МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ

ХАРКІВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ ЕКОНОМІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ
ІМЕНІ СЕМЕНА КУЗНЕЦЯ

ВИЩА ТА ПРИКЛАДНА МАТЕМАТИКА

Методичні рекомендації
до практичних завдань із розділу
"Теорія ймовірностей та математична статистика.
Математичне програмування.
Дослідження операцій"

для студентів спеціальності 242 "Туризм"
першого (бакалаврського) рівня

Харків
ХНЕУ ім. С. Кузнеця
2020

УДК 519.2(07.034)
В95

Укладачі: Е. Ю. Железнякова
Т. В. Сілічова

Затверджено на засіданні кафедри вищої математики та економіко-математичних методів.
Протокол № 3 від 01.10.2019 р.

Самостійне електронне текстове мережеве видання

В95 **Вища** та прикладна математика [Електронний ресурс] : методичні рекомендації до практичних завдань із розділу "Теорія ймовірностей та математична статистика. Математичне програмування. Дослідження операцій" для студентів спеціальності 242 "Туризм" першого (бакалаврського) рівня / уклад. Е. Ю. Железнякова, Т. В. Сілічова. – Харків : ХНЕУ ім. С. Кузнеця, 2020. – 99 с.

Подано перелік практичних завдань, відповідно до тем робочої програми навчальної дисципліни, і методичні рекомендації щодо їхнього виконання, що будуть сприяти набуттю майбутніми фахівцями професійних компетентностей. За кожною темою наведено приклади розв'язання типових задач, завдання для самостійної роботи.

Рекомендовано для студентів спеціальності 242 "Туризм" першого (бакалаврського) рівня.

УДК 519.2(07.034)

Вступ

Фундаментальну основу в математичній підготовці студентів першого (бакалаврського) рівня галузі знань 24 "Сфера обслуговування" спеціальності 242 "Туризм" становить навчальна дисципліна "Вища та прикладна математика", яка є базовою навчальною дисципліною структурно-логічної схеми, передбаченою освітньо-професійною програмою.

Основними завданнями вивчення цієї навчальної дисципліни є формування у студента необхідних компетентностей щодо застосування елементів теорії ймовірностей та математичної статистики й математичного програмування у процесі дослідження економічних процесів і явищ, де математика відіграє роль інструменту. У процесі опанування навчальної дисципліни "Вища та прикладна математика" студент набуває предметно-галузевих математичних компетентностей, а саме: аналітично-дослідницьких, процедурних, логічних, технологічних та методологічних, необхідних сучасному спеціалісту в будь-яких сферах його діяльності, тобто:

здатність застосовувати здобуті теоретичні знання до вирішення ситуаційних вправ та розв'язання реальних практичних задач;

здатність самостійно визначати алгоритм математичних обчислень;

здатність ідентифікувати незалежні та залежні фактори, визначати числові характеристики розподілу випадкової величини;

здатність здійснювати аналіз результатів, із метою уточнення типу і форми зв'язку між факторами;

уміння аналізувати визначені результати та з їхнім урахуванням робити обґрунтовані висновки на достатньо високому професійному рівні;

здатність автономно і відповідально виконувати завдання.

Методичні рекомендації відповідають робочій програмі навчальної дисципліни "Вища та прикладна математика", наданий матеріал містить теми практичних занять змістових модулей "Теорія ймовірностей та математична статистика" і "Математичне програмування. Дослідження операцій". Кожна тема має достатню кількість прикладів, що супроводжують докладним поясненням кожного кроку розв'язання задачі, основними теоретичними відомостями, необхідними для розв'язання задач. Для закріплення здобутих знань кожна тема (практичне заняття) має задачі для самостійного розв'язання з відповідями.

Практичне заняття 1
Основні поняття теорії ймовірностей. Класичне означення ймовірності та елементи комбінаторного аналізу

Мета практичного заняття: навчитися застосовувати основні означення теорії ймовірностей та сформувати систему теоретичних знань, практичних умінь і навичок у визначенні ймовірностей випадкових подій за допомогою основних теорем та інтерпретації здобутих результатів.

Елементи комбінаторики

Комбінаторика – це розділ математики, який вивчає питання кількості комбінацій, які можна побудувати за певним принципом, використовуючи задану кількість об'єктів.

Розгляньмо множину, що містить n різних об'єктів.

Перестановками з n елементів називають комбінації, що складаються з тих самих n різних елементів і відрізняються тільки порядком їхнього розташування. Кількість усіх можливих перестановок дорівнює:

$$P_n = n!,$$

де $n!$ – факторіал числа n, його визначають як добуток усіх натуральних чисел, починаючи з 1 і закінчуючи n, тобто $n! = 1\cdot 2\cdot 3\cdot \ldots \cdot n$.

Розміщеннями називають комбінації, складені з n різних елементів по m елементів, що відрізняються або складом елементів, або їхнім порядком. Кількість усіх можливих розміщень дорівнює:

$$A_n^m = n(n-1)\cdot \ldots \cdot (n-m+1) \text{ або } A_n^m = \frac{n!}{(n-m)!}.$$

Сполученнями називають комбінації, складені з n різних елементів по m елементів, що відрізняються хоча б одним елементом. Кількість сполучень обчислюють за такою формулою:

$$C_n^m = \frac{n(n-1)\cdot \ldots \cdot (n-m+1)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot \ldots \cdot m} \text{ або } C_n^m = \frac{n!}{m!(n-m)!}.$$

Класичне означення ймовірності події

Вихідним поняттям теорії ймовірності є **випробування** (експеримент). Під випробуванням розуміють спосіб дослідження процесів та явищ за чітко визначених умов, які дозволяють відтворювати явище достатню кількість разів.

Випадкова подія – це наслідок, який може відбутися чи не відбутися як результат проведення випробування. Для позначення випадкових подій використовують великі літери латинського алфавіту: A, B, C та ін.

Імовірність події $P(A)$ є кількісною мірою об’єктивної можливості реалізації цієї події.

Сукупність усіх рівноможливих результатів випробування визначають як **простір елементарних подій** $\Omega = \left\{\omega_1, \omega_2, ..., \omega_n\right\}$, де ω_i – це елементарний наслідок випробування, тобто **елементарна подія**, що належить простору Ω. Водночас елементарні події попарно несумісні, тобто $\omega_i \cap \omega_j = \varnothing$, якщо $i \neq j$. Випадкову подію можна подати як підмножину простору елементарних подій, тобто $A \subseteq \Omega$. Елементарні події, що належать до цієї підмножини, називають **сприятливими** щодо появи події S. Якщо підмножина елементарних подій, що утворює подію A, є пустою, то таку подію A називають **неможливою** і позначають $\varnothing$. Якщо подія A містить усі елементарні події цього простору елементарних подій, тобто за заданих умов випробувань вона не може не відбутися, то така подія є **вірогідною** і її позначають Ω.

Подією $\overline{A}$, що є **протилежною** до події A, є подія, для якої сприятливими є всі ті елементарні події, що доповнюють випадкову подію A до простору елементарних подій.

Події, що не мають спільних сприятливих елементарних подій, називають **несумісними**. Випадкові попарно несумісні події $A_1; A_2; \ldots A_m$, визначені на одному й тому самому просторі елементарних подій $\Omega = \{\omega_1; \omega_2; ...; \omega_n\}$, утворюють у сукупності **повну групу несумісних випадкових подій**, якщо в разі реалізації будь-якої елементарної події $\omega_i \subset \Omega$ $(i = \overline{1,n})$ відбувається одна з випадкових подій A_j $(j = \overline{1,m})$.

Нехай n – загальна кількість усіх рівноможливих, несумісних і тих, що утворюють повну групу наслідків випробувань, а m – кількість наслідків, що сприяють появі події A. Тоді ймовірність $P(A)$ дорівнює відношенню m *до* n, тобто $P(A)=\dfrac{m}{n}$.

Згідно з означенням $0 \leq P(A) \leq 1$.

Теореми додавання ймовірностей

Імовірність суми несумісних випадкових подій A та B дорівнює сумі їхніх безумовних імовірностей:

$$P(A+B)=P(A)+P(B).$$

Приклад 1.1. У конкурсі беруть участь 5 студентів. Порядок їхнього виступу визначають жеребкуванням. Скільки є варіантів порядку їхнього виступу?

Розв'язання. Кожний варіант жеребкування відрізняється від інших тільки порядком виступу конкурсантів, а тому він є перестановкою з 5 елементів. Кількість варіантів дорівнює $P_5 = 5! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 = 120$.

Приклад 1.2. Розклад занять одного дня студентів складається із 3 пар. Визначте кількість варіантів розкладу за вибору з 10 навчальних дисциплін.

Розв'язання. Кожен варіант розкладу є набором 3 навчальних дисциплін із 10, що відрізняється від інших варіантів або складом навчальних дисциплін, або порядком їхнього розташування, тобто він є розміщенням із 10 елементів по 3 елементи. Кількість варіантів розкладу занять дорівнює $A_{10}^{3} = 10 \cdot 9 \cdot 8 = 720$.

Приклад 1.3. У шаховому турнірі беруть участь 20 юнаків. Скільки партій вони зіграють, якщо між будь-якими двома учасниками має бути зіграно одну партію?

Розв'язання. Кожна партія відрізняється тільки складом пар учасників, тобто вона є сполученням із 20 елементів по 2 елементи. Їхня кількість дорівнює $C_{20}^{2} = \dfrac{20!}{2!18!} = \dfrac{20 \cdot 19}{1 \cdot 2} = 190$.

Приклад 1.4. Із 50 стандартних і 5 нестандартних деталей для контролю навмання взято 10, що виявилися стандартними. Знайдіть імовірність того, що наступна навмання взята деталь буде стандартною.

Розв'язання. Стандартних деталей залишилося 50 – 10 = 40, а нестандартних 5. Усього залишилося 40 + 5 = 45 деталей. Шукана ймовірність дорівнює $P = \dfrac{40}{45} = \dfrac{8}{9}$.

Приклад 1.5. Серед 17 студентів, із яких 8 дівчат, розігрують 7 квитків. Яка ймовірність, що серед власників квитків буде 4 дівчини?

Розв'язання. Кількість можливих способів розподілити 7 квитків серед 17 студентів дорівнює кількості сполучень із 17 елементів по 7, тобто C_{17}^{7}. Кількість відбору чотирьох дівчат із восьми дорівнює C_8^4. Кожну таку четвірку можна сполучити з кожною трійкою з 9 юнаків. Кількість таких трійок дорівнює C_9^3. Отже, кількість результатів такого розподілу 7 квитків, коли 4 з них виявляться в дівчат, а 3 – у юнаків, дорівнює $C_8^4 \cdot C_9^3$. Тоді шукана ймовірність дорівнює $P = \dfrac{C_8^4 \cdot C_9^3}{C_{17}^{7}} = \dfrac{735}{2431} \approx 0{,}302.$

Приклад 1.6. Набираючи номер телефона, абонент забув останні три цифри та, пам'ятаючи лише, що ці цифри різні, набрав їх навмання. Знайдіть імовірність того, що набрані цифри правильні.

Розв'язання. Нехай подія A – набрані три потрібні цифри. Усього можна набрати стільки різних цифр, скільки може бути складено розміщень із десяти цифр по три, тобто $A_{10}^{3} = 10 \cdot 9 \cdot 8 = 720$. Це загальна кількість елементарних подій. Сприятливий події A тільки один результат – три правильні цифри. Тому шукана ймовірність дорівнює $P = \dfrac{1}{720}$.

Приклад 1.7. Імовірність складання іспиту студентом на "5" дорівнює 0,3; на "4" – 0,45; на "2" – 0,1; що він не з'явиться на іспит – 0,05. Яка ймовірність того, що студент отримає позитивну оцінку?

Розв'язання. Очевидно, щоб отримати позитивну оцінку, студент має скласти іспит на "5", "4" або на "3". Імовірність отримати "3" дорівнює

$P = 1-(0,3+0,45+0,1+0,05) = 0,1$. За теоремою додавання ймовірностей імовірність отримання позитивної оцінки на іспиті дорівнює $P = 0,3+0,45+0,1 = 0,85$.

Завдання для самостійної роботи

1.1. Обчисліть:

а) $15!\cdot\dfrac{1}{30\cdot P_{12}}$; б) $\dfrac{P_7+P_6}{P_5}$; в) $\dfrac{A_5^4+A_5^3}{A_5^2}$; г) $\dfrac{A_6^2\cdot P_8}{P_{10}}+\dfrac{A_5^2}{A_4^2}$; д) $\dfrac{C_{100}^{97}\cdot P_5}{66\cdot A_{50}^2}$.

1.2. У конкурсі беруть участь 10 осіб. Скільки є варіантів списку призерів, якщо кожне із 3 призових місць може посісти тільки одна людина?

1.3. Для підбиття підсумків конкурсу необхідно із 30 присутніх обрати незалежне журі у складі голови, секретаря та спостерігача. Скільки є способів такого вибору?

1.4. Учні вивчають 9 різних предметів. Розклад уроків має бути складено так, щоб на день було 5 уроків та предмети не повторювали. Скільки є способів скласти розклад на один день?

1.5. Скільки є способів розмістити 10 осіб за одним столом?

1.6. У шаховому турнірі беруть участь 12 осіб. Кожен з учасників має зіграти один з одним по 2 партії. Скільки партій мають зіграти учасники турніру?

1.7. Із цифр від 1 до 9 включно навмання вибирають одну. Знайдіть імовірність того, що вибране число буде: 1) парним; 2) непарним; 3) простим; 4) більшим за 6.

1.8. У шухляді в 6 разів більше червоних куль, ніж чорних. Навмання виймають 1 кулю. Яка ймовірність того, що вона буде: а) червоною? б) чорною? в) білою?

1.9. Кинуто дві гральні кістки. Знайдіть імовірності таких подій:

а) сума чисел на гранях, що випали, дорівнює 7;

б) сума чисел дорівнює 8, а різниця – 4;

в) сума чисел дорівнює 5, а добуток – 4;

г) сума чисел більша за 7;

д) сума чисел більша за 3 і не більша за 8.

1.10. Монету кинуто два рази. Яка ймовірність того, що обидва рази випаде "герб"?

1.11. У цеху працюють 8 чоловіків і 4 жінки. Навмання відібрано 9 осіб. Яка ймовірність того, що серед них виявляться 4 жінки?

1.12. У шухляді 15 деталей, серед яких 10 пофарбованих. Складальник навмання виймає 3 деталі. Яка ймовірність того, що вони виявляться пофарбованими?

1.13. Набираючи номер телефона, абонент забув останні дві цифри та, пам'ятаючи лише, що ці цифри різні, набрав їх навмання. Знайдіть імовірність того, що набрані цифри правильні.

1.14. В урні 12 куль: 8 білих, 4 чорні. Вийняли 2 кулі. Яка ймовірність того, що вони обидві білі?

1.15. В урні 10 білих, 15 червоних, 20 синіх і 25 чорних куль. Вийняли одну кулю. Яка ймовірність, що вийнята куля мала колір: а) білий або синій; б) синій або червоний; в) білий, чорний або синій?

Практичне заняття 2
Формули повної ймовірності та Байєса

Мета практичного заняття: формування системи теоретичних знань, практичних умінь і навичок щодо основних теорем теорії ймовірностей та умов їхнього використання для обчислення ймовірності випадкових подій.

Розгляньмо основні теореми теорії ймовірностей.

Теореми множення ймовірностей

Імовірність одночасної появи двох подій (імовірність добутку подій) дорівнює добутку ймовірності появи однієї з подій на умовну ймовірність іншої події у припущенні, що перша подія вже відбулася:

$$P(AB) = P(A) \cdot P(B \mid A) = P(B) \cdot P(A \mid B),$$

де $P(A)$ – імовірність події A (безумовна ймовірність події A);

$P(B \mid A)$ – імовірність появи події B за умови, що подія A вже відбулася (умовна ймовірність події B);

$P(A \mid B)$ – імовірність появи події A за умови, що подія B вже відбулася (умовна ймовірність події A).

Якщо ймовірність появи події B не залежить від того, відбулася чи ні подія A, то такі події є **взаємно незалежними**, і для кожної випадкової події ймовірність її появи за умови, що перша з подій уже відбулася, дорівнює безумовній імовірності: $P(A|B)=P(A)$ та $P(B|A)=P(B)$ і теорема множення ймовірностей набирає такої форми:

$$P(AB)=P(A)\cdot P(B).$$

Наслідком теореми множення ймовірностей є теорема, що дозволяє визначити ймовірність появи хоча б однієї з випадкових подій.

Теорема. Імовірність появи хоча б однієї з випадкових подій $A_1, A_2, \dots, A_n$, які є незалежними в сукупності, дорівнює різниці між одиницею та добутком імовірностей протилежних подій $\overline{A}_1, \overline{A}_2, \dots, \overline{A}_n$.

Якщо $P(A_i)=p_i$ $(i=\overline{1,n})$, то, відповідно, імовірність появи протилежної події позначають $P\left(\overline{A}_i\right)=1-p_i=q_i$. Згідно із цими позначеннями, теорема про ймовірність появи хоча б однієї з випадкових подій набирає такої форми:

$$P(A)=1-q_1\cdot q_2\cdot\ldots\cdot q_n.$$

Окремим випадком теореми про визначення ймовірності появи хоча б однієї події є формула для обчислення ймовірності появи хоча б однієї події в разі, якщо для всіх подій, що розглядають, імовірність їхньої появи є однаковою.

Нехай для кожної з випадкових подій $A_1, A_2, \dots, A_n$ імовірність появи становить $P\left(A_i\right)=p$. Тоді для протилежної події $P\left(\overline{A}\right)=1-p=q$ і $P(A)=1-q^n$.

Формула повної ймовірності

Нехай подія A може настати лише за умови появи однієї з несумісних випадкових подій (гіпотез) $B_1, B_2, \dots, B_n$, що утворюють повну групу подій, і ймовірність кожної з подій цієї групи $P\left(B_i\right)$ відома, а також відомі умовні ймовірності події A в разі, якщо реалізують певну гіпотезу, тобто $P\left(A|B_i\right)$, де $i=\overline{1,n}$. Тоді ймовірність події A визначають за такою формулою:

$$P(A)=P\left(B_1\right)P\left(A|B_1\right)+P\left(B_2\right)P\left(A|B_2\right)+\ldots+P\left(B_n\right)P\left(A|B_n\right).$$

Формула Байєса

Нехай подія A настає лише за умови появи однієї з несумісних випадкових подій (гіпотез) $B_1, B_2, \ldots, B_n$, що утворюють повну групу випадкових подій. Якщо припустити, що подія A вже відбулася, і необхідно визначити ймовірність того, що подія A відбулася саме завдяки реалізації гіпотези B_i, тоді:

$$P\left(B_i \middle| A\right) = \frac{P\left(B_i\right) \cdot P\left(A \middle| B_i\right)}{\sum\limits_{i=1}^{n} P\left(B_i\right) \cdot P\left(A \middle| B_i\right)}, \ i = \overline{1, n}.$$

Приклад 2.1. Імовірність улучення в мішень за одного пострілу першим стрільцем дорівнює 0,8, а другим – 0,9. Знайдіть імовірність того, що:

а) обидва стрільці влучать у мішень;

б) тільки перший стрілець улучить у мішень;

в) тільки другий стрілець улучить у мішень;

г) один стрілець улучить у мішень;

д) жоден стрілець не влучить у мішень;

е) хоча б один стрілець улучить у мішень.

Розв'язання. Нехай подія A – це ціль, уражена першим стрільцем, а подія B – ціль, уражена другим стрільцем. За умовою $P\left(A\right) = 0{,}8$, $P\left(B\right) = 0{,}9$, тоді ймовірності протилежних подій дорівнюють $P\left(\bar{A}\right) = 0{,}2$; $P\left(\bar{B}\right) = 0{,}1$.

а) $P\left(A \text{ та } B\right) = P\left(AB\right) = P\left(A\right) \cdot P\left(B\right) = 0{,}8 \cdot 0{,}9 = 0{,}72$;

б) $P\left(A \text{ та } \bar{B}\right) = P\left(A\bar{B}\right) = P\left(A\right) \cdot P\left(\bar{B}\right) = 0{,}8 \cdot 0{,}1 = 0{,}08$;

в) $P\left(\bar{A} \text{ та } B\right) = P\left(\bar{A}B\right) = P\left(\bar{A}\right) \cdot P\left(B\right) = 0{,}2 \cdot 0{,}9 = 0{,}18$;

г) $P\left(\bar{A} \cdot B \text{ або } A \cdot \bar{B}\ \right) = P\left(\bar{A} \cdot B\right) + P\left(A \cdot \bar{B}\right) = 0{,}18 \cdot 0{,}08 = 0{,}26$;

д) $P\left(\bar{A} \text{ та } \bar{B}\right) = P\left(\bar{A} \cdot \bar{B}\right) = P\left(\bar{A}\right) \cdot P\left(\bar{B}\right) = 0{,}2 \cdot 0{,}1 = 0{,}02$;

$P\left(\text{хоча б один}\right) = 1 - P\left(\bar{A} \cdot \bar{B}\right) = 1 - 0{,}02 = 0{,}98$.

Приклад 2.2. Для деякої місцевості середня кількість ясних днів у липні дорівнює 25. Яка ймовірність того, що перші два дні липня будуть ясними?

Розв'язання. Імовірність того, що першого липня буде ясний день (подія A), дорівнює $P(A) = {}^{25}\!/_{31}$. Імовірність того, що другого липня буде ясний день (подія B) за умови, що першого липня був ясний день, тобто умовна ймовірність події B дорівнює $P(B|A) = \dfrac{24}{30} = \dfrac{4}{5}$. Шукана ймовірність за теоремою множення ймовірностей залежних подій дорівнює $P(AB) = P(A) \cdot P(B|A) = \dfrac{25}{31} \cdot \dfrac{4}{5} = \dfrac{20}{31}$.

Приклад 2.3. Імовірність того, що подія з'явиться хоча б один раз у трьох незалежних випробуваннях, дорівнює 0,936. Знайдіть імовірність появи події в одному випробуванні.

Розв'язання. Імовірність появи події хоча б один раз у трьох незалежних випробуваннях дорівнює $P(A) = 1 - q^3$, де $q = 1 - p$. За умовою $P(A) = 0{,}936$. Тоді $0{,}936 = 1 - q^3$, звідки $q^3 = 0{,}064$, а $q = 0{,}4$ і шукана ймовірність $p = 1 - 0{,}4 = 0{,}6$.

Приклад 2.4. Імовірність того, що деталь виявиться нестандартною, дорівнює 0,1. Визначте, яку кількість деталей необхідно буде взяти, щоб з імовірністю 0,998 можна було стверджувати, що хоча б одна з них буде стандартною.

Розв'язання. Нехай n – кількість деталей. Тоді ймовірність того, що всі деталі нестандартні, дорівнює $(0{,}1)^n$. Імовірність наявності хоча б однієї стандартної деталі дорівнює $1 - (0{,}1)^n$ і дорівнює за умовою 0,998, звідки $1 - (0{,}1)^n = 0{,}998 \Rightarrow (0{,}1)^n = 0{,}002 \Rightarrow n = 2{,}7 \approx 3$ (n – ціле число).

Приклад 2.5. На складання надходять деталі із трьох автоматів. Перший автомат дає 20 %, другий – 30 %, третій – 50 % усіх деталей, що надходять на складання. Перший автомат дає 0,2 % браку, другий – 0,3 %, третій – 0,1 %. Знайдіть імовірність того, що до складального цеху надійшла бракована деталь.

Розв'язання. Позначте через B_1 подію "деталь виготовлено першим автоматом", B_2 – "деталь виготовлено другим автоматом", B_3 –"деталь виготовлено третім автоматом": $P(B_1)=0,2;$ $P(B_2)=0,3;$ $P(B_3)=0,5.$

Перевірка: $0,2+0,3+0,5=1.$

Нехай подія A – "на складання надійшла бракована деталь".

Тоді $P(A|B_1)=0,002$; $P(A|B_2)=0,003$; $P(A|B_3)=0,001.$

За формулою повної ймовірності буде:

$$P(A)=P(B_1)P(A|B_1)+P(B_2)P(A|B_2)+P(B_3)P(A|B_3).$$

$$P(A)=0,2\cdot 0,002+0,3\cdot 0,003+0,5\cdot 0,001=0,0018.$$

Приклад 2.6. У першій шухляді 20 білих, у другій – 10 білих і 10 чорних, у третій – 20 чорних куль. Із вибраної навмання шухляди вийняли кулю. Вона виявилася білою. Яка ймовірність того, що ця куля з першої шухляди?

Розв'язання. Нехай гіпотеза B_1 – "кулю вийнято з першої шухляди", B_2 – "кулю вийнято із другої шухляди", B_3 – "кулю вийнято із третьої шухляди". $P(B_1)=P(B_2)=P(B_3)=\frac{1}{3}$, тому, що ці події рівноймовірні.

Подія A – "вийнято білу кулю":

$$P(A|B_1)=1,\ P(A|B_2)=\frac{10}{20}=\frac{1}{2},\ P(A|B_3)=0.$$

За формулою повної ймовірності буде:

$$P(A)=\frac{1}{3}\cdot 1+\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\cdot 0=\frac{1}{2}.$$

Шукану ймовірність $P(B_1|A)$ знаходять за формулою Байєса:

$$P(B_1|A)=\frac{P(B)P(A|B_1)}{P(A)}=\frac{\frac{1}{3}\cdot 1}{\frac{1}{2}}=\frac{2}{3}.$$

Як видно, після переоцінки, тобто після того, як було враховано факт появи події A, імовірність гіпотези B_1 зросла вдвічі.

