

УДК 519.65:514.182.7:004.92

О. В. Фролов, канд. техн. наук, доцент
Харківський національний економічний університет імені Семена Кузнеця, м. Харків, Україна
frolgx@gmail.com

Оптимізація параметру функції-регулятора вузлів при кусково-лінійній інтерполяції плоских кривих з наявними точками перегину за асимптотично-оптимальним алгоритмом

В роботі розглядається моделювання інтерполяції плоских параметричних кривих з наявними точками перегину ламаними за асимптотично-оптимальним алгоритмом. Апроксимація кривих ламаними привертає увагу з метою її застосування до задач відтворення об'єктів складної форми. Одним з алгоритмів, що можливо застосувати є асимптотично-оптимальна інтерполяція, які задовольняють вимоги мінімізації кількості ланок. Складовою частиною цього алгоритму є отримання розподілу вузлів за допомогою інтегральної функції-регулятора. У випадку інтерполяції плоскої кривої, що не містить точок перегину, функція-регулятор залежить від виразу, що визначає її кривину. Щоб отримати розподіл вузлів кривої при наявності в неї точок перегину до функції вносять доданок, що залежить від вільного параметру. Для того, щоб виявити потрібне значення цього параметра в роботі проведено аналіз можливих критеріїв, що виявляють серед можливих варіантів конкретний розподіл вузлів інтерполяції. Було досліджено залежності статистичних характеристик послідовностей похибок апроксимації для ланок ламаної від зміни параметру регулятора вузлів. До цих характеристик було віднесено: максимальне серед послідовності похибок ланок значення, розмах значень послідовності, її середнє значення, середньо квадратичне відхилення та коефіцієнт варіації. Проаналізувавши вказані залежності побудовані для конкретних кривих було визначено, що критерієм оптимальності більш відповідає величина максимальної серед похибок послідовності ланок ламаної. Мінімізація цієї характеристики за методом золотого перетину дала прийнятні результати апроксимації для прикладів кривих з однією та двома точками перегину.

Ключові слова: інтерполяція, ламана, оптимізація, плоска параметрична крива, похибка, точка перегину, цільова функція

DOI: 10.31474/1996-1588-2020-2-31-47-57

Вступ

Проблема оптимізації кількості вузлів, а також їх розподілу уздовж кривої чи поверхні, при дискретному представленні об'єктів складної форми має широке коло застосувань, зокрема, пов'язаних з друком на 3D принтерах, відтворенні об'єктів проектування на моніторах та ін. [1, 2, 3].

Алгоритми асимптотично-оптимальної інтерполяції та апроксимації кривих технологічними лініями (в т. ч. ламаними) було запропоновано в роботі [2]. Головною рисою цього підходу є те, що при заданій похибці наближення отримується складена з ланок простих ліній крива, яка відтворює задану криву, з близької до найменшої кількості ланок. В [2] було розглянуті та доведені численні твердження та теореми, зокрема, щодо визначення кількості вузлів інтерполяції кривої ламаною при наявній точності апроксимації та їх розподілу уздовж кривої, що відтворюється.

В роботі [4] були зачеплені питання застосування асимптотично-оптимального алгоритму кусково-лінійної інтерполяції до моделювання відтворення реальних плоских

кривих та вирішені декількох питань пов'язаних з цим: обґрунтування кількості точок попередньої дискретизації кривої, визначення методики оцінювання результатів моделювання.

Метою роботи є дослідження можливості оптимізації параметру функції-регулятора вузлів при кусково-лінійній інтерполяції плоских параметричних кривих з наявними точками перегину за асимптотично-оптимальним алгоритмом.

Функція-регулятор вузлів інтерполяції та вплив на неї форми плоскої кривої

Асимптотично-оптимальний (в метриці Хаусдорфа) алгоритм кусково-лінійної інтерполяції плоскої кривої ламаною базується на визначенні вузлів наступним чином [2]:

1) спочатку визначається кількість ланок інтерполяційної ламаної за формулою:

$$m = \left\lceil \frac{1}{\sqrt{8\varepsilon}} \int_0^T \Phi(t) dt \right\rceil + 1, \quad (1)$$

де $[a]$ – ціла частина числа a ;

ε – похибка інтерполяції, якій відповідає допустима хаусдорфова відстань між кривою та ламаною;

t – параметр кривої з областю зміни $[0, T]$;

$\Phi(t)$ – функцію розподілу, що має такий вигляд:

$$\Phi(t) = \frac{\sqrt{|x''(t)y'(t) - x'(t)y''(t)|}}{\sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2}}. \quad (2)$$

2) отримуються значення параметру кривої – t_i , що відповідають вузловим точкам згідно умови:

$$\int_0^{t_j} \Phi(t) dt = \frac{j}{m} \int_0^T \Phi(t) dt, \quad (j = 0, 1, \dots, m) \quad (3)$$

В [2] також стверджується, що при наявності нульових значень функції $\Phi(t)$ до неї додається величина $m^{-\alpha}$ і рівняння розподілу перетворюється на

$$\int_0^{t_j} (\Phi(t) + m^{-\alpha}) dt = \frac{j}{m} \int_0^T (\Phi(t) + m^{-\alpha}) dt, \quad (j = 0, 1, \dots, m) \quad (4)$$

де α – стала, що згідно [2] може приймати значення в межах від 0 до $2/3$.

Щоб виявити сутність застосування формул (3) та (4) змодельємо похибки апроксимації на конкретних прикладах кривих, що мають точки перегину.

