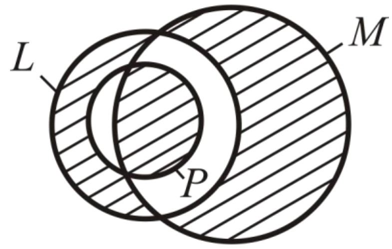
б)

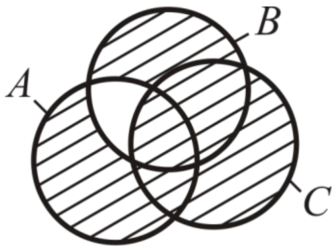


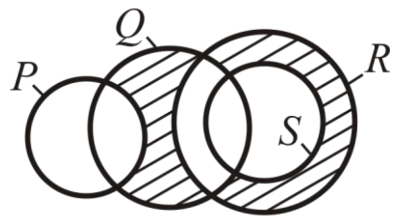
4.23. а) 

б) 

4.24. а) 

б) 

4.25. а) 

б) 

Задача 5. Сформулюйте записане в символах твердження, доведіть його або спростуйте, дайте геометричну ілюстрацію.

5.1. а) $(A \setminus B) \setminus (A \cap C) = A \setminus (B \cup C)$;

б) $(B \subset C) \Rightarrow ((B \cup A) \subset (C \cup A))$.

5.2. а) $(M \cap N) \cup (N \setminus M) = N$;

б) $(A \subset B \subset C) \Rightarrow ((B \cup A) \setminus C = \varnothing)$.

5.3. а) $(B \setminus C) \cap A = (A \cap B) \setminus (A \cap B \cap C)$;

б) $(A \supset C) \Rightarrow (A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup C)$.

5.4. а) $M \setminus F = M \setminus (M \cap F)$;

б) $(A \subset B) \Rightarrow ((C \setminus A) \setminus (B \setminus A) = C \setminus B)$.

5.5. а) $A \setminus (B \cap C) = (A \setminus B) \cup (A \setminus C)$;

б) $(A \supset (B \cup C)) \Leftrightarrow ((A \supset B) \wedge (A \supset C))$.

5.6. а) $(A \cap B) \setminus C = (A \cap B) \setminus (A \cap B \cap C)$;

б) $(B \subset C) \Rightarrow (B \cup (C \setminus B) = C)$.

5.7. а) $A \setminus B = (A \cup B) \setminus B$;

б) $(B \supset A) \Rightarrow (B \cap (C \cup A) = (B \cap C) \cup A)$.

5.8. а) $\overline{A}\setminus(A\cap B)=\overline{A}$;

б) $(A\subset B)\Rightarrow((A\setminus C)\subset(B\setminus C))$.

5.9. а) $(M\setminus N)\cap(M\cup N)=M\setminus N$;

б) $((K\subset R)\wedge(L\subset R))\Rightarrow((K\cup L)\subset R)$.

5.10. а) $(K\setminus M)\cup(K\cap N)=K\setminus(M\setminus N)$;

б) $(A\supset B\supset C)\Leftrightarrow(B\cup C=A\cap B)$.

5.11. а) $A\cap B=(A\cap B)\setminus(A\setminus B)$;

б) $((R\setminus T)\supset S)\Rightarrow(T\cap S=\varnothing)$.

5.12. а) $A\cup B=(A\cap B)\cup(B\cup A)$;

б) $(N\supset M)\Rightarrow((P\setminus N)\cap M=\varnothing)$.

5.13. а) $A=A\setminus(B\setminus A)$;

б) $(A\subset B)\Rightarrow((A\cap C)\subset(B\cap C))$.

5.14. а) $A\setminus B=(A\setminus B)\cap(B\cup A)$;

б) $(A=\varnothing)\Rightarrow(B\setminus A=A\cup B)$.

5.15. а) $(A\cup B)\setminus(A\cap B)=(A\setminus B)\cup(B\setminus A)$;

б) $(B\subset A)\Rightarrow((A\setminus B)\cup B=A)$.

5.16. а) $(A\setminus B)\cup(A\cap B)=A$;

б) $(M\cup N\cup P=N)\Rightarrow((M\cap P)\subset N)$.

5.17. а) $(R\setminus S)\cap M=(R\cap M)\setminus(S\cap M)$;

б) $(A\cup B=B)\Leftrightarrow(A\cap B=A)$.

5.18. а) $\overline{M\cup\overline{\overline{N}}}=N\setminus M$;

б) $((B\subset A)\wedge(C=A\setminus B))\Rightarrow(A=B\cup C)$.

5.19. а) $R\setminus(K\cap L)=(R\setminus K)\cup(R\setminus L)$;

б) $(N\subset P)\Rightarrow((A\setminus P)\subset(A\setminus N))$.

5.20. а) $S\setminus R=(S\cup R)\setminus R$;

б) $(A\subset B)\Rightarrow((A\setminus C)\subset(B\setminus C))$.

5.21. а) $(T\cup M)\setminus(T\cap M)=(T\setminus M)\cup(M\setminus T)$;

б) $(A\cap B=A\cup B)\Rightarrow(A=B)$.

5.22. а) $(C \setminus K) \setminus (K \setminus C) = C \setminus K$;

б) $(B \subset C) \Rightarrow (B \bigcup (A \bigcap C) = (B \bigcup A) \bigcap C)$.

5.23. а) $(A \setminus C) \bigcup (A \bigcap B) = A \setminus (C \setminus B)$;

б) $(A \bigcup B \subset C) \Rightarrow ((B \setminus A) \subset (B \bigcap C))$.

5.24. а) $M \setminus (K \setminus L) = (L \bigcap M) \bigcup (M \setminus K)$;

б) $(R \setminus T \supset S) \Rightarrow (T \bigcap S = \varnothing)$.

5.25. а) $(M \bigcup N) \setminus K = (M \setminus K) \bigcup (N \setminus K)$;

$(A \subset (B \setminus C)) \Rightarrow (C \setminus A = C \bigcup (A \setminus B))$.

Задача 6. Оцініть бінарне відношення R з точки зору його властивостей (r, $\bar{r}$, s, $\bar{s}$, as, t) трьома способами: 1) аналітичним; 2) матрицею; 3) графом.

6.1. $R = \{(1,2),\ (1,1),\ (2,1),\ (2,2),\ (3,1),\ (3,3)\}$.

6.2. $R = \{(a,a),\ (a,b),\ (b,a),\ (b,c),\ (c,c),\ (c,b)\}$.

6.3. $R = \{(2,3),\ (3,2),\ (2,2),\ (3,4),\ (4,4),\ (4,3), (3,3)\}$.

6.4. $R = \{(m,n),\ (n,n),\ (p,p),\ (m,m),\ (n,m),\ (p,n)\}$.

6.5. $R = \{(4,4),\ (6,6),\ (4,6),\ (6,4),\ (8,8),\ (8,4), (8,6)\}$.

6.6. $R = \{(p,p),\ (p,q),\ (q,p),\ (q,r),\ (r,r),\ (r,q)\}$.

6.7. $R = \{(0,0),\ (0,1),\ (1,2),\ (1,1),\ (2,2),\ (1,0)\}$.

6.8. $R = \{(a,a),\ (a,b),\ (b,b),\ (b,a),\ (c,c),\ (c,b), (c,a)\}$.

6.9. $R = \{(5,2),\ (5,3),\ (2,5),\ (3,2),\ (3,3),\ (5,5)\}$.

6.10. $R = \{(m,m),\ (m,n),\ (n,m),\ (n,p),\ (p,p),\ (p,n)\}$.

6.11. $R = \{(3,4),\ (4,5),\ (5,5),\ (5,3),\ (3,3),\ (4,3)\}$.

6.12. $R = \{(c,d),\ (e,d),\ (c,c),\ (e,c),\ (d,c),\ (d,e), (d,d), (e,e)\}$.

6.13. $R = \{(7,2),\ (2,2),\ (7,8),\ (7,7),\ (8,8),\ (8,2)\}$.

6.14. $R = \{(u,v),\ (v,u),\ (u,w),\ (w,w),\ (v,v),\ (w,u), (u,u)\}$.