Завдання для самостійної роботи

2.1. Студент знає 25 питань із 40. Знайдіть імовірність, що він відповість на три питання.

2.2. Серед виробів, зроблених на окремому заводі, 98 % відповідають стандарту. Із них 60 % – першого сорту і 40 % – другого. Узято один виріб. Яка ймовірність того, що взятий виріб виявиться виробом першого сорту?

2.3. Імовірність виграшу одного квитка лотереї дорівнює 1/20. Яка ймовірність того, що, маючи п'ять квитків, можна виграти:

а) за всіма квитками; б) по жодному із квитків; в) хоча б по одному?

2.4. Білет містить три питання. Імовірність того, що студент відповість на 1-ше і 2-ге питання дорівнює 0,9, на 3-тє – 0,8. Знайдіть імовірність того, що студент складе іспит, якщо для цього необхідно відповісти: а) на всі питання; б) хоча б на два питання.

2.5. Імовірність улучення в ціль за одного пострілу дорівнює 0,2. Зроблено 10 пострілів. Знайдіть імовірність улучення в ціль.

2.6. У майстерні стоять 4 токарські верстати. Імовірність того, що в цей момент кожен із верстатів працює, дорівнює 0,7. Визначте ймовірність того, що в цей момент працює хоча б один верстат.

2.7. Імовірність улучення в ціль за одного залпу із двох гармат дорівнює 0,38. Знайдіть імовірність улучення в ціль за одного пострілу першої гармати, якщо для другої гармати ця ймовірність дорівнює 0,8.

2.8. Вироби перевіряються експертом на нестандартність. Імовірність того, що виріб стандартний, дорівнює 0,9. Знайдіть імовірність того, що із двох перевірених виробів тільки один стандартний.

2.9. У шухляді 10 куль, серед яких 6 білих. Навмання витягають 4 кулі. Яка ймовірність того, що всі кулі виявляться білими?

2.10. Імовірність улучення в ціль для окремого стрільця дорівнює 60 %. Зроблено 5 пострілів. Яка ймовірність того, що: а) усі 5 пострілів виявляться вдалими; б) стрілець жодного разу не влучить у ціль; в) стрілець улучить у ціль хоча б один раз; г) скільки пострілів досить зробити, щоб імовірність улучення в ціль досягла 95 %?

2.11. Дві однакові на вигляд коробки містять: одна – 3 червоні та 2 чорні олівці, інша – 2 червоні й 4 чорні олівці. Із навмання взятої коробки виймають один олівець. Яка ймовірність того, що він виявиться чорним?

2.12. На складання надходять деталі із трьох автоматів. Перший автомат дає 0,3 % браку, другий – 0,2 %, третій – 0,4 %. Знайдіть імовірність надходження на складання бракованої деталі, якщо з першого автомата надходить 1 000 деталей, із другого – 2 000, із третього – 2 500.

2.13. Під час розриву снаряда утворюються великі, середні та дрібні осколки у відношенні 1 : 3 : 6. У разі влучення в танк великий осколок пробиває броню з імовірністю 0,9; середній – 0,3; дрібний – 0,1. Яка ймовірність того, що осколок, потрапивши у броню, проб'є її?

2.14. З урни, що містить 4 білі та 2 чорні кулі, перекладено 1 кулю в урну, що містить 5 білих і 8 чорних куль. Після цього із другої урни було взято 1 кулю. Яка ймовірність того, що вона виявиться чорною?

2.15. Серед деталей, що надходять до складального цеху, із першого автомата 0,1 % бракованих, із другого – 0,2 %, із третього – 0,25 %, із четвертого – 0,5 %. Продуктивність їх відноситься як 4 : 3 : 2 : 1, відповідно. Узята навмання деталь виявилася бракованою. Яка ймовірність того, що її виготовлено: а) на першому автоматі; б) на другому автоматі; в) на третьому автоматі; г) на четвертому автоматі? Як перевірити правильність обчислень?

Практичне заняття 3
Дискретні випадкові величини, закони розподілу. Неперервні та абсолютно неперервні випадкові величини

Мета практичного заняття: надання уявлення про типи випадкових величин і способи визначення їхніх законів розподілу; про функцію розподілу, її властивості та особливості побудови.

Випадковою величиною називають величину, яка в результаті випробування може набути того чи того значення, але якого саме – невідомо. Випадкові величини позначають великими літерами, а їхні можливі значення – відповідними малими літерами латинського алфавіту, наприклад, $X(x_1, x_2, ..., x_n)$.

Дискретною (перервною) випадковою величиною називають випадкову величину, яка набуває окремих ізольованих можливих значень із певними ймовірностями. Кількість можливих значень дискретної випадкової величини може бути скінченною або зліченною.

Неперервною називають випадкову величину, яка може набувати всіх значень із деякого скінченного чи нескінченного проміжку.

Законом розподілу (рядом розподілу) дискретної випадкової величини називають відповідність між можливими значення та їхніми ймовірностями. Його можна задати таблично (табл. 3.1):

Таблиця 3.1

Закон розподілу дискретної випадкової величини

X	x_1	x_2	x_3	$\ldots$	x_n
p	p_1	p_2	p_3	$\ldots$	p_n

У першому рядку табл. 3.1 містяться можливі значення x_i, а у другому – відповідні ймовірності p_i, де $\sum_{i=1}^{n} p_i = 1$.

Закон розподілу дискретної випадкової величини можна задати аналітично (у вигляді формули): $P(X = x_i) = \varphi(x_i)$, а також графічно.

Для цього у прямокутній системі координат будують точки $M_1(x_1; p_1)$, $M_2(x_2; p_2)$, $\ldots, M_n(x_n; p_n)$ (x_i – можливі значення X, p_i – відповідні ймовірності) і з'єднують їх відрізками прямих.

Побудовану фігуру називають **многокутником розподілу** (рис. 3.1).

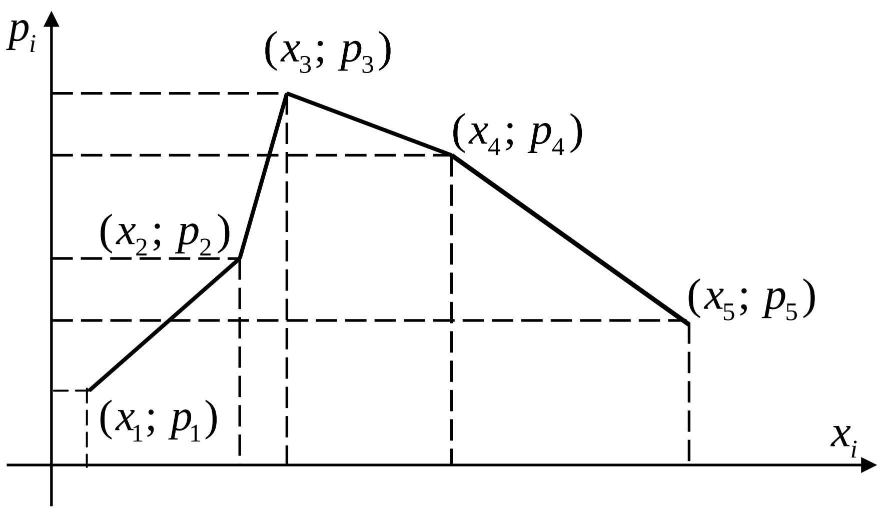

Рис. 3.1. **Многокутник розподілу для загального випадку**

Дискретну випадкову величину можна задати й функцією розподілу.

Функцією розподілу ймовірностей випадкової величини називають функцію $F(x)$, яка визначає ймовірність того, що випадкова величина X у результаті випробування набуде значення, яке менше ніж x:

$$F(x) = P(X < x) = \sum_{x_i < x} p_i \ .$$

Тут для кожного значення x підсумовують імовірності тих значень x_i, які розміщені ліворуч від точки x.

Числові характеристики дискретної випадкової величини

Характеристикою середнього значення випадкової величини є математичне сподівання.

Математичним сподіванням дискретної випадкової величини називають суму добутків усіх її можливих значень на відповідні ймовірності:

$$M(X) = x_1 p_1 + x_2 p_2 + ... + x_n p_n = \sum_{i=1}^{n} x_i p_i .$$

Математичне сподівання показує, яке значення випадкової величини слід очікувати в середньому під час випробувань.

Властивості математичного сподівання:

1) математичне сподівання сталої величини дорівнює цій сталій:

$$M(C) = C;$$

2) сталий множник можна виносити за знак математичного сподівання:

$$M(CX) = CM(X);$$

3) математичне сподівання суми скінченного числа випадкових величин дорівнює сумі їхніх математичних сподівань:

$$M(X_1 + X_2 + ... + X_n) = M(X_1) + M(X_2) + ... + M(X_n).$$

Наслідок – це математичне сподівання різниці двох випадкових величин дорівнює різниці їхніх математичних сподівань:

$$M(X - Y) = M(X) - M(Y);$$

4) математичне сподівання добутку скінченного числа взаємно незалежних випадкових величин дорівнює добутку їхніх математичних сподівань:

$$M(X_1 \cdot X_2 \cdot ... \cdot X_n) = M(X_1) \cdot M(X_2) \cdot ... \cdot M(X_n).$$

Іншою важливою характеристикою випадкової величини є дисперсія, яка характеризує міру розсіювання значень випадкової величини навколо її математичного сподівання.

Дисперсією випадкової величини X називають математичне сподівання квадрата відхилення цієї величини від її математичного сподівання:

$$D(X) = M(X - M(X))^2.$$

Для розрахунку використовують ще й таку формулу:

$$D(X) = M(X^2) - (M(X))^2.$$

Властивості дисперсії:

1) дисперсія сталої дорівнює нулю:

$$D(C) = 0;$$

2) сталий множник можна виносити за знак дисперсії, підносячи його до квадрата:

$$D(CX) = C^2 D(X);$$

3) дисперсія суми попарно незалежних випадкових величин дорівнює сумі їхніх дисперсій:

$$D(X_1 + X_2 + ... + X_n) = D(X_1) + D(X_2) + ... + D(X_n);$$

4) дисперсія різниці двох незалежних випадкових величин дорівнює сумі їхніх дисперсій:

$$D(X - Y) = D(X) + D(Y).$$

Дисперсія має розмірність квадратних одиниць вимірюваної величини. Щоб знайти розмірність міри розсіювання в одиницях вимірюваної величини, розглядають квадратний корінь із дисперсії: $\sigma(X) = \sqrt{D(X)}$, який називають **середнім квадратичним відхиленням** (стандартним відхиленням).

В економічних задачах часто середнє квадратичне відхилення σ використовують як міру ризику.

Разом із математичним сподіванням показниками центральних тенденцій є мода та медіана.

Модою випадкової величини ($Mo(X)$) називають те її значення, якому відповідає найбільше значення ймовірності.

Медіаною випадкової величини $Me(X)$ називають таке її значення, яке за кількістю значень випадкової величини ділить навпіл ряд розподілу.

Приклад 3.1. Дискретну випадкову величину X задано законом розподілу (табл. 3.2):

Таблиця 3.2

Закон розподілу випадкової величини X

X	1	5	8	10
p	0,3	0,4	0,2	0,1

Побудуйте многокутник розподілу.

Розв'язання. У прямокутній системі координат на осі абсцис слід відкласти можливі значення випадкової величини, а на осі ординат – відповідні ймовірності.

Таким чином будують точки: $M_1(1;0,3)$, $M_2(5;0,4)$, $M_3(8;0,2)$, $M_4(10;0,1)$.

Якщо з'єднати ці точки відрізками прямих, то буде многокутник розподілу (рис. 3.2).

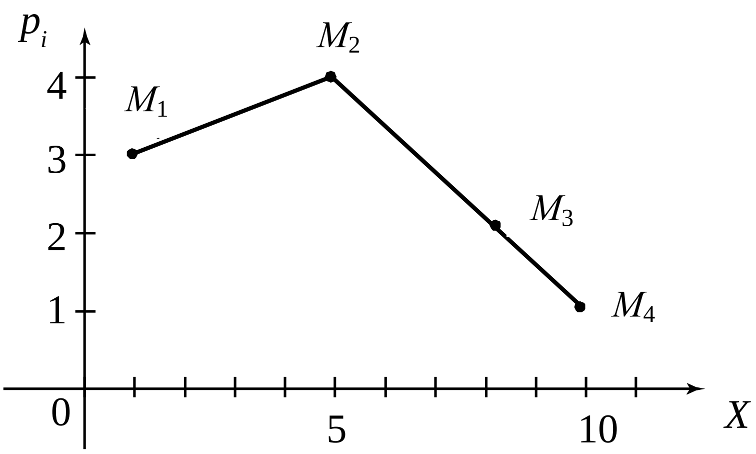

Рис. 3.2. **Многокутник розподілу до прикл. 3.1**

Приклад 3.2. Два стрільці виконують по одному пострілу в мішень. Імовірність улучення для першого дорівнює 0,6, а для другого – 0,5. Складіть закон розподілу кількості влучень у мішень.

Розв'язання. Дискретна випадкова величина X (кількість улучень у мішень) має такі значення: $x_1 = 0$ (обидва стрільці не влучили в мішень), $x_2 = 1$ (один улучив), $x_3 = 2$ (обидва влучили).

Знайдіть відповідні ймовірності.

Імовірність улучення для першого $p_1 = 0,6$, а ймовірність промаху $q_1 = 1 - 0,6 = 0,4$;

імовірність улучення для другого $p_2 = 0,5$, а ймовірність промаху $q_2 = 1 - 0,5 = 0,5$.

Тоді ймовірність того, що обидва стрільці не влучили в мішень:

$$P(X = 0) = q_1 \cdot q_2 = 0,4 \cdot 0,5 = 0,2;$$

імовірність того, що один улучив:

$$P(X = 1) = p_1 q_2 + p_2 q_1 = 0,6 \cdot 0,5 + 0,6 \cdot 0,4 = 0,5;$$

імовірність того, що обидва влучили:

$$P(X = 2) = p_1 \cdot p_2 = 0,6 \cdot 0,5 = 0,3.$$

Перевірка: $0,2 + 0,5 + 0,3 = 1$.

Ряд розподілу кількості влучень у мішень наведено в табл. 3.3.

Таблиця 3.3

Закон розподілу випадкової величини X

X	0	1	2
p	0,2	0,5	0,5

Приклад 3.4. Знайдіть функцію розподілу випадкової величини X, заданої законом розподілу (табл. 3.4).

Таблиця 3.4

Закон розподілу випадкової величини X

Кількість пострілів	1	2	3	4
p_i	0,700	0,210	0,063	0,027

Знайдіть імовірність того, що випадкова величина X набуде значення не меншого за 1 і не більшого за 4.

Розв'язання. Випадкова величина X не набуває значень, менших за 1. Тому для $x \le 1$ події $X < x$ неможливі, а $F(x) = 0$.

Якщо $1 < x \le 2$, то $F(x) = 0,700$, тому що X може набути тільки значення $x = 1$ з імовірністю $p = 0,700$.

Якщо $2 < x \leq 3$, то $F(x) = 0{,}700 + 0{,}210 = 0{,}910$, тому що X може набути одного зі значень $x = 1$ або $x = 2$ з імовірностями $p = 0{,}7$ та $p = 0{,}210$, що потребує застосування теореми додавання ймовірностей для обчислення шуканої ймовірності.

Аналогічно, якщо $3 < x \leq 4$, то $F(x) = 0{,}700 + 0{,}210 + 0{,}063 = 0{,}973$.

Якщо $x > 4$, то $F\left(x\right) = 1$, тому що подія $X \leq 1$ достовірна і ймовірність її дорівнює 1.

Отже, за $x > 4$ $F(x) = 0{,}700 + 0{,}210 + 0{,}063 + 0{,}270 = 1$.

Таким чином, шукана функція розподілу випадкової величини X, а також її графік (рис. 3.3) мають такий вигляд:

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{якщо} \quad x \leq 1, \\ 0{,}700, & \text{якщо} \quad 1 < x \leq 2, \\ 0{,}910, & \text{якщо} \quad 2 < x \leq 3, \\ 0{,}973, & \text{якщо} \quad 3 < x \leq 4, \\ 1, & \text{якщо} \quad x > 4. \end{cases}$$

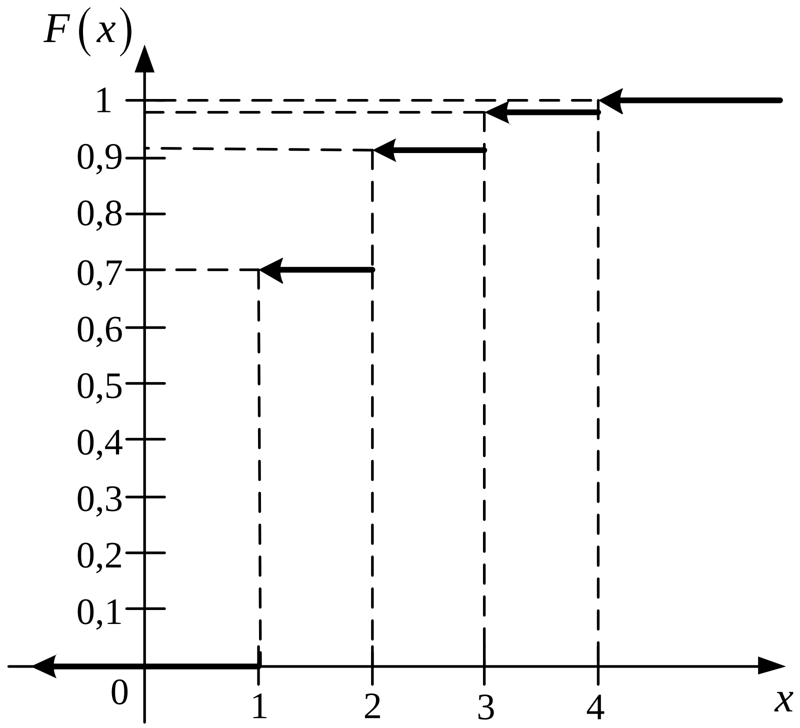

Рис. 3.3. **Графік інтегральної функції розподілу**

Імовірність того, що випадкова величина X набуде значення не меншого за 1 і не більшого за 4 дорівнює:

$$P(1 \le X \le 4) = F(4) - F(1) = 0{,}973 - 0 = 0{,}973.$$

Приклад 3.5. Для випадкової величини X, заданої законом розподілу (табл. 3.5), обчисліть $M(X)$, $M(X^2), M^2(X), D(X)$.

Таблиця 3.5

Закон розподілу випадкової величини X

x_i	5	10	15
p_i	0,2	0,6	0,2

Розв'язання. $M(X) = \sum_{i=1}^{n} x_i p_i$.

Тоді $M(X) = 5 \cdot 0{,}2 + 10 \cdot 0{,}6 + 15 \cdot 0{,}2 = 10$.

Далі слід записати закон розподілу випадкової величини X^2. Це зручно зробити у вигляд

і таблиці (табл. 3.6):

Таблиця 3.6

Закон розподілу випадкової величини X^2

x_i^2	25	100	225
p_i	0,2	0,6	0,2

Тоді $M(X^2) = 25 \cdot 0{,}2 + 100 \cdot 0{,}6 + 225 \cdot 0{,}2 = 110.$

Дисперсію слід обчислити за такою формулою:

$$D(X) = M(X^2) - M^2(X).$$

Таким чином, $D(X) = 110 - 10^2 = 10.$

Завдання для самостійної роботи

3.1. У студентській групі 4 юнаки і 6 дівчат. На чергування випадково відібрано двох студентів. Складіть закон розподілу кількості дівчат серед відібраних.

3.2. Дискретну випадкову величину задано законом розподілу (табл. 3.7).

Таблиця 3.7

Закон розподілу випадкової величини X

X	0	2	4	5
p	0,1	0,6	?	0,1

Знайдіть інтегральну функцію $F(x)$ і побудуйте її графік.

3.3. З урни, що містить 4 білі та 3 чорні кулі, навмання виймають 2 кулі. Нехай X – кількість вийнятих білих куль. Знайдіть функцію розподілу випадкової величини X, побудуйте графік цієї функції.

3.4. Напишіть закон розподілу випадкової величини X – кількості появ "герба" за двох кидань монети.

3.5. Дано випадкову величину X (табл. 3.8).

Таблиця 3.8

Закон розподілу випадкової величини X

x_i	5	10	15	20
p_i	0,2	0,3	0,4	0,1

Обчисліть $M(X)$ і $D(X)$.

3.6. Дано випадкову величину X (табл. 3.9).

Таблиця 3.9

Закон розподілу випадкової величини X

x_i	4	6	x_3
p_i	0,5	0,3	p_3

Знайдіть x_3 і p_3 якщо $M(X)=8$.

3.7. Визначте математичне сподівання і дисперсію:

а) кількості очок, що випали за одного кидання гральної кістки;

б) суми очок, що випали за кидання 2 гральних кісток.

3.8. Визначте математичне сподівання і середнє квадратичне відхилення добутку очок, що випали за кидання 2 гральних кісток.

3.9. Із колоди із 32 карт навмання витягають 2 карти. Знайдіть математичне сподівання кількості вийнятих тузів.

3.10. В одній урні лежать 4 білі та 1 чорна куля, в іншій – 2 білі та 3 чорні кулі. Із навмання вибраної урни витягають а) 1 кулю; б) 2 кулі. Визначте математичне сподівання кількості вийнятих білих куль для випадків а) і б).

Практичне заняття 4
Рівномірний, показниковий (експоненціальний) та нормальний закони розподілу

Мета практичного заняття: ознайомлення з основними законами розподілу дискретної та неперервної випадкової величини та формування системи теоретичних знань, практичних умінь і навичок у визначенні функції розподілу та основних числових характеристик випадкових величин.

Закони розподілу та числові характеристики дискретної випадкової величини

Біноміальним називають закон розподілу дискретної випадкової величини X – кількості появи події в n незалежних випробуваннях, у кожному з яких імовірність появи події дорівнює p, якщо відповідні значення ймовірностей обчислюють за формулою Бернуллі:

$$P_n(X=k)=C_n^k p^k q^{n-k},\ (k=0,1,2...,n).$$

Біноміальний закон розподілу є двопараметричним, оскільки його визначено параметрами n (кількість випробувань) та p (імовірність появи події в окремому випробуванні).

Математичне сподівання і дисперсію випадкової величини, розподіленої за біноміальним законом, визначають за такими формулами:

$$M(X)=np,\ D(X)=npq.$$

Випадкову величину X розподілено за **пуассонівським законом**, якщо її ймовірності визначають за формулою Пуассона:

$$P_n(X=k)=\frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!},$$

де $\lambda = np$.

Закон розподілу Пуассона є однопараметричним, єдиним його параметром є $\lambda = np$.

Для випадкової величини, розподіленої за законом Пуассона:

$$M\left(X\right) \approx D\left(X\right) = \lambda.$$

Ще одним прикладом закону розподілу дискретної випадкової величини, що можна задати в аналітичній формі, є **геометричний розподіл**. Нехай здійснюють незалежні й однорідні випробування, для кожного з яких імовірність p появи певної події є сталою величиною. У цих випробуваннях спостерігають за появою певної події. Випробування тривають доти, доки з'явиться ця подія. Випадковою величиною є кількість випробувань, яка передує появі цієї події. Випадкова величина X має **геометричний закон розподілу**, якщо відповідні значення її ймовірностей обчислюють за такою формулою:

$$P_n(X=k)=(1-p)^k \cdot p,\ \ k=0,1,2...,k.$$

Геометричний розподіл є однопараметричним і його визначають параметром p.

Для випадкової величини, розподіленої за геометричним законом основні числові характеристики обчислюють за такими формулами:

математичне сподівання $M(X)=\dfrac{1}{p}$;

дисперсія $\mathrm{D}(X)=\dfrac{q}{p^2}$;

середнє квадратичне відхилення $\sigma(X)=\dfrac{\sqrt{q}}{p}$.

Нехай є партія з N одиниць товару, із яких M одиниць є якісними. Із цієї партії вибирають n одиниць товару таким чином, що кожна одиниця має однакову ймовірність потрапити до вибірки.

Якщо випадковою величиною вважати кількість m одиниць якісного товару серед множини n, то закон розподілу цієї випадкової величини називають гіпергеометричним. Випадкова величина X має **гіпергеометричний закон розподілу**, якщо відповідні значення її ймовірностей обчислюють за такою формулою:

$$P_N(X=k)=\frac{C_n^k C_{N-n}^{m-k}}{C_N^m},$$

де C_N^n – кількість сполучень із N по n, тобто загальна кількість можливостей вибрати n елементів із множини, що містить N елементів;

C_M^m – кількість сполучень із M по m, тобто кількість можливостей вибрати m якісних елементів із їхньої множини, що містить M елементів;

C_{N-M}^{n-m} – кількість сполучень із $N-M$ по $n-m$, тобто кількість можливостей заповнити $n-m$ вільних місць (ці місця залишилися у вибірковій сукупності після того, як m місць було зайнято якісними елементами) неякісними елементами, загальна кількість яких становить $N-M$.

Відповідно, добуток $C_M^m \cdot C_{N-M}^{n-m}$ дорівнює кількості сприятливих елементарних подій на просторі елементарних подій, загальна кількість яких становить C_N^n. Гіпергеометричний закон розподілу характеризують за трьома параметрами: N, M та n.

Числові характеристики цього закону обчислюють за такими формулами:

математичне сподівання $M(X)=\frac{1}{C_N^m}\sum_{k=0}^{m} kC_n^k C_{N-n}^{m-k}$;

дисперсія $D(X)=\frac{1}{C_N^m}\sum_{k=0}^{m} k^2 C_n^k C_{N-n}^{m-k}-M^2(X)$;

середнє квадратичне відхилення $\sigma(X)=\sqrt{D(X)}$.

