МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ

ХАРКІВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ ЕКОНОМІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ
ІМЕНІ СЕМЕНА КУЗНЕЦЯ

Т. В. Денисова
В. Ф. Сенчуков

ДИСКРЕТНА МАТЕМАТИКА

Навчальний посібник

Харків
ХНЕУ ім. С. Кузнеця
2019

УДК 519.1(075.034)
Д33

Авторський колектив: канд. техн. наук, доцент Т. В. Денисова – розділ 1; канд. фіз.-мат. наук, доцент В. Ф. Сенчуков – вступ, розділ 2.

Рецензенти: д-р фіз.-мат. наук, професор кафедри вищої та прикладної математики Української інженерно-педагогічної академії *О. М. Литвин*; д-р фіз.-мат. наук, професор кафедри вищої математики та системного аналізу Національного аерокосмічного університету ім. М. Є. Жуковського "ХАІ" *В. С. Проценко*.

Рекомендовано до видання рішенням ученої ради Харківського національного економічного університету імені Семена Кузнеця.

Протокол № 6 від 21.01.2019 р.

Самостійне електронне текстове мережеве видання

Денисова Т. В.

Д33 Дискретна математика [Електронний ресурс] : навчальний посібник / Т. В. Денисова, В. Ф. Сенчуков. – Харків : ХНЕУ ім. С. Кузнеця, 2019. – 288 с.

ISBN 978-966-676-751-9

Уміщено традиційні розділи: "Теорія множин та комбінаторний аналіз. Теорія графів", "Математична логіка. Елементи теорії скінченних автоматів". Наведено запитання для самодіагностики засвоєння теоретичного матеріалу, зразки розв'язання типових задач та задачі для самостійного розв'язання.

Рекомендовано для студентів галузі знань 12 "Інформаційні технології" першого (бакалаврського) рівня.

УДК 519.1(075.034)

ISBN 978-966-676-751-9

Зміст

Вступ

Дискретна математика є базовою дисципліною, яка широко застосовується в математичній кібернетиці, комп'ютерній математиці, програмуванні, а також під час створення засобів передавання й оброблення інформації, автоматизованих систем керування та проєктування.

Сучасні інформаційні технології передбачають розроблення систем, на які покладають: збирання, оброблення та передавання великої кількості інформації щодо стану виробничого чи економічного процесу, екологічного стану навколишнього середовища; аналіз ситуації, що склалася; формулювання рекомендацій щодо доцільних дій.

Дискретна математика – розділ математики, **об'єктом** вивчення якої є дискретні множини та дискретні змінні, а **предметом** – властивості цих об'єктів, встановлення та дослідження різноманітних відповідностей між ними й застосування їх до побудови математичних моделей задач фахової спрямованості.

Мета вивчення навчальної дисципліни "Дискретна математика" – ознайомити студентів з основними поняттями, ідеями та методами логічного аналізу, навчити використовувати їх під час розв'язування конкретних практичних задач, підготувати студентів до вивчення спеціальних дисциплін і самостійного опрацьовування математичної та науково-технічної літератури, сформувати цілісну систему теоретичних знань, необхідну для професійної діяльності компетентного фахівця в галузі інформаційних технологій, розвинути вміння аналітичного мислення та навичок застосування математичного апарату до формалізації реальних процесів і явищ.

Після вивчення навчальної дисципліни студент набуває **професійних компетентностей** щодо використання математичного апарату дискретної математики під час вивчення навчальних дисциплін, пов'язаних із теоріями інформації, алгоритмів і програм, процесів управління, масового обслуговування тощо, а також для вирішення прикладних і наукових завдань у галузі інформаційних систем і технологій.

Запропонований навчальний посібник написано відповідно до чинної робочої програми навчальної дисципліни "Дискретна математика" для студентів галузі знань 12 "Інформаційні технології" першого (бакалаврського) рівня. Зміст посібника складають традиційні розділи: "Теорія множин та комбінаторний аналіз. Теорія графів", "Математична логіка.

Елементи теорії скінченних автоматів", що відповідають двом змістовим модулям і охоплюють п'ять тем.

У темі 1 "Теорія множин і відношень" висвітлено: основні поняття теорії множин, різновиди множин, дії (операції) над ними, алгебра множин. Стосовно бінарних відношень розглянуто: основні означення, операції, способи задання, основні властивості та типи.

Тему 2 "Комбінаторний аналіз" присвячено основним задачам і правилам теорії сполук (добутку, суми, включення і виключення) та основним комбінаторним конфігураціям без повторень і з повтореннями. Наведено загальні рекомендації щодо розв'язання задач на знаходження кількості основних комбінаторних конфігурацій.

Тему 3 "Теорія графів" складають неорієнтовані й орієнтовані графи та їх застосування до розв'язання задач: знаходження ланцюга найменшої довжини, побудови економічного дерева, оптимізаційних задач на сіткових графіках і транспортних мережах.

Тема 4 "Математична логіка" є найбільш об'ємною і містить: алгебру висловлень, логічні формули, булеві функції та їх застосування до задач аналізу та синтезу контактних і логічних схем, а також елементи числення предикатів і кванторів.

Тема 5 "Елементи теорії скінченних автоматів" охоплює матеріал, пов'язаний із використанням інструментарію (від лат. *instrumentum* – знаряддя для роботи), висвітленому в попередніх темах, для аналізу, синтезу й мінімізації скінченних автоматів.

У цьому навчальному посібнику до кожної теми наведено: мету, яку треба досягти в результаті вивчення теми; основні питання теми, які підлягають засвоєнню; професійні компетентності, що формуються за темою; ключові слова; висвітлення питань теми; зразки розв'язання типових задач; вправи та задачі для самостійного розв'язання; контрольні запитання для самодіагностики засвоєння теоретичного матеріалу; рекомендовану літературу до теми. У кінці посібника вміщено: покажчик позначень, предметний покажчик і список літератури (використаної та рекомендованої).

Для того щоб посібник можна було студіювати незалежно від інших джерел інформації, він не містить (за текстом) посилань на них. Формули, рисунки, теореми тощо занумеровано трійками, перший елемент якої є номером відповідної теми, другий – номером пункту (у межах цієї теми), а третій указує на порядковий номер у межах пункту.

Розділ 1. Теорія множин та комбінаторний аналіз. Теорія графів

1. Теорія множин і відношень

Абстракція є дієвим інструментом
математичного мислення.
Ріхард Курант

Ті, хто народився математиком,
володіючи комбінованим розумом,
мають гарні здібності до всіх знань.
Сократ

Мета: навчити майбутніх фахівців у галузі інформаційних технологій умінню описувати абстрактною мовою теорії множин різноманітні процеси та явища природи.

Компетентності, які набуває студент після вивчення теми:

знання: осмислення та засвоєння основ теорії множин і бінарних відношень;

уміння: здатність застосовувати набуті знання до аналізу інформаційних систем з метою побудови відповідної математичної моделі;

комунікації: підготовленість до передавання інформації щодо результатів аналізу інформаційних систем;

автономність і відповідальність: вміння самостійно вирішувати завдання, розв'язувати практичні задачі та ситуаційні вправи фахової спрямованості за матеріалом теми й відповідати за результати своєї діяльності.

Основні питання теми:

1.1. Множини.

1.2. Бінарні відношення.

Ключові слова: множина, елемент, підмножина, операції над множинами (перетин, об'єднання, різниця, симетрична різниця, доповнення), універсум, діаграма Ейлера – Венна, класифікація множин, потужність, алгебра множин, закони, бієкція, сюр'єкція, ін'єкція, бінарне відношення, способи задання, основні характеристики та типи.

1.1. Множини

Початкові відомості, пов'язані з поняттям "множина"

Теорія множин як математична дисципліна створена німецьким математиком Георгом Кантором (1845 – 1918). Висвітлення проблем, пов'язаних із її виникненням і розвитком, виходить за межі задач навчальної дисципліни "Дискретна математика", тому ми відразу перейдемо до розгляду основних положень цієї теорії.

Поняття "множина" є одним із первісних (до того ж, фундаментальних) понять математики, яким неможливо дати означення, використовуючи інші математичні поняття. Тому вдаються до описового пояснення поняття множини термінами буденної (нематематичної) мови.

Під **множиною** розуміють сукупність об'єктів (предметів), які об'єднано в цю сукупність за певними ознаками. Об'єкти, що утворюють множину, називають її **елементами** (**членами** або **точками**). Стосовно поняття множини Георг Кантор лаконічно висловився так: "Множина є багато що, мислиме нами як єдине". Так, *наприклад*, можна говорити про: множину допитливих у студентській групі; множину нервових клітин тіла людини; множину точок на заданій лінії тощо. Залежно від контексту до синонімів терміна "множина" можна віднести такі поняття: "зібрання", "ансамбль", "колекція", "сімейство", "система", "клас", "зграя", "ватага", "гурт", "компанія" та ін.

Множини позначають, як правило, великими літерами латинського або грецького алфавітів: A, B, C, …, Φ, Ψ, Ω, …, а їхні елементи – малими. Якщо A – множина, а x – її елемент, то пишуть: $x \in A$, де $\in$ – *символ (знак) належності*, і читають: "x належить A". У протилежному випадку, коли x не є елементом множини A, пишуть $x \notin A$ або $x \overline{\in} A$ і читають: "x не належить A".

Будь-яку множину вважають **заданою**, якщо зазначено характеристику її елементів, за допомогою якої стосовно кожного об'єкта можна сказати, належить він цій множині чи ні.

Існує два способи задання множин:

1) **спосіб переліку** – це коли наводять (називають) усі елементи, які складають множину, що розглядається;

2) **спосіб опису**, який ґрунтується на заданні так званої *характеристичної (визначальної) властивості* $P(x)$ елементів x $(x \in A)$.

Для символьного запису множини використовують фігурні дужки ($\{\,,\}$), між якими записують її елементи (через кóму або крапку з комою) чи визначальну властивість.

Наприклад, $A=\{1,2,3,4,5\}$; $B=\{a,b,c,d\}$; $C=\{x \mid x=2n,\ n\in\mathbf{N}\}$, де n – натуральне число, $\mathbf{N}$ – множина натуральних чисел, | – вертикальна риска – символ (знак), який читають: "із властивістю", "які мають властивість".

Множину C можна описати інакше: $C=\{x\in\mathbf{N} \mid x-$ парне число$\}$ або $C=\{2,4,6,8,\ ...\}$ (за умови, що зрозуміло, який смисл вкладається в три крапки). *Зауважимо*, що і спосіб переліку, і спосіб опису зручні для задання множин, які мають відносно невелику кількість елементів. У протилежному випадку, коли множини мають велику кількість елементів (або взагалі перелічити їх усі неможливо), віддають перевагу способу опису.

Важливим поняттям теорії множин є поняття "порожня множина". **Порожньою** називають множину, яка не містить жодного елемента і яку позначають символом $\varnothing$. Множини, які не є порожніми, природно називати **непорожніми множинами**.

Наприклад, множина дійсних коренів рівняння $x^2+10=0$ є порожньою, оскільки не знайдеться такого числа із $\mathbf{R}$ – множини дійсних чисел, щоб сума квадрата цього числа з числом 10 дорівнювала нулю, тобто $\{x\in\mathbf{R} \mid x^2+10=0\}=\varnothing$.

Поняття порожньої множини відіграє важливу роль у разі задання множин способом опису, оскільки не завжди заздалегідь відомо, існує хоча б один елемент із заданою характеристичною властивістю (адже їх може й не бути, як у розглянутому прикладі). *Спробуйте*, як вправу, самостійно навести приклади порожніх множин із будь-яких галузей знань.

Множини A і B називають **рівними**, якщо вони містять одні й ті самі елементи, і пишуть: $A=B$. За суттю рівні множини представляють одну і ту ж множину.

Наприклад, рівними є множини: $A=\{m,\ n,\ p\}$, $B=\{\,p,m,n\}$, $C=\{\,m,\ p,\ p,n\}$ (незважаючи на те, що елемент p записано двічі). Щоб не виникало непорозумінь під час підрахунку кількості елементів множини, треба домовитись, що у множині не має бути однакових членів.

Із означення рівних множин випливає висновок: *порядок елементів у множині несуттєвий!*

Для рівних множин мають місце **властивості** (*обґрунтуйте!*):

1) *симетричність* (від лат. *symmetria* – співвимірність):

$$A = A;$$

2) *рефлексивність* (від лат. *reflexio* – повернення назад):

$$(A = B) \Rightarrow (B = A); \qquad (1.1.1)$$

3) *транзитивність* (від грец. *transitus* – проходження):

$$(A = B \wedge B = C) \Rightarrow (A = C),$$

де $\Rightarrow$ – *символ логічного наслідку*, який читають: "якщо …, то …" або "із … випливає …", або "… тягне за собою …"; $\wedge$ – символ, який читають: "і".

Природно назвати множини A і B **нерівними** ($A \neq B$), якщо або у множині A є елементи, які не належать множині B, або у множині B є елементи, які не належать A.

Розглянемо дві непорожні множини A і B. Множину A назвемо **підмножиною** множини B, якщо кожний елемент із A також належить множині B. *Наприклад*, $A = \{a, b\}$ є підмножиною $B = \{a, b, c\}$.

Символьний запис означення підмножини виглядає так:

$$(A \subset B) \; \rightleftharpoons \; (\forall x : x \in A \Rightarrow x \in B), \qquad (1.1.2)$$

де $\subset$ – *символ (знак) включення*, який читають: "є підмножиною", "міститься в", "включається в"; $\rightleftharpoons$ – *символ еквіваленції* (*рівнозначності*, *рівносильності*) *за означенням*, який читають: "те ж саме, що", "так само, як", "якщо і тільки якщо"; $\forall$ – символ, який називають *квантором загальності*, який читають (залежно від контексту): "будь-який", "який би не був", "для всіх", "всі"; (квантор – від лат. *quantum* – скільки); : – *двокрапка*, читають як: "таке (такі), що", "маємо".

Крім квантора загальності $\forall$ надалі будемо застосовувати *квантор існування* $\exists$, який читають: "існує", "деякий"; $\bar{\exists}$ – "не існує".

Отже, запис $A \subset B$ можна прочитати так: "множина A є підмножиною (міститься в) B – це те ж саме, що: "для всіх x таких, що належать A, випливає їхня належність множині B". (*Наведіть* інші варіанти формулювання).

Замість запису $A \subset B$ часто використовують такий: $B \supset A$, де $\supset$ – теж *символ включення*, який читають: "містить у собі", "включає".

За допомогою введеної в розгляд символіки легко подати (причому двома способами) означення рівних множин, а саме:

$$(A = B) \rightleftharpoons (A \subset B \wedge B \subset A),$$
$$(A = B) \rightleftharpoons (\forall x : x \in A \Leftrightarrow x \in B), \tag{1.1.3}$$

де $\Leftrightarrow$ – *символ еквіваленції*, який читають: "тоді і тільки тоді", "якщо і тільки якщо" (*обміркуйте* і *сформулюйте* відповідні твердження).

Якщо множина A не є підмножиною множини B, то пишуть: $A \not\subset B$ або $B \not\supset A$ і кажуть: "A не міститься в B" або "B не включає A".

Наприклад, $(A = \{1, 2\},\ B = \{1, 3, 5\}) \Rightarrow A \not\subset B$, оскільки елемент 2 із A не належить B.

За умови, що $A = B$, із означення підмножини (1.1.2) маємо: будь-яка (непорожня) множина A є підмножиною самої себе (адже кожний елемент із A, без сумніву, належить A). Таку підмножину A називають **невластивою**.

До невластивих підмножин відносять також порожню множину $\varnothing$, оскільки вона є підмножиною будь-якої непорожньої множини. Дійсно, припустімо протилежне, тобто $\varnothing \not\subset A$. Таке може бути лише у випадку, якщо існує елемент із множини $\varnothing$, який не належить A. Але це неможливо, оскільки $\varnothing$ не має елементів. Отже, твердження, що $\varnothing \subset A$, не є хибним, тобто $\varnothing$ – підмножина A.

Якщо в процесі розгляду підмножин треба підкреслити, що мають на увазі і невластиві підмножини, то користуються **знаками (символами) нестрогого включення**: $\subseteq$, $\supseteq$. Запис $A \subseteq B$ означає, що слід враховувати й такі підмножини: $A = \varnothing$, $A = B$. На противагу знакам нестрогого включення символи $\subset$, $\supset$ називають **знаками строгого включення** і кажуть, що їм відповідають **істинні (властиві) підмножини**.

Основні властивості множин, пов'язані зі смислом знака нестрогого включення, такі:

1) *симетричність:* $A \subseteq A$;

2) *асиметричність:* $(A \subseteq B \wedge B \subseteq A) \Rightarrow (A = B)$; (1.1.4)

3) *транзитивність:* $(A \subseteq B \wedge B \subseteq C) \Rightarrow (A \subseteq C)$.

Подумайте, чи будуть справедливими співвідношення (1.1.4), якщо замінити в них символ $\subseteq$ на символ $\subset$.

Якщо розглядають декілька множин A_1, A_2, ..., A_k, $k \in \mathbf{N}$, які є підмножинами однієї й тієї ж множини A, то цю ("найбільшу") множину A називають **основною** (**одиничною**; **універсальною**, або **універсумом**) і позначають через I або U:

$$A = I \rightleftarrows (\forall i = 1,2,...,k : A_i \subset A). \qquad (1.1.5)$$

Наприклад, студентська академічна група є універсумом для сукупності всіляких підмножин (відмінників; спортсменів; тих студентів, які отримують стипендію; студентів, які проживають у гуртожитку, тощо) цієї групи; у планіметрії (стереометрії) універсум I – множина точок площини (простору).

Деякі різновиди множин (за потужністю та структурою)

Розглянемо дві непорожні множини A і B. Елементи цих множин можна тим чи іншим чином зіставляти один з одним, утворюючи пари (x, y), де $x \in A$, $y \in B$. Якщо для кожного елемента $x \in A$ вказано елемент $y \in B$, з яким зіставляється елемент x, то кажуть, що між множинами A і B установлено **відповідність.** Разом із тим не обов'язково, щоб у зіставленні брали участь усі елементи множин A і B.

Відповідність між A і B називають **взаємно однозначною** (або **бієкцією**), якщо кожному елементу множини A можна поставити у відповідність один елемент множини B так, що кожний елемент із B є відповідним тільки одному елементу із A, і пишуть: $A \leftrightarrow B$, де $\leftrightarrow$ – *символ бієкції* (бієкція – від лат. *bijectio* – накладання).

Наприклад, для множин $A = \{2, 8, 16, 1\}$ і $B = \{0, 3, 4, 1\}$ відповідність, яка описується парами $(2,1)$, $(8,3)$, $(16,4)$, $(1,0)$, є бієкцією (або бієктивною), а пари $(2,1)$, $(8,3)$, $(16,0)$, $(1,0)$ не визначають бієкції, оскільки елемент $0 \in B$ є відповідним двом елементам із A: 16 і 1.

Для множин, між якими існує бієктивна відповідність, як і для рівних множин, справедливі **властивості** (*обґрунтуйте!*):

1) *симетричність:* $A \leftrightarrow A$;

2) *рефлексивність:* $(A \leftrightarrow B) \Rightarrow (B \leftrightarrow A)$; (1.1.6)

3) *транзитивність:* $(A \leftrightarrow B \wedge B \leftrightarrow C) \Rightarrow (A \leftrightarrow C)$.

Якщо між елементами двох множин A і B можна встановити взаємно однозначну відповідність (бієкцію), то їх називають **еквівалентними**, і пишуть $A \sim B$, де ~ – "тильда" – *символ еквівалентності*. Отже, за означенням:

$$(A \sim B) \rightleftharpoons (A \leftrightarrow B). \tag{1.1.7}$$

Перевірте, чи будуть мати місце для еквівалентних множин властивості (1.1.6).

Спираючись на поняття еквівалентних множин, легко дати строгі означення понять "скінченна множина", "нескінченна множина". Непорожню множину A називають **скінченною** (**нескінченною**), якщо існує (не існує) таке натуральне число n ($n \in \mathbf{N}$), що множина A еквівалентна множині $\{1, 2, 3, \ldots, n\}$:

$$\begin{gathered} A \text{ – скінченна множина } \rightleftharpoons \exists n \in \mathbf{N} : A \sim \{1, 2, 3, \ldots, n\} \\ (A \text{ – нескінченна множина } \rightleftharpoons \bar{\exists} n \in \mathbf{N} : A \sim \{1, 2, 3, \ldots, n\}). \end{gathered} \tag{1.1.8}$$

Спробуйте дати означення нескінченної множини через квантор загальності $\forall$ і поняття нееквівалентних множин: $A \nsim B$.

Наприклад, множина $A = \{m, p, n, q\}$ є скінченною, оскільки вона еквівалентна множині $\{1, 2, 3, 4\}$ (тут $n = 4$); один із варіантів бієктивної відповідності такий: $(m, 1)$, $(p, 2)$, $(n, 3)$, $(q, 4)$. *Спробуйте* навести інші варіанти бієкції.

Як відомо зі шкільної математики, нескінченною множиною є множина натуральних чисел (чисел "лічби"): $\mathbf{N} = \{1, 2, 3, \ldots, n, \ldots\}$.

Прикладом множини, яка еквівалентна множині $\mathbf{N}$, є множина парних чисел $\{2, 4, 6, \ldots, 2n, \ldots\}$, $n \in \mathbf{N}$. Відповідна бієкція описується парами $(n, 2n)$, $n \in \mathbf{N}$.

Крім того, встановлено, що *будь-яка нескінченна множина еквівалентна деякій своїй властивій підмножині (!)*.

Прикладами інших нескінченних множин є множини:

1) *цілих чисел*: $\mathbf{Z} = \{0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots, \pm n, \ldots\}$;

2) *раціональних чисел* (дробів): $\mathbf{Q} = \{x \mid (\exists p \in \mathbf{Z}, \exists q \in \mathbf{N}) : x = p/q\}$;

3) *ірраціональних чисел*: $\overline{\mathbf{Q}} = \{x \mid (\bar{\exists} p \in \mathbf{Z}, \bar{\exists} q \in \mathbf{N}) : x = p/q\}$;

4) *дійсних чисел:* $\mathbf{R}=\{x \mid x\in\mathbf{Q}\vee x\in\overline{\mathbf{Q}}\}$ (символ $\vee$ читають як "або");

5) *точок* на прямій (на площині, у просторі, деякої поверхні тощо).

Нагадаємо, що між множиною дійсних чисел і множиною всіх точок на прямій існує бієкція (яка і визначає числову вісь).

Із означення скінченних множин випливає, що дві скінченні множини A і B еквівалентні тоді і тільки тоді, коли вони містять одну й ту саму кількість елементів (*чому?*):

$$\left(A, B \text{ – скінченні множини} \wedge A\sim B\right)\Leftrightarrow\left(\,|A|=|B|\,\right), \qquad (1.1.9)$$

де $|A|$ ($|B|$) – кількість елементів множини A (B).

Отже, можна сказати, що "кількість елементів" – це те спільне, що властиве (притаманне) усім еквівалентним між собою скінченним множинам незалежно від природи їхніх елементів.

Щодо нескінченних множин, то їх неможливо розрізнити (порівняти) за кількістю елементів (оскільки їх – елементів – нескінченно багато!). Тому для нескінченних множин замість поняття "кількість елементів" введено поняття "*потужність*" і про еквівалентні між собою нескінченні множини кажуть, що вони мають *однакову потужність* (*рівнопотужні*):

$$(A,\ B\text{– нескінченні множини} \wedge A\sim B) \rightleftharpoons (P(A)=P(B)), \qquad (1.1.10)$$

де $P(A)$, $P(B)$ – потужності множин A і B відповідно.

Термін "потужність" застосовують і до скінченних множин. Якщо A – скінченна множина, то вважають, що: $P(A)=|A|$.

Найпростішою серед нескінченних множин є уже згадувана множина натуральних чисел $\mathbf{N}$.

Будь-яку множину A, еквівалентну множині натуральних чисел $\mathbf{N}$, називають **зліченною**:

$$(A \text{ – зліченна множина}) \rightleftharpoons (A\sim\mathbf{N}). \qquad (1.1.11)$$

З урахуванням формули (1.1.7) можна сказати, що **зліченна множина** – це множина, елементи якої можна бієктивно зіставити з усіма натуральними числами. Інакше кажучи, **зліченна множина** – це множина, елементи якої можна занумерувати (за допомогою натуральних чисел) у нескінченну послідовність: x_1, x_2, …, x_n, …, де $x_n\in\mathbf{R}$ $(n=1,2,3,...)$.

Прикладами зліченних множин є множини:

1) *парних і непарних чисел*: $\{x \mid x = 2n,\ n \in \mathbf{N}\}$, $\{x \mid x = 2n-1,\ n \in \mathbf{N}\}$;

2) *цілих чисел* $\mathbf{Z}$;

3) *раціональних чисел* $\mathbf{Q}$;

4) *чисел, які є натуральними степенями* числа 3: $\{x \mid x = 3^n, n \in \mathbf{N}\}$ (чи будь-якого іншого числа).

Потужність множини $\mathbf{N}$, а отже, і будь-якої зліченної множини, позначають символом $\aleph_0$, який читають: "алеф нуль" (алеф – буква давньоєврейської абетки).

Нескінченну множину A, яка не є зліченною, називають **незліченною**:

$$(A \text{ – незліченна множина}) \rightleftharpoons (A \not\sim \mathbf{N}). \qquad (1.1.12)$$

Інакше кажучи, **незліченна множина** – це нескінченна множина, між елементами якої і натуральними числами не можна встановити бієктивну відповідність, тобто елементи такої множини неможливо занумерувати.

Прикладами незліченних множин є множини:

1) *ірраціональних чисел* $\overline{\mathbf{Q}}$;

2) *дійсних чисел* $\mathbf{R}$ (навіть множина $\{x \mid 0 \le x \le 1\}$, тобто відрізок $[0;1]$, і будь-який відрізок $[a;b]$ чи інтервал $(a;b)$, $a \in \mathbf{R}$, $b \in \mathbf{R}$);

3) *усіх точок* на площині у просторі; множини точок кола, круга, квадрата, сфери, кулі тощо.

Про множину дійсних чисел $\mathbf{R}$ (а отже, і про кожну еквівалентну їй множину) кажуть, що вона має потужність **континуума** (континуум – від лат. *continuum* – неперервний). Цю потужність позначають символом **c** (або символом $\aleph$ – алеф).

Здебільшого математика (як абстрактна наука) у застосовному аспекті оперує **числовими множинами**, тобто множинами, елементи яких є числами. Числа ж є кількісними характеристиками будь-якого явища чи процесу (як сукупності явищ), незалежно від його природи. Однією з універсальних числових множин є множина дійсних чисел $\mathbf{R}$. Оскільки між множиною $\mathbf{R}$ і множиною точок на прямій існує бієкція, то множину $\mathbf{R}$ і її підмножини називають також **точковими**, а терміни "дійсне число" і "точка прямої" сприймають як синоніми.

З іншого боку, пряму можна розглядати як геометричне зображення множини дійсних чисел. А саме, візьмемо горизонтальну пряму l і на ній довільну точку O (рис. 1.1.1), яку назвемо **точкою відліку** на прямій l.

Рис. 1.1.1. **Числова пряма (вісь)**

Нехай точка відліку O є зображенням числа 0 (нуль). Точка O поділяє пряму l на два промені: додатний, що виходить із точки O і напрямлений управо; від'ємний, що виходить із точки O і напрямлений уліво. Далі візьмемо на прямій справа від O ще яку-небудь точку і припустимо, що ця точка є зображенням числа 1 (одиниця). Відрізок прямої l з кінцями в точках 0 і 1 називають **одиницею довжини**, або **масштабом**. Пряму, на якій вибрано точку відліку (нульову точку), додатний напрям і задано масштаб, називають **числовою прямою**, або **числовою віссю**.

Поняття "нескінченність" для множини точок на прямій і дійсних чисел означимо (не строго) так: на прямій завжди можна вказати точку, яка лежить лівіше (правіше) від будь-якої взятої на ній точки, або, що те ж саме, у множині $\mathbf{R}$ завжди можна знайти число, яке менше (більше) за будь-яке наперед задане число. Як відомо, з "нескінченністю" пов'язують символи: $-\infty$ ("мінус нескінченність"), $+\infty$ ("плюс нескінченність"). Їх називають також невластивими числами. Отже, **невластиве число** $-\infty$ $(+\infty)$ – це число, яке менше (більше) за будь-яке наперед задане число.

Інакше, відповідно:

$$\{x \in \mathbf{R} \mid x < -\infty\} = \varnothing, \ \{x \in \mathbf{R} \mid x > +\infty\} = \varnothing. \qquad (1.1.13)$$

(*Сформулюйте* самостійно записані в символах твердження (1.1.13).)

Згідно з формулами (1.1.13) множину дійсних чисел можна подати так: $\mathbf{R} = \{x \mid -\infty < x < +\infty\}$ або простіше $\mathbf{R} = (-\infty; +\infty)$.

Зауважимо, що для невластивих чисел $-\infty$ і $+\infty$ на числовій осі не можна вказати відповідних точок, саме тому їх названо "невластивими".

Спираючись на поняття числової осі, приходимо до висновку, що дійсні числа "суцільним" чином "заповнюють" пряму. У розумінні Кантора така властивість множини $\mathbf{R}$ називається **неперервністю множини**

дійсних чисел. Надалі множину $\mathbf{R}$ і всі еквівалентні їй множини, тобто множини, які мають потужність континуума, називатимемо **неперервними множинами**.

Із точкових неперервних множин найчастіше мають справу з такими (основними) множинами:

$$[a;b] \text{ – відрізок (сегмент) } \rightleftharpoons \{x \in \mathbf{R} \mid a \le x \le b\};$$

$$(a;b) \text{ – інтервал } \rightleftharpoons \{x \in \mathbf{R} \mid a < x < b\};$$

$$[a;b) \text{ – піввідрізок (півсегмент) } \rightleftharpoons \{x \in \mathbf{R} \mid a \le x < b\};$$

$$(a;b] \text{ – півінтервал } \rightleftharpoons \{x \in \mathbf{R} \mid a < x \le b\}.$$

Якщо в півінтервалах, півсегментах один із кінців є невластивою точкою, то пишуть: $(-\infty;b]$, $(-\infty;b)$, $[a;+\infty)$, $(a;+\infty)$, що означає відповідно: $x \le b$, $x < b$, $x \ge a$, $x > a$.

Відрізки, піввідрізки, інтервали, півінтервали (скінченні й нескінченні) об'єднують однією назвою – **проміжок** – і позначають символом $\langle a;b \rangle$. Множину всіх дійсних чисел $\mathbf{R} = (-\infty;+\infty)$ називають **нескінченним інтервалом**. (*Зобразіть* на числовій осі перелічені проміжки.)

На противагу неперервним множинам, існує широкий клас так званих *дискретних множин* (дискретний – від лат. *discretus* – поділений, перервний). Нехай a – довільне дійсне число, ε – будь-яке додатне число із $\mathbf{R}$, тобто $\varepsilon > 0$. Інтервал $(a-\varepsilon;a+\varepsilon)$ називають **ε-околом** точки a і позначається через $B(a,\varepsilon)$, де a – **центр околу**, ε – **радіус околу**:

$$B(a,\varepsilon) = (a-\varepsilon;a+\varepsilon) = \{x \in \mathbf{R} \mid |x-a| < \varepsilon\}. \qquad (1.1.14)$$

Інакше кажучи, ε-окіл точки a – це множина всіх дійсних чисел x, які задовольняють нерівність $a-\varepsilon < x < a+\varepsilon$ або $|x-a| < \varepsilon$. *Наприклад*, множина точок x, які задовольняють нерівність $|x-5| < 2$, є околом числа 5 радіуса 2. (*Зобразіть* цей окіл на числовій осі.)

Точка a деякої множини A називається **ізольованою точкою** цієї множини, якщо в неї є окіл, який не містить інших точок множини A:

$$(a \in A \wedge a \text{ – ізольована точка } \rightleftharpoons$$
$$\rightleftharpoons (\exists B(a,\varepsilon) : (x \in B(a,\varepsilon) \wedge x \in A) \Rightarrow (x = a)). \qquad (1.1.15)$$

Множину A, елементами якої є лише ізольовані точки, називають **дискретною** (**ізольованою**) множиною:

$$(A - \text{дискретна множина}) \rightleftharpoons (\forall x \in A: x - \text{ізольована точка}). \qquad (1.1.16)$$

Прикладами дискретних множин є "знайомі" множини: натуральних чисел $\mathbf{N}$, раціональних чисел $\mathbf{Q}$ та будь-яких їхніх підмножин (скінченних або нескінченних). Узагалі дискретна множина точок на прямій (на площині, у просторі) скінченна або злічення; скінченна множина завжди дискретна.

Змінну величину (числову характеристику певного процесу) називають **дискретною змінною**, якщо областю її змінювання є дискретна множина. На відміну від неперервних змінних (які вивчають у вищій математиці), дискретні змінні набувають своїх значень, так би мовити, "стрибками", а не "суцільно".

Наприклад, кількість новонароджених у Харкові за годину (добу, рік тощо) – дискретна змінна, областю змінювання якої є скінченна підмножина розширеної нулем множини натуральних чисел.

Тепер, після ознайомлення з дискретними множинами, можна відповісти на запитання: що таке "дискретна математика"?

Дискретна математика (скінченна математика) – наука, **об'єктом** вивчення якої є дискретні множини та дискретні змінні, а **предметом** – властивості цих об'єктів, різноманітні відповідності між ними та застосування їх до побудови математичних моделей реальних явищ і процесів. Навчальна дисципліна "Дискретна математика" охоплює два розділи: "Теорія множин та комбінаторний аналіз. Теорія графів" і "Математична логіка. Елементи теорії скінченних автоматів", на яких базується вивчення інших (спеціальних) дисциплін науково-природничого циклу.

Операції (дії) над множинами

Для кращого розуміння і засвоєння відповідного матеріалу будемо використовувати наочне зображення множин та співвідношень між ними за допомогою **кругів (діаграм) Ейлера** – зображення множин на площині у вигляді кругів або інших фігур, обмежених зімкненими кривими без точок самоперетину, а їхній універсум (він включає в себе усі розглядувані множини) – прямокутником (рис. 1.1.2).

Теоретико-множинні операції – це один зі способів побудови (утворення) нових множин із уже заданих. Ці операції (дії) в певному сенсі аналогічні до арифметичних операцій над числами: додаванню, множенню, відніманню. Для найменування певної операції і її результату користуються, за звичаєм, різними термінами: "додавання" – "сума", "множення" – "добуток", "віднімання" – "різниця". У багатьох випадках для обох понять використовують один термін, адже до двозначності це не призводить, оскільки з контексту зрозуміло, про що саме йдеться.

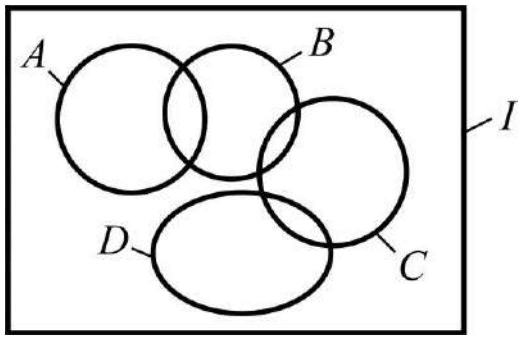


Рис. 1.1.2. **Діаграма Ейлера**

Надалі множини, які отримують у результаті операцій над заданими множинами, зображатимемо заштрихованими областями.

Розглянемо дві *непорожні множини* A і B.

Об'єднанням (**сумою**, **поєднанням**) множин A і B називають множину C, яка містить усі елементи множин A, B і не містить інших елементів (рис. 1.1.3). Інакше кажучи, множина C є об'єднанням множин A і B, якщо вона складається з елементів, які належать хоча б одній із множин A і B (множині A або множині B).

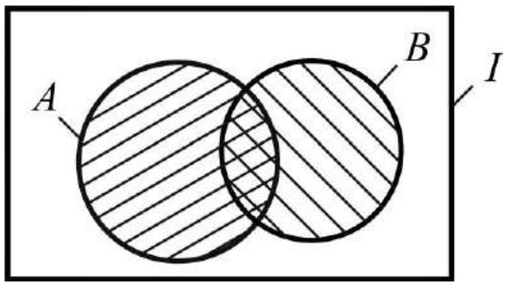


Рис. 1.1.3. **Ейлерова діаграма об'єднання множин**

Зв'язка "або" має нероздільний смисл: до множини C відносять також елементи, які є спільними для множин A і B, причому в C вони входять лише один раз.

Формальне (в символах) означення об'єднанням множин A і B виглядає так:

$$C = A \bigcup B \;\rightleftharpoons\; C = \{\, x \mid x \in A \vee x \in B \}, \qquad (1.1.17)$$

де $\bigcup$ – *символ об'єднання*; $A \bigcup B$ читають як "об'єднання множин A і B".

Об'єднання (суму) множин A і B іноді позначають через $A + B$. Проте властивості об'єднання множин дещо відрізняються від властивостей суми у звичайному арифметичному розумінні, тому символом "$+$" користуватися не будемо.

Операцію об'єднання множин узагальнюють на будь-яку скінченну (і навіть нескінченну) кількість доданків:

$$C = A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_k = \bigcup_{i=1}^{k} A_i , \quad k \in \mathbf{N};$$
$$C = A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_k \cup \ldots = \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i . \qquad (1.1.18)$$

Для об'єднання множин справедливі ті ж самі **властивості**, що і для додавання чисел в арифметиці (*наведіть* відповідні обґрунтування):

1) *комутативність* (від лат. *commutatio* – зміна, переміна, обмін) – переставна властивість:

$$A \bigcup B = B \bigcup A; \qquad (1.1.19)$$

2) *асоціативність* (від лат. *associatio* – з'єднання, сполучення) – сполучна властивість:

$$A \bigcup B \bigcup C = (A \bigcup B) \bigcup C = A \bigcup (B \bigcup C). \qquad (1.1.20)$$

Зауважимо, що дужки в символьних записах співвідношень між множинами відіграють ту ж саму роль, що і в арифметиці чисел – вони допомагають установити правильний порядок дій.

Проте операція об'єднання має й такі властивості, яких дія додавання чисел загалом не має:

$$A \bigcup A = A \qquad (1.1.21)$$

(для чисел $a + a = a$ тільки тоді, коли $a = 0$);

$$A \subset B \Rightarrow (A \bigcup B = B) \qquad (1.1.22)$$

(*обміркуйте*, за яких умов для чисел $a + b = b$).

Сформулюйте і *обґрунтуйте* твердження, відповідні (1.1.21), (1.1.22); *дайте* геометричну ілюстрацію за допомогою кругів Ейлера.

Приклади:

1. $(A = \{1,2,3\},\ B = \{1,2,4,5\}) \Rightarrow C = A \bigcup B = \{1,2,3,4,5\}.$

2. $(A = \{x \in \mathbf{R} \mid x^2 + 4 = 0\},\ B = \{x \in \mathbf{R} \mid e^{x^2 - 9} = 1\}) \Rightarrow C = A \bigcup B =$
$= \varnothing \bigcup \{-3,3\} = \{-3,3\}.$

3. $(A=[0;2]=\{x\in\mathbf{R} \mid 0\le x\le 2\},\ B=(1;4]=\{x\in\mathbf{R} \mid 1<x\le 4\})\ \Rightarrow$ $\Rightarrow\ C=A\bigcup B=[0;4]=\{x\in\mathbf{R} \mid 0\le x\le 4\}$ (*зобразіть* A, B, C на числовій осі).

4. $(A=\{x\in\mathbf{N} \mid x=2n\},\ B=\{x\in\mathbf{N} \mid x=2n-1\})\Rightarrow(C=A\bigcup B=\mathbf{N})$.

Перетином (**перерізом**, **добутком**) множин A і B називають множину C, яка містить усі спільні елементи множин A, B і не містить інших елементів (рис. 1.1.4). Інакше кажучи, множина C є перетином множин A і B, якщо вона складається з елементів, що одночасно належать обом множинам A, B (і множині A, і множині B).

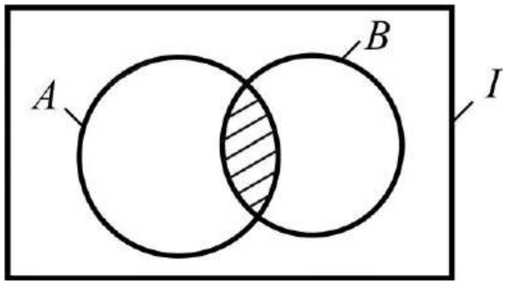


Рис. 1.1.4. **Ейлерова діаграма перетину множин**

Формальне означення перетину множин A і B виглядає так:

$$C=A\bigcap B \rightleftharpoons C=\{x \mid x\in A\wedge x\in B\}, \tag{1.1.23}$$

де $\bigcap$ – *символ перетину*; $A\bigcap B$ читають як "перетин множин A і B".

Якщо перетином множин A і B є порожня множина: $A\bigcap B=\varnothing$, то кажуть, що ці множини *не перетинаються*.

Іноді перетин (добуток) множин позначають арифметичним знаком множення – крапкою (або зовсім її не пишуть): $A\cdot B$ (або AB).

Операцію перетину множин (як і операцію об'єднання) узагальнюють на будь-яку скінченну (і навіть нескінченну) кількість співмножників:

$$\begin{gathered} C=A_1\cap A_2\cap\ldots\cap A_k=\bigcap_{i=1}^{k}A_i\,,\quad k\in\mathbf{N}; \\ C=A_1\cap A_2\cap\ldots\cap A_k\cap\ldots=\bigcap_{i=1}^{\infty}A_i\,. \end{gathered} \tag{1.1.24}$$

Операція перетину множин має такі **властивості** (аналогічні до властивостей із арифметики чисел):

1) *комутативність* (переставна властивість):

$$A\bigcap B=B\bigcap A; \tag{1.1.25}$$

2) *асоціативність* (сполучна властивість):

$$(A\bigcap B)\bigcap C=A\bigcap(B\bigcap C)=A\bigcap B\bigcap C; \tag{1.1.26}$$

3) *дистрибутивність* (від лат. *distributivus* – розподільний) – розподільна властивість перетину відносно об'єднання:

$$A\bigcap(B\bigcup C)=(A\bigcap B)\bigcup(A\bigcap C), \qquad (1.1.27)$$

як і в арифметиці: $a\cdot(b+c)=a\cdot b+a\cdot c$, де a, b, c – числа.

Але є ще один *дистрибутивний закон* для множин – розподільна властивість об'єднання відносно перетину:

$$A\bigcup(B\bigcap C)=(A\bigcup B)\bigcap(A\bigcup C), \qquad (1.1.28)$$

який в арифметиці чисел місця не має.

Дійсно, якщо a, b, c – числа, то хіба справедлива рівність: $a+b\cdot c=(a+b)\cdot(a+c)$?

Доведіть справедливість співвідношень в (1.1.25) – (1.1.28), спираючись на відповідні означення; *побудуйте* діаграми Ейлера.

До інших властивостей перетину множин, яких дія множення чисел не має, належать, зокрема, такі:

$$A\bigcap A=A, \qquad (1.1.29)$$

$$A\subset B\Rightarrow(A\bigcap B=A) \qquad (1.1.30)$$

(*сформулюйте* і *обґрунтуйте* відповідні твердження, *наведіть* геометричну ілюстрацію).

Приклади:

1. $(A=\{1,2,3\},\ B=\{1,2,4,5\})\ \Rightarrow\ C=A\bigcap B=\{1,2\}$.

2. $(A=[0;2]=\{x\in\mathbf{R}\,|\,0\le x\le 2\},\ \ B=(1;4]=\{x\in\mathbf{R}\,|\,1<x\le 4\})\ \Rightarrow$ $\Rightarrow\ C=A\bigcap B=(1;2]=\{x\in\mathbf{R}\,|\,1<x\le 2\}$ (*зобразіть* ці множини на числовій осі).

3. $(A=\{x\in\mathbf{N}\,\big|\,x=2n\},\ B=\{x\in\mathbf{N}\,\big|\,x=2n-1\}\Rightarrow C=A\bigcap B=\varnothing$.

4. $(A=\{(x,y)\in\mathbf{R}^2\,\big|\,2x+3y=5\},\ B=\{(x,y)\in\mathbf{R}^2\,\big|\,5x+7y=13\}\Rightarrow$ $\Rightarrow\ C=A\bigcap B=\{(4,-1)\}$.

5. $(A=\{1,2,3\},\ B=\{1,2,4,5\},\ C=\{2,3\})\Rightarrow D=A\bigcap B\bigcap C=\{2\}$.

6. Нехай A – множина паралелограмів, B – множина прямокутників, тоді $C=A\bigcap B$ є множиною прямокутників.

Різницею множин A і B називають множину C, яка містить усі елементи множини A, що не належать множині B, і не містить інших елементів (рис. 1.1.5).

Формальне означення різниці множин A і B виглядає так:

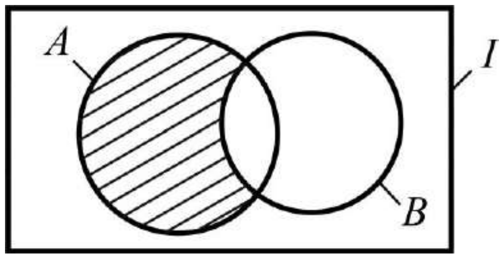


Рис. 1.1.5. **Ейлерова діаграма різниці множин**

$$C = A \setminus B \;\rightleftharpoons\; C = \{\, x \mid x \in A \wedge x \notin B \},\tag{1.1.31}$$

де \ – *символ різниці*; $A \setminus B$ читають як "різниця множин A і B".

Приклади:

1. $(A = \{m, n, p, q, r\},\; B = \{m, n, p\}) \Rightarrow C = A \setminus B = \{q, r\}$.

2. $(A = \{x \in \mathbf{R} \mid 0 \le x \le 3\},\;\; B = \{x \in \mathbf{R} \mid 2 < x < 5\}) \;\Rightarrow\; C = A \setminus B =$ $= \{\, x \in \mathbf{R} \mid 0 \le x \le 2\}$ (*зобразіть* ці множини на числовій осі).

3. $(A = \{\, x \in \mathbf{N} \mid x = 2^n\},\; B = \{x \in \mathbf{N} \mid x = 3^n\}) \Rightarrow (C = A \setminus B = A)$.

4. $(A = (-\infty; 2),\; B = [1; +\infty)) \;\Rightarrow\; C = A \setminus B = (-\infty; 1) = \{x \in \mathbf{R} \mid x < 1\}$ (*зобразіть* ці множини на числовій осі).

Комутативність і асоціативність щодо різниці множин не виконуються (*обґрунтуйте*), тобто:

$$A \setminus B \ne B \setminus A,\tag{1.1.32}$$

$$A \setminus (B \setminus C) \ne (A \setminus B) \setminus C.\tag{1.1.33}$$

Для різниці множин мають місце *дистрибутивні закони:*

1) *дистрибутивність* різниці множин щодо різниці:

$$(A \setminus B) \setminus C = (A \setminus C) \setminus (B \setminus C);\tag{1.1.34}$$

2) *дистрибутивність* перетину множин щодо різниці:

$$A \bigcap (B \setminus C) = (A \bigcap B) \setminus (A \bigcap C).\tag{1.1.35}$$

Зобразіть ейлерові діаграми лівих і правих частин співвідношень (1.1.34), (1.1.35).

Іноді різницю множин позначають через $A - B$, але ми такою символікою користуватися не будемо.

Симетричною різницею множин A і B називають множину C, яка є об'єднанням двох різниць $A \setminus B$ і $B \setminus A$ (рис. 1.1.6), або інакше: множина C є симетричною різницею множин A і B, якщо вона містить усі елементи об'єднання множин A, B без елементів перетину цих множин.

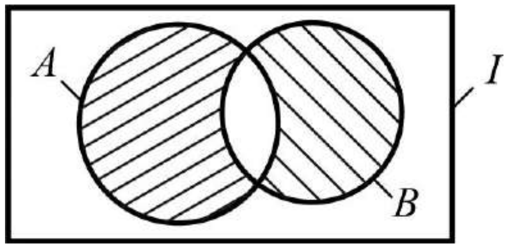


Рис. 1.1.6. **Ейлерова діаграма симетричної різниці множин**

Отже, за означенням:

$$C = A\Delta B = (A \setminus B) \bigcup (B \setminus A), \text{ або } C = A\Delta B = (A \bigcup B) \setminus (A \bigcap B), \qquad (1.1.36)$$

де Δ – *символ симетричної різниці* ("дельта").

Як вправу, з*найдіть* $A\Delta B$ за умовами прикладів для $A \setminus B$.

Нехай універсум I включає в себе деяку множину A.

Доповненням множини A (до універсальної множини I) називають множину $\overline{A}$, яка містить усі елементи універсуму I без елементів множини A, і тільки їх (рис. 1.1.7).

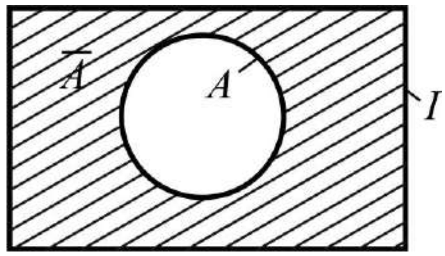


Рис. 1.1.7. **Ейлерова діаграма доповнення множини**

Отже, $\overline{A}$ – це множина, яку визначають співвідношенням:

$$\overline{A} = I \setminus A, \qquad (1.1.37)$$

де $\overline{A}$ читають як "доповнення множини A" або "A з рискою".

Таким чином, доповнення множини – це операція, яка є *окремим випадком різниці множин*. Доповнення множини A позначають також символом A'; читають як "A штрих".

Приклади:

1. Нехай $I = \{\text{Пн.}, \text{Вт.}, \text{Ср.}, \text{Чт.}, \text{Пт.}, \text{Сб.}, \text{Нд.}\}$ – множина днів тижня, $A = \{\text{Сб.}, \text{Нд.}\}$ – множина вихідних днів. Тоді $\overline{A} = \{\text{Пн.}, \text{Вт.}, \text{Ср.}, \text{Чт.}, \text{Пт.}\}$ – множина робочих днів.

2. Якщо $I = \mathbf{R}$ – множина дійсних чисел, $A = \mathbf{Q}$ – множина раціональних чисел, то $\overline{A} = \overline{\mathbf{Q}}$ – множина ірраціональних (нераціональних) чисел, оскільки $\mathbf{Q} \bigcup \overline{\mathbf{Q}} = \mathbf{R}$.

3. Візьмемо $A = \{1,2,3\}$, $B = \{3,4,6,7\}$, $C = \{4,5,6\}$. Об'єднання цих множин приймемо за універсум: $I = A \bigcup B \bigcup C = \{1,2,3,4,5,6,7\}$. Тоді $\overline{A} = \{4,5,6,7\}$.

Нескладно перевірити (*зробіть це самостійно*), що жодна із множин A, B, C не є доповненням об'єднання двох інших. *Здогадайтеся*, за яких умов кожна із множин буде доповненням об'єднання двох інших?

Із означення доповнення випливають такі **властивості** доповнення множини (*сформулюйте* їх і *обміркуйте*):

$$A \bigcup \overline{A} = I\,, \tag{1.1.38}$$

$$A \bigcap \overline{A} = \varnothing\,, \tag{1.1.39}$$

$$\overline{(\overline{A})} = \overline{\overline{A}} = A \tag{1.1.40}$$

Властивість *подвійного доповнення* (1.1.40) називають також *законом інволюції* (інволюція – від лат. *involutio* – згортання).

Якщо A і B – підмножини деякого універсуму I, то їхню різницю можна подати через операцію доповнення у вигляді:

$$A \setminus B = A \bigcap \overline{B} \tag{1.1.41}$$

Сформулюйте співвідношення (1.1.41), *обґрунтуйте* та *зобразіть* діаграму Ейлера.

Алгебра множин: означення, закони, принцип двоїстості

У разі розгляду складніших питань (ніж ті, що вивчалися раніше), які стосуються різноманітних співвідношень між множинами, виникає необхідність у систематизованому методі (підході) до вивчення властивостей, пов'язаних з операціями над множинами. Саме пошуки такого підходу і привели до поняття "алгебра множин".

Нехай A, B, C, ..., Z – деякі множини. Символьний запис F, створений зі знаків, що позначають множини: A, B, C, … , Z, теоретико-множинні операції: $\bigcup$, $\bigcap$, $\setminus$, Δ, $\overline{}$, і дужок: $(\ ,\ )$, назвемо **теоретико-множинною формулою**, або стисло – **формулою**: $F = F(A, B, C, ..., Z)$. Оскільки результатом виконання операцій над множинами є множина, то формула F визначає певну множину.

Якщо дві формули $F = F(A, B, C, ..., Z)$ і $\Phi = \Phi(A, B, C, ..., Z)$, побудовані за допомогою тих чи інших операцій над множинами A, B, C, …, Z за довільного вибору цих множин, описують (дають) одну й ту саму множину, то кажуть, що ці формули **тотожні** (**утворюють тотожність**) або **рівносильні**, і пишуть:

$$F(A, B, C, ..., Z) \equiv \Phi\big(A, B, C, ..., Z\big) \qquad (1.1.42)$$

(замість знака "≡" часто використовують звичайний знак рівності).

Тотожностями є, наприклад, усі співвідношення, які відповідають розглянутим властивостям: комутативності, асоціативності, дистрибутивності та ін.

Більше того, завдяки співвідношенню (1.1.41): $A \setminus B = A \bigcap \overline{B}$, будь-яку формулу можна подати лише через три операції: об'єднання ($\bigcup$), перетин ($\bigcap$), доповнення ($\overline{}$), які називають **головними теоретико-множинними операціями**: $\Omega = \{\bigcup, \bigcap, \overline{}\}$.

Нехай маємо сукупність (систему) множин $M = \{A_1, A_2, ..., A_m\}$, $m \in \mathbf{N}$. Якщо система M така, що внаслідок виконання головних операцій над множинами із M дістаємо множину, яка міститься в M, то її називають **замкненою** (відносно операцій $\bigcup$, $\bigcap$, $\overline{}$). Замкненою відносно головних операцій ($\bigcup$, $\bigcap$, $\overline{}$) є множина всіх підмножин деякої множини (універсуму).

Наприклад,

$$A = \{1, 2, 3\} \Rightarrow M = \{\{1, 2, 3\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \varnothing\}.$$

Найпростішим прикладом замкненої системи є система $M = \{A, \varnothing\}$, де A – будь-яка непорожня множина. *Переконайтеся* в цьому, спираючись на означення операцій $\bigcup$, $\bigcap$, $\overline{}$.

Алгеброю множин $\mathcal{A}_M$ називають упорядковану пару $(M; \Omega)$, де M – система множин, замкнена відносно операцій із $\Omega = \{\bigcup, \bigcap, \overline{}\}$:

$$\mathcal{A}_M = (M; \Omega) = (M; \bigcup, \bigcap, \overline{}). \qquad (1.1.43)$$

Властивості головних операцій ($\bigcup$, $\bigcap$, $\overline{}$) над множинами, виражені у вигляді тотожностей, називають **законами алгебри множин**.

До них можна віднести не тільки властивості теоретико-множинних операцій, які розглядалися раніше, а й безліч інших (які, безумовно, виражаються тотожностями). Серед безлічі законів алгебри множин $\mathcal{A}_M$ виділяють **основні закони** – закони, яких достатньо для виконання тотожних перетворень складних формул із метою їх спрощення. Існує навіть окремий розділ алгебри множин – *тотожні перетворення*.

Основні закони алгебри множин подано в табл. 1.1.1. Не всі з наведених законів *незалежні* між собою, тобто частина з них є наслідком інших. Наприклад, із перших п'яти тотожностей і двох законів поглинання ($A \bigcup \varnothing = A$, $A \bigcap I = A$) виводять решту.

Усі закони алгебри множин можна довести *методом належності*, сутність якого полягає в такому: щоб довести тотожність $L = P$, де L, P – формули (множини), спочатку показують, що $x \in L \Rightarrow x \in P$, а потім: $x \in P \Rightarrow x \in L$. На підставі означення рівних множин (1.1.3) робимо висновок: $L = P$.