6.15. $R = \{(1,6),\ (6,6),\ (1,1),\ (6,1),\ (8,8),\ (8,6)\}$.

6.16. $R = \{(k,l),\ (l,l),\ (l,m),\ (l,k),\ (k,m),\ (m,m)\}$.

6.17. $R = \{(3,3),\ (3,1),\ (1,1),\ (2,1),\ (1,2),\ (2,3)\}$.

6.18. $R = \{(p,p),\ (p,q),\ (p,r),\ (q,p),\ (r,r),\ (q,q)\}$.

6.19. $R = \{(1,1),\ (1,2),\ (2,3),\ (3,3),\ (2,2),\ (1,3)\}$.

6.20. $R = \{(a,b),\ (b,b),\ (c,c),\ (a,c),\ (b,c),\ (a,a)\}$.

6.21. $R = \{(4,4),\ (3,2),\ (2,3),\ (4,3),\ (2,2),\ (4,2)\}$.

6.22. $R = \{(u,v),\ (v,u),\ (u,u),\ (v,w),\ (w,w),\ (w,v), (v,v)\}$.

6.23. $R = \{(3,-2),\ (-2,-2),\ (3,3),\ (-2,3),\ (-2,1),\ (1,1)\}$.

6.24. $R = \{(p,q),\ (q,q),\ (p,p),\ (p,r),\ (r,q),\ (r,r)\}$.

6.25. $R = \{(3,3),\ (7,7),\ (5,5),\ (5,7),\ (7,5),\ (7,3), (3,7)\}$.

Задача 7. Побудуйте на декартовій площині графік заданого бінарного відношення R і оцініть з точки зору його властивостей (r, $\bar{r}$, s, $\bar{s}$, as, t).

7.1. $R = \{\,(x,y) \mid x,y \in \mathbf{Z} \wedge (x^2 - y = 0)\}$.

7.2. $R = \{\,(x,y) \mid x,y \in \mathbf{Z} \wedge (x^2 < y^2)\}$.

7.3. $R = \{\,(x,y) \mid x,y \in \mathbf{Z} \wedge |x| \le 2 \wedge |y| \le 2\}$.

7.4. $R = \{(x,y) \mid x,y \in \mathbf{Z} \wedge (x^2 + y^2 = 4)\}$.

7.5. $R = \{(x,y) \mid x,y \in \mathbf{N} \wedge (x + y = 6)\}$.

7.6. $R = \{(x,y) \mid x,y \in \mathbf{N} \cup \{0\} \wedge (y^2 - x^2 \ge 0)\}$.

7.7. $R = \{\,(x,y) \mid x,y \in \mathbf{N} \bigcup \{0\} \wedge (x + y = 2)\}$.

7.8. $R = \{(x,y) \mid x,y \in \mathbf{Z} \wedge ((x \pm 1)^2 + y^2 \le 1)\}$.

7.9. $R = \{(x,y) \mid x,y \in \mathbf{N} \wedge (x + y = |x + y|)\}$.

7.10. $R = \{\,(x,y) \mid x,y \in \mathbf{Z} \wedge\ (x^2 - 1 \le 0) \wedge (y^2 - 1 \le 0)\}$.

7.11. $R = \{(x,y) \mid x,y \in \mathbf{N} \wedge (x + y = 5)\}$.

7.12. $R = \{\,(x,y) \mid x,y \in \mathbf{N} \wedge (x^2 - y^2 = 0)\}$.

7.13. $R = \{(x,y) \mid x,y \in \mathbf{N} \wedge (x - y = 1)\}$.

7.14. $R = \{\,(x,y) \mid x,y \in \mathbf{Z} \wedge (x^2 + y^2 \le 4)\}$.

7.15. $R = \{(x,y) \mid x,y \in \mathbf{Z} \wedge (x + y = 1)\}$.

7.16. $R = \{ (x, y) \mid x, y \in \mathbf{Z} \wedge |x| = y^2 \}$.

7.17. $R = \{ (x, y) \mid x, y \in \mathbf{Z} \wedge |x| = y \}$.

7.18. $R = \{ (x, y) \mid x, y \in \mathbf{Z} \wedge (x^2 + x = y^2 + y) \}$.

7.19. $R = \{ (x, y) \mid x, y \in \mathbf{N} \wedge (x + y = 9) \}$.

7.20. $R = \{ (x, y) \mid x, y \in \mathbf{Z} \wedge (x^2 = y^2) \}$.

7.21. $R = \{ (x, y) \mid x, y \in \mathbf{N} \wedge (x \le y) \}$.

7.22. $R = \{ (x, y) \mid x, y \in \mathbf{N} \wedge (x < y) \}$.

7.23. $R = \{ (x, y) \mid x, y \in \mathbf{Z} \wedge (x \le y + 2) \}$.

7.24. $R = \{ (x, y) \mid x, y \in \mathbf{Z} \wedge (x \cdot y = 0) \}$.

7.25. $R = \{ (x, y) \mid x, y \in \mathbf{Z} \wedge (x^2 - x = y^2 - y) \}$.

4. Зразки розв'язання задач самостійної контрольної роботи

Задача 1. Для заданої теоретико-множинної формули:

$$F = ((A \bigcup B) \setminus (C \bigcap A)) \Delta (B \setminus C),$$

складовими якої є числові множини A, B, C, задані способом опису, тобто за допомогою характеристичної (визначальної) властивості $P(x)$ їхніх елементів:

$$A = \{ x \mid x \in \mathbf{R} \wedge (x^3 - 10x^2 + 16x = 0) \},$$

$$B = \{ x \mid x = 3^n - 1 \wedge x \le 50,\ n \in \mathbf{N} \},$$

$$C = \{ x \mid x = 4k \wedge |x| < 16 \wedge x/3 \notin \mathbf{Z},\ k \in \mathbf{Z} \},$$

необхідно:

1) указати явно елементи кожної з множин A, B, C (якщо вони є);

2) виконати операції (дії), що визначені формулою F;

3) установити, яка з основних числових множин: $\mathbf{N}$, $\mathbf{Z}$, $\mathbf{Q}$, $\overline{\mathbf{Q}}$, $\mathbf{R}$, містить здобутий результат.

Розв'язання

1. *Переходимо* від задання множин способом опису до подання їх способом переліку.

За відомою характеристичною властивістю $P(x)$ елементів кожної множини встановлюємо, що:

множина A містить елементи (x), які є дійсними коренями рівняння $x^3 - 10x^2 + 16x = 0$, отже: $A = \{0, 2, 8\}$;

множина B є множиною чисел (x), які не перевищують число 50 ($x \le 50$), а їхні значення для будь-якого натурального n ($n \in \mathbf{N}$) можуть бути обчислені за формулою: $x = 3^n - 1$, тобто: $B = \{2, 8, 26\}$;

множина C складається із цілих чисел (x), кратних числу 4 ($x = 4k$, $k \in \mathbf{Z}$), але не кратних числу 3 ($x/3 \notin \mathbf{Z}$), модуль яких менший за число 16 ($|x| < 16$), таким чином: $C = \{-8, -4, 4, 8\}$.

2. *Установлюємо* у формулі F порядок дій і згідно з ним вводимо (для зручності) позначення результатів проміжних операцій:

$$F = ((\underset{\substack{1\\R_1}}{A \cup B}) \underset{\substack{3\\R_3}}{\setminus} (\underset{\substack{2\\R_2}}{C \cap A})) \underset{\substack{5\\F}}{\cup} (\underset{\substack{4\\R_4}}{A \Delta B}).$$

Знаходимо результати операцій (дій), що визначені заданою формулою F:

$$R_1 = A \cup B = \{0, 2, 8\} \cup \{2, 8, 26\} = \{0, 2, 8, 26\};$$

$$R_2 = C \cap A = \{-8, -4, 4, 8\} \cap \{0, 2, 8\} = \{8\};$$

$$R_3 = R_1 \setminus R_2 = \{0, 2, 8, 26\} \setminus \{8\} = \{0, 2, 26\};$$

$$R_4 = A \Delta B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A) = \left| \begin{matrix} A \setminus B = \{0\} \\ B \setminus A = \{26\} \end{matrix} \right| = \{0\} \cup \{26\} = \{0, 26\};$$

$$F = R_3 \cup R_4 = \{0, 2, 26\} \cup \{0, 26\} = \{0, 2, 26\}.$$

3. *Аналізуємо* висхідну множину F з метою встановлення того, для якої з основних числових множин: $\mathbf{N}$, $\mathbf{Z}$, $\mathbf{Q}$, $\overline{\mathbf{Q}}$, $\mathbf{R}$, вона є підмножиною.