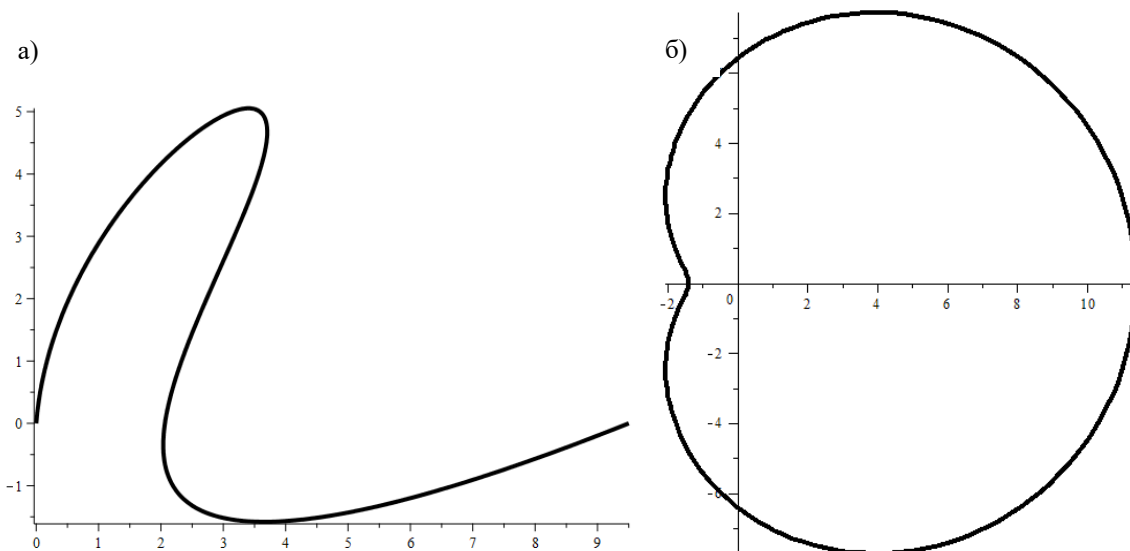


Рисунок 1 – Криві лінії обрані для відтворення ламаними: а) крива Без'є п'ятого порядку з координатами точок опорного полігону (0.0; 0.0), (0.55; 6.9), (11.8; 9.2), (-2.5; -1.25), (-1.0; -4.2), (9.5; 0.0); б) равлик Паскаля: радіус вихідного кола – 2.5, зміщення – 6.4

Розглянемо результати інтерполяції ламаними за формулою (3) для випадків кривих, що зображені на рис. 1. Перша крива є кривою Без'є п'ятого порядку (рис. 1а) та має одну точку перегину, а інша носить назву равлика Паскаля (рис. 1б) з двома точками перегину. Щоб оцінити якість відтворення кривих, скористаємось запропонованою в [4] методикою, яка передбачає обчислення відносних похибок наближення та побудові їх послідовностей з упорядкуванням у відповідності до номеру ланки ламаною та розрахунку таблиць статистичних показників цих послідовностей.

Аналізуючи наведені в таблицях 1 та 2 показники розподілів похибок наближення кривих, можна відмітити наступне: присутні значення максимальної похибки, що перевищують допустимі; значно збільшився розмах значень

похибок розподілів у порівнянні з кривими без точок перегину (див. [4]). Для пояснення такої поведінки розподілів наведемо декілька стовпчикових діаграм розподілів похибок за ланками інтерполяційної ламаної.

На рис. 2 зображено розподіли похибок кривих, де по горизонтальній осі відкладено номери ланок ламаної, що відраховуються в сторону збільшення параметру кривої, а по вертикальній осі – відносні похибки для відповідної ланки. На цих рисунках можливо побачити аномальні мінімуми та максимуми, які пояснюються наявністю у кривих точок перегину, де кривина приймає нульове значення та відбувається зміна її знаку. Формула (3) інтегральної функції не враховує можливу наявність таких ділянок кривої, оскільки від'ємні значення кривини нівелюються присутністю

модулю. Отже, такі значення можна вважати за викиди. Так, для розподілу кривої з одною точкою перегину (рис. 2а) значенню максимуму похибки, що відбувається на 18 ланці, відповідає інтервал зміни параметру t кривої від 0.506763313 до 0.591993777, який містить значення 0.5231116438, де підінтегральна функція (2) приймає нульове значення. Саме таке значення містить й інтервал [0.505435804, 0.550070494] 53 ланки, де знаходиться мінімум розподілу на рис. 2б. Рисунок 3 відображає графіки інтегральної функції, що являє собою праву частину (3):

$$\Psi = \int_0^t \Phi(t) dt$$

та її підінтегральної частини $\Phi=\Phi(t)$ для кривої Без'є (рис. 1а) та $T \in [0;1]$. Вже згаданому значенню $t = 0.5231116438$ відповідає точка М, де функція Φ дорівнює нулеві, а функція Ψ має точку перегину, тобто порушується її монотонне зростання.

Аналогічні до попереднього випадку тенденції демонструють результати моделювання відтворення іншої кривої – рис. 4. Завдяки наявності вже двох симетричних відносно горизонтальної осі точок перегину равлика Паскаля відбуваються викиди мінімальних та максимальних значень розподілів на рис. 4, які так само є симетричними.

Отже, застосування функції – регулятора вузлів у формі (2) до випадку, коли крива, що відтворюється має точки перегину, дає результати апроксимації з порушенням монотонності на ланках ламаної, які відповідають ділянкам дуги, де відбувається зміна напрямку кривини. Це може

приводити до появи аномальних значень похибки апроксимації, які перевищують допустимі значення. Запропоноване у [2] використання формули (4) до таких випадків, передбачає наявність доданка за рахунок, якого можливо дещо зменшити вузлові значення, щоб уникнути занадто великих значень похибки. Але в цій роботі було тільки визначенні межі зміни параметру a без вказівок, за якими критеріями може бути обране конкретне значення цього параметру при існуванні кривої та необхідній точності її наближення.

Таким чином, набуває актуальності питання можливості оптимізації значення параметру a при визначенні вузлів інтерполяції плоских кривих, що мають точки перегину, яке і є основним завданням даної статті.

Обрання критерію оптимальності, визначення цільової функції та результати моделювання

Обговорення критеріїв, за якими один розподіл похибок апроксимації можна вважати кращим аніж інший, почнімо з визначення того, якими рисами може мати оптимальне рішення. Вочевидь, розподіл похибок інтерполяції можна вважати таким, якщо при той самій кількості ланок він забезпечує: - значення послідовності похибок, які не перевищують допустиме значення; - значення окремих похибок близькі між собою, іншими словами забезпечується мінімальне середньо квадратичне відхилення послідовності похибок, або коефіцієнт варіації; - відсутність аномалій, тобто занадто малих або високих значень, що відрізняються від інших.

Таблиця 1

Результати інтерполяції кривої на рис. 1а

Найменування показника	Значення допустимої точності інтерполяції - ε			
	0.05	0.01	0.005	0.001
Максимальна відносна похибка	0.870502	1.008424	0.976482	0.995424
Мінімальна відносна похибка	0.596048	0.906729	0.93716	0.612604
Розмах відносно похибки	0.274453	0.101695	0.039322	0.382821
Середнє значення відносно похибки	0.760548	0.918539	0.942407	0.972999
Медіана відносно похибки	0.757428	0.913296	0.940597	0.976228
Кількість ланок ламаної	16	33	46	101

Таблиця 2

Результати інтерполяції кривої на рис. 1б

Найменування показника	Значення допустимої точності інтерполяції - ε			
	0.05	0.01	0.005	0.001
Максимальна відносна похибка	1.417759	1.000971	1.002167	1.156894
Мінімальна відносна похибка	0.423859	0.539559	0.731753	0.986635
Розмах відносно похибки	0.9939	0.461412	0.270414	0.170259
Середнє значення відносно похибки	0.929208	0.949582	0.958497	0.98935
Медіана відносно похибки	0.939777	0.959748	0.961893	0.986778
Кількість ланок ламаної	31	68	96	212