Приклад 4.1. Імовірність скласти іспит на "відмінно" для кожного із 6 студентів дорівнює 0,4. Складіть закон розподілу кількості відмінних оцінок, отриманих студентами на іспиті. Знайдіть $M(X)$ і $D(X)$.

Розв'язання. Нехай випадкова величина X – кількість відмінних оцінок, отриманих студентами на іспиті.

Вона може набувати значень: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6.

За умовою $p=0{,}4$; $q=0{,}6$.

Імовірності, із якими величина X набуває своїх можливих значень, слід обчислювати за формулою Бернуллі:

$$P_6(0) = C_6^{\,0} \cdot 0,4^0 \cdot 0,6^6 \approx 0,047, \quad (C_6^{\,0} = 1);$$

$$P_6(1) = C_6^{\,1} \cdot 0,4^1 \cdot 0,6^5 \approx 0,187;$$

$$P_6(2) = C_6^{\,2} \cdot 0,4^2 \cdot 0,6^4 \approx 0,311;$$

$$P_6(3) = C_6^{\,3} \cdot 0,4^3 \cdot 0,6^3 \approx 0,276;$$

$$P_6(4) = C_6^{\,4} \cdot 0,4^4 \cdot 0,6^2 \approx 0,138;$$

$$P_6(5) = C_6^{\,5} \cdot 0,4^5 \cdot 0,6^1 \approx 0,037;$$

$$P_6(6) = 0,4^6 \approx 0,004.$$

Закон розподілу цієї випадкової величини X зручно навести у вигляді таблиці (табл. 4.1).

Таблиця 4.1

Закон розподілу випадкової величини X

x_i	0	1	2	3	4	5	6
p_i	0,047	0,187	0,311	0,276	0,138	0,037	0,004

Перевірка: $0,047 + 0,187 + 0,311 + 0,276 + 0,138 + 0,037 + 0,004 = 1.$

Приклад 4.2. Обладнання складається зі 100 елементів, що працюють незалежно один від одного. Імовірність відмови будь-якого елемента $p = 0,01$. Складіть закон розподілу кількості відмов.

Розв'язання. Нехай випадкова величина X – кількість відмов елементів, яка може набувати значень 0, 1, 2, 3, ..., 100.

Імовірності цих значень знаходять за формулою Пуассона тому, що $n = 100$ – велика, а $p = 0,01$ – мала ймовірність.

За умовою $\lambda = 100 \cdot 0,01 = 1.$

$$P_n(X = k) = \frac{\lambda^k}{k!} \cdot e^{-\lambda}, \quad (e^{-1} \approx 0,3679);$$

$$P(X=0)=\frac{e^{-1}}{0!}\approx 0,3679; \quad P(X=1)=\frac{e^{-1}}{1!}\approx 0,3679;$$

$$P(X=2)=\frac{e^{-1}}{2!}\approx 0,1839; \quad P(X=3)=\frac{e^{-1}}{3!}\approx 0,0613;$$

$$P(X=4)=\frac{e^{-1}}{4!}\approx 0,0153; \quad P(X=5)=\frac{e^{-1}}{5!}\approx 0,0031;$$

$$P(X=6)=\frac{e^{-1}}{6!}\approx 0,0005.$$

За $k\geq 7$ імовірності $P(X\geq 7)\approx 0$. Отже, закон розподілу заданої випадкової величини має такий вигляд (табл. 4.2):

Таблиця 4.2

Закон розподілу випадкової величини X

x_i	0	1	2	3	4	5	6
p_i	0,3679	0,3679	0,1839	0,0613	0,0153	0,0031	0,0005

Перевірка:

$$0,3679+0,3679+0,1839+0,0613+0,0153+0,0031+0,0005=1.$$

Аналіз табл. 4.2 дозволяє зробити деякі висновки. Найбільш імовірно, що відмовить 1 або жодний елемент. Практично неможливо, що відмовлять 5 або більше елементів.

Приклад 4.3. Звітність містить певні неточності, які за експрес-перевірки виявляють з імовірністю 0,7. Здійснюють перевірку всієї документації до виявлення першого порушення. Випадковою величиною вважають кількість документів, у яких не було помічено порушень. Складіть закон розподілу цієї випадкової величини.

Розв'язання. Оскільки випробування здійснюють до першої появи події (виявлення порушення) і ймовірність появи події в кожному випробуванні є сталою величиною, то закон розподілу випадкової величини є геометричним.

Випадкова величина може набувати значень 1, 2, 3, …, отже, це нескінчена дискретна випадкова величина.

Для обчислення ймовірності кожного її значення слід користуватися такою формулою:

$$P_n(X = k) = (1 - p)^k \cdot p,\ \ k = 0,1,2...,k.$$

Так,

$$P_1(X = 0) = (1 - 0,7)^0 \cdot 0,3 = 0,7;$$

$$P_2(X = 1) = (1 - 0,7)^1 \cdot 0,7 = 0,21 \text{ і далі.}$$

Результати обчислення наведено в табл. 4.3. Видно, що випадкова подія відбувається в першому ж випробуванні з імовірністю 0,7. Зі збільшенням значення випадкової величини його ймовірність швидко спадає, і можливість пропустити помилки навіть у 2 документах є подією маломовірною.

Таблиця 4.3

Ряд розподілу дискретної випадкової величини, розподіленої за геометричним законом

X	0	1	2	3	4	5
p_i	0,7000	0,2100	0,0630	0,0189	0,0057	0,0017

Імовірність події "пропустити не більше ніж п'ять помилок" дорівнює сумі ймовірностей перших шести подій (ураховуючи подію "не пропустити жодної помилки"), у цьому разі вона становить 0,9993.

Приклад 4.4. Магазин отримав партію товару, що складається із 20 опалювальних котлів. Під час транспортування 5 із них зазнали незначних пошкоджень корпусу. Із цієї партії для філіалу було передано 4 котли. Складіть ряд розподілу випадкової величини, якою вважають кількість пошкоджених котлів серед тих, що відібрані для філіалу.

Розв'язання. Оскільки з партії товару вибирають її частину, де кожний з об'єктів має однакову ймовірність потрапити до вибірки, то мова йде про гіпергеометричний розподіл. Значення випадкової величини можуть змінюватися від 0 до 4.

За такою формулою:

$$P_N(X = k) = \frac{C_n^k C_{N-n}^{m-k}}{C_N^m}$$

буде:

$$P_4(X=0)=\frac{C_5^0\cdot C_{15}^4}{C_{20}^4}=\frac{5!}{5!\cdot 0!}\cdot\frac{15!}{11!\cdot 4!}\cdot\frac{16!\cdot 4!}{20!}=0,2817;$$

$$P_4(X=1)=\frac{C_5^1\cdot C_{15}^3}{C_{20}^4}=\frac{5!}{4!\cdot 1!}\cdot\frac{15!}{12!\cdot 3!}\cdot\frac{16!\cdot 4!}{20!}=0,4696;$$

$$P_4(X=2)=\frac{C_5^2\cdot C_{15}^2}{C_{20}^4}=\frac{5!}{3!\cdot 2!}\cdot\frac{15!}{13!\cdot 2!}\cdot\frac{16!\cdot 4!}{20!}=0,2167;$$

$$P_4(X=3)=\frac{C_5^3\cdot C_{15}^1}{C_{20}^4}=\frac{5!}{2!\cdot 3!}\cdot\frac{15!}{14!\cdot 1!}\cdot\frac{16!\cdot 4!}{20!}=0,0310;$$

$$P_4(X=4)=\frac{C_5^4\cdot C_{15}^0}{C_{20}^4}=\frac{5!}{1!\cdot 4!}\cdot\frac{15!}{15!\cdot 0!}\cdot\frac{16!\cdot 4!}{20!}=0,0010.$$

Для перевірки того, що перелічено всі можливі значення випадкової величини, слід обчислити суму ймовірностей. Дійсно, $\sum_{i=1}^{n} p_i = 1$.

Зверніть увагу, що 1 котел із 4 становить ті самі 25 %, що і 5 котлів із 20, тобто випадкова подія $X=1$ має бути найімовірнішою, але хоча вона і є найімовірнішою, імовірність того, що випадкова величина набуде значення $X=1$ становить лише 0,4696.

Закони розподілу та числові характеристики неперервної випадкової величини

Для неперервної випадкової величини функція розподілу є неперервною, отже, для завдання неперервної випадкової величини разом із функцією розподілу можна використовувати першу похідну від цієї функції:

$$f(x)=F'(x),$$

де $f(x)$ – **щільність імовірностей**, або **диференціальна функція розподілу** (на відміну від функції $F(x)$, яку іноді називають інтегральною функцією розподілу).

Відповідно, функція розподілу є невласним інтегралом зі змінною верхньою межею від щільності ймовірностей:

$$F(x)=\int_{-\infty}^{x} f(x)dx.$$

Властивості диференціальної функції розподілу:

1. Щільність імовірностей є невід'ємною:

$$f(x) \geq 0.$$

2. Невласний інтеграл від щільності ймовірностей у межах від $-\infty$ до $+\infty$ дорівнює одиниці:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1.$$

3. Імовірність того, що неперервна випадкова величина набуде значення, яке належить до інтервалу $(a; b)$, дорівнює визначеному інтегралу від диференціальної функції розподілу, межами якого є межі цього інтервалу:

$$P(a < X < b) = \int_{a}^{b} f(x)dx = F(b) - F(a).$$

Основні числові характеристики неперервної випадкової величини

Математичне сподівання неперервної випадкової величини X визначають за співвідношенням:

$$M(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x \cdot f(x)dx,$$

а дисперсія за означенням має такий вигляд:

$$DX = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - MX)^2 \cdot f(x)dx,$$

де $f(x)$ – щільність імовірностей.

Формула для обчислення дисперсії має такий вигляд:

$$D(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 \cdot f(x)dx - M^2(X).$$

Слід розглянути найбільш поширені закони розподілу неперервної випадкової величини.

Рівномірним називають закон розподілу неперервної випадкової величини, диференціальна функція розподілу якого має такий вигляд:

$$f(x)=\begin{cases}0, & x\le a;\\ \dfrac{1}{b-a}, & a<x\le b;\\ 0, & x>b.\end{cases}$$

Отже, на проміжку $(a; b]$, до якого належать усі можливі значення випадкової величини, щільність імовірностей є сталою величиною.

Рівномірний закон розподілу визначають за двома параметрами: початком (a) і кінцем (b) інтервалу, до якого належать усі значення неперервної випадкової величини. Отже, він є двопараметричним.

Функція розподілу випадкової величини, розподіленої за рівномірним законом, має такий вигляд:

$$F(x)=\begin{cases}0, & x\le a;\\ \dfrac{x-a}{b-a}, & a<x\le b;\\ 1, & x>b.\end{cases}$$

На рис. 4.1. наведено графіки щільності ймовірностей та функції розподілу випадкової величини, розподіленої за рівномірним законом.

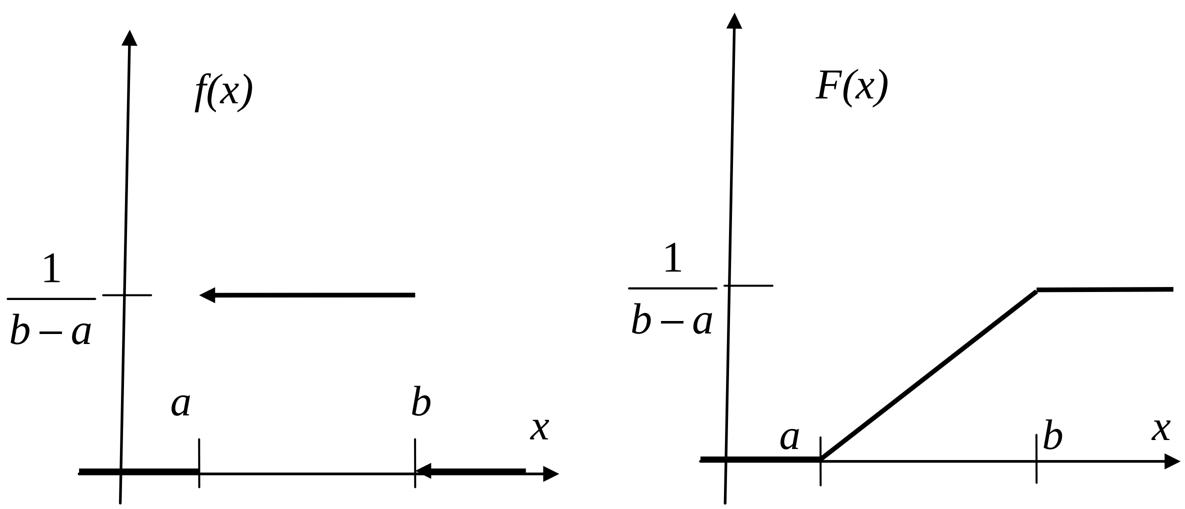

Рис. 4.1. **Щільність імовірностей** $f(x)$ **та функція розподілу** $F(x)$ **випадкової величини, розподіленої за рівномірним законом**

Основні числові характеристики випадкової величини, розподіленої за рівномірним законом такі:

математичне сподівання $M\left(X\right)=\dfrac{a+b}{2}$;

дисперсія $D\left(X\right)=\dfrac{(b-a)^2}{12}$;

середнє квадратичне відхилення $\sigma=\dfrac{b-a}{2\sqrt{3}}$.

Неперервну випадкову величину X називають розподіленою за **показниковим**, або **експоненціальним законом**, якщо її щільність імовірності має такий вигляд:

$$f(x)=\begin{cases} 0, & x\le 0; \\ \lambda e^{-\lambda x}, & x>0, \end{cases}$$

де λ – параметр функції показникового розподілу.

Для цього закону функція розподілу має такий вигляд:

$$F(x)=\begin{cases} 0, & x\le 0; \\ 1-e^{-\lambda x}, & x>0. \end{cases}$$

Показниковий розподіл є однопараметричним із параметром λ.

На рис. 4.2. наведено графіки щільності ймовірностей та функції розподілу неперервної випадкової величини, розподіленої за експоненціальним законом.

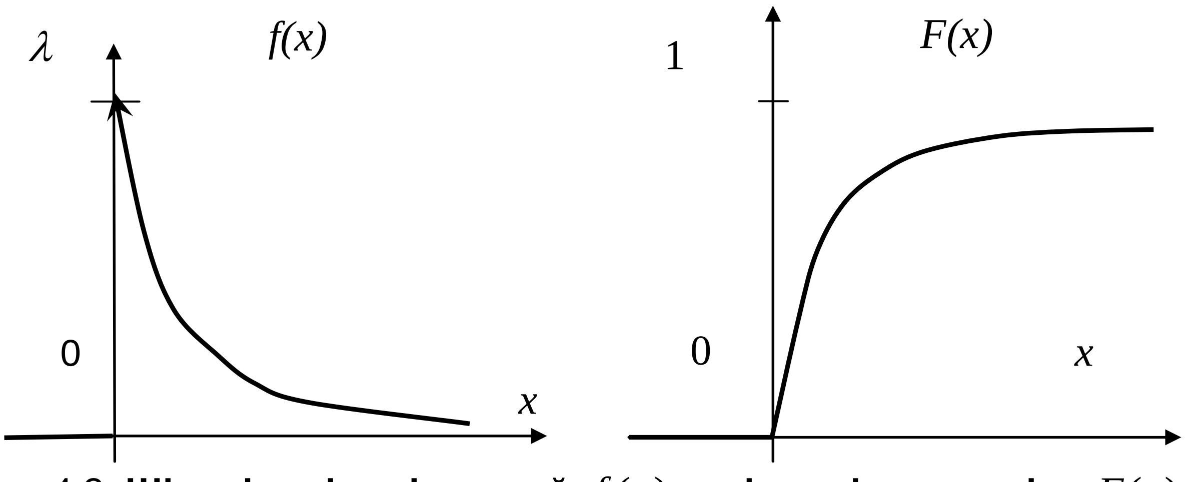

Рис. 4.2. **Щільність імовірностей** $f(x)$ **та функція розподілу** $F(x)$ **випадкової величини, розподіленої за експоненціальним законом**

Основні числові характеристики випадкової величини, розподіленої за експоненціальним законом такі:

математичне сподівання $M\left(X\right)=\dfrac{1}{\lambda}$;

дисперсія $D\left(X\right)=\dfrac{1}{\lambda^2}$;

середнє квадратичне відхилення $\sigma=\dfrac{1}{\lambda}$.

Отже, для експоненціального закону має місце співвідношення:

$$M\left(X\right)=\sigma.$$

Найбільш поширеним законом розподілу неперервної випадкової величини є нормальний розподіл.

Випадкову величину X уважають розподіленою за **нормальним законом**, якщо її диференціальна функція розподілу (щільність імовірності) має такий вигляд:

$$f(x)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}},$$

де a – математичне сподівання випадкової величини X;

σ – середнє квадратичне відхилення випадкової величини.

Основні числові характеристики випадкової величини, розподіленої за нормальним законом:

математичне сподівання $M\left(X\right)=a$;

дисперсія $D\left(X\right)=\sigma^2$.

Функція розподілу для нормального закону має такий вигляд:

$$F(x)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x}e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}dx.$$

Отже, нормальний закон розподілу є двопараметричним, його параметрами є математичне сподівання a та середнє квадратичне відхилення σ.

На рис. 4.3 наведено графіки інтегральної та диференціальної функцій розподілу для нормального закону.

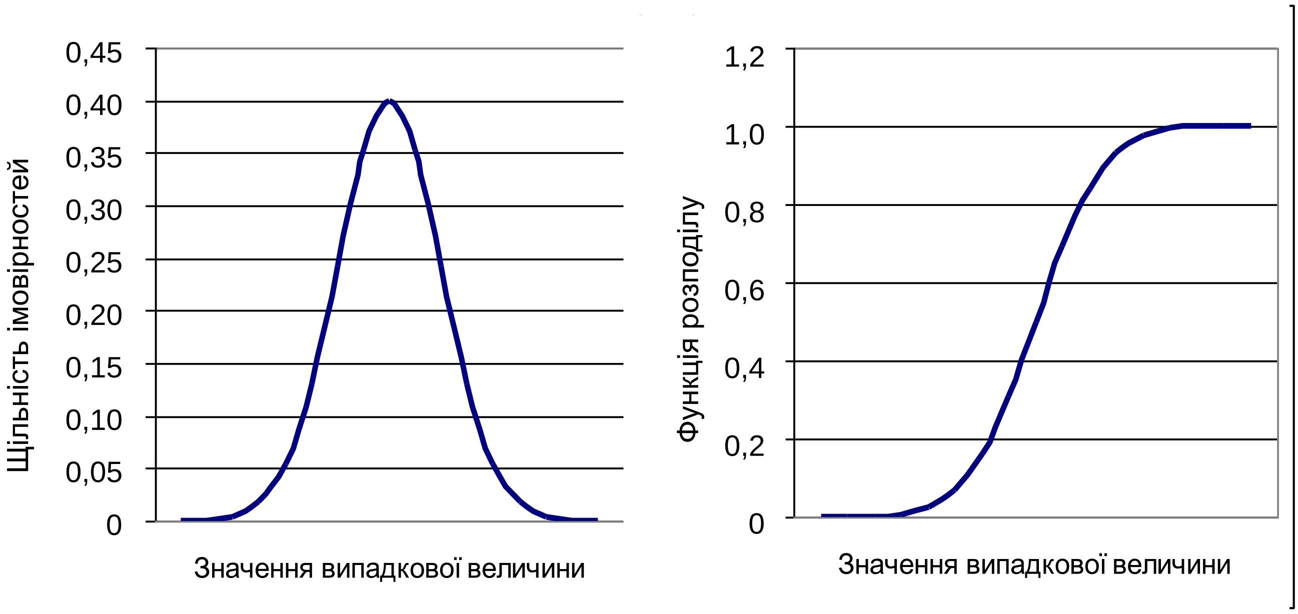

Рис. 4.3. **Графіки функції щільності ймовірностей $f(x)$ та функції розподілу $F(x)$ для нормального закону**

Головна особливість нормального розподілу полягає в тому, що цей закон є граничним, тобто до нього за певних умов наближаються інші закони розподілу.

Оскільки крива є симетричною, то для нормального закону мода випадкової величини дорівнює медіані й обидві вони збігаються з математичним сподіванням:

$$Mo(X) = Me(X) = M(X) = a.$$

Зміна параметра a призводить до зсуву кривої вздовж осі OX.

Параметр σ характеризує розпорошення випадкової величини навколо математичного сподівання. Середнє квадратичне відхилення дорівнює відстані від точок перегину на кривій $f(x)$ до точки максимуму, яка відповідає значенню математичного сподівання. Отже, чим більше значення має σ, тим ширша крива і, відповідно, тим нижчий максимум, оскільки площа під кривою $f(x)$ є сталою величиною й дорівнює одиниці.

За $a = 0$ та $\sigma = 1$ функція щільності ймовірностей має такий вигляд:

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}.$$

Таким чином, функція $\varphi(x)$ є диференціальною функцією розподілу випадкової величини X, розподіленої за нормальним законом, що має числові характеристики $M(X)=0$ та $D(X)=1$. Вона ще має назву **нормованої** кривої, або **функції Гаусса**.

Функція розподілу випадкової величини, розподіленої за нормальним законом, має такий вигляд:

$$F(x)=0,5+\Phi(x).$$

Імовірність того, що значення випадкової величини, розподіленої за нормальним законом, буде належати певному проміжку $(\alpha;\beta)$, визначають за такою формулою:

$$P(\alpha<X<\beta)=\Phi\left(\frac{\beta-a}{\sigma}\right)-\Phi\left(\frac{\alpha-a}{\sigma}\right).$$

Імовірність відхилення випадкової величини від свого математичного сподівання на величину, що не перевищує δ, обчислюють за такою формулою:

$$P(|X-a|<\delta)=2\Phi\left(\frac{\delta}{\sigma}\right).$$

Відповідно, відхилення випадкової величини від свого математичного сподівання на величину, що більша за δ, становить:

$$P(|X-a|\geq\delta)=1-2\Phi\left(\frac{\delta}{\sigma}\right).$$

Нехай $\delta=3\sigma$. Тоді за правилом трьох сигм:

$$P(|X-a|<3\sigma)=2\Phi\left(\frac{3\sigma}{\sigma}\right)=2\Phi(3)\approx 2\cdot 0,49865=0,9973.$$

Отже, 99,73 % значень випадкової величини належать проміжку $(a-3\sigma;\,a+3\sigma)$.

Згідно із цим правилом, відхилення випадкової величини, розподіленої за нормальним законом, від свого математичного сподівання на величину, більшу за 3σ, є подією малоймовірною. Звідси випливає важливий практичний висновок. Якщо невідомо, який саме закон розподілу має випадкова величина, то, коли правило трьох сигм порушено, є підстави вважати, що цей закон не відповідає нормальному.

На рис. 4.4 наведено графік диференціальної функції розподілу випадкової величини, розподіленої за нормальним законом.

Площа заштрихованої фігури відповідає ймовірності випадкової події, яка полягає в тому, що відхилення значення випадкової величини від її математичного сподівання не перевищує її середнього квадратичного відхилення.

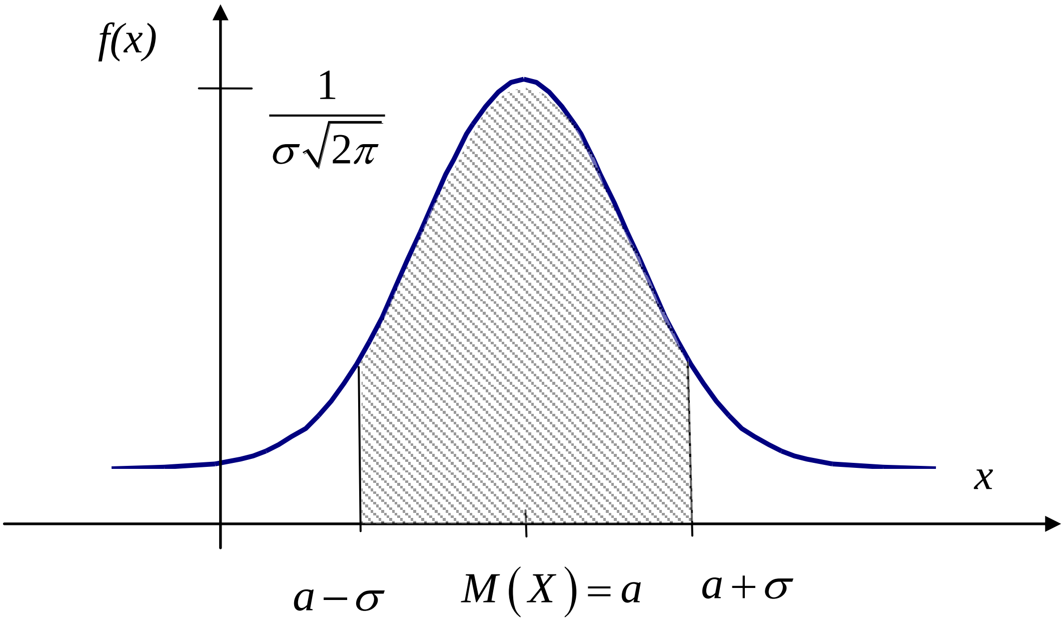

Рис. 4.4. **Загальний вигляд функції щільності ймовірностей для нормального закону розподілу**

Приклад 4.5. Дано інтегральну функцію випадкової величини X :

$$F(x)=\begin{cases}0, & x\le 0,\\ \sin 2x, & 0<x\le \dfrac{\pi}{4},\\ 1, & x>\dfrac{\pi}{4}.\end{cases}$$

Знайдіть диференціальну функцію $f(x)$.