Оскільки всі елементи множини $F = \{0, 2, 26\}$ є цілими числами, то робимо висновок, що F є підмножиною множини цілих чисел $\mathbf{Z}$: $F \subset \mathbf{Z}$.

Задача 2. Для заданого теоретико-множинного твердження:

$$(B \setminus A) \bigcup (A \bigcap C) = (C \bigcap (A \bigcup B)) \bigcup (B \setminus (A \bigcup C)),$$

необхідно:

1) дати його словесне формулювання;

2) підтвердити або спростувати його правильність для заданих в умовах задачі 1 числових множин A, B, C.

Розв'язання

1. *Словесне формулювання*: об'єднання різниці множин B і A з перетином множин A і C дорівнює об'єднанню двох множин, перша з яких є перетином множини C з об'єднанням множин A і B, а друга – різницею між множиною B і об'єднанням множин A і C.

2. *Установлюємо* в лівій (F_1) і правій (F_2) частинах твердження $F_1(A, B, C) = F_2(A, B, C)$ порядок дій і *реалізуємо* їх, вводячи позначення множин, які є результатами проміжних операцій:

$$F_1 = (B \underset{L_1}{\setminus} A) \underset{F_1}{\bigcup} (A \underset{L_2}{\bigcap} C); \qquad F_2 = (C \underset{R_2}{\bigcap} (A \underset{R_1}{\bigcup} B)) \underset{F_2}{\bigcup} (B \underset{R_4}{\setminus} (A \underset{R_3}{\bigcup} C)).$$

Знаходимо для множин $A = \{0, 2, 8\}$, $B = \{2, 8, 26\}$, $C = \{-8, -4, 4, 8\}$ (див. задачу 1) результати операцій (дій), що визначені лівою частиною рівності – формулою F_1:

$$L_1 = B \setminus A = \{2, 8, 26\} \setminus \{0, 2, 8\} = \{26\};$$
$$L_2 = A \bigcap C = \{0, 2, 8\} \bigcap \{-8, -4, 4, 8\} = \{8\};$$
$$F_1 = L_1 \bigcup L_2 = \{26\} \bigcup \{8\} = \{8, 26\}.$$

Знаходимо результати операцій, що визначені правою частиною рівності – формулою F_2:

$$R_1 = A \bigcup B = \{0, 2, 8\} \bigcup \{2, 8, 26\} = \{0, 2, 8, 26\};$$
$$R_2 = C \bigcap R_1 = \{-8, -4, 4, 8\} \bigcap \{0, 2, 8, 26\} = \{8\};$$
$$R_3 = A \bigcup C = \{0, 2, 8\} \bigcup \{-8, -4, 4, 8\} = \{-8, -4, 0, 2, 4, 8\};$$
$$R_4 = B \setminus (A \bigcup C) = \{2, 8, 26\} \setminus \{-8, -4, 0, 2, 4, 8\} = \{26\};$$
$$F_2 = R_2 \bigcup R_4 = \{8\} \bigcup \{26\} = \{8, 26\}.$$

3. *Робимо* висновок про правильність або хибність заданого твердження на підставі отриманих результатів.

Оскільки множини, що відповідають лівій та правій частинам твердження, є рівними: $F_1 = F_2 = \{8, 26\}$, то задане теоретико-множинне твердження *є правильним*.

Задача 3. Для заданих множин:

$$A = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \le 25\}, \quad B = \{(x, y) \mid xy \ge 6\},$$
$$C = \{(x, y) \mid y + 2 \ge x^2\},$$

елементами яких є пари $(x, y) \in \mathbf{R}^2$, і теоретико-множинної формули:

$$F = ((A \cap B) \setminus C) \cup ((A \cap C) \setminus B),$$

зобразіть у системі координат xOy множину, що відповідає заданій формулі F; наведіть словесне формулювання.

Розв'язання

1. *Будуємо* в декартовій системі координат xOy лінії Γ_1, Γ_2, Γ_3, які є межами областей, що визначають задані множини A, B і C відповідно (рис. 4.1). Для цього в кожній нерівності, яка є характеристичною властивістю $P(x)$ елементів відповідної множини, слід замінити знак "≤" або "≥" знаком "=":

$A = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \le 25\} \Rightarrow \Gamma_1\!: \ x^2 + y^2 = 25$ – коло радіусом 5 із центром у початку координат $O(0, 0)$;

$B = \{(x, y) \mid xy \ge 6\} \Rightarrow \Gamma_2\!: \ xy = 6$ – рівнобічна гіпербола, розташована в першій і третій координатних чвертях;

$C = \{(x, y) \mid y + 2 \ge x^2\} \Rightarrow \Gamma_3\!: \ y + 2 = x^2$ – парабола з віссю симетрії Oy і вершиною в точці $(0, -2)$.

2. *Аналізуємо* формулу F з метою встановлення того, яку область визначає кожна з її операцій над відповідними множинами, та з*ображуємо* (штриховкою) вислідну область, що відповідає усій формулі F (рис. 4.1).

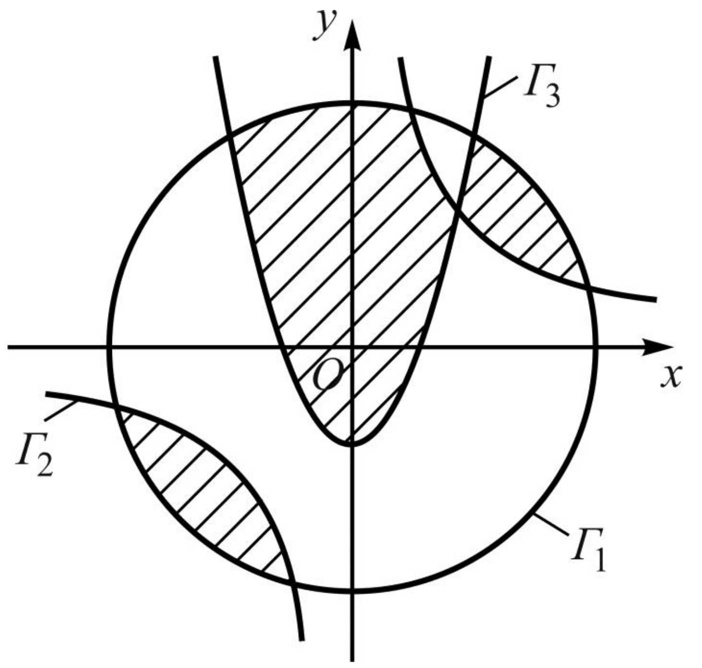


Рис. 4.1. **Область, що відповідає формулі F**

Область, що відповідає формулі $F = ((A \bigcap B) \setminus C) \bigcup ((A \bigcap C) \setminus B)$, є об'єднанням точок двох областей:

перша – відповідає множині $(A \bigcap B) \setminus C$ й утворена спільними точками круга $x^2 + y^2 \le 25$ і області, яка обмежена гіперболою $y = 6/x$ і не містить початку координат, за винятком точок, розташованих над параболою $y = x^2 - 2$;

друга – відповідає множині $(A \bigcap C) \setminus B$ і містить точки, розташовані всередині кола над параболою, за винятком точок по обидва боки від гілок гіперболи.

Задача 4. Опишіть за допомогою операцій $\bigcup$, $\bigcap$, \ над заданими множинами множину M_3, яка відповідає заштрихованій області (рис. 4.2); дайте словесне формулювання.