Таблиця 1.1.1

Основні закони алгебри множин

№	Назва закону	Запис закону в символах	
		для об'єднання	для перетину
1	Комутативний (переставний)	$A \bigcup B = B \bigcup A$	$A \bigcap B = B \bigcap A$
2	Асоціативний (сполучний)	$A \bigcup (B \bigcup C) = (A \bigcup B) \bigcup C$	$A \bigcap (B \bigcap C) = (A \bigcap B) \bigcap C$
3	Дистрибутивний (розподільний)	$A \bigcup (B \bigcap C) = (A \bigcup B) \bigcap (A \bigcup C)$	$A \bigcap (B \bigcup C) = (A \bigcap B) \bigcup (A \bigcap C)$
4	Виключення третьої можливості	$A \bigcup \overline{A} = I$	—
5	Суперечності	—	$A \bigcap \overline{A} = \varnothing$
6	Ідемпотентності	$A \bigcup A = A$	$A \bigcap A = A$
7	Де Моргана	$\overline{A \bigcup B} = \overline{A} \bigcap \overline{B}$	$\overline{A \bigcap B} = \overline{A} \bigcup \overline{B}$
8	Поглинання	$A \bigcup \varnothing = A$, $A \bigcup I = I$, $A \bigcup (A \bigcap B) = A$	$A \bigcap \varnothing = \varnothing$, $A \bigcap I = A$, $A \bigcap (A \bigcup B) = A$
9	Склеювання	$(A \bigcap B) \bigcup (A \bigcap \overline{B}) = A$	$(A \bigcup B) \bigcap (A \bigcup \overline{B}) = A$
10	Інволюції (згортання)	$\overline{\overline{A}} = A$	

Примітки. Ідемпотентність – від лат. *idem* – той самий (те ж), *potencio* – сила, могутність.

Август Морган – французький математик (1806 – 1871).

Доведемо, *наприклад*, розподільний закон перетину щодо різниці:

$$\underbrace{(A\setminus B)\bigcap C}_{L}=\underbrace{(A\bigcap C)\setminus(B\bigcap C)}_{P}. \qquad (1.1.44)$$

Нехай $x\in L=(A\setminus B)\bigcap C$, тоді (за означенням перетину) $x\in A\setminus B$ і $x\in C$. Але якщо $x\in A\setminus B$, то (за означенням різниці) $x\notin B$, і тоді $x\in A\bigcap C$.

З іншого боку, оскільки $x\notin B$, то $x\notin B\bigcap C$. Це означає, що x належить множині $A\bigcap C$, за винятком елементів множини $B\bigcap C$, тобто $x\in(A\bigcap C)\setminus(B\bigcap C)=P$.

Запис у символах виглядає так:

$$(x\in L)\Rightarrow(x\in A\setminus B\wedge x\in C)\Rightarrow((x\in A\wedge x\notin B)\wedge x\in C)\Rightarrow$$
$$\Rightarrow\begin{cases}x\in A\bigcap C\\ x\notin B\bigcap C\end{cases}\Rightarrow x\in(A\bigcap C)\setminus(B\bigcap C)=P.$$

Покажіть самостійно, що $x\in P\Rightarrow x\in L$.

За допомогою законів 1 – 10 рівності $L=P$ доводять так: із лівої частини L тотожними перетвореннями дістають праву частину P, чи навпаки (із P здобувають L), або ліву і праву частини зводять до однієї й тієї ж формули. *Наприклад*, для (1.1.44) маємо (*простежте!*):

$$L=(A\setminus B)\bigcap C=(A\bigcap\overline{B})\bigcap C=A\bigcap\overline{B}\bigcap C.$$
$$P=(A\bigcap C)\setminus(B\bigcap C)=(A\bigcap C)\bigcap\overline{(B\bigcap C)}=(A\bigcap C)\bigcap(\overline{B}\bigcup\overline{C})=$$
$$=(A\bigcap C\bigcap\overline{B})\bigcup(A\bigcap C\bigcap\overline{C})=\left|C\bigcap\overline{C}=\varnothing,\ A\bigcap\varnothing=\varnothing\right|=$$
$$=(A\bigcap C\bigcap\overline{B})\bigcup\varnothing=A\bigcap\overline{B}\bigcap C.$$

Отже, $L=P=A\bigcap\overline{B}\bigcap C$, тобто L і P – рівносильні формули.

Надалі тотожні перетворення будемо застосовувати здебільшого під час доведення різноманітних співвідношень між множинами, спираючись на основні закони алгебри множин.

Доведемо, *наприклад*, що

$$\underbrace{(A\bigcap B)\bigcap(A\bigcup B)\bigcap\overline{A}}_{L}=\underbrace{\varnothing}_{P}.$$

Дійсно, послідовно застосовуючи до лівої частини рівності дистрибутивний закон для перетину щодо об'єднання, закони ідемпотентності $(A\bigcap A=A,\ A\bigcup A=A)$, комутативний та асоціативний закони для перетину, закон суперечності $(A\bigcap \overline{A}=\varnothing)$, а також один із законів поглинання $(A\bigcap\varnothing=\varnothing)$, маємо:

$$L=(A\bigcap B)\bigcap(A\bigcup B)\bigcap\overline{A}=((A\bigcap B\bigcap A)\bigcup(A\bigcap B\bigcap B))\bigcap\overline{A}=$$
$$=((A\bigcap B)\bigcup(A\bigcap B))\bigcap\overline{A}=(A\bigcap B)\bigcap\overline{A}=B\bigcap(A\bigcap\overline{A})=B\bigcap\varnothing=\varnothing=P.$$

Спробуйте знайти інші варіанти доведення та *зобразіть* відповідні діаграми Ейлера.

Для доведення властивостей множин, які містять символ включення $(\subset,\ \supset,\ \subseteq,\ \supseteq)$, корисним є ланцюжок рівносильних співвідношень:

$$A\subseteq B\Leftrightarrow A\bigcup B=B\Leftrightarrow A\bigcap B=A\Leftrightarrow A\setminus B=\varnothing. \qquad (1.1.45)$$

Сформулюйте співвідношення (1.1.45), *наведіть* відповідні міркування, *побудуйте* ейлерові діаграми.

Наприклад, доведемо справедливість співвідношення:

$$\underbrace{(A\bigcap B)\bigcup C}_{L}=\underbrace{A\bigcap(B\bigcup C)}_{P}\Leftrightarrow C\subset A. \qquad (1.1.46)$$

Дійсно, з урахуванням (1.1.45), маємо:

$$L=P\Rightarrow L\bigcap\overline{A}=P\bigcap\overline{A}\Rightarrow((A\bigcap B)\bigcup C)\bigcap\overline{A}=(A\bigcap(B\bigcup C))\bigcap\overline{A}\Rightarrow$$
$$\Rightarrow(A\bigcap B\bigcap\overline{A})\bigcup(C\bigcap\overline{A})=(B\bigcup C)\bigcap(A\bigcap\overline{A})\Rightarrow$$
$$\Rightarrow(B\bigcap(A\bigcap\overline{A}))\bigcup(C\bigcap\overline{A})=(B\bigcup C)\bigcap(A\bigcap\overline{A})\Rightarrow$$
$$\Rightarrow(B\bigcap\varnothing)\bigcup(C\bigcap\overline{A})=(B\bigcup C)\bigcap\varnothing\Rightarrow\varnothing\bigcup(C\bigcap\overline{A})=\varnothing\Rightarrow$$
$$\Rightarrow C\bigcap\overline{A}=\varnothing\Rightarrow\left|C\bigcap\overline{A}=C\setminus A\right|\Rightarrow C\setminus A=\varnothing\Rightarrow C\subset A.$$

І навпаки,

$$C\subset A\Rightarrow L=(A\bigcap B)\bigcup C=(A\bigcup C)\bigcap(B\bigcup C)=$$
$$=\left|A\bigcup C=A\right|=A\bigcap(B\bigcup C)=P.$$

Алгебра множин є аналогом "звичайної" (відомої зі школи) алгебри дійсних чисел, але не всі властивості множин, як було показано, справедливі для чисел, і навпаки.

Аналізуючи табл. 1.1.1 за стовпцями, помічаємо, що тотожності для перетину (об'єднання) можна дістати з тотожностей для об'єднання (перетину), якщо символ $\bigcup$ замінити на $\bigcap$, і навпаки, а символ $\varnothing$ замінити на символ I, і навпаки. Пари символів $\bigcup$, $\bigcap$ і $\varnothing$, I називають **двоїстими** (**дуальними**) символами (дуальний – від лат. *dualis* – двоїстий).

Формулу $F^* = F^*(A, B, C, \ldots, Z)$ називають **двоїстою** відносно формули $F = F(A, B, C, \ldots, Z)$, якщо її дістають заміною у F символів операцій на дуальні символи.

Стосовно "двоїстості" справедливе твердження: якщо F і Φ є рівносильними формулами, то двоїсті формули F^* і Φ^* теж рівносильні:

$$F = \Phi \Rightarrow F^* = \Phi^*. \qquad (1.1.47)$$

Подумайте, чи буде справедлива рівність: $(F^*)^* = F$.

Принцип двоїстості полягає в тому, що з будь-якої тотожності теорії множин цілком "автоматично" можна дістати іншу – двоїсту – тотожність, спираючись на твердження (1.1.47).

Розглядають також **розширений принцип двоїстості**, коли до двоїстих символів відносять також знаки включення: $\subset$, $\supset$, $\subseteq$, $\supseteq$.

Наприклад, твердження, двоїсте відносно (1.1.46), буде таким:

$$(A \bigcup B) \bigcap C = A \bigcup (B \bigcap C) \Leftrightarrow C \supset A. \qquad (1.1.48)$$

Аналогічно розширений принцип двоїстості застосовують для нестрогих знаків включення.

В алгебрі множин є своя теорія рівнянь, яка значно відрізняється від тієї, яку ми знаємо з курсу елементарної алгебри.

Наприклад, рівняння $(x + a) - b = 0$, де $a, b \in \mathbf{R}$, в алгебрі чисел має єдиний розв'язок: $x = b - a$. Розглянемо аналогічне рівняння в алгебрі множин: $(X \bigcup A) \setminus B = \varnothing$. Після тотожних перетворень лівої частини рівняння із застосуванням співвідношення (1.1.41) та розподільної властивості (1.1.27) матимемо:

$$(X \cup A) \setminus B = \varnothing \Leftrightarrow (X \cup A) \cap \overline{B} = \varnothing \Leftrightarrow (X \cap \overline{B}) \cup (A \cap \overline{B}) = \varnothing \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (X \setminus B) \cup (A \setminus B) = \varnothing \Leftrightarrow (X \setminus B = \varnothing,\ A \setminus B = \varnothing) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (X \subseteq B,\ A \subseteq B).$$

Отже, рівняння розв'язуване тоді і тільки тоді, коли $A \subseteq B$, а його розв'язками є всі підмножини множини B: $X \subseteq B$. (*Наведіть* геометричну ілюстрацію).

Прямий, або декартів, добуток множин

Згідно з означенням рівних множин порядок (розташування) елементів у множині несуттєвий, тобто неважливо, на якому місці (у поданні множини) розташований той чи інший елемент. Але в багатьох випадках (задачах застосовного характеру) доводиться зважати на цю обставину.

Наприклад, множини $M = \{1,3\}$ і $N = \{3,1\}$ рівні між собою. Якщо ж їхні елементи трактувати як координати точки на площині, то здобудемо дві різні точки: $M(1,3)$ і $N(3,1)$.

Нехай маємо скінченну (а отже, дискретну) множину A, яка містить n елементів, тобто $|A| = n$, $n \in \mathbf{N}$. Надалі множину A будемо називати ***n*-елементною множиною**, або просто ***n*-множиною**.

Дво-, три-, …, n-елементну множину із фіксованим (певним) порядком елементів називають відповідно **упорядкованою парою**, **трійкою**, …, ***n*-кою** або **дво-**, **три-**, …, ***n*-елементним кортежем** (**кортежем довжини *n***, або ***n*-кортежем**). Елементи n-кортежу називають також його **компонентами** (**координатами**). Для позначення n-кортежу використовують круглі дужки, між якими записують через кому або крапку з комою його елементи.

Приклади:

множина студентів, які стоять у черзі в буфеті;

множина букв (слів) у слові (реченні);

шеренга військових, які вишикувані за ранжиром;

із двоелементної множини $\{a,b\}$ можна утворити такі 2-кортежі: (a,b), (b,a) (*зважте*, що $(a,b) \neq (b,a)$);

із 3-множини $\{a,b,c\}$ маємо: (a,b,c), (a,c,b), (b,a,c), (b,c,a), (c,a,b), (c,b,a).

Подумайте, як підрахувати кількість n-кортежів, які "породжує" n-множина $A=\{x_1, x_2, x_3, ..., x_n\}$: $(x_1, x_2, x_3, ..., x_n)$, $(x_2, x_1, x_3, ..., x_n)$, …, $(x_n, x_{n-1}, x_{n-2}, ..., x_1)$.

Частинними випадками кортежу є кортеж (a) довжини 1 і **порожній кортеж** довжини 0, який позначають через $(\ )$ або Λ (лямбда).

На відміну від множини, в кортежі допускають наявність однакових елементів: однакові букви у слові, однакові координати вектора тощо. Поняття "кортеж" можна поширити на нескінченні дискретні множини. Прикладами нескінченних кортежів є відомі зі шкільної математики числові послідовності, зокрема послідовність (природно упорядкованих) натуральних чисел.

Нехай маємо дві непорожні скінченні множини A і B з кількістю елементів відповідно n і m, тобто $|A|=n$, $n\in\mathbf{N}$; $|B|=m$, $m\in\mathbf{N}$. Якщо множина A (B) містить якісь елементи x (y), то будемо замість $A=\{x_1, x_2, ..., x_n\}$, $B=\{y_1, y_2, ..., y_m\}$ стисло писати: $A=\{x_i\}_1^n$, $B=\{y_j\}_1^m$.

З елементів x і y можна утворювати (будувати, складати) різні впорядковані пари (x, y) – двоелементні кортежі.

Прямим, або **декартовим**, **добутком** множин A і B називають множину C всіх упорядкованих пар (x, y) – таких, що перша компонента належить множині A, а друга компонента – множині B:

$$C = A\times B \ \rightleftharpoons\ C=\{(x, y)\,|\,\forall x\in A, \forall y\in B\}, \tag{1.1.49}$$

де $\times$ – "хрестик" – *символ (знак) прямого добутку*.

Щоб знайти декартів добуток множин A і B, діють (згідно з означенням) так: беруть елемент $x_1\in A$ і залучають до нього в пару всі елементи y_j, $j=\overline{1,m}$, із множини B; потім таким самим чином утворюють пари з елементами $x_2\in A$, $x_3\in A$, …; процес побудови пар продовжують доти, поки не буде перебрано всі елементи множини A.

Потужність прямого добутку множин A і B визначають співвідношенням:

$$|A\times B|=|A|\cdot|B|=n\cdot m \tag{1.1.50}$$

(*сформулюйте* відповідне твердження і *обґрунтуйте* його).

Приклад, $(A=\{a,b,c,d\},\ B=\{4,5\}) \Rightarrow A\times B=\{(a,4),(a,5),(b,4),$ $(b,5),(c,4),(c,5),(d,4),(d,5)\}$; $|A\times B|=4\cdot 2=8$.

Зауважимо, що прямий добуток множин може містити пари з однаковими першим і другим елементами. (*Здогадайтеся*, за яких умов це матиме місце.)

На підставі означення (1.1.49) робимо висновок (*обміркуйте*), що для операції прямого добутку не виконуються закони комутативності та асоціативності:

$$A\times B\neq B\times A,\quad A\times(B\times C)\neq(A\times B)\times C; \tag{1.1.51}$$

але справедливі розподільні закони відносно об'єднання, перетину та різниці:

$$\begin{gathered} A\times(B\bigcup C)=(A\times B)\bigcup(A\times C),\quad A\times(B\bigcap C)=(A\times B)\bigcap(A\times C), \\ A\times(B\setminus C)=(A\times B)\setminus(A\times C). \end{gathered} \tag{1.1.52}$$

Операцію прямого добутку можна узагальнити на довільну скінченну кількість множин. **Прямим**, або **декартовим**, **добутком n множин** $A_1,\ A_2,\ \ldots,\ A_n,\ n\in\mathbf{N}$, називають множину C усіх n-елементних кортежів $(x_1,x_2,\ldots,x_n)$, таких, що $x_i\in A,\ \forall i=\overline{1,n}$:

$$\begin{aligned} &C=A_1\times A_2\times\ldots\times A_n \ \rightleftharpoons \\ &\qquad \rightleftharpoons\ C=\{(x_1,\ x_2,\ldots,\ x_n)\,|\,x_1\in A_1,\ x_2\in A_2,\ \ldots,\ x_n\in A_n\}. \end{aligned} \tag{1.1.53}$$

У частинних випадках маємо:

$A^2=A\times A$ – декартів квадрат;

$A^3=A\times A\times A$ – декартів куб;

$A^n=\underbrace{A\times A\times\ldots\times A}_{n\text{ разів}}$ $(n\geq 1)$ – n-й декартів степінь множини A.

Наприклад, $A=\{1,2\}\Rightarrow A^3=\{1,2\}\times\{1,2\}\times\{1,2\}=\{(1,1,1),(1,1,2),$ $(1,2,1),(1,2,2),(2,1,1),(2,1,2),(2,2,1),(2,2,2)\}$.

Опишіть алгоритм утворення 3-кортежів (і взагалі n-кортежів) згідно з (1.1.53).

1.2. Бінарні відношення

Основні означення і операції над бінарними відношеннями

Під час вивчення різноманітних явищ (процесів) часто доводиться, спираючись на ті чи інші властивості об'єктів, зіставляти між собою елементи однієї й тієї ж множини або різних множин і описувати відношення, в яких вони перебувають один щодо одного.

Наприклад, якщо a, b, c, d – послідовні сторони квадрата, то перпендикулярними серед них будуть тільки такі пари сторін:

$$a \perp b,\ a \perp d,\ b \perp a,\ b \perp c,\ c \perp b,\ c \perp d,\ d \perp a,\ d \perp c.$$

Щоб не писати щоразу один і той самий знак перпендикулярності, ми можемо просто перелічити всі пари сторін (a,b), (a,d), (b,a), (b,c), (c,b), (c,d), (d,a), (d,c), зазначивши, що кожна з них перебуває у відношенні перпендикулярності.

Відношення як математичний об'єкт стали предметом вивчення спеціальної математичної теорії – *теорії відношень*, елементи якої розглянемо на прикладі найпростіших і найпоширеніших відношень – бінарних, тобто відношень пар елементів.

Нехай A, B – деякі множини. Розглянемо прямий, або декартів, добуток множин A і B, тобто множину всіх двоелементних кортежів, або впорядкованих пар, (x, y) таких, що $x \in A$ і $y \in B$ (див. формулу (1.1.49)):

$$A \times B \ \rightleftharpoons\ \{(x, y) \mid \forall x \in A, \forall y \in B\}.$$

Бінарним, або **двомісним**, **відношенням** (**БВ**) між елементами множин A і B називають довільну (будь-яку) підмножину R упорядкованих пар $(x, y) \in A \times B$, тобто

$$\bigl(R - \text{БВ між елементами } A \text{ і } B\bigr) \ \rightleftharpoons\ \{(x, y) \mid (x, y) \in A \times B\},$$

і кажуть, що: x та y *пов'язані відношенням* R, або елемент x *перебуває у відношенні* R до y, або для x і y *виконується відношення* R.

Замість запису $(x, y) \in R \subseteq A \times B$ часто використовують більш простий: $x R y$.

Множину всіх перших (других) елементів пар із R називають **областю визначення**, або **існування**, БВ R (**областю значень** БВ R) і позначають через $D(R)$ $(E(R))$:

$$D(R) = \{x \mid \exists y : (x,y) \in R\} \ (E(R) = \{y \mid \exists x : (x,y) \in R\}).$$

Об'єднання множин $D(R)$ і $E(R)$ називають **областю** БВ R:

$$O(R) = D(R) \bigcup E(R).$$

Якщо $R \subseteq A \times A$, то кажуть, що R є бінарним відношенням *на множині* A. Зокрема, $R \subseteq O(R) \times O(R)$.

Наприклад, для БВ $R = \{(2,1),(1,2),(1,3),(2,4)\}$ маємо: $D(R) = \{2,1\}$, $E(R) = \{1,2,3,4\}$, тоді $O(R) = D(R) \bigcup E(R) = \{1,2,3,4\}$.

Бінарні відношення R і S називають **рівними** $(R = S)$, якщо R і S рівні як множини:

$$(R = S) \ \rightleftharpoons \ (\forall x, \forall y : (x,y) \in R \Leftrightarrow (x,y) \in S). \qquad (1.2.1)$$

БВ i_A, або Δ_{A^2}, яке складається з пар (x,x) $\forall x \in A$, називають **одиничним**, або **тотожним**, або **діагоналлю множини A^2**:

$$i_A = \Delta_{A^2} \ \rightleftharpoons \ \{(x,x) \mid \forall x \in A\}. \qquad (1.2.2)$$

Наприклад, для БВ $R = \{(2,1),(1,2),(1,3),(2,4)\}$ одиничне БВ i_A має вигляд: $i_A = \{(1,1),(2,2),(3,3),(4,4)\}$.

Множину всіх упорядкованих пар (y,x) таких, що $(x,y) \in R$, називають **інверсією** відношення R, або БВ, **оберненим до** R, і позначають через R^{-1} або $R^{\cup}$:

$$R^{-1} = R^{\cup} \ \rightleftharpoons \ \{(y,x) \mid (x,y) \in R\}. \qquad (1.2.3)$$

Наприклад, для $R = \{(2,1),(1,2),(1,3),(2,4)\}$ обернене БВ R^{-1} згідно з означенням (1.2.3) дістають переставленням елементів кожної пари БВ R: $R^{-1} = \{(1,2),(2,1),(3,1),(4,2)\}$.

Якщо (x, y) і (u, v) – дві впорядковані пари, то їхні елементи x і v назвемо *крайніми*, а y і u – *середніми* (за аналогією з пропорціями).

Нехай R і S – бінарні відношення на деякій множині A.

Множину пар (x, y), які утворюються із крайніх елементів двох пар із S і R, середні члени яких рівні між собою, тобто $(x, z) \in S$ і $(z, y) \in R$, називають **композицією**, або **суперпозицією**, відношень S і R і позначають через $R \circ S$:

$$R \circ S \rightleftharpoons \{(x, y) \mid \exists z : x S z \wedge z R y\}. \tag{1.2.4}$$

Наприклад, якщо $S = \{(1,2), (2,4), (3,6)\}$, $R = \{(1,3), (2,6), (3,9), (4,12)\}$, то $R \circ S = \{(1,6), (2,12)\}$.

Оскільки БВ – множини (множини впорядкованих пар), то для них залишаються чинними всі положення теорії множин, зокрема основні способи задання: *перелік* і *опис*. Переліком і описом користуються, коли БВ містить скінченну множину елементів (пар). БВ, що мають нескінченну множину пар, можна задати лише за допомогою характеристичної властивості її елементів (опису).

Наприклад, $R = \{(x, y) \mid x, y \in \mathbf{Z} \wedge (x + y = 1)\}$ – бінарне відношення пар цілих чисел x і y, сума яких дорівнює одиниці.

Розглядають також **порожнє** БВ – відношення, яке не містить жодної пари:

$$(R - \text{порожнє БВ}) \rightleftharpoons (R = \varnothing). \tag{1.2.5}$$

Повним, або **універсальним**, БВ на множині A називають відношення, яке містить всі елементи із A^2:

$$(R - \text{повне БВ}) \rightleftharpoons (R = A \times A). \tag{1.2.6}$$

Над бінарними відношеннями (крім операцій знаходження інверсії і композиції) можна виконувати всі теоретико-множинні операції, а саме: об'єднання $(\bigcup)$, перетин $(\bigcap)$, різницю $(\setminus)$.

Узагальненням поняття БВ є n-місне відношення $(n \geq 1)$ як будь-яка множина кортежів довжини n, причому число n називають **рангом** відношення.

1. Зображення БВ за допомогою графа. Нехай R – бінарне відношення, областю якого є непорожня скінченна множина A, тобто $O(R)=A$. Проробимо наступне:

1) кожному елементу пари $(x,y)\in R$ поставимо у відповідність точку площини (рис. 1.2.1);

2) кожній парі (x,y), такій, що $(x,y)\in R$ і $x\neq y$, – напрямлений відрізок від x до y (прямолінійний або криволінійний), який назвемо **орієнтованим ребром** (рис. 1.2.2);

3) парам виду (x,x) $\forall x\in A$ – **петлю** з фіксованим напрямком обходу (наприклад, проти руху годинникової стрілки) (рис. 1.2.3).

Рис. 1.2.1. **Точки площини, що відповідають елементам пари (x, y)**

Рис. 1.2.2. **Орієнтоване ребро**

Рис. 1.2.3. **Петля**

Геометричну фігуру, побудовану згідно з кроками 1, 2, 3, називають **орієнтованим графом БВ** R, або просто **графом БВ** R,а елементи із A – **вершинами** графа.

Якщо у відношення R входить як пара (x,y), так і пара (y,x), то в графі буде два ребра з вершинами x і y, які орієнтовані в протилежні боки. У цьому випадку два ребра замінюють (для спрощення зображення) одним ребром з двома стрілками (або зовсім без стрілок), яке називають **неорієнтованим ребром**.

Приклад. Нижче на рис. 1.2.4 зображено граф бінарного відношення $R=\{(a,b),(b,c),(d,d),(e,a),(e,e),(b,a)\}$.

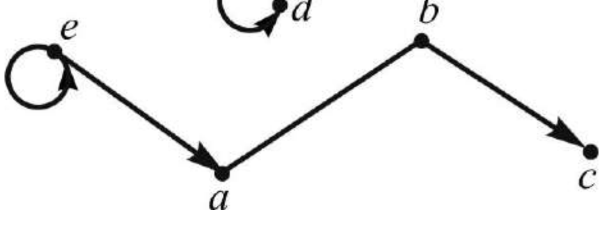


Рис. 1.2.4. **Граф бінарного відношення**

Зрозуміло, що коли БВ подано у вигляді графа, то його (БВ) легко записати і як множину пар.

Висновок: кожне бінарне відношення на скінченній множині можна подати у вигляді орієнтованого графа. З іншого боку, кожний орієнтований граф визначає бінарне відношення на множині його вершин.

2. Зображення БВ графіком на декартовій площині. Нехай A – скінченна або нескінченна множина дійсних чисел $(A \subset \mathbf{R})$, R – бінарне відношення на A. Кожній парі $(x, y) \in R \subseteq A^2 \subset \mathbf{R}^2$ на декартовій площині xOy відповідає точка з координатами x, y. Отже, множина точок $(x, y) \in R$ визначає геометричний образ (графік) бінарного відношення R на площині xOy.

Приклад. На рис. 1.2.5 зображено БВ $R = \{(x, y) \mid x, y \in \mathbf{Z} \wedge (y^2 \le x)\}$, яке є множиною точок із цілими координатами, що задовольняють умову $y^2 \le x$; причому:

$$D(R) = \{x \mid x \in \mathbf{Z} \wedge x \ge 0\},\ E(R) = \{y \mid y \in \mathbf{Z}\},\ O(R) = \mathbf{Z}.$$

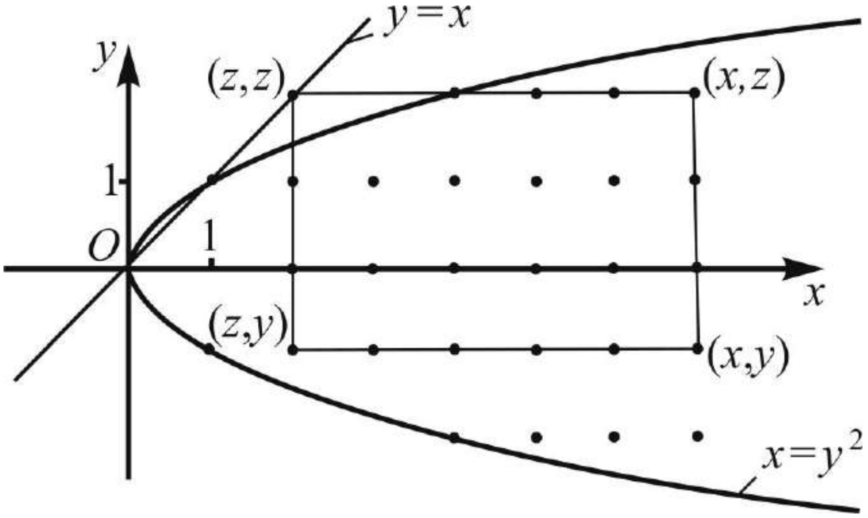


Рис. 1.2.5. **Графік бінарного відношення**

Зауважимо, що:

коли БВ R містить пари (x, x), то відповідні точки лежать на прямій l: $y = x$, тобто на бісектрисі першого і третього координатних кутів;

якщо у БВ входить як пара (x, y), так і пара (y, x), то відповідні точки розташовані симетрично відносно l;

елементи композиції $R \circ R$ знаходять так: із точки $(x, z) \in R$ проводять горизонтальний відрізок до перетину з l у точці (z, z), потім проводять вертикальний відрізок із кінцями (z, z) і $(z, y) \in R$ (рис. 1.2.5). Парі $(x, y) \in R \circ R$ відповідає точка, яка є четвертою вершиною прямокутника з вершинами в точках (x, z), (z, z), (z, y), (x, y). Якщо $(z, z) \in R$, то прямокутник вироджується у відрізок.

Наприклад, для $(x, z) = (1, 0)$ і $(z, y) = (0, 0)$ маємо: $(x, y) = (1, 0)$.

3. Зображення БВ матрицями. Нехай A – скінченна множина і $R = \{(x, y) \mid (x, y) \in A^2\}$, $D(R) = \{x_1, x_2, ..., x_m\}$, $E(R) = \{y_1, y_2, ..., y_n\}$.

Кожному БВ поставимо у відповідність матрицю B, яка має m рядків і n стовпців, з елементами, що визначають таким чином: якщо пара $(x_i, y_j) \in R$, то відповідний елемент матриці дорівнює одиниці, у протилежному випадку – нулю. Отже,

$$B = (b_{ij})_{m \times n}, \text{ де } b_{ij} = \begin{cases} 1, & (x_i, y_j) \in R, \\ 0, & (x_i, y_j) \notin R. \end{cases}$$

Приклад. БВ $R = \{(a,b), (b,c), (c,d), (b,a), (c,c)\}$ $(D(R) = \{a, b, c\}$, $E(R) = \{a, b, c, d\})$ можна подати за допомогою матриці:

$$B = (b_{ij})_{3 \times 4} = \begin{array}{c} \\ a \\ b \\ c \end{array} \!\!\begin{array}{c} \begin{array}{cccc} a & b & c & d \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \end{array}.$$

Якщо ж виходити з області БВ $O(R) = D(R) \cup E(R) = \{a, b, c, d\}$, то його можна подати у вигляді квадратної матриці:

$$B = (b_{ij})_{4 \times 4} = \begin{array}{c} \\ a \\ b \\ c \\ d \end{array} \!\!\begin{array}{c} \begin{array}{cccc} a & b & c & d \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{array}.$$

Порожньому (повному) БВ відповідає квадратна матриця, яка містить тільки одні нулі (одиниці), тотожному БВ – одинична матриця.

Геометричні та матричне зображення бінарних відношень використовують для полегшення їх аналізу з точки зору певних властивостей.

Основні характеристики (властивості) БВ

До найвідоміших властивостей бінарних відношень належать: рефлексивність (r), антирефлексивність $(\bar{r})$, симетричність (s), антисиметричність $(\bar{s})$, асиметричність (as), транзитивність (t).

Нехай R – деяке БВ з областю $O(R) = A = D(R) \bigcup E(R)$; x, y, z – довільні елементи із A.

Рефлексивність. Бінарне відношення $R \subseteq A^2$ називають **рефлексивним** (R_r), якщо воно містить тотожне БВ $(R \supseteq i_A)$, тобто:

$$R_r \;\rightleftharpoons\; \forall x \in A\colon (x, x) \in R. \qquad (1.2.7)$$

Прикладами R_r є: відношення подібності на множині трикутників; відношення рівності на числових множинах.

Мовою зображень рефлексивність описують так:

$R_r \Leftrightarrow$ (кожна вершина графа БВ має петлю);

$R_r \Leftrightarrow$ (декартів графік БВ містить точки прямої $y = x \;\; \forall x \in A$);

$R_r \Leftrightarrow$ (усі елементи головної діагоналі матриці БВ дорівнюють одиниці).

Антирефлексивність. БВ $R \subset A^2$ називають **антирефлексивним** $(R_{\bar{r}})$, якщо воно не містить жодної пари з однаковими елементами $(R \bigcap i_A = \varnothing)$, тобто:

$$R_{\bar{r}} \;\rightleftharpoons\; \forall x \in A\colon (x, x) \notin R. \qquad (1.2.8)$$

Прикладами $R_{\bar{r}}$ є відношення строгої нерівності; відношення "бути молодшим"; "бути сильнішим".

Мовою зображень антирефлексивність описують так:

$R_{\bar{r}} \Leftrightarrow$ (жодна з вершин графа БВ не має петлі);

$R_{\bar{r}} \Leftrightarrow$ (жодна з точок декартового графіка БВ не лежить на прямій $y = x$);

$R_{\bar{r}} \Leftrightarrow$ (усі елементи головної діагоналі матриці БВ дорівнюють нулю).

Симетричність. БВ $R \subseteq A^2$ називають **симетричним** (R_s), якщо воно разом із кожною парою (x, y) містить і пару (y, x) $(R = R^{-1})$, тобто:

$$R_s \rightleftharpoons \forall\, x, y \in A\colon (x, y) \in R \Rightarrow (y, x) \in R. \qquad (1.2.9)$$

Приклади R_s: відношення паралельності на множині прямих; подібності на множині трикутників; дружби на множині людей.

Симетричність мовою зображень описують так:

$R_s \Leftrightarrow$ (усі ребра графа БВ неорієнтовані);

$R_s \Leftrightarrow$ (декартів графік БВ симетричний відносно прямої $y = x$);

$R_s \Leftrightarrow$ (матриця БВ симетрична відносно головної діагоналі).

Антисиметричність. БВ $R \subset A^2$ називають **антисиметричним** $(R_{\bar{s}})$, якщо воно не містить разом пари (x, y) і (y, x) з різними компонентами x, y $(R \bigcap R^{-1} \subseteq i_A)$, тобто:

$$R_{\bar{s}} \rightleftharpoons \forall\, x, y \in A\colon (x, y) \in R \wedge (y, x) \in R \Rightarrow x = y. \qquad (1.2.10)$$

Приклади $R_{\bar{s}}$: відношення нестрогої нерівності на множині дійсних чисел; включення $(\subseteq)$ на множинах; "бути командиром" на множині військовослужбовців.

Антисиметричність мовою зображень описують так:

$R_{\bar{s}} \Leftrightarrow$ (граф БВ не має неорієнтованих ребер, але має петлі);

$R_{\bar{s}} \Leftrightarrow$ (декартів графік БВ не має точок, симетричних відносно прямої $y = x$, але має точки, що лежать на цій прямій);

$R_{\bar{s}} \Leftrightarrow$ (матриця БВ не має одиничних елементів, симетричних відносно головної діагоналі, на якій є одиниці (хоча б одна)).

Асиметричність. БВ $R \subset A^2$ називають **асиметричним** (R_{as}), або **несиметричним**, якщо воно не містить разом пари (x, y) і (y, x) $(R \bigcap R^{-1} = \varnothing)$, тобто:

$$R_{as} \rightleftharpoons \forall\, x, y \in A\colon (x, y) \in R \Rightarrow (y, x) \notin R. \qquad (1.2.11)$$

Приклади R_{as}: відношення строгої нерівності $(<, >)$ на множині дійсних чисел; строге включення $(\subset)$ на множинах; відношення "бути батьком" на множині людей.

Асиметричність мовою зображень описують так:

$R_{as} \Leftrightarrow$ (граф БВ не має ні неорієнтованих ребер, ні петель);

$R_{as} \Leftrightarrow$ (декартів графік БВ не має точок, які симетричні відносно прямої $y = x$ або лежать на ній);

$R_{as} \Leftrightarrow$ (матриця БВ не має одиничних елементів, симетричних відносно головної діагоналі, яка містить тільки нулі).

Транзитивність. БВ $R \subseteq A^2$ називають **транзитивним** (R_t), якщо з умови, що елементи x і z, z і y перебувають у відношенні R, випливає, що елементи x і y також пов'язані відношенням R $(R \circ R \subseteq R)$, тобто:

$$R_t \rightleftharpoons \forall\, x, y, z \in A : (x, z) \in R \wedge (z, y) \in R \Rightarrow (x, y) \in R. \qquad (1.2.12)$$

Приклади R_t: відношення паралельності на множині прямих, адже для прямих x, y, z є слушним: якщо $x \| z$ і $z \| y$, то $x \| y$; відношення подібності на множині трикутників; відношення "більше" ("менше") на множині дійсних чисел $\mathbf{R}$; відношення подільності ("бути дільником") на множині натуральних чисел $\mathbf{N}$; відношення "бути родичем" на множині людей.

Транзитивність мовою зображень БВ описують так:

$R_t \Leftrightarrow$ (граф БВ для кожної пари ребер виду (x, z), (z, y) має замикальне ребро (x, y) і кожна вершина неорієнтованого ребра має петлю);

$R_t \Leftrightarrow$ (декартів графік БВ разом із точками (x, z) і (z, y) містить точку (x, y), тобто точку композиції $R \circ R$ (рис. 1.2.5));

$R_t \Leftrightarrow$ (матриця БВ така, що для кожної пари одиничних елементів, один із яких стоїть в i-му рядку і k-му стовпці, а другий в k-му рядку і j-му стовпці, існує одиничний елемент, розташований на перетині i-го рядка і j-го стовпця). *Зауважимо*, що наявність одиниць на головній діагоналі не порушує транзитивності.

Користуються й іншим критерієм транзитивності: якщо $B=(b_{ij})$ – матриця БВ, а $K=(k_{ij})$ – її квадрат: $K=B^2$, то:

$$R_t \Leftrightarrow (k_{ij}>0 \Rightarrow b_{ij}>0). \qquad (1.2.13)$$

Задача 1.2.1. Оцініть із точки зору властивостей r, $\bar{r}$, s, $\bar{s}$, as, t бінарне відношення $R=\{(1,2),(3,4),(2,1),(3,3)\}$.

Розв'язання:

Знаходимо $O(R)$ – область БВ R: $D(R)=\{1,2,3\}$, $E(R)=\{1,2,3,4\}$ $\Rightarrow O(R)=A=\{1,2,3,4\}$, будуємо матрицю БВ:

$$B=\begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{array}\!\!\begin{array}{c} \begin{array}{cccc} 1 & 2 & 3 & 4 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{array},$$

і даємо геометричні інтерпретації БВ (рис. 1.2.6, 1.2.7):

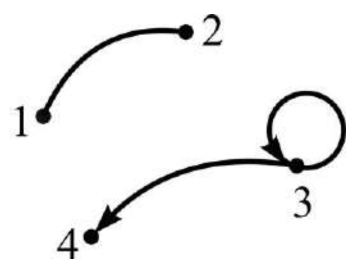


Рис. 1.2.6. **Граф БВ**

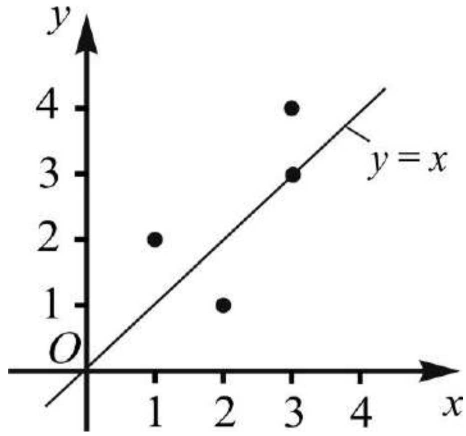


Рис. 1.2.7. **Декартів графік БВ**

Аналізуючи граф БВ, робимо висновок, що R не має жодної з властивостей:

R *не є рефлексивним*, оскільки не всі вершини графа мають петлі (наприклад, вершина 1);

R *не є антирефлексивним*, оскільки одна з вершин графа має петлю (вершина 3);

R *не є симетричним*, оскільки на графі є орієнтоване ребро (ребро $(3,4)$);

R *не є антисиметричним*, оскільки на графі є неорієнтоване ребро (ребро $(1,2)$);

R *не є асиметричним*, оскільки на графі є неорієнтоване ребро (ребро $(1,2)$) і петля (у вершини 3);

R *не є транзитивним*, оскільки вершини неорієнтованого ребра $(1,2)$ не мають петель $(R \circ R = \{(1,1),(2,2),(3,3)\} \not\subset R)$.

Пропонуємо самостійно провести аналіз графіка на рис. 1.2.7 і матриці B.

Основні типи БВ

До основних типів бінарних відношень належать: відношення еквівалентності $R_{\sim}$ (рівнозначності, рівносильності, рівноцінності), порядку $R_{\leq}$, $R_{<}$ (передування, "іти за"), домінування $R_{>>}$ (перевищення, переважання), толерантності $R_{\backsim}$ (схожості, терпеливості, поблажливості).

Відношення еквівалентності. БВ R на множині A $(R \subseteq A^2)$ називають **відношенням еквівалентності** $(R_{\sim})$, якщо воно водночас рефлексивне, симетричне і транзитивне:

$$R_{\sim} \rightleftharpoons R_r \wedge R_s \wedge R_t. \tag{1.2.14}$$

Приклади $R_{\sim}$: рівносильність на множині рівнянь; подібність на множині трикутників; рівновеликість на множині многокутників; відношення "бути студентом однієї групи" на множині студентів ХНЕУ ім. С. Кузнеця.

Найважливіше значення еквівалентності полягає в тому, що це відношення визначає ознаку, яка допускає подання множини A у вигляді об'єднання підмножин, що не перетинаються, або, інакше кажучи, *розбиття множини A на класи еквівалентності*. Навпаки, будь-яке розбиття множини A на підмножини, що не перетинаються, визначає між елементами цієї множини деяке відношення еквівалентності.

Множину всіх класів еквівалентності на A називають **фактор-множиною** множини A за еквівалентністю $R_{\sim}$ і позначають $A/R_{\sim}$. Так, якщо A – множина всіх студентів університету, $R_{\sim}$ – відношення "бути студентом однієї групи", то фактор-множиною є множина всіх студентських груп університету.

Зауважимо, що елементами фактор-множини є підмножини вихідної множини.

Відношення порядку. БВ $R \subset A^2$ називають **відношенням нестрогого порядку** $(R_{\leq})$, якщо воно водночас рефлексивне, антисиметричне і транзитивне:

$$R_{\leq} \rightleftharpoons R_r \wedge R_{\bar{s}} \wedge R_t. \tag{1.2.15}$$

Приклади $R_{\leq}$: відношення "не більше" $(\leq)$ на множині дійсних чисел; включення $(\subseteq)$ на множинах; "бути командиром" на множині військовослужбовців, якщо, звичайно, вважати, що кожний військовослужбовець – командир над собою.

БВ $R \subset A^2$ називають **відношенням строгого порядку** $(R_{<})$, якщо воно водночас антирефлексивне, асиметричне і транзитивне:

$$R_{<} \rightleftharpoons R_{\bar{r}} \wedge R_{as} \wedge R_t. \tag{1.2.16}$$

Оскільки антирефлексивність $(\bar{r})$ і транзитивність (t) БВ тягне за собою асиметричність (as): $R_{\bar{r}} \wedge R_t \Rightarrow R_{as}$ (*обміркуйте!*), то можна дати еквівалентне означення відношення строгого порядку:

$$R_{<} \rightleftharpoons R_{\bar{r}} \wedge R_t. \tag{1.2.17}$$

Приклади $R_{<}$: відношення "більше" $(>)$, "менше" $(<)$ на множині дійсних чисел; строге включення $(\subset)$ на множинах; "бути сильнішим", "бути вищим на зріст" на множині людей.

Множину A називають **упорядкованою**, якщо будь-які два її елементи є порівнянними, тобто якщо для них має місце співвідношення: $x < y$ або $x = y$ або $x > y$.

У загальному випадку може виявитись, що для деяких пар (x, y) жодне зі співвідношень $x < y$ і $y < x$ (або $x \leq y$ і $y \leq x$) не виконується. Такі елементи x і y називають **непорівнянними**, а множину A – **частково впорядкованою**.

Відношення домінування. БВ $R \subset A^2$ називають **відношенням домінування** $(R_{>>})$, якщо воно водночас антирефлексивне й асиметричне:

$$R_{>>} \rightleftharpoons R_{\bar{r}} \wedge R_{as}. \tag{1.2.18}$$

Із відношенням $R_{>>}$ найчастіше стикаються тоді, коли A є множиною людей (колективів, груп, команд тощо) чи множиною властивостей (якостей) якихось об'єктів. Кажуть, що x домінує над y, коли, *наприклад*, спортсмен x переміг у змаганнях спортсмена y; особа x користується авторитетом у особи y; якість x переважає якість y. Жоден індивідуум не може домінувати над самим собою (антирефлексивність), у кожній парі (x, y) тільки один індивідуум домінує над іншим, тобто $x >> y$ і $y >> x$ – взаємовиключні (несиметричність).

У БВ домінування властивість транзитивності не має місця. Дійсно, якщо у змаганнях команда x перемогла команду z, а команда z перемогла команду y, то це не означає, що команда x переможе команду y. У разі виконання (додатково) умови транзитивності приходять до відношення строгого порядку $R_{<}$. Отже, $R_{<}$ можна означити так (*сформулюйте* самостійно):

$$R_{<} \rightleftharpoons R_{>>} \wedge R_t . \qquad (1.2.19)$$

Відношення толерантності. БВ $R \subset A^2$ називають **відношенням толерантності** ($R_{\wp}$), якщо воно водночас рефлексивне і симетричне:

$$R_{\wp} \rightleftharpoons R_r \wedge R_s . \qquad (1.2.20)$$

Як бачимо, у БВ толерантності транзитивність не має місця. У разі виконання (додатково) умови транзитивності приходимо до відношення еквівалентності $R_{\sim}$. Отже, $R_{\sim}$ можна означити інакше (*сформулюйте* самостійно):

$$R_{\sim} \rightleftharpoons R_{\wp} \wedge R_t . \qquad (1.2.21)$$

Відношення толерантності є тлумаченням інтуїтивного відчуття схожості й нерозрізнюваності. Кожен об'єкт нерозрізнюваний сам із собою (рефлексивність), а схожість двох об'єктів не залежить від того, у якому порядку їх порівнюють (симетричність). Водночас, якщо один об'єкт схожий на другий, а другий схожий на третій, то це зовсім не означає, що всі вони схожі між собою, тобто властивість транзитивності не виконується.

Приклади $R_{\backsim}$: толерантність на множині точок круга радіуса r: $xR_{\backsim}y$, якщо відстань між точками x і y не перевищує r; толерантність на множині слів: $xR_{\backsim}y$, якщо слова x і y мають по три однакові букви (папа – паша́ – каша – Маша – Даша – душа); толерантність на множині кортежів: наявність у парі кортежів хоча б однієї спільної компоненти; толерантність на множині числових функцій: наявність однакових значень двох функцій, що відповідають одному й тому ж значенню аргументу.

Аналогічно до класів еквівалентності можна на будь-якій множині визначити певні класи толерантності.

Функціональне БВ

Одним із найпоширеніших у застосуваннях є так зване функціональне бінарне відношення. **Функціональним БВ** (**функцією**, **відображенням**) між елементами множин A і B $(f \subseteq A \times B)$ називають відношення, усі впорядковані пари якого мають різні перші елементи. Інакше кажучи, кожному елементу x із A – такому, що $(x, y) \in f$, – відповідає один і тільки один елемент y із B, тобто:

$$(f - \text{функціональне БВ}) \rightleftharpoons ((x, y) \in f \wedge (x, z) \in f \Rightarrow y = z). \quad (1.2.22)$$

Елемент y називають **значенням** (**образом**) функції у точці x (за заданого значення аргументу x); x – **прообраз** образу функції.

Слід зазначити, що потрібно розрізнювати функцію f як множину впорядкованих пар (x, y) і значення функції як другий елемент однієї з таких пар.

Для позначення відображення застосовують таку символіку: $x f y$, $(x, y) \in f$, $y = f(x)$, $f : x \to y$, $x \xrightarrow{f} y$, $x \to f(x)$.

Множини $D(f) = \{x \mid \exists y : (x, y) \in f\}$ і $E(f) = \{y \mid \exists x : (x, y) \in f\}$ називають відповідно **областю визначення** і **областю значень** функції f.

Залежно від того, як співвідносяться між собою множини $D(f)$ і A, $E(f)$ і B, розрізняють такі типи відображень:

1) відображення **із $\boldsymbol{A}$ в $\boldsymbol{B}$**, коли: $D(f) \subset A$ і $E(f) \subset B$ (рис. 1.2.8а);

2) відображення **$\boldsymbol{A}$ в $\boldsymbol{B}$** $(A \xrightarrow{f} B)$, коли: $D(f) = A$ і $E(f) \subset B$ (рис. 1.2.8б);

3) відображення **із $\boldsymbol{A}$ на $\boldsymbol{B}$**, коли: $D(f) \subset A$ і $E(f) = B$ (рис. 1.2.8в);

4) відображення **$\boldsymbol{A}$ на $\boldsymbol{B}$**, коли: $D(f) = A$ і $E(f) = B$ (рис. 1.2.8г).

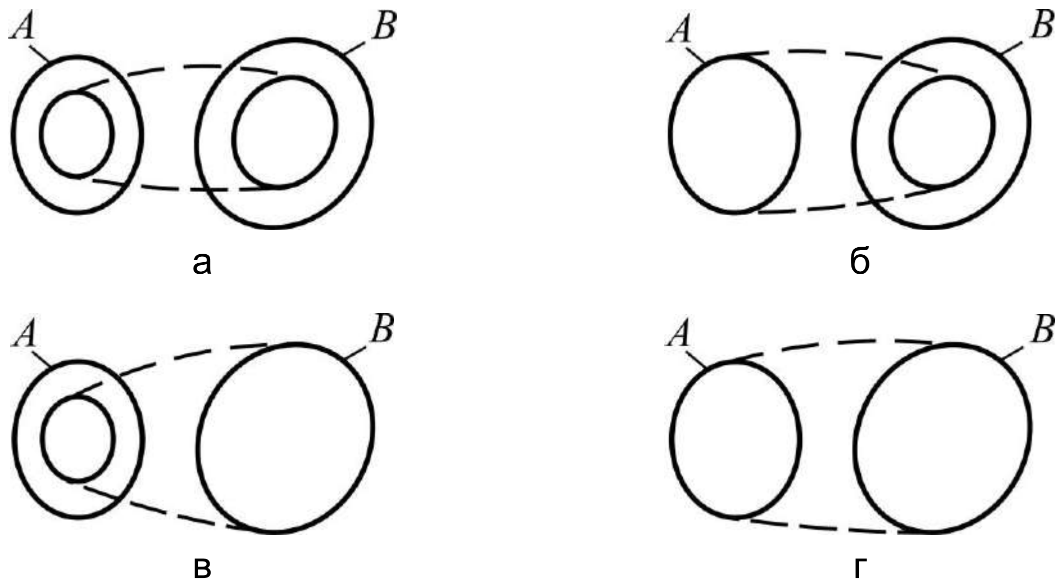


Рис. 1.2.8. **Типи відображень:**
а) відображення із $\boldsymbol{A}$ в $\boldsymbol{B}$; б) відображення $\boldsymbol{A}$ в $\boldsymbol{B}$;
в) відображення із $\boldsymbol{A}$ на $\boldsymbol{B}$; г) відображення $\boldsymbol{A}$ на $\boldsymbol{B}$

Відображення A в B називають **ін'єкцією**, якщо різним значенням аргументу відповідають різні значення функції (ін'єкція – від лат. *injectio* – вкладення): $x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$.

Відображення A на B називають **сюр'єкцією** (сюр'єкція – від лат. *surjectio* – покриття).

Сюр'єктивну ін'єкцію, або ін'єктивну сюр'єкцію, називають **взаємо-однозначним відображенням**, або **бієкцією**.

Граф відображення f такий, що з кожної вершини його може виходити тільки одне орієнтоване ребро (враховуючи й петлі); графік функції може мати не більш ніж одну точку перетину з будь-якою вертикальною прямою; матриця відображення містить у кожному рядку не більш ніж один одиничний елемент.

Залежно від природи множин A і B розрізняють такі відображення: *числові функції* (A, B – числові множини); *функціонали* (A – множина функцій, B – числова множина); *оператори* (A, B – множини функцій).

Більш докладно функціональні БВ вивчають у курсі "Вища математика".

1.3. Задачі та вправи до теми 1

Зразки розв'язання типових задач

1. Установіть, які з наступних тверджень є правильними, і обґрунтуйте, чому:

1) $b \in \{a, 7, b\}$; 2) $3 \in \{7, 1, \{2, 3\}\}$;

3) $x \in \{\sin x, \ln(e^x), \sqrt{x}\}$; 4) $\{c, d\} \in \{a, \{c, d\}, b\}$;

5) $\{y\} \in \{x, \{x, y\}, y\}$; 6) $\{5, 7\} \in \{\{7, 5\}\}$.

Розв'язання:

1) твердження *є правильним*, оскільки серед елементів a, 7, b розглядуваної множини є елемент b;

2) твердження *не є правильним*, оскільки серед трьох елементів 7, 1, $\{2,3\}$ розглядуваної множини немає елемента 3;

3) твердження *є правильним*, оскільки за означенням логарифмічної функції $\ln(e^x) = x$, тобто елемент x належить до вказаної множини;

4) твердження *є правильним*, оскільки множина $\{c, d\}$ значиться серед елементів триелементної множини: a, $\{c, d\}$ і b;

5) твердження *не є правильним,* оскільки одноелементна множина $\{y\}$ не є елементом множини з елементами x, $\{x, y\}$, y;

6) твердження *є правильним*, оскільки єдиним елементом множини $\{\{7, 5\}\}$ і є двоелементна множина $\{5, 7\}$ (звісно, з урахуванням того, що порядок розташування елементів у множинах не суттєвий).

2. З'ясуйте, чи є рівними задані множини, і обґрунтуйте, чому:

1) $A = \{4, 2, 3, 1\}$, $B = \{1, 3, 2, 4\}$;

2) $K = \{a, c, b\}$, $L = \{\{a\}, c, b\}$;

3) $H = \{\{\alpha, \beta\}, \{\beta, \gamma\}\}$, $G = \{\alpha, \beta, \gamma\}$;

4) $D = \{1, 11\}$, $T = \{1, 11, 1\}$;

5) $S = \{y, x\}$, $C = \{\{x, y\}\}$;

6) $V = \{2, \{2, 3\}, 3\}$, $W = \{2, 3\}$;

7) $P = \{x \in \mathbf{N} \mid x^3 - 5x^2 + 6x = 0\}$, $M = \{2, 3\}$;

8) $\varnothing$, $\{\varnothing\}$.

Розв'язання:

Виходячи з означення рівних множин (1.1.3), маємо:

1) $A = B$, тому що кожний елемент множини A є водночас елементом множини B;

2) $A \neq B$, оскільки множини A і B мають різний склад елементів, наприклад, $\{a\} \in L$, але $\{a\} \notin K$, або інакше: $a \in K$, але $a \notin L$;

3) $H \neq G$, оскільки множина H містить два елементи: $\{\alpha, \beta\}$ і $\{\beta, \gamma\}$, а множина G – три: α, β, γ;

4) $D = T$, через те, що в процесі підрахунку кількості елементів множини однакові (нерозрізнювані) елементи враховуються тільки один раз: $T = \{1,11,1\} = \{1,11\} = G$;

5) $S \neq C$, тому що множина S містить два елементи: y і x, а множина C – один – множину $\{x, y\}$;

6) $V \neq W$, оскільки множина V містить три елементи: 2, $\{2,3\}$, 3, а множина W – тільки два: 2, 3;

7) $P \neq M$, тому що множина P розв'язків рівняння $x^3 - 5x^2 + 6x = 0$ має вигляд: $P = \{0, 2, 3\}$ (*перевірте!*), звідки маємо: $0 \in P$, але $0 \notin M$;

8) множини $\varnothing$ і $\{\varnothing\}$ не є рівними, оскільки перша з них не містить жодного елемента, а друга – містить один елемент.