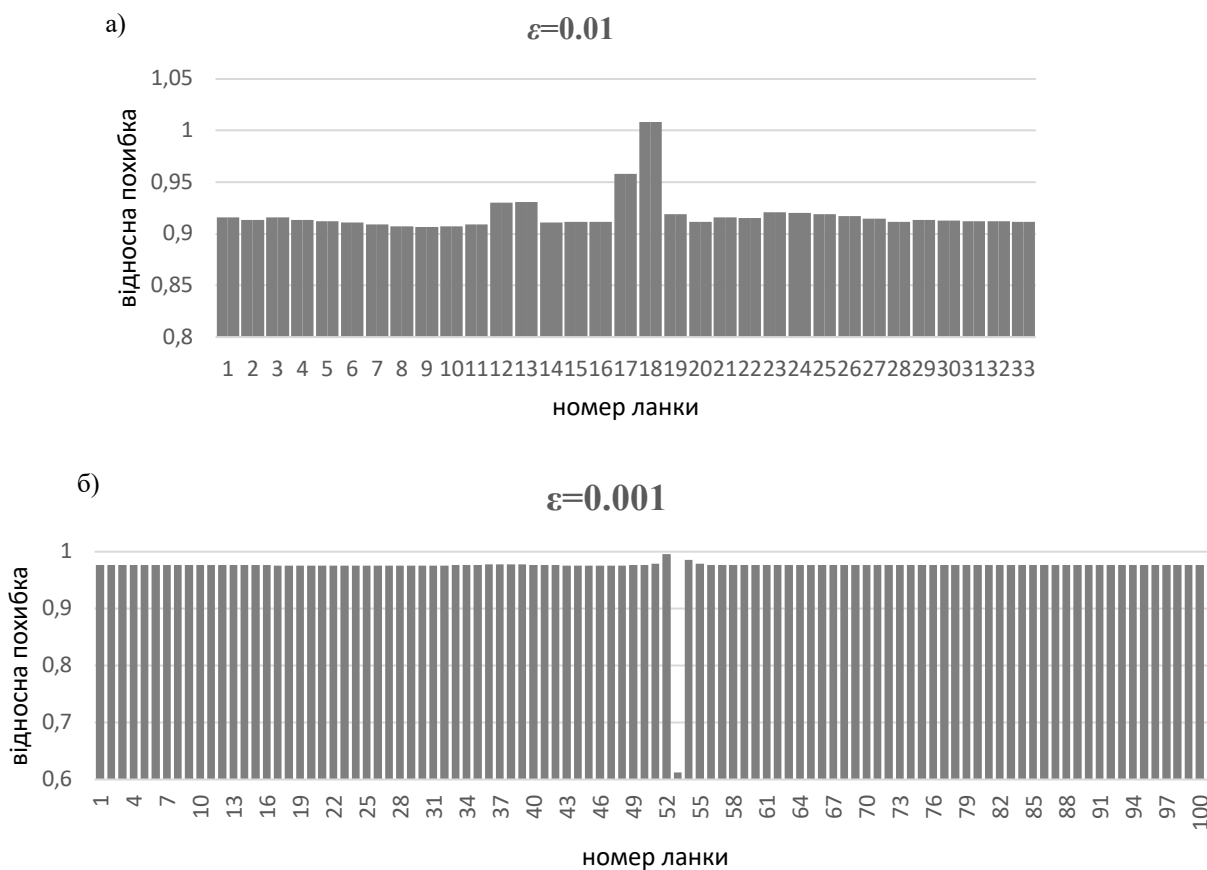


Рисунок 2 – Результати відтворення кривої Без’є (рис. 1а) при визначення вузлів інтерполяції за виразом (3) при допустимій похибці: а) $\epsilon = 0.01$; б) $\epsilon = 0.001$

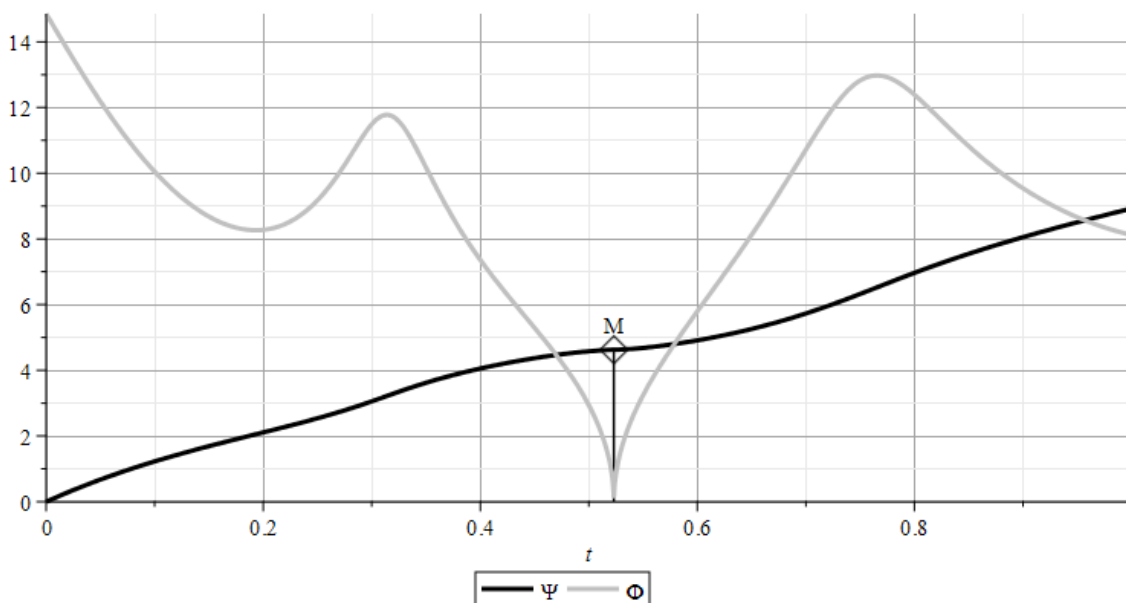


Рисунок 3 – Графіки підінтегральної та інтегральної функції для кривої на рис. 1а