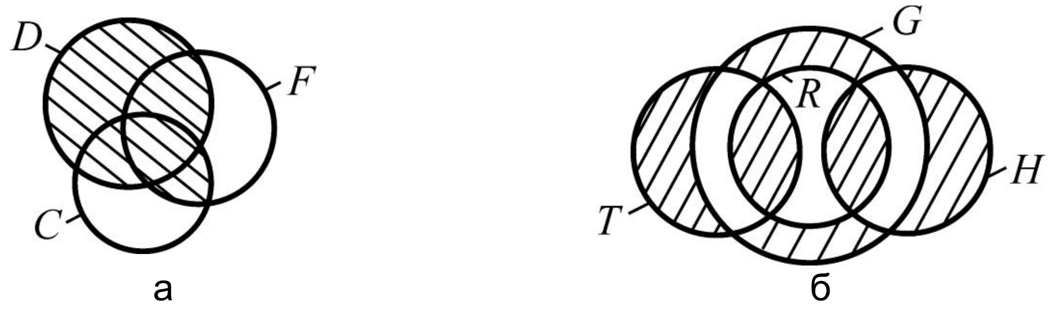


Рис. 4.2. **Заштриховані області, які підлягають опису**

Розв'язання:

а) візуальний аналіз рис. 4.2а дає: множина M_3, що відповідає заштрихованій області, є об'єднанням множини D з перетином множин F і C. Таким чином, маємо:

$$M_3 = D \bigcup (F \bigcap C);$$

б) візуальний аналіз рис. 4.2б показує: множина M_3, що відповідає заштрихованій області, є об'єднанням двох множини, перша з яких є різницею між об'єднанням множин T, H і різницею множин G, H, а інша – різницею між множиною G і об'єднанням трьох множин T, R, H. Отже, маємо:

$$M = M_1 \bigcup M_2 = \left| \begin{array}{c} M_1 = (T \bigcup H) \setminus (G \setminus H) \\ M_2 = G \setminus (T \bigcup R \bigcup H) \end{array} \right| =$$
$$= ((T \bigcup H) \setminus (G \setminus H)) \bigcup (G \setminus (T \bigcup R \bigcup H)).$$

Спробуйте знайти інші варіанти опису заштрихованих областей.

Задача 5. Сформулюйте записане в символах твердження, доведіть його або спростуйте, дайте геометричну ілюстрацію.

1) $(A \bigcup B) \setminus C = (A \setminus C) \bigcup (B \setminus C)$; 2) $M \subset N \Rightarrow (N \setminus M) \bigcup M = N$.

Розв'язання.

1. $(A \bigcup B) \setminus C = (A \setminus C) \bigcup (B \setminus C)$.

Словесне формулювання: різниця між об'єднанням множин A, B і множиною C дорівнює об'єднанню різниці множин A, C і різниці множин B, C.

Доведення. Позначимо ліву (праву) частину рівності через L (P):

$$\underbrace{(A \bigcup B) \setminus C}_{L} = \underbrace{(A \setminus C) \bigcup (B \setminus C)}_{P}.$$

Тоді за основними законами алгебри множин (див. табл. 1.1) з урахуванням формули (1.34) послідовно маємо:

$$L=\underbrace{(A\bigcup B)}_{D}\setminus C=\left|\,D\setminus C=D\bigcap\overline{C}\,\right|=(A\bigcup B)\bigcap\overline{C}=\left|\,D\bigcap\overline{C}=\overline{C}\bigcap D\,\right|=$$

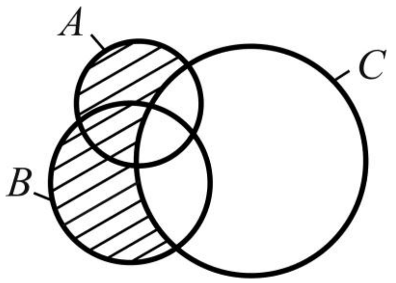
$$=\overline{C}\bigcap(A\bigcup B)=\left|\,X\bigcap(Y\bigcup Z)=(X\bigcap Y)\bigcup(X\bigcap Z)\,\right|=$$

$$=(\overline{C}\bigcap A)\bigcup(\overline{C}\bigcap B)=\left|\,X\bigcap Y=Y\bigcap X\,\right|=(A\bigcap\overline{C})\bigcup(B\bigcap\overline{C})=$$

$$=\left|\,X\bigcap\overline{Y}=X\setminus Y\,\right|=\big(A\setminus C\big)\bigcup\big(B\setminus C\big)=P,$$

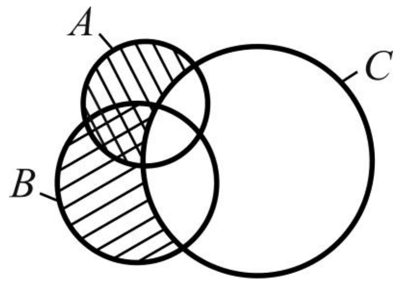
що і треба було довести.

Геометричну ілюстрацію твердження зображено на рис. 4.3.



$L=(A\bigcup B)\setminus C$

=



$P=(A\setminus C)\bigcup(B\setminus C)$

Рис. 4.3. **Геометрична ілюстрація до твердження 1 задачі 5**

2. $M\subset N\Rightarrow(N\setminus M)\bigcup M=N$.

Словесне формулювання: якщо множина M є підмножиною множини N, то об'єднання різниці множин N, M із множиною M дорівнює множині N.

Доведення. Позначимо ліву (праву) частину рівності через L (P):

$$M\subset N\Rightarrow\underbrace{(N\setminus M)\bigcup M}_{L}=\underbrace{N}_{P}.$$

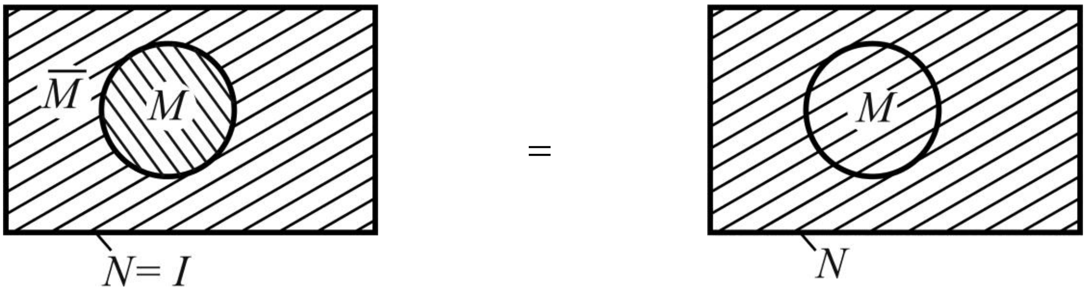
Якщо множина M є підмножиною множини N, то множину N можна розглядати як основну (універсальну) множину $(N=I)$. Тоді:

$$L=(N\setminus M)\bigcup M=\left|\,M\subset N\Rightarrow N=I\,\right|=(I\setminus M)\bigcup M=\left|\,I\setminus M=\overline{M}\,\right|=$$

$$=\overline{M}\bigcup M=M\bigcup\overline{M}=I=\left|\,I=N\,\right|=N=P,$$

що і треба було довести.

Геометричну ілюстрацію твердження зображено на рис. 4.4.



$L = (N \setminus M) \bigcup M$ $\qquad\qquad$ $P = N$

Рис. 4.4. **Геометрична ілюстрація до твердження 2 задачі 5**

Задача 6. Оцініть бінарне відношення

$$R = \{(a,b),(c,b),(a,c),(c,a),(a,a),(b,b),(c,c)\}$$

з точки зору його властивостей (r, $\bar{r}$, s, $\bar{s}$, as, t) трьома способами: 1) аналітичним; 2) матрицею; 3) графом.

Розв'язання

1 спосіб – аналітичний.

1. *Знаходимо* область існування $D(R)$, область значень $E(R)$ і область $O(R)$ БВ R: $(D(R) = \{a,b,c\} = E(R)) \Rightarrow O(R) = \{a,b,c\} = A$.