Розв'язання.

$$f(x)=F'(x)=\begin{cases}0, & x\le 0,\\ 2\cos 2x, & 0<x\le \dfrac{\pi}{4},\\ 0, & x>\dfrac{\pi}{4}.\end{cases}$$

Приклад 4.6. Випадкову величину X задано функцією щільності ймовірностей $f(x)=\dfrac{a}{1+x^2}$, $\quad -\infty < x < +\infty$.

Знайдіть коефіцієнт a функції $f(x)$ і $F(x)$, імовірність того, що випадкова величина набуде будь-якого значення, не меншого за 0, але не більшого за 5.

Розв'язання. Із рівності $\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\dfrac{a}{1+x^2}dx=1$ слід знайти a.

$a\cdot \operatorname{arctg} x\Big|_{-\infty}^{+\infty}=1$ або $a\cdot\left(\dfrac{\pi}{2}+\dfrac{\pi}{2}\right)=1$, звідки $a=\dfrac{1}{\pi}$, отже, $f(x)=\dfrac{1}{\pi(1+x^2)}$.

$$F(x)=\int\limits_{-\infty}^{x} f(x)dx=\int\limits_{-\infty}^{x}\frac{1}{\pi(1+x^2)}dx=\frac{\operatorname{arctg} x}{\pi}\Bigg|_{-\infty}^{x}=\frac{\operatorname{arctg} x}{\pi}+\frac{1}{\pi}\cdot\frac{\pi}{2}=$$

$$=\frac{1}{\pi}\operatorname{arctg} x+\frac{1}{2}.$$

$$P(0\le X\le 5)=\int\limits_{0}^{5} f(x)dx=\int\limits_{0}^{5}\frac{1}{\pi(1+x^2)}dx=\frac{\operatorname{arctg} x}{\pi}\Bigg|_{0}^{5}\approx 0{,}435.$$

Приклад 4.7. Дано диференціальну функцію неперервної випадкової величини X:

$$f(x)=\begin{cases}0, & x\le\dfrac{\pi}{6},\\[2mm] 3\sin 3x, & \dfrac{\pi}{6}<x\le\dfrac{\pi}{3},\\[2mm] 0, & x>\dfrac{\pi}{3}.\end{cases}$$

Знайдіть інтегральну функцію $F(x)$.

Розв'язання. Для знаходження функції $F(x)$ слід використати таку формулу:

$$F(x)=\int\limits_{-\infty}^{x} f(x)dx.$$

Якщо $x \le \frac{\pi}{6}$, то $f(x)=0$, а, значить, $F(x)=\int\limits_{-\infty}^{x} 0\cdot dx = 0$.

Якщо $\frac{\pi}{6} < x \le \frac{\pi}{3}$, то

$$F(x)=\int\limits_{-\infty}^{\frac{\pi}{6}} 0\cdot dx + \int\limits_{\frac{\pi}{6}}^{x} 3\sin 3x dx = \left.\frac{-3\cos 3x}{3}\right|_{\frac{\pi}{6}}^{x} = -\cos 3x.$$

Якщо $x > \frac{\pi}{3}$, то $F(x)=\int\limits_{-\infty}^{\frac{\pi}{6}} 0\cdot dx + \int\limits_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} 3\sin 3x dx + \int\limits_{\frac{\pi}{3}}^{x} 0\cdot dx =$

$$= \left.\frac{-3\cos 3x}{3}\right|_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} = -\cos 3x\Big|_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} = 1.$$

Отже, $F(x)=\begin{cases} 0, & x \le \frac{\pi}{6}, \\ -\cos 3x, & \frac{\pi}{6} < x \le \frac{\pi}{3}, \\ 1, & x > \frac{\pi}{3}. \end{cases}$

Приклад 4.8. Знайдіть математичне сподівання, дисперсію випадкової величини X та побудуйте графіки інтегральної та диференціальної функцій розподілу, якщо

$$F(x)=\begin{cases} 0, & x \le -1, \\ \frac{x+1}{3}, & -1 < x \le 2, \\ 1, & x > 2. \end{cases}$$

Розв'язання. Диференціальна функція має такий вигляд:

$$f(x) = F'(x) = \begin{cases} 0, & x \le -1, \\ \frac{1}{3}, & -1 < x \le 2, \\ 0, & x > 2. \end{cases}$$

Математичне сподівання та дисперсія дорівнюють:

$$M(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x \cdot f(x)dx \text{ та } D(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x)dx - M^2(X);$$

$$M(X) = \int_{-\infty}^{-1} x \cdot 0dx + \int_{-1}^{2} x\frac{1}{3}dx + \int_{2}^{\infty} x \cdot 0dx = \left.\frac{x^2}{6}\right|_{-1}^{2} = \frac{4}{6} - \frac{1}{6} = \frac{1}{2};$$

$$D(X) = \int_{-1}^{2} x^2 \frac{1}{3}dx - \frac{1}{4} = \left.\frac{x^3}{9}\right|_{-1}^{2} - \frac{1}{4} = \left(\frac{8}{9} - \frac{1}{9}\right) - \frac{1}{4} = \frac{19}{36}.$$

На рис. 4.5 та 4.6 зображено графіки інтегральної функції розподілу $F(x)$ і щільності розподілу $f(x)$.

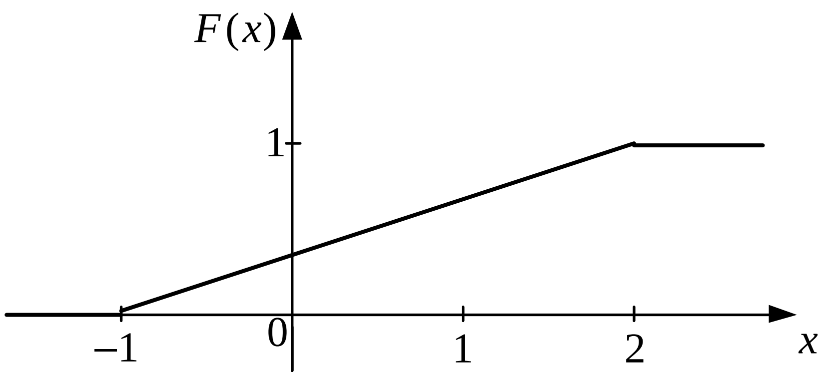

Рис. 4.5. **Графік інтегральної функції розподілу**

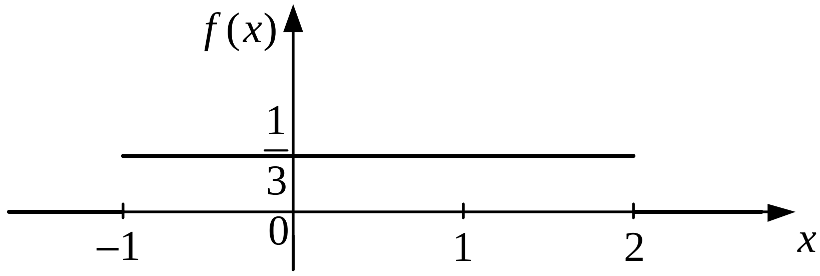

Рис. 4.6. **Графік диференціальної функції розподілу**

Приклад 4.9. Випадкову величину розподілено на проміжку $(0; 24]$ за рівномірним законом. Визначте її основні числові характеристики.

Розв'язання. За умовою $a = 0$ та $b = 24$. Обчисліть основні числові характеристики розподілу:

$$M(X) = \frac{a+b}{2} = \frac{0+24}{2} = 12;$$

$$D(X) = \frac{(b-a)^2}{12} = \frac{(24-0)^2}{12} = 48;$$

$$\sigma = \sqrt{D(X)} = \sqrt{48} \approx 6,93.$$

Приклад 4.10. Неперервна випадкова величина X має показниковий розподіл із функцією:

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{якщо } x < 0, \\ 0,04 \cdot e^{-0,04x}, & \text{якщо } x \geq 0. \end{cases}$$

Знайдіть: $F(x), M(X), \sigma(X), P(1 < X < 2).$

Розв'язання.

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{якщо } x < 0, \\ 1 - e^{-0,04x}, & \text{якщо } x \geq 0. \end{cases}$$

За умовою $\lambda = 0,04$, тому $M(X) = \sigma(X) = \dfrac{1}{0,04} = 25.$

$$P(1 < X < 2) = e^{-0,04 \cdot 2} - e^{-0,04 \cdot 1} \approx 0,038.$$

Приклад 4.11. Випадкову величину X розподілено за показниковим законом, до того ж $\lambda = 1$. Знайдіть імовірність потрапляння випадкової величини X в інтервали: 1) (0; 2); 2) (3; 4).

Розв'язання. Для знаходження ймовірності потрапляння випадкової величини X в інтервал слід застосовувати таку формулу:

$$P(\alpha < X < \beta) = e^{-\lambda\alpha} - e^{-\lambda\beta}.$$

Тоді:

1) $P(0 < X < 2) = e^{-1\cdot 0} - e^{-1\cdot 2} = 1 - e^{-2} = 1 - 0{,}1353 = 0{,}8647$;

2) $P(3 < X < 4) = e^{-1\cdot 3} - e^{-1\cdot 4} = e^{-3} - e^{-4} = 0{,}0498 - 0{,}0183 = 0{,}0315$.

Приклад 4.12. Деталі, що випускаються цехом, за розміром діаметра розподіляють за нормальним законом за такими параметрами: математичне сподівання дорівнює 5 см, дисперсія – 0,81 см^2. Знайдіть: а) імовірність того, що діаметр навмання взятої деталі від 4 до 7 см; б) імовірність того, що діаметр деталі відрізняється від математичного сподівання не більше ніж на 2 см; в) межі, у яких варто очікувати розмір діаметра деталі, щоб імовірність невиходу за ці межі дорівнювала 0,95.

Розв'язання. Використовуючи наведені раніше формули, знаходять:

$$P(4 < X < 7) = \Phi\left(\frac{7-5}{\sqrt{0{,}81}}\right) - \Phi\left(\frac{4-5}{\sqrt{0{,}81}}\right) \approx \Phi(2{,}22) + \Phi(1{,}11) = 0{,}8533.$$

$$P(|X - 5| < 2) = 2\Phi\left(\frac{2}{0{,}9}\right) \approx 2\Phi(2{,}22) = 0{,}9736.$$

$$2\Phi\left(\frac{\varepsilon}{\sigma}\right) = 0{,}95; \quad \Phi\left(\frac{\varepsilon}{\sigma}\right) = 0{,}475.$$

За таблицею значень функції $\Phi(x)$ (додаток А) знаходять, що $\Phi(x) = 0{,}475$ за $x = 1{,}96$. Тоді, $\dfrac{\varepsilon}{\sigma} = 1{,}96$, звідси $\varepsilon = 0{,}9 \cdot 1{,}96 \approx 1{,}8$ см.

Отже, з імовірністю 0,95 можна стверджувати, що діаметр деталі перебуває в межах 5 ± 1,8 см або від 3,2 до 6,8 см.

Приклад 4.13. Величину X відхилення довжини виготовлюваних деталей від стандарту розподілено за нормальним законом із математичним сподіванням a = 40 см, і середнім квадратичним відхиленням

σ = 0,4 см. Яку точність довжини виробу можна гарантувати з імовірністю 0,8?

Розв'язання. Знайдіть додатне δ, для якого $P(|X-40|\le\delta)=0{,}8$.

З умови $P(|X-40|\le\delta)=2\Phi\left(\frac{\delta}{0{,}4}\right)=0{,}8$, буде $\Phi\left(\frac{\delta}{0{,}4}\right)=0{,}4$.

Із додатка Б $\frac{\delta}{0{,}4}=1{,}28$, звідки $\delta=0{,}512$.

Отже, з імовірністю 80 % можна гарантувати, що довжина виробу відхиляється від 40 см менше ніж на 0,512 см.

Приклад 4.14. Випадкову величину розподілено за нормальним законом із математичним сподіванням a = 20. Імовірність потрапляння її в інтервал (20; 30) дорівнює 0,4772. Визначте ймовірність потрапляння випадкової величини в інтервал (10; 25).

Розв'язання. Імовірність потрапляння випадкової величини в інтервал (10; 25) дорівнює:

$$P(10<X<25)=\Phi\left(\frac{25-20}{\sigma}\right)-\Phi\left(\frac{10-20}{\sigma}\right)=\Phi\left(\frac{5}{\sigma}\right)+\Phi\left(\frac{10}{\sigma}\right).$$

Отже, треба знайти σ.

За умовою $P(20<X<30)=0{,}4772$,

тоді

$$P(20<X<30)=\Phi\left(\frac{30-20}{\sigma}\right)-\Phi\left(\frac{20-20}{\sigma}\right)=\Phi\left(\frac{10}{\sigma}\right)-\Phi(0)=\Phi\left(\frac{10}{\sigma}\right)-0.$$

Тепер буде $\Phi\left(\frac{10}{\sigma}\right)=0{,}4772$.

Із додатка Б $\frac{10}{\sigma}=2$, звідки $\sigma=5$.

Обчисліть $P(10<X<25)=\Phi\left(\frac{5}{5}\right)-\Phi\left(\frac{10}{5}\right)=\Phi(1)+\Phi(2)=$

$$=0{,}3413+0{,}4772=0{,}8185.$$

Таким чином, випадкова величина потрапить в інтервал (10; 25) з імовірністю 81,85 %.

Завдання для самостійної роботи

4.1. Складіть закон розподілу кількості влучення в мішень за 4 постріли, якщо ймовірність улучення за кожного пострілу дорівнює 0,3. Обчисліть математичне сподівання і дисперсію цієї випадкової величини, користуючись тільки їхніми означеннями, а результати перевірте за формулами цих характеристик випадкової величини, розподіленої за біноміальним законом.

4.2. Виконують 8 пострілів у ціль. Імовірність улучення в ціль за кожного пострілу дорівнює 0,6. Нехай X – кількість улучень у ціль. Знайдіть функцію розподілу випадкової величини X. Визначте ймовірність того, що буде не менше ніж 7 улучень у ціль. Знайдіть $M(X)$, $D(X)$.

4.3. Знайдіть функцію розподілу кількості влучень у ціль, якщо зроблено 6 пострілів, а ймовірність улучення за одного пострілу дорівнює 0,2. Користаючись цією функцією, знайдіть імовірність того, що ціль буде вражено не менше від 1 разу, але менше ніж 5 разів.

4.4. У місті 10 комерційних банків. У кожного ризик банкрутства протягом року становить 10 %. Складіть ряд розподілу кількості банків, які можуть збанкрутувати протягом наступного року; побудуйте його графік. Знайдіть числові характеристики його розподілу. Запишіть функцію розподілу ймовірностей і побудуйте її графік. Обчисліть імовірність того, що протягом року збанкрутує не більше від 1 банку.

4.5. Підручник видано тиражем 100 000 примірників. Імовірність того, що підручник зброшуровано неправильно, дорівнює 0,0001. Знайдіть імовірність того, що тираж містить тільки 5 бракованих книг.

4.6. Випадкову величину X розподілено за законом Пуассона з параметром $\lambda=1$. Знайдіть імовірності подій: а) $X=1$; б) $X\geq 1$; в) $X\leq 2$; г) $X=0$; д) $X>1$; е) $1\leq X\leq 3$.

4.7. Середня кількість замовлень на таксі, що надходять на диспетчерський пункт за 1 хв, дорівнює 3. Знайдіть імовірність того, що за 2 хв надійде: а) 4 виклики; б) менше від 4 викликів; в) не менше від 4 викликів.

4.8. Відомо, що щільність імовірності $f(x)$ величини X визначено за допомогою таких рівностей:

$$f(x)=\begin{cases} A\cos x, \text{ якщо } |x|\leq \dfrac{\pi}{2}, \\ 0, \qquad\quad \text{якщо } |x|>\dfrac{\pi}{2}. \end{cases}$$

Знайдіть коефіцієнт A. Визначте ймовірність потрапляння X в інтервал $\left(-\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{4}\right)$.

4.9. Знайдіть математичне сподівання та дисперсію випадкової величини X, що задано функцією розподілу:

а) $F(x) = \begin{cases} 0, & \text{якщо } x \le 0, \\ \frac{x}{4}, & \text{якщо } 0 < x \le 4, \\ 1, & \text{якщо } x > 4, \end{cases}$ б) $F(x) = \begin{cases} 0, & \text{якщо } x \le -2, \\ \frac{x}{4} + \frac{1}{2}, & \text{якщо } -2 < x \le 2, \\ 1, & \text{якщо } x > 2. \end{cases}$

4.10. Усі значення рівномірно розподіленої випадкової величини належать відрізку (12; 18). Знайдіть щільність розподілу цієї випадкової величини, а також імовірність того, що випадкова величина набуде значення з інтервалу (14; 17).

4.11. Знайдіть дисперсію і середнє квадратичне відхилення випадкової величини X, рівномірно розподіленої в інтервалі (2; 10).

4.12. Автобуси деякого маршруту йдуть за розкладом з інтервалом руху 6 хв. Знайдіть імовірність того, що пасажир, який підійде до зупинки, буде очікувати автобус менше ніж 2 хв.

4.13. Випадкову величину X, дисперсія якої $D(X) = \frac{1}{25}$, розподілено за показниковим законом. Знайдіть імовірність потрапляння випадкової величини X в інтервал: а) (0; 1); б) (1; 3).

4.14. Неперервну випадкову величину X розподілено за показниковим законом із функцією розподілу $F(x) = 1 - e^{-0,2x}$ за $x \ge 0$; $F(x) = 0$ за $x < 0$. Знайдіть імовірність виконання нерівності $2 < X < 4$.

4.15. Неперервну випадкову величину розподілено за показниковим законом зі щільністю ймовірності $f(x) = 0,03e^{-0,03x}$ за $x \ge 0$; $f(x) = 0$ за $x < 0$. Знайдіть: а) функцію розподілу $F(x)$; б) імовірність потрапляння випадкової величини X в інтервал (1; 3).

4.16. Знайдіть математичне сподівання, дисперсію, середнє квадратичне відхилення випадкової величини зі щільністю ймовірності $f(x) = 3e^{-3x}$ за $x \ge 0$; $f(x) = 0$ за $x < 0,4$.

4.17. Випадкову величину X розподілено за показниковим законом із функцією розподілу $F(x)=1-e^{-0.2x}$ за $x \geq 0$; $F(x)=0$ за $x<0$. Знайдіть: а) математичне сподівання величини X; б) дисперсію величини X; в) середнє квадратичне відхилення величини X; г) імовірність виконання нерівності $1 \leq X \leq 2$.

4.18. Випадкову величину X розподілено за нормальним законом із математичним сподіванням a = 40 і дисперсією $D(X)=200$. Обчисліть імовірність потрапляння випадкової величини в інтервал (30; 80).

4.19. Керівник банку встановив, що тривалість обслуговування клієнта в черзі підпорядковано нормальному закону. Математичне сподівання 3 хв, середнє квадратичне відхилення – 1 хв. Визначте ймовірність того, що клієнт перебуває в черзі: 1) від 2 до 3,5 хв; 2) менше ніж 1 хв; 3) понад 5 хв.

4.20. Автомат виготовляє деталь, яку вважають стандартною, якщо відхилення діаметра деталі від проєктного розміру не перевищує 2 мм. Випадкове відхилення діаметра підпорядковано нормальному закону із середнім квадратичним відхиленням $\sigma=1,6$мм і математичним сподіванням $a=0$. Скільки відсотків стандартних деталей виготовляє автомат?

4.21. Деталі за розміром розподілено за нормальним законом із середнім значенням 20 см і дисперсією 0,04 см^2. Знайдіть точність виробу, яку можна гарантувати з імовірністю 0,95.

4.22. Математичне сподівання та середнє квадратичне відхилення нормально розподіленої випадкової величини X, відповідно, дорівнюють 20 і 5. Знайдіть імовірність того, що величина X набуде значення в інтервалі (15; 25).

4.23. Зріст юнаків, яких забирають до війська за віком, передбачають нормально розподіленим із середнім значенням $a=170$ см і середнім квадратичним відхиленням $\sigma=5$ см. Знайдіть відсоток юнаків, що мають зріст: а) нижчий за 160 см; б) вищий за 180 см; в) від 160 до 175 см.

4.24. Діаметр деталей, виготовлених цехом, є випадковою величиною з нормальним законом розподілу. Її математичне сподівання дорівнює 2,5 см, а дисперсія – 0,0001 см^2. У яких межах можна практично гарантувати діаметр деталі з імовірністю $P=0,9973$?

4.25. Випадкову величину X розподілено нормально з $a=25$. Імовірність $P(35<X<40)=0,2$. Знайдіть імовірність $P(10<X<15)$.

Практичне заняття 5
Методи параметричного та непараметричного оцінювання параметрів

Мета практичного заняття: ознайомлення із завданнями математичної статистики, особливостями вибіркового методу та формування компетентностей щодо можливостей його застосування до дослідження характеристик об'єктів у генеральній сукупності.

Усю сукупність, що вивчають, називають **генеральною сукупністю**. Частину об'єктів, яку дістають із генеральної сукупності, називають **вибіркою** або **вибірковою сукупністю**.

Повну кількість об'єктів генеральної сукупності чи вибіркової сукупності називають їхнім **обсягом**. Обсяг генеральної сукупності позначають N, а обсяг вибіркової сукупності – n.

Вибірку називають **випадковою**, якщо з генеральної сукупності елемент брати навмання і кожен із них може потрапити до неї з однаковою ймовірністю.

Якщо випадкова вибірка достатньо повно характеризує генеральну сукупність, то її називають **репрезентативною**.

Нехай є вибірка з генеральної сукупності $x_1, x_2, ..., x_n$. Якщо записати цю вибірку у вигляді зростаючої або спадної послідовностей, то буде дискретний **варіаційний ряд**.

Варіаційний ряд зручно записувати у вигляді таблиці (табл. 5.1), де x_i – можливі значення випадкової величини X та їхні частоти (m_i), $\sum_{i=1}^{k} m_i = n$ – обсяг вибірки.

Таблиця 5.1

Дискретний варіаційний ряд

x_i	x_1	x_2	…	x_k
m_i	m_1	m_2	…	m_k

Числові значення, яких набуває досліджувана ознака, називають **варіантами**. **Частотою** називають кількість появи окремих значень випадкової величини (варіант).

У дискретному варіаційному ряді, замість частот, можна вказувати відносні частоти.

Відносною частотою w_i називають відношення частоти появи ознаки до загального обсягу вибірки:

$$w_i = \frac{m_i}{n}, \ \sum_{i=1}^{k} w_i = 1.$$

Відносна частота характеризує частку сукупності членів з однаковими значеннями ознаки.

Якщо обсяг вибірки великий $(n \geq 30)$, користуватися дискретним варіаційним рядом незручно. У цьому разі, а також у разі, якщо дані визначені в результаті вимірювання неперервної випадкової величини, за вибіркою становлять **інтервальний варіаційний ряд**. Для його побудови весь інтервал розподілу ознаки розподіляють на k однакових частин довжиною h. Кількість k таких інтервалів, на які розподіляють вибіркову сукупність обсягом n за первинного групування, оцінюють за формулою Стерджеса:

$$k = 1 + 3{,}322 \cdot \lg n,$$

де n – кількість інтервалів округлюють до найближчого цілого числа.

Зазвичай, це число перебуває в межах від 8 до 12.

Для того щоб розподілити за інтервалами результати вимірювань неперервної випадкової величини, що становлять вибіркову сукупність, насамперед, необхідно визначити найменше x_{min} та найбільше x_{max} значення варіант.

Різницю між ними $R = x_{max} - x_{min}$ називають **розмахом**.

Поділивши розмах на кількість інтервалів, визначають довжину інтервалу, тобто **крок** $h = \frac{R}{k}$, $h = x_{i+1} - x_i$. Для кожного інтервалу частоту m_i визначають як кількість значень випадкової величини, що потрапили до цього інтервалу. Кожний з інтервалів є напіввідкритим, тобто відкритим із боку верхньої межі.

Поставивши кожному з інтервалів у відповідність частоту m_i потраплянь у заданий інтервал або відносну частоту $w_i = \frac{m_i}{n}$, визначають статистичний розподіл неперервної випадкової величини, який задано у формі таблиці (табл. 5.2).

Таблиця 5.2

Інтервальний варіаційний ряд

$[x_i; x_{i+1})$	$[x_1; x_2)$	$[x_2; x_3)$	…	$[x_k; x_{k+1})$
$m_i \ (w_i)$	$m_1 \ (w_1)$	$m_2 \ (w_2)$	…	$m_k \ (w_k)$

Якщо варіаційний ряд задано у вигляді табл. 5.1 і 5.2, то його називають **статистичним рядом розподілу**.

Статистичний ряд розподілу випадкової величини X, визначений за емпіричними даними, називають також **емпіричним законом розподілу**. Такий ряд можна зобразити графічно. Для цього на осі абсцис наносять варіанти x_i, а на осі ординат – частоти m_i (або відносні частоти w_i), тобто є певні точки $M_i(x_i, m_i)$. З'єднавши точки M_i відповідних варіант і частот, визначають ламану лінію, яку називають **полігоном розподілу**.

Емпіричною функцією розподілу вибірки називають функцію $F^*(x)$, яка для будь-якого значення x визначає відносну частоту події, що задовольняє умові $X < x$, тобто випадкова величина набуде значення, меншого за x:

$$F^*(x) = \frac{m_x}{n},$$

де m_x – сума частот варіант для значень аргументу, менших за x;
n – обсяг вибірки.