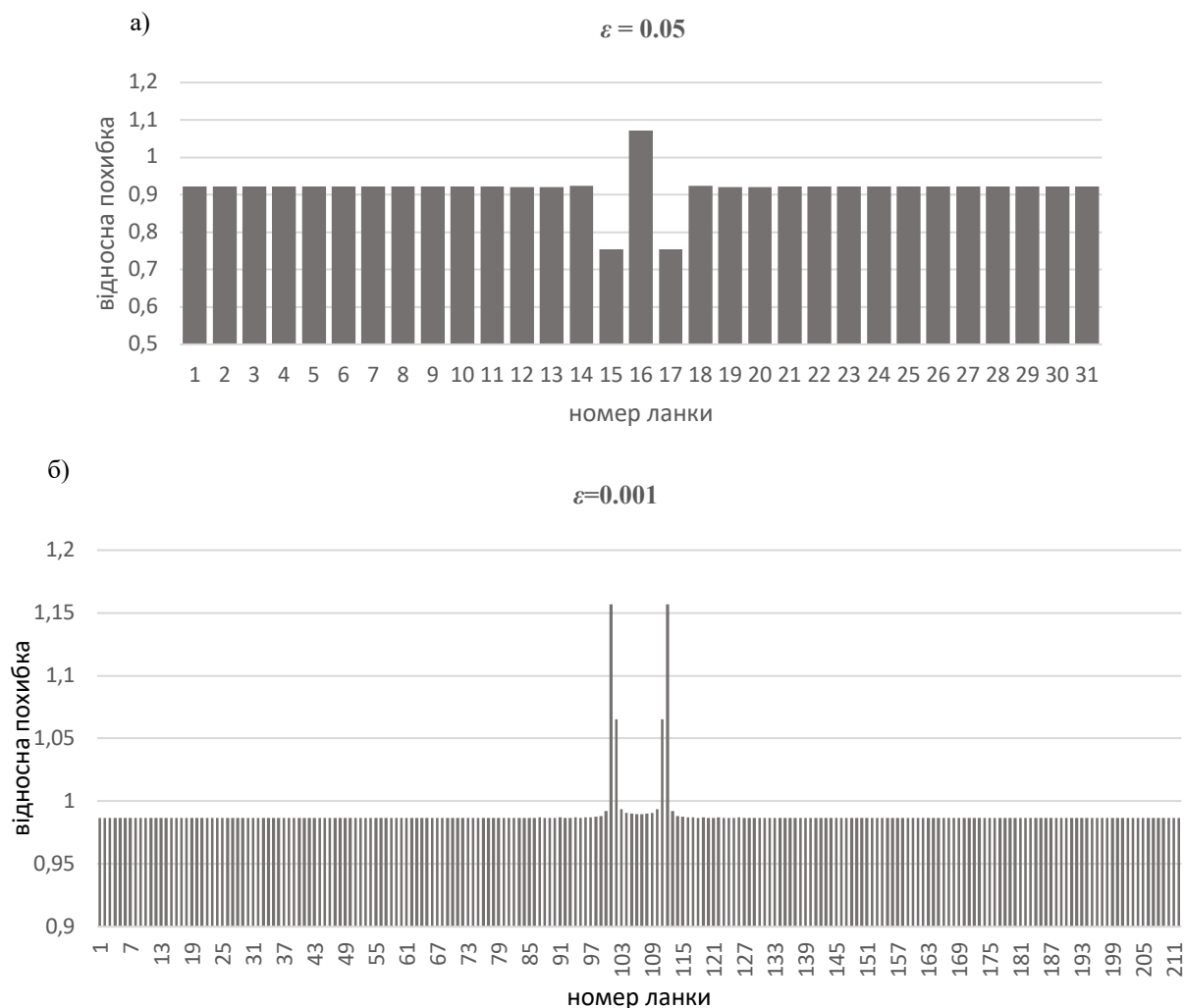


Рисунок 4 – Результати відтворення равліка Паскаля (рис. 1б) при визначення вузлів інтерполяції за виразом (3) при допустимій похибці: а) $\varepsilon = 0.05$; б) $\varepsilon = 0.001$

Згідно з цим, за показники рядів похибок, що підлягають дослідженню можна прийняти максимальне значення ряду, середнє значення ряду, середнє квадратичне відхилення та коефіцієнт варіації. Для вивчення характеру зміни зазначених показників, побудуємо графіки зміни цих величин в залежності від значень параметру α функції- регулятора вузлів. Побудову здійснимо для тих самих кривих рис. 1а та 1б. Щоб отримати значення кожного з показників згідно методики описаної у роботі [4] робилась попередня дискретизація значень по t функції – регулятора, обчислювались значення інтегральної функції Ψ з урахуванням доданку (4), далі отримувались вузлові значення параметру для асимптотично оптимального розподілу, координати вузлових точок ламаної інтерполяції i , нарешті, значення відстаней від кривої до кожної ланки ламаної, які брались за абсолютні значення похибок апроксимації. Зіставивши значення ряду абсолютних похибок до значення допустимої похибки ε були отримані послідовності відносних

похибок δ , за значеннями яких вже за відомими формулами отримувались характеристики послідовностей – максимальне значення ряду – δ_{\max} , середнє – $\bar{\delta}$, розмах значень відносних похибок для послідовності ланок ламаної – Δ , стандарт (середньо квадратичне відхилення) – σ та коефіцієнт варіації – c_v . Значення параметру α функції- регулятора приймались виходячи з меж, що були визначені в [2], зі збільшенням вправо до 1, тобто в інтервалі $[0;1]$. При цьому для обчислення значень рядів похибок брались 50 значень рівномірного розбиття цього інтервалу (побудовано 50 інтерполяційних ламаних заданої кривої).

На рис. 5 зображено графіки показників розподілів похибок при $\varepsilon = 0.001$ для кривої Без'є (рис. 1а.), а на рис. 6 аналогічні графіки для равліка Паскаля (рис. 1б).

Проаналізувавши побудовані графіки, можна відмітити наступне:

- для обох кривих присутні екстремуми (мінімуми) на графіках максимальної похибки;

- графіки значень середньої похибки рядів менш всього були схильні до змін (для першого випадку в межах зміни параметру графік монотонно спадає наближаючись до асимптоти, для другого випадку на графіки присутній слабкий мінімум, який за значенням параметру дає максимальну похибку, що перевищує допустиме значення);

- порівнявши графіки середньо квадратичного відхилення та коефіцієнту варіації можна відмітити, що вони демонструють однакові тенденції, що можна просто пояснити, адже коефіцієнт варіації залежить від стандартного відхилення та середнього для послідовності похибок, при чому остання величина досить слабо змінюється.

Для першої кривої ці графіки не виявляють екстремальних значень, спадаючи зі збільшенням α наближаючись до горизонтальної асимптоти. Для другої кривої графіки, що розглядаються, мають два мінімуми (локальний та глобальний), при цьому, якщо значення α для екстремумів порівняти зі значеннями екстремумів для графіків інших характеристик, то можна дослідити, що першому (меншому) мінімуму відповідають значення близькі до мінімуму для середньої похибки послідовності, а другому (глобальному) мінімуму – значення мінімуму для максимальної похибки;

- графіки розмаху значень похибок;
- ламаних для обох кривих загалом відображають аналогічні до зміни стандартного відхилення та коефіцієнту варіації тенденції залежності з більш чітко означеними у випадку другої кривої максимумами та мінімумами.