2. *Знаходимо* одиничне БВ (i_A), обернене БВ (R^{-1}), композицію БВ $R \circ R$:

$i_A = \{(x,x) \mid \forall x \in A\} = \{(a,a),(b,b),(c,c)\}$;

$R^{-1} = \{(y,x) \mid (x,y) \in R\} = \{(b,a),(b,c),(c,a),(a,c),(a,a),(b,b),(c,c)\}$;

$R \circ R = \{(x,y) \mid \exists z: xRz \wedge zRy\} = \{(a,b),(c,b),(a,a),(a,c),(c,c),$ $(c,a),(b,b)\}$.

3. *Установлюємо* наявність (або відсутність) тих чи інших властивостей БВ: r, $\bar{r}$, s, $\bar{s}$, as, t, залучаючи формули (2.13) – (2.19):

R *є рефлексивним*, оскільки $i_A \subseteq R$;

R *не є антирефлексивним*, оскільки $R \bigcap i_A \neq \varnothing$ (наприклад, $(a,a) \in R$ і $(a,a) \in i_A$);

R *не є симетричним*, оскільки $R \neq R^{-1}$ (наприклад, $(a,b) \in R$, але $(a,b) \notin R^{-1}$);

R *не є антисиметричним*, оскільки $R \bigcap R^{-1} \not\subseteq i_A$ (наприклад, $(a,c) \in R \bigcap R^{-1}$, але $(a,c) \notin i_A$);

R *не є асиметричним*, оскільки $R \bigcap R^{-1} \neq \varnothing$ (наприклад, $(a,c) \in R$ і $(a,c) \in R^{-1}$);

R *є транзитивним*, оскільки $R \circ R \subseteq R$.

Отже, задане БВ R є *рефлексивним* і *транзитивним*.

Такі ж висновки робимо, аналізуючи матрицю БВ B і граф.

2 спосіб – матрицею БВ.

1. *Знаходимо* область БВ R: $O(R) = A = \{a,b,c\}$ (див. 1 спосіб).

2. *Будуємо* матрицю БВ:

$$B = (b_{ij})_{3\times 3} = \begin{array}{c} \\ a \\ b \\ c \end{array} \!\!\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} a & b & c \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \end{array}.$$

3. *Установлюємо* наявність (або відсутність) тих чи інших властивостей БВ: r, $\bar{r}$, s, $\bar{s}$, as, t, аналізуючи матрицю B:

R *є рефлексивним*, оскільки всі елементи головної діагоналі матриці є одиницями;

R *не є антирефлексивним*, оскільки елементи головної діагоналі матриці не є нулями (наприклад, $b_{33} = 1$);

R *не є симетричним*, оскільки матриця не є симетричною відносно головної діагоналі (наприклад, $b_{21} = 0$, $b_{12} = 1$);

R *не є антисиметричним*, оскільки матриця містить одиничні елементи, симетричні відносно головної діагоналі (наприклад, $b_{31} = b_{13} = 1$);

R *не є асиметричним*, оскільки є одиничні елементи на головній діагоналі і симетричні відносно неї (наприклад, $b_{31} = b_{13} = 1$, $b_{22} = 1$);

R *є транзитивним*, оскільки для кожної пари одиничних елементів $b_{ik} = b_{kj} = 1$ знайдеться третій елемент $b_{ij} = 1$; $i, j, k \in \{1, 2, 3\}$. У даному випадку це трійки одиничних елементів:

$$(b_{31}, b_{12}, b_{32}),\ (b_{31}, b_{13}, b_{33}),\ (b_{13}, b_{32}, b_{12}),\ (b_{13}, b_{31}, b_{11}).$$

Щоб переконатися в цьому, дiємо за схемою, зображеною на рис. 4.5: треба вибрати одиничний елемент матриці $(b_{ik} = 1)$, який не лежить на головній діагоналі, подумки провести вертикаль до перетину з головною діагоналлю (b_{kk}) і знайти у відповідному рядку одиничний елемент $(b_{kj} = 1)$; для властивості транзитивності елемент b_{ij} теж має бути одиничним $(b_{ij} = 1)$. Якщо виявиться, що в k-му рядку матриці одиниць немає, то переходимо до іншого $b_{ik} = 1$.

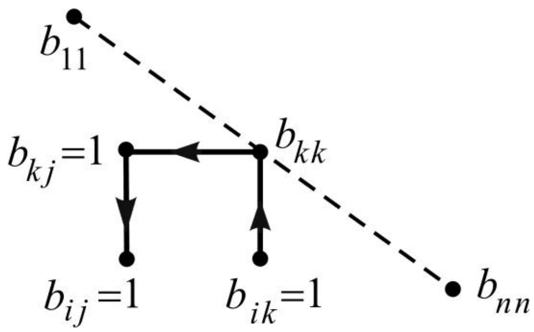


Рис. 4.5. **Схема перевірки умови транзитивності**

Транзитивність розглядуваного БВ випливає також із порівняння матриці $K = B^2$ з матрицею B:

$$K = B^2 = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 2 \end{bmatrix} = (k_{ij})_{3\times 3} \text{ і } k_{ij} > 0 \Rightarrow b_{ij} > 0 \ \forall i, j \in \{1, 2, 3\}.$$

3 спосіб – графом БВ.

1. *Знаходимо* область БВ R: $O(R) = A = \{a, b, c\}$ (див. 1 спосіб).

2. *Будуємо* граф БВ (рис. 4.6):

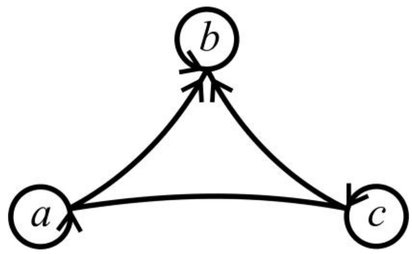


Рис. 4.6. **Граф БВ**

3. *Установлюємо* наявність (або відсутність) тих чи інших властивостей БВ: r, $\bar{r}$, s, $\bar{s}$, as, t, аналізуючи його граф:

R *є рефлексивним*, оскільки кожна вершина графа має петлю;

R *не є антирефлексивним*, оскільки граф має петлі (наприклад, у вершини b);

R *не є симетричним*, оскільки не всі ребра графа неорієнтовані (наприклад, ребро (a, b) – орієнтоване);

R *не є антисиметричним*, оскільки є неорієнтоване ребро (ребро (a, c));

R *не є асиметричним*, оскільки є неорієнтовані ребра (ребро (a, c)) й петлі (наприклад, у вершини b);

R *транзитивне*, оскільки кожна пара послідовних ребер має замикальне ребро (для ребер (a, c), (c, b) замикальне – (a, b), а для ребер (c, a), (a, b) замикальне – (c, b)), а неорієнтоване ребро (a, c) має петлі в обох вершинах.

Висновок: задане БВ *є рефлексивним і транзитивним*: $R = R_r \wedge R_t$.

Задача 7. Побудуйте на декартовій площині графік заданого бінарного відношення $R = \{(x, y) \mid x, y \in \mathbf{Z} \wedge (|x| + y = 4)\}$ і оцініть з точки зору його властивостей (r, $\bar{r}$, s, $\bar{s}$, as, t).

Розв'язання

1. *Будуємо* графік заданого БВ R – множину точок (x, y) декартової площини з цілими координатами $(x, y \in \mathbf{Z})$, які задовольняють умову $|x| + y = 4$. Запишемо останню умову у вигляді:

$$y = 4 - |x| = \begin{cases} 4 - x, \text{ коли } x \geq 0, \\ 4 + x, \text{ коли } x < 0, \end{cases}$$

і дамо зображення БВ на декартовій площині (рис. 4.7), де пунктирна лінія – пряма $y = x$ – бісектриса першого і третього координатних кутів.

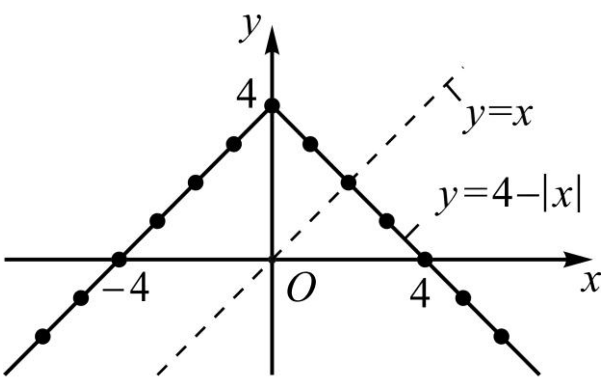


Рис. 4.7. **Декартів графік БВ**

2. *Знаходимо* область БВ R. Областю БВ R є множина цілих чисел $\mathbf{Z}$, оскільки умова $|x|+y=4$ не звужує ні області існування, ні області значень БВ: $D(R)=E(R)=\mathbf{Z} \Rightarrow O(R)=D(R)\bigcup E(R)=\mathbf{Z}$.