Емпіричну функцію розподілу визначають шляхом послідовного додавання відносних частот варіант, менших за x. Графіком емпіричної функції розподілу є **кумулята**, або графік накопичених відносних частот.

Для генеральної сукупності функцію розподілу позначають $F(x)$. Різниця між емпіричною та теоретичною функціями полягає в тому, що *теоретична функція* $F(x)$ визначає ймовірність події $X < x$, а *емпірична функція* $F^*(x)$ визначає відносну частоту цієї події. Отже, емпіричну функцію розподілу вибірки може бути використано для оцінювання теоретичної функції розподілу генеральної сукупності.

Функція $F^*(x)$ має такі самі властивості, що й функція $F(x)$, тобто значення емпіричної функції належить відрізку $[0; 1]$;

$F^*(x)$ – неспадна функція: $F^*(x_2) > F^*(x_1)$, якщо $x_2 > x_1$;

якщо x_1 – найменша варіанта, то $F^*(x) = 0$ за $x \le x_1$, якщо x_k – найбільша варіанта, то $F^*(x) = 1$ за $x > x_k$.

У разі інтервальних варіаційних рядів, визначених для неперервної випадкової величини, графічним зображенням є **гістограма**. Розрізняють гістограму частот і гістограму відносних частот.

Гістограмою частот (**відносних частот**) називають східчасту фігуру, яка складається із прямокутників, площа кожного з яких дорівнює частоті потрапляння випадкової величини у відповідний інтервал. Основами прямокутників є інтервали, довжиною h, а висоти дорівнюють щільності частоти $\frac{m_i}{h}$ ($\frac{w_i}{h}$). Для побудови гістограми на осі абсцис відкладають часткові інтервали, а над ними проводять відрізки, які паралельні осі абсцис на відстані $\frac{m_i}{h}$ ($\frac{w_i}{h}$). Площа гістограми дорівнює сумі всіх частот, тобто обсягу вибірки, площа гістограми відносних частот дорівнює сумі всіх відносних частот, тобто 1.

Приклад 5.1. Протягом місяця магазин із продажу канцелярських товарів вів облік щоденної кількості покупців, які користуються платіжними картками. Результати спостережень наведено в табл. 5.3.

Таблиця 5.3

Кількість користувачів платіжними картками

12	15	10	8	12	14	11	12	13	12
11	14	14	9	7	15	16	10	11	13
8	11	15	17	10	13	9	12	12	9

За вибірковою сукупністю побудуйте варіаційний ряд, а також полігон частот.

Розв'язання. Оскільки серед результатів 30 вимірювань, які містяться у вибірковій сукупності, є тільки 11 різних варіант, розташуйте їх у порядку зростання та підрахуйте, скільки разів кожну з них зустрічали у вибірковій сукупності.

Результати надайте у вигляді таблиці (табл. 5.4).

Таблиця 5.4

Дискретний ряд

$X = x_i$	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17
m_i	1	2	3	3	4	6	3	3	3	1	1

Перевірте, що $\sum_{i=1}^{11} m_i = 30$, та побудуйте полігон частот (рис. 5.1).

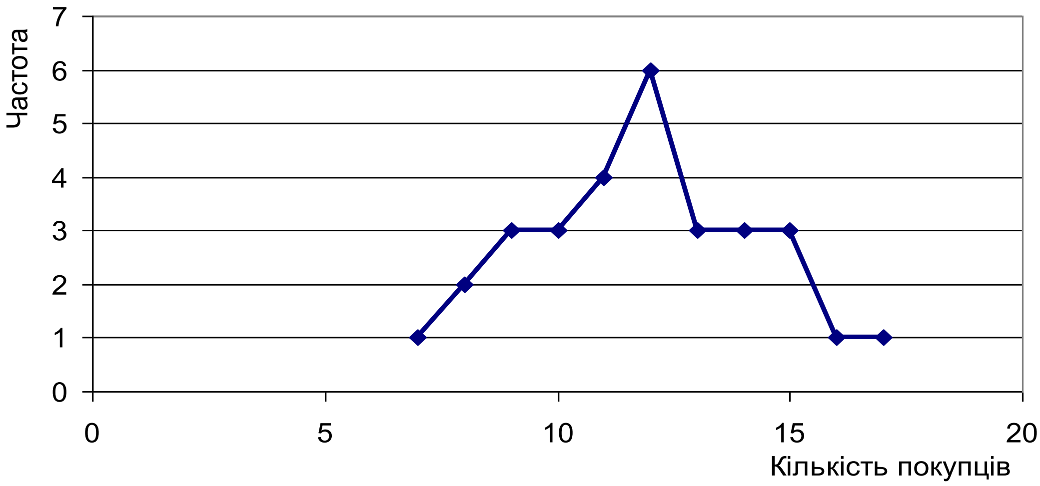

Рис. 5.1. **Полігон частот за даними прикладу 5.1**

Приклад 5.2. Задано вибірку рядом розподілу (табл. 5.5).

Таблиця 5.5

Ряд розподілу

x_i	1	6	11	16
m_i	20	10	40	30

Знайдіть та побудуйте емпіричну функцію розподілу $F^*(x)$.

Розв'язання. Знайдіть обсяг вибірки:

$$n = \sum_{i=1}^{4} m_i = 20 + 10 + 40 + 30 = 100.$$

Найменше значення величини X – $x_1 = 1$, тому $F^*(1) = 0$, якщо $X \le 1$.

Значення $X < 6$ спостерігали 20 разів, отже, $F^*(x) = \frac{20}{100} = 0{,}2$, якщо $1 < x \le 6$.

Значення $X < 11$, тобто 1 і 6, спостерігали $20 + 10 = 30$ разів, отже, $F^*(x) = \frac{30}{100} = 0{,}3$, якщо $6 < x \le 11$.

Значення $X < 16$, тобто 1, 6 і 11, спостерігали $20 + 10 + 40 = 70$ разів, отже, $F^*(x) = \frac{70}{100} = 0{,}7$, якщо $11 < x \le 16$. Найбільшим значенням величини X є $x_4 = 16$, отже, $F^*(x) = 1$, якщо $X > 16$.

Таким чином, можна записати емпіричну функцію розподілу вибірки у вигляді:

$$F^*(x) = \begin{cases} 0, & x \le 1; \\ 0{,}2, & 1 < x \le 6; \\ 0{,}3, & 6 < x \le 11; \\ 0{,}7, & 11 < x \le 16; \\ 1, & x > 16. \end{cases}$$

Графік цієї функції зображено на рис. 5.2.

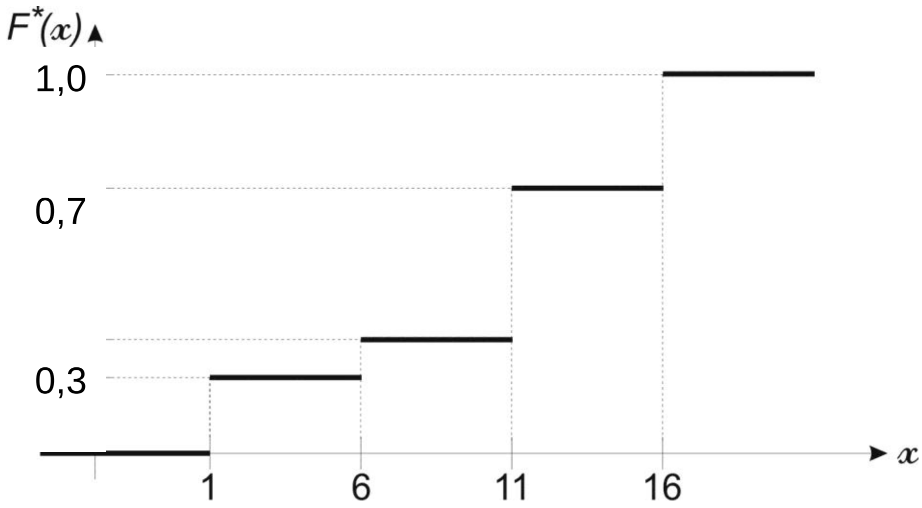

Рис. 5.2. **Емпірична функція розподілу**

Приклад 5.3. Проведено 40 спостережень швидкості автобусів на певній дільниці дороги (км/год), результати яких наведено в табл. 5.6.

Таблиця 5.6

Дані спостережень швидкості автобусів

41	41	29	25	41	43	42	34	41	30
33	48	50	36	35	46	28	46	50	41
50	27	43	53	48	47	34	35	29	42
30	35	38	41	36	38	45	59	44	43

Складіть інтервальний ряд статистичного розподілу.

Розв'язання. Оскільки обсяг вибіркової сукупності великий ($n = 40$), виконайте групування варіант заданої вибірки за інтервалами.

Отже, $x_{\min} = 25,\ x_{\max} = 59,\ R = x_{\max} - x_{\min} = 34$.

Для визначення кількості інтервалів застосуйте формулу Стерджеса:

$$k = 1 + 3{,}322 \cdot \lg 40 \approx 6.$$

Довжина інтервала дорівнює:

$$h = \frac{x_{\max} - x_{\min}}{k} = \frac{59 - 25}{1 + 3{,}322 \cdot \lg 40} = 5{,}52.$$

Підрахуйте частоти m_i улучення значень випадкової величини в кожний інтервал і результати запишіть у таблицю (табл. 5.7).

Таблиця 5.7

Інтервальний варіаційний ряд

$[x_i; x_{i+1})$	[22,5; 27,5)	[27,5; 32,5)	[32,5; 37,5)	[37,5; 42,5)	[42,5; 47,5)	[47,5; 52,5)	[52,5; 57,5)	[57,5; 62,5)	Сума
m_i	2	5	8	11	7	5	1	1	n = 40

Приклад 5.4. Для інтервального варіаційного ряду (табл. 5.8) з обсягом вибірки $n = 20$ побудуйте гістограму частот.

Таблиця 5.8

Вихідний інтервальний варіаційний ряд

$(x_{i-1} \div x_i]$	9 – 10	10 – 11	11 – 12	12 – 13	13 – 14	14 – 15	15 – 16
m_i	2	6	4	3	3	1	1

Розв'язання. Для побудови гістограми частот (рис. 5.3) на осі абсцис відкладіть часткові проміжки та на них побудуйте прямокутники, висоти яких дорівнюють $\dfrac{m_i}{h}$ ($h = 1$ – довжини інтервалів).

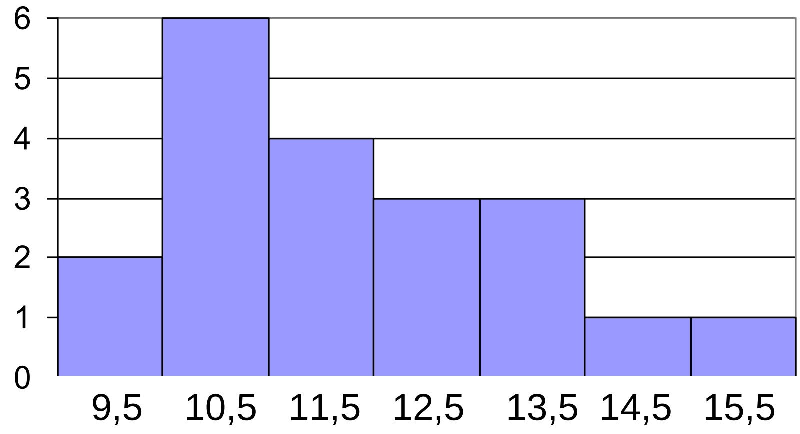

Рис. 5.3. **Гістограма частот**

Площа побудованих прямокутників дорівнює обсягу вибірки $n = 20$.

За даними статистичного розподілу визначають основні точкові числові характеристики випадкової величини.

Вибіркова середня $\bar{x}$ визначає центр вибіркової сукупності. За незгрупованими даними вибіркову середню визначають як середнє арифметичне вибіркових даних:

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^{n} x_i .$$

За варіаційним рядом вибіркову середню обчислюють як середнє виважене варіант, кожну з яких беруть із вагою, що відповідає її відносній частоті:

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^{k} x_i m_i .$$

Вибіркову дисперсію D^* за варіаційним рядом визначають як середнє виважене квадратів відхилення значень випадкової величини від вибіркової середньої:

$$D^* = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^{k} (x_i - \overline{x})^2 m_i \text{, або } D^* = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^{k} x_i^2 m_i - (\overline{x})^2.$$

Вибіркова дисперсія є зсунутою оцінкою дисперсії випадкової величини генеральній сукупності.

Ураховуючи це, для вибіркової дисперсії вводять поправку на зсув, яка дорівнює $\frac{n}{n-1}$.

Для визначення **виправленої дисперсії**, що позначають S_x^2, користуються такою формулою:

$$S_x^2 = \frac{n}{n-1} D^*.$$

Середнє квадратичне відхилення вибірки σ^* визначають як корінь квадратний із вибіркової дисперсії: $\sigma^* = \sqrt{D^*}$. Воно характеризує розсіювання випадкової величини навколо центра вибіркової сукупності. На відміну від дисперсії, його вимірність збігається з вимірністю випадкової величини.

Величина $S_x = \sqrt{S_x^2}$ є **виправленим середнім квадратичним відхиленням**. Саме ця величина і є оцінкою середнього квадратичного відхилення теоретичного розподілу, яке характеризує розсіювання значень випадкової величини навколо центра сукупності.

Інтервальні оцінки використовують у тих випадках, якщо точкові оцінки не достатньо точно відображають характеристики ознаки. Тоді ознаку, яку вивчають, покривають довірчим інтервалом.

Довірчим інтервалом називають інтервал, що покриває всі значення випадкової величини із заданою ймовірністю або із заданим рівнем значущості. Загальноприйнятими є два рівні довірчої ймовірності: 0,95 та 0,99.

Разом із надійністю оцінки γ розглядають **рівень значущості** $\alpha = 1 - \gamma$. Він визначає ймовірність того, що за заданим рівнем надійності значення параметра θ, який оцінюють за вибірковою сукупністю, може вийти за межі довірчого інтервалу.

Стандартна форма надання **довірчого інтервалу для оцінювання математичного сподівання**:

$$\bar{x} - t_\gamma \frac{S_x}{\sqrt{n}} < a < \bar{x} + t_\gamma \frac{S_x}{\sqrt{n}}.$$

Із довірчою ймовірністю $P = \gamma$ похибка ε, із якою математичне сподівання a оцінюють за вибірковою середньою $\bar{x}$, не перевищує значення:

$$\varepsilon = t_\gamma \cdot \frac{S_x}{\sqrt{n}}.$$

Для невеликих за обсягом вибіркових сукупностей значення t_γ знаходять за спеціальною таблицею критичних точок розподілу Стьюдента (додаток В), відповідно до рівня довірчої ймовірності γ і кількості ступенів свободи $n-1$.

Зі збільшенням $n \to \infty$ розподіл Стьюдента наближається до нормального розподілу.

Тому для великих вибіркових сукупностей величину t_γ визначають як аргумент інтегральної функції Лапласа (див. додаток А).

Граничний обсяг вибірки знаходять за допомогою такої формули:

$$n \geq \left(\frac{t_\gamma \cdot S_x}{\Delta} \right)^2, \quad n \in N,$$

де Δ – напівширина довірчого інтервалу, до якого з довірчою ймовірністю не меншою за γ буде належати математичне сподівання випадкової величини, розподіленої за нормальним законом.

Довірчий інтервал для оцінювання середнього квадратичного відхилення:

$$S_x(1-q) \leq \sigma \leq S_x(1+q).$$

Значення величини q, яка залежить від заданої надійності та обсягу вибірки, знаходять у спеціальній таблиці (див. додаток Б табл. Б.2).

Приклад 5.5. Вибіркову сукупність задано таблицею розподілу (табл. 5.9).

Таблиця 5.9

Вихідна вибіркова сукупність

x_i	3	3,5	4	4,5	5
m_i	5	4	9	4	8

Знайдіть виправлену вибіркову дисперсію.

Розв'язання. Обсяг вибірки: $n = 5 + 4 + 9 + 4 + 8 = 30$.

Вибіркова середня дорівнює:

$$\bar{x} = \frac{3 \cdot 5 + 3{,}5 \cdot 4 + 4 \cdot 9 + 4{,}5 \cdot 4 + 5 \cdot 8}{30} = 4{,}1.$$

Дисперсія дорівнює:

$$D = \frac{(3 - 4{,}1)^2 \cdot 5 + (3{,}5 - 4{,}1)^2 \cdot 4 + (4 - 4{,}1)^2 \cdot 9 + (4{,}5 - 4{,}1)^2 \cdot 4 + (5 - 4{,}1)^2 \cdot 8}{30},$$

$$D = 0{,}49.$$

Отже, виправлена вибіркова дисперсія: $S_x^2 = \dfrac{30}{29} \cdot 0{,}49 \approx 0{,}505$.

Приклад 5.6. Із метою перевірки стану внесків у банк, аудитор відібрав 100 рахунків. Середнє значення внеску $\bar{x} = 12{,}57$ (тис. грн), середнє квадратичне відхилення для всієї генеральної сукупності (усіх можливих внесків) $\sigma = 5$ (тис. грн). Знайдіть 95-відсотковий довірчий інтервал середнього внеску в банку.

Розв'язання. $P = 2\Phi(t) = 0{,}95$, тоді $\Phi(t) = 0{,}475$.

За таблицею значень функції $\Phi(t)$ (див. додаток А) визначають $t = 1{,}96$.

Тоді довірчий інтервал набуває вигляду:

$$12{,}57 - \frac{5 \cdot 1{,}96}{\sqrt{100}} \le a \le 12{,}57 + \frac{5 \cdot 1{,}96}{\sqrt{100}}, \; 11{,}59 \le a \le 13{,}56.$$

Таким чином, із надійністю 95% довірчий інтервал середнього внеску для цього банку становить $(11{,}59;\ 13{,}56)$ тис. грн.

Приклад 5.7. Нехай $\bar{x} = 2$, $\varepsilon = 0,2$, $\sigma = 1$. Визначте, якого обсягу треба взяти вибірку, щоб побудувати довірчий інтервал для математичного сподівання довжини не більш ніж 2ε із надійністю $99\ \%$.

Розв'язання. $P = 2\Phi(t) = 0,99$, тоді $\Phi(t) = 0,495$.

За таблицею значень функції $\Phi(t)$ (див. додаток А) визначають $t = 2,58$.

Із формули $\varepsilon = \dfrac{\sigma t}{\sqrt{n}}$ випливає, що $n = \dfrac{\sigma^2 t^2}{\varepsilon^2}$, звідки

$$n = \frac{1 \cdot (2,58)^2}{(0,2)^2} = 166,41.$$

Отже, $n = 167$.

Приклад 5.8. Нехай $n = 50$, $s = 2,82$. Із надійністю $95\ \%$ побудуйте довірчий інтервал для $\sigma_{\text{ген.}}$.

Розв'язання. За табл. Б.2 додатка Б $q\,(0,95;\ 50) = 0,21$.

Тоді довірчий інтервал набуває вигляду:

$$2,82(1 - 0,21) \le \sigma_{\text{ген.}} \le 2,82(1 + 0,21),$$

$$2,228 \le \sigma_{\text{ген.}} \le 3,412.$$

Таким чином, із надійністю 95 % будь-яке число із цього інтервалу можна взяти за генеральне середньоквадратичне відхилення.

Завдання для самостійної роботи

5.1. Обстеження терміну, протягом якого здійснюють обслуговування одного клієнта на терміналі, дало такі значення (с):

34, 34, 34, 33, 35, 32, 34, 32, 37, 36, 34, 35, 35, 32, 33, 35, 34, 36, 38, 33, 35, 34, 36, 34, 33, 35, 32, 37, 32, 34, 36, 32, 34, 33, 35, 35, 33, 34, 35, 38, 36, 34, 35, 33, 37, 35, 34, 37, 33, 35.

Необхідно:

1) скласти дискретний варіаційний ряд, який характеризує розподіл терміну обслуговування клієнтів та побудувати полігон частот;

2) записати функцію розподілу та побудувати її графік;

3) скласти інтервальний ряд, узявши за довжину інтервалу величину 2 с;

4) побудуйте гістограму частот.

5.2. Задано інтервальний ряд розподілу заробітної плати (тис. грн) робітників цеху (табл. 5.10).

Таблиця 5.10

Розподіл заробітної плати

x_i	4,00 – 4,40	4,40 – 4,80	4,80 – 5,20	5,20 – 5,60	5,60 – 6,00
m_i	10	15	20	15	10

Знайдіть середній заробіток, дисперсію та середнє квадратичне відхилення.

5.3. Випадковим способом було відібрано 20 абітурієнтів і визначено їхні бали на зовнішньому незалежному оцінюванні з математики. Визначені результати дослідження вибіркової сукупності наведено в табл. 5.11 у вигляді інтервального статистичного розподілу.

Таблиця 5.11

Розподіл балів оцінювання з математики

$[x_i, x_{i+1})$	[165,5; 170,5)	[170,5; 175,5)	[175,5; 180,5)	[180,5; 185,5)
m_i	4	6	8	2

Побудуйте довірчий інтервал, до якого з надійністю $\gamma = 99\ \%$ буде належати середній бал усіх абітурієнтів цього віку.

5.4. Виробник запчастин бажає оцінити середню вагу деталі, що випускає. За результатами обстеження вибіркової сукупності із 40 деталей знайдено середню вагу $\bar{x} = 250$ мг та середнє квадратичне відхилення $\sigma^* = 2$ мг. Знайдіть довірчий інтервал, до якого середня вага деталі для всієї партії буде належати з надійністю 95 %. Знайдіть необхідний обсяг вибірки, який забезпечить із надійністю 95 % точність оцінювання $\varepsilon = 1$ мг.

Практичне заняття 6
Лінійне програмування

Мета практичного заняття: навчитися будувати математичні моделі економічних задач та розв’язувати їх за допомогою графічного та симплексного методів.

Графічний метод розв’язання задач лінійного програмування

Найбільш простим методом розв’язання задач лінійного програмування (ЗЛП) є **графічний метод**. Його застосовують для ЗЛП із двома змінними, заданими в неканонічній формі, і багатьма змінними в канонічній формі за умови, що вони містять не більше від двох вільних змінних.

Розв’язання ЗЛП графічним методом здійснюють за алгоритмом:

1. Знаходять область припустимих рішень системи обмежень задачі.

2. Будують вектор $\overline{\nabla Z}$. Координатами вектора $\overline{\nabla Z}$ є коефіцієнти цільової функції $Z(x_1, x_2)$

3. Проводять лінію рівня Z_0, що перпендикулярна $\overline{\nabla Z}$.

4. Лінію рівня пересувають за напрямом вектора $\overline{\nabla Z}$ для задач на максимум й за напрямом, протилежним до $\overline{\nabla Z}$, для задач на мінімум. Пересування лінії рівня роблять доти, доки в ній залишиться тільки одна загальна точка з областю припустимих рішень (ОПР). Ця точка визначає єдине рішення ЗЛП та екстремум.

Якщо виявиться, що лінія рівня паралельна одній зі сторін ОПР, то ЗЛП буде мати безліч рішень.

Якщо ОПР становить необмежену область, то цільова функція може бути необмеженою.

Задача лінійного програмування може бути нерозв'язаною, коли визначальні її обмеження виявляться суперечливими.

5. Знаходять координати точки екстремуму та значення цільової функції в ній.

Розгляньмо пошук оптимального плану випуску виробів підприємства на прикладі.

Приклад 6.1. Розв’яжіть графічним методом задачу лінійного програмування:

$$z = 2x_1 + 5x_2 \quad \rightarrow \quad \max;$$

$$\begin{cases} 4x_1 + 5x_2 \le 40, \\ 2x_1 + 3x_2 \ge 6, \\ -x_1 + \ x_2 - 5 \le 0, \end{cases}$$

$$x_1 \ge 0, \quad x_2 \ge 0.$$

Розв’язання. Визначте багатокутник планів, який містить усі розв’язки основної системи нерівностей та системи обмежень на знак. Для цього на координатній площині в І-й чверті побудуйте прямі:

$$L_1: \quad 4x_1 + 5x_2 = 40 \quad \Rightarrow \quad \frac{x_1}{10} + \frac{x_2}{8} = 1;$$

$$L_2: \quad 2x_1 + 3x_2 = 6 \quad \Rightarrow \quad \frac{x_1}{3} + \frac{x_2}{2} = 1;$$

$$L_3: \quad -x_1 + x_2 = 5 \quad \Rightarrow \quad \frac{x_1}{-5} + \frac{x_2}{5} = 1.$$

Для кожної прямої стрілками вказано півплощину, де виконується відповідна нерівність. Та частина площини, де виконуються всі нерівності системи обмежень, і є багатокутником планів (рис. 6.1). Цільова функція досягає екстремального значення у вершині цього багатокутника.