Таким чином, зважаючи на пріоритет забезпечення похибки апроксимації в допустимих межах для всіх ланок ламаної, а також враховуючи описані вище тенденції зміни показників розподілу з урахуванням припущення унімодальності для методів оптимізації [5, 6] можна обрати за цільову функцію максимальну серед усіх похибок ланок ламаної.

Тоді задачу мінімізації цільової функції можна записати у вигляді:

$$f(\alpha) = \max \{ \delta_i (i = 1..m) \} \rightarrow \min. \quad (5)$$

Оскільки вираз цільової функції не носить аналітичний характер та не може бути знайдена її похідна, до пошуку оптимального рішення можуть бути застосовані тільки методи нульового порядку [5, 6], стратегія яких базується на використанні інформації тільки про цільову функцію. Серед цих методів було обрано методи золотого перетину та більш швидкий метод Брента [7], який використовує комбінацію методу золотого перетину та метод квадратичної інтерполяції.

Золотим перетином називається розбиття інтервалу $[a, b]$ точкою на дві частини таким чином, щоб відношення довжини всього інтервалу до більшої частини дорівнювало відношенню більшої частини до меншої. В застосуванні до задачі одновимірного пошуку золотий перетин виконують дві точки:

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= a + (1 - \gamma)(b - a), \\ \alpha_2 &= a + \gamma(b - a), \end{aligned} \quad (6)$$

де $\gamma = \frac{\sqrt{5}-1}{2} \approx 0.618$. Точка α_1 виконує золотий перетин відрізка $[a, \alpha_2]$, а точка α_2 інтервалу $[\alpha_1, b]$. Тому на інтервалі, який залишився треба визначити тільки одну точку, яка виконує золотий перетин. Алгоритм методу золотого перетину складається із таких кроків:

- обчислити α_1 та α_2 за формулами (6);
- обчислити $f(\alpha_1), f(\alpha_2)$.
- якщо $f(\alpha_1) < f(\alpha_2)$, то покласти $b = \alpha_2$, $\alpha_2 = \alpha_1, f(\alpha_2) = f(\alpha_1)$, $\alpha_1 = a + (1 - \gamma)(b - a)$ і обчислити $f(\alpha_1)$, інакше покласти $a = \alpha_1$, $\alpha_1 = \alpha_2$, $f(\alpha_1) = f(\alpha_2)$, $\alpha_2 = a + \gamma(b - a)$ і обчислити $f(\alpha_2)$;
- якщо $|b - a| > \chi \left| \frac{b + a}{2} \right|$ (χ - похибка обчислення), то перейти до кроку 3, інакше $\alpha^* \approx \frac{b + a}{2}$ і завершити.

Результати обчислення значення параметру α за названим алгоритмом для кривих – рис. 1 для різної точності наближення наведено в таблиці 3. Порівнявши результати наведені в цій таблиці для $\varepsilon = 0.001$ з графіками максимальної похибки, пересвідчимось у відповідності результатів обчислень.

Таблиця 3

Результати пошуку оптимального значення параметру α

Назва кривої	Значення параметру α при похибці апроксимації - ε			
	$\varepsilon = 0.05$	$\varepsilon = 0.01$	$\varepsilon = 0.005$	$\varepsilon = 0.001$
Крива Без'є (рис. 1а)	0.99609375	0.4765625	0.61328125	0.71875
Равлик Паскаля (рис. 1б)	0.4296875	0.71875	0.734375	0.6171875

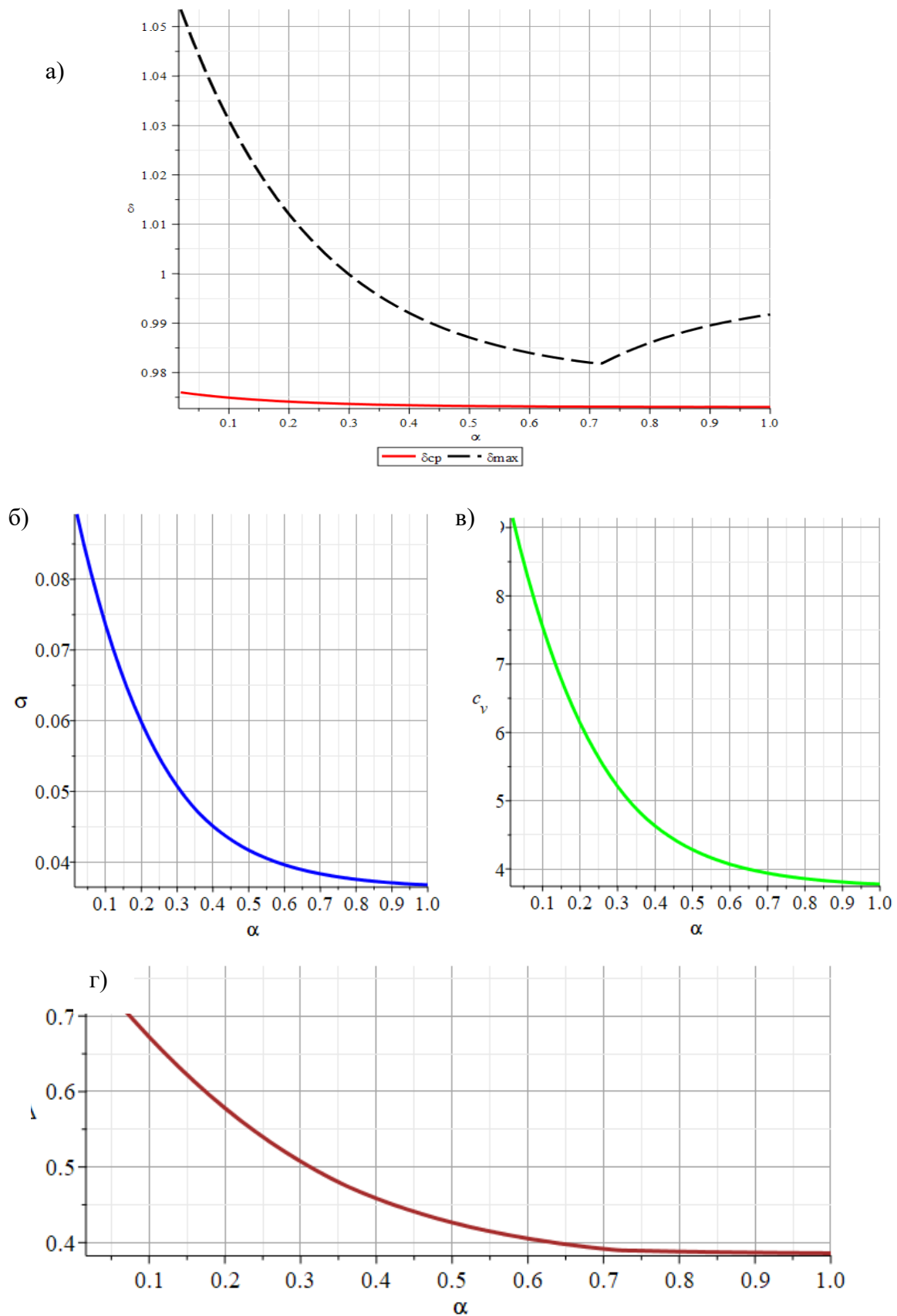


Рисунок 5 – Графіки статистичних характеристик рядів похибок в залежності від значень параметру α для кривої – рис. 1а: а) максимальна та середня похибка; б) середнє квадратичне відхилення; в) коефіцієнт варіації; г) розмах