3. *Установлюємо* наявність (або відсутність) тих чи інших властивостей БВ: r, $\bar{r}$, s, $\bar{s}$, as, t, аналізуючи його графік:

R *не є рефлексивним*, оскільки не всі точки прямої $y=x$ із цілими координатами належать графіку (наприклад, для $x=0$ точка $(0,0)$ прямої $y=x$ не є точкою графіка);

R *не є антирефлексивним*, оскільки є точка графіка, яка лежить на прямій $y=x$, а саме – точка $(2,2)$;

R *не є симетричним*, оскільки графік не має симетрії відносно прямої $y=x$ (наприклад, точка $(-4,0)$ є точкою графіка, а точка $(0,-4)$ – ні);

R *не є антисиметричним*, оскільки є точки графіка, симетричні відносно прямої $y=x$ (наприклад, $(0,4)$ і $(4,0)$);

R *не є асиметричним*, оскільки є точки, симетричні відносно прямої $y=x$ (наприклад, точки $(0,4)$ і $(4,0)$), і такі, що лежать на ній (точка $(2,2)$);

R *не є транзитивним*, оскільки не для всіх пар точок графіка виду (x,z), (z,y) точка (x,y) теж належить графіку (наприклад, точки $(0,4)$ і $(4,0)$ є точками графіка, а точка $(0,0)$ – ні).

Висновок: задане БВ R не має жодної властивості.

5. Тест з теми "Теорія множин і відношень"

1. Установіть, які з наведених тверджень є правильними:

1) $b \in \{a,7,b\}$;

2) $3 \in \{7,1,\{2,3\}\}$;

3) $x \in \{\sin x, \ln(e^x), \sqrt{x}\}$;

4) $\{c,d\} \in \{a,\{c,d\},b\}$;

5) $\{y\} \in \{x,\{x,y\},y\}$;

6) $\{5,7\} \in \{\{7,5\}\}$.

2. Укажіть пари множин, що дорівнюють одна одній:

1) $A=\{4,2,3,1\}$, $B=\{1,3,2,4\}$;

2) $K=\{a,c,b\}$, $L=\{\{a\},c,b\}$;

3) $H=\{\{\alpha,\beta\},\{\beta,\gamma\}\}$, $G=\{\alpha,\beta,\gamma\}$;

4) $D=\{1,11\}$, $T=\{1,11,1\}$;

5) $S=\{y,x\}$, $C=\{\{x,y\}\}$;

6) $V=\{2,\{2,3\},3\}$, $W=\{2,3\}$;

7) $P=\{x\in\mathbf{N}\,|\,x^3-5x^2+6x=0\}$, $M=\{2,3\}$;

8) $\varnothing$, $\{\varnothing\}$.

3. Для кожної пари множин установіть, чи є одна з множин підмножиною іншої:

1) $A=\{2,4,6\}$, $B=\{7,6,5,4,3,2,1\}$;

2) $C=\{a,b,c\}$, $D=\{\{a\},\{b,c\}\}$;

3) $H=\{(x,y)\in\mathbf{R}\,\big|\,|x|\le 2\wedge|y|\le 2\}$, $G=\{(x,y)\in\mathbf{R}\,\big|\,x^2+y^2\le 1\}$;

4) $M_1=A\bigcup(B\setminus C)$, $M_2=(A\bigcup B)\setminus C$.

4. Для кожної множини укажіть її потужність:

а) $A=\{x\,|\,x\in\mathbf{N}\wedge x^2-5x-14=0\}$;

б) B – множина всіх підмножин множини $M=\{a,b,c\}$;

в) $C=\{(x,y)\,|\,x,y\in\mathbf{N}\bigcup\{0\}\wedge x^2+y^2-4x<0\}$.

5. Установіть відповідність між символьним записом і результатом виконання теоретико-множинних операцій у ньому:

Символьний запис	Результат
а) $\varnothing\bigcap\{\varnothing\}$;	1) $\{\{\varnothing\}\}$;
б) $\{\varnothing\}\bigcap\{\varnothing\}$;	2) $\{\varnothing,\{\varnothing\},\{\{\varnothing\}\}\}$;
в) $\{\varnothing,\{\varnothing\}\}\setminus\varnothing$;	3) $\{\varnothing,\{\varnothing\}\}$;
г) $\{\varnothing,\{\varnothing\}\}\setminus\{\varnothing\}$.	4) $\{\varnothing\}$;
	5) $\{\{\varnothing\},\{\{\varnothing\}\}\}$;
	6) $\varnothing$

6. Установіть відповідність між назвою теоретико-множинної операції та символьним записом її означенням:

Назва теоретико-множинної операції	Означення у символах
а) перетин множин A і B; б) різниця множин A і B; в) доповнення множини A; г) об'єднання множин A і B.	1) $\{x \mid x \in A \vee x \in B\}$; 2) $\{x \mid x \in A \wedge x \notin B\}$; 3) $\{x \mid x \in B \wedge x \notin A\}$; 4) $\{x \mid x \in A \wedge x \in B\}$; 5) $\{x \mid x \in A \wedge x \notin I\}$; 6) $\{x \mid x \in I \wedge x \notin A\}$.

7. Нехай $I = \{a, b, c, d, e, f\}$ – універсальна множина, $A = \{a, b, c\}$, $B = \{a, c, e, f\}$, $C = \{d, e, f\}$. Установіть відповідність між теоретико-множинною формулою $F(A, B, C)$ і множиною, яку вона визначає:

$F(A,B,C)$	Вислідна множина
а) $A \setminus B$; б) $B \setminus C$; в) $\overline{A \cup C}$; г) $A \setminus C$; д) $B \cup \overline{A}$; е) $C \Delta A$; є) $(A \cap C) \cup \overline{B}$; ж) $A \cup (B \cap C)$; з) $\overline{A} \cap \overline{B}$.	1) $\{d\}$; 2) $\{b\}$; 3) $\{a, c\}$; 4) $\varnothing$; 5) $\{a, b, c\}$; 6) $\{a, c, d, e, f\}$; 7) I; 8) $\{b, d\}$; 9) $\{a, b, c, e, f\}$; 10) $\{c, e, f\}$.

8. За допомогою тотожних перетворень за законами алгебри множин спростіть задану теоретико-множинну формулу $F(A, B, C)$:

1) $F = (A \cup B \cup C) \cap (A \cup B) \setminus (A \cup (B \setminus C)) \cap A$.

Варіанти відповідей: $B \setminus A$; $A \setminus B$; $A \cup B$; $A \cap B$; $\varnothing$; I;

2) $F = A \cap \overline{B} \cap C \cup (\overline{A} \cup B) \cap C \cup C \cap \overline{C}$.

Варіанти відповідей: C; $C \setminus B$; $A \cup C$; $A \cap B$; $\varnothing$; I;

3) $F = C \bigcap (\overline{A} \bigcap \overline{B}) \bigcap (C \bigcup B) \bigcup C$.

Варіанти відповідей: $A \bigcup C$; $B \bigcap C$; $A \bigcap B$; C; $\varnothing$; I;

4) $F = A \bigcap B \bigcap (\overline{A} \bigcap B) \bigcap (A \bigcup \overline{B}) \bigcup C \bigcap \overline{C}$.

Варіанти відповідей: $A \bigcap C$; $B \bigcup C$; $A \bigcap B$; C; $\varnothing$; I;

5) $F = C \bigcap B \bigcap (B \setminus A) \bigcap (\overline{B} \bigcup A) \bigcup A \bigcap B$.