Спробуйте навести свої варіанти обґрунтувань.

3. Установіть, чи є одна з пари заданих множин підмножиною іншої:

а) $A = \{2, 4, 6\}$, $B = \{7, 6, 5, 4, 3, 2, 1\}$;

б) $C = \{a, b, c\}$, $D = \{\{a\}, \{b, c\}\}$;

в) $G = \{(x, y) \in \mathbf{R} \mid x^2 + y^2 \leq 1\}$, $H = \{(x, y) \in \mathbf{R} \mid |x| \leq 2 \wedge |y| \leq 2\}$;

г) $M_1 = A \bigcup (B \setminus C)$, $M_2 = (A \bigcup B) \setminus C$.

Розв'язання:

Спираючись на означення підмножини деякої непорожньої множини (1.1.2), робимо висновок, що:

а) $A \subset B$, оскільки кожний елемент множини A є водночас і елементом множини B, проте $B \not\subset A$, бо, наприклад, $7 \in B$, але $7 \notin A$;

б) $C \not\subset D$, тому що є елементи множини C, які не належать множині D (наприклад, $b \in C$, але $b \notin D$); і навпаки $D \not\subset C$ (наприклад, $\{b, c\} \in D$, але $\{b, c\} \notin D$);

в) множина G точок круга радіусом 2 із центром у початку координат є підмножиною множини H точок квадрата, який є перетином двох смуг: вертикальної $(-2\le x\le 2)$ та горизонтальної $(-2\le y\le 2)$ (рис. 1.3.1). Отже, $G\subset H$, але $H\not\subset G$;

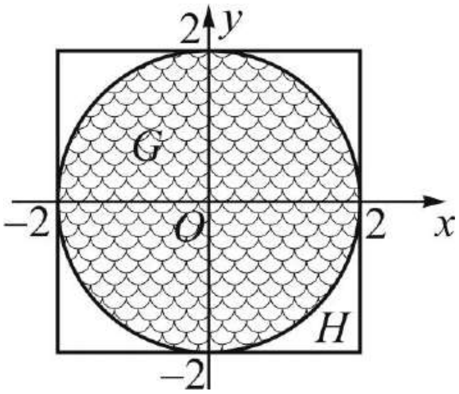


Рис. 1.3.1. **Геометричне зображення множин G і H**

г) за умовою задачі маємо: множина $M_1 = A\bigcup(B\setminus C)$ є об'єднанням множини A з різницею множин B і C (рис. 1.3.2а), а множина $M_2=(A\bigcup B)\setminus C$ – різницею між об'єднанням множин A, B і множиною C (рис. 1.3.2б). Візуальний аналіз заштрихованих областей, що відповідають множинам M_1 і M_2, дозволяє дійти висновку, що $M_2\subset M_1$, але $M_1\not\subset M_2$.

а) $M_1 = A\bigcup(B\setminus C)$ б) $M_2=(A\bigcup B)\setminus C$

Рис. 1.3.2. **Ейлерові діаграми множин M_1 і M_2**

4. Запишіть явно елементи кожної множини (якщо вони є) і вкажіть потужність кожної множини:

а) $A=\{x\,|\,x\in\mathbf{N}\wedge x^2-5x-14=0\}$;

б) B – множина всіх підмножин множини $M=\{a,b,c\}$;

в) $C=\{(x,y)\,|\,x,y\in\mathbf{N}\bigcup\{0\}\wedge x^2+y^2-4x<0\}$.

Розв'язання:

а) множина $A=\{x\,|\,x\in\mathbf{N}\wedge x^2-5x-14=0\}$ є множиною розв'язків рівняння $x^2-5x-14=(x+2)(x-7)=0$, які належать множині натуральних чисел $\mathbf{N}$, тому $A=\{7\}$, адже розв'язок $x=-2$ не є натуральним числом. Оскільки потужність скінченної множини визначається кількістю її елементів, то остаточно маємо: $P(A)=|A|=1$;

б) запишемо множину B всіх підмножин множини $M=\{a,b,c\}$ (таку множину B називають **булеаном** множини M):

$$B=\{\varnothing,\{a\},\{b\},\{c\},\{a,b\},\{a,c\},\{b,c\},\{a,b,c\}\}.$$

Зрозуміло, що потужність булеану B залежить від кількості елементів множини M, а саме: $|B|=2^{|M|}$, тому: $P(B)=|B|=2^{|M|}=2^3=8$;

в) множина C є множиною точок площини xOy, координати яких є натуральними числами або нулем і задовольняють нерівність $x^2+y^2-4x<0$. Усі такі точки розташовані у першій координатній чверті всередині кола $(x-2)^2+y^2=4$ радіусом 2 із центром у точці $(2,0)$ (рис. 1.3.3). Отже, множина C містить такі елементи:

$$C=\{(1,0),(2,0),(3,0),(1,1),(2,1),(3,1)\},$$

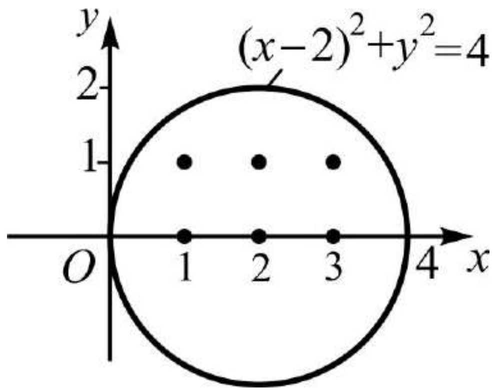


Рис. 1.3.3. **Зображення множини точок до задачі 4в**

а її потужність: $P(C)=6$.

5. З'ясуйте, які з наведених тверджень є правильними і чому:

а) $\varnothing\in\{1,2,3\}$, $\varnothing\subset\{1,2,3\}$, $\varnothing\subseteq\{1,2,3\}$;

б) $\varnothing\in\{\varnothing,2,3\}$, $\varnothing\subset\{\varnothing,2,3\}$, $\varnothing\subseteq\{\varnothing,2,3\}$;

в) $\varnothing\in\{\{\varnothing\},2,3\}$, $\varnothing\subset\varnothing$, $\varnothing\subseteq\varnothing$.

Розв'язання:

а) *правильним* є твердження: $\varnothing\subset\{1,2,3\}$, оскільки порожня множина є підмножиною будь-якої непорожньої множини (у нас це множина $\{1,2,3\}$) і не співпадає з нею: $\varnothing\neq\{1,2,3\}$. Інакше кажучи, порожня множина $\varnothing$ строго включається в будь-яку множину, крім самої себе.

Наведемо міркування стосовно решти тверджень цього пункту:

$\varnothing\in\{1,2,3\}$ – *хибне*, оскільки $\varnothing$ – це не елемент множини $\{1,2,3\}$, а її підмножина;

$\varnothing\subseteq\{1,2,3\}$ – *хибне*, оскільки $\varnothing\subset\{1,2,3\}$, але $\varnothing\neq\{1,2,3\}$;

б) *правильним* є твердження: $\varnothing\in\{\varnothing,2,3\}$, оскільки порожня множина $\varnothing$ є елементом множини $\{\varnothing,2,3\}$, що містить три елементи: $\varnothing$, 2, 3.

Щодо решти тверджень цього пункту можна зауважити наступне:

$\varnothing \subset \{\varnothing, 2, 3\}$ – *хибне*, адже порожня множина $\varnothing$ є елементом множини $\{\varnothing, 2, 3\}$, а до елементів множин символ строгого включення не застосовують;

$\varnothing \subseteq \{\varnothing, 2, 3\}$ – *хибне*, оскільки до обґрунтування в попередньому абзаці слід ще додати, що також не має місця рівність $\varnothing = \{\varnothing, 2, 3\}$;

в) *правильним* є твердження: $\varnothing \subseteq \varnothing$, оскільки запис $\varnothing \subseteq \varnothing$ означає, що $\varnothing \subset \varnothing$ або $\varnothing = \varnothing$, тобто $\varnothing$ є своєю невластивою підмножиною.

Щодо решти тверджень цього пункту, зазначимо таке:

$\varnothing \in \{\{\varnothing\}, 2, 3\}$ – *хибне*, оскільки жоден із трьох елементів $\{\varnothing\}$, 2, 3 множини $\{\{\varnothing\}, 2, 3\}$ не є порожньою множиною;

$\varnothing \subset \varnothing$ – *хибне*, оскільки не узгоджується зі смислом поняття строгого включення: якщо $A \subset B$, то потрібно розглядати всі підмножини множини B, крім випадку $A = B$.

6. Опишіть за допомогою операцій об'єднання $(\bigcup)$, перетину $(\bigcap)$, різниці $(\backslash)$ над заданими множинами A, B і C множину M, що відповідає заштрихованій області (рис. 1.3.4); б) дайте словесне формулювання:

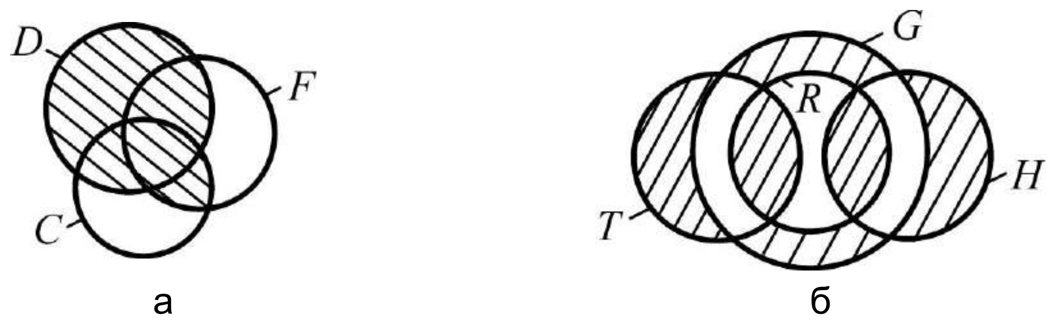


Рис. 1.3.4. **Заштриховані області, які підлягають опису**

Розв'язання:

а) візуальний аналіз рис. 1.3.4а дає: множина M, що відповідає заштрихованій області, є об'єднанням множини D з перетином множин F і C. Таким чином, маємо: $M = D \bigcup (F \bigcap C)$;

б) візуальний аналіз рис. 1.3.4б показує: множина M, що відповідає заштрихованій області, є об'єднанням двох множини, перша з яких є різницею між об'єднанням множин T, H і різницею множин G, H, а інша – різницею між множиною G і об'єднанням трьох множин T, R, H. Отже, маємо:

$$M = M_1 \bigcup M_2 = \left| \begin{array}{c} M_1 = (T \bigcup H) \setminus (G \setminus H) \\ M_2 = G \setminus (T \bigcup R \bigcup H) \end{array} \right| =$$

$$= ((T \bigcup H) \setminus (G \setminus H)) \bigcup (G \setminus (T \bigcup R \bigcup H)).$$

Спробуйте знайти інші варіанти опису заштрихованих областей.

7. Для заданої теоретико-множинної формули:

$$F = ((A \bigcup B) \setminus (C \bigcap A)) \Delta (B \setminus C),$$

складовими якої є числові множини A, B, C, задані способом опису, тобто за допомогою характеристичної (визначальної) властивості $P(x)$ їхніх елементів:

$$A = \{x \,|\, x \in \mathbf{R} \wedge (x^3 - 10x^2 + 16x = 0)\},$$

$$B = \{x \,|\, x = 3^n - 1 \wedge x \leq 50,\ n \in \mathbf{N}\},$$

$$C = \{x \,|\, x = 4k \wedge |x| < 16 \wedge x/3 \notin \mathbf{Z},\ k \in \mathbf{Z}\},$$

необхідно:

1) указати явно елементи кожної з множин A, B, C (якщо вони є);

2) виконати операції (дії), що визначені формулою F;

3) установити, яка з основних числових множин: $\mathbf{N}$, $\mathbf{Z}$, $\mathbf{Q}$, $\overline{\mathbf{Q}}$, $\mathbf{R}$, містить здобутий результат.

Розв'язання:

1. *Переходимо* від задання множин способом опису до подання їх способом переліку.

За відомою характеристичною властивістю $P(x)$ елементів кожної множини встановлюємо, що:

множина A містить елементи (x), які є дійсними коренями рівняння $x^3 - 10x^2 + 16x = 0$, отже: $A = \{0, 2, 8\}$;

множина B є множиною чисел (x), які не перевищують число 50 ($x \leq 50$), а їхні значення для будь-якого натурального n ($n \in \mathbf{N}$) можуть бути обчислені за формулою: $x = 3^n - 1$, тобто: $B = \{2, 8, 26\}$;

множина C складається із цілих чисел (x), кратних числу 4 ($x = 4k$, $k \in \mathbf{Z}$), але не кратних числу 3 ($x/3 \notin \mathbf{Z}$), модуль яких менший за число 16 ($|x| < 16$), таким чином: $C = \{-8, -4, 4, 8\}$.

2. *Установлюємо* у формулі F порядок дій і згідно з ним вводимо (для зручності) позначення результатів проміжних операцій:

$$F = ((\underset{R_1}{\underset{1}{A \bigcup B}}) \underset{R_3}{\underset{3}{\setminus}} (\underset{R_2}{\underset{2}{C \bigcap A}})) \underset{F}{\underset{5}{\bigcup}} (\underset{R_4}{\underset{4}{A \Delta B}}).$$

Знаходимо результати операцій (дій), що визначені заданою формулою F:

$$R_1 = A \bigcup B = \{0, 2, 8\} \bigcup \{2, 8, 26\} = \{0, 2, 8, 26\};$$
$$R_2 = C \bigcap A = \{-8, -4, 4, 8\} \bigcap \{0, 2, 8\} = \{8\};$$
$$R_3 = R_1 \setminus R_2 = \{0, 2, 8, 26\} \setminus \{8\} = \{0, 2, 26\};$$
$$R_4 = A \Delta B = (A \setminus B) \bigcup (B \setminus A) = \left| \begin{array}{c} A \setminus B = \{0\} \\ B \setminus A = \{26\} \end{array} \right| = \{0\} \bigcup \{26\} = \{0, 26\};$$
$$F = R_3 \bigcup R_4 = \{0, 2, 26\} \bigcup \{0, 26\} = \{0, 2, 26\}.$$

3. *Аналізуємо* висхідну множину F з метою встановлення того, для якої з основних числових множин: $\mathbf{N}$, $\mathbf{Z}$, $\mathbf{Q}$, $\overline{\mathbf{Q}}$, $\mathbf{R}$, вона є підмножиною: оскільки всі елементи множини $F = \{0, 2, 26\}$ є цілими числами, то робимо висновок, що F є підмножиною множини цілих чисел $\mathbf{Z}$: $F \subset \mathbf{Z}$.

8. Для заданого теоретико-множинного твердження:

$$(B \setminus A) \bigcup (A \bigcap C) = (C \bigcap (A \bigcup B)) \bigcup (B \setminus (A \bigcup C)),$$

необхідно: 1) дати його словесне формулювання; 2) підтвердити або спростувати його правильність для множин A, B, C із задачі 7.

Розв'язання:

1. *Словесне формулювання*: об'єднання різниці множин B і A з перетином множин A і C дорівнює об'єднанню двох множин, перша з яких є перетином множини C із об'єднанням множин A і B, а друга – різницею між множиною B і об'єднанням множин A і C.

2. *Установлюємо* в лівій (F_1) і правій (F_2) частинах твердження $F_1(A, B, C) = F_2(A, B, C)$ порядок дій і *реалізуємо* їх, вводячи позначення множин, які є результатами проміжних операцій:

$$F_1 = (\underset{L_1}{B \setminus A}) \underset{F_1}{\bigcup} (\underset{L_2}{A \bigcap C}); \qquad F_2 = (\underset{R_2}{C \bigcap} (\underset{R_1}{A \bigcup B})) \underset{F_2}{\bigcup} (B \underset{R_4}{\setminus} (\underset{R_3}{A \bigcup C})).$$

Знаходимо для множин $A=\{0,2,8\}$, $B=\{2,8,26\}$, $C=\{-8,-4,4,8\}$ (див. задачу 7) результати операцій (дій), що визначені лівою частиною рівності – формулою F_1:

$$L_1 = B \setminus A = \{2,8,26\} \setminus \{0,2,8\} = \{26\};$$
$$L_2 = A \cap C = \{0,2,8\} \cap \{-8,-4,4,8\} = \{8\};$$
$$F_1 = L_1 \cup L_2 = \{26\} \cup \{8\} = \{8,26\}.$$

Знаходимо результати операцій, що визначені правою частиною рівності – формулою F_2:

$$R_1 = A \cup B = \{0,2,8\} \cup \{2,8,26\} = \{0,2,8,26\};$$
$$R_2 = C \cap R_1 = \{-8,-4,4,8\} \cap \{0,2,8,26\} = \{8\};$$
$$R_3 = A \cup C = \{0,2,8\} \cup \{-8,-4,4,8\} = \{-8,-4,0,2,4,8\};$$
$$R_4 = B \setminus (A \cup C) = \{2,8,26\} \setminus \{-8,-4,0,2,4,8\} = \{26\};$$
$$F_2 = R_2 \cup R_4 = \{8\} \cup \{26\} = \{8,26\}.$$

3. *Робимо* висновок про правильність або хибність заданого твердження на підставі отриманих результатів: оскільки множини, що відповідають лівій та правій частинам твердження, є рівними: $F_1 = F_2 = \{8,26\}$, то задане теоретико-множинне твердження є правильним.

9. Для заданих множин:

$$A=\{(x,y)\,|\,x^2+y^2 \le 25\},\ B=\{(x,y)\,|\,xy \ge 6\},\ C=\{(x,y)\,|\,y+2 \ge x^2\},$$

елементами яких є пари $(x,y) \in \mathbf{R}^2$, і теоретико-множинної формули:

$$F = ((A \cap B) \setminus C) \cup ((A \cap C) \setminus B),$$

зобразіть у системі координат xOy множину, що відповідає заданій формулі F; наведіть словесне формулювання.

Розв'язання:

1. *Будуємо* в декартовій системі координат xOy лінії Γ_1, Γ_2, Γ_3, які є межами областей, що визначають задані множини A, B і C відповідно (рис. 1.3.5). Для цього в кожній нерівності, яка є характеристичною властивістю $P(x)$ елементів відповідної множини, слід замінити знак "$\le$" або "$\ge$" знаком "$=$":

$A = \{(x, y) \,|\, x^2 + y^2 \le 25\} \Rightarrow \Gamma_1\colon\ x^2 + y^2 = 25$ – коло радіусом 5 із центром у початку координат;

$B = \{(x, y) \,|\, xy \ge 6\} \Rightarrow \Gamma_2\colon\ xy = 6$ – рівнобічна гіпербола, розташована в першій і третій координатних чвертях;

$C = \{(x, y) \,|\, y + 2 \ge x^2\} \Rightarrow \Gamma_3\colon\ y + 2 = x^2$ – парабола з віссю симетрії Oy і вершиною в точці $(0, -2)$.

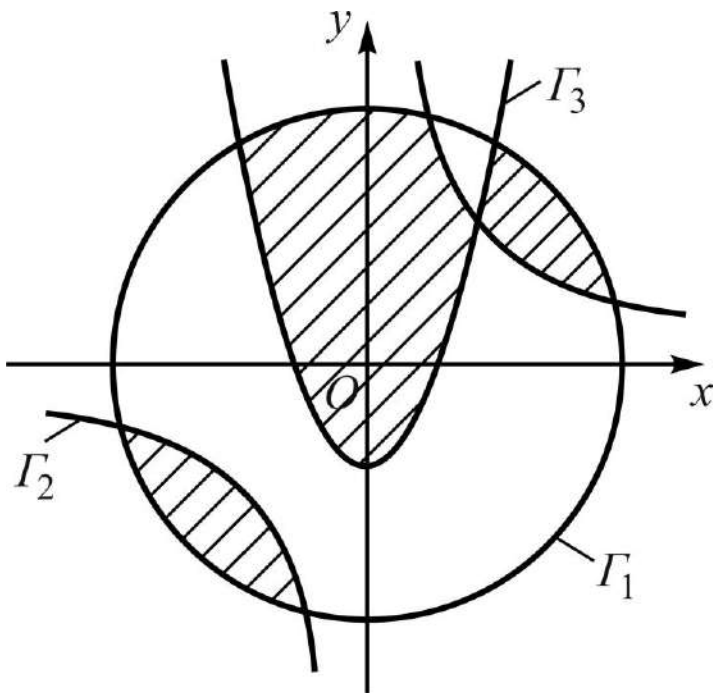


Рис. 1.3.5. **Область, що відповідає формулі $\boldsymbol{F}$**

2. *Аналізуємо* формулу F з метою встановлення того, яку область визначає кожна з її операцій над відповідними множинами, та з*ображуємо* вислідну область (рис. 1.3.5).

Область, що відповідає формулі $F = ((A \cap B) \setminus C) \cup ((A \cap C) \setminus B)$, є об'єднанням точок двох областей:

перша – відповідає множині $(A \cap B) \setminus C$ і утворена спільними точками круга $x^2 + y^2 \le 25$ і області, яка обмежена гіперболою $y = 6/x$ і не містить початку координат, за винятком точок, розташованих над параболою $y = x^2 - 2$;

друга – відповідає множині $(A \cap C) \setminus B$ і містить точки, розташовані всередині кола над параболою, за винятком точок по обидва боки від гілок гіперболи.

10. Знайдіть результат виконання наведених дій:

а) $\varnothing\bigcap\{\varnothing\}$; б) $\{\varnothing\}\bigcap\{\varnothing\}$; в) $\{\varnothing,\{\varnothing\}\}\setminus\varnothing$; г) $\{\varnothing,\{\varnothing\}\}\setminus\{\varnothing\}$.

Розв'язання:

За означенням порожньої множини та означеннями теоретико-множинних операцій $\bigcap$ і $\setminus$ маємо:

а) $\varnothing\bigcap\{\varnothing\}=\varnothing$, оскільки одноелементна множина $\{\varnothing\}$ не має спільних елементів із множиною, яка не містить жодного елемента.

Той самий результат дає застосування одного із законів поглинання:

$$\varnothing\bigcap\underbrace{\{\varnothing\}}_{A}=\left|\varnothing\bigcap A=\varnothing\right|=\varnothing;$$

б) $\{\varnothing\}\bigcap\{\varnothing\}=\{\varnothing\}$, оскільки множина, що є перетином заданих множин $\{\varnothing\}$ і $\{\varnothing\}$, складається з їх спільного елемента (їм є $\varnothing$).

Той самий результат можна дістати за законом ідемпотентності для перетину множин:

$$\underbrace{\{\varnothing\}}_{A}\bigcap\underbrace{\{\varnothing\}}_{A}=\left|A\bigcap A=A\right|=\{\varnothing\};$$

в) $\{\varnothing,\{\varnothing\}\}\setminus\varnothing=\{\varnothing,\{\varnothing\}\}$, оскільки з першої множини вилучають "елементи" множини $\varnothing$, яка не має жодного елемента.

Той самий результат можна дістати, якщо скористатися формулою (1.1.41) для різниці множин: $A\setminus B=A\bigcap\overline{B}$, законом поглинання: $A\bigcap I=A$, і врахувати, що $\overline{\varnothing}=I$:

$$\underbrace{\{\varnothing,\{\varnothing\}\}}_{A}\setminus\underbrace{\varnothing}_{B}=\left|A\setminus B=A\bigcap\overline{B}\right|=\{\varnothing,\{\varnothing\}\}\bigcap\overline{\varnothing}=\left|\overline{\varnothing}=I\right|=$$

$$=\underbrace{\{\varnothing,\{\varnothing\}\}}_{A}\bigcap I=\left|A\bigcap I=A\right|=\{\varnothing,\{\varnothing\}\};$$

г) множина $\{\varnothing,\{\varnothing\}\}$ містить два елементи: $\varnothing$ і $\{\varnothing\}$, а множина $\{\varnothing\}$ – один елемент – це $\varnothing$, отже, їх різниця міститиме ті елементи першої множини, що не належать другій:

$$\{\varnothing,\{\varnothing\}\}\setminus\{\varnothing\}=\left|\begin{array}{l}a=\varnothing,\\ b=\{\varnothing\}\end{array}\right|=\{\underbrace{\varnothing}_{a},\underbrace{\{\varnothing\}}_{b}\}\setminus\{\underbrace{\varnothing}_{a}\}=\left|\{a,b\}\setminus\{a\}=\{b\}\right|=\{\{\varnothing\}\}.$$

11. Сформулюйте записане в символах твердження, доведіть його або спростуйте його, дайте геометричну ілюстрацію:

1) $(A\bigcup B)\setminus C=(A\setminus C)\bigcup(B\setminus C)$; 2) $M\subset N\Rightarrow(N\setminus M)\bigcup M=N$.

Розв'язання:

1. $(A\bigcup B)\setminus C=(A\setminus C)\bigcup(B\setminus C)$.

Словесне формулювання: різниця між об'єднанням множин A, B і множиною C дорівнює об'єднанню різниці множин A, C і різниці множин B, C.

Доведення. Позначимо ліву (праву) частину рівності через L (P):

$$\underbrace{(A\bigcup B)\setminus C}_{L}=\underbrace{(A\setminus C)\bigcup(B\setminus C)}_{P}.$$

Тоді за основними законами алгебри множин з урахуванням формули (1.1.41) послідовно маємо:

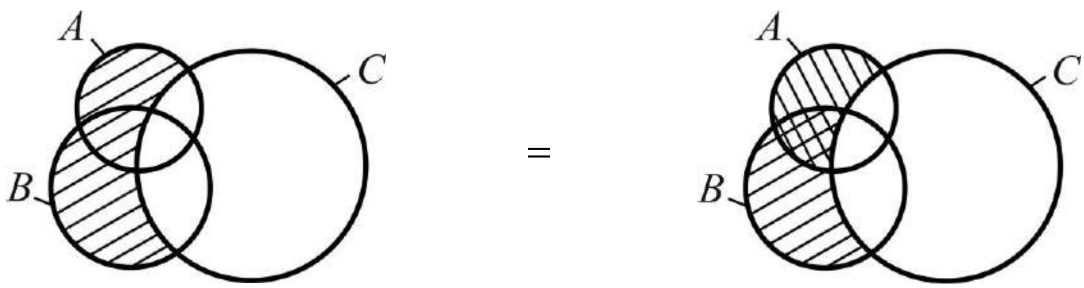
$$L=\underbrace{(A\bigcup B)}_{D}\setminus C=\left|D\setminus C=D\bigcap\overline{C}\right|=(A\bigcup B)\bigcap\overline{C}=\left|D\bigcap\overline{C}=\overline{C}\bigcap D\right|=$$

$$=\overline{C}\bigcap(A\bigcup B)=(\overline{C}\bigcap A)\bigcup(\overline{C}\bigcap B)=$$

$$=(A\bigcap\overline{C})\bigcup(B\bigcap\overline{C})=\left|X\bigcap\overline{Y}=X\setminus Y\right|=\left(A\setminus C\right)\bigcup\left(B\setminus C\right)=P,$$

що і треба було довести.

Геометрична ілюстрація твердження зображена на рис. 1.3.6.



$L=(A\bigcup B)\setminus C$ $P=(A\setminus C)\bigcup(B\setminus C)$

Рис. 1.3.6. **Геометрична ілюстрація твердження задачі 11 (1)**

2. $M\subset N\Rightarrow(N\setminus M)\bigcup M=N$.

Словесне формулювання: якщо множина M є підмножиною множини N, то об'єднання різниці множин N, M із множиною M дорівнює множині N.

Доведення. Якщо множина M – підмножина множини N, то множину N можна розглядати як основну (універсальну) множину $(N = I)$. Позначимо: $L = (N \setminus M) \bigcup M$, а $P = N$. Тоді:

$$L = (N \setminus M) \bigcup M = \left| M \subset N \Rightarrow N = I \right| = (I \setminus M) \bigcup M = \left| I \setminus M = \overline{M} \right| =$$
$$= \overline{M} \bigcup M = M \bigcup \overline{M} = I = \left| I = N \right| = N = P,$$

що і треба було довести.

Геометрична ілюстрація твердження зображена на рис. 1.3.7.

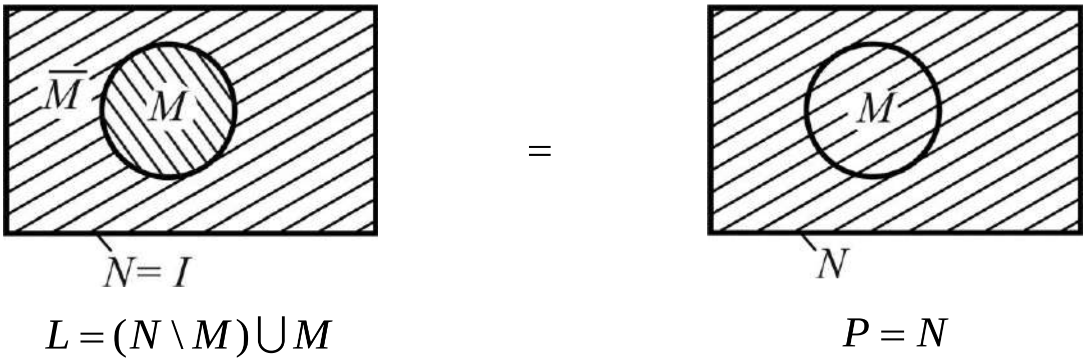


Рис. 1.3.7. **Геометрична ілюстрація твердження задачі 11 (2)**

12. Побудуйте на декартовій площині графік заданого бінарного відношення $R = \{(x, y) \mid x, y \in \mathbf{Z} \wedge (|x| + y = 4)\}$ і оцініть його з точки зору властивостей: рефлексивності (r), антирефлексивності $(\bar{r})$, симетричності (s), антисиметричності $(\bar{s})$, асиметричності (as), транзитивності (t).

Розв'язання:

Областю БВ R є множина цілих чисел $\mathbf{Z}$, оскільки умова $|x| + y = 4$ не звужує ні області існування, ні області значень БВ: $D(R) = E(R) = \mathbf{Z} \Rightarrow$ $\Rightarrow O(R) = D(R) \bigcup E(R) = \mathbf{Z}$.

Запишемо умову $|x| + y = 4$ у вигляді $y = 4 - |x|$, або $y = 4 - x$, коли $x \geq 0$, і $y = 4 + x$, коли $x < 0$; і дамо зображення БВ на декартовій площині (рис. 1.3.8), де пунктирна лінія – пряма $y = x$ – бісектриса першого і третього координатних кутів.

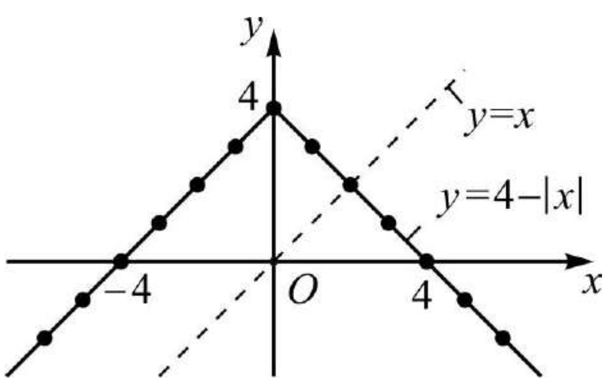


Рис. 1.3.8. **Декартів графік БВ**

Аналізуючи графік БВ, робимо висновки:

R *не є рефлексивним*, оскільки не всі точки прямої $l: y = x$ із цілими координатами належать графіку БВ (наприклад, $(0,0) \notin R$);

R *не є антирефлексивним*, оскільки є точка графіка БВ, яка лежить на прямій $y = x$, а саме – точка $(2,2)$;

R *не є симетричним*, оскільки графік БВ не має симетрії відносно прямої l (наприклад, $(-4,0) \in R$, а $(0,-4) \notin R$);

R *не є антисиметричним*, оскільки є точки графіка, симетричні відносно прямої l (наприклад, $(0,4)$ і $(4,0)$);

R *не є асиметричним*, оскільки є точки, симетричні відносно прямої l, і такі, що лежать на ній (наприклад, $(2,2)$);

R *не є транзитивним*, оскільки не для всіх пар точок графіка виду (x,z), (z,y) точка (x,y) теж належить графіку БВ (наприклад, $(0,4) \in R \wedge (4,0) \in R$, але $(0,0) \notin R$).

Отже, задане БВ R не має жодної властивості.

13. Оцініть БВ $R = \{(a,b),(c,b),(a,c),(c,a),(a,a),(b,b),(c,c)\}$ з точки зору властивостей: r, $\bar{r}$, s, $\bar{s}$, as, t, за допомогою його графа і матриці.

Розв'язання:

Знаходимо область існування $D(R)$, область значень $E(R)$ і область $O(R)$ БВ R: $D(R) = \{a,b,c\} = E(R) \Rightarrow O(R) = \{a,b,c\} = A$.

Записуємо матрицю БВ B і *будуємо* граф БВ (рис. 1.3.9):

$$B = \begin{array}{c c} & \begin{array}{ccc} a & b & c \end{array} \\ \begin{array}{c} a \\ b \\ c \end{array} & \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \end{array} = (b_{ij})_{3\times 3}$$

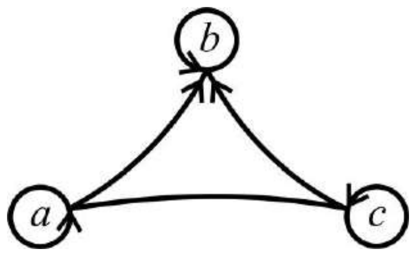


Рис. 1.3.9. **Граф БВ**

Аналізуючи граф, робимо висновки:

R *є рефлексивним*, оскільки кожна вершина графа має петлю;

R *не є антирефлексивним*, оскільки граф має петлі (наприклад, у вершини b);

R *не є симетричним*, оскільки не всі ребра графа неорієнтовані (ребра (a,b), (c,b) – орієнтовані);

R *не є антисиметричним*, оскільки є неорієнтовані ребра – (a, c);

R *не є асиметричним*, оскільки є неорієнтовані ребра й петлі;

R *транзитивне*, оскільки кожна пара послідовних ребер має замикальне ребро (для ребер (a, c), (c, b) замикальне – (a, b), а для ребер (c, a), (a, b) замикальне – (c, b)), а неорієнтоване ребро (a, c) має петлі в обох вершинах.

Такі ж висновки робимо, аналізуючи матрицю БВ B, а саме:

R *є рефлексивним*, оскільки всі елементи головної діагоналі матриці є одиницями;

R *не є антирефлексивним*, оскільки елементи головної діагоналі матриці не є нулями (наприклад, $b_{33} = 1$);

R *не є симетричним*, оскільки матриця не є симетричною відносно головної діагоналі (наприклад, $b_{21} = 0$, $b_{12} = 1$);

R *не є антисиметричним*, оскільки матриця містить одиничні елементи, симетричні відносно головної діагоналі (наприклад, $b_{31} = b_{13} = 1$);

R *не є асиметричним*, оскільки є одиничні елементи на головній діагоналі і симетричні відносно неї;

R *є транзитивним*, оскільки для кожної пари одиничних елементів $b_{ik} = b_{kj} = 1$ знайдеться третій – $b_{ij} = 1$; $i, j, k \in \{1, 2, 3\}$. У нашому випадку це трійки (b_{31}, b_{12}, b_{32}), (b_{31}, b_{13}, b_{33}), (b_{13}, b_{32}, b_{12}), (b_{13}, b_{31}, b_{11}).

Щоб переконатися в цьому, діємо за схемою, зображеною на рис. 1.3.10: треба вибрати одиничний елемент матриці $(b_{ik} = 1)$, який не лежить на головній діагоналі, подумки провести вертикаль до перетину з головною діагоналлю (b_{kk}) і знайти у відповідному рядку одиничний елемент $(b_{kj} = 1)$; для властивості транзитивності елемент b_{ij} теж має бути одиничним $(b_{ij} = 1)$.

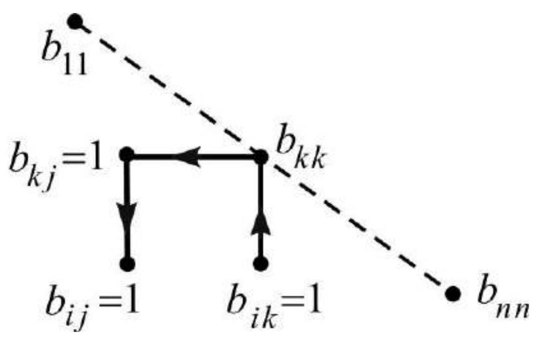


Рис. 1.3.10. **Схема перевірки умови транзитивності**

Якщо виявиться, що в k-му рядку матриці одиниць немає, то переходимо до іншого $b_{ik} = 1$.

Транзитивність розглядуваного БВ випливає також із порівняння матриці $K = B^2$ з матрицею B:

$$K = B^2 = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 2 \end{bmatrix} = (k_{ij})_{3\times 3} \text{ і } k_{ij} > 0 \Rightarrow b_{ij} > 0 \ \forall i, j \in \{1,2,3\}.$$

Отже, задане БВ R є рефлексивним і транзитивним: $R = R_r \wedge R_t$.

Задачі та вправи для самостійного розв'язання

14. Установіть, які з наведених тверджень є правильними, і обґрунтуйте, чому:

а) $x \in \{5, b, x\}$; б) $7 \in \{3, \{6,7\}, 8\}$; в) $x \in \{x^2, tgx\}$;

г) $\{x, y\} \in \{u, \{x, y\}, v\}$; д) $\{1,2\} \in \{\{1,2,3\}, \{1,3\}, 1, 2\}$.

15. Чи є рівними множини A і B ("так" чи "ні" і на якій підставі)?

а) $A = \{2,5,4\}$, $B = \{5,4,2\}$; б) $A = \{1,2,4,2\}$, $B = \{1,2,4\}$;

в) $A = \{2,4,5\}$, $B = \{2,4,2\}$; г) $A = \{1,\{2,5\},6\}$, $B = \{1,\{5,2\},6\}$.

16. З'ясуйте, чи можна пов'язати між собою множини A і B символом включення (якщо "так", то яким)?

а) $A = \{a,b,d\}$, $B = \{a,b,c,d\}$; б) $A = \{a,c,d,e\}$, $B = \{a,e,c\}$;

в) $A = \{c,d,e\}$, $B = \{c,a\}$; г) $A = \{a,b\}$, $B = \{\{a,b\}\}$.

17. Наведіть приклад таких множин A, B і C, що $A \in B$, $B \in C$, але $A \notin C$.

18. Опишіть словесно кожну з наступних множин:

а) $\{x^2 \mid x - \text{просте число}\}$;

б) $\{x/y \in \mathbf{Q} \mid x + y = 1 \wedge x \in \mathbf{Q} \wedge y \in \mathbf{Q}\}$;

в) $\{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1\}$;

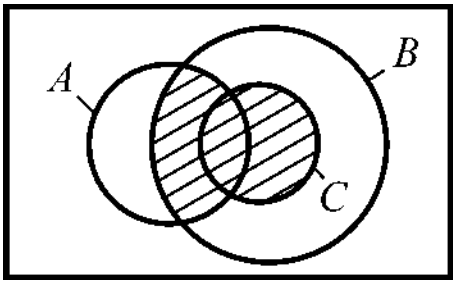
г) $\{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid y = 3x \wedge x = 2y\}$.

19. Як співвідносяться між собою (у якому відношенні перебувають) три множини: $A = \{2,4\}$; B – множина парних додатних чисел; C – множина розв'язків рівняння $x^2 - 6x + 8 = 0$?

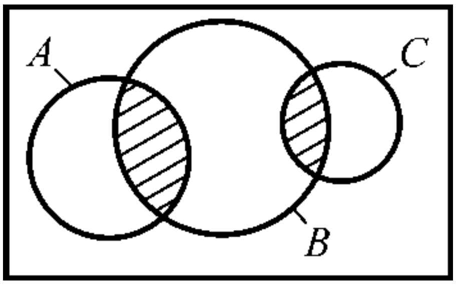
20. Приймемо за універсум множину перших дванадцяти чисел натурального ряду. Запишіть підмножини: A – парних чисел; B – непарних чисел; C – квадратів чисел; D – простих чисел. У яких відношеннях перебувають ці підмножини?

21. Запишіть множини, які дістають у результаті операцій над множинами A, B, C, D із задачі 20: $A \bigcup B$, $A \bigcap B$, $A \bigcap C$, $A \bigcap D$, $C \setminus A$, $C \setminus B$, $C \bigcup \overline{D}$. Сформулюйте і запишіть в символах визначальну (характеристичну) властивість кожної з отриманих множин.

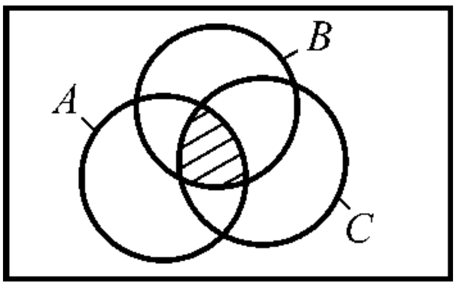
22. Опишіть за допомогою операцій над множинами A, B і C множини, що відповідають заштрихованим областям; наведіть словесне формулювання:

1) 

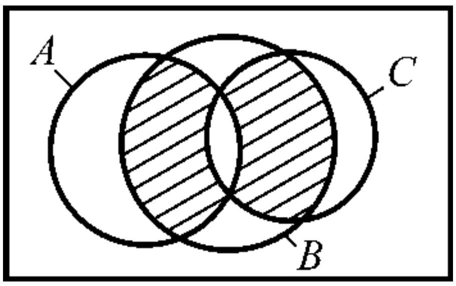
;

2) 

;

3) 

;

4) 

.

23. Доведіть кожне з наступних тверджень для довільних множин A, B і C та дайте геометричне зображення:

1) $(A \subset B) \wedge (B \subseteq C) \Rightarrow (A \subset C)$;

2) $(A \subset B) \wedge (B \subset C) \Rightarrow (A \subset C)$;

3) $(A \subset B) \Rightarrow (A \setminus C \subset B \setminus C)$;

4) $(A \subset B) \Rightarrow (A \bigcap C \subset B \bigcap C)$;

5) $(A \subset B) \Rightarrow (A \bigcup C \subset B \bigcup C)$;

6) $(B \subset A \wedge C = A \setminus B) \Rightarrow (A = B \bigcup C)$.

24. Для кожного додатного цілого числа n $(n \geq 2)$ наведіть приклад такої n-множини A_n, у якій для кожної пари елементів один із елементів є елементом другого.

25. Покажіть, що $A \subseteq \varnothing$ тоді і тільки тоді, коли $A = \varnothing$.

26. На діаграмі Ейлера універсум-прямокутник розбивають підмножинами A, B і C, взагалі кажучи, на вісім областей, які попарно не перетинаються. Опишіть кожну з областей як множину точок за допомогою операцій над множинами A, B і C; сформулюйте словесно результати опису.

27. За допомогою кругів Ейлера дослідіть питання про правильність наведених співвідношень:

1) $(A \bigcup C \subset B \wedge A \bigcap B \subset \overline{C}) \Rightarrow (A \bigcap C = \varnothing)$;

2) $(A \subset \overline{B \bigcup C} \wedge B \subset \overline{A \bigcup C}) \Rightarrow (B = \varnothing)$;

3) $(A \setminus B) \setminus C = (A \setminus C) \setminus (B \setminus C)$;

4) $B \bigcup \overline{A \bigcap \overline{B}} = \overline{A} \bigcup B$.

28. Для заданої теоретико-множинної формули $F(A, B, C)$, складовими якої є числові множини A, B, C, задані способом опису, тобто за допомогою характеристичної властивості $P(x)$ їхніх елементів, необхідно: 1) указати явно елементи кожної множини: A, B, C (якщо вони є); 2) виконати операції (дії), що визначені формулою F; 3) установити, яка з основних множин: $\mathbf{N}$, $\mathbf{Z}$, $\mathbf{Q}$, $\overline{\mathbf{Q}}$, $\mathbf{R}$, містить здобутий результат:

1) $F = ((A \Delta B) \bigcup (A \bigcap C)) \setminus (A \setminus B)$; $A = \{x \mid x = 2^n \wedge x < 33,\ n \in \mathbf{N}\}$, $B = \{x \mid (x-3)(x^2 - 6x + 8) = 0 \wedge x \in \mathbf{R}\}$, $C = \{x \mid x = 4k \wedge |x| < 9, k \in \mathbf{Z}\}$;

2) $F = ((A \setminus B) \bigcup (C \setminus A)) \bigcap (B \Delta C)$; $A = \{x \mid x = 2k \wedge |x| < 5, k \in \mathbf{Z}\}$, $B = \{x \mid x = 2n - 1 \wedge x < 7, n \in \mathbf{N}\}$, $C = \{x \mid (x^2 - 4)(x^2 + 2x - 15) = 0 \wedge x \in \mathbf{R}\}$.

29. Для заданих множин A, B, C, елементами яких є пари $(x, y) \in \mathbf{R}^2$, і теоретико-множинної формули $F = F(A, B, C)$ зобразіть у системі координат xOy множину, що відповідає заданій формулі F; наведіть словесне формулювання:

1) $F = (A \setminus B) \bigcup (C \bigcap B \bigcap A)$; якщо: $A = \{(x, y) \mid x^2 + (y-4)^2 \le 9\}$, $B = \{(x, y) \mid y - 4 + x^2 \le 0\}$, $C = \{(x, y) \mid y - 2x + 4 \ge 0\}$;

2) $F = ((C \bigcap B) \setminus A) \bigcup (A \setminus C)$, якщо: $A = \{(x, y) \mid x^2 + 4y^2 - 16 \le 0\}$, $B = \{(x, y) \mid y \ge x^2\}$, $C = \{(x, y) \mid x + y - 4 \le 0\}$.

30. Випишіть елементи множини $\{3,4,5\}\times\{1,2,3\}$. Якими є область визначення і область значень відповідного БВ? Запишіть матрицю і зобразіть декартів графік та граф даного БВ.

31. На множинах $X=\{x_i\}_1^6$, $Y=\{y_j\}_1^4$, визначено БВ $R=\{(x_1,y_2),$ $(x_2,y_1),(x_2,y_2),(x_4,y_2)\}$. Для даного БВ R: а) запишіть область існування $D(R)$ і область значень $E(R)$; б) побудуйте матрицю і зобразіть граф; в) знайдіть обернене БВ R^{-1} та композиції $R\circ R$ і $R\circ R^{-1}$.

32. Побудуйте декартові графіки наведених БВ (якщо графік є частиною площини, то заштрихуйте відповідну область), визначте $D(R_i)$ і $E(R_i)$, $i=\overline{1,6}$, та встановіть, які властивості (характеристики) мають БВ:

1) $R_1=\{(x,y)\in\mathbf{R}^2 \mid x=y\}$; 2) $R_2=\{(x,y)\in\mathbf{R}^2 \mid |x|+2|y|=1\}$;

3) $R_3=\{(x,y)\in\mathbf{R}^2 \mid y\ge x\}$; 4) $R_4=\{(x,y)\in\mathbf{R}^2 \mid y\le x\wedge x\ge 0\}$;

5) $R_5=\{(x,y)\in\mathbf{R}^2 \mid x^2+y^2=1\}$; 6) $R_6=\{(x,y)\in\mathbf{R}^2 \mid y\le x\wedge(x+y=1)\}$.

33. Доведіть наведені властивості інверсій відношень R і S:

1) $(S\circ R)^{-1}=R^{-1}\circ S^{-1}$; 2) $(R\bigcup S)^{-1}=R^{-1}\bigcup S^{-1}$;

3) $(R\bigcap S)^{-1}=R^{-1}\bigcap S^{-1}$; 4) $(S^{-1})^{-1}=S$.

34. Нехай R – БВ між точками першого квадранта в $\mathbf{R}^2$. Яка характеристична особливість графіка цього БВ, якщо: а) R рефлексивне; б) R симетричне; в) R транзитивне? Сформулюйте характеристичну властивість графіка відношення еквівалентності.

35. Наведіть приклад БВ на деякій множині A, яке: 1) рефлексивне й симетричне, але не транзитивне; 2) рефлексивне і транзитивне, але не симетричне; 3) симетричне і транзитивне, але не рефлексивне.

36. Укажіть властивості, які мають наведені БВ. Чи є серед них еквівалентності?

1) "x *кратне* y" на множині цілих чисел;

2) "x *має спільні точки з* y" на множині прямих на площині;

3) "x *дотикається до* y" на множині кіл на площині;

4) "x *знайомий із* y" на множині людей.

37. Нехай R і S – відношення еквівалентності. Доведіть, що:

1) перетин $R \bigcap S$ також є еквівалентністю;

2) відношення R^{-1}, обернене до R, є еквівалентністю;

3) композиція $R \circ S$ є еквівалентністю тоді і тільки тоді, коли $S \circ R = R \circ S$;

4) у загальному випадку об'єднання $R \bigcup S$ не є еквівалентністю (наведіть відповідний приклад).

38. Покажіть, що наведені БВ є відношеннями порядку (строго чи нестрогого):

1) "x *важче* від y" на множині деталей;

2) "x *підлягає* y" на множині посад;

3) "x *не довше від* y" на множині відрізків на площині;

4) "x *старше* від y" на множині людей;

5) "x *не перевищує* y" на множині номерів будівель на вулиці;

6) "x *міститься всередині* y" на множині кіл на площині.

39. Нехай R і S – відношення порядку (строгого чи нестрогого). Доведіть, що:

1) перетин $R \bigcap S$ також є відношенням порядку;

2) відношення R^{-1}, обернене до R, є відношенням порядку.

40. Укажіть, які з наведених БВ є відношеннями толерантності:

1) "x *перпендикулярна* до y" на множині прямих;

2) "x *має спільні точки з* y" на множині геометричних фігур;

3) "x *поруч із* y" на множині книг на полиці;

4) "x *товаришує з* y" на множині людей.

41. Покажіть, що для будь-якого рефлексивного відношення R відношення $R \bigcup R^{-1}$ і $R \bigcap R^{-1}$ є відношеннями толерантності.

42. Укажіть, які з наведених БВ є відношеннями домінування:

1) "x *вище* від y" на множині дерев;

2) "x *освіченіший, ніж* y" на множині людей;

3) "x *жвавіший* від y" на множині людей;

4) "x *страшніший від* y" на множині хижих звірів;

5) "x *у злагоді з* y" на множині людей.

43. Доведіть, що для того щоб БВ R було відношенням домінування, необхідне виконання умови $R \bigcap R^{-1} = \varnothing$.

44. На множині $N = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ задані бінарні відношення. Чи всі вони будуть функціональними БВ?

1) $\{(1,2),(2,3),(2,4),(3,2),(5,1)\}$; 2) $\{(1,2),(2,3),(3,2),(4,3),(5,1)\}$;

3) $\{(2,1),(3,4),(4,4),(5,3)\}$; 4) $\{(1,5),(2,1),(3,4),(4,3),(5,2)\}$.

45. Укажіть, які з наведених відображень у множині дійсних чисел є функціями:

1) $\{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid y = x^2 + 3x + 2\}$; 2) $\{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid x = y^2\}$;

3) $\{(x,y) \in \mathbf{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1 \wedge y > 0\}$; 4) $\{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \big| \, |x| + |y| = 1\}$.

46. Нехай A – множина мешканців України, на якій розглядають відношення $y = f(x)$: 1) y – батько x; 2) y – син x; 3) y – брат x; 4) y – дружина x. Які з наведених БВ є функціональними (функціями)?

Запитання для самодіагностики засвоєння матеріалу теми 1

Відповіді на всі запитання сформулюйте словесно, запишіть у символьній формі, обґрунтуйте (на підставі означень, теорем, правил, формул тощо), наведіть відповідні конкретні приклади.

1. У чому полягає канторове поняття множини?
2. Що розуміють під елементом (членом) множини?
3. За якої умови кажуть, що множину задано?
4. Які існують способи задання множин?
5. Що називають підмножиною деякої множини?
6. Які підмножини називають невластивими; властивими?
7. Яку множину називають порожньою; універсальною?
8. У яких випадках кажуть, що між множинами має місце бієкція?
9. Які множини називають рівними; еквівалентними? У чому полягає принципова відмінність між цими поняттями?
10. Яку множину називають скінченною; нескінченною; зліченною; незліченною?
11. Що розуміють під потужністю множини і чому вона дорівнює у випадку скінченної множини?
12. Яке співвідношення пов'язує потужності еквівалентних множин?
13. У чому полягає принципова відмінність між неперервними і дискретними множинами?

14. Що вивчає дискретна математика?

15. Що називають n-кортежем, n-підмножиною?

16. Що називають прямим (декартовим) добутком множин; n-м степенем множини $(n > 2)$? Які властивості вони мають?

17. Що називають об'єднанням; перетином; різницею; симетричною різницею множин; доповненням множини? Як виглядають ейлерові діаграми для цих операцій над множинами?

18. Які теоретико-множинні операції називають головними?

19. Яку множину називають замкненою відносно головних операцій?

20. Що називають алгеброю множин?

21. Як виглядають символьні записи основних законів алгебри множин та як ці закони формулюються?

22. У чому полягає принцип двоїстості в алгебрі множин?

23. Що називають: бінарним відношенням між елементами двох множин; областю визначення, областю значень та областю БВ?

24. Чи можна встановити БВ між елементами однієї множини?

25. Яке БВ називають: одиничним; оберненим; композицією двох відношень; повним; порожнім?

26. Які теоретико-множинні операції можна виконувати над БВ?

27. Які існують способи задання БВ?

28. Як здійснюють задання БВ за допомогою графа; графіком на декартовій площині; матрицею?

29. Які існують основні характеристики БВ і як виглядає відповідне зображення БВ графом, графіком на декартовій площині, матрицею?

30. Які існують основні типи БВ і які властивості вони мають?

31. Яке БВ називають функціональним?

32. Як дати мовою відображень "в" і "на" означення ін'єкції (сюр'єкції, бієкції)?

33. Як дати мовою відображень означення числової функції (функціоналу, оператора)?

Рекомендована література до теми 1: [1; 3; 5; 6; 9; 12; 13; 21].

2. Комбінаторний аналіз

Не потрібні нам гострі клинки,
Не шукаємо ми слави гучної.
Той перемагає, хто знайомий
Із мистецтвом мислити тонким.

У. Вордсворт

Мета: навчити майбутніх фахівців умінню описувати мовою комбінаторного аналізу (теорії сполук) дискретні процеси та явища навколишнього середовища.

Компетентності, які набуває студент після вивчення теми:

знання: опанування, осмислення та засвоєння основ теорії комбінаторного аналізу;

уміння: здатність виконувати аналіз та синтез дискретних об'єктів та процесів, використовуючи елементи теорії комбінаторного аналізу;

комунікації: презентація з метою передавання інформації щодо результатів аналізу інформаційних систем;

автономність і відповідальність: здатність самостійно виконувати завдання, розв'язувати практичні задачі за засвоєним матеріалом теми та відповідати за результати своєї діяльності.

Основні питання теми:

2.1. Предмет, основні задачі та основні правила комбінаторного аналізу.

2.2. Комбінаторні конфігурації: основні типи, формули для підрахунку їх кількості.

2.3. Загальні рекомендації щодо розв'язання задач на знаходження кількості основних комбінаторних конфігурацій.

2.4. Комбінаторні задачі перелічення й переліку, метод рекурентних формул і твірних функцій.

2.5. Задача розбиття натуральних чисел.

Ключові терміни: комбінаторний аналіз, основні правила (суми, добутку, включення й виключення, комбінаторні конфігурації (переставлення, розміщення, комбінації) без повторень та з повтореннями, формули підрахунку, задачі перелічення й переліку, енумератори (твірні функції), денумератори, задача розбиття.