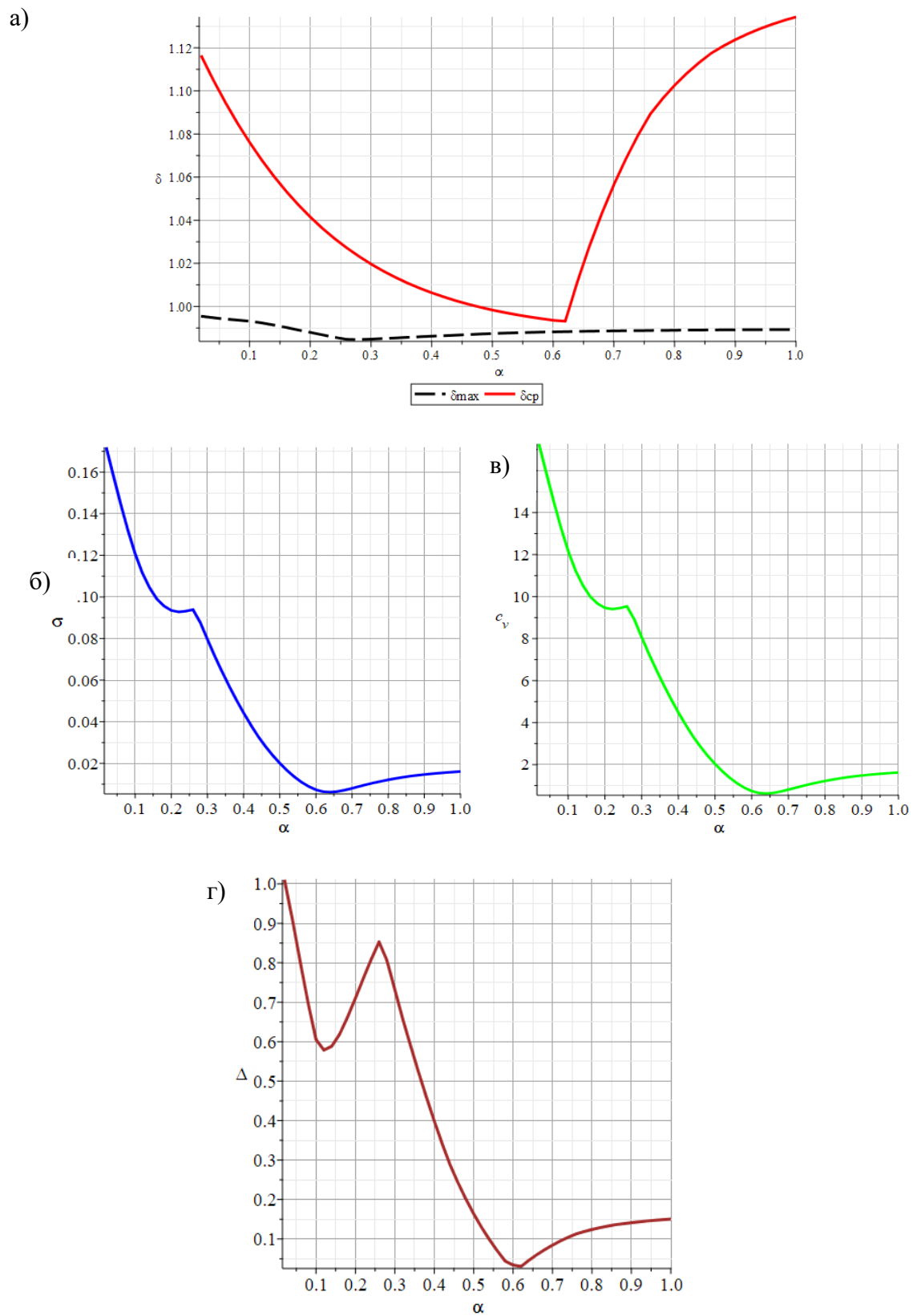


Рисунок 6 – Графіки статистичних характеристик рядів похибок в залежності від значень параметру α для кривої – рис. 1б: а) максимальна та середня похибка; б) середнє квадратичне відхилення; в) коефіцієнт варіації; г) розмах