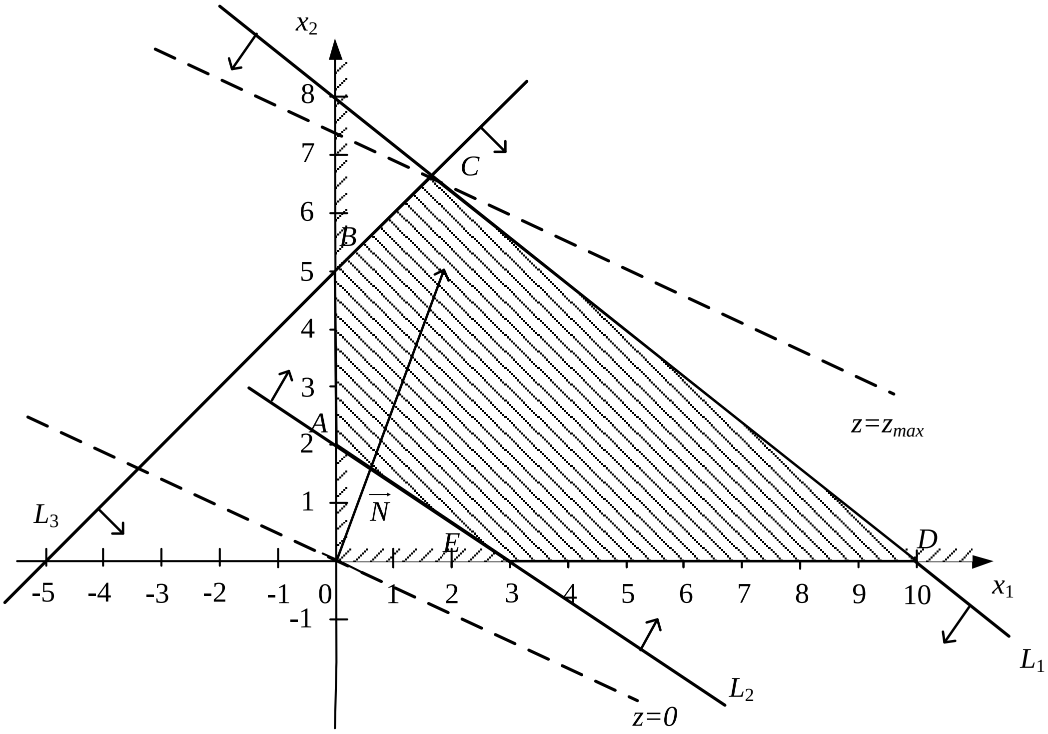

Рис. 6.1. **Графічне розв’язання ЗЛП до прикл. 6.1**

Побудуйте вектор $grad\ z = (2; 5)$. Він визначає напрям, у якому відбувається зростання цільової функції $z = 2x_1 + 5x_2$. Цей вектор є вектором нормалі до лінії рівня. Проведіть перпендикулярно до нього лінію, що проходить через початок координат (для неї $z = 0$). Це точка, через яку лінія рівня входить до багатокутника планів. У цій точці цільова функція досягає мінімального значення.

Пересуваючи лінію рівня вздовж вектора $grad\ z = (2; 5)$, знайдіть вершину, через яку лінія рівня виходить із багатокутника планів. Цією вершиною є точка перетину ліній L_1 та L_3. Саме цій точці відповідає оптимальний план, за яким цільова функція досягає максимуму.

Визначте компоненти оптимального плану, розв'язуючи систему рівнянь, що відповідають рівнянням ліній L_1 та L_3:

$$\begin{cases} 4x_1 + 5x_2 = 40, \\ -x_1 + x_2 = 5. \end{cases}$$

Для цього можна скористатися формулами Крамера:

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta}; \quad x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta},$$

де $\Delta = \begin{vmatrix} 4 & 5 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 9$; $\Delta_1 = \begin{vmatrix} 40 & 5 \\ 5 & 1 \end{vmatrix} = 15$; $\Delta_2 = \begin{vmatrix} 4 & 40 \\ -1 & 5 \end{vmatrix} = 60$.

Звідси знаходять: $x_1 = \frac{15}{9} = \frac{5}{3}$; $x_2 = \frac{60}{9} = \frac{20}{3}$.

Отже, визначено оптимальний план виробництва продукції. Його можна подати у вигляді матриці: $X_{опт} = \left(\frac{5}{3}; \frac{20}{3} \right)$.

Тепер обчисліть прибуток, який отримає підприємство від реалізації продукції, виготовленої за цим планом:

$$z_{\max} = z\left(X_{опт}\right) = 2 \cdot \frac{5}{3} + 5 \cdot \frac{20}{3} = \frac{110}{3}.$$

Відповідь: $X_{опт} = \left(\frac{5}{3}; \frac{20}{3} \right)$; $z_{\max} = \frac{110}{3}$.

Приклад 6.2. Розв'яжіть графічним методом ЗЛП:

$$z = 4x_1 + 6x_2 \quad \rightarrow \quad \min$$

$$\begin{cases} 3x_1 + x_2 \geq 9, \\ x_1 + 2x_2 \geq 8, \\ x_1 + 6x_2 \geq 12, \end{cases}$$

$$x_1 \geq 0, \;\; x_2 \geq 0.$$

Розв'язання. Застосуйте до розв'язання задачі графічний метод. Для побудови багатокутника планів у I-й чверті координатної площини проведіть прямі за рівняннями:

$$L_1: \quad 3x_1 + x_2 = 9 \quad \Rightarrow \quad \frac{x_1}{3} + \frac{x_2}{9} = 1;$$

$$L_2: \quad x_1 + 2x_2 = 8 \quad \Rightarrow \quad \frac{x_1}{8} + \frac{x_2}{4} = 1;$$

$$L_3: \quad x_1 + 6x_2 = 12 \quad \Rightarrow \quad \frac{x_1}{12} + \frac{x_2}{2} = 1.$$

Усі нерівності системи обмежень сумісні в межах багатокутника планів, який становить необмежену багатокутну область (рис. 6.2).

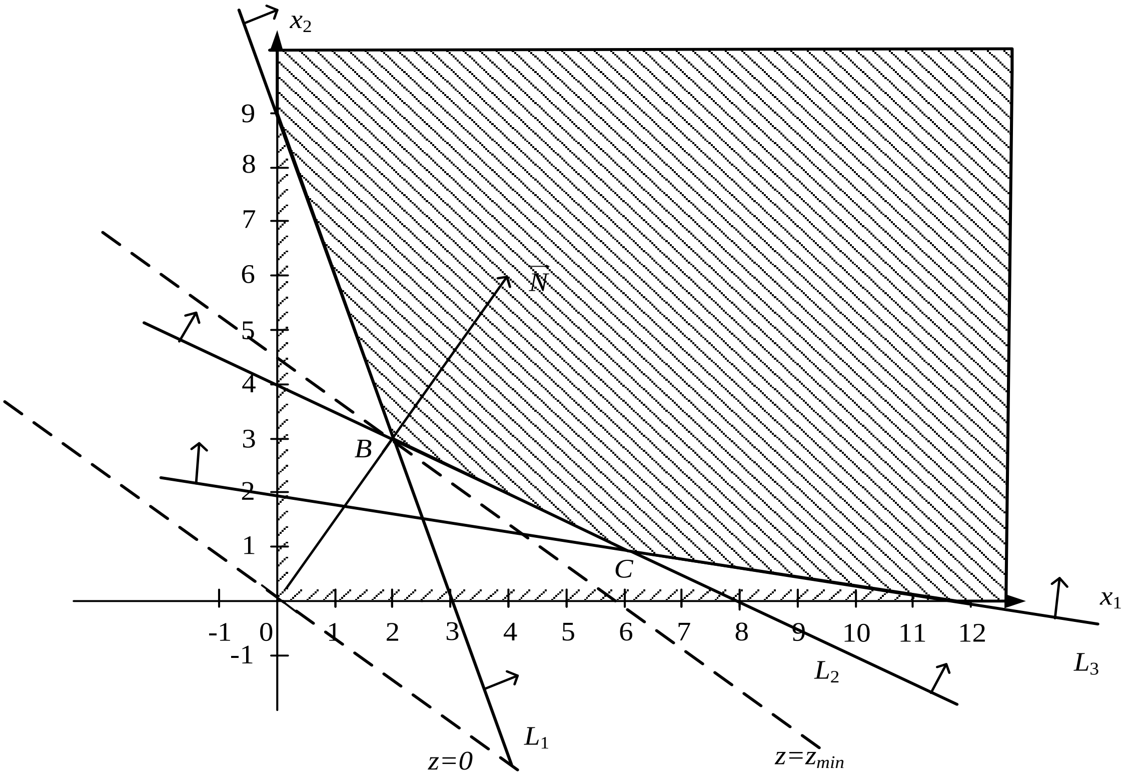

Рис. 6.2. **Графічне розв'язання ЗЛП до прикл. 6.2**

Побудуйте вектор $grad\ z = (4; 6)$, який визначає напрямок найбільш швидкого зростання цільової функції, і перпендикулярно йому через початок координат проведіть лінію рівня, якій відповідає значення цільової функції $z_{\min} = 0$.

Пересуваючи лінію рівня в напрямі градієнта, визначте, що лінія рівня входить у багатокутник планів через точку B. Очевидно, що це точка мінімуму, бо за подальшого переміщення лінії рівня в напрямі $grad\ z$ значення лінійної функції зростають.

Знаходять координати точки B – точки перетину прямих L_1 та L_2. Визначають її координати із системи рівнянь:

$$\begin{cases} 3x_1 + x_2 = 9, \\ x_1 + 2x_2 = 8 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 2, \\ x_2 = 3. \end{cases}$$

Отже, є оптимальний план $X_{опт} = (2; 3)$, якому відповідає мінімальне значення цільової функції:

$$z_{\max} = z(X_{опт}) = 4 \cdot 2 + 6 \cdot 3 = 26.$$

Є $z_{\min} = 26$ за оптимального розв'язку $x_1 = 2,\ x_2 = 3$, тобто мінімальна вартість раціону 26 грн, якщо в нього внести 2 одиниці першого виду корму та 3 одиниці другого виду корму.

У розглянутих задачах максимуму та мінімуму лінійної функції досягнуто в одній точці, тому задачі мали єдиний оптимальний розв'язок. На практиці нерідко зустрічають задачі, які цих умов не задовольняють.

У подібних випадках графічний метод також дозволяє знайти відповідь.

Приклад 6.3. Розв'яжіть графічним методом ЗЛП:

$$z = 3x_1 + 3x_2 \quad \to \quad \max$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 \le 8, \\ 2x_1 - x_2 \ge 1, \\ x_1 - 2x_2 \le 2, \end{cases}$$

$$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0.$$

Розв'язання. Застосуйте до розв'язання задачі графічний метод. Для побудови багатокутника планів у I-й чверті координатної площини проведіть прямі за рівняннями:

$$L_1: \quad x_1 + x_2 = 8 \quad \Rightarrow \quad \frac{x_1}{8} + \frac{x_2}{8} = 1;$$

$$L_2: \quad 2x_1 - x_2 = 1 \quad \Rightarrow \quad \frac{x_1}{1/2} + \frac{x_2}{-1} = 1;$$

$$L_3: \quad x_1 - 2x_2 = 2 \quad \Rightarrow \quad \frac{x_1}{2} + \frac{x_2}{-1} = 1.$$

Геометричний розв'язок задачі зображено на рис. 6.3, із якого випливає, що лінія рівня з максимальним рівнем збігається із граничною лінією AB багатокутника розв'язків $ABCD$, тобто з лінією $x_1 + x_2 = 8$.

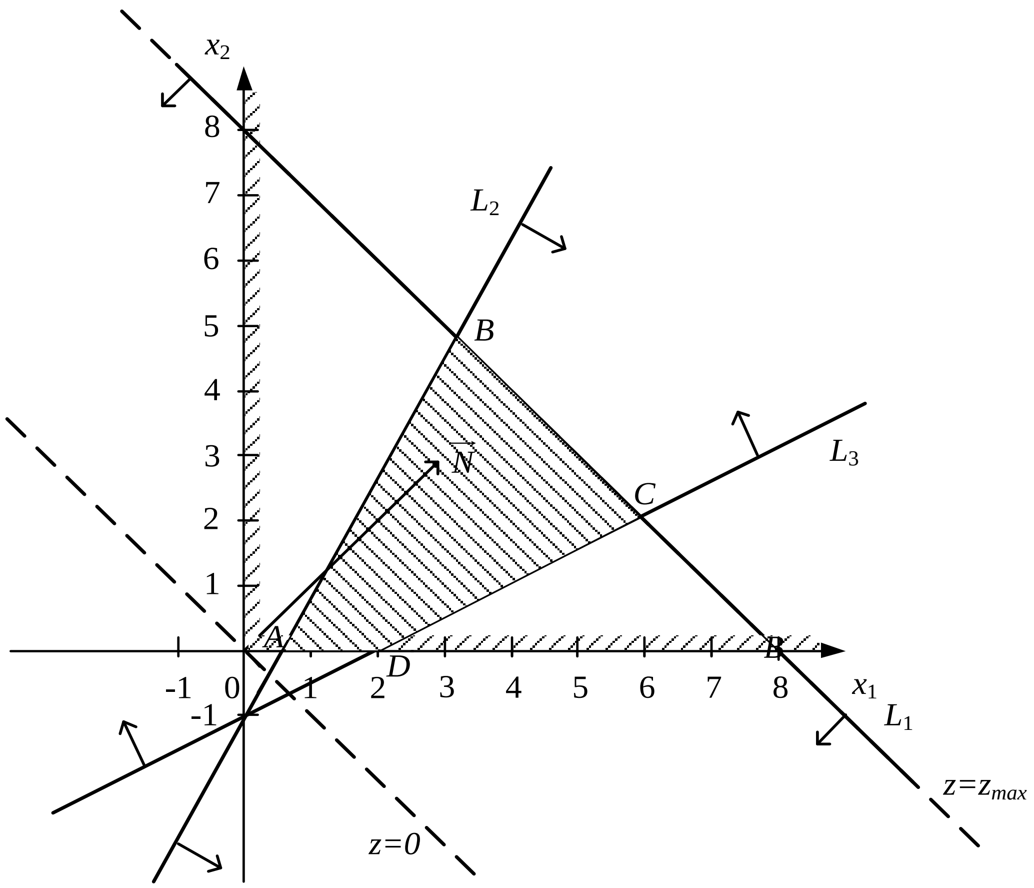

Рис. 6.3. **Графічне розв'язання ЗЛП до прикл. 6.3**

Тому на всьому відрізку AB лінійна функція $z = 3x_1 + 3x_2$ набуває одного й того самого максимального значення, яке дорівнює:

$$z_{\max} = 3 \cdot (x_1 + x_2) = 3 \cdot 8 = 24.$$

Це значить, що задача має нескінченно багато оптимальних розв'язків (їх задають координати точок відрізка AB), серед яких базисних оптимальних розв'язків два – відповідно, у кутових точках $A(3;5)$ та $B(6;2)$. Точки відрізка AB задають рівнянням $x_2 = 8 - x_1$, де $3 \le x_1 \le 6$.

Таким чином, $z_{\max} = 24$ за нескінченної множини оптимальних розв'язків $x_1 = c$, $x_2 = 8 - c$, де $3 \le x_1 \le 6$.

Симплексний метод розв'язання задач лінійного програмування

Симплексний метод є універсальним методом розв'язання задач лінійного програмування, бо він дозволяє розв'язати практично будь-яку задачу, подану в канонічному вигляді.

Сутність симплексного метода полягає в тому, що, починаючи з одного опорного розв'язку, здійснюють послідовно спрямоване переміщення за опорними розв'язками системи до оптимального опорного розв'язку.

Алгоритм симплекс-методу:

1. Запишіть систему обмежень задачі з невід'ємними вільними членами в канонічному вигляді, тобто у вигляді рівнянь.

2. Виділіть у системі обмежень одиничний базис, зберігаючи вільні члени невід'ємними.

3. Знайдіть вихідний невироджений опорний план та значення функції цілі.

4. Перевірте вихідний план на оптимальність.

Для цього необхідно:

a) обчисліть величину $z_j = \vec{C}_{\text{баз}} \cdot \vec{a}_j$;

b) обчисліть оцінки $\Delta_j = z_j - c_j$.

Якщо всі оцінки $\Delta_j \ge 0$ (у разі максимізації цільової функції) або всі оцінки $\Delta_j \le 0$ (у разі мінімізації цільової функції), то вихідний опорний план є оптимальним і задачу розв'язано.

Якщо серед оцінок є хоча б одна від'ємна (у разі максимізації цільової функції) або додатна (у разі мінімізації цільової функції), то план необхідно покращити.

5. Покращте вихідний опорний план:

a) якщо одна від'ємна оцінка (у разі максимізації цільової функції) або одна додатна (у разі мінімізації цільової функції), то для відповідного j-го вектора обчисліть параметр:

$$\Theta_j = \min\left(\frac{b_i}{a_{ij}}\right), \text{ де } a_{ij} > 0$$

та відповідний вектор уведіть до базису, використовуючи однократне заміщення базису.

b) якщо декілька від'ємних оцінок (у разі максимізації цільової функції) або декілька додатних (у разі мінімізації цільової функції), то для кожного відповідного вектора обчисліть $\left|\Delta_j \cdot \Theta_j\right|$ і в базис уведіть вектор із максимальним значенням цього добутку ($\max\left|\Delta_j \cdot \Theta_j\right|$), тобто напрямний стовпець a_j визначають максимальним модулем добутку, а напрямний рядок – мінімальним відношенням $\dfrac{b_i}{a_{ij}}$.

6. Новий опорний план перевірте на оптимальність, починаючи з четвертого пункту. Процес продовжуйте доки не буде виконано критерій оптимальності.

Примітки:

1. Якщо для j-го вектора оцінка $\Delta_j < 0$ (у разі максимізації цільової функції) або оцінка $\Delta_j > 0$ (у разі мінімізації цільової функції), а координати j-го вектора від'ємні, то план не є оптимальним, покращити його неможливо, задача розв'язку не має.

2. Якщо на будь-якому етапі розрахунків виникає невизначеність у виборі розв'язувального рядка, тобто відбувається зациклення, то необхідно вибирати той рядок, для якого відношення елементів наступного (попереднього) стовпчика до розв'язувального буде мінімальним. Причому в новому стовпчику беруть до уваги як невід'ємні, так і від'ємні координати вектора. Процес продовжується доти, доки розв'язувальний рядок не буде визначено однозначно.

Приклад 6.4. Для виготовлення різних виробів A і B підприємство використовує три різні види сировини. Норми витрат на виробництво одного виробу кожного виду, ціна одного виробу A і B, а також загальну кількість сировини кожного виду, яку може бути використано підприємством, наведено в табл. 6.1.

Таблиця 6.1

Вихідні дані

Види сировини	Норми витрат сировини на один виріб, кг		Загальна кількість сировини, кг
	A	*B*	
I	9	5	1 431
II	7	8	1 224
III	4	16	1 328
Ціна одного виробу, грн	3	2	

Вироби A і B можуть виробляти в будь-яких співвідношеннях (збут забезпечено, але виробництво обмежено сировиною кожного виду, наданою підприємству). Треба скласти план виробництва виробів таким чином, щоб загальна вартість всієї продукції, виробленої підприємством, була максимальною.

Розв'язання. Складіть математичну модель задачі. Позначте через x_1 та x_2 кількість виробів A і B, відповідно. Оскільки є обмеження на виділений підприємству фонд сировини кожного виду, то змінні x_1 та x_2 мають задовольняти систему нерівностей:

$$\begin{cases} 9x_1 + 5x_2 \le 1\,431, \\ 7x_1 + 8x_2 \le 1\,224, \\ 4x_1 + 16x_2 \le 1\,328. \end{cases}$$

Загальна вартість продукції, що виробило підприємство за умови випуску x_1 виробів A та x_2 виробів B:

$$z = 3x_1 + 2x_2 \to \max.$$

За своїм економічним змістом змінні x_1 та x_2 мають набувати тільки невід'ємних значень.

Спочатку запишіть систему обмежень задачі в канонічному вигляді за допомогою балансових змінних $x_3 \ge 0,\ x_4 \ge 0,\ x_5 \ge 0$.

Таким чином, система обмежень набуває вигляду:

$$\begin{cases} 9x_1 + 5x_2 + x_3 = 1\,431, \\ 7x_1 + 8x_2 + x_4 = 1\,224, \\ 4x_1 + 16x_2 + x_5 = 1\,328, \end{cases}$$

$$x_j \geq 0, \ \ j = \overline{1,5}.$$

Балансові змінні за своїм економічним змістом означають кількість сировини того чи того виду, яку за цього плану виробництва не буде використано.

Складіть симплекс-таблицю (табл. 6.2).

Таблиця 6.2

Симплекс-таблиця

i	Базис	$С_{баз.}$	C_j	3	2	0	0	0
			A_0	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5
1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	A_3	0	1 431	9	5	1	0	0
2	A_4	0	1 224	7	8	0	1	0
3	A_5	0	1 328	4	16	0	0	1
4	$z_j = \vec{C}_{баз} \cdot \vec{a}_j$		0	0	0	0	0	0
5	$\Delta_j = z_j - c_j$			–3	–2	0	0	0
6	A_1	3	159	1	5/9	1/9	0	0
7	A_4	0	111	0	37/9	–7/9	1	0
8	A_5	0	692	0	124/9	–4/9	0	1
9	$z_j = \vec{C}_{баз} \cdot \vec{a}_j$		477	3	5/3	1/3	0	0
10	$\Delta_j = z_j - c_j$			0	–1/3	1/3	0	0

Закінчення табл. 6.2

1	2	3	4	5	6	7	8	9
11	A_1	3	144	1	0	8/37	–5/37	0
12	A_2	2	27	0	1	–7/37	9/37	0
13	A_5	0	320	0	0	80/37	124/37	1
14	$z_j = \vec{C}_{баз} \cdot \vec{a}_j$		486	3	2	10/37	3/37	0
15	$\Delta_j = z_j - c_j$			0	0	10/37	3/37	0

І ітерація. Значення всіх основних змінних x_1, x_2 дорівнюють нулю, а додаткові змінні набувають своїх значень, відповідно до обмежень задачі. Ці значення змінних відповідають такому плану, за якого нічого не виробляють, сировину не використовують і значення лінійної функції $z(x)$ дорівнює нулю. Цей план не є оптимальним.

Оцінки $\Delta_1 = -3$, $\Delta_2 = -2$ свідчать не тільки про можливість збільшення загальної вартості виробленої продукції та вказують на скільки збільшиться ця сума в разі введення у план виробництва одиниці того чи того виду продукції.

Число -3 означає, що введення у план виробництва одного виробу A забезпечує збільшення прибутку на 3 грн. Число –2 означає, що введення у план виробництва одного виробу B забезпечує збільшення прибутку на 2 грн. Таким чином, з економічного погляду найбільш доцільним буде внести до плану виробництва вироби A. Перевірте це за допомогою математичних обчислень:

$$\theta_1 = \min\left(\frac{1\,431}{9}; \frac{1\,224}{7}; \frac{1\,328}{4}\right) = \frac{1\,431}{9};$$

$$\theta_2 = \min\left(\frac{1\,431}{5}; \frac{1\,224}{8}; \frac{1\,328}{16}\right) = \frac{1\,328}{16}.$$

$$\left|\Delta_1 \cdot \theta_1\right| = \left|\frac{1\,431}{9} \cdot (-3)\right| = 477 \text{ – max},$$

$$\left|\Delta_2 \cdot \theta_2\right| = \left|\frac{1\,328}{16} \cdot (-2)\right| = 166.$$

Таким чином, слід уводити до базису вектор $\vec{a}_1$, а виводити – $\vec{a}_3$.

Число $\theta_1 = \dfrac{1\,431}{9}$ з економічного погляду означає кількість виробів типу A, яку підприємство може виготовити з урахуванням норм витрат і обсягів сировини кожного виду.

Тобто обмежувальним фактором для виробництва виробів A є обсяг сировини першого виду.

II ітерація. Визначений план $\vec{X}_1 = (159,\ 0,\ 0,\ 111,\ 692)$ не є оптимальним, оскільки оцінка $\Delta_2 = -1/3 < 0$. Його необхідно покращити.

Для цього необхідно обчислити

$$\theta_2 = \min\left(\frac{159}{5/9};\ \frac{111}{37/9};\ \frac{692}{124/9}\right) = \frac{111}{37/9}.$$

Таким чином слід уводити до базису вектор $\vec{a}_2$, а виводити $\vec{a}_4$ тому, що випуск виробів B обмежено запасами сировини другого виду.

III ітерація. Усі оцінки $\Delta_j \geq 0$, тому план оптимальний.

$$\vec{X}_{опт} = (144,\ 27,\ 0,\ 0,\ 320),\ z_{\max} = 486.$$

Висновок. Для того щоб отримати максимальний прибуток у розмірі 486 грн необхідно виготовити 144 вироби A та 27 виробів B. До того ж ресурси першого і другого видів буде використано повністю, а ресурс третього виду буде не використано на 320 кг.

Завдання для самостійної роботи

6.1. Знайдіть розв'язки задач лінійного програмування за допомогою графічного методу:

1.
$$z = x_1 - 2x_2 \to \max,$$
$$\begin{cases} x_1 - x_2 \le 1, \\ x_1 + x_2 \ge 2, \\ x_1 - 2x_2 \le 0, \end{cases}$$
$$x_1 \ge 0, \quad x_2 \ge 0.$$

2.
$$z = x_1 + x_2 \to \max,$$
$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 \le 10, \\ x_1 + 2x_2 \ge 2, \\ 2x_1 + x_2 \le 10, \end{cases}$$
$$x_1 \ge 0, \quad x_2 \ge 0.$$

3.
$$z = x_1 - x_2 \to \max,$$
$$\begin{cases} -2x_1 + x_2 \le 2, \\ x_1 - 2x_2 \le -8, \\ x_1 + x_2 \le 5, \end{cases}$$
$$x_1 \ge 0, x_2 \ge 0.$$

4.
$$z = 2x_1 - x_2 \to \min,$$
$$\begin{cases} x_1 + x_2 \ge 4, \\ -x_1 + 2x_2 \le 2, \\ x_1 + 2x_2 \le 10, \end{cases}$$
$$x_1 \ge 0, x_2 \ge 0.$$

Розв'яжіть задачі графічним та симплексним методом.