2.1. Предмет, основні задачі та основні правила комбінаторного аналізу

Комбінаторний аналіз (КА) – галузь математики, предметом якої є теорія скінченних множин.

Основні задачі комбінаторного аналізу:

1) визначення кількості та виду підмножин або кортежів, складених з елементів заданої множини, розрізнюваних у певному сенсі;

2) визначення кількості способів, якими можна здійснити певний вибір.

Нехай A_i – скінченні множини з потужностями $P(A_i) = |A_i| = n_i$, $i = \overline{1,k}$, а $A_1 \times A_2 \times ... \times A_k$ – їхній прямий добуток, тобто множина кортежів довжини k: $(x_1, x_2, ..., x_k)$, $x_i \in A_i$. Надалі терміни "кортеж", "рядок", "вибірка" сприйматимемо як синоніми; k – довжина кортежу (рядка), об'єм вибірки.

Значна кількість теорем і формул комбінаторного аналізу базується на двох елементарних правилах.

Правило добутку. Якщо елемент $x_1 \in A_1$ можна вибрати n_1 способами й після кожного такого вибору x_1 елемент $x_2 \in A_2$ можна вибрати n_2 способами, після вибору x_1 і x_2 елемент $x_3 \in A_3$ можна вибрати n_3 способами і т. д., нарешті, елемент $x_k \in A_k$ можна вибрати n_k способами незалежно від вибору всіх попередніх елементів, то вибір кортежу $(x_1, x_2, ..., x_k)$ можна здійснити $\Pi = n_1 \cdot n_2 \cdot ... \cdot n_k$ способами.

Обґрунтування: потужність прямого добутку множин A_i, $i = \overline{1,k}$ дорівнює добутку потужностей цих множин:

$$P(A_1 \times A_2 \times ... \times A_k) = n_1 \cdot n_2 \cdot ... \cdot n_k. \qquad (2.1.1)$$

Наприклад, якщо у шухляді 6 видів головного вбрання (x), 5 – верхнього одягу (y), 4 – взуття (z), то кількість способів скласти комплект (x, y, z) дорівнює: $\Pi = 6 \cdot 5 \cdot 4 = 120$.

Правило суми. Якщо елемент $x_1 \in A_1$ можна вибрати n_1 способами, а елемент $x_2 \in A_2$ – n_2 способами, причому ніякий спосіб вибору x_1 не збігається із жодним зі способів вибору x_2; елемент $x_3 \in A_3$ можна вибрати n_3 способами, причому ніякий вибір x_1, x_2 не збігається з вибором x_3 і т. д., нарешті, елемент $x_k \in A_k$ – n_k способами, які не збігаються зі способами вибору x_1, x_2, …, x_{k-1}, то вибір x_1 або x_2 або ... x_k можна здійснити $S = n_1 + n_2 + ... + n_k$ способами.

Обґрунтування: потужність об'єднання множин A_i, $i = \overline{1,k}$, що попарно не перетинаються ($A_i \bigcap A_j = \varnothing \quad \forall i \neq j$), дорівнює сумі потужностей цих множин:

$$P(A_1 \bigcup A_2 \bigcup ... \bigcup A_k) = P(A_1) + P(A_2) + ... + P(A_k) =$$
$$= n_1 + n_2 + ... + n_k. \qquad (2.1.2)$$

Наприклад, підрахуємо, скільки існує чисел, кратних трьом або семи, серед перших двадцяти натуральних чисел $(n \leq 20)$:

$A = \{1, 2, ..., 20\} \Rightarrow (A_1 = \{3, 6, ..., 18\} = \{3n\}_1^6$ – множина чисел, кратних 3; $A_2 = \{7, 14\} = \{7n\}_1^2$ – множина чисел, кратних 7). Оскільки $A_1 \bigcap A_2 = \varnothing$, то $S = \left[\frac{20}{3}\right] + \left[\frac{20}{7}\right] = 6 + 2 = 8$, де $[\cdot]$ – ціла частина числа.

Якщо множини A_1, A_2 мають спільні елементи $(A_1 \bigcap A_2 \neq \varnothing)$, то треба враховувати кількість n_{12} таких елементів, і тоді $S = n_1 + n_2 - n_{12}$, щоб не рахувати їх двічі. Отже, якщо взяти $A = \{1, 2, ..., 30\}$ $(n \leq 30)$, то $S = \left[\frac{30}{3}\right] + \left[\frac{30}{7}\right] - \left[\frac{30}{3 \cdot 7}\right] = 10 + 4 - 1 = 13$, оскільки число 21 можна вибрати як число, кратне 3, і як число, кратне 7, а враховувати його треба тільки один раз.

Узагальненням формули (2.1.2), коли $A_i \bigcap A_j \neq \varnothing$ $(i \neq j)$, є так звана *формула включень та виключень:*

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i) - \sum_{1 \leq i < j \leq n} P(A_i \bigcap A_j) + \sum_{1 \leq i < j < k \leq n} P(A_i \bigcap A_j \bigcap A_k) +$$
$$+ \ ... + (-1)^{n-1} P\left(\bigcap_{i=1}^{n} A_i\right). \qquad (2.1.3)$$

Цю формулу часто застосовують у задачах, пов'язаних із властивостями об'єктів, а саме: нехай маємо N об'єктів і деяку сукупність властивостей $\{\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n\}$. Позначимо через $N(\alpha_i)$, $N(\alpha_i \alpha_j)$, $N(\alpha_i \alpha_j \alpha_k)$ і т. д. кількість об'єктів, які мають відповідно властивості α_i; α_i і α_j; α_i, α_j і α_k і т. д. Якщо хочуть підкреслити, що враховують об'єкти, які не мають властивості α_i, то пишуть $\overline{\alpha}_i$. *Наприклад*, символьний запис $N(\overline{\alpha}_1 \alpha_3 \alpha_5)$ означає кількість об'єктів, які мають властивості α_3, α_5 і не мають властивості α_1.

Правило (принцип, формула) включень та виключень: кількість об'єктів, які не мають жодної із властивостей α_1, α_2, …, α_n, визначають за формулою:

$$N(\overline{\alpha}_1 \overline{\alpha}_2 ... \overline{\alpha}_n) = N - \sum_i N(\alpha_i) + \sum_{i<j} N(\alpha_i \alpha_j) - \sum_{i<j<k} N(\alpha_i \alpha_j \alpha_k) + \\ + ... + (-1)^n N(\alpha_1 \alpha_2 ... \alpha_n). \qquad (2.1.4)$$

Зокрема, для $n = 3$ маємо:

$$N(\overline{\alpha}_1 \overline{\alpha}_2 \overline{\alpha}_3) = N - N(\alpha_1) - N(\alpha_2) - N(\alpha_3) + N(\alpha_1 \alpha_2) + \\ + N(\alpha_1 \alpha_3) + N(\alpha_2 \alpha_3) - N(\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3).$$

Якщо записати формально: $\overline{\alpha}_i = 1 - \alpha_i$, $N(1) = N$, і розглянути послідовність символів $\overline{\alpha}_1 \overline{\alpha}_2 ... \overline{\alpha}_n$ як алгебраїчний добуток, а праву частину (2.1.4) – як алгебраїчну суму, то формулу (2.1.4) можна подати у символьному вигляді, що дає змогу підрахувати кількість об'єктів, які мають одні й не мають інших властивостей.

У випадку трьох властивостей $(n = 3)$ дістанемо:

$$N(\overline{\alpha}_1 \overline{\alpha}_2 \overline{\alpha}_3) = N((1-\alpha_1)(1-\alpha_2)(1-\alpha_3)) = N(1 - \alpha_1 - \alpha_2 - \alpha_3 + \\ + \alpha_1 \alpha_2 + \alpha_1 \alpha_3 + \alpha_2 \alpha_3 - \alpha_1 \alpha_2 \alpha_3) = N(1) - N(\alpha_1) - N(\alpha_2) - N(\alpha_3) + \\ + N(\alpha_1 \alpha_2) + N(\alpha_1 \alpha_3) + N(\alpha_1 \alpha_3) - N(\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3).$$

Якщо якийсь об'єкт не має першої властивості із трьох, то з урахуванням, що $\overline{\alpha}_1 = 1 - \alpha_1$, матимемо:

$$N(\overline{\alpha}_1\alpha_3\alpha_5) = N((1-\alpha_1)\,\alpha_3\alpha_5) = N(\alpha_3\alpha_5 - \alpha_1\alpha_3\alpha_5) =$$
$$= N(\alpha_3\alpha_5) - N(\alpha_1\alpha_3\alpha_5).$$

2.2. Комбінаторні конфігурації: основні типи, формули для підрахунку їх кількості

Комбінаторні конфігурації без повторень

Нехай $A = \{x_1, x_2, ..., x_n\}$ – n-елементна множина, тобто $P(A) = = |A| = n$. Будь-яку множину (упорядковану, невпорядковану), складену з елементів множини A відповідно до заданих вимог (деяких правил, законів), називають **комбінаторною конфігурацією** (**КК**), або **сполукою**. До основних конфігурацій без повторень відносять переставлення, розміщення, комбінації.

Переставленням (без повторень) із *n* елементів називають будь-який n-елементний кортеж, який дістають за різних упорядкувань n-елементної множини (n-множини).

Кількість усіх переставлень із n елементів позначають символом P_n і знаходять за формулою:

$$P_n = n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot ... \cdot n. \qquad (2.2.1)$$

Дійсно, перший елемент переставлення можна вибрати n способами і після кожного такого вибору другий елемент можна вибрати $(n-1)$-м способом. Після кожного вибору першого і другого елементів третій елемент можна вибрати $(n-2)$-ма способами і т. д., нарешті, n-й елемент після кожного вибору всіх попередніх елементів можна вибрати одним способом. За правилом добутку отримуємо:

$$P_n = n \cdot (n-1) \cdot ... \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = n!.$$

Наприклад, множина $A = \{a, b, c\}$ $(n = 3)$ породжує такі переставлення із трьох елементів: (a, b, c), (a, c, b), (b, a, c), (b, c, a), (c, a, b), (c, b, a); $P_3 = 3! = 1 \cdot 2 \cdot 3 = 6$. Нагадаємо, що за означенням $0! = 1$; $1! = 1$.

Зауважимо, що переставлення відрізняються одне від одного тільки порядком розташування елементів.

Розміщенням із n елементів по m $(m<n)$ називають будь-який m-елементний кортеж, складений із елементів n-множини.

Кількість усіх розміщень із n елементів по m позначають символом A_n^m і знаходять за формулою:

$$A_n^m = n\cdot(n-1)\cdot\ldots\cdot(n-m+1) = \frac{n!}{(n-m)!}. \qquad (2.2.2)$$

Пропонуємо самостійно навести відповідні міркування, аналогічні до тих, що дають P_n.

Зазначимо, що розміщення відрізняються одне від одного або порядком розташування елементів, або самими елементами (хоча б одним). Переставлення можна розглядати як розміщення з n елементів по n і $P_n = A_n^n$.

Наприклад, множина $A=\{a,b,c\}$ $(n=3)$ породжує такі розміщення із трьох елементів по два: (a,b), (a,c), (b,c), (b,a), (c,a), (c,b); $A_3^2 = 3\cdot 2 = 6$.

Комбінацією з n елементів по m $(m<n)$ називають будь-яку m-елементну підмножину n-множини.

Кількість усіх комбінацій із n елементів по m позначають символом C_n^m і знаходять за формулою:

$$C_n^m = \frac{A_n^m}{P_m} = \frac{n\cdot(n-1)\cdot\ldots\cdot(n-m+1)}{1\cdot 2\cdot\ldots\cdot m} = \frac{n!}{m!\,(n-m)!}. \qquad (2.2.3)$$

З означення випливає, що комбінації, на відміну від розміщень, – це невпорядковані підмножини заданої множини. Отже, комбінації відрізняються одна від одної тільки самими елементами.

Кожну комбінацію із n елементів по m можна впорядкувати $P_m = m!$ способами. Таким чином, кожна комбінація породжує $m!$ розміщень із n елементів по m, а кількість усіх розміщень $A_n^m = C_n^m\cdot m!$ (за правилом добутку); звідси дістаємо формулу (2.2.3).

Наприклад, множина $A=\{a,b,c\}$ $(n=3)$ породжує такі комбінації із трьох елементів по два: $\{a,b\}$, $\{a,c\}$, $\{b,c\}$; $C_3^2 = \frac{3\cdot 2}{1\cdot 2} = 3$.

Для обчислення кількості комбінацій C_n^m у випадку $m > n/2$ зручно користуватися тотожністю: $C_n^m = C_n^{n-m}$.

Під час розв'язання застосовних задач досить часто доводиться стикатися з кортежами, елементи яких повторюються: код Морзе – кортеж з елементів множини $\{$крапка $(\cdot)$, тире $(-)\}$; інформаційний код в електронній обчислювальній машині (ЕОМ) – кортеж з елементів множини $\{0,1\}$; слово в лінгвістиці – рядок із літер абетки тощо. Такі конфігурації становлять своєрідне узагальнення конфігурацій, розглянутих раніше.

Комбінаторні конфігурації з повтореннями

До основних КК з повтореннями, як і до КК без повторень, відносять переставлення, розміщення, комбінації.

Нехай $A = \{x_1, x_2, ..., x_n\}$ – деяка n-множина (основна множина, генеральна сукупність), кожний елемент якої x_i можна вибрати будь-яку скінченну кількість разів k_i, $i = \overline{1, n}$. Якщо здійснено вибірку об'єму m, у якій елемент x_1 повторюється k_1 разів, x_2 – k_2 разів, ..., x_n – k_n разів, то кажуть, що ця вибірка (m-кортеж) має *специфікацію* (*склад*) $(k_1, k_2, ..., k_n)$, тобто:

$$(k_1, k_2, ..., k_n):\ (\underbrace{x_1\ x_1 ... x_1}_{k_1}\ \underbrace{x_2\ x_2 ... x_2}_{k_2} ... \underbrace{x_n\ x_n ... x_n}_{k_n}) - m\text{-кортеж}, \qquad (2.2.4)$$

де $k_1 + k_2 + ... + k_n = \sum_{i=1}^{n} k_i = m$.

Переставленням із повтореннями з $\boldsymbol{n}$ елементів по $\boldsymbol{m}$ називають будь-який m-кортеж із заданою специфікацією $(k_1, k_2, ..., k_n)$, утворений із елементів n-множини.

Кількість усіх переставлень з n елементів по m складу $(k_1, k_2, ..., k_n)$ позначають символом $P_m(k_1, k_2, ..., k_n)$ і знаходять за формулою:

$$P_m(k_1, k_2, ..., k_n) = \frac{m!}{k_1!\ k_2! ... k_n!}. \qquad (2.2.5)$$

Дійсно, якби всі члени кортежу (2.2.4) були різними, то можна було б утворити $m!$ переставлень без повторень. Кількість усіх таких конфігурацій можна знайти, відштовхуючись від переставлень із повтореннями таким чином: у кожному з них елемент x_1 переставити $k_1!$ способами і незалежно від цього елемент x_2 переставити $k_2!$ способами, …, елемент x_n – $k_n!$ способами; тоді (за правилом добутку)

$$m! = P_m(k_1, k_2, ..., k_n) \cdot k_1! \cdot k_2! \cdot ... \cdot k_n!.$$

Звідси й дістаємо формулу (2.2.5).

Зауваження:

1. На елементи специфікації k_i, $i = \overline{1, n}$, а отже, й на число $m \in \mathbf{N}$, жодних обмежень у загальному випадку не накладають. Зокрема, для специфікації $(k_1, k_2, ..., k_n) = (1, 1, ..., 1)$, тобто коли $m = n$, маємо переставлення без повторень, оскільки кожний елемент із $A = \{x_i\}_1^n$ беруть тільки один раз, і тоді:

$$P_m(k_1, k_2, ..., k_n) = P_n(1, 1, ..., 1) = P_n = n!.$$

2. Переставлення з повтореннями, як і переставлення без повторень, відрізняються одне від одного лише порядком розташування елементів і мають один і той самий склад елементів.

Наприклад, множина $A = \{x_1, x_2\} = \{a, b\}$ $(n = 2)$ породжує такі переставлення з повтореннями з двох елементів по чотири $(m = 4)$ зі специфікацією $(k_1, k_2) = (2, 2)$: $(aabb)$, $(abab)$, $(baba)$, $(bbaa)$, $(abba)$, $(baab)$; $P_4(2, 2) = \frac{4!}{2!\,2!} = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4}{1 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 2} = 6$.

Розміщенням із повтореннями з n елементів по m називають будь-який m-кортеж, складений із елементів n-множини.

Кількість усіх розміщень із повтореннями позначають символом $\overline{A}_n^m$ і знаходять за формулою:

$$\overline{A}_n^m = n^m. \tag{2.2.6}$$

Дійсно, кожен елемент рядка $(x_{i_1}, x_{i_2}, ..., x_{i_m})$, де індекси $i_1, i_2, \ldots, i_m$ можуть набувати одного із значень $1,\ 2,\ \ldots,\ n$, можна вибрати з множини $A = \{x_1, x_2, ..., x_n\}$ n способами. Тоді (за правилом добутку)

$$\overline{A}_n^m = \underbrace{n \cdot n \cdot ... \cdot n}_{m \text{ разів}} = n^m.$$

Зауваження:

1. Розміщення з повтореннями, як і розміщення без повторень, відрізняються одне від одного або порядком розташування елементів, або самими елементами (хоча б одним).

2. На число $m \in \mathbf{N}$ у загальному випадку жодних обмежень не накладають, тобто може бути $m < n$, $m > n$, $m = n$.

3. За умови, що всі елементи m-кортежу різні, приходимо до розміщень без повторень $(m < n)$ або переставлень без повторень $(m = n)$.

Наприклад, множина $A = \{a, b\}$ $(n = 2)$ для $m = 3$ породжує такі розміщення з повтореннями: (aaa), (aab), (aba), (baa), (abb), (bab), (bba), (bbb); $\overline{A}_2^3 = 2^3 = 8$.

Якщо для того ж $m = 3$ ввести специфікацію $(k_1, k_2) = (2, 1)$, то дістанемо переставлення з повтореннями, які складають підмножину множини розміщень із повтореннями: (aab), (aba), (baa); $P_3(2,1) = \dfrac{3!}{2! \cdot 1!} = 3$.

Будемо казати, що m-кортежі, складені з елементів n-множини, утворюють **клас еквівалентності**, якщо вони мають однаковий склад елементів (однакову специфікацію).

Так, на множині кортежів у попередньому прикладі маємо такі чотири класи еквівалентності:

I: (aaa).

II: (aab), (aba), (baa).

III: (abb), (bab), (bba);

IV: (bbb),

кожен із яких, як бачимо, є переставленням із повтореннями певного складу.

Комбінацією з повтореннями з n елементів по m називають будь-який клас еквівалентності на множині m-кортежів, складених з елементів n-множини. Інакше, комбінація з повтореннями – це множина переставлень із повтореннями певного складу.

Зрозуміло, що комбінації з повтореннями відрізняються одна від одної тільки складом елементів, а порядок розташування елементів значення не має.

Кількість усіх комбінацій із повтореннями з n елементів по m позначають символом $\overline{C}_n^m$ і знаходять за формулою:

$$\overline{C}_n^m = P_{n+m-1}(m, n-1) = \frac{(n+m-1)!}{m! \cdot (n-1)!} = C_{n+m-1}^m. \qquad (2.2.7)$$

Дійсно, кожній комбінації з повтореннями поставимо у відповідність упорядковану множину з m одиниць і $(n-1)$-го нуля таким чином: пишемо стільки одиниць, скільки разів входить у конфігурацію елемент x_1, потім пишемо 0, після цього стільки одиниць, скільки разів входить у конфігурацію елемент x_2, потім знов 0 і т. д.; якщо якесь x_i не входить у кортеж, то теж пишемо 0:

$$\begin{array}{ccccccccc} (x_1\, x_1 \ldots x_1 & & x_2\, x_2 \ldots x_2 & & x_4\, x_4 \ldots x_4 & & x_n\, x_n \ldots x_n) \\ (1\;\; 1 \;\ldots\; 1 & 0 & 1\;\; 1 \;\ldots\; 1 & 00 & 1\;\; 1 \;\ldots\; 1 & 0 \ldots 0 & 1\;\; 1 \;\ldots\; 1) \end{array}$$

Отже, між конфігураціями і $(m+n-1)$-кортежами встановлено бієкцію, тоді кількість розміщень із повтореннями з n елементів по m дорівнює кількості різних способів упорядкування $(m+n-1)$-множини згідно зі специфікацією $(m, n-1)$, що й дає (2.2.7).

2.3. Загальні рекомендації щодо розв'язання задач на знаходження кількості основних комбінаторних конфігурацій

Розв'язання задач на знаходження кількості комбінаторних конфігурацій *без повторень* доцільно проводити за такою схемою:

1) визначаємо кількість елементів (потужність, об'єм) основної множини (чи декількох основних множин);

2) підраховуємо кількість елементів, які входять у вибірку (тобто довжину рядка або потужність підмножини);

3) з'ясовуємо, які вибірки нам потрібні (упорядковані чи невпорядковані);

4) у разі підрахунку кількості кортежів використовуємо формули для P_n, A_n^m, а підмножин – C_n^m.

Для формалізації текстової задачі також бажано для всіх розглядуваних множин ввести певні позначення.

Під час розв'язання задач на знаходження кількості комбінаторних конфігурацій *із повтореннями* рекомендовано:

1) усвідомити, про що йдеться: про підрахунок кількості всіх кортежів певної довжини; про підрахунок кількості кортежів заданого складу (специфікації); про підрахунок кількості можливих складів кортежів;

2) у першому випадку встановити довжину потрібного кортежу і застосувати формулу для $\overline{A}_n^m$ (2.2.6);

у другому – знайти склад вибірки з елементів основної множини і використати формулу для $P_m(k_1, k_2, ..., k_n)$ (2.2.5);

у третьому – знайти кількість елементів основної множини, об'єм вибірки й використати формулу для $\overline{C}_n^m$ (2.2.7).

Абстрагуючись від природи об'єктів, які розглядають, для розв'язання задач комбінаторного аналізу застосовують так звану **модель комірок** (урн, ящиків) і **куль** (предметів): елементи основної множини A – комірки, елементи кортежів (чи підмножин A) – кулі.

Тлумачення кількості конфігурацій із повтореннями мовою "комірок і куль" виглядає так:

$\overline{A}_n^m$ – це кількість способів, якими можна розкласти m різних куль у n комірок;

$P_m(k_1, k_2, ..., k_n)$ – це кількість способів, якими можна розкласти m різних куль у n комірок так, щоб до i-ї комірки потрапило k_i куль $(i = \overline{1, n})$;

$\overline{C}_n^m$ – це кількість способів, якими можна розкласти m однакових куль у n комірок.

Підсумовуючи розглянуте, зведемо результати в табл. 2.3.1.

Таблиця 2.3.1

Основні сполуки та їхні характеристики

Назва сполуки	Ключові слова	Характеристичні ознаки	Теоретико-множинне тлумачення	Формула кількості сполук
Переставлення без повторень	n предметів *розмістити* в n місцях; *переставити* n предметів	1) предмети різні; 2) усі місця зайняті; 3) порядок розміщення важливий	упорядкована множина з n елементів (n-кортеж)	$P_n = n!$
Розміщення без повторень	з n предметів *вибрати* m і *розмістити* в m місцях	1) предмети і місця різні; 2) $0 \le m \le n$; 3) усі m місць необхідно зайняти; 4) порядок предметів важливий	упорядкована множина з m різних елементів, здобутих із n-множини	$A_n^m = \dfrac{n!}{(n-m)!}$
Комбінація без повторень	з n предметів *вибрати* m; *розбити* n предметів на дві групи з m і $(n-m)$ предметів	1) предмети різні; 2) $0 \le m \le n$; 3) порядок вибору не має значення	m-елементна підмножина, складена з елементів n-множини	$C_n^m = \dfrac{A_n^m}{P_m} = \dfrac{n!}{m!(n-m)!}$
Переставлення з повтореннями	m предметів n сортів *розмістити* в m місцях; *розбити* m місць на n груп	1) маємо k_i $(i = \overline{1,n})$ однакових предметів (i-го сорту); 2) $k_1 + k_2 + \ldots + k_n = m$; 3) усі m місць зайняті; 4) порядок важливий	m-кортеж із елементів n-множини із заданою специфікацією $(k_1, k_2, \ldots, k_n)$	$P_m(k_1, k_2, \ldots, k_n) = \dfrac{m!}{k_1! \cdot k_2! \cdot \ldots \cdot k_n!}$
Розміщення з повтореннями	m предметів *розмістити* в n місцях	1) не всі місця можуть бути зайняті $(m < n)$; 2) на одне місце може потрапити кілька предметів $(m > n)$; 3) предмети різні й усі місця зайняті $(m = n)$; 4) порядок важливий	упорядкована m-множина, складена з елементів n-множини	$\overline{A}_n^m = n^m$
Комбінація з повтореннями	*скласти* набір з m елементів по k_i елементів i-го сорту $(i = \overline{1,n})$	1) $k_1 + k_2 + \ldots + k_n = m$; 2) порядок елементів набору не має значення; важливий тільки склад набору	множина m-кортежів певного складу $(k_1, k_2, \ldots, k_n)$ із елементів n-множини	$\overline{C}_n^m = C_{m+n-1}^m$

Задача 2.3.1. Для участі в конкурсі танцюристів треба з 10 хлопців і 10 дівчат виділити дві пари: дует бального танцю і дует сучасного танцю. Скількома способами це можна зробити, якщо всі хлопці й усі дівчата вміють танцювати як бальні, так і сучасні танці?

Розв'язання:

Маємо дві основні множини: X – множина хлопців, D – множина дівчат; $P(X) = P(D) = 10$. У кожній із них нас цікавлять 2-елементні впорядковані підмножини, адже один і той самий хлопець (чи дівчина) в різних дуетах дають різні варіанти вибору пар. Із 10 хлопців одного виконавця бального танцю і одного виконавця сучасного танцю можна вибрати A_{10}^{2} способами. Аналогічно маємо A_{10}^{2} способів вибрати виконавців із множини дівчат.

За правилом добутку знаходимо загальну кількість S способів виділення дуетів бального й сучасного танців:

$$S = A_{10}^{2} \cdot A_{10}^{2} = (10 \cdot 9)^{2} = 810.$$

Спробуйте навести міркування, що відповідають такому поданню S: $S = (10 \cdot 10) \cdot (9 \cdot 9)$.

2.4. Комбінаторні задачі перелічення й переліку, метод рекурентних формул і твірних функцій

У процесі вивчення тих чи інших конфігурацій природно постає два питання – як (якими методами) краще: а) підрахувати кількість конфігурацій, тобто відповісти на запитання, скільки їх; б) установити вид конфігурацій, тобто відповісти на запитання, які вони?

Задачі комбінаторного аналізу, у яких ставлять питання про методи підрахунку кількості (встановлення виду) конфігурацій, називають **задачами перелічення (переліку)**.

Метод рекурентних формул

Сутність методу визначає його назва: рекурентний (від лат. *recurrentes* – той, що повертається) – той, що дає змогу дістати значення якоїсь величини за знайденими раніше іншими значеннями тієї самої величини.

Нехай a_1, a_2, …, a_n, … – числова послідовність (нумерація членів може починатися не з одиниці, а з нуля). Формулу, за допомогою якої можна обчислити будь-який член послідовності $a_n = f(n)$ через декілька попередніх (можливо, один), називають **рекурентною формулою**.

Наприклад: 1) рекурентна формула послідовності натуральних чисел: $a_n = a_{n-1} + 1$, $n = 1, 2, \ldots$, $a_0 = 0$ – початкова умова;

2) рекурентна формула послідовності Фібоначчі: $a_{n+2} = a_{n+1} + a_n$, $n = 0, 1, 2, \ldots$, $a_0 = a_1 = 1$ – початкові умови.

Теорема (рекурентні формули для кількості конфігурацій): для підрахунку кількості конфігурацій мають місце співвідношення:

1. $P_n = n P_{n-1}$, $n = 1, 2, \ldots$; $P_0 = 1$;
2. $A_n^m = A_{n-1}^m + m A_{n-1}^{m-1}$, $n, m = 1, 2, \ldots$; $A_n^0 = 1$, $A_n^m = 0 \quad \forall n < m$;
3. $C_n^m = C_{n-1}^m + C_{n-1}^{m-1}$, $n \geq m$; $C_n^0 = C_n^1 = 1$, $C_n^m = 0 \quad \forall n < m$;
4. $\overline{C}_n^m = \overline{C}_n^{m-1} + \overline{C}_{n-1}^m$, $m, n \in \mathbf{N}$; $\overline{C}_n^0 = 1$, $\overline{C}_n^1 = n$;
5. $\overline{A}_n^m = n \overline{A}_n^{m-1}$, $m, n \in \mathbf{N}$; $\overline{A}_n^0 = 1$.

Доведення проводять безпосередньою перевіркою кожного співвідношення, використовуючи відповідні формули для числа конфігурацій.

Доведемо, наприклад, другу формулу. З одного боку,

$$A_n^m = n(n-1)\ldots(n-m+1),$$

з іншого – маємо:

$$A_{n-1}^m + m A_{n-1}^{m-1} = (n-1)(n-2)\ldots(n-1-m+1) + m(n-1)(n-2)\ldots(n-1-m+2) =$$
$$= (n-1)(n-2)\ldots(n-m+1)(n-m+m) = n(n-1)\ldots(n-m+1) = A_n^m.$$

Підрахунок кількості конфігурацій за допомогою рекурентних співвідношень називають **методом рекурентних формул**. Такий підхід полегшує технічний бік використання формул для P_n, A_n^m, C_n^m, $\overline{A}_n^m$, $\overline{C}_n^m$, $P_m(k_1, k_2, \ldots, k_n)$ у випадку великих значень m і n. Чисельну реалізацію цього методу здійснюють на ЕОМ, для чого розроблено спеціальні пакети програм.

Метод твірних функцій розв'язання задач перелічення та переліку

Метод рекурентних співвідношень дає змогу розв'язувати численні комбінаторні задачі. Але в багатьох випадках такі співвідношення складно встановити, ще складніше – реалізувати. Цих труднощів часто вдається уникнути, якщо використати так звані твірні функції.

Зі шкільної (елементарної) алгебри відомо, що:

$$(a+x)^2 = a^2 + 2ax + x^2, \quad (a+x)^3 = a^3 + 3a^2x + 3ax^2 + x^3.$$

Запишемо ліві частини цих рівностей у вигляді добутку відповідної кількості співмножників і розкриємо дужки, причому будемо записувати всі множники в тому порядку, в якому вони зустрічаються:

$$(a+x)^2 = (a+x)(a+x) = aa + ax + xa + xx, \tag{2.4.1}$$

$$(a+x)^3 = (a+x)(a+x)(a+x) = aaa + aax + axa + axx + xaa + \\ + xax + xxa + xxx. \tag{2.4.2}$$

Видно, що до правої частини (2.4.1) входять усі розміщення з повтореннями із двох елементів $\{a, x\}$ по два в кожному розміщенні, а до правої частини (2.4.2) – розміщення з повтореннями із двох елементів по три.

Те ж саме буде і в загальному випадку:

$$(a+x)^n = \underbrace{(a+x)(a+x)\ldots(a+x)}_{n \text{ разів}}. \tag{2.4.3}$$

Після розкриття дужок в (2.4.3) дістанемо всілякі розміщення з повтореннями з двох елементів по n.

Як бачимо, у такий спосіб можна одночасно розв'язати як задачу перелічення, так і задачу переліку.

Зведемо тепер подібні члени відносно степенів x, тобто об'єднаємо еквівалентні за складом доданки. Кожний доданок, у який входить m елементів x $(0 \le m \le n)$ і $(n-m)$ елементів a, дає переставлення з повтореннями зі специфікацією $(k_1, k_2) = (m, n-m)$, а їхня кількість:

$$P_n(m, n-m) = \frac{n!}{m! \cdot (n-m)!} = C_n^m. \tag{2.4.4}$$

Звідси випливає, що після зведення подібних членів вираз $x^m a^{n-m}$ увійде до правої частини (2.4.3) з коефіцієнтом C_n^m:

$$(a+x)^n = C_n^0 a^n + C_n^1 a^{n-1}x + ... + C_n^m a^{n-m}x^m + ... + C_n^n x^n. \qquad (2.4.5)$$

Рівність (2.4.5) називають **формулою бінома Ньютона**. Якщо узяти $a=1$, то для фіксованого n матимемо:

$$(1+x)^n = C_n^0 + C_n^1 x + C_n^2 x^2 + ... + C_n^m x^m + ... + C_n^n x^n, \qquad (2.4.6)$$

тобто многочлен, коефіцієнти якого при x^m співпадають із членами послідовності $a_m = C_n^m$, $m = 0, 1, 2, ..., n$.

Функцію (многочлен) $(1+x)^n$ називають **твірною функцією** (**енумератором**) для послідовності C_n^m, $m = 0, 1, 2, ..., n$.

Дамо тепер означення твірної функції для довільної числової послідовності a_0, a_1, …, a_m, …, або $\{a_m\}_0^\infty$.

Многочлен

$$P(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + ... + a_m x^m + ... = \sum_{m=0}^{\infty} a_m x^m, \qquad (2.4.7)$$

коефіцієнти якого при степенях x^m співпадають із членами послідовності a_m, $m = 0, 1, 2, ...$, називають **поліноміальною твірною функцією** (**поліноміальним енумератором**) для послідовності $\{a_m\}_0^\infty$.

У математичному аналізі многочлени з нескінченною кількістю членів називають **рядами**. Якщо розглядувана послідовність скінченна $\{a_0, a_1, ..., a_m\}$, то отримуємо звичайний многочлен – скінченний ряд. Прикладом ряду є сума членів нескінченно спадної геометричної прогресії з першим членом, що дорівнює одиниці, і знаменником $|x| < 1$:

$$P(x) = 1 + x + x^2 + ... + x^m + ... = \frac{1}{1-x}. \qquad (2.4.8)$$

Отже, многочлен $P(x) = \dfrac{1}{1-x}$ є поліноміальним енумератором послідовності 1, 1, …, 1, ..., а

$$P(x)=\frac{1}{(1-x)^2}=(1+x+...+x^m+...)^2=1+2x+3x^2+...+(m+1)\,x^m+...$$ –

твірною функцією послідовності натуральних чисел $a_m=m+1,\ m=0,1,2,...$.

Ряд виду

$$P(x)=a_0+a_1\frac{x}{1!}+a_2\frac{x^2}{2!}+...+a_m\frac{x^m}{m!}+...=\sum_{m=0}^{\infty}a_m\frac{x^m}{m!}, \qquad (2.4.9)$$

коефіцієнти якого при $\frac{x^m}{m!}$ співпадають із членами послідовності a_m, $m=0,1,2,...$, називають **експоненціальною твірною функцією** (**експоненціальним енумератором**) для послідовності $\{a_m\}_0^{\infty}$.

Термін "експоненціальний" обумовлено тим, що показникова функція e^x (експонента) у вигляді ряду має подання:

$$e^x=1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+...+\frac{x^m}{m!}+...=\sum_{m=0}^{\infty}\frac{x^m}{m!}. \qquad (2.4.10)$$

Отже, e^x – експоненціальний енумератор послідовності $1,1,...,1,...$. Якщо ж (2.4.10) розглядати як поліноміальний енумератор, то він відповідає послідовності:

$$\frac{1}{0!},\ \frac{1}{1!},\ \frac{1}{2!},\ ...,\ \frac{1}{m!},\ ....$$

Для n-го степеня функції e^x маємо:

$$(e^x)^n=e^{nx}=\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(nx)^m}{m!}=\sum_{m=0}^{\infty}n^m\frac{x^m}{m!}=\sum_{m=0}^{\infty}\overline{A}_n^m\frac{x^m}{m!}, \qquad (2.4.11)$$

тобто функція e^{nx} є експоненціальним енумератором для послідовності кількості розміщень із повтореннями з n елементів по m, де n – фіксоване, а на m обмеження не накладають: $m=0,1,2,...$.

Розв'язання задач перелічення та переліку за допомогою енумераторів називають **методом твірних функцій**.

Насамкінець наведемо таблицю енумераторів для послідовностей кількості основних комбінаторних конфігурацій (табл. 2.4.1), у якій позначено: $\mathbf{N}_0 = \mathbf{N} \bigcup \{0\}$, Π – знак (символ) добутку.

Таблиця 2.4.1

Таблиця енумераторів

№ п/п	Кількість конфігурацій	Енумератор $P(x)$
1	C_n^m; $m, n \in \mathbf{N}_0$; $0 \le m \le n$	$P(x) = (1+x)^n = (1+x)(1+x) \dots (1+x) = \sum_{m=0}^{n} C_n^m x^m$
2	$\overline{C}_n^m$; $m, n \in \mathbf{N}_0$	$P(x) = \dfrac{1}{(1-x)^n} = (1+x+\ldots+x^m+\ldots)^n = \sum_{m=0}^{\infty} \overline{C}_n^m x^m$
3	A_n^m; $m, n \in \mathbf{N}_0$; $0 \le m \le n$	$P(x) = (1+x)^n = \sum_{m=0}^{n} \dfrac{n!}{m!(n-m)!} x^m = \sum_{m=0}^{n} A_n^m \dfrac{x^m}{m!}$
4	$\overline{A}_n^m$; $m, n \in \mathbf{N}_0$	$P(x) = e^{nx} = \sum_{m=0}^{\infty} \dfrac{n^m}{m!} x^m = \sum_{m=0}^{\infty} \overline{A}_n^m \dfrac{x^m}{m!}$
5	$b_k = P_k(q_1, q_2, \ldots, q_n)$; $k = 0, 1, \ldots, m \in \mathbf{N}_0$, $q_i \le k_i \in \mathbf{N}_0$, $i = \overline{1, n}$, $q_1 + q_2 + \ldots + q_n = k$	$P(x) = \left(1 + x + \dfrac{x^2}{2!} + \ldots + \dfrac{x^{k_1}}{k_1!}\right)\left(1 + x + \ldots + \dfrac{x^{k_2}}{k_2!}\right) \cdot \ldots \times$ $\times \left(1 + x + \ldots + \dfrac{x^{k_n}}{k_n!}\right) = \prod_{i=1}^{n} \sum_{j=0}^{k_i} \dfrac{x^j}{j!} = \sum_{k=0}^{m} b_k \dfrac{x^k}{k!}$

2.5. Задача розбиття натуральних чисел

Розбиттям натурального числа n називають всяку скінченну незростаючу послідовність n_1, n_2, …, n_m натуральних чисел, сума членів якої дорівнює n, тобто

$$n = n_1 + n_2 + \ldots + n_m = \sum_{i=1}^{m} n_i, \quad 1 \le m \le n, \tag{2.5.1}$$

а числа n_i, $i = \overline{1, m}$, називають **частинами** розбиття $(n_i \in \{1, 2, \ldots, n\})$; n – **характеристикою** розбиття, m – **кількістю частин** розбиття.

Розбиття $n \in \mathbf{N}$ позначають кортежем $(n_1, n_2, ..., n_m)$ або коротшим символічним записом: $(1^{t_1} 2^{t_2} ... r^{t_r})$, де $1, 2, ..., r$ – частини розбиття $(1 \le r \le n)$, а числа t_i, $i = \overline{1, r}$, указують, скільки тих чи інших однакових частин містить розбиття; t_i, які дорівнюють одиниці, не пишуть.

Легко здогадатися, що

$$\sum_{i=1}^{r} t_i = m, \quad \sum_{i=1}^{r} i \cdot t_i = n. \tag{2.5.2}$$

Наприклад, для числа $n = 20$ можна вказати таке розбиття на шість частин: $(5, 5, 5, 2, 2, 1)$, або $(1\,2^2\,5^3)$.

Кількість усіх послідовностей $\{n_i\}_1^m$, які дають розбиття n на частини, називають **функцією розбиття**, або **денумератором**, і позначають символом $p(n)$, або $D(n)$. Домовились тлумачити порожню послідовність як розбиття нуля і вважати $p(0) = 1$. Також вважають, що $p(n) = 0$, якщо $n < 0$, або коли $n < m$.

Нижче наведено п'ять перших значень функції розбиття $p(n)$ і самі розбиття:

$p(1) = 1$: $1 = (1)$;

$p(2) = 2$: $2 = (2)$, $1 + 1 = (1^2)$;

$p(3) = 3$: $3 = (3)$, $2 + 1 = (12)$, $1 + 1 + 1 = (1^3)$;

$p(4) = 5$: $4 = (4)$, $3 + 1 = (13)$, $2 + 2 = (2^2)$, $2 + 1 + 1 = (1^2\,2)$,
$1 + 1 + 1 + 1 = (1^4)$;

$p(5) = 7$: $5 = (5)$, $4 + 1 = (14)$, $3 + 2 = (23)$, $3 + 1 + 1 = (1^2\,3)$,
$2 + 2 + 1 = (12^2)$, $2 + 1 + 1 + 1 = (1^3\,2)$, $1 + 1 + 1 + 1 + 1 = (1^5)$.

Значення функції $p(n)$ швидко зростають: $p(10) = 42$, $p(20) = 627$, $p(50) = 204226$, $p(100) = 190569292$.

Задача знаходження $p(n)$ є задачею перелічення, а встановлення виду частин – задачею переліку.

У багатьох випадках розглядають не всі розбиття, а лише ті, які задовольняють певні умови: розбиття з парними (непарними) частинами, розбиття з парною (непарною) кількістю частин, розбиття з різними частинами тощо.

Для підрахунку $p(n)$ теж використовують рекурентні співвідношення і твірні функції.

Рекурентні формули Ейлера (Леонард Ейлер (1707 – 1782) – видатний математик, механік, фізик і астроном, академік Петербурзької академії наук протягом 24 років):

1) якщо на частини розбиття ніякі обмеження не накладають, то:

$$p(n) = \sum_{m\geq 1} (-1)^{m-1} p(n - \frac{1}{2} m\,(3m \mp 1)) = p(n-1) + p(n-2) -$$

$$- p(n-5) - p(n-7) + ... + (-1)^{m-1} p(n - \frac{1}{2} m\,(3m-1)) +$$

$$+ (-1)^{m-1} p(n - \frac{1}{2} m\,(3m+1)) + ...; \qquad (2.5.3)$$

2) якщо n розбивають на k частин, то

$$p(n,k) = p(n-k,k) + p(n-k,k-1) + ... + p(n-k,1) =$$

$$= \sum_{i=0}^{k-1} p(n-k,k-i) \qquad (2.5.4)$$

за умов, що $p(n,k) = 0$ для $n < k$, $p(n,n) = p(n,1) = 1$.

Наприклад, згідно з формулами (2.5.3), (2.5.4), дістаємо:

$$p(6) = p(5) + p(4) - p(1) = 7 + 5 - 1 = 11;$$

$$p(6,2) = p(4,2) + p(4,1) = p(2,2) + p(2,1) + 1 = 1 + 1 + 1 = 3,$$

а самі розбиття мають вигляд:

$$5 + 1 = (15),\ 4 + 2 = (24),\ 3 + 3 = (3^2);$$

3) якщо всі частини розбиття обмежені числом k ($n_i \leq k$, $i = \overline{1,m}$), тобто всі числа n_i перебувають серед чисел $1, 2, ..., k$, то

$$p(n;\overline{1,k}) = p(n-k;\overline{1,k}) + p(n;\overline{1,k-1}). \qquad (2.5.5)$$

Застосуємо, *наприклад*, формулу (2.5.5) для $n=5$, $k=3$:

$$p(5;\overline{1,3}) = p(5-3;\overline{1,3}) + p(5;1,2),$$

де

$$p(2;\overline{1,3}) = p(2-3;\overline{1,3}) + p(2;1,2) = 0 + p(2-2;1,2) + p(2;1) = 0+1+1=2;$$
$$p(5;1,2) = p(3;1,2) + p(5;1) = p(3-2;1,2) + p(3;1) + 1 = 1+1+1 = 3.$$

Таким чином, $p(5;\overline{1,3}) = 2+3=5$.

Твірні функції (енумератори) **денумераторів**:

1) якщо обмеження на частини не накладають, то

$$P(x) = \prod_{m=1}^{\infty}(1-x^m)^{-1} = \prod_{m=1}^{\infty}\frac{1}{1-x^m} = \frac{1}{1-x}\cdot\frac{1}{1-x^2}\cdot\frac{1}{1-x^3}\cdot\ldots =$$

$$=(1+x+x^2+\ldots)(1+x^2+x^4+\ldots)\cdot\ldots\cdot(1+x^m+x^{2m}+\ldots)\cdot\ldots = \sum_{n=0}^{\infty}p(n)x^n; \quad (2.5.6)$$

2) якщо всі частини розбиття різні $(n_1 \neq n_2 \neq \ldots \neq n_m)$ із денумератором $p_{\neq}(n)$, то

$$P(x) = \prod_{m=1}^{\infty}(1+x^m) = (1+x)(1+x^2)\cdot\ldots\cdot(1+x^m)\cdot\ldots = \sum_{n=0}^{\infty}p_{\neq}(n)\,x^n; \quad (2.5.7)$$

3) якщо частини розбиття парні (непарні) з денумератором $p_{\text{п}}(2n)$ $(p_{\text{н}}(n))$, то

$$P(x) = \prod_{m=1}^{\infty}(1-x^{2m})^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty}p_{\text{п}}(2n)\,x^{2n} \quad (2.5.8)$$

$$\left(P(x) = \prod_{m=1}^{\infty}(1-x^{2m-1})^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty}p_{\text{н}}(n)x^n\right); \quad (2.5.9)$$

4) якщо всі частини розбиття обмежені числом k, то

$$P(x) = \prod_{m=1}^{k}(1-x^m)^{-1} = \prod_{m=1}^{k}\frac{1}{1-x^m} = \sum_{n=0}^{\infty}p(n;\overline{1,k})\,x^n. \quad (2.5.10)$$

Зауваження:

1) якщо дослідника цікавлять не всі частини розбиття, які лежать у межах від 1 до k, а лише деякі з них, то у формулі (2.5.10) беруть тільки співмножники з відповідними показниками степеня $m \in \{1, 2, ..., k\}$;

2) у разі використання формул (2.5.6) – (2.5.9) на практиці (коли задано певну характеристику розбиття n) беруть лише співмножники, добуток яких забезпечує наявність степенів від x^0 до x^n (з урахуванням, можливо, додаткових вимог до виду частин розбиття, як описано вище).

Задача 2.5.1. Знайдіть кількість способів, якими можна: а) дістати 8 копійок монетами по 1, 2, 5 копійок; б) розбити число 8 на різні частини.

Розв'язання:

а) застосуємо формулу (2.5.10) для $m = 1, 2, 5$, тоді:

$$P(x) = \frac{1}{1-x} \cdot \frac{1}{1-x^2} \cdot \frac{1}{1-x^5} = (1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5 + x^6 + x^7 + x^8 + ...) \times$$
$$\times (1 + x^2 + x^4 + x^6 + x^8 + ...)(1 + x^5 + x^{10} + ...).$$

Коефіцієнт при x^8 дорівнює 7 (*переконайтеся*), отже:

$$p(8; 1, 2, 5) = 7: \ (125),\ (1^3 5),\ (2^4),\ (1^2 2^3),\ (1^4 2^2),\ (1^6 2),\ (1^8);$$

б) якщо число 8 розбивати на різні частини, то беремо (див. формулу (2.5.7)):

$$P(x) = (1 + x)(1 + x^2) \cdot ... \cdot (1 + x^8).$$

Тоді маємо $p_{\neq}(8) = 2$, адже коефіцієнт при x^8 дорівнює 2 (*переконайтеся*). Відповідні розбиття: (125), (134).

Для розв'язання задачі переліку всіх видів розбиття існує декілька алгоритмів. Згідно з одним із них, для переходу від розбиття $(n_1, n_2, ..., n_m)$ до наступного розбиття дотримуються правил:

1) якщо $n_m > 1$, то наступне розбиття $(n_1, n_2, ..., n_{m-1} - 1, 1)$;

2) якщо $n_{m-k} = c > 1$, а $n_{m-k+1} = n_{m-k+2} = ... = n_m = 1$, то наступне розбиття отримуємо заміною частин n_{m-k}, …, n_m на частини $c-1$, $c-1$, …, $c-1$, d, де $0 < d \leq c-1$, а кількість t однакових частин $(c-1)$ визначають співвідношенням: $t(c-1) + d = c + k = n_{m-k} + ... + n_m$.

Наприклад, для $n = 21$ маємо: (21), $(20,1)$, $(19,1,1)$, $(18,1,1,1)$, $(17,1,1,1,1)$, …, $(11,1,1,1,1,1,1,1,1,1,1)$, $(10,10,1)$, …, $(1,1,\ldots,1)$.

Розв'яжіть за допомогою запропонованого алгоритму задачу переліку для $n = 8$.

Методи комбінаторного аналізу широко використовують у теорії ймовірностей, теорії графів, математичній логіці та багатьох інших розділах математики. Вони є потужним знаряддям під час розв'язання практичних задач перелічення, переліку й розбиття множин об'єктів різноманітної природи.

2.6. Задачі та вправи до теми 2

Зразки розв'язання типових задач

1. Скільки п'ятизначних чисел можна скласти із цифр 1, 2, 3, 4, 5, якщо цифри утвореного числа не повторюються?

Розв'язання:

За умовою задачі визначаємо основну множину – множину A, – з елементів якої утворюють комбінаторні конфігурації, та її потужність $P(A)$: $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ – множина заданих цифр; $P(A) = |A| = 5$. Кожне утворене п'ятизначне число є 5-елементним кортежем (оскільки порядок цифр є суттєвим), елементи якого не повторюються (адже за умовою цифри в ньому різні) і який містить усі елементи множини A, тобто є переставленням без повторень із п'яти елементів.

Кількість таких переставлень обчислюємо за формулою (2.2.1):

$$P_5 = 5! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 = 120.$$

2. Наукове товариство налічує 25 членів. Треба обрати президента товариства, віцепрезидента, ученого секретаря та казначея. Скількома способами можна обрати керівництво товариства, якщо кожен його член може обіймати лише одну посаду?

Розв'язання:

Мовою комбінаторного аналізу можна сказати, що задача полягає у знаходженні кількості способів утворення 4-елементних кортежів із 25-елементної множини A членів наукового товариства, оскільки має суттєве значення і те, кого буде обрано у керівництво товариства, і те, які посади обійматимуть обрані. Таким чином, розглядувані комбінаторні конфігурації – це розміщення без повторень (адже кожен член товариства може обіймати лише одну посаду).

Отже, кількість шуканих способів дорівнює (див. формулу (2.2.2)):

$$A_{25}^{4}=\frac{25!}{(25-4)!}=25\cdot 24\cdot 23\cdot 22=303\,600.$$

Такий самий результат дістанемо, якщо діяти безпосередньо за правилом добутку. (*Наведіть* самостійно відповідні міркування.)

3. Для проведення тестування з математики необхідно створити комісію з трьох або чотирьох викладачів кафедри. Скільки різних складів комісій можна запропонувати, якщо на кафедрі працюють п'ятнадцять викладачів?

Розв'язання:

За основну множину A в цій задачі маємо множину викладачів кафедри; $P(A)=15$. Кількість способів сформувати комісію із трьох викладачів дорівнює кількості 3-елементних підмножин, утворених з елементів множини A (порядок елементів не важливий, оскільки не суттєво, у якій послідовності було обрано викладачів у комісію), тобто кількості комбінацій без повторень із п'ятнадцяти елементів по три: C_{15}^{3}. Аналогічно знаходимо кількість способів формування комісії з чотирьох викладачів: C_{15}^{4}.

Загальну кількість S складів комісій із трьох або чотирьох викладачів знаходимо за правилом суми з урахуванням формули (2.2.3):

$$S=C_{15}^{3}+C_{15}^{4}=\frac{15!}{3!\cdot 12!}+\frac{15!}{4!\cdot 11!}=455+1365=1820.$$

4. Скільки різних "слів" (у тому числі беззмістовних) можна здобути, переставляючи букви у слові "статистика".

Розв'язання:

Установлюємо, що основною множиною в цій задачі є множина типів (сортів, різновидів) використаних букв: $A=\{\text{с},\text{т},\text{а},\text{и},\text{к}\}$; $P(A)=5$. Усі "слова", утворені переставленням букв у слові "статистика", є 10-елементними кортежами (адже зміна порядку розташування букв породжує нове "слово") і мають однаковий склад елементів (дві букви "с", три – "т", дві – "а", дві – "и" та одну букву "к"). Отже, розглядають усілякі переставлення з повтореннями із п'яти елементів множини A по десять зі специфікацією $(2,3,2,2,1)$, кількість яких знаходимо за формулою (2.2.5):

$$P_{10}(2,3,2,2,1)=\frac{10!}{2!\cdot 3!\cdot 2!\cdot 2!\cdot 1!}=75\,600.$$

5. Скільки існує способів відповісти на три запитання вікторини, якщо на кожне запитання можна відповісти "так" чи "ні"?

Розв'язання:

Визначаємо множину A та її потужність: $A=\{\text{так},\text{ні}\}$ – множина варіантів відповідей. Для зручності позначимо: відповідь "так" через 1, а "ні" – через 0, тоді $A=\{1,0\}$; $P(A)=2$.

Наведемо деякі варіанти відповідей на запитання вікторини:

$1,\ 0,\ 0$ – на перше запитання отримано відповідь "так", на друге і третє – "ні";

$0,\ 1,\ 1$ – на перше запитання отримано відповідь "ні", на друге і третє – "так";

$1,\ 1,\ 1$ ($0,\ 0,\ 0$) – на всі запитання отримано відповідь "так" ("ні").

Таким чином, робимо висновок, що кожний варіант відповідей на запитання вікторини є 3-елементним кортежем (порядок розташування елементів визначає позитивну або негативну відповідь на певне запитання), елементи якого можуть повторюватися (адже на декілька запитань можна дати однакову відповідь) і який може містити не всі елементи основної множини A (наприклад: $1,\ 1,\ 1$), тобто є розміщенням із повтореннями з двох елементів по три.

Кількість таких розміщень обчислюємо за формулою (2.2.6):

$$\overline{A}_2^3=2^3=8.$$

6. Підприємство виготовляє за добу 40 однотипних виробів. Скількома способами можна розподілити вироби між трьома замовниками так, щоб кожному дісталося не менш як десять виробів?

Розв'язання:

Оскільки за умовою задачі кожен замовник має отримати принаймні 10 виробів, то й почнемо з того, що виділимо кожному замовникові по 10 виробів. Після цього залишається $40-3\cdot 10=10$ виробів, які можна вже розподіляти довільним чином. Тобто приходимо до задачі розподілу 10

виробів між трьома замовниками, причому може трапитися так, що одному (або навіть двом) учасникам розподілу нічого не дістанеться.

Розташуємо подумки всі вироби в рядок і для розподілу їх між трьома претендентами застосуємо дві перегородки: першому замовникові віддаємо вироби, розташовані до першої перегородки, другому – ті вироби, які розташовані між першою і другою перегородками, а третьому – ті вироби, які розташовані після другої перегородки. Для формалізації запропонованого можна закодувати вироби одиницями, а перегородки – нулями, і розглядати 12-кортежі, складені з десяти одиниць і двох нулів, наприклад, $(1\ 1\ 1\ 1\ 1\ 0\ 1\ 1\ 1\ 0\ 1\ 1)$. Переставляючи довільним чином десять виробів (одиниць) і дві перегородки (нулі), ми дістанемо всі варіанти розподілу: кожному переставленню з повтореннями із елементів множини $A=\{1,0\}$ зі специфікацією $(k_1,k_2)=(10,2)$ відповідає певний спосіб розподілу, і навпаки.

Таким чином, загальна кількість способів розподілу дорівнює (див. формулу (2.2.5)):

$$P_{12}(10,2)=\frac{12!}{10!\,2!}=66.$$

Узагальнюючи розглянуте, можна *стверджувати*, що:

а) n однакових предметів можна розподілити між k особами $P_{n+k-1}(n,k-1)=C_{n+k-1}^{n}=C_{n+k-1}^{k-1}$ способами;

б) якщо кожний із k учасників має отримати не менш як d предметів, то задача розв'язується $C_{n-k\,d+k-1}^{k-1}=C_{n-k\,(d-1)-1}^{k-1}$ способами.