Варіанти відповідей: $A \bigcap B$; $B \setminus C$; $B \bigcup A$; $C \bigcap A$; $\varnothing$; I;

6) $F = B \bigcap (\overline{A} \bigcap B) \bigcap (\overline{B} \bigcup A) \bigcup A \bigcap B$.

Варіанти відповідей: $A \bigcap B$; $B \bigcup C$; B; $C \bigcap A$; $\varnothing$; I;

7) $\mathrm{F} = \mathrm{C} \cap \mathrm{B} \cap (\overline{\mathrm{A}} \cup \mathrm{C}) \cap (\mathrm{A} \setminus \mathrm{C}) \cup \mathrm{A} \cap \overline{\mathrm{B}}$.

Варіанти відповідей: $\mathrm{A} \setminus \mathrm{B}$; $\mathrm{B} \cup \mathrm{C}$; $\mathrm{A} \cap \mathrm{B}$; $\mathrm{C} \cap \mathrm{A}$; $\varnothing$; I;

8) $F = A \bigcap \overline{B} \bigcup (A \setminus B) \bigcap (\overline{A} \bigcup B) \bigcup A$.

Варіанти відповідей: $A \bigcup C$; $B \bigcap C$; $A \bigcap B$; A; $\varnothing$; I;

9) $F = A \bigcap B \bigcap C \bigcup (\overline{A} \bigcup \overline{B}) \bigcap C$.

Варіанти відповідей: $A \bigcap C$; $B \bigcup C$; $A \bigcap B$; C; $\varnothing$; I;

10) $F = \overline{A} \bigcap \overline{B} \bigcap (A \bigcup B) \bigcap C \bigcup C \bigcap \overline{C}$.

Варіанти відповідей: A; $B \bigcup C$; $A \setminus C$; $A \bigcap B$; $\varnothing$; I;

11) $F = (\overline{A} \bigcap \overline{C}) \bigcap (C \bigcup B) \bigcap C \bigcup C$.

Варіанти відповідей: $B \bigcup C$; $A \setminus C$; $A \bigcap B$; C; $\varnothing$; I;

12) $F = (A \bigcap \overline{C}) \bigcap (C \bigcup B) \bigcap C$.

Варіанти відповідей: C; $B \setminus C$; $A \bigcup C$; $A \bigcap B$; $\varnothing$; I.

9. За допомогою кругів Ейлера дослідіть питання про правильність наведених співвідношень:

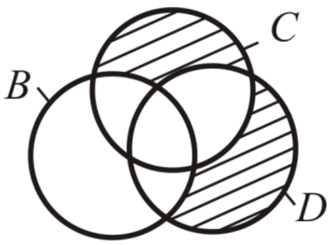
1) $A \setminus (B \bigcap C) = (A \setminus B) \bigcup (A \setminus C)$;

2) $(A \setminus B) \bigcap C = (A \bigcap B) \setminus (A \bigcap C)$;

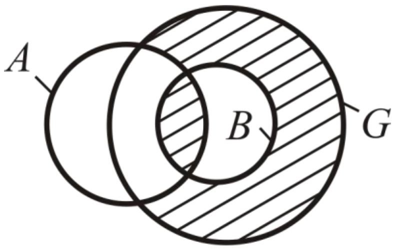
3) $C \setminus (A \bigcup B) = C \setminus (A \setminus B)$;

4) $(A \bigcup B) \setminus (A \bigcap B \bigcap C) = A \setminus ((B \bigcap C) \bigcup (A \bigcap B))$.

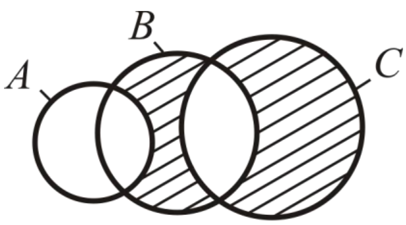
10. Який з символьних записів визначає множину M, що відповідає заштрихованій області?

а) 

Варіанти відповідей: $M = ((C \setminus B) \bigcup (D \setminus B)) \setminus (B \bigcap C \bigcap D)$;
$M = (C \bigcup D) \setminus (B \bigcap (C \bigcup D))$;
$M = (C \bigcup D) \setminus (B \bigcup (C \bigcap D))$;

б) 

Варіанти відповідей: $M = G \setminus ((A \bigcup B) \setminus (A \bigcap B))$;
$M = (G \setminus (A \bigcup B)) \bigcup ((G \bigcap A) \setminus B)$;
$M = ((A \bigcup B) \setminus G) \bigcup (B \bigcap A)$;

в) 

Варіанти відповідей: $M = (C \setminus B) \bigcup (B \setminus A)$;
$M = (B \setminus (A \bigcup C)) \bigcup (C \setminus B)$;
$M = (B \bigcup C) \setminus (B \bigcap C) \bigcap A$.

11. Укажіть, в якому з наведених символьних записів допущено помилку (I – універсальна множина).

1) $(A \setminus B) \bigcup (A \bigcap B) \bigcup \overline{A} = I$;

2) $(A \setminus C) \bigcap C \bigcup B = B$;

3) $(B \bigcup \varnothing) \bigcup (B \setminus A) = A$;

4) $\overline{(C\setminus(B\cap I))\cup\overline{B}}=B$;

5) $(A\cup B)\cap(C\setminus(A\cup B))=\varnothing$;

6) $(C\setminus A)\cap\overline{(C\setminus A)}\cup(A\cap I)=A$;

7) $((I\setminus A)\cup(A\setminus\varnothing))\cap C=C$;

8) $(A\cap(A\cup\overline{C}))\setminus(I\cup B)=\overline{A}$;

9) $A\cup(B\setminus\overline{C})\cup\overline{(C\setminus\overline{A})}=I$;

10) $C\cap(I\setminus A)\cup\overline{(C\cup A)}=\overline{A}$;

11) $(B\cap\overline{B}\cup A)\cap(I\setminus\overline{A})=A$;

12) $(\overline{A}\cap B)\cup(A\cap B)\cup(B\cap C)=B$;

13) $\overline{(A\cup(B\cap C))}\cap((B\cap C)\cup A)=\varnothing$;

14) $((A\cap I)\setminus(B\cup\varnothing))\cup\overline{(A\cap\overline{B})}=I$;

15) $(C\cap A)\setminus(C\setminus B)\cup A=C$.

12. Укажіть, яка з наведених множин є скінченною (нескінченною).

1) $A=\{x\,|\,x\in\mathbf{R}\wedge 0\le x\le 1)\}$;

2) $B=\{x\,|\,x\in\mathbf{Z}\wedge|\,x-3\,|\ge 5)\}$;

3) $C=\{x\,|\,x\in\mathbf{N}\wedge 2x-15\le 0\}$;

4) $D=\{x\,|\,x\in\mathbf{N}\wedge(x^2-9)(x^3-2x^2-8)=0\}$;

5) $E=\{(x,y)\,|\,x,y\in\mathbf{Z}\wedge x^2-4\le y)\}$;

6) $F=\left\{x\,|\;x\in\mathbf{R}\;\wedge\;\exists y:\,x=\dfrac{y+1}{y^2+1}\right\}$;

7) $G=\{(x,y)\,|\,x,y\in\mathbf{N}\wedge 4x^2+25y^2>100)\}$.

13. Укажіть, яка з наведених множин є зліченною (незліченною).

1) $A=\{1,4,9,16,25,\ldots\}$;

2) $B=\{x\,|\,x\in\mathbf{N}\wedge 5x-20\le 0\}$;

3) $C=\{x\,|\,x\in\mathbf{R}\wedge|x|\le 5\}$;

4) $D=\{x\,|\,x=3n-1, n\in\mathbf{N}\}$;

5) $E=\{(x,y)\,|\,x,y\in\mathbf{Z}\wedge|x|\le 2\wedge|y|\le 1)\}$;

6) $F=\{(x,y)\,|\,x,y\in\mathbf{R}\wedge x+y-3=0\}$;

7) $G=\left\{\frac{1}{3},\frac{1}{9},\frac{1}{27},\frac{1}{81},\frac{1}{243},\ldots\right\}$.