6.2. Підприємство випускає чотири види продукції та використовує три типи основного обладнання. Витрати часу на виготовлення одиниці продукції для кожного з типів обладнання, загальний фонд робочого часу кожного з типів обладнання, прибуток від реалізації одного виробу цього виду наведено в табл. 6.3. Визначте обсяг випуску кожного з виробів, за якого загальний прибуток від їхньої реалізації є максимальним.

Таблиця 6.3

Вихідні дані

Типи обладнання	Витрати часу на одиницю продукції певного виду, верстато-год				Загальний фонд робочого часу
	1	2	3	4	
Токарне	2	1	1	3	220
Фрезерувальне	1	0	2	1	240
Шліфувальне	1	2	1	0	240
Прибуток від реалізації одиниці продукції, грн	8	3	2	1	

6.3. Для перевезення вантажу на трьох лініях може бути використано судна трьох типів. Загальний час, протягом якого судна кожного типу перебувають в експлуатації, продуктивність суден у разі використання їх на різних лініях і мінімально необхідний обсяг перевезення на кожній із ліній характеризується даними, наведеними в табл. 6.4.

Таблиця 6.4

Вихідні дані

Типи суден	Продуктивність суден на лінії, млн тонно-миль на добу			Загальний час експлуатації, діб
	1	2	3	
I	8	14	11	300
II	6	15	13	300
III	12	12	4	300
Загальний обсяг перевезень, млн тонно-миль	3 000	5 400	3 300	

Визначте обсяг перевезень кожного із суден, за якого загальний обсяг перевезень є максимальним.

6.4. На тваринній фермі можуть вирощувати чорно-бурих лисиць і песців. Для забезпечення нормальних умов їхнього вирощування використовують три види кормів. Кількість корму кожного виду, що мають отримувати лисиці й песці, кількість корму кожного виду, що може бути використано тваринною фермою, і прибуток від реалізації однієї шкурки лисиці й песця наведено в табл. 6.5. Визначте, скільки лисиць і песців потрібно вирощувати на тваринній фермі, щоб прибуток від реалізації їхніх шкурок був максимальним.

Таблиця 6.5

Вихідні дані

Види кормів	Кількість одиниць корму, які щоденно мають отримувати		Загальна кількість корму
	лисиця	песець	
I	2	3	180
II	4	1	240
III	6	7	426
Прибуток від реалізації однієї шкурки, грн	16	12	

Практичне заняття 7
Методика розв’язування транспортної задачі

Мета практичного заняття: навчитися знаходити вихідний план транспортної задачі закритого та відкритого типу та перевіряти його на оптимальність за допомогою методу потенціалів.

Загальне формулювання транспортної задачі (ТЗ) полягає у визначенні оптимального плану перевезень деякого однорідного вантажу з m пунктів відправлення (складів, постачальників) A_1, A_2, …, A_m до n пунктів призначення (споживачів) B_1, B_2, …, B_n. Водночас критерій оптимальності беруть або мінімальну вартість перевезень, або мінімальний час його постачання.

Математична модель ТЗ містить **цільову функцію**, що досліджують на екстремум і систему обмежень у формі системи рівнянь або нерівностей.

План $X^* = \left(x_{ij}^*\right)_{m\,x\,n}$, за якого цільова функція набуває свого мінімального значення, називають **оптимальним планом ТЗ.**

Загальна наявність вантажу в постачальників дорівнює $\sum_{i=1}^{m} a_i$, а загальна потреба споживачів у вантажі дорівнює $\sum_{j=1}^{n} b_j$ одиниць. Якщо потреба споживачів у вантажі дорівнює запасу вантажу в постачальників, тобто

$$\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j ,$$

то модель такої ТЗ називають **закритою**, або **збалансованою.** Якщо ця умова не виконується, модель ТЗ називають **відкритою.**

Ця умова є необхідною та достатньою (**балансовою**) умовою існування розв’язку класичної ТЗ, тобто збалансованість попиту та пропозиції або загальні запаси постачальників мають дорівнювати загальним потребам споживачів.

У разі перевищення запасу над потребою, тобто

$$\sum_{i=1}^{m} a_i > \sum_{j=1}^{n} b_j ,$$

уводять фіктивного $(n+1)$-й споживача з потребою

$$b_{n+1} = \sum_{i=1}^{m} a_i - \sum_{j=1}^{n} b_j$$

та відповідні вартості (тариф) перевезень уважають такими, що дорівнюють нулю: $c_{i\,n+1} = 0$ $(i = \overline{1,m})$. Визначена задача є ТЗ, для якої виконується балансова умова.

Аналогічно, якщо

$$\sum_{i=1}^{m} a_i < \sum_{j=1}^{n} b_j ,$$

то вводять фіктивного $(m+1)$-й постачальника із запасом вантажу

$$a_{m+1} = \sum_{j=1}^{n} b_j - \sum_{i=1}^{m} a_i ,$$

та тарифи вважають такими, що дорівнюють нулю: $c_{m+1\,j} = 0$ $(j = \overline{1,n})$. Визначена задача є закритою ТЗ.

Загальна кількість змінних x_{ij} $(i = \overline{1,m}, j = \overline{1,n})$ у ТЗ з m постачальниками та n споживачами становить $m \times n$, а кількість рівнянь, які утворюють основну систему обмежень, дорівнює $m+n$, причому кожна змінна x_{ij} входить до основної системи обмежень два рази – один раз до рівняння за рядком та один раз до рівняння за стовпцем.

Якщо в опорному плані число відмінних від нуля компонентів дорівнює точно $m+n-1$, то план є **невиродженим**.

Якщо кількість менше ніж $m+n-1$, то такий план є **виродженим**.

Відповідно, **опорний план**, тобто матриця перевезень вимірністю $m \times n$, містить не більше ніж $m+n-1$ додатних елементів (базисних невідомих), а інші компоненти опорного плану (вільні невідомі) дорівнюють нулю.

Додатним елементам матриці перевезень відповідають заповнені клітинки таблиці перевезень (табл. 7.1).

Таблиця 7.1

Таблиця перевезень

Поста-чальники	Споживачі				Запаси, a_i
	B_1	B_2	…	B_n	
A_1	c_{11} x_{11}	c_{12} x_{12}	…	c_{1n} x_{1n}	a_1
A_2	c_{21} x_{21}	c_{22} x_{22}	…	c_{2n} x_{2n}	a_2
…	…	…	…	…	…
A_m	c_{m1} x_{m1}	c_{m2} x_{m2}	…	c_{mn} x_{mn}	a_m
Потреби, b_j	b_1	b_2	…	b_n	$\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j$

Алгоритм розв'язання ТЗ

Алгоритм розв'язання ТЗ полягає в послідовності таких дій:

1) визначення будь-якого вихідного опорного плану;

2) перевірка плану на оптимальність за певним критерієм;

3) поліпшення вихідного опорного плану, якщо знайдений план не є оптимальним, тобто перехід до нового опорного плану з меншим значенням цільової функції;

4) новий план також перевіряють на оптимальність;

5) якщо план оптимальний, то він і є розв'язком ТЗ.

Пошук оптимального плану X^* передбачає цілеспрямований перегляд опорних планів X, із метою їхнього поліпшення, але для цього спочатку треба мати вихідний опорний план.

Розгляньте два методи складання такого плану.

Метод північно-західного кута

Розподіл вантажу між споживачами починають із лівої верхньої клітинки (північно-західного кута) таблиці перевезень. Перерозподіляють запаси першого постачальника A_1. Спочатку задовольняють потреби споживача B_1

за рахунок A_1. У клітинку x_{11} записують найменше із чисел a_1 та b_1, тобто $x_{11} = \min\{a_1; b_1\}$. Сюди спрямовують вантаж у кількості $x_{11} = \min\{a_1; b_1\}$.

Нехай $x_{11} = a_1$, тоді перший постачальник витратив увесь ресурс і в подальшому розподілі вантажу участі не бере, тобто цього постачальника виключають із розгляду.

Якщо попит першого споживача не задовольнили в повному обсязі, тоді до клітинки, що міститься у другому рядку першого стовпця, спрямовують вантаж у кількості:

$$x_{21} = \min\{a_2; b_1 - x_{11}\}.$$

Навпаки, якщо $x_{11} = b_1$, то перший споживач отримав потрібний йому вантаж, тоді з решти ресурсів першого постачальника задовольняють потреби другого споживача, розв'язуючи таку задачу:

$$x_{12} = \min\{a_1 - x_{11}; b_2\}.$$

Такий розподіл проводять доти, доки всю таблицю не буде заповнено.

Клітинки відповідного стовпця або рядка, де потреби споживача задоволено та запаси витрачено, не заповнюють.

Під час визначення опорного плану методом північно-західного кута не враховують вартість перевезення одиниці вантажу, тому цей план може бути далеким від оптимального.

Метод мінімальної вартості

Цей метод дозволяє побудувати опорний розв’язок, який є достатньо близьким до оптимального. Він дуже простий та складається з ряду однотипних кроків, на кожному з яких заповнюють тільки одну клітинку, яка відповідає мінімальної вартості c_{ij}.

Побудову вихідного опорного плану починають із визначення клітинки, що має найменшу вартість перевезень c_{ij}, і туди роблять поставку обсягом

$$x_{ij} = \min\{a_i; b_j\}.$$

Тоді вилучають рядок, якщо запаси постачальника витрачено, або вилучають стовпець, якщо потреби споживача повністю задоволено. Далі знов вибирають вільну клітинку з найменшою вартістю та продовжують процес, доки всі запаси не буде витрачено, а потреби задоволено.

Метод потенціалів

Одним із найбільш ефективних і поширених методів під час визначення оптимального плану ТЗ є метод потенціалів. Цей метод дозволяє перевірити, чи є цей опорний план оптимальним, і якщо ні, то визначити такий шлях поліпшення цього плану, за яким кожна наступна ітерація дає опорний план, котрому відповідає менше за попереднє значення цільової функції.

Алгоритм методу потенціалів

1. Побудуйте вихідний опорний розв'язок (будь-яким методом), перевірте правильність його побудови за кількістю зайнятих клітинок (їх має бути $m+n-1$);

2. Побудуйте систему потенціалів, які відповідають опорному розв'язку. Для цього розв'яжіть систему рівнянь:

$$u_i + v_j = c_{ij}, \qquad \text{якщо } x_{ij} > 0,\ i = \overline{1, n},\ j = \overline{1, m},$$

яка має безліч розв'язків.

Для знаходження частинного розв'язку системи одному з потенціалів (звичайно тому, якому відповідає найбільша кількість зайнятих клітинок) задають довільно деяке значення (найчастіше нуль). Останні потенціали однозначно визначають за такими формулами:

$$u_i = c_{ij} - v_j, \qquad \text{якщо } x_{ij} > 0,\ i = \overline{1, n},\ j = \overline{1, m},$$

якщо відомий потенціал v_j, та

$$v_j = c_{ij} - u_i, \qquad \text{якщо } x_{ij} > 0,\ i = \overline{1, n},\ j = \overline{1, m},$$

якщо відомий потенціал u_i.

3. Перевірте виконання умови оптимальності для вільних клітинок таблиці. Для цього обчислюють оцінки для всіх вільних клітинок за такою формулою:

$$\Delta_{ij} = u_i + v_j - c_{ij},\ i = \overline{1, n},\ j = \overline{1, m},$$

та ті з них, які більше нуля, записують у ліві нижні кути клітинок.

Якщо для всіх вільних клітин $\Delta_{ij} \le 0$, то обчислюють значення цільової функції та розв'язок задачі завершують, тому що знайдений розв'язок є оптимальним.

Якщо ж є одна або декілька клітинок із додатною оцінкою, опорний розв'язок не є оптимальним.

4. Перейдіть до нового опорного розв'язку, на якому значення цільової функції буде меншим. Для цього знаходять клітинку таблиці задачі, якій відповідає найбільша додатна оцінка:

$$\max\{\Delta_{ij}\} = \Delta_{lk}.$$

Далі будують цикл, який містить у своєму складі цю клітинку та частину клітинок, зайнятих опорним розв'язком.

5. Визначте **цикл** (контур) перерозподілу й обсяг вантажу, який можна перерозподілити, відповідно до цього циклу (рис. 7.1). Клітинка, якій відповідає найбільша додатна оцінка, разом з іншими із зайнятих клітинок має утворювати замкнений контур.

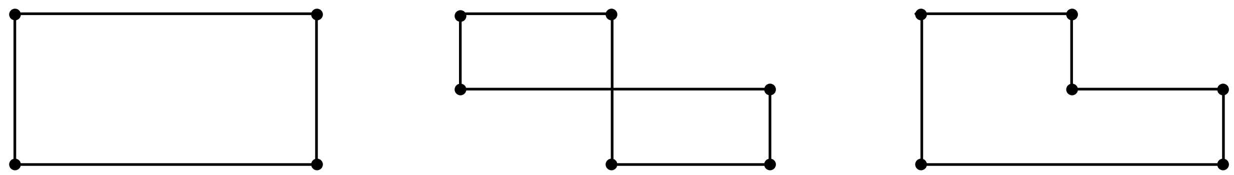

Рис. 7.1. **Види циклів перерозподілу**

Поворот можна здійснювати під прямим кутом тільки в зайнятих клітинках (або в умовно зайнятих, якщо опорний план вироджений).

Усім кутовим клітинкам циклу надають відповідний знак. Так, вільну клітинку, до якої необхідно здійснити поставку, позначають знаком «+», наступну кутову клітинку циклу – знаком «–», далі – знаком «+». Знаки розставляють доти, доки не повертаються до вихідної клітинки.

Для визначення обсягу вантажу, який можна перерозподілити за цим циклом, розглядають ті кутові клітинки, що ввійшли до циклу перевезень зі знаком «–», і за цими клітинами визначають найменший обсяг постачання, якому відповідає найменше додатне симплексне відношення $\theta = \min\{\theta_{ij}\}$. Це і є кількість вантажу, яку необхідно перерозподілити за цим циклом.

6. Кількість вантажу в кожній кутовій клітинці циклу змінюють на величину θ, причому так, що перевезення в усіх клітинках зі знаком «–» зменшують на θ, а в усіх клітинках із знаком «+» збільшують на θ (у клітинках, не позначених ніякими знаками, обсяг поставок не змінюють).

Унаслідок перерозподілу вантажу складають новий опорний план, за яким цільова функція має значення, що менше за попереднє на $\Delta Z = \left|\Delta_{ij} \cdot \theta\right|$. Цей план знов перевіряють на оптимальність за методом потенціалів (див. п. 2).

Приклад 7.1. Складіть оптимальний план перевезень однорідного вантажу від постачальників A_1, A_2 і A_3 до споживачів B_1, B_2, B_3 і B_4, за яким загальні транспортні витрати були б найменшими. Запаси вантажу задано матрицею $A = (180;\ 400;\ 280)$, потреби споживачів – матрицею $B = (240; 320; 120; 180)$. Вартість перевезення одиниці вантажу від кожного постачальника до кожного споживача задано матрицею $C = (c_{ij})_{3x4}$:

$$C = \begin{pmatrix} 22 & 15 & 40 & 18 \\ 9 & 12 & 32 & 16 \\ 11 & 38 & 10 & 14 \end{pmatrix}.$$

Розв'язання. Загальні запаси вантажу всіх постачальників становлять:

$$\sum_{i=1}^{3} a_i = 180 + 400 + 280 = 860.$$

Це дорівнює загальним потребам усіх споживачів:

$$\sum_{j=1}^{4} b_j = 240 + 320 + 120 + 180 = 860.$$

Отже, ТЗ є закритою.

Запишіть вихідні дані задачі у вигляді таблиці та складіть вихідний опорний план перевезень за методом північно-західного кута. Згідно із цим методом, першою заповнюють клітинку, що має індекси $i = 1$, $j = 1$.

Порівнявши запаси постачальника A_1 і потреби споживача B_1, визначте, що обсяг постачання до цієї клітинки становить 180 од.

Оскільки постачальник A_1 вичерпав свої можливості, а споживачеві B_1 потрібно ще 60 од., то наступною заповнюють клітинку $i = 2$, $j = 1$, спрямувавши туди необхідні 60 од. вантажу.

Тепер потреби споживача B_1 задовольнили в повному обсязі, а запас постачальника A_2 зменшився до 340 од.

Наступною заповнюють клітинку $i=2$, $j=2$. Відповідно до потреб споживача B_2, спрямовують туди 320 од. вантажу. Оскільки в постачальника A_2 залишилося ще 20 од., поставлять цей вантаж до клітинки $i=2$, $j=3$. Тепер постачальник A_2 вичерпав свої можливості, але споживачеві B_3 необхідно ще 100 од.

Візьміть цей вантаж у постачальника A_3, тобто робіть поставку такого обсягу до клітинки $i=3$, $j=3$. У постачальника A_3 лишилося ще 180 од., але саме стільки необхідно споживачеві B_4. Поставте ці 180 од. до клітинки $i=3$, $j=4$.

Отже, весь вантаж було розподілено та потреби всіх споживачів задовольнили.

Є вихідний опорний план X_0, який наведено в табл. 7.2.

Таблиця 7.2

Вихідний опорний план X_0

Постачальники	Споживачі				Запаси, a_i
	B_1	B_2	B_3	B_4	
A_1	22 180	15	40	18	180
A_2	9 60	12 320	32 20	16	400
A_3	11	38	10 100	14 180	280
Потреби, b_j	240	320	120	180	860 / 860

За вихідним опорним планом вартість перевезень становить:

$$z(X_0)=22\cdot180+9\cdot60+12\cdot320+32\cdot20+10\cdot100+14\cdot180=12\,500.$$

Цей план є невиродженим, оскільки кількість заповнених клітинок таблиці становить $m+n-1=6$, де m – кількість постачальників ($m=3$), n – кількість споживачів ($n=4$). Отже, кількість заповнених клітинок дорівнює числу базисних невідомих.

Перевірте за методом потенціалів, чи є вихідний план оптимальним.

Із цією метою кожному постачальникові поставте у відповідність потенціал u_i, а споживачеві – потенціал v_j. Значення потенціалів обчислюють за умов, що для кожної заповненої клітинки таблиці перевезень сума потенціалів постачальника та споживача дорівнює вартості перевезень одиниці вантажу між цими учасниками, тобто $u_i + v_j = c_{ij}$.

Отже, для базисних клітинок знаходять систему із 6 рівнянь, яка містить 7 невідомих:

$$\begin{cases} u_1 + v_1 = 22, \\ u_2 + v_1 = 9, \\ u_2 + v_2 = 12, \\ u_2 + v_3 = 32, \\ u_3 + v_3 = 10, \\ u_3 + v_4 = 14. \end{cases}$$

Така система має нескінчену множину розв'язків. Знайдіть будь-який частинний розв'язок. Виберіть довільно значення одного з потенціалів. Нехай $u_1 = 0$, тоді із системи рівнянь знаходять значення потенціалів усіх інших учасників:

$$v_1 = 22,\ u_2 = -13,\ v_2 = 25,\ v_3 = 45,\ u_3 = -35,\ v_4 = 49.$$

Тепер перевірте, чи виконується для всіх вільних клітинок таблиці перевезень умова: $u_i + v_j \le c_{ij}$ $(i = \overline{1,3},\ \ j = \overline{1,4})$, тобто чи є оцінки всіх вільних клітинок $\Delta_{ij} = u_i + v_j - c_{ij}$ недодатними.

Складіть таблицю потенціалів таким чином. До кожної клітинки таблиці, яка відповідає базисним змінним, ставте значення c_{ij}, а для вільних клітинок у правому верхньому куті вказують вартість перевезення одиниці вантажу за цією клітинкою c_{ij}, а в лівому нижньому куті – суму потенціалів учасників перевезень за цією клітинкою $u_i + v_j$.

Складіть таблицю потенціалів (табл. 7.3). Оскільки є чотири клітинки з додатною оцінкою: $\Delta_{12} = 10$, $\Delta_{13} = 5$, $\Delta_{14} = 31$, $\Delta_{24} = 20$, то план X_0 не є оптимальним. Його можна покращити, перерозподіливши вантаж.

Найбільшою є додатна оцінка $\Delta = \max\{10; 5; 31; 20\} = 31$, яка відповідає клітинці $i = 1$, $j = 4$, і туди зробіть поставку.

Таблиця 7.3

Таблиця потенціалів для плану X_0

u_i \ v_j	$v_1 = 22$	$v_2 = 25$	$v_3 = 45$	$v_4 = 49$
$u_1 = 0$	22	15 / 25	40 / 45	18 / 49
$u_2 = -13$	9	12	32	16 / 36
$u_3 = -35$	11 / –13	38 / –10	10	14

У табл. 7.4 перевезень, котра становить план X_0, побудуйте замкнений цикл перерозподілу (указано пунктиром).

Таблиця 7.4

Замкнений цикл перерозподілу перевезень для плану X_0

План X_0	-Θ 180			+Θ
	+Θ 60	320	-Θ 20	
			+Θ 100	-Θ 180

Починаючи зі знака «+», яким позначте клітинку з найбільшою додатною оцінкою, розставте по черзі знаки «–» та «+» у всіх кутах (поворотах).

Кількість вантажу, що потрібно перерозподілити за цим циклом, визначають як найменшу з поставок, які відповідають «від'ємним» кутам циклу: $\theta = \min\{180; 20; 180\} = 20$. Згідно зі знаками, проставленими в кутах циклу, перерозподіліть 20 од. вантажу і складіть новий опорний план X_1, під час переходу до якого загальна вартість перевезень має зменшитися на величину $\Delta Z = \Delta \cdot \theta = 31 \cdot 20 = 620$, тобто цільова функція має дорівнювати $Z(X_1) = 12\,500 - 620 = 11\,880$.

Перевірте, чи є план X_1 оптимальним (табл. 7.5). Для цього складіть відповідну йому таблицю потенціалів (табл. 7.6).

Таблиця 7.5

Замкнений цикл перерозподілу перевезень для плану X_1

План X_1	-Θ 160	+Θ		20
	+Θ 80	-Θ 320		
			120	160

Таблиця 7.6

Таблиця потенціалів для плану X_1

u_i \ v_j	$v_1 = 22$	$v_2 = 25$	$v_3 = 14$	$v_4 = 18$
$u_1 = 0$	22	15 25	40 14	18
$u_2 = -13$	9	12	32 11	16 5
$u_3 = -4$	11 18	38 21	10	14

План X_1 не є оптимальним, оскільки має додатні оцінки $\Delta_{12} = 10$ і $\Delta_{31} = 8$. Визначте, що $\Delta = \max\{10; 8\} = 10$, отже, необхідно зробити поставку до клітинки $i = 1$, $j = 2$.

Цикл перерозподілу вказано пунктиром у таблиці перевезень за планом X_1.

За цим циклом перерозподіліть вантаж у кількості:

$$\theta = \min\{160; 320\} = 160.$$

Складіть новий план X_2 (табл. 7.7) та перевірте його на оптимальність (табл. 7.8).

Таблиця 7.7

План перевезень X_2

План X_2		160		20
	240	160		
			120	160

Таблиця 7.8

Таблиця потенціалів для плану X_2

u_i \ v_j	$v_1 = 12$	$v_2 = 15$	$v_3 = 14$	$v_4 = 18$
$u_1 = 0$	22 12	15	40 14	18
$u_2 = -3$	9	12	32 11	15 16
$u_3 = -4$	8 11	38 11	10	14

За планом X_2 загальна вартість перевезень має становити:

$$Z(X_2) = 11\,880 - 10 \cdot 160 = 10\,280.$$

Оскільки всі оцінки є недодатними, то план X_2 оптимальний.

Загальна вартість перевезень за цим планом мінімальна й дорівнює:

$$Z_{\min} = Z(X_2) = 160 \cdot 15 + 20 \cdot 18 + 240 \cdot 9 + 160 \cdot 12 + 120 \cdot 10 + 160 \cdot 14 =$$

$$= 10\,280.$$

Відповідь: загальна вартість перевезень мінімальна за планом:

$$X_{опт.} = \begin{pmatrix} 0 & 15 & 0 & 18 \\ 9 & 12 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 10 & 14 \end{pmatrix}.$$

Відкрита модель транспортної задачі

Відкрита модель задачі має місце, коли не виконується баланс:

$$\sum_{i=1}^{m} a_i \neq \sum_{j=1}^{n} b_j \ .$$

На практиці дуже часто зустрічають такі задачі. Які особливості цих розв'язань?

1. У разі перевищення запасу над потребою, тобто $\sum_{i=1}^{m} a_i > \sum_{j=1}^{n} b_j$, уводять фіктивного $(n+1)$-го споживача з потребою $b_{n+1} = \sum_{i=1}^{m} a_i - \sum_{j=1}^{n} b_j$ для зведення відкритої моделі до закритої, та відповідні вартості (тариф) перевезень уважають такими, що дорівнюють нулю: $c_{i\,n+1} = 0$ $(i = \overline{1,m})$. Визначена задача є закритою моделлю ТЗ.

2. У разі перевищення потреби над запасом, тобто $\sum_{i=1}^{m} a_i < \sum_{j=1}^{n} b_j$, уводять фіктивного $(m+1)$-го постачальника із запасом вантажу $a_{m+1} = \sum_{j=1}^{n} b_j - \sum_{i=1}^{m} a_i$ для зведення відкритої моделі до закритої та тарифи вважають такими, що дорівнюють нулю: $c_{m+1\,j} = 0$ $(j = \overline{1,n})$. Визначена задача є закритою моделлю ТЗ.

Завдання для самостійної роботи

Розв'яжіть транспортні задачі.