7. Є п'ять крісел: 1) різного виду; 2) однакового виду. Скількома способами можна розставити ці крісла уздовж трьох стін за умови, що всі крісла можна поставити уздовж однієї стіни і не важливо, як стоятимуть крісла: поруч чи на певній відстані одне від одного?

Розв'язання:

Введемо позначення: $C=\{c_1,c_2,c_3\}$ – множина стін (основна множина), $P(C)=3$; $K=\{k_1,k_2,k_3,k_4,k_5\}$ – множина крісел, $P(K)=5$.

Для встановлення типу комбінаторної конфігурації наведемо деякі способи розташування крісел уздовж стін c_1, c_2, c_3:

c_1, c_1, c_1, c_1 – усі крісла стоять уздовж c_1;

c_1, c_3, c_1, c_2 – перше і третє крісла стоять уздовж c_1, друге – уздовж c_3, четверте – уздовж c_2;

c_3, c_2 c_2, c_1 – перше крісло стоїть уздовж c_3, друге і третє – уздовж c_2, четверте – уздовж c_1.

1. Складаються 5-кортежі, адже крісла (за умовою) різні. Кожний елемент k_j, $j=\overline{1,n}$ можна вибрати трьома способами. Отже, загальна кількість способів дорівнює:

$$S=\overline{A}_n^m=\overline{A}_3^5=3\cdot3\cdot3\cdot3\cdot3=243.$$

2. Оскільки крісла однакові (за умовою), то порядок їх розташування не має суттєвого значення. Отже, нам потрібна кількість можливих складів кортежів:

$$S=\overline{C}_n^m=\overline{C}_3^5=C_7^5=C_7^2=\frac{7\cdot6}{1\cdot2}=21.$$

Задачі та вправи для самостійного розв'язання

За умовами задач, поданих у текстовому вигляді, підрахуйте кількість відповідних КК без повторень або з повтореннями.

8. Скільки існує способів розставити п'ять книг різних авторів на одній полиці?

9. Скільки існує способів розмістити сім картин на одній стіні, щоб дві вибрані картини не висіли поруч?

10. Протягом чотирьох тижнів студенти складають чотири іспити, із них два – з математики. Скількома способами можна розподілити іспити між тижнями так, щоб іспити з математики не йшли підряд?

11. Скільки різних "слів" можна отримати, переставляючи літери у слові "математика"?

12. Скільки існує способів забудови вулиці десятьма будинками, серед яких три будинки зводять за проєктом A, п'ять будинків – за проєктом B і два будинки – за проєктом C?

13. Скількома способами можна скласти п'ятизначне число, до складу якого входять дві двійки і три шістки?

14. Скільки існує способів розташувати чотири різні конденсатори на телевізійній платі?

15. Скількома способами можна позначити вершини чотирикутника за допомогою літер A, B, C, D?

16. Міська рада закупила сім сортів квітів для озеленення міста. Було вирішено оформляти клумби у вигляді семи кіл, що мають один центр і різні радіуси. Скільки різних клумб можна зробити?

17. У мами 2 яблука, 3 груші і 2 апельсини. Щодня протягом тижня вона видає дитині по одному фрукту. Скількома способами це можна зробити?

18. Скільки різних "слів" можна отримати, переставляючи літери у слові "гіпотенуза"?

19. Скількома способами можна розкласти в ряд чотири чорні, дві білі та три червоні кулі?

20. Скількома способами можна зафарбувати шість клітинок так, щоб три з них були зафарбовані червоним кольором, а решта клітинок – білим, чорним, зеленим (кожна своїм кольором)?

21. До банкомату одночасно підійшли 7 осіб. Скількома способами вони можуть вишикуватися в чергу?

22. Скількома способами можна впорядкувати числову множину $\{1,2,3,4,5,6\}$ так, щоб кожне парне число мало парний номер?

23. Скількома способами тренер може вибрати із дванадцяти бігунів чотирьох для участі в естафеті на 100, 200, 300 і 400 метрів?

24. Скількома способами можна розселити сім студентів у трьох кімнатах: одномісній, двомісній та чотиримісній?

25. Для нагородження учасників студентської олімпіади було виділено вісім примірників однієї книги, дев'ять – другої та тринадцять – третьої. Скільки існує способів розподілити ці примірники між 30 учасниками олімпіади, якщо кожний учасник отримує однин примірник?

26. Скількома способами можна записати число 30 у вигляді добутку його простих дільників?

27. Скількома способами можна скласти список із десяти студентів?

28. Скількома способами можна впорядкувати множину $\{1,2,3,4,5\}$ так, щоб числа 1, 2, 3 стояли поруч у порядку зростання?

29. Є шість однакових томів Пушкіна, п'ять – Лермонтова і чотири – Єсеніна. Скількома способами їх можна розставити в ряд?

30. У деякому поселенні мешкають 1000 чоловік. Покажіть, що принаймні двоє з них мають однакові ініціали.

31 Кожну клітинку квадратної таблиці 4×4 можна пофарбувати в чорний або білий колір. Скільки є різних варіантів розфарбовувань цієї таблиці?

32. Скільки треба мати словників, щоб можна було безпосередньо робити переклади з будь-якої з п'яти мов: російської, української, англійської, німецької, французької на будь-яку іншу з них?

33. Скількома способами можна скласти трикольоровий смугастий прапор, якщо є тканина п'яти різних кольорів і одна зі смуг прапора має бути червоною?

34. На залізничній станції є сім світлофорів. Скільки різних сигналів можна подати за їх допомогою, якщо кожний світлофор подає три сигнали – червоний, жовтий, зелений?

35. Є вісім точок площини, із яких жодні три не лежать на одній прямій. Скільки можна побудувати різних векторів із початком і кінцем у будь-яких двох із цих точок?

36. Є десять точок площини, із яких жодні три не лежать на одній прямій. Скільки різних променів із початком у цих точках можна провести через будь-яку іншу з цих точок?

37. У пасажирському поїзді дев'ять вагонів. Скількома способами можна розсадити в поїзді чотири особи, за умови, що всі вони мають їхати в різних вагонах?

Запитання для самодіагностики засвоєння матеріалу теми 2

Відповіді на всі запитання сформулюйте словесно, запишіть у символьній формі, обґрунтуйте (на підставі означень, теорем, правил, формул тощо), наведіть відповідні конкретні приклади.

1. Що називають комбінаторним аналізом (комбінаторикою, теорією сполук)? У чому полягають основні задачі комбінаторного аналізу?

2. Як формулюють основні правила комбінаторики: а) добутку; б) суми; в) включень та виключень? Як виглядає їх символьний запис?

3. Що називають комбінаторною конфігурацією (сполукою)?

4. Яку комбінаторну конфігурацію називають: переставленням без повторень із n елементів, розміщенням без повторень із n елементів по m $(m<n)$, комбінацією без повторень із n елементів по m $(m<n)$?

5. За якою формулою обчислюють кількість усіх комбінаторних конфігурацій без повторень кожного типу?

6. Що розуміють під кортежем із заданою специфікацією?

7. Що розуміють під класом еквівалентності на множині m-елементних кортежів?

8. Яку комбінаторну конфігурацію називають: переставленням із повтореннями з n елементів по m, розміщенням із повтореннями з n елементів по m, комбінацією з повтореннями з n елементів по m?

9. За якої специфікації переставлення з повтореннями перетворюються на переставлення без повторень?

10. За якою формулою обчислюють кількість усіх комбінаторних конфігурацій із повтореннями кожного типу?

11. У чому полягає сутність моделі "урн та куль" для інтерпретації (моделювання) комбінаторних конфігурацій?

12. У чому полягає принципова відмінність між постановками задач перелічення і переліку в комбінаторному аналізі?

13. Який вигляд мають рекурентні формули для підрахунку кількості основних конфігурацій – формули для P_n, A_n^m, C_n^m, $\overline{A}_n^m$, $\overline{C}_n^m$.

14. Що називають твірною функцією (енумератором) числової послідовності? Що називають енумератором для послідовності C_n^m, $m=\overline{0,n}$?

15. Які нумератори називають поліноміальними, а які – експоненціальними?

16. Як виглядають енумератори для послідовностей кількості основних комбінаторних конфігурацій?

17. У чому полягає задача розбиття натуральних чисел? Що називають функцією розбиття, або денумератором?

18. Який вигляд має рекурентна формула Ейлера для визначення функції розбиття (денумератора) у випадку: а) коли на частини розбиття жодних обмежень не накладають; б) коли всі частини розбиття обмежені певним числом k або якщо число n розбивають на k частин?

19. Який вигляд мають твірні функції (енумератори) денумераторів для випадків, коли: а) обмеження на частини розбиття не накладають; б) усі частини розбиття обмежені певним числом; в) усі частини розбиття різні; г) частини розбиття парні (непарні)?

Рекомендована література до теми 2: [4; 9; 11; 14; 15; 18].

3. Теорія графів

Одне з основних завдань теорії в будь-якій
галузі знань – знайти позицію,
з якої об'єкт видно в граничній простоті.

Д. В. Гіббс

Мета: навчити майбутніх фахівців умінню описувати дискретні процеси та явища природи мовою теорії графів.

Компетентності, які набуває студент після вивчення теми:

знання: осмислення та засвоєння основ теорії графів;

уміння: здатність виконувати аналіз та синтез дискретних об'єктів та процесів, використовуючи елементи теорії графів;

комунікації: презентація з метою передавання інформації щодо результатів аналізу інформаційних систем засобами теорії графів;

автономність і відповідальність: здатність самостійно розв'язувати задачі переліку та перелічення, оптимізаційні задачі на графах і відповідати за результати своєї діяльності.

Основні питання теми:

3.1. Неорієнтовані графи: означення основних понять, способи задання.

3.2. Маршрути. Задача знаходження ланцюга найменшої довжини.

3.3. Дерева та ліс. Задача побудови економічного дерева.

3.4. Орієнтовані графи: означення основних понять, способи задання.

3.5. Сіткові графіки

3.6. Транспортні мережі

Ключові терміни: неорієнтований граф, вершина, ребро, матриця інцидентностей, матриця суміжності вершин, маршрут, ланцюг, цикл, зв'язний (незв'язний) граф, компоненти зв'язності, дерево, ліс, орієнтований граф (мультиграф, псевдограф), шлях, контур, орграф сильнозв'язний (слабкозв'язний, односторонньозв'язний, порожній, тривіальний), матриця досяжності (контрдосяжності), граф конденсації, транспортна мережа, дуговий потік, пропускна спроможність, потік (повний, максимальний), мінімальний розріз, алгоритм Форда – Фалкерсона.

3.1. Неорієнтовані графи: означення основних понять, способи задання

Неорієнтованим графом (НГ), або просто **графом**, називають пару $G=(X,U)$, де $X=\{x_1, x_2, ..., x_n\}$ – непорожня скінченна множина деяких об'єктів (елементів), $U=\{u_1, u_2, ..., u_m\}$ – множина невпорядкованих пар, складених з елементів множини X $(u_j=\{x_i, x_k\}$; $i,k \in I_x=\{1,2,...,n\}$, $j \in I_u=\{1,2,...,m\}$; I_x, I_u – множини індексів).

Об'єкти множини X (U) називають **вершинами** (**ребрами**) графа. Вершини x_i, x_k, які визначають ребро $u_j=\{x_i, x_k\}$, називають **граничними вершинами** ребра, або **кінцями** ребра.

Якщо вершина x_i є кінцем ребра u_j, то кажуть, що вони **інцидентні**: вершина x_i інцидентна ребру u_j, і ребро u_j інцидентне вершині x_i. Два ребра називають **суміжними** (**сусідніми**), якщо вони інцидентні одній і тій самій вершині. Дві вершини називають **суміжними** (**сусідніми**), якщо вони інцидентні одному й тому ж ребру. Вершину, не інцидентну жодному ребру, називають **ізольованою**, а вершину, інцидентну тільки одному ребру, – **кінцевою**. Ребро, кінці якого співпадають, називають **петлею**. Ребра, які мають спільні граничні вершини, називають **кратними**, або **паралельними**.

Залежно від того, у якому вигляді подають пару (X,U), є різні *способи задання* графів.

Теоретико-множинний спосіб – це коли дають перелік (список) ребер графа $u_j=\{x_i, x_k\}$; $i,k \in I_x$, $j \in I_u$, до якого додають список ізольованих вершин.

Геометричне задання графів: кожній вершині графа відповідає точка із $\mathbf{R}^2$ чи $\mathbf{R}^3$, кожному ребру – прямолінійний або криволінійний відрізок, що з'єднує інцидентні ребру вершини. Як правило, намагаються зобразити граф так, щоб його ребра перетиналися тільки в їхніх граничних вершинах, – це полегшує аналіз графа з точки зору встановлення тих чи інших його властивостей.

Матричне зображення графів. Матрицю $A=[a_{ij}]_{n\times m}$ розміру $n\times m$, де $a_{ij}=1$, якщо вершина x_i інцидентна ребру u_j $(x_i \in u_j)$, і $a_{ij} = 0$, якщо вершина x_i не інцидентна ребру u_j $(x_i \notin u_j)$, називають **матрицею інцидентностей** графа G (з n вершинами і m ребрами). Кожний стовпець такої матриці містить два ненульових елементи (якщо ребро – не петля). Матриця інцидентностей описує граф однозначно.

Квадратну матрицю $B = [b_{ij}]_{n \times n}$ порядку n, де b_{ij} – кількість ребер із вершинами x_i, x_j; $i, j \in I_x$, називають **матрицею суміжності вершин** графа. Матриця B є симетричною $(b_{ij} = b_{ji})$ і також однозначно описує неорієнтований граф.

Приклад задання графа $G = (X, U) = (\{x_i\}_1^5, \{u_j\}_1^6)$ різними способами:

а) теоретико-множинне задання графа:

$$G = (u_1 = \{x_1, x_2\},\ u_2 = \{x_2, x_2\},\ u_3 = \{x_2, x_3\},\ u_4 = \{x_3, x_4\},\ u_5 = \{x_3, x_4\},\ u_6 = \{x_1, x_3\};\ x_5);$$

б) геометричне зображення цього ж графа подано на рис. 3.1.1:

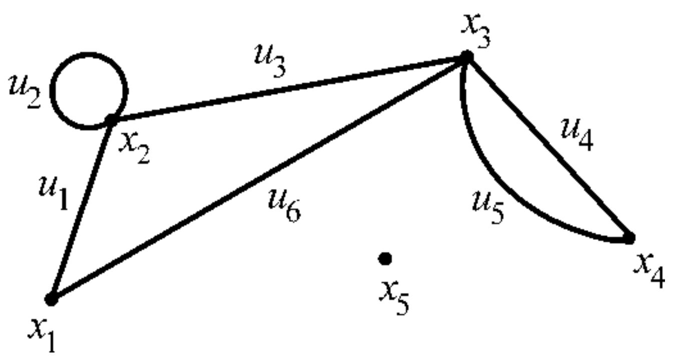


Рис. 3.1.1. **Геометричне зображення графа**

в) матриці інцидентностей A і суміжності вершин B мають вигляд:

$$A = \begin{array}{c} \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} u_1 & u_2 & u_3 & u_4 & u_5 & u_6 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{array}, \qquad B = \begin{array}{c} \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{array}.$$

Якщо у графі $G=(X,U)$ виділити підмножину вершин $X' \subset X$ разом із підмножиною ребер $U' \subset U$, що інцидентні вершинам із X', то дістанемо граф $G'=(X',U')$, який називають **підграфом** графа G.

Наприклад, у розглянутому вище графі можна виділити підграф $G' = (\{x_3, x_4, x_5\}, \{u_4, u_5\}) \subset G$.

3.2. Маршрути. Задача знаходження ланцюга найменшої довжини

Нехай $G = (X,U)$ – неорієнтований граф; x_i, x_j – його довільні вершини.

Маршрутом у графі G, що з'єднує вершини x_i, x_j, називають таку скінченну послідовність суміжних ребер (не обов'язково різних), що кожна гранична вершина (можливо, крім x_i, x_j) будь-якого ребра інцидентна принаймні двом ребрам.

Наприклад, у графі на рис. 3.1.1 можна виділити такий маршрут, що з'єднує вершини x_1, x_2:

$$\mu_{12} = (u_6, u_4, u_5, u_6, u_1) = (\{x_1, x_3\}, \{x_3, x_4\}, \{x_4, x_3\}, \{x_1, x_3\}, \{x_1, x_2\}).$$

Маршрут можна записати як послідовність вершин, через які він проходить, відділяючи позначення вершин рисками:

$$\mu_{12} = (x_1 - x_3 - x_4 - x_3 - x_1 - x_2).$$

Довжиною маршруту називають кількість ребер у ньому; однакові ребра лічать стільки разів, скільки разів вони входять у маршрут. Довжину маршруту μ позначають через $l(\mu)$. У нашому прикладі $l(\mu_{12}) = 5$.

Маршрут, що з'єднує вершини x_i, x_j, називають **замкненим** (**незамкненим**), якщо вершини x_i, x_j співпадають (не співпадають).

Поняття маршруту досить широке і є вихідним для введення інших основних понять: незамкнений (замкнений) маршрут, усі ребра в якому різні, називають **ланцюгом** (**циклом**); **ребро** (**петля**) – це ланцюг (цикл) одиничної довжини; ланцюг (відповідно цикл), у якому всі вершини різні, називають **простим**, або **елементарним**.

У графі на рис. 3.1.1, *наприклад*, маємо:

$\mu_{14} = (u_1, u_3, u_4) = (x_1 - x_2 - x_3 - x_4)$ – простий ланцюг;

$\mu_{11} = (u_1, u_3, u_6) = (x_1 - x_2 - x_3 - x_1)$ – простий цикл;

$\mu_{13} = (u_1, u_2, u_3) = (x_1 - x_2 - x_2 - x_3)$ – ланцюг (не простий).

За допомогою понять ланцюга й циклу проводять різноманітні класифікації графів, формулюють і доводять їхні властивості.

Граф називають **зв'язним**, якщо будь-які дві його вершини можна сполучити (з'єднати) хоча б одним ланцюгом. У протилежному випадку кажуть, що граф **незв'язний**. Незв'язний граф можна розбити на частини (підграфи), які є зв'язними графами і називаються **компонентами зв'язності** (ізольована вершина – компонента). У графі на рис. 3.1.1 маємо дві компоненти, одна з них – вершина x_5.

У практичних застосуваннях велике значення має задача знаходження найкоротшого ланцюга між двома вершинами зв'язного графа. До такої задачі зводять численні задачі вибору найбільш економічного (з точки зору відстані, часу або вартості) маршруту між двома об'єктами.

Задача знаходження на графі ланцюга найменшої довжини в загальному вигляді може бути сформульована так: задано неорієнтований граф $G = (X, U)$, кожному ребру $\{x_i, x_j\}$ якого приписано деяке дійсне число $d(x_i, x_j) = d(i, j) = d_{ij} \geq 0$, що називають **довжиною** ребра (залежно від конкретного застосування це число може бути мірою фізичної відстані, ваги, вартості або іншого важливого параметра). Треба для двох довільних вершин x_α, x_β знайти у графі G ланцюг $L^* = L^*(\alpha, \beta)$ такий, щоб *сумарна довжина його ребер* d_{L^*} *була мінімальною*:

$$d_{L^*} = \sum_{(x_i, x_j) \in L^*} d_{ij} \to \min . \qquad (3.2.1)$$

Надалі (для визначеності) домовимося одну з граничних вершин x_α, x_β ланцюга $L(\alpha, \beta)$ називати **початковою**, другу – **кінцевою**; нехай $x_\alpha \in G$ – початкова вершина. У разі геометричного зображення, як правило, вершину x_α розташовують лівіше від вершини x_β.

Існує декілька методів розв'язання сформульованої задачі. Розглянемо один із них.

Метод індексації (зважування) вершин полягає в такому.

1. *Початкова індексація вершин*. Кожній вершині x_i графа приписують певне число p_i, яке називають **індексом** (**вагою**) вершини. Спочатку кінцевій вершині x_β приписують вагу $p_\beta = 0$, а решті вершин – вагу $p_i = \infty \ (i \neq \beta)$.

2. *Поновлення індексів (переважування) вершин*. На кожному наступному (після початкового зважування) кроці шукаємо ребро $\{x_i, x_j\}$, для якого $p_j - p_i > d_{ij}$, і замінюємо індекс p_j новим індексом: $p_j^{\text{н}} = p_i + d_{ij}$ ($p_j^{\text{н}} < p_j$). Продовжуємо процес заміни індексів доти, поки не залишиться хоча б одна вершина, індекс якої можна зменшити.

3. *Знаходження власне найкоротшого ланцюга між* x_α і x_β. Відштовхуючись від початкової вершини x_α з індексом p_α, знаходимо вершину x_{i_1}, для якої $p_\alpha - p_{i_1} = d(\alpha, i_1)$ (така вершина завжди є, якщо процес поновлення індексів завершено). Далі знаходимо вершину x_{i_2}, для якої $p_{i_1} - p_{i_2} = d(i_1, i_2)$, і так далі, поки не дійдемо до кінцевої вершини $x_{i_{k+1}} = x_\beta$. Ланцюг $L(\alpha,\beta) = (x_\alpha - x_{i_1} - x_{i_2} - \ldots - x_{i_k} - x_\beta)$, довжина якого дорівнює вазі початкової вершини $d_L = p_\alpha$, є найкоротшим, тобто $L(\alpha,\beta) = L^*$.

Зауважимо, що проведена індексація вершин графа дає змогу знайти найкоротший ланцюг між двома будь-якими вершинами графа, а не тільки $L(\alpha, \beta)$. (*Наведіть* відповідні міркування).

Приклад. Розглянемо семивершинний граф (рис. 3.2.1), приймаючи $(\alpha, \beta) = (1, 7)$. Після проведення процесу зважування вершин дістаємо індекси, які вказано в кружечках (*переконайтеся*).

Найкоротший ланцюг $L_1^*(1,7) = (x_1 - x_2 - x_4 - x_6 - x_7)$ на рис. 3.2.1 позначено пунктирною ламаною.

Зауважимо, що ланцюг $L_2^*(1,7) = (x_1 - x_2 - x_5 - x_6 - x_7)$ також є оптимальним. Довжини обох ланцюгів однакові: $d_{L_1^*} = d_{L_2^*} = p_1 = 8$.

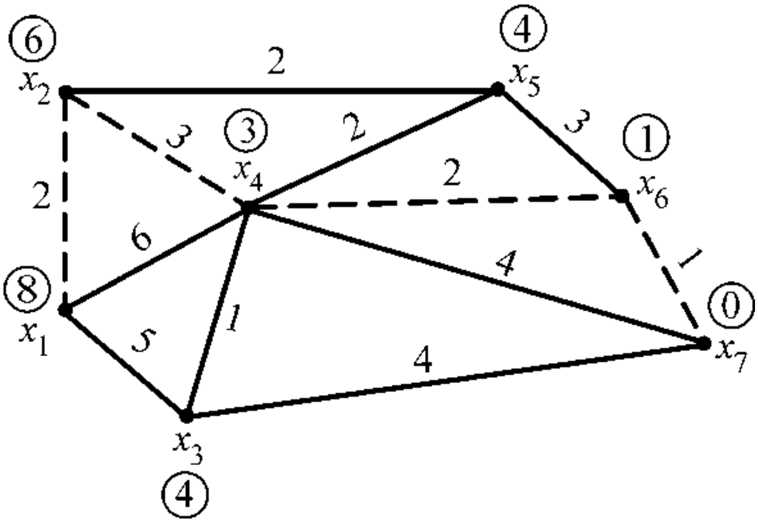


Рис. 3.2.1. **Граф зі зваженими (проіндексованими) вершинами та найкоротшим ланцюгом на ньому**

3.3. Дерева та ліс. Задача побудови економічного дерева

Зв'язний (незв'язний) граф без циклів називають **деревом** (**лісом**).

Якщо задано множину вершин $X=\{x_1, x_2,..., x_n\}\subset \mathbf{R}^2$, то дерево можна побудувати так: одну з вершин (наприклад, x_1) приймемо за початкову і назвемо **коренем дерева**, або **вершиною нульового рівня**. З цієї вершини проводимо ребра в найближчі вершини (нехай це будуть x_2, x_3) – **вершини першого рівня**. На кожному наступному кроці (для отримання вершин чергового рівня) додаємо ребра, одна з граничних вершин яких є вершиною попереднього рівня, а друга – ближчою до неї з тих, що залишилися ще ізольованими.

Наприклад, для $n=8$ одне з дерев зображено на рис. 3.3.1а. Якщо вибрати корінь дерева і вершини одного й того ж рівня розташувати на одній горизонталі, то матимемо інше зображення того ж дерева (рис. 3.3.1б), яке в багатьох випадках буває зручнішим. Зокрема, воно показує, що в дереві завжди є кінцеві вершини (наприклад, вершини останнього рівня). Дерево з визначеними рівнями вершин (див. рис. 3.3.1б) називають **упорядкованим за рівнями вершин**.

Стосовно дерев мають місце *твердження*:

1) кожне дерево, яке містить (покриває) n вершин, має $(n-1)$-е ребро;

2) кількість усіх дерев, які покривають n заданих вершин, дорівнює n^{n-2}.

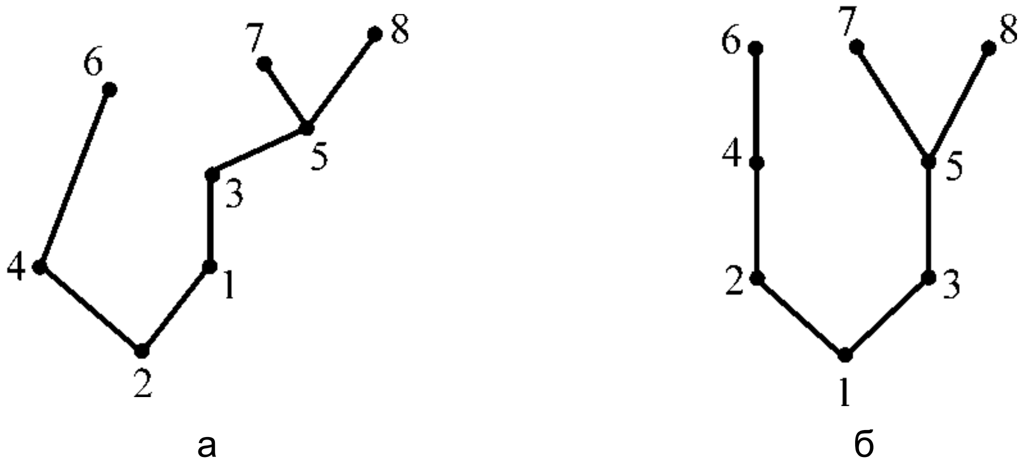


Рис. 3.3.1. **Дерево: а) з невизначеними рівнями вершин; б) упорядковане за рівнями вершин**

Часто дерева розглядають не самі по собі, а у взаємозв'язку із графами складнішої структури. Частину графа G, яка містить усі його вершини і є деревом, називають **кістяком**, або **покривним деревом**, графа G. Щоб дістати кістяк графа G з n вершинами і m ребрами (який містить цикли), треба вилучити з нього $(m-n+1)$-е ребро.

Наприклад, покривне дерево у зв'язному підграфі G' графа G $(G' \subset G)$ (рис. 3.1.1) з чотирма вершинами (x_1, x_2, x_3, x_4) і шістьома ребрами $(u_j, j=\overline{1,6})$ дістанемо унаслідок вилучення з нього трьох ребер (u_2, u_5, u_6), оскільки $m-n+1=6-4+1=3$.

У багатьох задачах практичного характеру потрібно зв'язати деякі об'єкти (міста, села, будинки, підприємства і т. ін.) найбільш економічним чином з точки зору відстані, часу, вартості тощо. Це стосується, зокрема, побудови ліній зв'язку, автомобільних шляхів, електромереж.

Мовою теорії графів цю задачу формулюють у загальному вигляді так: нехай $G=(X,U)$ – зв'язний граф, кожному ребру $\{x_i, x_j\}$ якого поставлено у відповідність дійсне число $d_{ij} \geq 0$, що називають **довжиною ребра**. Треба побудувати покривне дерево T графа G так, щоб *сумарна довжина його ребер* d_T *була мінімальною*:

$$d_T = \sum_{(x_i, x_j) \in T} d_{ij} \to \min \cdot \qquad (3.3.1)$$

Кожне дерево, яке задовольняє умову (3.3.1), називають **економічним**.

Є дуже простий *спосіб побудови економічного дерева*, який базується на послідовному введені в нього ребер із пріоритетом за мінімумом їхніх довжин:

1) вибираємо ребро найменшої довжини (якщо таких ребер декілька, то беремо будь-яке з них);

2) на кожному наступному кроці додаємо (приєднуємо) найкоротше з ребер, у разі долучення якого до вже обраних ребер не утворюється жодного циклу;

3) процес закінчуємо, щойно буде обрано $(n-1)$ ребер.

Приклад. Розглянемо п'ятивершинний граф, у якому кожні дві різні вершини суміжні (графи з такою властивістю називають **повними**). Кількість ребер цього графа дорівнює $C_5^2=10$, а покривних дерев на ньому можна побудувати $5^3=125$. Певна річ, переглядати й порівнювати всі кістяки недоцільно.

Згідно з наведеним алгоритмом, відразу отримуємо шукане економічне дерево: обрані ребра позначені поперечними рисками (рис. 3.3.2а). На рис. 3.3.2б зображено знайдене покривне дерево за умови, що його корінь – вершина x_3.

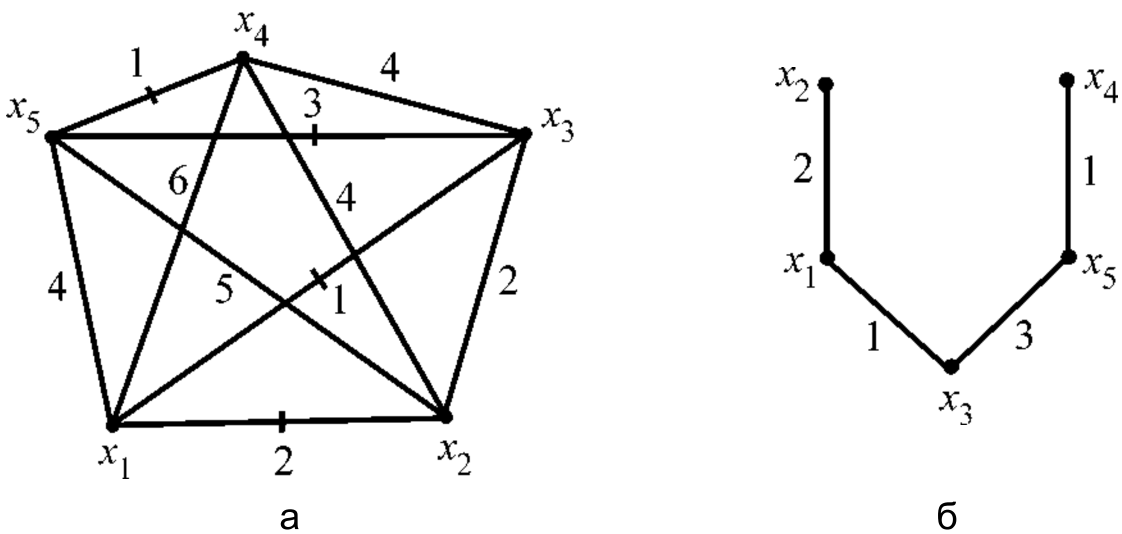


Рис. 3.3.2. **Побудова екстремального дерева:**
а) заданий граф та економічне дерево на ньому;
б) економічне дерево, упорядковане за рівнями вершин

Можна вказати ще один кістяк мінімальної довжини, якщо у знайденому дереві замінити ребро $\{x_1, x_2\}$ на ребро $\{x_2, x_3\}$.

Для реалізації процедури формування дерев (зокрема економічних) на ЕОМ розроблено спеціальні програми. У свою чергу, графи допомагають спілкуванню з ЕОМ і їх називають "інструментом програміста".

Загалом теорія графів тісно пов'язана з такими розділами математики, як теорія множин, теорія матриць, математична логіка та теорія ймовірностей. В усіх цих розділах графи застосовують для подання (у відповідному вигляді) різноманітних математичних об'єктів. Водночас сама теорія графів широко використовує апарат споріднених розділів математики.

3.4. Орієнтовані графи (орграфи): означення основних понять, способи задання

Орієнтованим графом (**ОГ**), або **орграфом**, називають пару $\overline{G}=(X,U)$, де $X=\{x_i\}_1^n$ – непорожня скінченна множина деяких об'єктів (елементів), $U=\{u_j\}_1^m$ – множина упорядкованих пар, складених з елементів множини X: $u_j=(x_i,x_k)$; $i,k\in I_x=\{1,2,...,n\}$, $j\in I_u=\{1,2,...,m\}$; I_x, I_u – множини індексів).

Як бачимо, означення неорієнтованого й орієнтованого графів відрізняються лише тим, що у графі розглядають невпорядковані пари $\{x_i,x_k\}=\{x_k,x_i\}$, а в орграфі – упорядковані пари (x_i,x_k), тобто $(x_i,x_k)\neq(x_k,x_i)$. Ця (єдина) структурна відміна дозволяє (іноді з деякими змінами) перенести на орграфи поняття й терміни, які використовують під час вивчення неорієнтованих графів.

Наведемо деякі відповідні терміни:

ребро $\{x_i,x_k\}$ $\leftrightarrow$ **орієнтоване ребро** (**орребро**), або **дуга** (x_i,x_k), що виходить із вершини x_i і заходить у вершину x_k; x_i (x_k) – **початок** (**кінець**) **дуги**;

маршрут $(x_1-x_2-...-x_k)$ $\leftrightarrow$ **ормаршрут** $(x_1\to x_2\to...\to x_k)$;

ланцюг $\leftrightarrow$ **орланцюг**, або **шлях**;

цикл $\leftrightarrow$ **орцикл**, або **контур**.

Стосовно орграфів розрізняють два види інцидентності: дуга **додатно** (**від'ємно**) **інцидентна** її початковій (кінцевій) вершині, а також два види паралельності: дві дуги з однаковими граничними точками називають **строго** (**не строго**) **паралельними**, якщо їхні початкові вершини й кінцеві вершини співпадають (не співпадають).

Ураховуючи тісний зв'язок між орграфом і графом, останній називають **основою орграфа**.

В орграфах розрізняють декілька понять зв'язності. Орграф $\overline{G}$ називають **слабкозв'язним**, якщо його основа G зв'язна, і **сильнозв'язним**, якщо для будь-яких двох його вершин x_i, x_k існує орланцюг із x_i в x_k, і навпаки. Орграф називають **односторонньо зв'язним**, якщо для будь-яких двох його вершин x_i і x_k існує хоча б один із маршрутів від x_k до x_i чи від x_i до x_k.

Компоненти зв'язності, згідно з означеннями, називають, відповідно, **слабкою (сильною, односторонньою)** компонентою зв'язності.

Способи задання орієнтованих графів такі самі, як і неорієнтованих, але з певними змінами.

У разі **теоретико-множинного** способу наводять перелік упорядкованих пар $u_j = (x_i, x_k)$, $i, k \in I_x$, $j \in I_u$, та ізольованих вершин.

У разі **геометричного** способу вершини орграфа зображають в $\mathbf{R}^2$ чи $\mathbf{R}^3$ точками (малими кружечками), а дуги – стрілками, які напрямлені від першої компоненти до другої; і лише цим відрізняються зображення графів і орграфів.

У разі **матричного** задання орграфів елементи матриці інцидентностей $A = [a_{ij}]_{n \times m}$ визначають так:

$$a_{ij} = \begin{cases} +1, & \text{якщо } x_i - \text{початок } u_j; \\ -1, & \text{якщо } x_i - \text{кінець } u_j; \\ 0, & \text{якщо } x_i \text{ не інцидентна } u_j \text{ або } u_j - \text{петля,} \end{cases}$$

причому ізольованій вершині відповідає нульовий рядок, а петлі – нульовий стовпець.

Матриця суміжності вершин графа $\overline{G}$ співпадає з матрицею суміжності його основи G.

Орграфи, як і графи, мають численні застосування в задачах практичного характеру. Це, зокрема, задачі соціології, економіки, кібернетики, техніки, електроніки, лінгвістики тощо. Орграфи широко застосовують у програмуванні як спосіб опису систем зі складними зв'язками.

За структурою, залежно від наявності чи відсутності кратних ребер і петель, циклів, компонент зв'язності тощо, розрізняють такі типи орграфів:

орієнтований мультиграф – граф із кратними дугами, але без петель;

орієнтований псевдограф – граф із кратними дугами й петлями;

прості (звичайні) орграфи – графи без петель і кратних дуг;

порожній граф (нуль-граф) – граф, усі вершини якого ізольовані;

тривіальний граф – граф, що має одну вершину. (*Наведіть* самостійно приклади графів зазначених типів.)

М**атрицею досяжності** орграфа $\overline{G}$ називають квадратну матрицю $C=[c_{ik}]_{n\times n}$ n-го порядку (n – кількість вершин $\overline{G}$) з елементами $c_{ik}=1$, якщо є шлях від вершини x_i до вершини x_k, і $c_{ik}=0$ – у протилежному випадку ($i,k\in I_x$). Матрицю Q, транспоновану відносно матриці C, називають **матрицею контрдосяжності**: $Q=C^T$.

Одним із важливих понять у задачах прикладного характеру є поняття "графа конденсації". Нехай ОГ $\overline{G}$ містить у собі контури. Орграф, який дістають об'єднанням усіх вершин кожного з них в одну, називають **графом конденсації**. Вислідний граф є ациклічним, тобто не містить циклів.

Задача 3.4.1. Для орграфа $\overline{G}$ на рис. 3.4.1 необхідно: 1) визначити компоненти зв'язності в графі; 2) побудувати матриці досяжності і контрдосяжності; 3) побудувати граф конденсації $\overline{G}^*$.

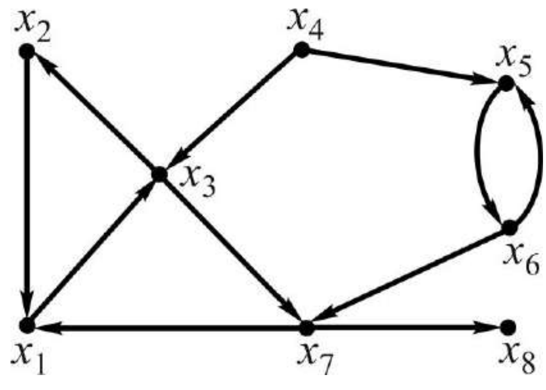


Рис. 3.4.1. **Вихідний орграф**

Розв'язання:

Здійснюємо візуальний аналіз заданого графа з метою встановлення того, до якого типу графів він належить. Отже, граф $\overline{G}$:

орієнтований мультиграф (ребра орієнтовані, є кратні дуги);

слабкозв'язний (відповідний неорієнтований граф зв'язний).

1. *Визначаємо* компоненти зв'язності: граф $\overline{G}$ містить компоненту сильної зв'язності, яку визначають вершини x_1, x_2, x_3 (усі її вершини взаємно досяжні), і односторонню компоненту зв'язності, її визначають вершини x_4 – x_8 (для будь-яких двох вершин принаймні одна досяжна з іншої) (рис. 3.4.2).

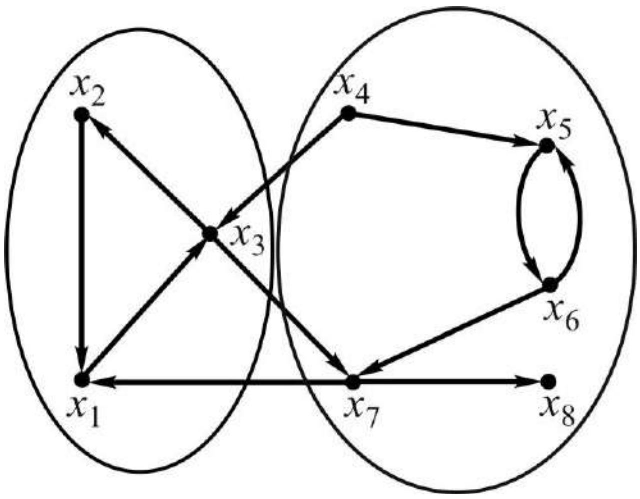


Рис. 3.4.2. **Компоненти зв'язності вихідного орграфа**

2. *Будуємо* матрицю досяжності C і матрицю контрдосяжності Q:

$$C=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad Q=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

3. *Будуємо* граф конденсації $\overline{G}^*$, для чого в заданому орграфі $\overline{G}$ знаходимо контур і об'єднуємо всі його вершини в одну. Ці дії повторюємо доти, поки в орграфі $\overline{G}$ контурів не залишиться. На рис. 3.4.1 орцикли

визначають вершини: 1) x_1, x_3, x_2; 2) x_1, x_3, x_7; 3) x_5, x_6. Перший із них об'єднаємо (стягнемо) у вершину x_2; другий – у вершину x_3; третій – у вершину x_5; граф $\overline{G}^*$ зображено на рис. 3.4.3. Згідно з означенням графа конденсації, як результат, отримуємо ациклічний орграф (він не містить контурів).

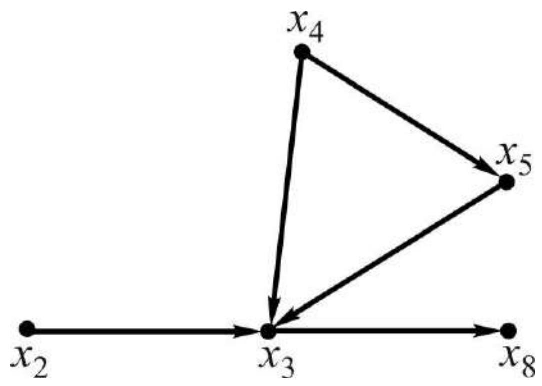


Рис. 3.4.3. **Граф конденсації**

3.5. Сіткові графіки

Сіткові графіки: основні означення, правила побудови

Практична реалізація того чи іншого проєкту в будь-якій галузі людської діяльності (створення інформаційних систем, виготовлення технічних виробів, підготовка і проведення експериментів, будівництво споруд і т. ін.) потребує виконання значної кількості робіт. Під **роботою** (операцією) розуміють будь-який процес, сукупність дій, за допомогою яких досягають певних результатів. Результати виконання однієї або кількох робіт називають **подіями** (етапами, стадіями). Безумовно, всі роботи мають бути узгоджені в часі їх виконання і враховувати певні (додаткові) умови щодо ресурсів (людських, технічних, енергетичних, фінансових тощо), термінів виконання і т. ін.

Припустимо, що визначено комплекс робіт $U = \{u_1, u_2, ..., u_m\}$, необхідних для реалізації певного проєкту, і множину подій $X = \{x_0, x_1, ..., x_n\}$, де x_0 – **початок**, x_n – **кінець**, x_i $(i \neq 0, n)$ – **проміжні події** (залежно від взаємозв'язку робіт). Задачі, у яких ставлять питання про знаходження мінімального часу виконання всіх робіт комплексу U, називають **оптимізаційними задачами за критерієм часу**. Для розв'язання таких задач на основі теорії графів розроблено спеціальні математичні методи так званого *сіткового планування і управління* (СПУ).

Орієнтований зв'язний граф $\overline{G} = (X, U)$ без петель і контурів, який відображає природний порядок виконання робіт комплексу U в часі, в поєднанні з певними числовими даними – характеристиками проєкту, – називають **сітковим графіком** (**СГ**) комплексу робіт (цього проєкту).

Перш ніж будувати СГ проєкту, треба скласти відповідну **структурно-часову таблицю** – докладний перелік подій і робіт комплексу, місце роботи в комплексі, її технологічні зв'язки з іншими роботами, терміни виконання робіт, інші числові характеристики (витрати ресурсів, кількість виконавців і т. ін.)

Назвемо найважливіші правила побудови СГ.

1. Скласти структурно-часову таблицю.

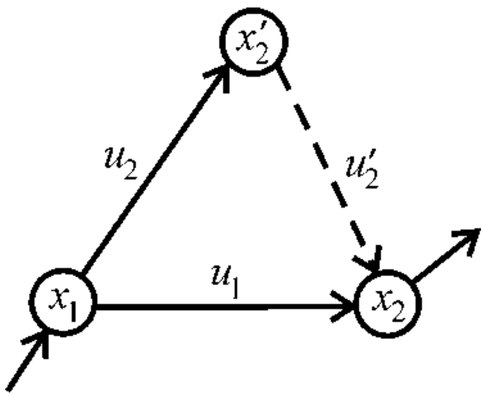
2. Зобразити в $\mathbf{R}^2$ чи $\mathbf{R}^3$ роботи дугами, над (під) якими вказують потрібний для їх виконання час (іноді й інші числові характеристики), а події (граничні точки дуг) – кружечками, у яких записують порядковий номер або шифр події. (Подія як результат виконання попередніх робіт є передумовою виконання наступних операцій).

3. У СГ не має бути (згідно з означенням) контурів і петель, а також **тупикових** подій (окрім кінцевої x_n), тобто таких проміжних подій, які не дають початку жодній роботі, і **хвостових** подій (окрім початкової x_0), тобто таких проміжних подій, яким не передує жодна робота.

4. У СГ уникають наявності паралельних дуг, що відповідає одночасно виконуваним роботам між двома подіями. Якщо, *наприклад*, u_1, u_2 – операції (дуги), що визначають одні й ті самі події (вершини) x_1, x_2, то вводять у розгляд **допоміжну** подію x_2' і роботу $u_2' = (x_2', x_2)$ із нульовою тривалістю, яку називають **фіктивною**, тобто кінцева вершина x_2 немовби "роздвоюється" (рис. 3.5.1а). Якщо виконують r паралельних операцій, то вводять $(r-1)$ допоміжних подій і фіктивних робіт.

5. Якщо не всі роботи, що починаються подією $x \in X$, спираються на всі роботи, що закінчуються подією x, то для відповідного розподілу запроваджують додаткові (допоміжні) вершини і фіктивні дуги. Нехай, *наприклад*, роботи u_1, u_2, u_3 передують події x, а u_4, u_5 – наступні роботи, причому u_4 спирається на u_1, u_2, u_3, а робота u_5 йде лише за u_3.

Тоді відповідний розподіл здійснюють введенням додаткової події x' і фіктивної роботи u' (рис. 3.5.1б).



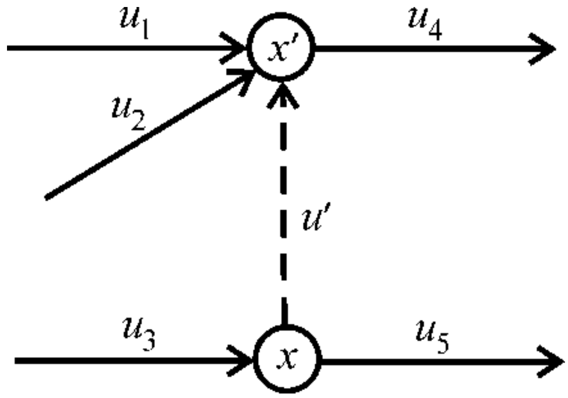


Рис. 3.5.1. **Введення на СГ: а) допоміжних вершин; б) фіктивних робіт**

Задача знаходження на СГ критичного часу
і критичного шляху

Для спрощення формального опису розрахунків у СГ $\overline{G}=(X,U)$ домовимось вершини (події) $x_i, x_k \in X$ називати за їхніми номерами i, k $(\forall i,k \in I_x = \{0,1,...,n\})$, а дуги (роботи) розглядати як пари (i,k), і введемо позначення:

$\underset{i\to}{U}$ $\left(\underset{\to k}{U}\right)$ – множина операцій, які починаються (закінчуються) подією i (k), тобто множина дуг, додатно (від'ємно) інцидентних вершині i (k);

$t(i)$ – час, який пройшов від нульової події до моменту, коли звершилася (настала, відбулася) подія i, або кажуть – **строк звершення події** i; аналогічно $t(k)$ – строк звершення події k;

$t(i,k)$ – **тривалість роботи** (i,k), яка починається подією i і закінчується подією k.

Зрозуміло, що тривалість $t(i,k)$ не може перевищувати різницю в часі між моментами настання подій i, k. Отже, між величинами $t(i)$, $t(k)$, $t(i,k)$ мають місце співвідношення:

$$t(i,k) \le t(k) - t(i), \tag{3.5.1}$$

$$t(k) \ge t(i) + t(i,k), \tag{3.5.2}$$

$$t(i) \le t(k) - t(i,k), \tag{3.5.3}$$

які дають змогу обчислити **граничні** (ранній і пізній) строки настання події в СГ.

Раннім строком $t_p(k)$ **звершення події** k називають найменший можливий час настання події k за умови, що всі попередні події відбуваються без затримки.

Згідно з нерівністю (3.5.2), маємо:

1) якщо подією k закінчується одна робота (i,k), то

$$t(k) \geq t(i) + t(i,k) \Rightarrow t_p(k) = t_p(i) + t(i,k);$$

2) якщо подією k закінчується декілька робіт, то за кожною роботою знаходять свій ранній строк, а шуканим $t_p(k)$ буде максимальний із них:

$$(\forall (i,k) \in \underset{\to k}{U} : t(k) \geq t(i) + t(i,k)) \Rightarrow t_p(k) = \max_{(i,k) \in \underset{\to k}{U}} \{t_p(i) + t(i,k)\}. \quad (3.5.4)$$

Пізнім строком $t_п(i)$ **звершення події** i називають найбільший можливий час настання події i за умови, що всі наступні події відбуваються без затримки.

Згідно з нерівністю (3.5.3), маємо:

1) якщо подією i починається одна робота (i,k), то

$$t(i) \leq t(k) - t(i,k) \Rightarrow t_п(i) = t_п(k) - t(i,k);$$

2) якщо ж подією i починається декілька робіт, то за кожною роботою знаходять свій пізній строк, а шуканим $t_п(i)$ буде мінімальний із них:

$$(\forall (i,k) \in \underset{i \to}{U} : t(i) \leq t(k) - t(i,k)) \Rightarrow t_п(i) = \min_{(i,k) \in \underset{i \to}{U}} \{t_п(k) - t(i,k)\}. \quad (3.5.5)$$

Приклад. Нехай подією k закінчуються три роботи тривалістю $t(i,k)$, $i = 1, 2, 3$, і відомі ранні строки $t_p(i)$ (рис. 3.5.2а); подією i починаються три роботи $t(i,k)$, $k = 4, 5, 6$, і відомі пізні строки $t_п(k)$ (рис. 3.5.2б). Тоді, згідно з (3.5.4), (3.5.5), маємо:

$$t_p(k) = \max\{ t_p(1) + t(1,k), t_p(2) + t(2,k), t_p(3) + t(3,k)\} =$$
$$= \max\{ 3+4, 2+3, 2+1\} = \max\{ 7, 5, 3\} = 7;$$

$$t_{\text{П}}(i) = \min\{\ t_{\text{П}}(4) - t(i,4), t_{\text{П}}(5) - t(i,5), t_{\text{П}}(6) - t(i,6)\} =$$
$$= \min\{\ 6-2, 10-8, 15-10\} = \min\{\ 4, 2, 5\} = 2.$$

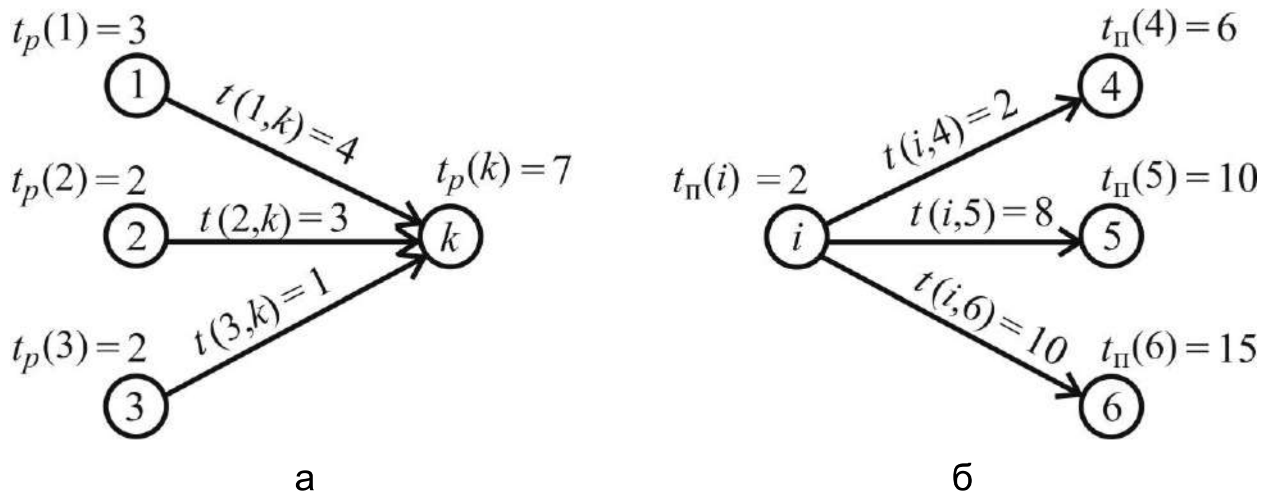


Рис. 3.5.2. **Визначення строків звершення події: а) раннього; б) пізнього**

Резервом часу $R(i)$ події i називають різницю між пізнім і раннім строками звершення цієї події:

$$R(i) = t_{\text{П}}(i) - t_p(i). \tag{3.5.6}$$

Резерв $R(i)$ показує, на який найбільший можливий час можна затримати звершення події i за умови, що це не спричинить затримки завершення всього проєкту.

Звичайно, настання початкової і кінцевої подій у СГ не може затримуватись, тому $R(0) = R(n) = 0$, тобто:

$$t_p(0) = t_{\text{П}}(0), \quad t_p(n) = t_{\text{П}}(n). \tag{3.5.7}$$

Із нульовим резервом часу можуть бути і проміжні події; саме вони визначають найбільш відповідальні події і роботи в СГ, стежачи за виконанням яких можна тримати в полі зору хід виконання всього проєкту.

Мінімальний час виконання всіх робіт проєкту називають **критичним строком (часом) t_{kp}**. Певна річ, його визначає ранній строк $t_p(n)$ звершення кінцевої події (а згідно з (3.5.7) – і пізній строк $t_{\text{П}}(n)$), тобто:

$$t_{kp} = t_p(n) = t_{\text{П}}(n). \tag{3.5.8}$$

Орланцюг (шлях) μ_{on} довжиною t_{kp}, який проходить через вершини з нульовим резервом часу, називають **критичним шляхом μ_{kp}** в СГ:

$$\mu_{on} = \mu_{kp} \rightleftarrows l(\mu_{on}) = t_{kp}. \qquad (3.5.9)$$

Отже, критичний шлях – це найдовший у часі орланцюг робіт, які ведуть від початкової до завершальної події. Усі роботи й події, які лежать на критичному шляху, теж називають **критичними**, решту робіт і подій у СГ – **некритичними**.

Тепер, підсумовуючи розглянуте, розв'яжемо **задачу знаходження критичного часу і критичного шляху на СГ** $\overline{G} = (X, U)$ заданого комплексу робіт.

Розв'язання задачі проводять у чотири етапи.

I етап. *Обчислення ранніх строків звершення подій*: рухаються по СГ від початкової події до наступних у порядку зростання їхніх номерів і за формулою (3.5.6) знаходять $t_p(k) \quad \forall k \in I_x = \{0, 1, ..., n\}$, причому:

$$t_{kp} = t_p(n).$$

II етап. *Обчислення пізніх строків звершення подій*: рухаються по СГ від кінцевої події до попередніх у порядку спадання їхніх номерів і за формулою (3.5.7) знаходять $t_{п}(i) \quad \forall i \in I_x$, з урахуванням, що $t_{п}(n) = t_p(n)$.