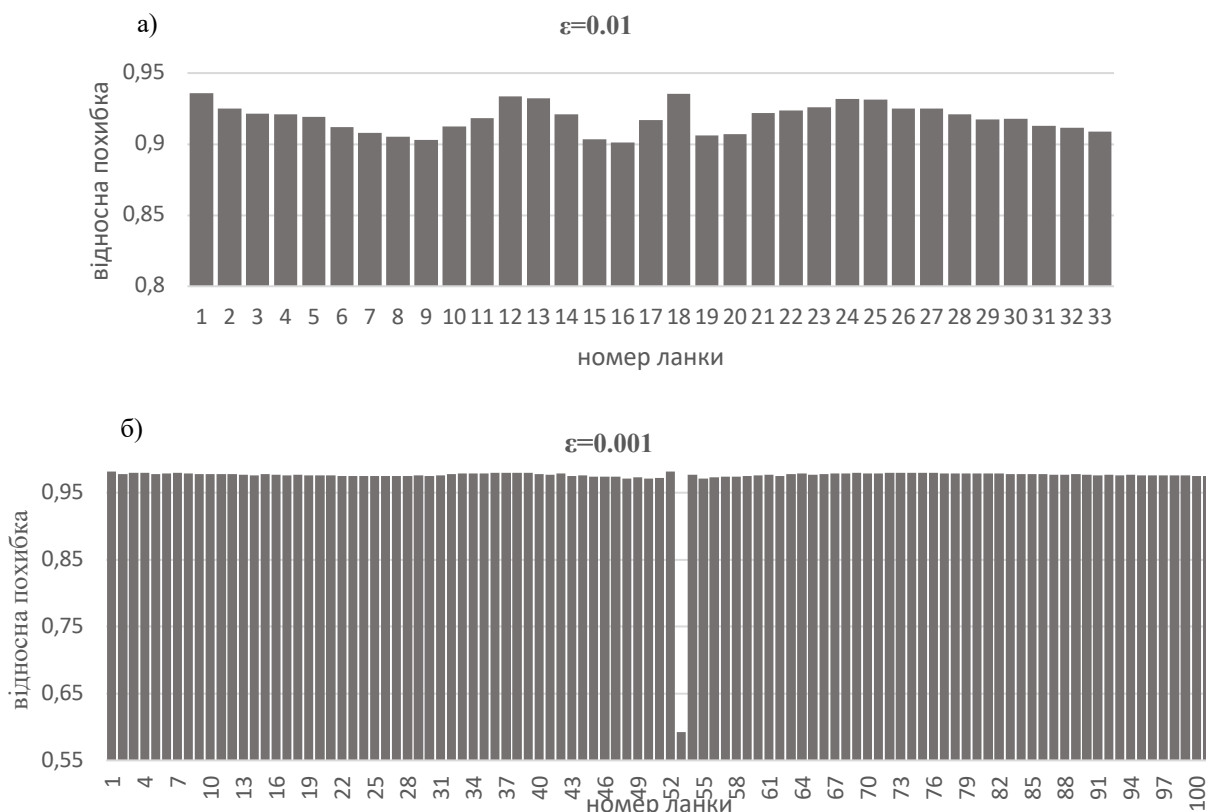


Рисунок 7 – Результати відтворення кривої Без’є (рис. 1а) при визначення вузлів інтерполяції за виразом (4) з оптимізацією параметру α при допустимій похибці: а) $\epsilon = 0.01$; б) $\epsilon = 0.001$

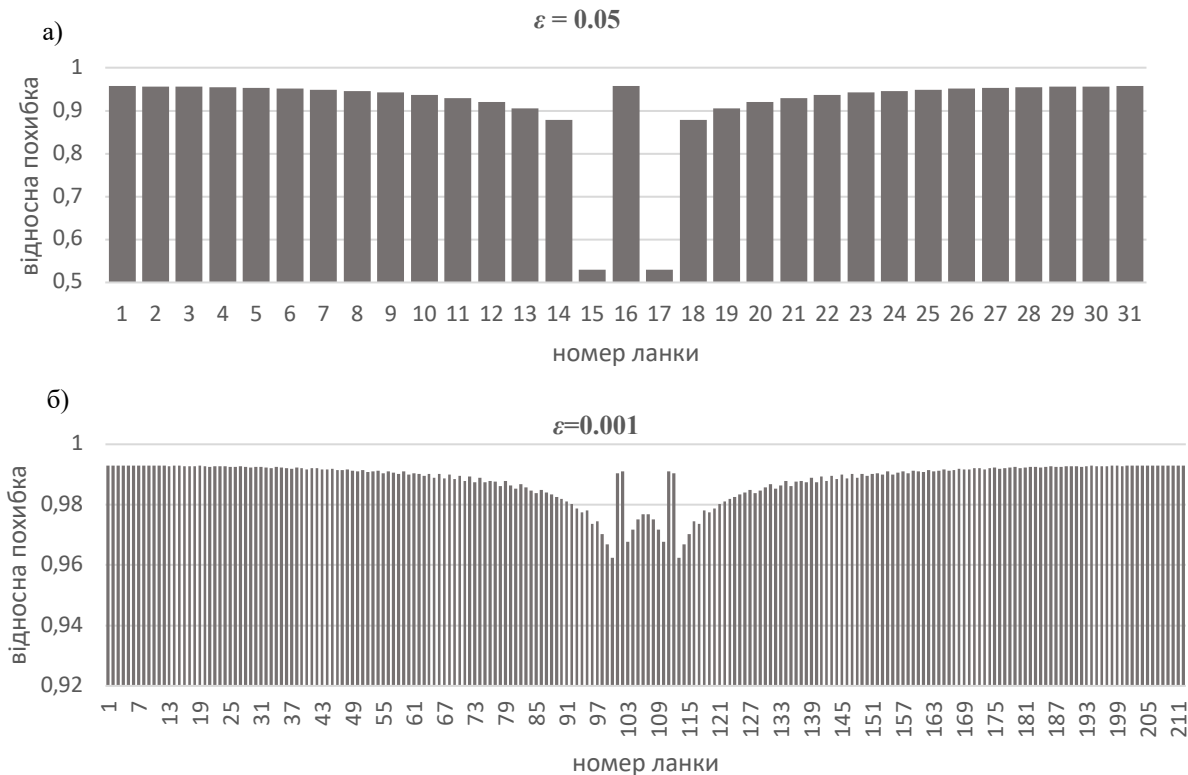


Рисунок 8 – Результати відтворення трикутника Паскаля (рис. 1б) при визначення вузлів інтерполяції за виразом (4) з оптимізацією параметру α при допустимій похибці: а) $\epsilon = 0.05$; б) $\epsilon = 0.001$

На рис. 7 та 8 у вигляді стовпчикових діаграм показані послідовності похибок ланок ламаних при отриманні їх за оптимізованими значеннями параметру α в рівнянні (4). Якщо порівняти ці діаграми з відповідними розподілами, що зображені на рис., можна побачити, що отримані в результаті оптимізації послідовності вже не містять значень, що перевищують допустиму похибку.

Обговорення результатів та висновки

Проведені дослідження з моделювання відтворення плоских кривих, що мають точки перегину, показали придатність застосування формули (4) з оптимізацією параметру α для регулювання розподілу вузлів лінійної

інтерполяції таких кривих за асимптотично – оптимальним алгоритмом.

При оптимізації параметру за цільову функцію мінімізації було обрано максимум серед похибок послідовності ланок ламаної. Це дозволило забезпечити рівень похибок нижче граничного значення.

З результатів моделювання слідує, що серед значень параметру α , які відповідали оптимальному розв'язку для різних умов, були значення, що виходили за вказані в роботі [2] межі. Отже, це питання потрібно досліджувати окремо.

Аналізуючи графіки розподілів похибок апроксимації кривих ламаними, можливо зауважити, що підхід до регулювання вузлів на основі рівняння (4) хоча й дозволяє знизити максимальну похибку нижче допустимої, все ж повністю не усуває аномалії занижених значень.