7.1

$A_i \backslash B_j$	B_1	B_2	B_3	B_4	a_i
A_1	2	5	8	1	9
A_2	8	3	9	2	16
A_3	7	4	6	3	5
b_j	11	7	8	4	

7.2

$A_i \backslash B_j$	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	a_i
A_1	4	6	8	3	2	7
A_2	5	3	4	6	4	13
A_3	3	2	5	7	5	20
b_j	10	10	5	8	7	

7.3

B_j / A_i	B_1	B_2	B_3	B_4	a_i
A_1	1	3	4	1	100
A_2	5	2	2	7	200
A_3	4	4	3	6	400
A_4	7	2	5	3	200
b_j	100	200	200	300	

7.4

B_j / A_i	B_1	B_2	B_3	B_4	a_i
A_1	1	6	9	3	200
A_2	3	2	2	4	400
A_3	4	5	4	7	400
A_4	1	4	3	9	800
b_j	200	400	600	200	

7.5

B_j / A_i	B_1	B_2	B_3	B_4	a_i
A_1	3	4	3	1	300
A_2	2	3	5	6	200
A_3	1	2	3	3	100
A_4	4	5	7	9	200
b_j	300	200	300	100	

7.6

B_j / A_i	B_1	B_2	B_3	B_4	a_i
A_1	1	3	4	2	200
A_2	1	2	4	1	200
A_3	3	4	5	9	300
A_4	6	3	7	6	300
b_j	200	300	400	200	

7.7

B_j / A_i	B_1	B_2	B_3	B_4	a_i
A_1	5	2	1	1	200
A_2	1	3	4	4	300
A_3	4	2	3	1	200
A_4	4	3	5	2	200
A_5	3	2	4	2	100
b_j	200	200	100	200	

7.8

B_j / A_i	B_1	B_2	B_3	B_4	a_i
A_1	3	1	8	1	25
A_2	2	5	2	3	50
A_3	9	4	6	5	75
A_4	7	3	10	3	25
A_5	4	6	7	4	75
b_j	50	25	50	75	

Практичне заняття 8
Задачі та моделі заміни.
Задачі з умовами невизначеності та конфлікту

Мета практичного заняття: навчитися розв'язувати задачі оптимізації пропозицій випуску продукції за умов залежності прибутку від попиту.

В економіці іноді доводиться стикатися із ситуацією, коли за наявності багатьох учасників ефективність рішення одного з них залежить від того, які рішення ухвалили інші учасники. Побудовою математичних моделей конфліктних ситуацій і розробленням методів рішення, що виникають у цих ситуаціях задач займається теорія ігор. Розгляньмо гру для двох осіб.

Позначте через

$$\alpha = \max_{i} \min_{j} a_{ij} .$$

Величину α – мінімально гарантований виграш, що може забезпечити собі перший гравець, називають нижньою ціною гри (максиміном).

Для визначення найкращої стратегії другого гравця знайдіть верхню ціну гри:

$$\beta = \min_{\mathrm{j}} \max_{i} a_{ij} ,$$

де β – верхня ціна гри (мінімакс).

Якщо другий гравець буде дотримуватися своєї мінімаксної стратегії, то гарантовано, що він у кожному разі програє не більше ніж β .

Для матричної гри виконується нерівність $\alpha \le \beta$.

Якщо $\alpha = \beta$, то таку гру називають **грою із сідловою точкою**, а пари оптимальних стратегій (A_{ionm}, B_{jonm}) – **сідловою точкою матриці**. У цьому разі елемент $a_{ij} = v$ називають **ціною гри** і він є одночасно мінімальним у рядку й стовпці. Якщо гра має сідлову точку, то говорять, що її вирішують у чистих стратегіях.

Якщо платіжна матриця не має сідлової точки, тобто $\alpha < \beta$, то пошук розв'язання гри призводить до застосування складної стратегії, що складається з випадкового застосування двох і більше стратегій із певними частотами. Таку складну стратегію називають **мішаною**.

У грі, матриця якої має розмірність $m \times n$, стратегії першого гравця задають наборами ймовірностей $X = (x_1, x_2, ..., x_m)$, із якими гравець застосовує свої чисті стратегії. Ці набори можна розглядати як m-вимірні вектори, для координат яких

$$\sum_{i=1}^{m} x_i = 1, \quad x_i \geq 0, \quad i = \overline{1, m}.$$

Аналогічно, для другого гравця набори ймовірностей визначають n-вимірні вектори $Y = (y_1, y_2, ..., y_n)$, для координат яких

$$\sum_{j=1}^{n} y_j = 1,\ y_j \geq 0,\ j = \overline{1, n}.$$

Виграш другого гравця в разі використання мішаних стратегій визначають як математичне очікування виграшу, він дорівнює:

$$\sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_i y_j.$$

В основній теоремі теорії ігор стверджують, що кожна кінцева гра має, принаймні, одне рішення, можливо, в області змішаних стратегій.

Застосування оптимальної стратегії дозволяє здобути виграш, що дорівнює ціні гри: $\alpha \leq v \leq \beta$.

Застосування першим гравцем оптимальної стратегії має забезпечити йому за будь-яких дій другого гравця виграш не менший ніж ціна гри. Тому виконується співвідношення:

$$\sum_{i=1}^{m} a_{ij} x_{iопт} \leq v.$$

Аналогічно для другого гравця оптимальна стратегія має забезпечити за будь-яких стратегій першого гравця програш, який не перевищує ціну гри, тобто, справедливе співвідношення:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} y_{jопт} \geq v.$$

Якщо платіжна матриця не містить сідлової точки, то задача визначення змішаної стратегії тим складніша, чим більша розмірність матриці.

Тому матриці великої розмірності доцільно спростити, зменшивши їхню розмірність шляхом викреслювання дублювальних (однакових) і свідомо невигідних стратегій.

Приклад 8.1. Розгляньте подану гру, задану платіжною матрицею:

$$\begin{pmatrix} 7 & 6 & 5 & 4 & 2 \\ 5 & 4 & 3 & 2 & 3 \\ 5 & 6 & 6 & 3 & 5 \\ 2 & 3 & 3 & 4 & 4 \end{pmatrix}_{4\times 5}.$$

Знайдіть оптимальні стратегії гравців і ціну гри.

Розв'язання. Позначте:

x_1 – імовірність застосування першим гравцем 1-ї стратегії; x_2, x_3, x_4 – імовірність використання першим гравцем 2, 3, 4-ї стратегій, відповідно, причому

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 1;$$

y_1 – імовірність застосування другим гравцем 1-ї стратегії; y_2, y_3, y_4, y_5 – імовірність використання другим гравцем 2, 3, 4, 5-ї стратегій, відповідно, причому

$$y_1 + y_2 + y_3 + y_4 + y_5 = 1.$$

Платіжну матрицю було спрощено шляхом викреслювання дублювальних, свідомо невигідних стратегій.

Тому $x_2 = x_4 = y_1 = y_2 = y_3 = 0$ і матриця набуває вигляду:

$$\begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}_{2\times 2}.$$

Складіть табл. 8.1.

Таблиця 8.1

Очікувані виграші першого гравця

Чисті стратегії другого гравця	Очікувані виграші першого гравця
1	$(4-3)x_1 + 3 = x_1 + 3$
2	$(2-5)x_1 + 5 = -3x_1 + 5$

Знайдіть розв'язання гри графічним методом.

Для цього на осі X_1 розмістить точки $x_1 = 0$ і $x_1 = 1$, через які проведіть прямі, перпендикулярні осі X_1.

Якщо підставити $x_1 = 0$ і $x_1 = 1$ у вираз $x_1 + 3$, то буде знайдено значення 3 й 4, які відкладіть на відповідних перпендикулярних прямих. З'єднавши ці точки, знаходять пряму $x_1 + 3$. Аналогічно побудуйте пряму $-3x_1 + 5$. Оптимальну стратегію першого гравця визначають як точку перетину прямих $x_1 + 3$ та $-3x_1 + 5$ (рис. 8.1):

$$x_1 + 3 = -3x_1 + 5, \quad x_1 = 1/2, \quad x_3 = 1 - x_1 = 1/2$$

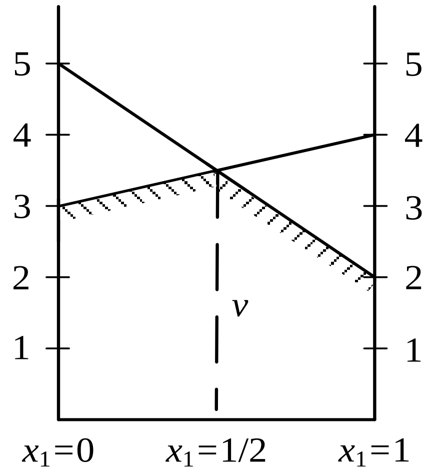

Рис. 8.1. **Розв’язання гри графічним методом**

Ціна гри $v = x_1 + 3 = \frac{1}{2} + 3 = \frac{7}{2}$. Оптимальна стратегія першого гравця: $X_{опт} = (\frac{1}{2}; 0; \frac{1}{2}; 0)$, тоді ціна гри $v = 7/2$.

Знайдіть оптимальну стратегію для другого гравця (табл. 8.2).

Таблиця 8.2

Очікувані виграші другого гравця

Чисті стратегії першого гравця	Очікувані виграші другого гравця
1	$(4-2)y_4 + 2 = 2y_4 + 2$
2	$(3-5)y_4 + 5 = -2y_4 + 5$

$$2y_4 + 2 = -2y_4 + 5, \quad y_4 = \frac{3}{4}, \quad y_5 = 1 - y_4 = \frac{1}{4}.$$

Оптимальна стратегія другого гравця: $Y_{опт} = (0; 0; 0; \frac{3}{4}; \frac{1}{4})$, тоді ціна гри $v = 2y_4 + 2 = \frac{3}{2} + 2 = \frac{7}{2}$.

Завдання для самостійної роботи

8.1. Спростіть платіжну матрицю і визначте розв’язок матричної гри:

а) $A=\begin{pmatrix}3&1&4&5\\4&3&5&7\\2&1&3&3\\5&5&4&3\end{pmatrix}$; б) $A=\begin{pmatrix}2&3&1&4\\4&3&4&5\\3&2&1&4\\5&4&1&6\end{pmatrix}$; в) $A=\begin{pmatrix}4&1&3&2\\4&2&4&3\\5&2&4&4\\1&4&7&5\end{pmatrix}$;

г) $A=\begin{pmatrix}1&2&1&2\\2&2&3&3\\0&1&2&3\\5&1&2&3\end{pmatrix}$; д) $A=\begin{pmatrix}1&4&2&0\\0&3&1&1\\2&5&2&1\\3&4&1&2\end{pmatrix}$; е) $A=\begin{pmatrix}1&1&2&2\\2&3&3&4\\0&2&1&3\\5&2&3&5\end{pmatrix}$.

8.2. Особа, що ухвалює рішення, робить аналіз упровадження двох бізнес-проєктів компанії. Прибуток компанії, залежно від ухвалення відповідної стратегії конкурента компанії, наведено матрицею:

$$P=\begin{pmatrix}8&2&8&9&1\\10&7&3&1&5\end{pmatrix}.$$

Розв’яжіть задану матричну гру графічно та аналітично. Побудуйте матрицю оцінювання ризиків та поясніть здобуті результати.

8.3. Підприємство виготовляє два види продукції та отримує прибуток, що залежить від попиту на продукцію. Попит набуває одне з п’яти станів. Елементи наведеної матриці характеризують прибуток окремого виду продукції, залежно від стану попиту.

$$A=\begin{pmatrix}7&6&7&5\\8&7&9&8\\5&8&8&6\end{pmatrix}.$$

Розв’яжіть задану матричну гру графічно та аналітично, зробіть висновок. Побудуйте матрицю оцінювання ризиків та поясніть здобуті результати.

Рекомендована література

1. Железнякова Е. Ю. Контрольні завдання з курсів "Теорія ймовірностей та математична статистика", "Математичне програмування" для студентів усіх спеціальностей всіх форм навчання. Ч. 2 / уклад. Е. Ю. Железнякова, А. В. Ігначкова, Л. Д. Широкорад. – Харків : Вид. ХНЕУ, 2006. – 48 с.

2. Збірник вправ з розділу "Теорія ймовірностей та математична статистика" навчальної дисципліни "Математика для економістів" для студентів галузі знань "Економіка і підприємництво" усіх форм навчання / уклад. Е. Ю. Железнякова, А. В. Ігначкова, З. Г. Попова та ін. – Харків : Вид. ХНЕУ, 2009. – 116 с.

3. Лабораторний практикум з навчальної дисципліни "Теорія ймовірностей та математична статистика" : навч. посіб. / Е. Ю. Железнякова, І. Л. Лебедєва, Л. О. Норік, К. В. Стєпанова. – Харків : ХНЕУ ім. С. Кузнеця, 2016. – 184 с.

4. Малярец Л. М. Теория вероятностей и математическая статистика в примерах и задачах : учебное пособие для студентов-иностранцев отрасли знаний 0305 "Экономика и предпринимательство" / Л. М. Малярец, Э. Ю. Железнякова, А. В. Игначкова. – Харьков : ХНЭУ. – 2012. – 124 с.

5. Малярець Л. М. Економіко-математичні методи і моделі : практ. посіб. / уклад. Л. М. Малярець, Е. Ю. Железнякова, Є. Ю. Місюра. – Харків : Вид. ХНЕУ, 2011. – 320 с.

6. Малярець Л. М. Практикум з теорії ймовірностей та математичної статистики в Excel : навч.-практ. посіб. / Л. М. Малярець, І. Л. Лебедєва, Е. Ю. Железнякова. – Харків : Вид. ХНЕУ, 2007. – 160 с.

7. Малярець Л. М. Теорія ймовірностей і математична статистика у вправах, прикладах та задачах : навч.-практ. посіб. / Л. М. Малярець, А. В. Ігначкова, Л. Д. Широкорад. – Харків : Вид. ХНЕУ, 2010. – 548 с.

8. Теорія ймовірностей та математична статистика : навч. посіб. / Л. М. Малярець, І. Л. Лебедєва, Е. Ю. Железнякова та ін. – Харків : Вид. ХНЕУ, 2010. – 404 с.

9. Железнякова Е. Ю. Теорія ймовірностей та математична статистика [Електронний ресурс] : практикум / Е. Ю. Железнякова, Л. О. Норік. – Харків : ХНЕУ ім. С. Кузнеця, 2019. – 321 с. – Режим доступу : http://repository.hneu.edu.ua/handle/123456789/21436.

Додатки

Додаток А

Таблиця значень функції $\Phi(x) = 1/\sqrt{2\pi}\int_0^x e^{-\frac{x^2}{2}}dx$

x	Φ(x)	x	Φ(x)	x	Φ(x)	x	Φ(x)
0,00	0,0000	0,39	0,1517	0,78	0,2823	1,17	0,3790
0,01	0,0040	0,40	0,1554	0,79	0,2852	1,18	0,3810
0,02	0,0080	0,41	0,1591	0,80	0,2881	1,19	0,3830
0,03	0,0120	0,42	0,1628	0,81	0,2910	1,20	0,3849
0,04	0,0160	0,43	0,1664	0,82	0,2939	1,21	0,3869
0,05	0,0199	0,44	0,1700	0,83	0,2967	1,22	0,3883
0,06	0,0239	0,45	0,1736	0,84	0,2995	1,23	0,3907
0,07	0,0279	0,46	0,1772	0,85	0,3023	1,24	0,3925
0,08	0,0319	0,47	0,1808	0,86	0,3051	1,25	0,3944
0,09	0,0359	0,48	0,1844	0,87	0,3078	1,26	0,3962
0,10	0,0398	0,49	0,1879	0,88	0,3106	1,27	0,3980
0,11	0,0438	0,50	0,1915	0,89	0,3133	1,28	0,3997
0,12	0,0478	0,51	0,1950	0,90	0,3159	1,29	0,4015
0,13	0,0517	0,52	0,1985	0,91	0,3186	1,30	0,4032
0,14	0,0557	0,53	0,2019	0,92	0,3212	1,31	0,4049
0,15	0,0596	0,54	0,2054	0,93	0,3238	1,32	0,4066
0,16	0,0636	0,55	0,2088	0,94	0,3264	1,33	0,4082
0,17	0,0675	0,56	0,2123	0,95	0,3289	1,34	0,4099
0,18	0,0714	0,57	0,2157	0,96	0,3315	1,35	0,4115
0,19	0,0753	0,58	0,2190	0,97	0,3340	1,36	0,4131
0,20	0,0793	0,59	0,2224	0,98	0,3365	1,37	0,4147
0,21	0,0832	0,60	0,2257	0,99	0,3389	1,38	0,4162
0,22	0,0871	0,61	0,2291	1,00	0,3413	1,39	0,4177
0,23	0,0910	0,62	0,2324	1,01	0,3438	1,40	0,4192
0,24	0,0948	0,63	0,2357	1,02	0,3401	1,41	0,4207
0,25	0,0987	0,64	0,2389	1,03	0,3485	1,42	0,4222
0,26	0,1026	0,65	0,2422	1,04	0,3508	1,43	0,4236
0,27	0,1064	0,66	0,2454	1,05	0,3531	1,44	0,4251
0,28	0,1103	0,67	0,2486	1,06	0,3554	1,45	0,4265
0,29	0,1141	0,68	0,2517	1,07	0,3577	1,46	0,4279
0,30	0,1179	0,69	0,2549	1,08	0,3599	1,47	0,4292
0,31	0,1217	0,70	0,2580	1,09	0,3621	1,48	0,4306
0,32	0,1255	0,71	0,2611	1,10	0,3643	1,49	0,4319
0,33	0,1293	0,72	0,2642	1,11	0,3665	1,50	0,4332
0,34	0,1331	0,73	0,2673	1,12	0,3686	1,51	0,4345
0,35	0,1368	0,74	0,2703	1,13	0,3708	1,52	0,4357
0,36	0,1406	0,75	0,2734	1,14	0,3729	1,53	0,4370
0,37	0,1443	0,76	0,2764	1,15	0,3749	1,54	0,4382
0,38	0,1480	0,77	0,2794	1,16	0,3770	1,55	0,4394

x	Φ(x)	x	Φ(x)	x	Φ(x)	x	Φ(x)
1,56	0,4406	1,81	0,4649	2,12	0,4830	2,62	0,4956
1,57	0,4418	1,82	0,4656	2,14	0,4838	2,64	0,4959
1,58	0,4429	1,83	0,4664	2,16	0,4846	2,66	0,4961
1,59	0,4441	1,84	0,4671	2,18	0,4854	2,68	0,4963
1,60	0,4452	1,85	0,4678	2,20	0,4861	2,70	0,4965
1,61	0,4463	1,86	0,4686	2,22	0,4868	2,72	0,4967
1,62	0,4474	1,87	0,4693	2,24	0,4875	2,74	0,4969
1,63	0,4484	1,88	0,4699	2,26	0,4881	2,76	0,4971
1,64	0,4495	1,89	0,4706	2,28	0,4887	2,78	0,4973
1,65	0,4505	1,90	0,4713	2,30	0,4893	2,80	0,4974
1,66	0,4515	1,91	0,4719	2,32	0,4898	2,82	0,4976
1,67	0,4525	1,92	0,4726	2,34	0,4904	2,84	0,4977
1,68	0,4535	1,93	0,4732	2,36	0,4909	2,86	0,4979
1,69	0,4545	1,94	0,4738	2,38	0,4913	2,88	0,4980
1,70	0,4554	1,95	0,4744	2,40	0,4918	2,90	0,4981
1,71	0,4564	1,96	0,4750	2,42	0,4922	2,92	0,4982
1,72	0,4573	1,97	0,4756	2,44	0,4927	2,94	0,4984
1,73	0,4582	1,98	0,4761	2,46	0,4931	2,96	0,4985
1,74	0,4591	1,99	0,4767	2,48	0,4934	2,98	0,4985
1,75	0,4599	2,00	0,4772	2,50	0,4938	3,00	0,49865
1,76	0,4608	2,02	0,4783	2,52	0,4941	3,20	0,49931
1,77	0,4616	2,04	0,4793	2,54	0,4945	3,34	0,49966
1,78	0,4625	2,06	0,4803	2,56	0,4948	3,60	0,49984
1,79	0,4633	2,08	0,4812	2,58	0,4951	3,80	0,49993
1,80	0,4641	2,10	0,4821	2,60	0,4953	4,00	0,49997

Додаток Б

Таблиця Б.1

Таблиця значень $t = t(\gamma, n)$

n	γ			n	γ		
	0,95	0,99	0,999		0,95	0,99	0,999
5	2,78	4,60	8,61	20	2,093	2,861	3,883
6	2,57	4,03	6,86	25	2,064	2,797	3,745
7	2,45	3,71	5,96	30	2,045	2,756	3,659
8	2,37	3,50	5,41	35	2,032	2,720	3,600
9	2,31	3,36	5,04	40	2.023	2,708	3,558
10	2,26	3,25	4,78	45	2,016	2,692	3,527
11	2,23	3,17	4,59	50	2,009	2,679	3,502
12	2,20	3,11	4,44	60	2,001	2,662	3,464
13	2,18	3,06	4,32	70	1,996	2,649	3,439
14	2,16	3,01	4,22	80	1,991	2,640	3,418
15	2,15	2,98	4,14	90	1,987	2,633	3,403
16	2,13	2,95	4,07	100	1,984	2,627	3,392
17	2,12	2,92	4,02	120	1,980	2,617	3,374
18	2,11	2,90	3,97	∞	1,960	2,576	3,291
19	2,10	2,88	3,92				

Таблиця Б.2

Таблиця значень $q = q(\gamma, n)$

n	γ			n	γ		
	0,95	0,99	0,999		0,95	0,99	0,999
5	1,37	2,67	5,64	20	0,37	0,58	0,88
6	1,09	2,01	3,88	25	0,32	0,49	0,73
7	0,92	1,62	2,98	30	0,28	0,43	0,63
8	0,80	1,38	2,42	35	0,26	0,38	0,56
9	0,71	1,20	2,06	40	0,24	0,35	0,50
10	0,65	1,08	1,80	45	0,22	0,32	0,46
11	0,59	0,98	1,60	50	0,21	0,30	0,43
12	0,55	0,90	1,45	60	0,19	0,27	0,38
13	0,52	0,83	1,33	70	0,17	0,25	0,34
14	0,48	0,78	1,23	80	0,16	0,23	0,31
15	0,46	0,73	1,15	90	0,15	0,21	0,29
16	0,44	0,70	1,07	100	0,14	0,20	0,27
17	0,42	0,66	1,01	150	0,12	0,16	0,21
18	0,40	0,63	0,96	200	0,10	0,14	0,19
19	0,39	0,60	0,92	250	0,09	0,12	0,16

Додаток В

Критичні точки розподілу Стьюдента

Рівень значущості α (двобічна критична область)				
Кількість ступенів свободи k	$\alpha = 0{,}01$	$\alpha = 0{,}02$	$\alpha = 0{,}05$	$\alpha = 0{,}1$
1	63,70	31,82	12,70	6,31
2	9,92	6,97	4,30	2,92
3	5,84	4,54	3,18	2,35
4	4,60	3,75	2,78	2,13
5	4,03	3,37	2,57	2,01
6	3,71	3,14	2,45	1,94
7	3,50	3,00	2,36	1,89
8	3,36	2,90	2,31	1,86
9	3,25	2,82	2,26	1,83
10	3,17	2,76	2,23	1,81
11	3,11	2,72	2,20	1,80
12	3,05	2,68	2,18	1,78
13	3,01	2,65	2,16	1,77
14	2,98	2,62	2,14	1,76
15	2,95	2,60	2,13	1,75
16	2,92	2,58	2,12	1,75
17	2,90	2,57	2,11	1,74
18	2,88	2,55	2,10	1,73
19	2,86	2,54	2,09	1,73
20	2,85	2,53	2,09	1,73
21	2,83	2,52	2,08	1,72
22	2,82	2,51	2,07	1,72
23	2,81	2,50	2,07	1,71
24	2,80	2,49	2,06	1,71
25	2,79	2,49	2,06	1,71
26	2,78	2,48	2,06	1,71
27	2,77	2,47	2,05	1,71
28	2,76	2,46	2,05	1,70
30	2,75	2,46	2,04	1,70
40	2,70	2,42	2,02	1,68
60	2,66	2,39	2,00	1,67
120	2,62	2,36	1,98	1,66
∞	2,58	2,33	1,96	1,64
k	$\alpha = 0{,}005$	$\alpha = 0{,}01$	$\alpha = 0{,}025$	$\alpha = 0{,}05$
Рівень значущості α (однобічна критична область)				

Зміст

НАВЧАЛЬНЕ ВИДАННЯ

ВИЩА ТА ПРИКЛАДНА МАТЕМАТИКА

Методичні рекомендації до практичних завдань із розділу "Теорія ймовірностей та математична статистика. Математичне програмування. Дослідження операцій"

для студентів спеціальності 242 "Туризм" першого (бакалаврського) рівня

Самостійне електронне текстове мережеве видання

Укладачі: **Железнякова** Еліна Юріївна
Сілічова Тетяна Василівна

Відповідальний за видання *Л. М. Малярець*

Редактор *О. Г. Доценко*

Коректор *О. Г. Доценко*

План 2020 р. Поз. № 22 ЕВ. Обсяг 99 с.

Видавець і виготовлювач – ХНЕУ ім. С. Кузнеця, 61166, м. Харків, просп. Науки, 9-А

Свідоцтво про внесення суб'єкта видавничої справи до Державного реєстру
ДК № 4853 від 20.02.2015 р.