III етап. *Підрахунок резервів часу подій*: знаходять різницю між пізніми і ранніми строками подій згідно з формулою (3.5.6).

IV етап. *Визначення критичного шляху*: рухаючись від x_0 до x_n, знаходять орланцюг довжини t_{kp}, події якого мають нульовий резерв часу (критичні події); це визначає відповідні критичні роботи і критичний шлях загалом.

Приклад. Нехай структурно-часову таблицю комплексу робіт наведено в табл. 3.5.1, тоді відповідний СГ можна зобразити, як показано на рис. 3.5.3. Оскільки робота u_4 спирається тільки на роботу u_1, а роботи u_5, u_6 – на роботи u_1, u_2, то згідно з правилами побудови СГ довелося ввести фіктивну роботу $(1, 2)$.

Таблиця 3.5.1

Структурно-часова таблиця комплексу робіт

Перелік робіт u_j	Роботи, на які спирається u_j	Тривалість роботи u_j	Перелік відповідних подій x_i
u_1	–	3	x_1
u_2	–	6	x_2
u_3	–	4	x_3
u_4	u_1	5	x_4
u_5	u_1, u_2	1	x_3
u_6	u_1, u_2	9	x_4
u_7	u_3, u_5	6	x_4
u_8	u_4, u_6, u_7	8	x_5
u_9	u_3, u_5	5	x_5

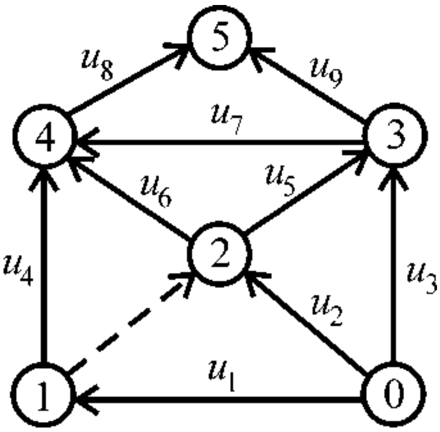


Рис. 3.5.3. **СГ, побудований за структурно-часовою таблицею**

Для зручності виконання етапів I – IV кожну подію зобразимо кружечком, поділеним двома діаметрами на чотири сектори. У верхньому секторі запишемо номер i події, у лівому в міру обчислення записуватимемо ранній строк $t_p(i)$ звершення події i, у правому – пізній строк $t_п(i)$, у нижньому – резерв $R(i)$ часу події (рис. 3.5.4). Результати підрахунків для визначення t_{kp} і μ_{kp} подано на СГ, зображеному на рис. 3.5.5.

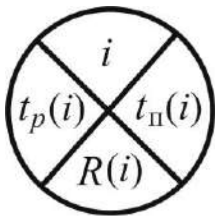


Рис. 3.5.4. **Зображення вершин (подій) СГ**

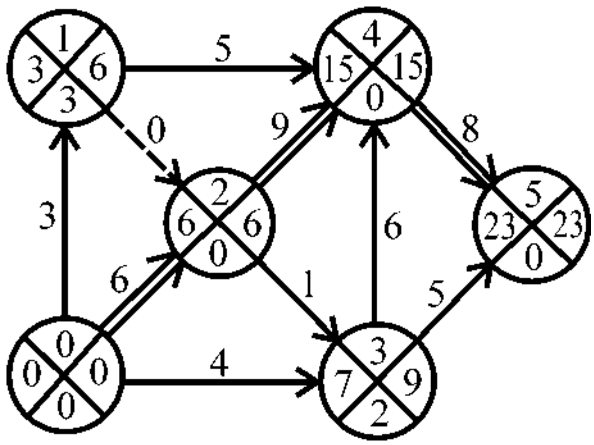


Рис. 3.5.5. **Результати підрахунків для визначення t_{kp}, μ_{kp}**

Тривалості робіт візьмемо з табл. 3.5.1. За формулою (3.5.4) за вхідними дугами знаходимо ранні строки звершення подій:

$$t_p(1)=t_p(0)+t(0,1)=0+3=3;$$
$$t_p(2)=\max\{\,t_p(0)+t(0,2),\,t_p(1)+t(1,2)\,\}=\max\{\,0+6,\,3+0\,\}=6;$$
$$t_p(3)=\max\{\,t_p(0)+t(0,3),\,t_p(2)+t(2,3)\}=\max\{\,0+4,\,6+1\}=7;$$
$$t_p(4)=\max\{\,t_p(1)+t(1,4),\,t_p(2)+t(2,4),\,t_p(3)+t(3,4)\,\}=$$
$$=\max\{\,3+5,6+9,7+6\,\}=15;$$
$$t_p(5)=\max\{\,t_p(3)+t(3,5),\,t_p(4)+t(4,5)\,\}=\max\{\,7+5,15+8\,\}=23=t_{kp}.$$

За формулою (3.5.5) за вихідними дугами обчислимо пізні строки:

$$t_{\text{п}}(5)=t_p(5)=23;$$
$$t_{\text{п}}(4)=t_{\text{п}}(5)-t(4,5)=23-8=15;$$
$$t_{\text{п}}(3)=\min\{\,t_{\text{п}}(4)-t(3,4),\;t_{\text{п}}(5)-t(3,5)\}=\min\{\,15-6,\,23-8\}=9;$$
$$t_{\text{п}}(2)=\min\{\,t_{\text{п}}(3)-t(2,3),\;t_{\text{п}}(4)-t(2,4)\}=\min\{\,9-1,15-9\}=6;$$
$$t_{\text{п}}(1)=\min\{\,t_{\text{п}}(2)-t(1,2),\;t_{\text{п}}(4)-t(1,4)\}=\min\{\,6-0,15-5\}=6;$$
$$t_{\text{п}}(0)=\min\{\,t_{\text{п}}(1)-t(0,1),t_{\text{п}}(2)-t(0,2),t_{\text{п}}(3)-t(0,3)\,\}=$$
$$=\min\{\,6-3,6-6,9-4\,\}=0.$$

Знаходимо резерви часу подій:

$$R(0)=0,\; R(1)=3,\; R(2)=0,\; R(3)=2,\; R(4)=0,\; R(5)=0.$$

Критичному часу $t_{kp}=23$ відповідає критичний шлях, який зображено подвійною ламаною:

$$\mu_{kp}=(0\to 2\to 4\to 5).$$

Підкреслимо, що в усіх розрахунках фіктивну роботу враховують поряд із реальними. У розглянутому прикладі критичний шлях виявився єдиним, але їх може бути декілька. Критичний шлях може включати і фіктивні роботи.

За умови невеликих комплексів робіт розрахунки проводять вручну, за значних (вище 500 подій) – на ЕОМ.

3.6. Транспортні мережі

Транспортні мережі: основні означення, знаходження повного потоку

Транспортною мережею (ТМ) називають орграф $\overline{G} = (X, U)$ без контурів і петель – такий, у якому:

1) є єдина вершина $x_0 \in X$ тільки з додатно інцидентними дугами (x_0 – **вхід ТМ**);

2) є єдина вершина $x_n = z \in X$ тільки з від'ємно інцидентними дугами (z – **вихід ТМ**);

3) кожній дузі $u \in U$ відповідає ціле невід'ємне число $c(u)$, назване **пропускною спроможністю дуги**.

Якщо $x \in X$ – довільна вершина ТМ, то позначимо множину дуг, які заходять в x через U_x^-, а через U_x^+ – множину дуг, які виходять із x, тобто U_x^- (U_x^+) – множина дуг від'ємно (додатно) інцидентних вершині x.

Потоком по дузі $u = (x, y)$, $x, y \in X$, або **дуговим потоком**, називають числову цілозначну функцію дуги $\varphi(u)$, яка задовольняє умови:

1) $0 \le \varphi(u) \le c(u) \;\; \forall u \in U$ (умова обмеженості); (3.6.1)

2) $\sum\limits_{u \in U_x^-} \varphi(u) = \sum\limits_{u \in U_x^+} \varphi(u)$, $x \ne x_0$, $x \ne z$ (умова балансу). (3.6.2)

Ліва (права) частина в (3.6.2) – це сума потоків до (від) вершини x.

У фізичній інтерпретації $\varphi(u)$ – це сукупність однорідних об'єктів, які треба переслати з однієї вершини графа в іншу по його дузі, або кількість речовини, що протікає (за одиницю часу) по дузі $u = (x, y)$ від вершини x до вершини y.

Згідно з (3.6.1), $\varphi(u)$ (кількість речовини, сукупність об'єктів) не може перевищувати пропускної спроможності дуги $c(u)$.

Згідно з (3.6.2), у кожній вершині x, відмінній від входу x_0 і виходу z, кількість речовини, що надходить, дорівнює кількості речовини, що виходить. Отже, речовина не може накопичуватись в жодній із вершин ТМ, за винятком входу і виходу. Це означає, що сумарний потік на множині дуг U_z^- (**вхідний потік**) і сумарний потік на множині дуг $U_{x_0}^+$ (**вихідний потік**) дорівнюють один одному.

Потоком (на) ТМ φ_z називають суму дугових потоків від вершини x_0, або, що те ж саме, суму дугових потоків до вершини z:

$$\varphi_z = \sum_{u \in U_{x_0}^+} \varphi(u) = \sum_{u \in U_z^-} \varphi(u). \qquad (3.6.3)$$

Дугу u називають **насиченою**, якщо $\varphi(u) = c(u)$, тобто дуговий потік дорівнює пропускній спроможності цієї дуги. Дугу u називають **ненасиченою**, якщо $\varphi(u) < c(u)$. Якщо $\varphi(u) > 0$ $(\varphi(u) = 0)$, то кажуть, що дуга u **навантажена** (**ненавантажена**).

Потік $\varphi_z^{\text{п}}$ називають **повним**, якщо кожний шлях μ від x_0 до z містить принаймні одну насичену дугу (такий шлях μ також називатимемо **повним**); у протилежному випадку φ_z – **неповний потік**, μ – **неповний шлях**.

Якщо на ТМ вказано потік φ_z і дугові потоки $\varphi(u)$ $\forall u \in U$, то кажуть, що *здійснено розподіл потоку на ТМ* (за дугами).

Тепер розв'яжемо **задачу побудови (знаходження) повного потоку** $\varphi_z^{\text{п}}$ на заданій ТМ із фіксованими пропускними спроможностями її дуг. Розв'язання цієї задачі проводять у два етапи.

І етап. *Побудова довільного (початкового) потоку* φ_z^0: вибирають деякий (як правило, невеликий) потік і згідно з умовами обмеженості та балансу здійснюють його розподіл за дугами. (Побудову початкового потоку регламентують тільки умовами (3.6.1), (3.6.2), жодних інших правил під час цієї побудови не використовують, а тому φ_z^0 визначають неоднозначно).

ІІ етап. *Побудова повних шляхів від* x_0 *до* z: розглядають кожний неповний шлях μ від x_0 до z і для всіх дуг такого шляху підраховують різниці $c(u) - \varphi(u)$. Нехай r – найменша із цих різниць:

$$r = \min_{u \in \mu} \{c(u) - \varphi(u)\},$$

а потім збільшують на r всі дугові потоки на шляху μ, унаслідок чого кожний неповний шлях перетворюється на повний, а φ_z^0 – на повний потік $\varphi_z^{п}$. Як і φ_z^0, повний потік визначають неоднозначно.

Приклад. Розглянемо п'ятивершинну ТМ $\overline{G}=(X,U)$, x_0 – вхід, $x_4 = z$ – вихід (рис. 3.6.1а), пропускні спроможності $c(u)$ дуг якої вкажемо в круглих дужках, а дугові потоки $\varphi(u)$ записуватимемо праворуч від них; насичені дуги позначатимемо подвійними лініями.

Візьмемо початковий потік $\varphi_z^0 = 3$ і здійснимо розподіл його за дугами. Покладемо, наприклад, $\varphi(0,1)=\varphi(0,2)=\varphi(0,3)=1$.

Далі, враховуючи умови обмеженості й балансу, дістанемо решту дугових потоків. Унаслідок розподілу виявилося, що дуга $(2,4)$ насичена ($\varphi(2,4)=c(2,4)=2$), але потік φ_z^0 загалом не буде повним: шляхи $\mu_1=(0\to 2\to 4)$, $\mu_2=(0\to 3\to 2\to 4)$, $\mu_3=(0\to 1\to 3\to 2\to 4)$ – повні, а шляхи $\mu_4=(0\to 1\to 3\to 4)$, $\mu_5=(0\to 3\to 4)$ – неповні.

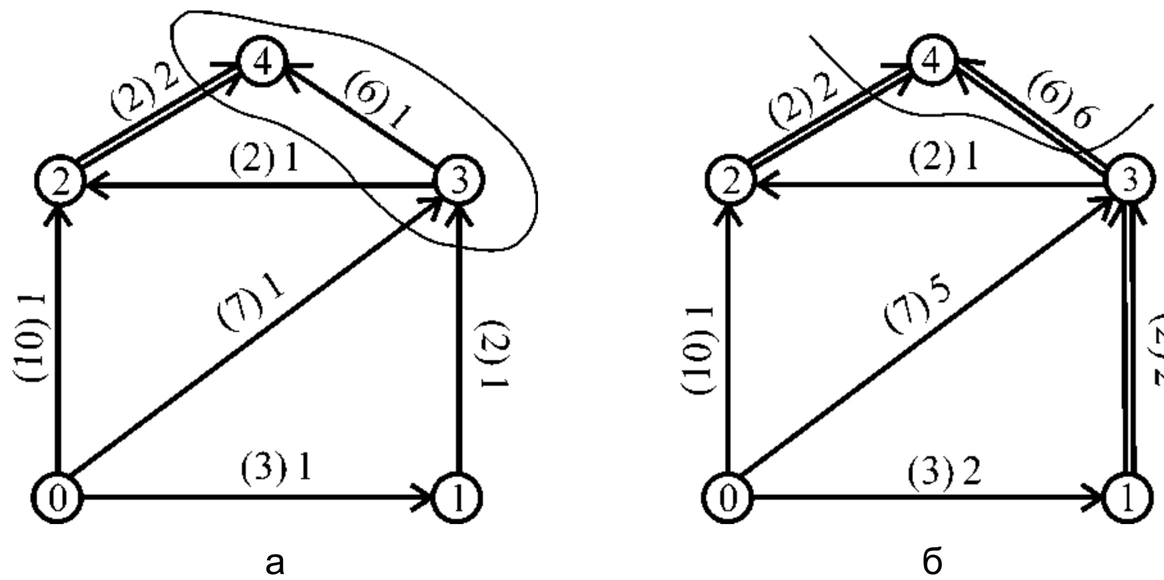


Рис. 3.6.1. **Транспортна мережа:**
а) розподіл початкового потоку та розріз на ТМ;
б) побудова повного потоку та мінімальний розріз на ТМ

Знайдемо на шляху μ_4 величину:

$$r = \min_{u\in\mu_4}\{c(u)-\varphi(u)\} = \min\{\,3-1,\,2-1,\,6-1\} = 1,$$

і збільшимо на $r=1$ всі дугові потоки на цьому шляху, тоді дуга $(1,3)$ стане насиченою (рис. 3.6.1б): $\varphi(1,3)=c(1,3)=2$.

Після цього на шляху μ_5 обчислюємо r:

$$r=\min_{u\in\mu_5}\{c(u)-\varphi(u)\}=\min\{\,7-1,\,6-2\}=4,$$

і збільшуємо на $r=4$ всі дугові потоки на μ_5, тоді дуга $(3,4)$ стане насиченою: $\varphi(3,4)=c(3,4)=6$.

Побудований потік $\varphi_z^{\text{п}}=2+1+5=2+6=8$ є повним, оскільки кожний шлях від x_0 до z містить хоча б одну насичену дугу.

Розрізи на ТМ. Теорема про мінімальні розрізи і максимальні потоки

Розіб'ємо множину вершин X на дві підмножини A і $\overline{A}=X\setminus A$ так, що вхід і вихід ТМ належатимуть різним множинам: $x_0\notin A,\ z\in A$. Сукупність дуг U_A, які з'єднують (сполучають) вершини із A з вершинами із $\overline{A}$ або навпаки, називають **розрізом на ТМ**.

Якщо позначити через U_A^- (U_A^+) множину дуг від вершин з $\overline{A}$ (A) до вершин з A $(\overline{A})$, то можна записати:

$$U_A=U_A^-\bigcup U_A^+. \qquad (3.6.4)$$

Розріз на ТМ виділяють розімкненою лінією, яка перетинає всі дуги розрізу U_A, або зімкненою лінією, яка (до того ж) охоплює всі вершини множини A.

Наприклад, на рис. 3.6.1а розріз $U_A=U_A^+\bigcup U_A^-$ визначають множини: $A=\{3,4\}$, $\overline{A}=\{0,1,2\}$, де $U_A^+=\{(3,2)\}$, $U_A^-=\{(0,3),(1,3),(2,4)\}$; на рис. 3.6.1б маємо: $A=\{4\}$, $\overline{A}=\{0,1,2,3\}$, $U_A^+=\varnothing$, $U_A^-=\{(2,4),(3,4)\}$, отже, $U_A=U_A^-$.

Дуги множини U_A^- (U_A^+) розрізу U_A називають **вхідними** (**вихідними**) **дугами розрізу**.

Величини

$$\varphi_A^- = \sum_{u \in U_A^-} \varphi(u), \quad \varphi_A^+ = \sum_{u \in U_A^+} \varphi(u)$$

називають відповідно **вхідним** і **вихідним потоками розрізу** U_A, а їхню різницю – **загальним потоком** $\boldsymbol{\varphi_A}$ **через розріз** U_A:

$$\varphi_A = \varphi_A^- - \varphi_A^+ = \sum_{u \in U_A^-} \varphi(u) - \sum_{u \in U_A^+} \varphi(u). \tag{3.6.5}$$

Із означень потоку φ_z на ТМ і загального потоку φ_A через розріз U_A випливає (факт не дуже дивний, але важливий), що вони дорівнюють один одному:

$$\varphi_z = \varphi_A = \varphi_A^- - \varphi_A^+ \quad \forall A \subset X \;\; (z \in A). \tag{3.6.6}$$

Дійсно, адже кожен об'єкт чи частка речовини, які рухаються від x_0 до z, обов'язково пройдуть по якій-небудь дузі розрізу, не накопичуючись (за умовою балансу) в жодній із проміжних вершин ТМ.

Пропускною спроможністю $\boldsymbol{c(U_A)}$ **розрізу** U_A називають суму пропускних спроможностей його вхідних дуг:

$$c(U_A) = \sum_{u \in U_A^-} c(u). \tag{3.6.7}$$

Легко встановити зв'язок між $c(U_A)$ і φ_z, а саме: пропускна спроможність будь-якого розрізу не менша від потоку на ТМ, тобто:

$$c(U_A) \ge \varphi_z. \tag{3.6.8}$$

Дійсно, на підставі (3.6.6) маємо:

$$\varphi_A^- = \sum_{u \in U_A^-} \varphi(u) = \varphi_z + \varphi_A^+.$$

Замінимо $\varphi(u)$ на $c(u)$, тоді й матимемо (3.6.8), оскільки $\varphi(u) \le c(u)$.

Розріз, який має найменшу пропускну спроможність серед усіх розрізів заданої ТМ, називають **мінімальним розрізом**.

Теорема (*про мінімальні розрізи і максимальні потоки*). Якщо для деякого потоку φ_z на ТМ і деякого розрізу U_B має місце рівність $\varphi_z = c(U_B)$, то:

1) розріз U_B мінімальний;

2) потік φ_z максимальний.

Доведення базується на зв'язку між пропускною спроможністю будь-якого розрізу і потоком на ТМ (3.6.8), а саме:

$$\varphi_z \le c(U_A) \ \forall A \subset X \ \ (z \in A).$$

1. За умовою теореми $\varphi_z = c(U_B)$, тоді

$$c(U_B) \le c(U_A) \Rightarrow c(U_B) = \min_A c(U_A),$$

де мінімум береться за всіма множинами A, які визначають усі можливі розрізи на ТМ.

2. Оскільки φ_z не перевищує пропускної спроможності будь-якого розрізу U_A, то він не може бути й більшим від мінімального розрізу:

$$\varphi_z \le c(U_A) \Rightarrow \varphi_z \le \min_A c(U_A) = c(U_B).$$

Отже, для максимального потоку φ_z^* маємо:

$$\varphi_z^* = c(U_B) = \min_A c(U_A). \qquad (3.6.9)$$

Наслідок. Максимальний потік φ_z^* на ТМ визначають розрізом U_B, у якого:

1) всі вхідні дуги насичені: $\varphi(u) = c(u) \ \ \forall u \in U_B^-$;

2) вихідних дуг немає: $U_B^+ = \varnothing$.

Доведення. На підставі (3.6.9) означення пропускної спроможності розрізу (3.6.7) і означення загального потоку через розріз (3.6.5) маємо:

$$\varphi_z^* = c(U_B) = \sum_{u \in U_B^-} c(u) = \sum_{u \in U_B^-} \varphi(u) - \sum_{u \in U_B^+} \varphi(u) = \varphi_B,$$

де $\varphi(u) = c(u) \ \ \forall u \in U_B^-$, $U_B^+ = \varnothing$.

Так, *наприклад*, на рис. 3.6.1б розріз $U_A = \{(2,4),(3,4)\}$ визначає максимальний потік $\varphi_z^* = 6$, оскільки він містить тільки вхідні дуги $(2,4)$, $(3,4)$ і обидві вони – насичені.

Доведена теорема і наслідок із неї є базовими положеннями для розв'язання задачі про знаходження максимального потоку на ТМ.

Задача про максимальний потік. Алгоритм Форда – Фалкерсона

Постановка задачі: за заданої конфігурації ТМ і відомих пропускних спроможностей її дуг знайдіть максимальний потік на ТМ, а також розподіл цього потоку за дугами.

Розглянемо доволі поширений метод розв'язання цієї задачі, основними складовими якого є дві процедури, а саме: "індексація вершин" і "зміна потоку". Їх виконують одна за одною доти, поки не дістануть максимальний потік.

І. Індексація вершин. Нехай здійснено розподіл деякого потоку φ_z за дугами ТМ, серед яких можуть бути як навантажені (зокрема насичені), так і ненавантажені (порожні).

Під **індексацією** (**зважуванням**) вершин ТМ розуміють процес приписування її вершинам x_0, x_1, …, $x_n = z$ чисел таким чином:

вершині x_0 приписують індекс (вагу) 0, або кажуть, що *вершину* x_0 *позначено* індексом 0;

якщо вершина з номером i, тобто x_i, уже зважена, то:

а) усі непозначені вершини y, в які із x_i ідуть *ненасичені* дуги, позначають індексом $(+i)$ (рис. 3.6.2а);

б) усі непозначені вершини y, із яких в x_i ідуть *навантажені* дуги, позначають індексом $(-i)$ (рис. 3.6.2б).

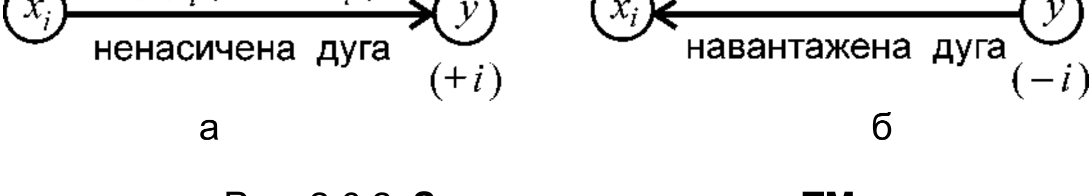


Рис. 3.6.2. **Зважування вершин ТМ:**
а) у які входять дуги; б) із яких виходять дуги

Якщо з непозначеної вершини y виходять дві або більше дуг до позначених вершин, то вершині y можна приписати індекс за будь-якою із цих позначених вершин (на результат розв'язання задачі це не вплине). Зазначимо також, що потік нульової величини $(\varphi(x, y) = 0)$ можна вважати спрямованим як від x до y, так і від y до x (під час індексації вершин необхідно розглядати обидва можливі напрямки).

Із процедури зважування вершин ТМ випливає, що вершині y (за умови вже зваженої вершини x_i) індексу приписати не можна, якщо дуга (x_i, y) *насичена* або дуга (y, x_i) *ненавантажена* (порожня).

Припустимо, що внаслідок процесу індексації вершин вихід ТМ z разом із деякими іншими вершинами (або без них) виявився непроіндексованим. Це, згідно зі сказаним у попередньому абзаці, означає, що:

1) розріз, який визначає множина непозначених вершин, має тільки насичені вхідні дуги;

2) вихідних дуг немає, оскільки у протилежному випадку початкові вершини навантажених дуг розглянутого розрізу були б позначені від'ємними індексами.

Отже, згідно з наслідком із теореми про мінімальні розрізи й максимальні потоки, розріз, який визначає множина непозначених вершин ТМ, дає максимальний потік φ_z^*. Якщо ж вершину z у результаті індексації буде позначено, то потік на ТМ не є максимальним; отже, його можна збільшити.

ІІ. Зміна потоку. Нехай вихід ТМ z у процесі зважування вершин набув якогось індексу. Тоді існує шлях $\mu = \mu_{x_0 z}$ від x_0 до z, усі вершини якого різні і, починаючи із другої, позначені (без урахування знаку) номерами попередніх вершин.

Наприклад, якщо $\mu = (x_0 \to x_2 \to x_4 \to x_5 = z)$, або (за номерами вершин) $\mu = (0 \to 2 \to 4 \to 5)$, то кортеж I_μ індексів вершин (із точністю до знака) на цьому шляху матиме вигляд: $I_\mu = (0, 0, 2, 4)$.

На шляху μ можуть бути дуги, орієнтація яких співпадає або не співпадає з напрямком руху по μ (від x_0 до z). Дугу $u \in U$, орієнтовану в напрямку (проти напрямку) руху по μ, назвемо **попутною** (**зустрічною**), а відповідну обставину позначимо символом $u \uparrow\uparrow \mu$ $(u \uparrow\downarrow \mu)$. Потоки на цих дугах теж називатимемо **попутними**, або **зустрічними**.

Згідно з процедурою індексації, кінцеві вершини попутних ненасичених дуг набувають додатних індексів, а початкові вершини навантажених зустрічних дуг – від'ємних індексів (рис. 3.6.2).

Зміну потоку на ТМ у бік його збільшення проводять так: знаходять шлях μ від x_0 до z (із проіндексованими, як показано раніше, вершинами) і дугові потоки $\varphi(u)$ на ньому замінюють новими:

$$\varphi'(u) = \begin{cases} \varphi(u)+1, & \text{якщо } u \uparrow\uparrow \mu, \\ \varphi(u)-1, & \text{якщо } u \uparrow\downarrow \mu. \end{cases} \tag{3.6.10}$$

Тобто попутні (зустрічні) дугові потоки збільшують (зменшують) на одиницю, унаслідок чого дістанемо новий потік на ТМ: $\varphi'_z = \varphi_z + 1$. Після кожної зміни потоку повертаються до індексації вершин, аж поки вихід z неможливо буде позначити.

Потік φ_z можна (за певних умов) одразу збільшити не на одиницю, а на величину $r > 1$, яку визначають потоками на дугах та їхніми пропускними спроможностями. Так, згідно з (3.6.10), зустрічний дуговий потік залишається зустрічним, якщо $\varphi(u) > 1$, або стає нульовим, якщо $\varphi(u) = 1$. В останньому випадку за наступної зміни потоку зустрічна раніше дуга може бути переорієнтована в попутну, тобто зміниться напрямок її дугового потоку і по ній надалі можна пропустити попутний потік, не менший від її пропускної спроможності.

Зважаючи на це, якщо для попутних дуг обчислити мінімальну різницю між $c(u)$ і $\varphi(u)$:

$$r^+ = \min_{u \uparrow\uparrow \mu} \{c(u) - \varphi(u)\}, \tag{3.6.11}$$

а для зустрічних дуг знайти мінімальний потік:

$$r^- = \min_{u \uparrow\downarrow \mu} \{\varphi(u)\}, \tag{3.6.12}$$

то попутні (зустрічні) дугові потоки можна збільшити (зменшити) на величину r:

$$r = \min\{ r^+, r^- \}, \tag{3.6.13}$$

тобто

$$\varphi'(u) = \begin{cases} \varphi(u) + r, & \text{якщо } u \uparrow\uparrow \mu, \\ \varphi(u) - r, & \text{якщо } u \uparrow\downarrow \mu. \end{cases}$$

Унаслідок цього одна із зустрічних дуг може стати порожньою. Зрозуміло, що за відсутності зустрічних дуг $r = r^+$. Такий підхід до зміни потоку сприяє значному зменшенню кількості індексацій, що скорочує розв'язання задачі загалом. Зазначимо також, що індексацію вершин і зміну потоку можна проводити, відштовхуючись від розподілу довільного потоку φ_z (навіть нульового), але краще застосувати їх до повного потоку $\varphi_z^{п}$, щоб зменшити кількість обчислень.

Підсумовуючи розглянуте, наведемо у вигляді орграфа (для наочності) **алгоритм Форда – Фалкерсона** – послідовність операцій, які треба виконати для знаходження максимального потоку на ТМ із розподілом його за дугами (рис. 3.6.3).

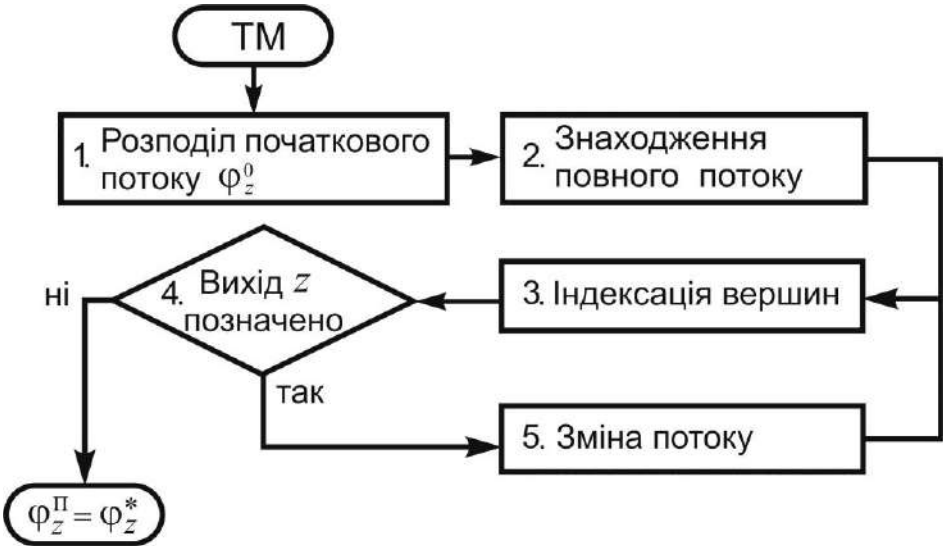


Рис. 3.6.3. **Структурна схема алгоритму Форда – Фалкерсона**

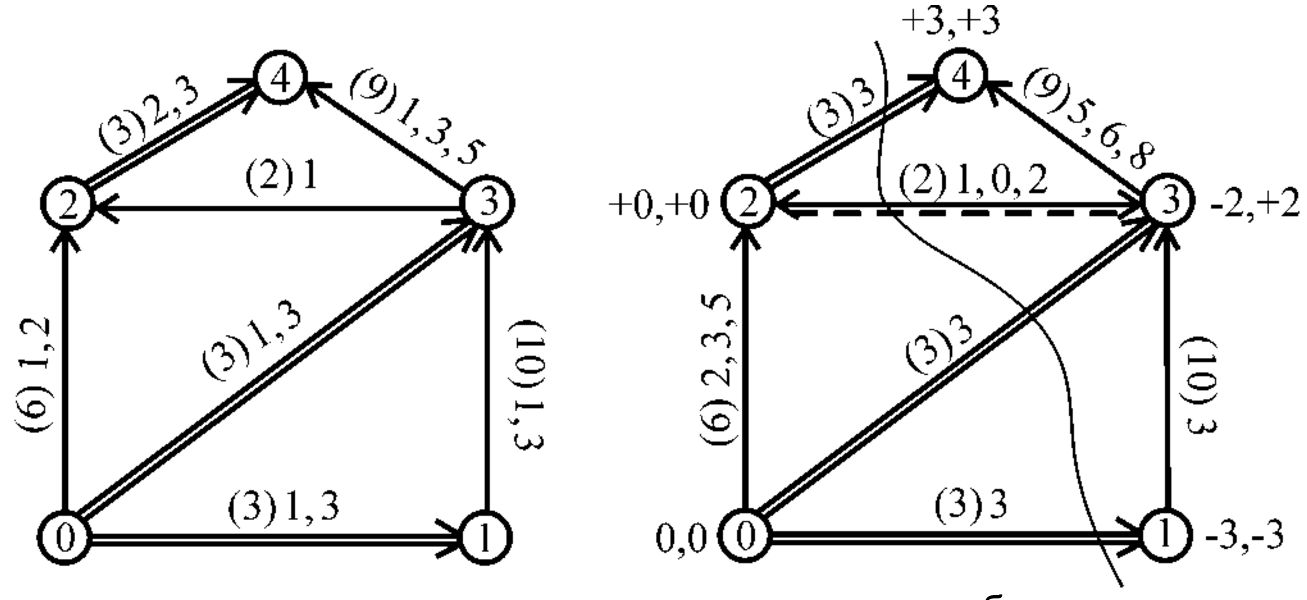
Насамкінець розглянемо реалізацію алгоритму на конкретній ТМ.

Задача 3.6.1. Знайдіть максимальний потік на транспортній мережі, зображеній на рис. 3.6.4а.

Розв'язання:

Діятимемо згідно зі схемою на рис. 3.6.3.

1. Виберемо початковий потік $\varphi_z^0 = 3$ (за кількістю дуг, що виходять з x_0) і приймемо, що: $\varphi(0,1) = \varphi(0,2) = \varphi(0,3) = 1$.



а б

Рис. 3.6.4. **Транспортна мережа:**
а) побудова повного потоку; б) індексація вершин та знаходження максимального потоку на ТМ

Потім, враховуючи умову балансу (3.6.2), маємо $\varphi(1,3)=1$ і візьмемо $\varphi(3,2)=\varphi(3,4)=1$ (адже до вершини x_3 надходить дві одиниці потоку), тоді $\varphi(2,4)=2$. Усі дуги виявилися навантаженими, але сформований потік не є повним (насичені дуги зовсім відсутні).

2. Для знаходження повного потоку перетворюємо кожний неповний шлях від x_0 до $x_4 = z$ на повний.

Розглядаємо шлях $\mu_1 = (0 \to 2 \to 4)$ і підраховуємо для його дуг величину $r = r^+$ (адже усі дуги на шляху μ_1 попутні):

$$r = r^+ = \min_{u \uparrow\uparrow \mu_1} \{c(u) - \varphi(u)\} = \min \{c(0,2) - \varphi(0,2), c(2,4) - \varphi(2,4)\} =$$
$$= \min\{ 6-1, 3-2\} = 1.$$

Збільшуємо дугові потоки всіх дуг шляху μ_1 на $r=1$; нові дугові потоки записані через кому з попередніми: $\varphi(0,2)=2$, $\varphi(2,4)=3=c(2,4)$, тобто дуга $(2,4)$ стала насиченою.

Аналогічно для шляху $\mu_2 = (0 \to 3 \to 4)$ дістанемо:

$$r = r^+ = \min\{ c(0,3) - \varphi(0,3), c(3,4) - \varphi(3,4)\} = \min\{ 3-1, 9-1\} = 2,$$
$$\varphi(0,3) = 1+2 = 3 = c(0,3), \quad \varphi(3,4) = 1+2 = 3.$$

Нарешті, для $\mu_3 = (0 \to 1 \to 3 \to 4)$ маємо:

$$r = r^+ = \min\{\,3-1, 10-1, 9-3\} = 2,$$

$$\varphi(0,1) = 1 + 2 = 3 = c(0,1), \quad \varphi(1,3) = 1 + 2 = 3, \quad \varphi(3,4) = 3 + 2 = 5.$$

Тепер кожен шлях від входу до виходу ТМ є повним. Отже, побудовано повний потік: $\varphi_z^{\text{п}} = 3 + 2 + 3 = 3 + 5 = 8$.

3. Індексацію вершин (і подальші кроки) будемо проводити, виходячи з повного потоку (рис. 3.6.4б).

Припишемо початковій вершині індекс 0. Тоді можна проіндексувати вершину x_2 (присвоюємо їй індекс $(+0)$), адже дуга $(0,2)$ ненасичена; вершини x_1, x_3, відштовхуючись від x_0, проіндексувати не можна, оскільки дуги $(0,1)$, $(0,3)$ насичені. Дуга $(3,2)$ навантажена й орієнтована в бік позначеної вершини x_2, отже, вершина x_3 набуває індексу (-2). На тій самій підставі вершині x_1 приписуємо індекс (-3); вершині ж $x_4 = z$ приписуємо індекс $(+3)$, оскільки дуга $(3,4)$ ненасичена й виходить із проіндексованої вершини x_3.

4. Вихід ТМ виявився позначеним. Отже, потік $\varphi_z = 8$ хоча і повний, але не максимальний.

5. Для зміни потоку ТМ знаходимо шлях μ від x_0 до $z = x_4$, вершини якого позначені (з точністю до знаку) номерами попередніх вершин:

$$\mu = \left(0 \to 2 \to 3 \to 4\right), \quad I_\mu = \left(0, 0, -2, +3\right).$$

На цьому шляху дві попутні дуги: $(0,2)$, $(3,4)$ і одна – зустрічна – $(3,2)$. Підрахуємо, на скільки одиниць можна збільшити дугові потоки попутних дуг і зменшити – зустрічної:

$$r^+ = \min\{6-2, 9-5\} = 4, \quad r^- = 1, \quad r = \min\{\,r^+, r^-\} = \min\{\,4,1\} = 1.$$

Тоді нові дугові потоки будуть такими:

$$\varphi(0,2) = 2+1 = 3,\ \varphi(3,2) = 0,\ \varphi(3,4) = 5+1 = 6,$$

а потік на ТМ: $\varphi_z = 9$.

3′. Повертаємося до індексації вершин. Дуга $(3,2)$ ненавантажена й за наступної індексації вершина x_3 вже не набуде від'ємного індексу; проте як ненасичена (орієнтована від x_2 до x_3) дуга вона дозволяє проіндексувати вершину x_3 додатним індексом $(+2)$. Індекси вершин x_1, x_2, x_4 не зміняться (рис. 3.6.4б).

4′. Вихід ТМ знову проіндексовано. Отже, потік $\varphi_z = 9$ хоча і повний, але не максимальний.

5′. Знову аналізуємо шлях $\mu = (0 \to 2 \to 3 \to 4)$ з кортежем індексів $I_\mu = (0, 0, +2, +3)$. Усі дуги на цьому шляху попутні:

$$r = r^+ = \min\{6-3, 2-0, 9-6\} = 2.$$

Отже, збільшуємо дугові потоки на дві одиниці:

$$\varphi(0,2) = 3+2 = 5,\ \varphi(2,3) = 0+2 = 2 = c(2,3),\ \varphi(3,4) = 6+2 = 8,$$

а $\varphi_z = 11$.

Дуга $(2,3)$ стала насиченою (на рис. 3.6.4б це позначено двома лініями, одна з яких – пунктирна, що відтворює переорієнтацію дуги $(3,2)$). Отже, за наступної індексації ми зможемо проіндексувати лише вершини x_0 і x_2.

Множина непроіндексованих вершин $B = \{x_1, x_3, x_4 = z\}$ визначає розріз на ТМ:

$$U_B = \{(0,1), (0,3), (2,3), (2,4)\},$$

який не містить вихідних дуг, а всі вхідні дуги якого – насичені. Він і дає максимальний потік φ_z^* з відповідним розподілом за дугами ТМ:

$$\varphi_z^* = 3+3+2+3 = 3+3+5 = 3+8 = 11.$$

3.7. Задачі та вправи до теми 3

Зразки розв'язання типових задач

1. На заданому навантаженому зв'язному неорієнтованому графі (рис. 3.7.1) побудуйте економічне дерево, знайдіть його довжину і зобразіть упорядкованим за рівнями вершин.

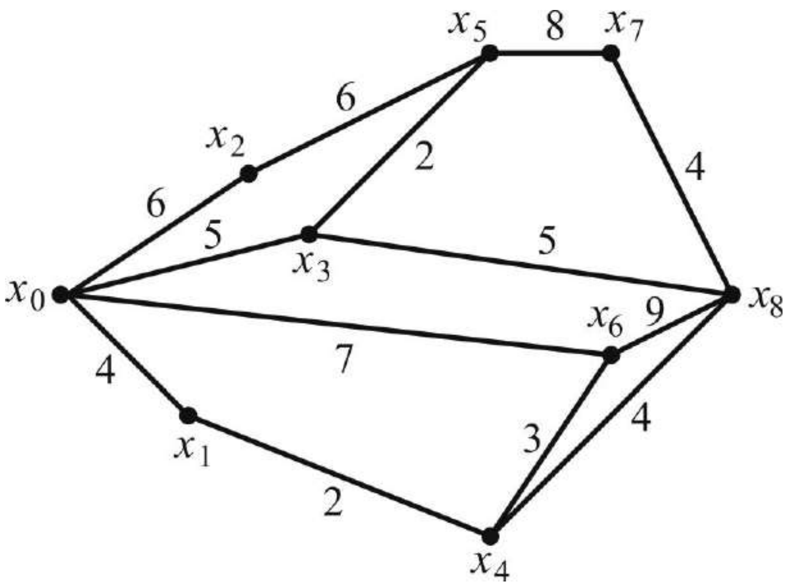


Рис. 3.7.1. **Вихідний граф до задачі 1**

Розв'язання:

Задача побудови економічного дерева розв'язується за алгоритмом, який описано в п. 3.3. Довжину ребра $\{x_i, x_j\}$ позначимо через d_{ij}, де $i, j \in \{0,1,2,...,8\}$.

Вибираємо послідовно ребра з пріоритетом за мінімумом їхньої довжини і так, щоб не утворювалось циклів (рис. 3.7.2а). До того ж, слід пам'ятати, що кількість ребер покривного дерева має бути на одиницю меншою, ніж кількість вершин графа, тобто *вісім*:

$$d_{27} = 2,\ d_{65} = 2,\ d_{74} = 3,\ d_{78} = 4,\ d_{38} = 4,\ d_{02} = 4,\ d_{68} = 5,\ d_{15} = 6.$$

Ребра побудованого дерева на рис. 3.7.2а позначено пунктирними лініями, а їхня сумарна довжина дорівнює:

$$l^* = 2 + 2 + 3 + 4 + 4 + 4 + 5 + 6 = 30.$$

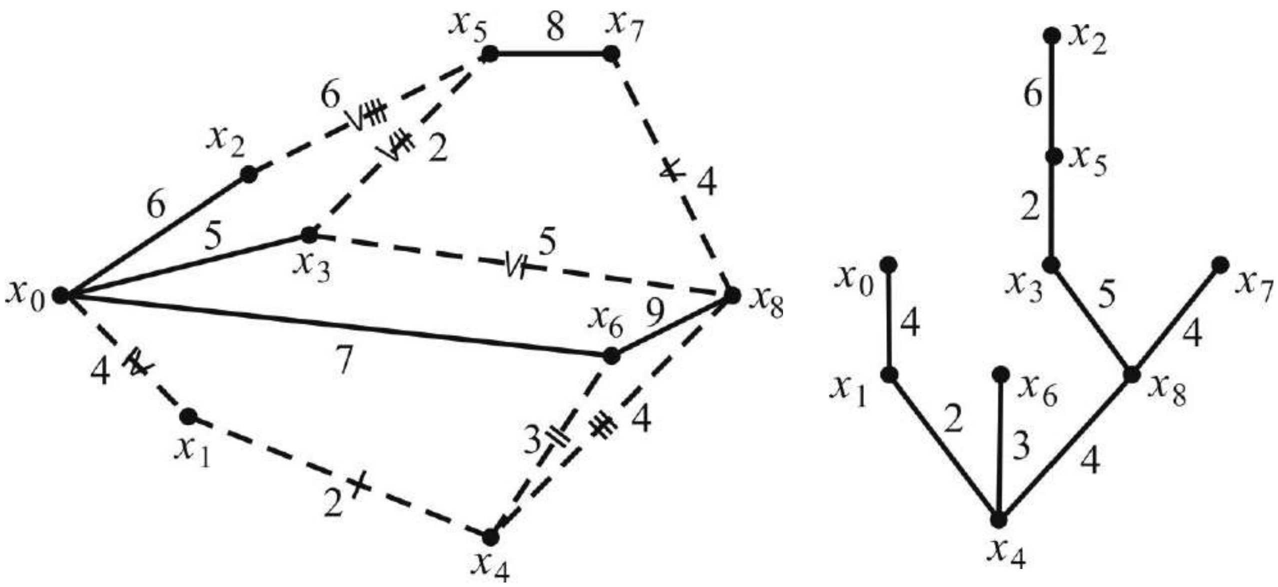
Зауважимо, що:

після вибору ребра $\{x_6, x_8\}$ довжини $d_{68} = 5$ ми не можемо взяти друге ребро такої ж довжини – $\{x_0, x_6\}$, оскільки утворився б цикл $(0-6-8-7-2-0)$;

інші покривні дерева мінімальної довжини можна дістати, якщо замість ребра $\{x_1, x_5\}$ взяти ребро $\{x_0, x_1\}$ і (або) замість $\{x_6, x_8\}$ – ребро $\{x_0, x_6\}$.

Побудувати екстремальне дерево можна було б і так: після вибору ребра найменшої довжини на кожному наступному кроці додавати (приєднувати) суміжне (до вже обраних ребер) ребро найменшої довжини із тих, що залишилися; у цьому випадку ребра залучалися б у порядку, визначеному римськими цифрами.

На рис. 3.7.2б зображено знайдене економічне дерево, упорядковане за рівнями вершин за умови, що його корінь – вершина x_4.



а б

Рис. 3.7.2. **Побудова економічного дерева:**
а) економічне дерево на вихідному графі;
б) економічне дерево, упорядковане за рівнями вершин

2. На вихідному графі задачі 1 знайдіть найкоротший ланцюг $L^*(0{,}8)$ між вершинами x_0 і x_8 та його довжину $d_{L^*(0,8)}$.

Розв'язання:

Знаходження ланцюга найменшої довжини між двома вершинами графа здійснюватимемо методом індексації (зважування) вершин, згідно з яким кінцевій вершині x_8 присвоюємо індекс 0 ($p_8 = 0$), а решті вершин – індекс $+\infty$ ($p_j = +\infty$, $j \neq 8$); на рис. 3.7.3 вони не зображені. Індекси будемо надписувати над або під позначенням вершин.

Далі для кожної пари суміжних вершин x_i, x_j перевіряємо, чи буде мати місце нерівність $p_j - p_i > d_{ij}$, де d_{ij} – довжина ребра $\{x_i, x_j\}$. Якщо "так", то вершинам x_j приписуємо нові індекси замість $+\infty$: $p_j^1 = p_i + d_{ij}$.

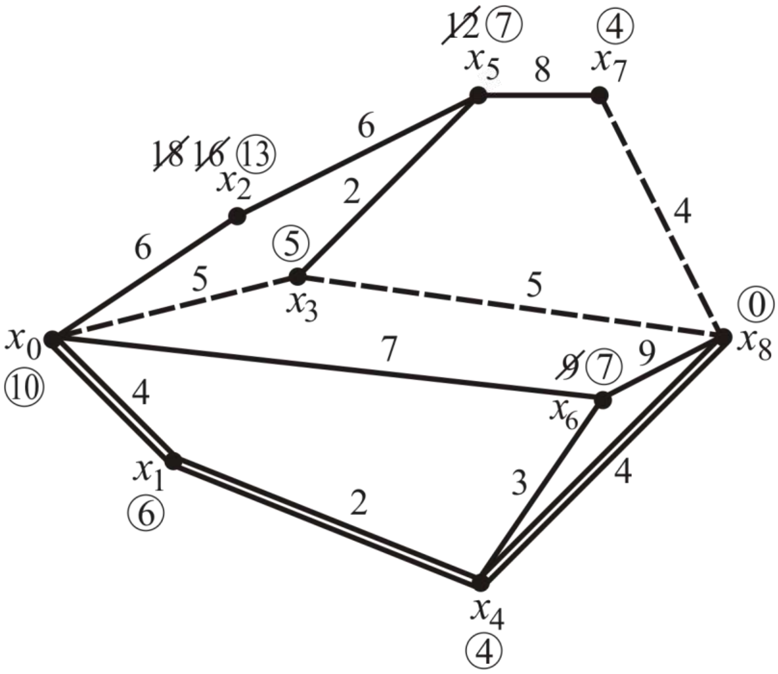


Рис. 3.7.3. **Знаходження ланцюга найменшої довжини**

Для $i = 8$, $j = 7, 6, 4, 3$ маємо: $p_j - p_8 > d_{8j}$, отже, нові індекси вершин x_7, x_6, x_4 і x_3 будуть такими (див. рис. 3.7.3):

$$p_7^{í} = p_8 + d_{87} = 4, \quad p_6^{í} = p_8 + d_{86} = 9,$$
$$p_4^{í} = p_8 + d_{84} = 4, \quad p_3^{í} = p_8 + d_{83} = 5.$$

Аналогічно для вершин x_5, x_2, x_1 маємо індекси:

$$p_5^{í} = p_7 + d_{75} = 4 + 8 = 12, \quad p_2^{í} = p_5 + d_{52} = 12 + 6 = 18,$$
$$p_1^{í} = p_4 + d_{41} = 4 + 2 = 6.$$

Переіндексацію вершини x_0 можна здійснити неоднозначно, відштовхуючись від однієї з вершин x_1, x_2, x_3. Щоб уникнути багаторазового переважування вершин, доцільно з усіх можливих варіантів індексації вибирати той, який дає *найменшу вагу*. У нашому випадку для x_0 маємо:

$$p_0^{í} = p_3 + d_{30} = 5 + 5 = 10 \quad \text{(або } p_0^{í} = p_1 + d_{10} = 6 + 4 = 10\text{)}.$$

Після "зняття" індексів $p_j = +\infty$ знову перевіряємо виконання умови $p_j - p_i > d_{ij}$ для кожної пари суміжних вершин; для виявлених таких пар знаходимо нові індекси відповідних вершин (на рис. 3.7.3. "старі" індекси закреслено):

$$p_6 - p_4 = 9 - 4 > 3 = d_{64} \Rightarrow p_6^{\text{í}} = 4 + 3 = 7\,,$$

$$p_5 - p_3 = 12 - 5 > 2 = d_{53} \Rightarrow p_5^{\text{í}} = 5 + 2 = 7\,,$$

$$p_2 - p_0 = 18 - 10 > 6 = d_{02} \Rightarrow p_2^{\text{í}} = 10 + 6 = 16\,.$$

Індекс вершини x_2 ще можна поновити:

$$p_2 - p_5 = 16 - 7 > 6 = d_{25} \Rightarrow p_2^{\text{í}} = 7 + 6 = 13\,.$$

Тепер процес індексації закінчено, оскільки немає таких пар суміжних вершин x_i, x_j, для яких $p_j - p_i > d_{ij}$.

Ланцюг $L^*(0{,}8)$ найменшої довжини, що з'єднує вершини x_0, x_8 знаходимо, відштовхуючись від вершини x_0, індекс якої $p_0 = 10$ вказує на довжину цього ланцюга: на кожному кроці беремо таке ребро, різниця індексів інцидентних вершин якого дорівнює довжині цього ребра.

У нашому випадку існує два оптимальних ланцюги:

$$L_1^*(0,8) = (x_0 - x_3 - x_8)\,,$$

ребра якого на рисунку зображено однією пунктирною лінією, і

$$L_2^*(0{,}8) = (x_0 - x_1 - x_4 - x_8)\,,$$

ребра якого зображено двома суцільними лініями.

Зазначимо, що:

коли на кожному кроці переважування вершин стежити за тим, щоб було обрано найменший з усіх можливих індексів, то процес індексації можна суттєво скоротити;

вага кожної вершини (а не тільки x_0) вказує на довжину найкоротшого ланцюга, що з'єднує розглядувану вершину з кінцевою вершиною x_8. *Пропонуємо* переконатися в цьому, самостійно аналізуючи результати проведеної індексації.

3. Розглядаючи орграф на рис. 3.7.4 як сітковий графік із відомими тривалостями робіт, знайдіть критичний час $t_{кр}$ і критичний шлях $\mu_{кр}$ на ньому.

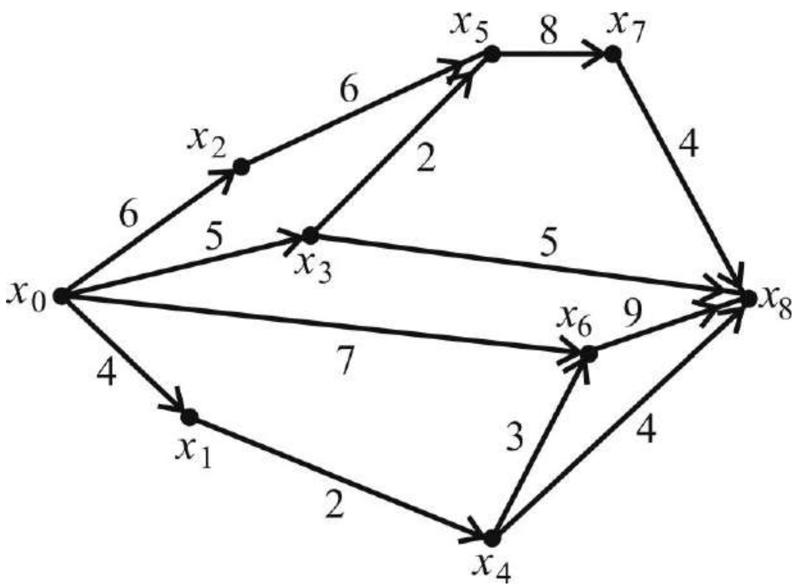


Рис. 3.7.4. **Вихідний орграф до задачі 3**

Розв'язання:

За смислом задачі довжина орієнтованого ребра (x_i, x_k) на ньому (x_i, x_k – вершини-події СГ, $i, k \in \{0,1,2,...,8\}$, $i < k$) вказує на тривалість роботи $t(x_i, x_k)$, яка починається подією x_i і закінчується подією x_k.

Зобразимо кожну вершину-подію x_i СГ кружечком, у сектори якого занесемо номер події (i), ранній $(t_p(i))$ і пізній $(t_п(i))$ строки її звершення та резерв часу $(R(i))$. Надалі вершини СГ позначатимемо їхніми номерами, тобто замість x_i, x_k писатимемо i, k.

Згідно з алгоритмом знаходження критичного часу і критичного шляху (див. п. 3.5) розрахунки на СГ проводитимемо в чотири етапи.

Спочатку обчислюємо ранній строк звершення кожної події: якщо k-ю подією закінчується одна робота (i, k), то: $t_p(k) = t_p(i) + t(i, k)$, і якщо k-ю подією закінчується кілька робіт – множина $\underset{\to k}{U}$, то за кожною роботою знаходять свій ранній строк, а шуканим $t_p(k)$ буде найбільший із них: $t_p(k) = \max\limits_{(i,k) \in \underset{\to k}{U}} \{t_p(i) + t(i, k)\}$.