Надійшла до редакції 22.10.2020

Список літератури

1. Zhong W., Luo X., Chang W., Ding F., Cai Y. A real-time interpolator for parametric curves. *International Journal of Machine Tools and Manufacture*, 2018. Vol. 125. P. 133-145.
2. Лигун А. А., Шумейко А. А. Асимптотические методы восстановления кривых. Киев: Институт математики НАН Украины, 1997. 358 с.
3. Коротков В. С. Построение асимптотически оптимального алгоритма кусочно-линейной интерполяции. *Збірник наукових праць Дніпровського державного технічного університету (технічні науки)*. Кам'янське, 2016. Т. 1, № 28, С. 29-33.
4. Фролов О. В. Моделювання похибок апроксимації плоских кривих ліній ламаними побудованими за асимптотично оптимальним алгоритмом інтерполяції / Наукові праці ДонНТУ. Серія "Інформатика, кібернетика та обчислювальна техніка", №1(30), Покровськ, 2020. С. 58 - 67
5. Arora Rajesh K. *Optimization: algorithms and applications*. Hoboken: CRC Press, 2015. 454 p.
6. Пантелеев А. В., Летова Т. А. *Методы оптимизации. Практический курс: учеб. пособие*. М.: Логос, 2011. 424 с.
7. Brent R. P. *Algorithms for minimization without derivatives*. Englewood Cliffs. New Jersey: Prentice-Hall, 1973. 195 p.

References

1. Zhong, W., Luo, X., Chang, W., Ding, F., Cai, Y. (2018), "A real-time interpolator for parametric curves", *International Journal of Machine Tools and Manufacture*, pp. 133-145.
2. Ligon, A.A., Shumeiko, A.A. (1997), *The methods of curve reconstruction [Asimptoticheskie metody vosstanovleniya krivykh]*, Kiev: Institute of Mathematics, National Academy of Sciences of Ukraine, 358 p.
3. Korotkov, V.S. (2016), "Construction of an asymptotically optimal piecewise linear interpolation algorithm" ["Postroenie asimptoticheski optimal'nogo algoritma kusochno-linejnoj interpoljacii"], *Proceedings of Dniprovsky State Technical University (Technical Sciences)*, Kamianske, No. 28, pp. 29-33.
4. Frolov, O.V. (2020), "Approximation error of piecewise linear asymptotic optimal interpolation of planar parametric curves" ["Modeliuvannia pokhybok aproksymatsii ploskykh kryvykh linii lamanyu pobudovanyu za asymptotychno optymalnym alhorytmom interpoliatsii"], *Scientific papers of Donetsk National Technical University, Series: "Informatics, Cybernetics and Computer Science"*, Pokrovsk, No. 1(30), pp. 58 - 67.
5. Arora, Rajesh K. (2015), *Optimization: algorithms and applications*, Hoboken: CRC Press, 454 p.
6. Panteleev, A.V., Letova, T.A. (2011), *Method of optimization [Metody` optimizaczi]*, Textbook manual, Moscow: Logos, 424 p.
7. Brent, R.P. (1973), *Algorithms for minimization without derivatives*, Englewood Cliffs, New Jersey: Prentice-Hall, 195 p.

О. В. ФРОЛОВ

Харьковский национальный экономический университет имени Семена Кузнецца, г. Покровск, Украина
frolgx@gmail.com

МОДЕЛИРОВАНИЕ ПОГРЕШНОСТЕЙ АППРОКСИМАЦИИ ПЛОСКИХ КРИВЫХ ЛОМАНЫМИ ПОСТРОЕННЫМИ АЛГОРИТМОМ АСИМПТОТИЧЕСКИ ОПТИМАЛЬНОЙ ИНТЕРПОЛЯЦИИ

В работе рассматривается моделирование интерполяции плоских параметрических кривых с имеющимися точками перегиба ломаными линиями с использованием асимптотически-оптимального алгоритма. Цель работы – исследование возможности оптимизации параметра функции-регулятора узлов при кусочно-линейной интерполяции плоских параметрических кривых с имеющимися точками перегиба, построенной при помощи асимптотически оптимального алгоритма. Одним из алгоритмов, который возможно применить для задачи аппроксимации кривой является асимптотически-оптимальная интерполяция, которые удовлетворяют требованию минимизации количества звеньев. Составной частью этого алгоритма является получение распределения узлов с помощью интегральной функции-регулятора. В случае интерполяции плоской кривой, которая не содержит точек перегиба, функция-регулятор зависит от выражения, определяющего ее кривизну. Чтобы получить распределение узлов кривой при наличии у нее точек перегиба в функцию вносят слагаемое, зависящее от свободного параметра. Для того, чтобы выявить нужное значение этого параметра в работе проведен анализ возможных критериев, которые обнаруживают среди возможных вариантов конкретное распределение узлов интерполяции. Было исследовано зависимости статистических характеристик последовательностей ошибок аппроксимации для звеньев ломаной от изменения параметра регулятора узлов. Проанализировав указанные зависимости, построенные для конкретных кривых, было определено, что критериям оптимальности более соответствует величина максимальной среди погрешностей последовательности звеньев ломаной. Минимизация этой характеристики по методу золотого сечения дала приемлемые результаты аппроксимации для примеров кривых с одной и двумя точками перегиба.

Ключевые слова: *интерполяция, ломаная, эквидистанта, интегрирования, плоская параметрическая кривая, погрешность аппроксимации*

O. FROLOV

Simon Kuznets Kharkiv National University of Economics, Kharkiv, Ukraine
frolgx@gmail.com

OPTIMIZATION OF THE PARAMETER OF THE FUNCTION - REGULATOR OF NODES AT PIECEWISE LINEAR INTERPOLATION OF FLAT CURVES WITH EXISTING INFLECTION POINTS

Abstract – modeling of interpolation of flat parametric curves with available inflection points by an asymptotically optimal algorithm is considered. To obtain the approximation of the curve in diapason of the allowable errors, the function-regulator is added to the expression containing the free parameter. Optimization of the value of this parameter allows to obtain the desired distribution of approximation errors.

The purpose of the article is to study the possibility of optimizing the parameter of the function - regulator of nodes in piecewise linear interpolation of flat parametric curves with existing inflection points by an asymptotically optimal algorithm.

The polygonal approximation of curves draws attention to apply it to the problems of reproduction of objects of complex shape. One of the algorithms that can be applied is asymptotically optimal interpolation, which satisfies the requirements of minimizing the number of nodes. An integral part of this algorithm is to obtain the distribution of nodes using an integrated function - regulator. In the case of interpolation of a flat curve that does not contain inflection points, the function - regulator depends on the expression that defines its curvature. To obtain the distribution of the nodes of the curve in the presence of inflection points in the function make a term that depends on the free parameter. To identify the desired value of this parameter in the work, an analysis of possible criteria that identify among the possible options a specific distribution of interpolation nodes. The dependences of the statistical characteristics of the sequences of approximation errors for the polygon's edges on the change of the parameter of the node regulator were investigated. These characteristics included: the maximum value among the sequence of errors of the nodes, the range of values of the sequence, its mean value, standard deviation and coefficient of variation. After analyzing these dependences constructed for specific curves, it was determined that the optimality criteria are better met by the value of the maximum among the errors of the sequence of edges. Minimization of this characteristic by the golden ratio method gave acceptable approximation results for examples of curves with one and two inflection points.

Keywords: *interpolation, polyline, optimization, flat parametric curve, error, inflection point, lost function*