14. Декартів добуток множин $A=\{x\,|\,x\in\mathbf{N}\wedge x^3-5x^2+4x=0\}$ і $B=\{x\,|\,x\in\mathbf{Z}\wedge|x-1|<2\}$ має вигляд:

1) $\{0,1,2,4\}$;

2) $\{(0,0),(1,1),(2,2),(4,4)\}$;

3) $\{(1,0),(1,1),(1,2),(4,0),(4,1),(4,2)\}$;

4) $\{-1,0,1,2,3,4\}$;

5) $\{(0,-1),(0,0),(0,1),(0,2),(0,3),(1,-1),(1,0),(1,1),(1,2),(1,3),(4,-1),$ $(4,0),(4,1),(4,2),\ (4,3)\}$.

15. Область БВ $R=\{(x,y)\,|\,x,y\in\mathbf{Z}\wedge(x+2)^2+(y-1)^2\le 9\}$ має вигляд:

1) $\{-5,-4,-3,-2,-1,0,1\}$;

2) $\{-2,-1,0,1,2,3,4\}$;

3) $\{-5,-4,-3,-2,-1,0,1,2,3,4\}$;

4) $\{-2,-1,0,1\}$;

5) $\{-5,-2,1,4\}$.

16. Для БВ $R=\{(x,y)\,|\,x,y\in\mathbf{Z}\wedge x^2-4x+y-1=0\}$ тотожне БВ має вигляд:

1) $\{(1,1),(2,2),(3,3),(4,4)\}$;

2) $\{(1,1),(4,4),(5,5)\}$;

3) $\{(1,1),(2,2),(3,3),(4,4),(5,5)\}$;

4) $\{(1,4),(2,5),(3,4),(4,1)\}$;

5) $\{(1,1),(4,4)\}$.

17. Для БВ $R = \{(x, y) \mid x, y \in \mathbf{N} \wedge |x-2| \le 1 \wedge |y-3| \le 0{,}5\}$ обернене БВ має вигляд:

1) $\{(3,1),(3,2),(3,3)\}$;

2) $\{(1,3),(2,3),(3,3),(3,1),(3,2)\}$;

3) $\{(1,1),(2,2),(3,3)\}$;

4) $\{(1,2),(1,3),(3,1),(2,1),(3,3)\}$;

5) $\{(1,3),(2,3),(3,3)\}$.

18. Для БВ $R = \{(a,b),(a,c),(b,c),(c,a),(b,a)\}$ композиція БВ $R \circ R$ має вигляд:

1) $\{(a,c),(b,a),(c,b),(b,c)\}$;

2) $\{(a,c),(a,a),(b,a),(c,b),(c,c),(b,b),(b,c)\}$;

3) $\{(a,a),(b,b),(c,c)\}$;

4) $\{(b,a),(c,a),(c,b),(a,c),(a,b)\}$;

5) $\{(a,c),(a,a),(b,a),(c,b),(b,c)\}$.

19. Укажіть, які з наведених БВ є відношеннями еквівалентності.

1) "x *кратне* y" на множині цілих чисел;

2) "x *має спільні точки з* y" на множині прямих на площині;

3) "x *дотикається до* y" на множині кіл на площині;

4) "x *знайомий із* y" на множині людей;

5) "x *одного кольору з* y" на множині кольорових предметів.

20. Укажіть, які з наведених БВ є відношеннями порядку (строго чи нестрогого).

1) "x *важче* від y" на множині деталей;

2) "x *підлягає* y" на множині посад;

3) "x *не довше від* y" на множині відрізків на площині;

4) "x *старше* від y" на множині людей;

5) "x *не перевищує* y" на множині номерів будівель на вулиці;

6) "x *міститься всередині* y" на множині кіл на площині.

21. Укажіть, які з наведених БВ є відношеннями толерантності.

1) "x *перпендикулярна* до y" на множині прямих;

2) "x *має спільні точки з* y" на множині геометричних фігур;

3) "x *поруч із* y" на множині книг на полиці;

4) "x *товаришує з* y" на множині людей.

22. Укажіть, які з наведених БВ є відношеннями домінування.

1) "x *вище* від y" на множині дерев;

2) "x *освіченіший, ніж* y" на множині людей;

3) "x *жвавіший* від y" на множині людей;

4) "x *страшніший від* y" на множині хижих звірів;

5) "x *у злагоді з* y" на множині людей.

23. На множині $N = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ задані БВ R. Укажіть, які з них є функціональними.

1) $R = \{(1,2), (2,3), (2,4), (3,2), (5,1)\}$;

2) $R = \{(1,2), (2,3), (3,2), (4,3), (5,1)\}$;

3) $R = \{(2,1), (3,4), (4,4), (5,3)\}$;

4) $R = \{(1,5), (2,1), (3,4), (4,3), (5,2)\}$.

24. Укажіть, які з наведених відображень у множині дійсних чисел є функціями.

1) $\{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid y = x^2 + 3x + 2\}$;

2) $\{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid x = y^2\}$;

3) $\{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1 \wedge y > 0\}$;

4) $\{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \,\big|\, |x| + |y| = 1\}$.

6. Рекомендована література

6.1. Основна

1. Денисова Т. В. Дискретна математика [Електронний ресурс] : навч. посіб. / Т. В. Денисова, В. Ф. Сенчуков ; Харківський національний економічний університет ім. С. Кузнеця. – Харків : ХНЕУ ім. С. Кузнеця, 2019. – 287 с.

2. Москинова Г. И. Дискретная математика / Г. И. Москинова. – Москва : Логос, 2000. – 240 с.

3. Нефедов В. Н. Курс дискретной математики / В. Н. Нефедов, В. А. Осипова. – Москва : Наука, 1992. – 268 с.

4. Новиков Ф. А. Дискретна математика для программистов : учебник для вузов / Ф. А. Новиков. – 2-е изд. – Санкт-Петербург : Питер, 2007. – 364 с.

5. Сигорский В. П. Математический аппарат инженера / В. П. Сигорский. – Киев : Техника, 1975. – 766 с.

6.2. Додаткова

6. Бондаренко М. Ф. Комп'ютерна дискретна математика : підручник / М. Ф. Бондаренко, Н. В. Білоус, А. Г. Руткас. – Харків : Компанія СМІТ, 2004. – 480 с.

7. Боднарчук Ю. В. Основи дискретної математики : навч. посіб. / Ю. В. Боднарчук, Б. В. Олійник. – Київ : НаУКМА, 2007. – 138 с.

8. Яблонский В. Н. Введение в дискретную математику / В. Н. Яблонский. – Москва : Наука, 1991. – 312 с.

6.3. Інформаційні ресурси

9. Стрелковська І. В. Дискретна математика [Електронний ресурс] : навч. посіб. / І. В. Стрелковська, А. Г. Буслаєв, О. М. Харсун. – Одеса : ОНАЗ ім. О. С. Попова, 2010. – 196 с. – Режим доступу : http://www.dut.edu.ua/uploads/l_373_44193539.pdf.

10. Стрелковська І. В. Практичні заняття з дискретної математики [Електронний ресурс] / І. В. Стрелковська, А. Г. Буслаєв, В. М. Вишневська. – Одеса : ОНАЗ ім. О. С. Попова, 2008. – 49 с. – Режим доступу : https://metod. onat.edu.ua/metod/ download/443/ua.

Зміст

НАВЧАЛЬНЕ ВИДАННЯ

ДИСКРЕТНА МАТЕМАТИКА

Методичні рекомендації до самостійної роботи з теми "Теорія множин і відношень" для студентів галузі знань 12 "Інформаційні технології" першого (бакалаврського) рівня

Самостійне електронне текстове мережеве видання

Укладач **Денисова** Тетяна Володимирівна

Відповідальний за видання *Л. М. Маляреця*

Редактор *В. О. Дмитрієва*

Коректор *В. Ю. Труш*

План 2021 р. Поз. № 49 ЕВ. Обсяг 80 с.

Видавець і виготовлювач – ХНЕУ ім. С. Кузнеця, 61166, м. Харків, просп. Науки, 9-А

Свідоцтво про внесення суб'єкта видавничої справи до Державного реєстру
ДК № 4853 від 20.02.2015 р.