Отже, за вхідними відносно кожної події дугами маємо:

$$t_p(0)=0,$$

оскільки початковій події не передує ніяка робота;

кожною з подій 1, 2, 3, 4 закінчується одна робота, отже:

$$t_p(1)=t_p(0)+t(0,1)=0+4=4,$$
$$t_p(2)=t_p(0)+t(0,2)=0+6=6,$$
$$t_p(3)=t_p(0)+t(0,3)=0+5=5,$$
$$t_p(4)=t_p(1)+t(1,4)=4+2=6;$$

подією 5 закінчуються дві роботи, а саме: $\underset{\to 5}{U}=\{(2,5),(3,5)\}$, тому:

$$t_p(5)=\max\{t_p(2)+t(2,5), t_p(3)+t(3,5)\}=\max\{6+6, 5+2\}=12;$$

подією 6 закінчуються дві роботи: $\underset{\to 6}{U}=\{(0,6),(4,6)\}$, через те:

$$t_p(6)=\max\{t_p(0)+t(0,6), t_p(4)+t(4,6)\}=\max\{0+7, 6+3\}=9;$$

подією 7 закінчується одна робота, отже:

$$t_p(7)=t_p(5)+t(5,7)=12+8=20;$$

подією 8 закінчуються роботи: $\underset{\to 8}{U}=\{(3,8),(4,8),(6,8),(7,8)\}$, тому:

$$t_p(8)=\max\{t_p(3)+t(3,8), t_p(4)+t(4,8), t_p(6)+t(6,8), t_p(7)+t(7,8)\}=$$
$$=\max\{5+5, 6+4, 9+9, 20+4\}=24.$$

Усі здобуті $t_p(k)$, $k=\overline{0,8}$, вписуємо у ліворуч розташовані сектори вершин-подій СГ (рис. 3.7.5), причому $t_p(8)$ дає водночас пізній строк звершення кінцевої події $t_{п}(8)$ і критичний час, тобто:

$$t_p(8)=t_{п}(8)=t_{кр}=24.$$

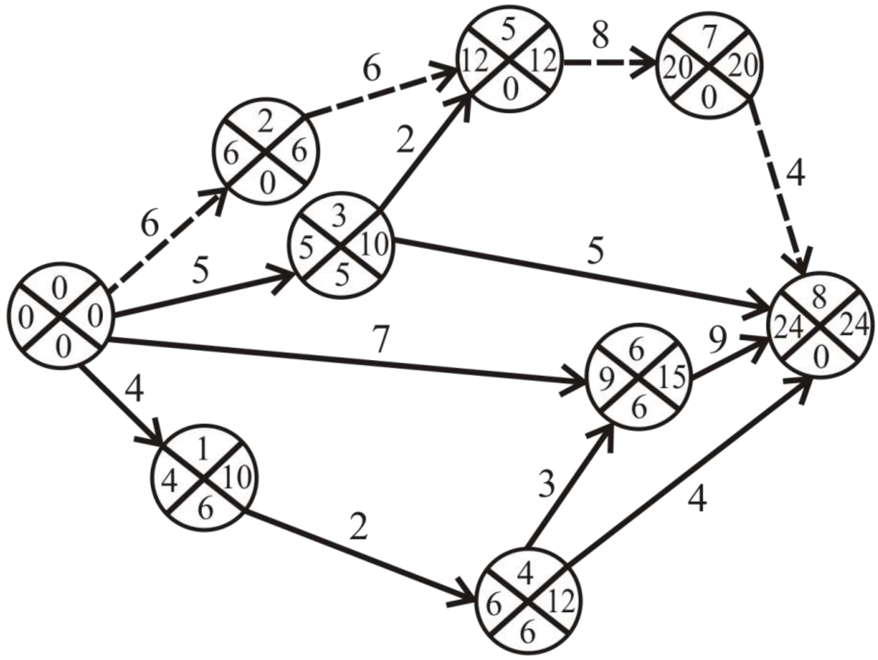


Рис. 3.7.5. **Знаходження критичного часу і критичного шляху на СГ**

Далі, відштовхуючись від кінцевої події x_8, знаходимо пізні строки звершення подій: якщо подією i починається одна робота (i,k), то: $t_{\text{П}}(i) = t_{\text{П}}(k) - t(i,k)$, і якщо i-ю подією починається кілька робіт (множина $\underset{i\to}{U}$), то за кожною роботою знаходять свій пізній строк, а шуканим $t_{\text{П}}(i)$ буде мінімальний із них: $t_{\text{П}}(i) = \min\limits_{(i,k)\in \underset{i\to}{U}} t_{\text{П}}(k) - t(i,k)$.

Отже, за вихідними відносно кожної події дугами маємо:

кожною з подій 7, 6, 5 починається одна робота, отже:

$$t_{\text{П}}(7) = t_{\text{П}}(8) - t(7,8) = 24 - 4 = 20,$$
$$t_{\text{П}}(6) = t_{\text{П}}(8) - t(6,8) = 24 - 9 = 15,$$
$$t_{\text{П}}(5) = t_{\text{П}}(7) - t(5,7) = 20 - 8 = 12;$$

подією 4 починаються дві роботи, а саме: $\underset{4\to}{U} = \{(4,6),(4,8)\}$, тому:

$$t_{\text{П}}(4) = \min\{\, t_{\text{П}}(6) - t(4,6),\, t_{\text{П}}(8) - t(4,8)\} = \min\{\,15-3,\ 24-4\} = 12;$$

подією 3 починаються дві роботи $\underset{3\to}{U} = \{(3,5),(3,8)\}$, через те:

$$t_{\text{П}}(3) = \min\,\{t_{\text{П}}(5) - t(3{,}5),\, t_{\text{П}}(8) - t(3{,}8)\} = \min\{\,12-2,\, 24-5\} = 10;$$

кожною з подій 2, 1 починається одна робота, отже:

$$t_{\text{п}}(2) = t_{\text{п}}(5) - t(2{,}5) = 12 - 6 = 6;$$
$$t_{\text{п}}(1) = t_{\text{п}}(4) - t(1,4) = 12 - 2 = 10;$$

подією 0 (початковою подією) починаються чотири роботи, а саме: $\underset{0\to}{U} = \{(0,1),(0,2),(0,3),(0,6)\}$, тому:

$$t_{\text{п}}(0) = \min\{\, t_{\text{п}}(1) - t(0,1), t_{\text{п}}(2) - t(0,2), t_{\text{п}}(3) - t(0,3), t_{\text{п}}(4) - t(0,4)\} =$$
$$= \min\{\, 10-4, 6-6, 10-5, 15-7\} = 0.$$

Усі здобуті $t_{\text{п}}(i)$, $i = \overline{0,8}$, вписуємо у праворуч розташовані сектори вершин-подій сіткового графіка (див. рис. 3.7.5).

На наступному кроці підрахуємо резерв часу кожної події (див. формулу (3.5.6)): $R(i) = t_{\text{п}}(i) - t_p(i)$, $i = \overline{0,8}$, і вписуємо ці числа у нижні сектори вершин графа (див. рис. 3.7.5):

$$R(0) = 0,\ R(1) = 10 - 4 = 6,\ R(2) = 6 - 6 = 0,\ R(3) = 10 - 5 = 5,$$
$$R(4) = 12 - 6 = 6,\ R(5) = 12 - 12 = 0,\ R(6) = 15 - 9 = 6,$$
$$R(7) = 20 - 20 = 0,\ R(8) = 24 - 24 = 0.$$

Заключний етап потребує, крім арифметики, візуального аналізу СГ: рухаючись від x_0 до x_8, знаходимо орланцюг довжини $t_{\text{кр}} = 24$, події якого мають нульовий резерв часу; він і визначає критичні (найбільш відповідальні) роботи комплексу і загалом критичний шлях на СГ (на рис. 3.7.5 він зображений пунктирною ламаною):

$$\mu_{\text{кр}} = (0 \to 2 \to 5 \to 7 \to 8).$$

Для своєчасного завершення всіх робіт комплексу критичні роботи $(0,2)$, $(2,5)$, $(5,7)$, $(7,8)$ обов'язково мають бути виконані без затримки в часі; виконання роботи $(0,5)$ можна затримати на 5 одиниць часу, а робіт $(0,1)$, $(1,4)$, $(4,6)$ – на 6 одиниць часу, і це не вплине на строк реалізації проєкту загалом без запізнення (за час $t_{\text{кр}} = 24$).

Зазначимо, що СГ може бути таким, що на ньому існує декілька критичних (найдовших) шляхів, довжина кожного з яких дорівнює $t_{\text{кр}}$.

4. Розглядаючи орграф із задачі 3 (див. рис. 3.7.4) як транспортну мережу із заданими пропускними спроможностями її дуг, знайдіть максимальний потік на ній і його розподіл за дугами.

Розв'язання:

Задачу про максимальний потік на ТМ і його розподіл за дугами розв'язуватимемо на орграфі, зображеному на рис. 3.7.6, де x_0 – вхід ТМ, x_8 – вихід ТМ, x_i $(i=\overline{1,7})$ – проміжні вузли мережі. За смислом задачі приписані раніше довжини ребер тепер означатимуть пропускні спроможності дуг (вони вказані в круглих дужках приблизно посередині орребер), а поруч записуватимемо дугові потоки.

За алгоритмом Форда – Фалкерсона (див. п. 3.6) спочатку виберемо якийсь початковий потік $\varphi_{x_0}^0$ із вершини x_0 і здійснимо його розподіл за дугами, враховуючи при цьому умову обмеженості (3.6.1) – дугові потоки не мають перевищувати пропускних спроможностей дуг $(\varphi(u)\le c(u))$ і умову балансу (3.6.2) для проміжних вузлів ТМ – сума дугових потоків до вершини x має дорівнювати сумі дугових потоків від вершини x.

Візьмемо $\varphi_{x_0}^0=15$ і здійснимо один із можливих його розподілів за всіма дугами ТМ:

$$\varphi_{x_0}^0=\varphi(0,1)+\varphi(0,2)+\varphi(0,3)+\varphi(0,6)=2+3+5+5=15;$$

$$\varphi(0,1)=\varphi(1,4)=2=c(1,4);$$

$$\varphi(0,2)=\varphi(2,5)=3;$$

$$\varphi(0,3)=c(0,3)=5=\varphi(3,5)+\varphi(3,5)=1+4;$$

$$\varphi(2,5)+\varphi(3,5)=3+1=\varphi(5,7)=\varphi(7,8)=c(7,8)=4;$$

$$\varphi(0,6)=5=\varphi(6,4)+\varphi(6,8)=2+3;$$

$$\varphi(1,4)+\varphi(6,4)=2+2=\varphi(4,8)=c(4,8)=4.$$

Підрахуємо (для контролю) вхідний потік у вершину $x_8=z$:

$$\varphi_z^0=\varphi(7,8)+\varphi(3,8)+\varphi(6,8)+\varphi(4,8)=4+4+3+4=15=\varphi_{x_0}^0.$$

На рис. 3.7.6 відповідні дугові потоки вказано поруч із пропускними спроможностями дуг.

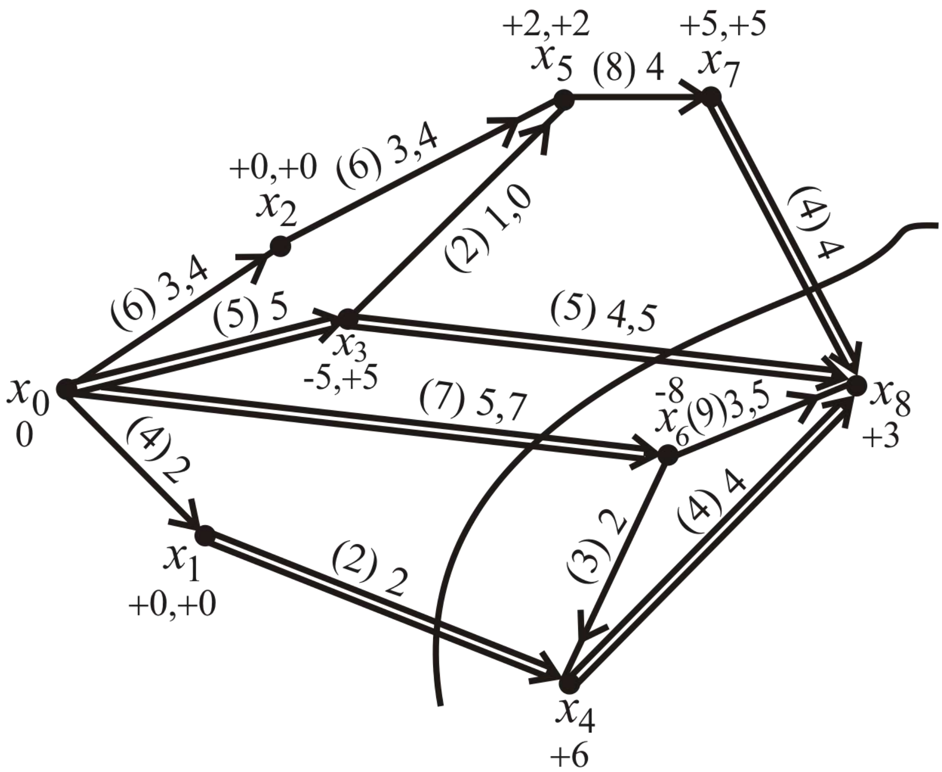


Рис. 3.7.6. **Знаходження максимального потоку на ТМ**

Далі аналізуємо всі шляхи від x_0 до z з метою встановлення того, повні вони чи неповні:

шляхи (за номерами вузлів) $(0 \to 3 \to 8)$, $(0 \to 3 \to 5 \to 7 \to 8)$, $(0 \to 2 \to 5 \to 7 \to 8)$, $(0 \to 1 \to 4 \to 8)$, $(0 \to 6 \to 4 \to 8)$ є повними, оскільки містять насичені дуги $(0,3)$, $(7,8)$, $(4,8)$ відповідно;

шлях $(0 \to 6 \to 8)$ – неповний, адже не містить жодної насиченої дуги. Пропускні спроможності його дуг $(0,6)$, $(6,8)$ дають можливість збільшити потік на ньому на дві одиниці, після чого дуга $(0,6)$ стане насиченою: $\varphi(0,6)=c(0,6)=7$, а потік $\varphi_z = \varphi_z^0 + 2$ – повним: $\varphi_z^{\text{п}} = 15+2=17$. Нові дугові потоки $\varphi'(0,6)=7$ і $\varphi'(6,8)=5$ вказано через кóму після попередніх 5, 3.

Переходимо до процедури індексації вершин. Вершині x_0 приписуємо індекс $p_0 = 0$, після чого індексуємо вершини x_1, x_2, оскільки дуги $(0,1)$, $(0,2)$ ненасичені: $p_1 = p_2 = +0$. Проіндексована вершина x_0 не дає змоги зважити вершини x_3 і x_6, адже до них ідуть насичені дуги. Так само ми не можемо зважити x_4, хоча вершина x_1 проіндексована.

Далі послідовно дістаємо:

$p_5 = +2$, оскільки $\varphi(2,5) = 3 < c(2,5) = 6$ і x_2 позначена;

$p_7 = +5$, адже $\varphi(5,7) = 4 < c(5,7) = 8$ і x_5 зважена;

$p_3 = -5$, оскільки дуга $(3,5)$ навантажена $(\varphi(3,5) = 1 > 0)$ і x_5 проіндексована;

$p_8 = +3$, адже дуга $(3,8)$ ненасичена і x_3 позначена;

$p_6 = -8$, оскільки $\varphi(6,8) = 5 > 0$ і x_8 зважена;

$p_4 = +6$, зважаючи на те, що $\varphi(6,4) = 2 < c(6,4) = 3$ і вершина x_6 проіндексована.

Отже, всі вершини виявилися проіндексованими, а це означає, що розподілений повний потік $\varphi_z^{п} = 17$ не є максимальним. На рис. 3.7.6 індекси вказано над або під позначенням вершин.

Звертаємося тепер до процедури зміни потоку. За допомогою візуального аналізу графа знаходимо шлях від x_0 до z, усі вершини якого різні і, починаючи з другої, позначені (з точністю до знака) номерами попередніх вершин. У нас такий шлях μ_{0z} і відповідний кортеж індексів J_μ мають вигляд:

$$\mu_{0z} = (x_0 \to x_2 \to x_5 \to x_3 \to x_8), \quad J_\mu = (0, +0, +2, -5, +3).$$

Помічаємо, що на цьому шляху всі дуги ТМ попутні, крім однієї – $(3,5)$. Попутні дугові потоки $\varphi(0,2)$, $\varphi(2,5)$, $\varphi(3,8)$ збільшуємо на одиницю, унаслідок чого дуга $(3,8)$ стане насиченою: $\varphi'(3,8) = c(3,8) = 5$. Зустрічний потік $\varphi(3,5) = 1$ зменшуємо на одиницю, і тоді дуга $(3,5)$ стане ненавантаженою: $\varphi'(3,5) = 0$. Нові дугові потоки на шляху μ_{0z} вказано через кóму поруч із попередніми потоками. Загалом потік на ТМ збільшився на одиницю і став дорівнювати $\varphi_z^{п} + 1 = 17 + 1 = 18$.

Повертаємося до індексації вершин:

беремо, як і раніше, $p_0 = 0$;

$p_1 = p_2 = +0$, оскільки дуги $(0,1)$, $(0,2)$ ненасичені;

$p_5 = +2$, адже вершина x_2 проіндексована і дуга $(2,5)$ ненасичена $(\varphi(2,5) = 4 < c(2,5) = 6)$;

$p_3 = +5$, оскільки вершина x_5 позначена і дуга $(3,5)$ ненавантажена, а отже, і ненасичена;

$p_7 = +5$, адже вершина x_5 позначена і дуга $(5,7)$ ненасичена $(\varphi(5,7) = 4 < c(5,7) = 8)$;

вершини x_4, x_6, $x_8 = z$ позначити неможливо, оскільки до них від проіндексованих вершин x_0, x_1, x_3, x_7 ідуть тільки насичені дуги.

Таким чином, у процесі повторного зважування вершина z (разом із вузлами x_4, x_6) виявилася непроіндексованою, а це означає, що потік, розподілений на ТМ, є максимальним: $\varphi_z^* = 18$; розподіл φ_z^* за дугами ТМ зображено на рис. 3.7.6. Множина вершин $B = \{x_4, x_6, z\}$ визначає мінімальний розріз $U_B = \{(7,8),(3,8),(0,6),(1,4)\}$, у якого всі вхідні дуги насичені, а вихідних дуг немає. На рис. 3.7.6. розріз U_B показано лінією, яка перетинає всі його дуги.

Задачі та вправи для самостійного розв'язання

5. Для графів, заданих теоретико-множинним способом: а) дайте їхнє геометричне зображення; б) побудуйте матриці інцидентностей та суміжності вершин.

1) $G = \{u_1 = \{x_1, x_2\}, u_2 = \{x_2, x_3\}, u_3 = \{x_2, x_4\}, u_4 = \{x_3, x_4\}, u_5 = \{x_4, x_4\};\ x_5,\ x_6\}$;

2) $G = \{u_1 = \{x_1, x_3\}, u_2 = \{x_1, x_4\}, u_3 = \{x_3, x_2\}, u_4 = \{x_4, x_2\}, u_5 = \{x_2, x_5\};\ x_6\}$;

3) $G = \{u_1 = \{a, b\}, u_2 = \{a, f\}, u_3 = \{b, c\}, u_4 = \{b, d\}, u_5 = \{f, g\},\ u_6 = \{f, h\},$
$u_7 = \{d, e\}, u_8 = \{e, e\}\}$;

4) $G = \{u_1 = \{1,1\}, u_2 = \{1,2\}, u_3 = \{2,2\}, u_4 = \{2,1\}, u_5 = \{3,4\}, u_6 = \{1,2\}; 1, 2, 3\}$.

6. Задано матрицю інцидентностей графа. Знайдіть подання графа: а) теоретико-множинним способом; б) геометричним способом.

$$1)\ \begin{array}{c} \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} u_1 & u_2 & u_3 & u_4 & u_5 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \end{array}; \qquad 2)\ \begin{array}{c} \\ 4 \\ 3 \\ 2 \\ 1 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} u_1 & u_2 & u_3 & u_4 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{array};$$

3) $\begin{array}{c c} & \begin{array}{ccccc} u_1 & u_2 & u_3 & u_4 & u_5 \end{array} \\ \begin{array}{c} a \\ b \\ c \\ d \end{array} & \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$; 4) $\begin{array}{c c} & \begin{array}{cccc} u_1 & u_2 & u_3 & u_4 \end{array} \\ \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{array} & \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{array}$.

7. Задано матрицю суміжності вершин графа. Знайдіть подання графа: а) теоретико-множинним способом; б) геометричним способом.

1) $\begin{array}{c c} & \begin{array}{ccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{array} \\ \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{array} & \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$; 2) $\begin{array}{c c} & \begin{array}{cccc} a & b & c & d \end{array} \\ \begin{array}{c} a \\ b \\ c \\ d \end{array} & \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{array}$;

3) $\begin{array}{c c} & \begin{array}{cccc} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \end{array} \\ \begin{array}{c} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{array} & \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 3 & 1 \end{bmatrix} \end{array}$; 4) $\begin{array}{c c} & \begin{array}{cccc} 3 & 4 & 1 & 2 \end{array} \\ \begin{array}{c} 3 \\ 4 \\ 1 \\ 2 \end{array} & \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{array}$.

8. За геометричним зображенням графів (рис. 3.7.7а – г) знайдіть їхні: 1) теоретико-множинне подання; 2) матрицю інцидентностей та матрицю суміжності вершин.

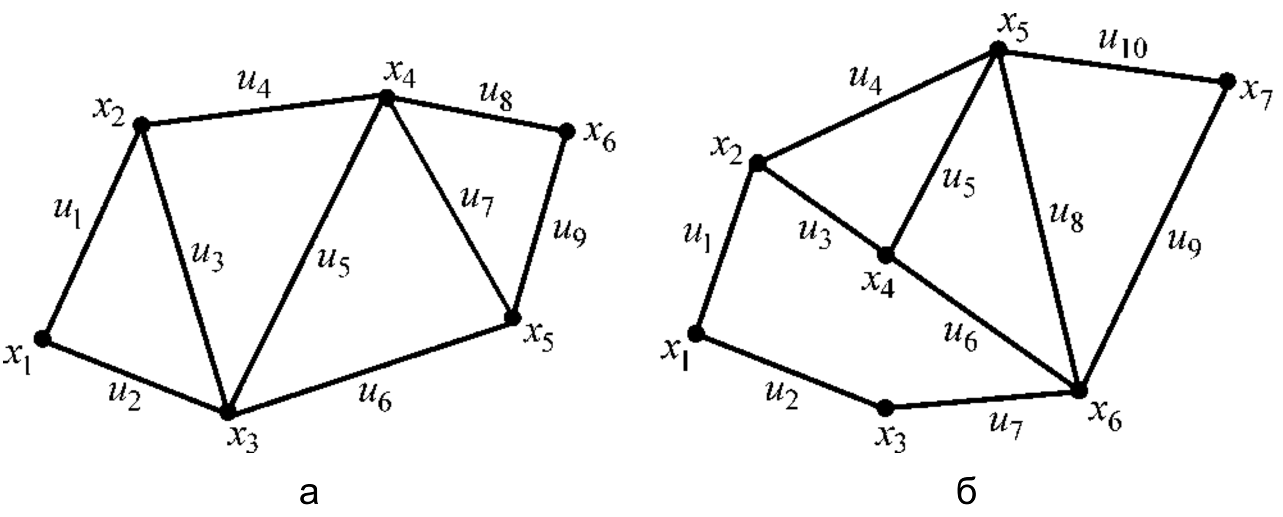
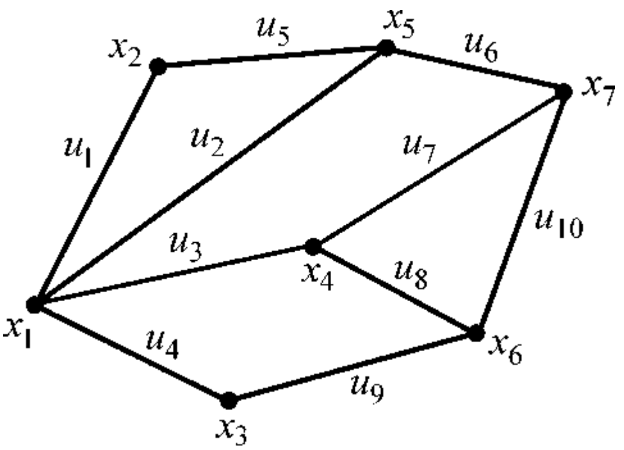
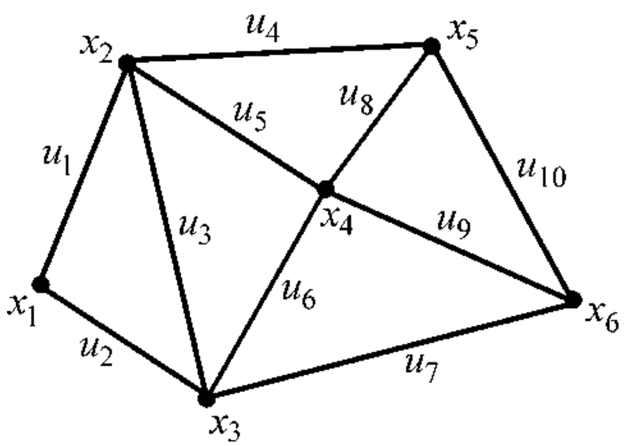


Рис. 3.7.7. **Геометричне зображення графів до задачі 8**



в



г

Закінчення рис. 3.7.7.

9. Для кожного графа в задачах 5 – 8: а) обчисліть кількість вершин і ребер; б) укажіть деякі маршрути (незамкнені й замкнені) і їхні довжини; в) знайдіть ланцюги та цикли (чи є серед них прості?); г) з'ясуйте, зв'язний граф чи незв'язний (укажіть компоненти зв'язності).

10. На графах із задачі 8 (див. рис. 3.7.7) методом індексації вершин розв'яжіть задачу знаходження найкоротшого ланцюга між двома вершинами – "найлівішою" і "найправішою"; довжини ребер виберіть самостійно.

11. На графах із задачі 8 (див. рис. 3.7.7) знайдіть покривні дерева (кістяки) і побудуйте їх окремо, упорядкованими за рівнями вершин, вибравши корінь дерева довільно; довжини ребер припишіть самостійно.

12. На графах із задачі 8 (див. рис. 3.7.7) розв'яжіть задачу знаходження економічного дерева і побудуйте окремо знайдене дерево, упорядковане за рівнями вершин, вибравши довільно його корінь; довжини ребер припишіть самостійно.

13. Для орграфів, заданих теоретико-множинним способом: а) дайте геометричне зображення; б) побудуйте матрицю інцидентностей та матрицю суміжності вершин.

1) $\overline{G}=\{u_1=(x_2,x_1),\ u_2=(x_1,x_5),\ u_3=(x_3,x_2),\ u_4=(x_2,x_4),\ u_5=(x_5,x_5);\ x_6\}$;

2) $\overline{G}=\{u_1=(3,4),\ u_2=(1,2),\ u_3=(1,3),\ u_4=(2,3),\ u_5=(2,4),\ u_6=(3,1),\ u_7=(3,3)\}$;

3) $\overline{G}=\{u_1=(a,b),\ u_2=(b,a),\ u_3=(b,c),\ u_4=(b,d),\ u_5=(d,d),\ u_6=(d,e)\}$;

4) $\overline{G}=\{u_1=(1,1),u_2=(2,1),u_3=(2,2),u_4=(2,4),u_5=(3,4),u_6=(3,3)\}$.

14. За геометричним зображенням орграфів (рис. 3.7.8а – г) знайдіть їхні: 1) теоретико-множинне подання; 2) матриці інцидентностей та матрицю суміжності вершин.

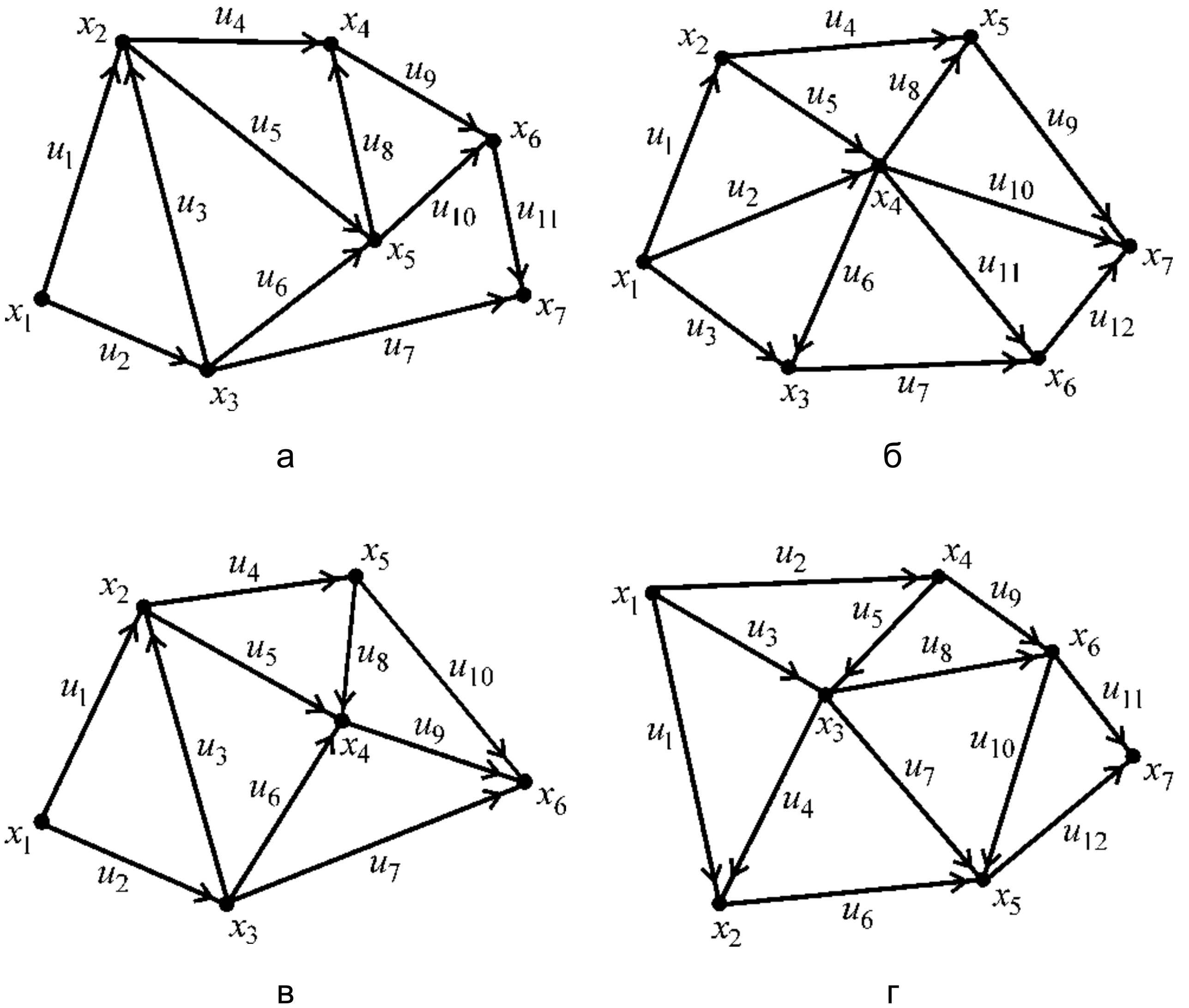


Рис. 3.7.8. **Геометричне зображення орграфів до задачі 14**

15. Задано матрицю інцидентностей орграфа. Знайдіть подання орграфа: а) теоретико-множинним способом; б) геометричним способом.

$$1)\ \begin{array}{c} \\ a \\ b \\ c \\ d \\ e \end{array}\!\!\begin{array}{c} \begin{array}{cccc} u_1 & u_2 & u_3 & u_4 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{array};\qquad 2)\ \begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{array}\!\!\begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} u_1 & u_2 & u_3 & u_4 & u_5 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -1 \end{bmatrix} \end{array};$$

$$3)\ \begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} u_1 & u_2 & u_3 & u_4 & u_5 & u_6 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 \end{bmatrix} \end{array}; \quad 4)\ \begin{array}{c} \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} u_1 & u_2 & u_3 & u_4 & u_5 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{array}.$$

16. Задано матрицю суміжності вершин орграфа. Чи можна однозначно дати подання орграфа: а) теоретико-множинним способом; б) геометричним способом? Відповідь обґрунтуйте.

17. Для кожного орграфа у задачах 13 – 15: а) обчисліть кількість вершин і ребер; б) укажіть деякі ормаршрути (незамкнені й замкнені) і їхні довжини; в) знайдіть шляхи і контури.

18. На СГ, заданому переліком його дуг-робіт $u_j = (i,k)$ із відомими тривалостями робіт $t(i,k)$, де i, k – вершини-події СГ, $j = 1, 2, ..., 11$, i, $k \in \{1, 2, ..., 7\}$, знайдіть критичний час $t_{\text{кр}}$ і критичний шлях $\mu_{\text{кр}}$ на ньому. Геометричне зображення СГ виконайте так, щоб будь-які його дуги-роботи мали спільні точки тільки у вершинах-подіях відповідного графа.

а)

u_j	u_1	u_2	u_3	u_4	u_5	u_6	u_7	u_8	u_9	u_{10}	u_{11}
(i,k)	(1, 2)	(1, 3)	(2, 3)	(3, 4)	(2, 4)	(3, 6)	(4, 6)	(4, 7)	(2, 5)	(5, 7)	(6, 7)
$t(i,k)$	1	7	4	3	5	4	7	10	6	6	8

б)

u_j	u_1	u_2	u_3	u_4	u_5	u_6	u_7	u_8	u_9	u_{10}	u_{11}
(i,k)	(1, 2)	(1, 3)	(2, 3)	(3, 4)	(2, 4)	(3, 6)	(4, 6)	(4, 7)	(4, 5)	(2, 5)	(3, 7)
$t(i,k)$	6	6	8	3	2	4	7	10	1	7	4

в)

u_j	u_1	u_2	u_3	u_4	u_5	u_6	u_7	u_8	u_9	u_{10}	u_{11}
(i,k)	(1, 3)	(1, 2)	(2, 3)	(2, 4)	(3, 4)	(3, 6)	(4, 6)	(4, 7)	(4, 5)	(5, 6)	(6, 7)
$t(i,k)$	1	2	1	2	3	4	7	10	5	7	8

19. Чи існують такі СГ, на яких можна указати (знайти) декілька: а) значень критичного часу; б) критичних шляхів? Відповідь обґрунтуйте.

20. Чи існують такі СГ, у яких: а) усі роботи (події) є критичними; б) резерви часу всіх подій однакові й відмінні від нуля; в) резерви часу всіх подій однакові й дорівнюють нулю? Відповідь обґрунтуйте і (або) наведіть відповідні приклади.

21. На ТМ, заданій основою відповідного ОГ з дугами $u_j = (i,k)$ і відомими пропускними спроможностями дуг $c(u_j)$, де i, k – вершини ТМ, $j \in \{1, 2, ..., 11\}$, $i, k \in \{1, 2, ..., 7\}$, знайдіть максимальний потік на ТМ φ_z^* та її мінімальний розріз U_B.

а)

u_j	u_1	u_2	u_3	u_4	u_5	u_6	u_7	u_8	u_9	u_{10}	u_{11}
(i,k)	(1, 2)	(1, 3)	(1, 5)	(2, 4)	(5, 7)	(3, 5)	(4, 5)	(4, 6)	(5, 6)	(6, 7)	(4, 7)
$c(i,k)$	20	10	5	15	4	9	1	8	7	9	6

б)

u_j	u_1	u_2	u_3	u_4	u_5	u_6	u_7	u_8	u_9	u_{10}	u_{11}
(i,k)	(1, 2)	(1, 3)	(1, 4)	(2, 4)	(4, 7)	(3, 5)	(4, 5)	(4, 6)	(5, 6)	(6, 7)	(4, 7)
$c(i,k)$	20	20	6	15	5	8	2	7	7	9	6

в)

u_j	u_1	u_2	u_3	u_4	u_5	u_6	u_7	u_8	u_9	u_{10}	u_{11}
(i,k)	(1, 2)	(1, 3)	(1, 4)	(2, 5)	(4, 7)	(3, 5)	(4, 5)	(4, 6)	(5, 6)	(6, 7)	(5, 7)
$c(i,k)$	20	30	6	13	5	8	2	7	8	9	6

Запитання для самодіагностики засвоєння матеріалу теми 3

Відповіді на всі запитання сформулюйте словесно, запишіть у символьній формі, обґрунтуйте (на підставі означень, теорем, правил, формул тощо), наведіть відповідні конкретні приклади.

1. Що називають неорієнтованим графом, або просто графом?

2. Що розуміють під ребрами, вершинами, граничними вершинами ребра графа?

3. У якому випадку ребро графа називають інцидентним вершині графа, і навпаки?

4. Які ребра (вершини) графа називають суміжними, або сусідніми?

5. Як називають вершину графа, не інцидентну жодному ребру (інцидентну тільки одному ребру)?

6. Яке ребро графа називають петлею?

7. Які ребра графа називають кратними, або паралельними?

8. У чому полягає кожний зі способів задання НГ: а) теоретико-множинний; б) геометричний; в) матричний?

9. Що розуміють під маршрутом на графі, його довжиною, незамкненим (замкненим) маршрутом?

10. Як називають незамкнений (замкнений) маршрут, усі ребра якого різні?

11. Який ланцюг (цикл) називають простим, або елементарним?

12. Який граф називають зв'язним (незв'язним)?

13. Що розуміють під компонентами зв'язності незв'язного графа?

14. Як формулюють постановку задачі про знаходження найкоротшого ланцюга між двома вершинами графа?

15. Як розв'язують задачу про знаходження найкоротшого ланцюга методом індексації (зважування) вершин графа?

16. Який зв'язний граф називають деревом (лісом)?

17. Що розуміють під коренем дерева, рівнем вершин дерева?

18. Скільки ребер містить дерево, яке покриває n вершин? Доведіть відповідне твердження.

19. Скільки існує різних дерев, які покривають n заданих вершин? Доведіть відповідне твердження.

20. Що називають кістяком (покривним дерево) графа?

21. Як дістати кістяк графа з n вершинами і m ребрами, якщо він містить цикли?

22. Як формулюють постановку задачі про знаходження на графі економічного дерева? Як розв'язують цю задачу?

23. Що називають: орграфом, дугою, шляхом, контуром ОГ?

24. Які два види інцидентності між вершиною і дугою (і навпаки) розрізнюють на ОГ?

25. Які два види паралельності дуг розрізняють на ОГ?

26. Які існують способи задання ОГ і в чому вони полягають?

27. Що таке "основа" ОГ і який ОГ називають сильнозв'язним (слабкозв'язним, односторонньо зв'язним, порожнім, тривіальним?

28. Як визначають матрицю інцидентностей і матрицю суміжності вершин ОГ?

29. Що називають матрицею досяжності та контрдосяжності ОГ?

30. Що називають графом конденсації ОГ і як його побудувати?

31. Що називають сітковим графіком комплексу робіт (проєкту)?

32. Що називають: раннім (пізнім) строком звершення події, резервом часу, критичним часом, критичним шляхом на СГ?

33. На які три категорії поділяють множину всіх стадій комплексу робіт того чи іншого проєкту?

34. Як називають задачі, у яких ставлять питання про знаходження мінімального часу виконання всіх робіт комплексу (проєкту)?

35. Що має передувати (стосовно відомостей) побудові СГ?

36. У чому полягають найважливіші правила побудови СГ?

37. Як формулюють постановку задачі про знаходження критичного часу та критичного шляху на СГ?

38. Із яких етапів складається розв'язання задачі про критичний час і критичний шлях на СГ?

39. Що називають транспортною мережею?

40. Які умови (згідно з означенням) має задовольняти: дуговий потік, насичені (ненасичені, навантажені, ненавантажені) дуги на ТМ?

41. Що називають потоком та повним потоком на ТМ і в якому випадку кажуть, що здійснено їх розподіл за дугами?

42. Як розв'язують задачу про знаходження повного потоку на ТМ?

43. Що розуміють під розрізом на ТМ і яку умову має задовольняти мінімальний розріз?

44. Якими умовами щодо дуг розрізу ТМ визначають максимальний потік?

45. Що розуміють під індексацією (зважуванням) вершин ТМ і як її проводять?

46. Який висновок слід зробити у випадку, коли вихід ТМ виявився непроіндексованим?

47. Як здійснюють зміну потоку (у бік його збільшення) на ТМ зі зваженими вершинами?

48. У чому полягає алгоритм Форда – Фалкерсона знаходження максимального потоку на ТМ?

Рекомендована література до теми 3: [2 – 5; 9; 15; 17; 20].

Розділ 2. Математична логіка. Елементи теорії скінченних автоматів

Тема 4. Математична логіка

За допомогою логіки доводять,
за допомогою інтуїції винаходять.

А. Пуанкаре

Мета: навчити майбутніх фахівців умінню описувати дискретні процеси та явища природи мовою формальної логіки.

Компетентності, які набуває студент після вивчення теми:

знання: осмислення та засвоєння основ математичної логіки та їх застосування в різних галузях знань;

уміння: здатність виконувати аналіз та синтез інформаційних систем засобами математичної логіки;

комунікації: презентація з метою передавання інформації щодо результатів аналізу інформаційних систем;

автономність і відповідальність: здатність самостійно розв'язувати практичні задачі за засвоєним матеріалом теми та відповідати за результати своєї діяльності.

Основні питання теми:

4.1. Алгебра висловлень.
4.2. Логічні формули.
4.3. Булеві функції (БФ).
4.4. Застосування БФ до аналізу і синтезу контактних схем.
4.5. Застосування БФ до аналізу і синтезу логічних схем.
4.6. Предикати і квантори.

Ключові слова: алгебра (булева, висловлень, контактних схем), логічні операції (інверсія, диз'юнкція, кон'юнкція, імплікація, еквіваленція, операція Жегалкіна, стрілка Пірса, штрих Шеффера), логічні формули, проблема розв'язності, нормальні форми (досконалі нормальні форми) логічних формул, булеві функції, мінімізація, контактні та логічні схеми, квантори (загальності та існування), предикати, скінченні автомати.

4.1. Алгебра висловлень

Висловлення: основні означення, логічні операції

Поняття "висловлення" є одним із первинних (неозначуваних) понять математичної логіки (МЛ). Під **висловленням** розуміють твердження, подане (сформульоване) у вигляді розповідного речення, стосовно якого можна сказати, *істинне* воно чи *хибне*. Позначатимемо висловлення малими латинськими буквами: $a, b, c, ..., x, y, z$ (можливо, з індексами). "Істинність" і "хибність" тлумачать як значення висловлення і позначають (за домовленістю) різними символами. Здебільшого істинність (хибність) позначають символом 1 (0). Отже, якщо висловлення x істинне (хибне), то кажуть, що воно набуває значення 1 (0), і пишуть: $x = 1$ $(x = 0)$; символи 1, 0 називають **значеннями істинності** висловлення.

Зауважимо, що до висловлень не відносять запитальні та окличні речення, а також твердження, які мають суб'єктивний характер. *Наприклад*: "Ти куди поспішаєш?", "Як гарно!", "цікава книжка" тощо.

Висловлення називають **складним** (**простим**), якщо воно містить (не містить) у собі інші висловлення як складові частини. У математичних міркуваннях найчастіше вживають слова і граматичні зв'язки *не* (*неправильно, що*); *і*; *або*; *якщо …, то*; *тоді і тільки тоді, коли*. За допомогою них і формують складні висловлення.

Теорія висловлень має тісний зв'язок із теорією множин. Нехай I – універсум деякої сукупності множин. Множину $X \subseteq I$, стосовно елементів якої висловлення x істинне, називають **областю (множиною) істинності** висловлення x. Область істинності може виявитись порожньою, тоді кажуть, що x **тотожно хибне** $(x \equiv 0)$; якщо ж область істинності співпадає з I, то x – **тотожно істинне** $(x \equiv 1)$.

Наприклад, якщо I – множина студентів певної академічної групи, X – множина відмінників, Y – множина карооких студентів, то висловлення x ("студент відмінник") має областю істинності множину X; висловлення y ("студент карокий") – множину Y; висловлення z ("студент старший за 70 років") – порожню множину, тобто z тотожно хибне. Множина $X \bigcap Y$ буде областю істинності складного висловлення: "студент відмінник і кароокий".

Під **логічною операцією (ЛО)** над висловленнями розуміють утворення складного висловлення, для якого задані висловлення є складовими частинами; вихідні висловлення, з яких формується результат ЛО, називають **операндами**.

Таблицею істинності ЛО називають таблицю, у якій наведено всі можливі набори значень істинності операндів (із множини $\{0,1\}$) і відповідні значення істинності результату ЛО.

Розглянемо вісім основних ЛО над висловленнями x, y з областями істинності відповідно X, Y. Поряд з означенням наведемо відповідну таблицю істинності (яку, до речі, можна покласти в основу означення ЛО).

1. Інверсією (запереченням) висловлення x називають висловлення $\bar{x}$ з областю істинності $\bar{X}$ (рис. 4.1.1), яке істинне тоді і тільки тоді, коли x хибне:

$$\bar{x}=\begin{cases}1, & \text{якщо } x=0,\\ 0, & \text{якщо } x=1.\end{cases}$$

x	$\bar{x}$
0	1
1	0

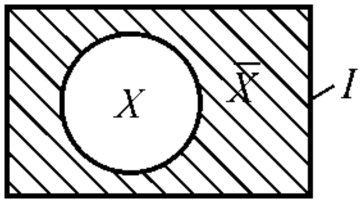


Рис. 4.1.1. **Область істинності висловлення $\bar{x}$**

Читають: "не x", або "неправильно, що x". Інверсію $\bar{x}$ позначають також символом $\neg x$.

2. Диз'юнкцією (логічною сумою) висловлень x і y називають складне висловлення $x \vee y$ з областю істинності $X \bigcup Y$ (рис. 4.1.2), яке хибне тоді і тільки тоді, коли обидва висловлення хибні:

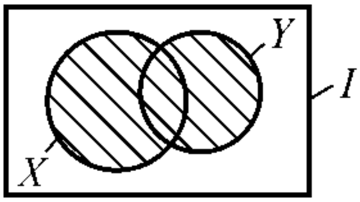


Рис. 4.1.2. **Область істинності висловлення $x \vee y$**

$$x \vee y=\begin{cases}0, & \text{якщо } x=0, y=0,\\ 1 & \text{у решті випадків.}\end{cases}$$

x	y	$x \vee y$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

Читають: "x або y"; сполучник "або" має два значення: "або x, або y, або x та y разом" (це – *нероздільне* значення "або") і "або x, або y, але не обидва" (це – *роздільне* значення "або"). Диз'юнкцію двох висловлень слід розуміти як нероздільний сполучник "або".

3. Кон'юнкцією (логічним добутком) висловлень x і y називають складне висловлення $x \wedge y$ з областю істинності $X \cap Y$ (рис. 4.1.3), яке істинне тоді і тільки тоді, коли обидва висловлення істинні:

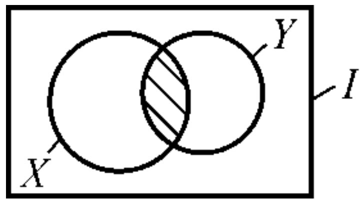


Рис. 4.1.3. **Область істинності висловлення $x \wedge y$**

$$x \wedge y = \begin{cases} 1, & \text{якщо } x=1, y=1, \\ 0 & \text{у решті випадків.} \end{cases}$$

x	y	$x \wedge y$
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

Читають: "x і y".

4. Імплікацією (логічним наслідком) висловлень x і y називають складне висловлення $x \to y$ ($x \Rightarrow y$) з областю істинності $\overline{X} \cup Y$ (рис. 4.1.4), яке хибне тоді і тільки тоді, коли x істинне, а y хибне:

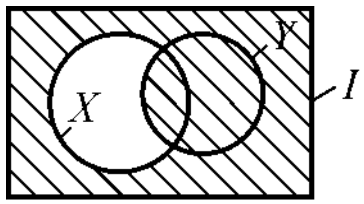


Рис. 4.1.4. **Область істинності висловлення $x \to y$**

$$x \to y = \begin{cases} 0, & \text{якщо } x=1, y=0, \\ 1 & \text{у решті випадків.} \end{cases}$$

x	y	$x \to y$
0	0	1
0	1	1
1	0	0
1	1	1

Читають: "якщо x, то y", або "із x випливає y".

В імплікації $x \to y$ висловлення x називають **основою**, або **посилкою**, а висловлення y – **висновком**, або **наслідком**.

Аналізуючи таблицю істинності, маємо:

з хибного випливає що завгодно: $0 \to 0 = 1$, $0 \to 1 = 1$, тобто імплікація з хибною основою завжди істинна;

істина випливає з чого завгодно: $1 \to 1 = 1$, $0 \to 1 = 1$, тобто імплікація з істинним висновком завжди істинна;

з істини випливає тільки істина: $1 \to 1 = 1$, $1 \to 0 = 0$.

Зазначимо також, що означення імплікації не потребує причинного зв'язку між висловленнями x, y. Так, *наприклад*, якщо $x =$"$2 \times 2 = 4$", $y =$"Харків – перша столиця України", то імплікація $x \to y =$"якщо $2 \times 2 = 4$, то Харків – перша столиця України" істинна, оскільки $x = 1$ і $y = 1$.

5. Еквіваленцією (рівнозначністю, рівносильністю) висловлень x і y називають складне висловлення $x \sim y$ з областю істинності $(\overline{X} \cup Y) \cap (X \cup \overline{Y})$ (рис. 4.1.5), яке істинне тоді і тільки тоді, коли обидва висловлення набувають однакових значень істинності:

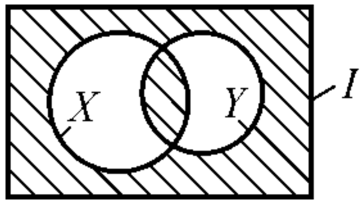


Рис. 4.1.5. **Область істинності висловлення $x \sim y$**

$$x \sim y = \begin{cases} 1, & \text{якщо } x = y, \\ 0 & \text{у решті випадків.} \end{cases}$$

x	y	$x \sim y$
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	1

Читають: "x еквівалентне y", або "x тоді і тільки тоді, коли y", або "x, якщо і тільки якщо y". Еквіваленцію позначають також символами: $x \Leftrightarrow y$, $x \leftrightarrow y$.

Слід розрізняти *еквівалентні висловлення* $(x = y)$ як такі, що мають однакові значення істинності й *еквіваленцію висловлень* $(x \sim y)$ як одне складне висловлення (воно істинне, якщо значення істинності x і y однакові, і хибне – якщо різні). У разі утворення складного висловлення $x \sim y$ немає ніякого значення, чи є будь-який смисловий зв'язок між x і y. Так, *наприклад*, якщо $x =$"$2 \times 2 = 5$", а $y =$"Харків розташований на березі Дніпра", то $x \sim y = 1$, оскільки $x = 0$ і $y = 0$.

6. Операцією Жегалкіна (додаванням за модулем 2, нерівнозначністю) $x \oplus y$ висловлень x і y називають інверсію еквіваленції:

$$x \oplus y = \begin{cases} 0, & \text{якщо } x = y, \\ 1 & \text{якщо } x \neq y. \end{cases}$$

x	y	$x \oplus y$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	0

Читають: "x не еквівалентне (не рівнозначне) y".

Під **сумою за модулем 2** двох цілих невід'ємних чисел a і b розуміють остачу від ділення суми $(a+b)$ на число 2. Якщо символи 0 і 1 розглядати як звичайні числа, то можна знаходити значення істинності результату $x \oplus y$, виконуючи додавання за модулем 2 відповідних значень істинності висловлень x, y. Цим і пояснюють другу назву операції $\oplus$ як додавання за модулем 2.

Операція Жегалкіна за означенням є запереченням еквіваленції, тому для її позначення використовують також символ $\overline{x \sim y}$.

Зауважимо, що ЛО нерівнозначності треба розуміти як роздільний сполучник "або" (на відміну від диз'юнкції). Справді, якщо $\overline{x \sim y} = 1$, то це свідчить про те, що лише одне з висловлень x і y істинне (або $x = 1$, або $y = 1$, але не обидва).

7. Операцією (штрихом) Шеффера $x \mid y$ називають інверсію кон'юнкції (несумісність):

$$x \mid y = \overline{x \wedge y} = \begin{cases} 0, & \text{якщо } x = 1,\ y = 1, \\ 1 & \text{у решті випадків.} \end{cases}$$

x	y	$x \mid y$
0	0	1
0	1	1
1	0	1
1	1	0

Читають: "x не сумісне з y", або "неправильно, що x і y".

8. Операцією (стрілкою) Пірса $x \downarrow y$ називають інверсію диз'юнкції:

$$x \downarrow y = \overline{x \vee y} = \begin{cases} 1, & \text{якщо } x = 0,\ y = 0, \\ 0 & \text{у решті випадків.} \end{cases}$$

x	y	$x \downarrow y$
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	0

Читають: "ні x, ні y", або "неправильно, що x або y".

Як *вправи* пропонуємо: дати операціям $\oplus$, $\mid$, $\downarrow$ розгорнуті, як і для попередніх ЛО, означення; зобразити їхні області істинності.

Алгебра висловлень. Закони алгебри логіки

Нагадаємо, що **алгеброю** $\mathcal{A}$ називають упорядковану пару $\mathcal{A} = (A, \Omega)$, де A – непорожня множина і Ω – множина (система) операцій на A; причому множина A замкнена відносно операцій із Ω, тобто результати операцій над об'єктами із A також належать A.

Приклади:

1) алгебра цілих чисел: $\mathcal{A} = (\mathbf{Z}, +, \cdot)$, де $\mathbf{Z}$ – множина цілих чисел, додавання $(+)$ і множення $(\cdot)$ – арифметичні операції на $\mathbf{Z}$;

2) алгебра множин:

$$\mathcal{A} = (A, \bigcup, \bigcap, \overline{}), \qquad (4.1.1)$$

де A – множина всіх підмножин деякого універсуму I, яка замкнена відносно операцій об'єднання ($\bigcup$), перетину ($\bigcap$), доповнення ($\overline{}$).

Аналогічно можна розглядати різноманітні алгебри на множині висловлень із системами операцій із множини ЛО $\{\neg, \vee, \wedge, \rightarrow, \sim, \oplus, |, \downarrow\}$.

Систему ЛО називають **повною**, якщо за допомогою неї можна описати будь-яке висловлення. Еквівалентні висловлення, незалежно від їхнього конкретного змісту (природи), не розрізняють. Однією з повних систем ЛО є система $\Omega = \{\vee, \wedge, \neg\}$.

Алгебру

$$\mathcal{B} = (B, \vee, \wedge, \neg), \qquad (4.1.2)$$

де B – множина всіх висловлень, називають **алгеброю висловлень**, або **алгеброю (формальної) логіки**, а операції $\vee$, $\wedge$, $\neg$ – **головними (базисними) операціями** алгебри $\mathcal{B}$.

Будь-яку з ЛО: $\rightarrow, \sim, \oplus, |, \downarrow$, можна подати через головні операції $\vee$, $\wedge$, $\neg$ за допомогою співвідношень, які називають **формулами переходу до головних операцій** алгебри висловлень:

$$\begin{aligned} x \rightarrow y &= \bar{x} \vee y = \neg(x \wedge \bar{y}), \\ x \sim y &= (x \rightarrow y) \wedge (y \rightarrow x) = (\bar{x} \vee y) \wedge (x \vee \bar{y}) = (x \wedge y) \vee (\bar{x} \wedge \bar{y}), \\ x \oplus y &= \overline{x \sim y} = (x \wedge \bar{y}) \vee (\bar{x} \wedge y) = (x \vee y) \wedge (\bar{x} \vee \bar{y}), \\ x | y &= \overline{x \wedge y} = \bar{x} \vee \bar{y}, \\ x \downarrow y &= \overline{x \vee y} = \bar{x} \wedge \bar{y}. \end{aligned} \qquad (4.1.3)$$

Пропонуємо переконатися у справедливості співвідношень (4.1.3) за допомогою таблиць істинності.

Зауважимо, що головні операції $x \vee y$, $x \wedge y$ алгебри висловлень можна визначити за допомогою функцій двох змінних, а інверсію $\bar{x}$ – подати як функцію однієї змінної, а саме:

$$x \vee y = x + y - xy, \quad x \wedge y = xy, \quad \bar{x} = 1 - x; \quad x, y \in \{0,1\}. \qquad (4.1.4)$$

Як *вправу* знайдіть подання за допомогою співвідношень (4.1.4) логічних операцій $\to, \sim, \oplus, |, \downarrow$.

Наведемо властивості головних операцій із $\mathcal{B}$, які називають **основними законами** алгебри логіки (табл. 4.1.1).

Таблиця 4.1.1

Основні закони алгебри логіки

№ п/п	Назва закону	Запис закону в символах	
		для диз'юнкції	для кон'юнкції
1	Комутативний (переставний)	$x \vee y = y \vee x$	$x \wedge y = y \wedge x$
2	Асоціативний (сполучний)	$x \vee (y \vee z) = (x \vee y) \vee z = $ $= x \vee y \vee z$	$x \wedge (y \wedge z) = (x \wedge y) \wedge z =$ $= x \wedge y \wedge z$
3	Дистрибутивний (розподільний)	$x \vee (y \wedge z) = (x \vee y) \wedge (x \vee z)$	$x \wedge (y \vee z) = (x \wedge y) \vee (x \wedge z)$
4	Виключення третьої можливості	$x \vee \bar{x} = 1$	—
5	Суперечності	—	$x \wedge \bar{x} = 0$
6	Ідемпотентності	$x \vee x = x$	$x \wedge x = x$
7	Де Моргана	$\overline{x \vee y} = \bar{x} \wedge \bar{y}$	$\overline{x \wedge y} = \bar{x} \vee \bar{y}$
4	Поглинання	$x \vee 0 = x, \quad x \vee 1 = 1,$ $x \vee (x \wedge y) = x$	$x \wedge 0 = 0, \quad x \wedge 1 = x,$ $x \wedge (x \vee y) = x$
9	Склеювання	$(x \wedge y) \vee (x \wedge \bar{y}) = x$	$(x \vee y) \wedge (x \vee \bar{y}) = x$
10	Подвійного заперечення	$\bar{\bar{x}} = x$	

Справедливість законів алгебри логіки легко довести за допомогою таблиць істинності.

Між законами алгебри логіки $\mathcal{B}$ (4.1.2) і законами алгебри множин $\mathcal{A}$ (4.1.1), які розглядалися в теорії множин, можна встановити взаємно однозначну відповідність (бієкцію), якщо висловленням x, y, z, 0 (тотожно хибне висловлення), 1 (тотожно істинне висловлення) поставити у відповідність їхні області істинності X, Y, Z, $\varnothing$, I, а основним операціям $\vee$, $\wedge$, $\neg$ – відповідні теоретико-множинні операції $\bigcup$, $\bigcap$, $\overline{}$.

Алгебри, між елементами множин яких, а також основними операціями, можна встановити бієкцію, називають **ізоморфними** (однаковими за формою). Отже, алгебри $\mathcal{A}$ і $\mathcal{B}$ ізоморфні.

Алгебру множин, алгебру логіки й усі ізоморфні їм алгебри прийнято називати **алгебрами Буля (булевими алгебрами)**, оскільки вперше такі алгебри розглядав видатний англійський учений XIX століття Джордж Буль. Таким чином, булеві алгебри відрізняються одна від одної лише природою елементів розглядуваних множин і смислом, який вкладають у відповідні операції, що підкоряються одним і тим самим законам.

4.2. Логічні формули

Означення логічних формул та їхня класифікація, принцип двоїстості

Аналізуючи таблиці істинності ЛО, робимо висновок, що символи x і y, якими позначають висловлення, відіграють роль змінних величин, що набувають значень 0, 1 (хибність, істина). Ці змінні називають **елементарними формулами (атомами)**. За допомогою ЛО із атомів будують складні висловлення.

Логічною формулою (ЛФ), або **формулою алгебри логіки**, називають символьний запис складного висловлення, утвореного з атомів за допомогою логічних операцій і лівої та правої дужок: (,). Дужки визначають область дії логічного знака (символу). Кількість дужок можна зменшити, якщо впорядкувати ЛО за рангом: $\neg$, $|$, $\downarrow$, $\wedge$, $\vee$, $\oplus$, $\rightarrow$, $\sim$; операцію нижчого рангу виконують раніше від операцій вищого рангу. Можна не писати ті пари дужок, які відновлюються, ураховуючи ранг операції, але звичайно їх зберігають для наочності під час встановлення порядку дій.

Наприклад, у формулі $x \wedge y \vee z \wedge x \sim x \rightarrow y$ дужки можна розставити так: $((x \wedge y) \vee (x \wedge z)) \sim (x \rightarrow y)$.

Логічні формули позначатимемо великими латинськими буквами і, якщо треба підкреслити, які атоми входять до них, поруч у дужках даватимемо їх перелік. Якщо в якусь формулу замість атомів підставити інші формули, то також дістанемо формули.

Наприклад, якщо в ЛФ $F = F(x, y) = (x \rightarrow y) \wedge (\bar{x} \sim y)$ узяти замість x, y відповідно формули $A_1 = x \vee y$, $A_2 = \bar{x} \oplus y$, то матимемо:

$$F(A_1, A_2) = \Phi(x, y) = ((x \vee y) \rightarrow (\bar{x} \oplus y)) \wedge (\overline{x \vee y} \sim (\bar{x} \oplus y)).$$

Таким чином, навіть із однієї формули можна дістати нескінченно багато інших формул. Але всю множину логічних формул можна поділити (класифікувати) на три підмножини (класи еквівалентності), які не перетинаються.

Формулу F, яка набуває значення 1 (0) на всіх наборах (із нулів та одиниць) значень атомів, із яких вона утворена, називають **тотожно істинною**, або **тавтологією** (**тотожно хибною**, або **суперечністю**), і пишуть $F \equiv 1$ $(F \equiv 0)$. Формулу, яка на деякій частині наборів значень атомів, із яких вона утворена, істинна, а на іншій – хибна, називають **здійсненною**.

Наприклад, за законами алгебри логіки: $x \vee \overline{x}$ – тавтологія; $x \wedge \overline{x}$ – суперечність; кожна ЛО – здійсненна формула.

Задача встановлення того, до якого з трьох класів еквівалентності належить та чи інша формула, відома під назвою **задачі (проблеми) розв'язності**.

Цю проблему можна вирішити двома способами:

1) *аналітичним* (за допомогою тотожних перетворень досліджуваної формули за законами алгебри логіки з метою її спрощення);

2) *табличним* (за допомогою побудови таблиці істинності заданої формули).

Приклад. Дослідимо формулу: $F = (a \wedge b) \rightarrow (a \vee \overline{b})$.

1. *Аналітичний спосіб.* Для перетворення заданої ЛФ послідовно застосуємо співвідношення (4.1.3) для імплікації $(x \rightarrow y = \overline{x} \vee y)$, а також закони: де Моргана $(\overline{x \wedge y} = \overline{x} \vee \overline{y})$, асоціативний $(x \vee (y \vee z) = x \vee y \vee z)$, комутативний $(x \vee y = y \vee x)$, виключення третьої можливості $(x \vee \overline{x} = 1)$, ідемпотентності $(x \vee x = x)$ та поглинання $(x \vee 1 = 1)$:

$$F = (a \wedge b) \rightarrow (a \vee \overline{b}) = \overline{(a \wedge b)} \vee (a \vee \overline{b}) = (\overline{a} \vee \overline{b}) \vee (a \vee \overline{b}) =$$

$$= \overline{a} \vee \overline{b} \vee a \vee \overline{b} = (\overline{a} \vee a) \vee (\overline{b} \vee \overline{b}) = 1 \vee \overline{b} = \overline{b} \vee 1 = 1 \;\Rightarrow\; F \equiv 1.$$

Отже, задана ЛФ F є *тавтологією*.

2. *Табличний спосіб.* Установлюємо порядок виконання логічних операцій і вводимо позначення результату кожної з них (інверсію атома b виконуватимемо усно, щоб не споруджувати зайвий стовпець, тому її не нумеруємо):

$$F = \underset{\substack{1\\A}}{(a \wedge b)} \underset{\substack{3\\F}}{\to} \underset{\substack{2\\B}}{(a \vee \overline{b})}.$$

Будуємо власне саму таблицю істинності (табл. 4.2.1), у якій відводимо n стовпців (за кількістю атомів) для запису фіксованих значень аргументів (у нас $n = 2$); далі йдуть стовпці, що відповідають значенням проміжних операцій (їх для зручності позначено великими літерами), а останній стовпець відповідає всій ЛФ.

Таблиця 4.2.1

Таблиця істинності логічної формули

		A	B	F
a	b	$a \wedge b$	$a \vee \overline{b}$	$A \to B$
0	0	0	1	1
0	1	0	0	1
1	0	0	1	1
1	1	1	1	1

Оскільки на всіх наборах значень атомів x, y, z ЛФ F набуває значення 1 $(F \equiv 1)$, то робимо висновок, що задана ЛФ є *тавтологією*.

На підставі співвідношень (4.1.3) будь-яку логічну формулу можна подати через головні операції $\vee$, $\wedge$, $\neg$ алгебри висловлень.

Якщо в логічній формулі F символ $\vee$ замінити на символ $\wedge$, і навпаки, а символ 1 – на символ 0, і навпаки, то дістанемо формулу F^*, яку називають **двоїстою** відносно F; символи $\vee$ і $\wedge$, 0 і 1 також називають **двоїстими**.

У математичній логіці має місце та званий **принцип двоїстості**: якщо A і B рівносильні формули ($A = B$, або $A \equiv B$), тобто вони на кожному з наборів значень атомів набувають однакових значень істинності, то двоїсті формули теж рівносильні:

$$(A \equiv B) \Rightarrow (A^* \equiv B^*). \tag{4.2.1}$$

Дію цього принципу можна простежити на законах алгебри логіки. *Наприклад*,

$$(x \vee y = y \vee x) \Rightarrow (x \wedge y = y \wedge x); \quad (x \vee 0 = x) \Rightarrow (x \wedge 1 = x).$$

На підставі означення тавтології (суперечності) робимо висновок: якщо в тавтологію (суперечність) $F(x_1, x_2, ..., x_n)$ замість атомів x_i $(i = \overline{1, n})$ підставити довільні формули $A_1, A_2, ..., A_n$, то формула $\Phi = F\left(A_1, A_2, ..., A_n\right)$ теж буде тавтологією (суперечністю):

$$\begin{aligned}(F(x_1, x_2, ..., x_n) \equiv 1) &\Rightarrow (\Phi = F(A_1, A_2, ..., A_n) \equiv 1);\\ (F(x_1, x_2, ..., x_n) \equiv 0) &\Rightarrow (\Phi = F(A_1, A_2, ..., A_n) \equiv 0).\end{aligned} \qquad (4.2.2)$$

Співвідношення (4.2.1), (4.2.2) дають змогу утворювати нові рівнозначні формули, тавтології або суперечності.

Диз'юнктивна і кон'юнктивна нормальні форми (ДНФ і КНФ) логічних формул

Нехай $M = \{x_1, x_2, ..., x_n\} = \{x_i\}_1^n$ – множина атомів, із яких (не обов'язково всіх) утворюються логічні формули. Якщо формула містить атом $x_i \in M$ (заперечення $\bar{x}_i$), то кажуть, що атом x_i входить до формули *у прямому* (*інверсному*) *вигляді*.

Формулу D (K) називають **елементарною диз'юнкцією** (**елементарною кон'юнкцією**), якщо вона є диз'юнкцією (кон'юнкцією) попарно розрізнюваних атомів у прямому або інверсному вигляді, тобто:

$$D = \tilde{x}_{i_1} \vee \tilde{x}_{i_2} \vee ... \vee \tilde{x}_{i_m} \quad (K = \tilde{x}_{i_1} \wedge \tilde{x}_{i_2} \wedge ... \wedge \tilde{x}_{i_m}). \qquad (4.2.3)$$

де $\tilde{x}_{i_k}$ $(1 \le k \le m,\ 1 \le m \le n)$ – це або x_{i_k}, або $\bar{x}_{i_k}$; $x_{i_k} \in M$.

Домовились окремий атом (у прямому або інверсному вигляді) як формулу відносити і до елементарних диз'юнкцій, і до елементарних кон'юнкцій, а 0 (1) вважати елементарною кон'юнкцією (елементарною диз'юнкцією).

Наприклад, для $M = \{x_1, x_2, x_3\}$: формули $(\bar{x}_3)$, $(x_1 \vee \bar{x}_2)$, $(\bar{x}_1 \vee x_3)$, $(\bar{x}_1 \vee x_2 \vee x_3)$, є елементарними диз'юнкціями; формула $(\bar{x}_1 \vee \bar{x}_2 \vee \bar{x}_1 \vee x_3)$ не є елементарною диз'юнкцією, хоча стає нею після застосування комутативного закону та закону ідемпотентності: $(\bar{x}_1 \vee \bar{x}_2 \vee \bar{x}_1 \vee x_3) =$ $= (\bar{x}_1 \vee \bar{x}_1 \vee \bar{x}_2 \vee x_3) = (\bar{x}_1 \vee \bar{x}_2 \vee x_3)$.

Аналогічно для елементарних кон'юнкцій – двоїстих формул наведеного прикладу.

Диз'юнктивною (кон'юнктивною) нормальною формою логічної формули F називають рівносильну їй формулу $F_{\vee}$ $(F_{\wedge})$, яка є диз'юнкцією (кон'юнкцією) елементарних кон'юнкцій (диз'юнкцій), тобто:

$$\begin{aligned} &\text{ДНФ: } F_{\vee} = K_1 \vee K_2 \vee \ldots \vee K_r = \bigvee_{i=1}^{r} K_i, \\ &\text{КНФ: } F_{\wedge} = D_1 \wedge D_2 \wedge \ldots \wedge D_r = \bigwedge_{j=1}^{s} D_j, \end{aligned} \tag{4.2.4}$$

де K_i (D_j) – елементарні кон'юнкції (диз'юнкції); $i = \overline{1, r}$, $j = \overline{1, s}$, $r, s \in \mathbf{N}$.

Прикладами ДНФ і КНФ логічних формул на множині $M = \{x, y, z\}$ є формули:

$$F_{\vee} = (\bar{x} \wedge y) \vee (x \wedge \bar{z}) \vee (x \wedge \bar{y} \wedge z),$$
$$\Phi_{\wedge} = z \wedge (x \vee \bar{z}) \wedge (\bar{x} \vee \bar{y}).$$

Загальна схема зведення логічних формул до ДНФ, КНФ така:

1) *здійснюють* перехід від операцій $\rightarrow, \sim, \oplus, |, \downarrow$ до головних операцій алгебри логіки $\vee$, $\wedge$, $\neg$ (з урахуванням порядку виконання дій і законів де Моргана);

2) *спрощують* здобуту формулу за допомогою законів алгебри логіки (ідемпотентності, склеювання, поглинання), вилучаючи з неї тавтології й суперечності;

3) *зводять* окремі частини формули за допомогою асоціативних і дистрибутивних законів до елементарних диз'юнкцій чи елементарних кон'юнкцій, причому дистрибутивні закони використовують так:

$$x \wedge (y \vee z) = (x \wedge y) \vee (x \wedge z) \text{ – для ДНФ,}$$
$$x \vee (y \wedge z) = (x \vee y) \wedge (x \vee z) \text{ – для КНФ.}$$

Надалі (щоб записи формул були компактнішими) для позначення кон'юнкції (логічного добутку) користуватимемося знаком множення звичайної (шкільної) алгебри – крапкою (·), або зовсім її випускатимемо: $x \wedge y = x \cdot y = xy$.

Спираючись на послідовне застосування дистрибутивних законів у поєднанні з асоціативними законами, можна сформулювати *правила переходу* від ДНФ до КНФ, і навпаки.

Правило 1. Для того, щоб перейти від ДНФ $F_{\vee} = K_1 \vee K_2 \vee ... \vee K_r$ до КНФ $F_{\wedge}$, треба скласти кон'юнкцію всіх можливих диз'юнкцій із атомів кон'юнкцій K_1, K_2, …, K_r, взятих по одному з кожної з них, і спростити здобуту формулу.

Правило 2. Для того, щоб перейти від КНФ $F_{\wedge} = D_1 \wedge D_2 \wedge ... \wedge D_s$ до ДНФ $F_{\vee}$, треба скласти диз'юнкцію всіх можливих кон'юнкцій із атомів диз'юнкцій D_1, D_2, …, D_s, взятих по одному з кожної з них, і спростити здобуту формулу.

Приклад. Зведемо до ДНФ і КНФ задану ЛФ: $F = \overline{x \oplus y} \to (x \sim \bar{y})$.

Установлюємо у ЛФ F порядок виконання ЛО, вводимо позначення результату кожної з них, причому інверсію атома y не нумеруватимемо як окрему операцію і врахуємо, що $\overline{x \oplus y} = x \sim y$:

$$F = \overline{x \oplus y} \to (x \sim \bar{y}) = (x \underset{\substack{1\\A}}{\sim} y) \underset{\substack{3\\F}}{\to} (x \underset{\substack{2\\B}}{\sim} \bar{y}).$$

Здійснюємо тотожні перетворення заданої ЛФ за законами алгебри логіки з урахуванням формул переходу до головних операцій (4.1.3):

1) $x \sim y = xy \vee \bar{x}\bar{y} = A$;

2) $x \sim \bar{y} = x\bar{y} \vee \bar{x}\bar{\bar{y}} = x\bar{y} \vee \bar{x}y = B$;

3) $A \to B = \bar{A} \vee B = \overline{(xy \vee \bar{x}\bar{y})} \vee (x\bar{y} \vee \bar{x}y) = \overline{(xy)}\,\overline{(\bar{x}\bar{y})} \vee (x\bar{y} \vee \bar{x}y) =$
$= (\bar{x} \vee \bar{y})(x \vee y) \vee (x\bar{y} \vee \bar{x}y) = \bar{x}x \vee \bar{x}y \vee x\bar{y} \vee \bar{y}y \vee (x\bar{y} \vee \bar{x}y) =$
$= 0 \vee \bar{x}y \vee x\bar{y} \vee 0 \vee (x\bar{y} \vee \bar{x}y) = \bar{x}y \vee x\bar{y} \vee x\bar{y} \vee \bar{x}y =$
$= \bar{x}y \vee \bar{x}y \vee x\bar{y} \vee x\bar{y} = \bar{x}y \vee x\bar{y} = F_{\vee}$.

Отже, ДНФ заданої ЛФ F має вигляд: $F_{\vee} = \bar{x}y \vee x\bar{y}$.

Застосовуючи до $F_{\vee}$ правило 1, дістанемо:

$$F_{\vee} = \bar{x}y \vee x\bar{y} \;\Rightarrow\; F_{\wedge} = (\bar{x} \vee x)(\bar{x} \vee \bar{y})(y \vee x)(y \vee \bar{y}) =$$
$$= 1 \cdot (\bar{x} \vee \bar{y})(y \vee x) \cdot 1 = (\bar{x} \vee \bar{y})(x \vee y) = F_{\wedge}.$$

Таким чином, КНФ заданої ЛФ F має вигляд: $F_{\wedge} = (\bar{x} \vee \bar{y})(x \vee y)$.

Досконалі диз'юнктивна та кон'юнктивна нормальні форми (ДДНФ, ДКНФ) логічних формул

У застосовних питаннях важливе значення має частинний випадок ДНФ (КНФ), коли кожна елементарна кон'юнкція (диз'юнкція) містить усі атоми (у прямому або інверсному вигляді) з деякої множини $M = \{x_1, x_2, ..., x_n\}$.

Елементарну кон'юнкцію (диз'юнкцію), яка містить усі атоми розглядуваної множини M, називають **конституентою одиниці** c^1 (**конституентою нуля** c^0), тобто

$$c^1 = \tilde{x}_1 \, \tilde{x}_2 \, ... \, \tilde{x}_n = \bigwedge_{i=1}^{n} \tilde{x}_i \quad (c^0 = \tilde{x}_1 \vee \tilde{x}_2 \vee ... \vee \tilde{x}_n = \bigvee_{i=1}^{n} \tilde{x}_i), \qquad (4.2.5)$$

де $\tilde{x}_i$ – це x_i або $\bar{x}_i$, $i = \overline{1, n}$; $x_i \in M$.

Кількість усіх c^1 чи c^0, які містять n атомів, нескладно підрахувати: кожний атом до конституенти може входити у прямому (x_i) або інверсному $(\bar{x}_i)$ вигляді; отже, шукане число дорівнює кількості розміщень із повтореннями з двох елементів по n, тобто $\bar{A}_2^n = 2^n$.

Досконалою диз'юнктивною (кон'юнктивною) нормальною формою логічної формули F називають рівносильну їй формулу $F_{\bigcirc\!\!\!\!\vee}$ $(F_{\bigcirc\!\!\!\!\wedge})$, яка є диз'юнкцією (кон'юнкцією) конституент одиниці (нуля), тобто:

$$\begin{aligned} &\text{ДДНФ: } F_{\bigcirc\!\!\!\!\vee} = c_1^1 \vee c_2^1 \vee ... \vee c_k^1, \\ &\text{ДКНФ: } F_{\bigcirc\!\!\!\!\wedge} = c_1^0 \wedge c_2^0 \wedge ... \wedge c_k^0, \quad 1 \le k \le 2^n. \end{aligned} \qquad (4.2.6)$$

Знаходження досконалих нормальних форм не викликає принципових труднощів, якщо ДНФ чи КНФ уже побудовані. Для цього досить застосувати закони алгебри логіки: $x \vee \bar{x} \equiv 1$ (виключення третьої можливості) і $x \wedge \bar{x} \equiv 0$ (суперечності) в поєднанні з дистрибутивними законами, а саме:

якщо в ДНФ деяка елементарна кон'юнкція K не містить у собі атом $\tilde{x}_i$, то її можна замінити рівносильним виразом:

$$K \cdot 1 = K(x_i \vee \bar{x}_i) = K\, x_i \vee K\, \bar{x}_i; \qquad (4.2.7)$$

якщо в КНФ деяка елементарна диз'юнкція D не містить у собі атом $\tilde{x}_i$, то її можна замінити рівносильним виразом:

$$D \vee 0 = D \vee (x_i \wedge \bar{x}_i) = (D \vee x_i)(D \vee \bar{x}_i)\,. \tag{4.2.8}$$

Застосовуючи послідовно формули (4.2.7) і (4.2.8) до всіх атомів, які не входять в ту чи іншу елементарну кон'юнкцію K і елементарну диз'юнкцію D відповідно, дістанемо досконалі нормальні форми логічної формули.

Приклад. Нехай $M = \{x_1, x_2, x_3, x_4\}$ і відома ДНФ деякої ЛФ F: $F_{\vee} = x_2 x_3 \bar{x}_4 \vee \bar{x}_1 x_2$. Тоді для побудови ДДНФ, згідно з (4.2.7), маємо:

$$x_2 x_3 \bar{x}_4 = x_2 x_3 \bar{x}_4\,(x_1 \vee \bar{x}_1) = x_1 x_2 x_3 \bar{x}_4 \vee \bar{x}_1 x_2 x_3 \bar{x}_4,$$

$$\bar{x}_1 x_2 = \bar{x}_1 x_2 (x_3 \vee \bar{x}_3) = \bar{x}_1 x_2 x_3 \vee \bar{x}_1 x_2 \bar{x}_3 = \bar{x}_1 x_2 x_3 (x_4 \vee \bar{x}_4) \vee \bar{x}_1 x_2 \bar{x}_3 (x_4 \vee \bar{x}_4) =$$

$$= \bar{x}_1 x_2 x_3 x_4 \vee \bar{x}_1 x_2 x_3 \bar{x}_4 \vee \bar{x}_1 x_2 \bar{x}_3 x_4 \vee \bar{x}_1 x_2 \bar{x}_3 \bar{x}_4\,.$$

Отже, досконала диз'юнктивна нормальна форма має вигляд:

$$F_{\textcircled{\vee}} = x_1 x_2 x_3 \bar{x}_4 \vee \bar{x}_1 x_2 x_3 \bar{x}_4 \vee \bar{x}_1 x_2 x_3 x_4 \vee \bar{x}_1 x_2 \bar{x}_3 x_4 \vee \bar{x}_1 x_2 \bar{x}_3 \bar{x}_4\,.$$

Для побудови ДКНФ потрібно за відомою $F_{\vee}$ спочатку віднайти $F_{\wedge}$, після чого кожну її елементарну диз'юнкцію перетворити на конституенту нуля, скориставшись формулою (4.2.8).

Далі буде показано, що довільну логічну формулу, яка не є тавтологією (суперечністю), можна подати у вигляді ДДНФ (ДКНФ).

Формули розкладу логічної формули та їх застосування до побудови ДДНФ, ДКНФ

Уведемо в розгляд параметр σ, який, як і атоми, набуває значень із множини $\{0,1\}$, і приймемо, що:

$$x^{\sigma} = \begin{cases} x, & \text{якщо } \sigma = 1, \\ \bar{x}, & \text{якщо } \sigma = 0, \end{cases} \tag{4.2.9}$$

де параметр σ тлумачать як верхній індекс при x, а не як показник степеня у звичайній алгебрі.

Із (4.2.9) маємо, що $x^{\sigma}=1$ $(x^{\sigma}=0)$ тоді і тільки тоді, коли $\sigma=x$ $(\sigma\neq x)$, тобто:

$$\begin{aligned} x^{\sigma}=1 &\Leftrightarrow \sigma=x \quad (1^1=1,\ 0^0=1); \\ x^{\sigma}=0 &\Leftrightarrow \sigma\neq x \quad (1^0=0,\ 0^1=0). \end{aligned} \tag{4.2.10}$$

Символ x^{σ} називатимемо **атомом із параметром**.

Далі розглядатимемо й набори значень параметрів $\sigma_1,\sigma_2,...,\sigma_n$, де σ_i $(i=\overline{1,n})$ – це 0 або 1, і відповідні конституенти одиниці (нуля) з параметрами:

$$\underset{i=1}{\overset{n}{\Lambda}} x_i^{\sigma_i}=x_1^{\sigma_1}\,x_2^{\sigma_2}\ldots\,x_n^{\sigma_n}, \quad \underset{i=1}{\overset{n}{\mathrm{V}}} x_i^{\sigma_i}=x_1^{\sigma_1}\vee x_2^{\sigma_2}\vee\ldots\vee x_n^{\sigma_n}.$$

Як наслідки з означення кон'юнкції і співвідношень (4.2.10) відзначимо дві властивості конституент одиниці з параметрами:

1) конституента одиниці з параметрами дорівнює 1 тоді і тільки тоді, коли значення кожного атома і його параметра співпадають, тобто:

$$\underset{i=1}{\overset{n}{\Lambda}} x_i^{\sigma_i}=1 \ \Leftrightarrow\ \forall\, i\in\{1,2,...,n\}\colon\ \sigma_i=x_i; \tag{4.2.11}$$

2) конституента одиниці з параметрами дорівнює 0 тоді і тільки тоді, коли значення хоча б одного атома не співпадає зі значенням його параметра, тобто:

$$\underset{i=1}{\overset{n}{\Lambda}} x_i^{\sigma_i}=0 \ \Leftrightarrow\ \exists\, i\in\{1,2,...,n\}\colon\ \sigma_i\neq x_i. \tag{4.2.12}$$

Спробуйте самостійно сформулювати й довести аналогічні твердження для конституенти нуля з параметрами.

Теорема (*про розклад логічної формули за всіма атомами*). Будь-яку формулу $F(x_1,..., x_n)$ можна подати у вигляді логічної суми $(\vee)$, кожний доданок якої визначається одним із наборів значень параметрів $(\sigma_1,...,\sigma_n)$ і є кон'юнкцією конституенти одиниці з параметрами і значення формули, розглянутих на відповідному наборі значень параметрів:

$$F(x_1, ..., x_n) = \bigvee_{(\sigma_1, ..., \sigma_n)} \left(\left(\bigwedge_{i=1}^{n} x_i^{\sigma_i} \right) \wedge F(\sigma_1, ..., \sigma_n) \right), \tag{4.2.13}$$

де диз'юнкцію беруть за всіма можливими наборами значень параметрів $(\sigma_1, ..., \sigma_n)$, кількість яких – 2^n.

Доведення. Візьмемо довільний набір значень атомів $(\alpha_1, ..., \alpha_n)$, тобто приймемо, що $x_i = \alpha_i \ \ (i = \overline{1, n})$, де α_i – це 0 або 1, і покажемо, що ліва і права частини в (4.2.13) набувають на ньому одного й того самого значення.

Ліва частина дає $F(\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n)$. Права частина набуває вигляду:

$$\bigvee_{(\sigma_1, ..., \sigma_n)} \alpha_1^{\sigma_1} \alpha_2^{\sigma_2} ... \alpha_n^{\sigma_n} \ F(\sigma_1, ..., \sigma_n).$$

Враховуючи (4.2.11), (4.2.12), робимо висновок, що з усіх конституент одиниці з параметрами лише одна не дорівнюватиме нулю – та, для якої $\sigma_i = \alpha_i, \ \ i = \overline{1, n}$. Отже, залишається відмінним від нуля один доданок логічної суми:

$$\alpha_1^{\alpha_1} \alpha_2^{\alpha_2} ... \alpha_n^{\alpha_n} F(\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n) = F(\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n).$$

Наслідок. Якщо логічна формула не є суперечністю $(F \not\equiv 0)$, то її можна подати у вигляді:

$$F(x_1, ..., x_n) = \bigvee_{\substack{(\sigma_1, ..., \sigma_n) \\ F(\sigma_1, ..., \sigma_n) = 1}} x_1^{\sigma_1} \, x_2^{\sigma_2} ... \, x_n^{\sigma_n}, \tag{*}$$

де диз'юнкцію беруть за всіма наборами $(\sigma_1, ..., \sigma_n)$, на яких $F = 1$.

Дійсно, оскільки для всіх наборів значень параметрів, на яких $F = 0$, відповідний логічний доданок у (4.2.13) перетворюється на нуль.

Співвідношення (4.2.13) називають **формулою розкладу типу "сума добутків"** $(\vee \wedge)$. Саме цю формулу використовують для побудови ДДНФ.

Спираючись на принцип двоїстості в математичній логіці, легко дістати **формулу розкладу типу "добуток сум"** $(\wedge \vee)$:

$$F(x_1, ..., x_n) = \bigwedge_{(\sigma_1,...,\sigma_n)} \left(\left(\bigvee_{i=1}^{n} x_i^{\bar{\sigma}_i} \right) \vee F(\sigma_1,...,\sigma_n) \right) \qquad (4.2.14)$$

і відповідний **наслідок**:

$$F(x_1, ..., x_n) = \bigwedge_{\substack{(\sigma_1,...,\sigma_n) \\ F(\sigma_1,...,\sigma_n)=0}} x_1^{\bar{\sigma}_1} \vee x_2^{\bar{\sigma}_2} \vee ... \vee x_n^{\bar{\sigma}_n} \quad (F \not\equiv 1). \qquad (**)$$

який використовують для побудови ДКНФ.

З аналізу формул $(*)$, $(**)$ (з точки зору співвідношень (4.2.10)) випливають правила побудови досконалих форм.

Правило побудови ДДНФ. Щоб знайти досконалу диз'юнктивну нормальну форму логічної формули F $(F \not\equiv 0)$, треба:

1) *скласти* її таблицю істинності й розглянути всі набори значень атомів, на яких $F = 1$;

2) *замінити* кожну одиницю (кожний нуль) такого набору на атом x_i (заперечення $\bar{x}_i$), де i – номер відповідного елемента набору, що дає деяку конституенту одиниці;

3) *записати* диз'юнкцію всіх конституент одиниці, що визначаються наборами значень атомів, на яких $F = 1$.

Правило побудови ДКНФ. Щоб знайти досконалу кон'юнктивну нормальну форму логічної формули $F \not\equiv 1$, треба:

1) *скласти* її таблицю істинності і розглянути всі набори значень атомів, на яких $F = 0$;

2) *замінити* кожний нуль (кожну одиницю) такого набору на атом x_i (заперечення $\bar{x}_i$), де i – номер відповідного елемента набору, що дає деяку конституенту нуля;

3) *записати* кон'юнкцію всіх конституент нуля, що визначаються наборами значень атомів, на яких $F = 0$.

Приклад. Побудуємо ДДНФ і ДКНФ ЛФ $F = ((x \sim \bar{y}) \wedge (x \mid z)) \downarrow y$.

Установлюємо значення F на всіх наборах значень атомів x, y, z (табл. 4.2.2). Для складання таблиці істинності спочатку встановлюємо порядок виконання логічних операцій і вводимо позначення кожного проміжного результату. Останній стовпець відповідає всій формулі F.

Таблиця 4.2.2

Таблиця істинності логічної формули

			A	B	C	F
x	y	z	$x\sim\bar{y}$	$x\mid z$	$A\wedge B$	$C\mid y$
0	0	0	0	1	0	1
0	0	1	0	1	0	1
0	1	0	1	1	1	0
0	1	1	1	1	1	0
1	0	0	1	1	1	0
1	0	1	1	0	0	1
1	1	0	0	1	0	0
1	1	1	0	0	0	0

За правилами побудови досконалих форм маємо:

ДДНФ: $F_{\textcircled{\vee}}=\bar{x}\,\bar{y}\,\bar{z}\vee\bar{x}\,\bar{y}\,z\vee x\,\bar{y}\,z$,

ДКНФ: $F_{\textcircled{\wedge}}=(x\vee\bar{y}\vee z)(x\vee\bar{y}\vee\bar{z})(\bar{x}\vee y\vee z)(\bar{x}\vee\bar{y}\vee z)(\bar{x}\vee\bar{y}\vee\bar{z})$.

Аналогічно до формул розкладу ЛФ за всіма n атомами можна дістати формули розкладу за будь-якими m атомами $(1\le m<n)$; при цьому відповідно формуються набори значень параметрів.

Наприклад, для формули $F(x_1,x_2,x_3)$ розклад типу $(\vee\wedge)$ за атомами x_1, x_3 має вигляд:

$$F(x_1,x_2,x_3)=\bigvee_{(\sigma_1,\sigma_3)}x_1^{\sigma_1}x_3^{\sigma_3}F(\sigma_1,x_2,\sigma_3),\tag{4.2.15}$$

де $\{(\sigma_1,\sigma_3)\}=\{(0,0),(0,1),(1,0),(1,1)\}$.

А формула розкладу типу $(\wedge\vee)$ за однією змінною x_1 така:

$$F(x_1,x_2,x_3)=\bigwedge_{(\sigma_1)}\left(x_1^{\bar{\sigma}_1}\vee F(\sigma_1,x_2,x_3)\right),\quad \{(\sigma_1)\}=\{0,1\},$$ або

$$F(x_1,x_2,x_3)=(x_1\vee F(0,x_2,x_3))(\bar{x}_1\vee F(1,x_2,x_3)).\tag{4.2.16}$$

Формули розкладу за m атомами можна застосувати для побудови ДНФ і КНФ, щоб уникнути громіздких тотожних перетворень.

Наприклад, для знаходження КНФ ЛФ $F(x,y,z)=(x\downarrow y)\sim(\bar{y}\,|\,z)$ здійснимо розклад типу $(\wedge\vee)$ за атомом y (аналог формули (4.2.16)):

$$F(x,y,z)=(y\vee F(x,0,z))(\bar{y}\vee F(x,1,z))\ .$$

Встановлюємо вигляд $F(x,0,z)$, $F(x,1,z)$:

$$F(x,0,z)=(x\downarrow 0)\sim(1\,|\,z)=\bar{x}\sim\bar{z}=(x\vee\bar{z})(\bar{x}\vee z)\,,$$
$$F(x,1,z)=(x\downarrow 1)\sim(0\,|\,z)=0\sim 1=0\,.$$

Таким чином,

$$F=(y\vee(x\vee\bar{z})(\bar{x}\vee z))(\bar{y}\vee 0)=y\bar{y}\vee\bar{y}(x\vee\bar{z})(\bar{x}\vee z)\,,$$
$$F_{\wedge}(x,\,y,\,z)=\bar{y}(x\vee\bar{z})(\bar{x}\vee z)\,.$$

Знайдіть самостійно $F_{\vee}(x,y,z)$, використовуючи знайдену КНФ, і за допомогою розкладу типу $(\vee\wedge)$ та порівняйте результати.

Зазначимо, що принципова відмінність (а не за виглядом) нормальних форм і досконалих нормальних форм логічних формул полягає в тому, що ДНФ і КНФ визначаються, взагалі кажучи, не однозначно, а ДДНФ і ДКНФ для кожної ЛФ єдині. Із досконалої нормальної форми за допомогою законів алгебри логіки можна отримати різні нормальні форми.

4.3. Булеві функції

Булеві функції: означення, способи задання, нормальні форми

Розглянемо утворену з n атомів $x_1,\,x_2,\,\ldots,\,x_n$ довільну логічну формулу $F(x_1,\,x_2,\ldots,\,x_n)$ з точки зору відображень. Кожен атом і саму формулу можна розглядати як змінні величини, які набувають значень із множини $B=\{0,1\}$, де символи $0,1$ тлумачать як числа. Кожний набір значень атомів $(x_1,\,x_2,\ldots,\,x_n)$ – це n-елементний кортеж, складений із нулів і одиниць, який є елементом n-го декартового степеня множин B:

$$B^n=B\times B\times\ldots\times B=\{(0,0,\ldots,0),(0,\,0,\ldots,1),\,\ldots,\,(1,1,\ldots,1)\}\,.$$

Отже, будь-яку ЛФ можна розглядати як відображення B^n в B.

Булевою функцією (БФ), або **функцією алгебри логіки**, n змінних x_1, x_2, …, x_n називають відображення f множини B^n у множину B, і пишуть:

$$f:\ B^n \to B, \quad \text{або} \quad y = f(x_1, x_2, ..., x_n).$$

Якщо функція f відповідає формулі F, то кажуть також, що *формула* F *реалізує функцію* f. Рівносильні формули реалізують одну й ту саму функцію.

Областю існування (визначення) БФ n змінних називають множину всіх можливих n-кортежів з елементами із $B = \{0, 1\}$. Множину B називають **булевим** (**двійковим**) **алфавітом**, а n-кортеж – **булевим** (**двійковим**) **набором**.

Для будь-якого заданого n серед n-кортежів можна ввести природну впорядкованість, якщо кожний двійковий набір розглядати як запис деякого цілого невід'ємного числа у двійковій системі числення.

Наприклад, набір $(1\,0\,0\,1)$ дає: $1 \cdot 2^3 + 0 \cdot 2^2 + 0 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0 = 9$.

Число, яке зображене певним двійковим набором, домовимось називати **номером** цього **набору** і позначатимемо буквою ν. Природну впорядкованість n-кортежів дістанемо, якщо розмістити двійкові набори в порядку зростання їхніх номерів: $\nu = 0, 1, 2, ..., 2^n - 1$. Це узгоджується з тим, що кількість усіх n-кортежів визначають як кількість розміщень із повтореннями із двох елементів по n: $\overline{A}_2^n = 2^n$.

Нескладно також підрахувати кількість різних булевих функцій від n змінних. На кожному булевому наборі та чи інша БФ набуває двох значень, отже, кількість усіх функцій n аргументів дорівнює кількості розміщень із повтореннями із двох елементів по 2^n: $\overline{A}_2^{2^n} = 2^{2^n}$.

Хоча кількість БФ n змінних скінченна, здійснити їх перелік уже для порівняно невеликих значень n $(n \geq 6)$ дуже складно (навіть із використанням обчислювальної техніки), оскільки їх кількість швидко зростає зі зростанням n; *наприклад*, для $n = 4$ маємо: $2^{2^4} = 65\,536$.

Зауважимо, що тотожний нуль і тотожну одиницю розглядають як функції від нуля змінних і називають **функціями-константами**: $f \equiv 0$, $f \equiv 1$. Варто зазначити, що функції-константи можна розглядати і як функції одного, двох, трьох і взагалі будь-якої скінченної кількості аргументів, оскільки формула F, яка реалізує БФ f, може містити n $(n \geq 1)$ атомів і бути одночасно тавтологією чи суперечністю.

У теорії булевих функцій особливе значення мають функції одного і двох аргументів, які визначаються основними логічними операціями над висловленнями.

Способи задання БФ не відрізняються від способів задання функцій взагалі.

1. *Аналітичний спосіб* полягає у зображенні БФ f формулою F, що реалізує f як відображення B^n в B.

Для $n=1$ маємо чотири $\left(2^{2^1}=4\right)$ БФ однієї змінної $f(x)$: $f_0=0$, $f_1=x$, $f_2=\bar{x}$, $f_3=1$, де функції-константи ($f_0=0$, $f_3=1$) називають **виродженими функціями** однієї змінної.

Для $n=2$ маємо шістнадцять $\left(2^{2^2}=16\right)$ БФ двох змінних $f(x,y)$, вісім із яких відповідають розглянутим ЛО: $\bar{x}$, $x \vee y$, $x \wedge y$, $x \to y$, $x \sim y$, $x \oplus y$, $x \mid y$, $x \downarrow y$, а інші вісім такі: 0, 1, x, y, $\bar{y}$, $\overline{x \to y}$, $y \to x$, $\overline{y \to x}$.

БФ $f(x,y)$, які містять обидві змінні x, y називають **невиродженими**, а 0, 1, x, y, $\bar{x}$, $\bar{y}$ – **виродженими функціями** двох змінних. Поняття виродженості й невиродженості узагальнюють на випадок БФ довільної (скінченної) кількості змінних. Отже, довільну функцію меншої кількості змінних можна розглядати як вироджену функцію будь-якої більшої кількості аргументів.

2. *Табличний спосіб* полягає в зображенні БФ таблицею, у якій наводять всі можливі набори значень аргументів (або їхні номери) і відповідні значення функції. *Наприклад*, таблиця 4.3.1 є табличним заданням деякої БФ трьох змінних $f(x,y,z)$.

Таблиця 4.3.1

Табличне задання булевої функції

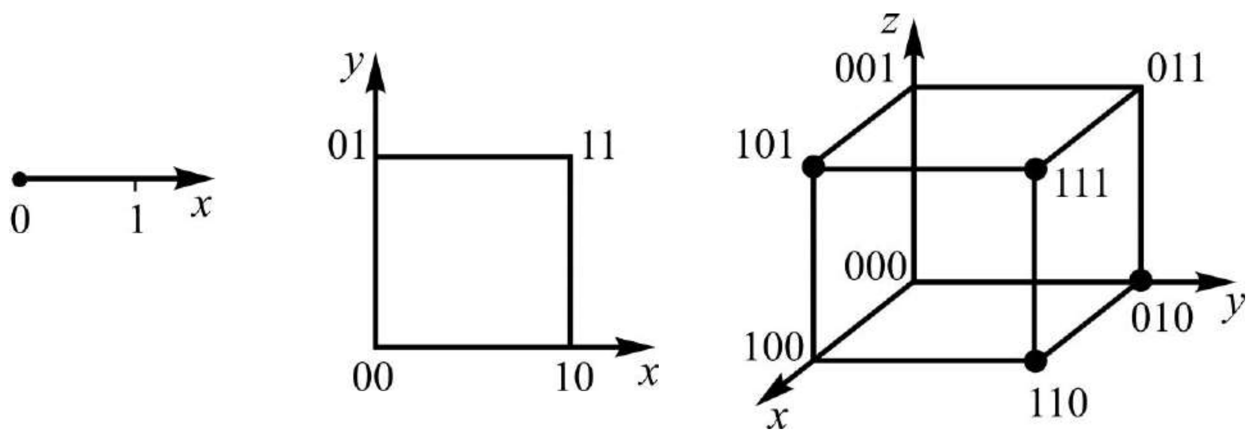
ν	0	1	2	3	4	5	6	7
f	0	0	1	0	0	1	1	1

Зрозуміло, що дуже просто перейти від аналітичного способу до табличного (*зазначте, як*).

3. *Геометричний спосіб* – це коли область існування булевої функції $y = f(x_1, x_2, ..., x_n)$ розглядають як сукупність n-вимірних векторів, координатами яких є елементи 0, 1 двійкового алфавіту; кожному із цих векторів ставлять у відповідність точку так званого ***n*-вимірного логічного простору**. Саму БФ відображають множиною точок, що відповідають векторам $(x_1, x_2, ..., x_n)$, на яких БФ набуває значення 1 $(f = 1)$.

Безумовно, наочне зображення за такого підходу можна дати лише для $n = 1,\ 2,\ 3$. Якщо точки логічного простору з'єднати відрізками, то дістанемо граф, який називають ***n*-вимірним кубом**. Його підграфи визначають ту чи іншу БФ. Звичайно вершини підграфа позначають жирними точками або кружечками.

Так, для $n = 1$ маємо 1-вимірний куб (рис. 4.3.1а) – відрізок, що з'єднує вершини 0, 1; для $n = 2$ маємо 2-вимірний куб (рис. 4.3.1б) – квадрат з вершинами, що відповідають наборам: (00), (01), (10), (11). Для $n = 3$ дістаємо знайомий 3-вимірний куб (рис. 4.3.1в).



а б в

Рис. 4.3.1. ***n*-вимірні куби: а)** $\boldsymbol{n = 1}$**; б)** $\boldsymbol{n = 2}$**; в)** $\boldsymbol{n = 3}$

Як *приклад*, на рис. 4.3.1в зображено функцію трьох змінних відповідно до табл. 4.3.1.

БФ, задану одним зі способів, нескладно подати в іншій формі задання. Особливо легко робити перехід від табличного способу до геометричного $(n = 1,\ 2,\ 3)$ і навпаки, а також від аналітичного до табличного. Для переходу від табличного чи геометричного задання БФ до аналітичного будують формулу, що реалізує БФ, у вигляді ДДНФ або ДКНФ, використовуючи відповідні правила.

Так, *наприклад*, для функції, зображеної на рис. 4.3.1в, маємо:

$$y_{\textcircled{\vee}} = x\bar{y}z \vee xyz \vee xy\bar{z} \vee \bar{x}y\bar{z},$$

оскільки БФ набуває значення 1 на наборах 101, 111, 110, 010;

$$y_{\textcircled{\wedge}} = (\bar{x} \vee y \vee z)(x \vee y \vee z)(x \vee y \vee \bar{z})(x \vee \bar{y} \vee \bar{z}),$$

оскільки БФ набуває значення 0 на наборах 100, 000, 001, 011.

Якщо формулу F, яка реалізує БФ f, подано в одній із нормальних форм, то форму запису f теж називають **нормальною** (із відповідною назвою: ДНФ, КНФ, ДДНФ, ДКНФ). У розглянутому прикладі здобуто досконалі (диз'юнктивну і кон'юнктивну) нормальні форми БФ. Зважаючи на те, що між конституентами одиниці c^1 (нуля c^0) в ДДНФ (ДКНФ), наборами значень аргументів $(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z})$ і їхніми номерами ν існує бієкція (чому?), то $y_{\vee}$ ($y_{\wedge}$) можна подати множиною номерів їхніх конституент. (*Зробіть це самостійно*.)

Мінімізація булевих функцій

Під **мінімізацією БФ** (у загальному смислі) розуміють зображення функції алгебри логіки формулою, яка містить найменшу кількість операцій. У частинному випадку, яким ми і будемо займатися, розглядають **канонічну задачу мінімізації**: подання БФ у вигляді ДНФ або КНФ, яка містить *найменшу кількість букв-змінних*, *або їхніх інверсій (!)*.

Для розв'язання цієї задачі суттєве значення мають поняття "імпліканта" й "імпліцента" БФ. БФ $g(x_1, ..., x_n)$ називають **імплікантою** (**імпліцентою**) булевої функції $f(x_1, ..., x_n)$, якщо на будь-якому наборі значень змінних, на якому $g = 1$ $(g = 0)$, функція f також набуває значення 1 (0):

$$g \text{ – імпліканта } \rightleftharpoons (\forall (x_1, ..., x_n) \mid g(x_1, ..., x_n) = 1) \Rightarrow (f(x_1, ..., x_n) = 1)$$
$$\big(g \text{ – імпліцента } \rightleftharpoons (\forall (x_1, ..., x_n) \mid g(x_1, ..., x_n) = 0) \Rightarrow (f(x_1, ..., x_n) = 0)\big).$$

Якщо g – імпліканта (імпліцента) БФ f, то кажуть, що відповідні одиниці (нулі) множини значень f *накриваються* цією *імплікантою (імпліцентою)*.

Множину імплікант (імпліцент), яка накриває всі одиниці (нулі) із множини значень f, називають **імплікантним** (**імпліцентним**) **накриттям** БФ.

Із наведених означень випливає важливе *твердження*: диз'юнкція (кон'юнкція) елементів імплікантного (імпліцентного) накриття співпадає із функцією f. (*Наведіть* відповідні міркування).

Імпліканту $g_{\wedge}$ називають **простою**, якщо вона є елементарною кон'юнкцією букв – такою, що не існує підмножини її букв, кон'юнкція яких теж дає імпліканту.

Наприклад, для БФ $f = xyz \vee \bar{x}yz \vee \bar{x}\bar{y}z$ функції $g_1(y,z) = yz$, $g_2(x,z) = \bar{x}z$, $g_3(x,y,z) = xyz$ є імплікантами. Дійсно:

$$g_1(1,1) = 1 \Rightarrow f = x \vee \bar{x} \vee 0 = 1,$$
$$g_2(0,1) = 1 \Rightarrow f = 0 \vee y \vee \bar{y} = 1,$$
$$g_3(1,1,1) = 1 \Rightarrow f = 1 \vee 0 \vee 0 = 1.$$

Дві з них (g_1, g_2) – прості, а g_3 не є простою, оскільки кон'юнкція підмножини її букв $\{y, z\}$ дає, у свою чергу, імпліканту.

Диз'юнкцію простих імплікант, яка становить накриття заданої БФ, називають **скороченою ДНФ** булевої функції, а якщо (до того ж) жодна із підмножин цього накриття не дає накриття – **тупиковою ДНФ** булевої функції.

Означення **простої імпліценти**, **скороченої КНФ**, **тупикової КНФ** формулюють аналогічно до наведених означень для імплікант. (*Зробіть* це самостійно).

Із означення тупикових форм випливає, що саме серед них слід шукати мінімальні ДНФ та КНФ булевої функції.

Існує три різновиди методів мінімізації БФ, які за назвою співпадають зі способами їх задання.

I. Аналітичні (алгебраїчні) методи. Вони зводяться до знаходження тупикових ДНФ чи КНФ, відштовхуючись від розглядуваних раніше нормальних форм БФ.

Метод Квайна потребує побудови досконалих форм і базується на однойменній теоремі, яку сформулюємо після означення деяких нових понять.

Операцією поглинання називають перетворення формул, яке виконують за законами поглинання в алгебрі Буля ($x \vee xy = x$, $x(x \vee y) = x$), і застосовують до довільних формул:

$$A \vee AB = A, \quad A(A \vee B) = A. \tag{4.3.1}$$

Операцією склеювання (**неповного склеювання**) називають перетворення формул за допомогою співвідношень:

$$\begin{gathered} Ax \vee A\bar{x} = A \quad (Ax \vee A\bar{x} = Ax \vee A\bar{x} \vee A), \\ (A \vee x)(A \vee \bar{x}) = A \quad ((A \vee x)(A \vee \bar{x}) = (A \vee x)(A \vee \bar{x})A). \end{gathered} \tag{4.3.2}$$

Відмінність операції неповного склеювання від просто склеювання полягає в тому, що операнди, які вже підлягали склеюванню, можуть брати участь у подальших склеюваннях стільки разів, скільки це виявиться необхідним.

Теорема (*Квайна*). Якщо в ДДНФ (ДКНФ) виконати всі можливі неповні склеювання, а потім усі можливі поглинання, то дістанемо скорочену ДНФ (КНФ).

Метод Квайна реалізують за такою *загальною схемою*:

1) *зводимо* f до ДДНФ чи ДКНФ (виходячи з ДНФ чи КНФ або за формулами розкладу за всіма атомами);

2) *виконуємо* всі можливі неповні склеювання (за формулою (4.3.2));

3) *здійснюємо* всі можливі поглинання (за формулою (4.3.1)), що дає скорочену форму;

4) *виділяємо* всі тупикові форми (складаючи так звані імплікантні (імпліцентні) таблиці);

5) *знаходимо* серед тупикових форм мінімальну f^* (або мінімальні, якщо їх декілька).

Приклад. Розглянемо процес мінімізації БФ, поданої у вигляді ДДНФ:

$$f(x, y, z) = \underset{0}{\bar{x}\bar{y}\bar{z}} \vee \underset{1}{\bar{x}\bar{y}z} \vee \underset{5}{x\bar{y}z} \vee \underset{6}{xy\bar{z}} \vee \underset{7}{xyz}.$$

Спочатку занумеруємо конституенти одиниці (згідно з номерами ν наборів, яким вони відповідають), а потім виконаємо склеювання конституент одиниці, зберігаючи їх для можливого подальшого склеювання, тобто проведемо неповні склеювання:

$$(0,1):\ \bar{x}\bar{y}\bar{z} \vee \bar{x}\bar{y}z = \bar{x}\bar{y}\bar{z} \vee \bar{x}\bar{y}z \vee \bar{x}\bar{y};$$
$$(1,5):\ \bar{x}\bar{y}z \vee x\bar{y}z = \bar{x}\bar{y}z \vee x\bar{y}z \vee \bar{y}z;$$
$$(5,7):\ x\bar{y}z \vee xyz = x\bar{y}z \vee xyz \vee xz;$$
$$(6,7):\ xy\bar{z} \vee xyz = xy\bar{z} \vee xyz \vee xy.$$

Як бачимо, перша, п'ята та сьома конституенти беруть участь у двох склеюваннях кожна. Отже, після здійснення неповного склеювання дістанемо:

$$f = \bar{x}\bar{y}\bar{z} \vee \bar{x}\bar{y}z \vee x\bar{y}z \vee xy\bar{z} \vee xyz \vee \bar{x}\bar{y} \vee \bar{y}\bar{z} \vee xz \vee xy.$$

Після проведення всіх можливих операцій поглинання маємо скорочену ДНФ:

$$f = \bar{x}\bar{y} \vee \bar{y}z \vee xz \vee xy.$$

Щоб виділити всі тупикові форми, складемо *імплікантну таблицю* – таблицю, рядки i якої позначені імплікантами, а стовпці j – конституентами одиниці вихідної ДДНФ; на перетині рядків і стовпців ставимо "зірочку" ($*$), якщо i-та імпліканта поглинає j-ту конституенту (тобто накриває якусь одиницю значень БФ), як показано в табл. 4.3.2.

Таблиця 4.3.2

Імплікантна таблиця для мінімізації булевої функції

$g_\wedge$ \ c^1	$\bar{x}\bar{y}\bar{z}$	$\bar{x}\bar{y}z$	$x\bar{y}z$	xyz	$xy\bar{z}$
$\bar{x}\bar{y}$	$*$	$*$			
$\bar{y}z$		$*$	$*$		
xz			$*$	$*$	
xy				$*$	$*$

Для знаходження тупикових ДНФ, прості імпліканти яких накривають усі одиниці значень БФ, достатньо залишити такі прості імпліканти, щоб у кожному стовпці таблиці була хоча б одна зірочка. У нашому прикладі можна вилучити або імпліканту $\bar{y}z$, або – xz.

Таким чином, маємо дві тупикові ДНФ: $\bar{x}\bar{y} \vee \bar{y}z \vee xy$, $\bar{x}\bar{y} \vee xz \vee xy$, які водночас будуть і мінімальними: $f_\vee^* = \bar{x}\bar{y} \vee \bar{y}z \vee xy = \bar{x}\bar{y} \vee \bar{y}z \vee xy$.

Метод Блейка відштовхується від довільної нормальної форми (ДНФ, КНФ) і базується на операціях **узагальненого склеювання**:

$$\begin{gathered} AC \vee B\overline{C} = AC \vee B\overline{C} \vee AB, \\ (A \vee C)(B \vee \overline{C}) = (A \vee C)(B \vee \overline{C})(A \vee B) \end{gathered} \tag{4.3.3}$$

і однойменній теоремі.

Теорема (*Блейка*). Якщо в довільній ДНФ (КНФ) виконати всі можливі узагальнені склеювання, а потім усі можливі поглинання, то дістанемо скорочену ДНФ (КНФ).

Загальна схема реалізації метода Блейка відрізняється від відповідної схеми для методу Квайна двома першими пунктами. Для різноманітності подамо її у вигляді орграфа (рис. 4.3.2):

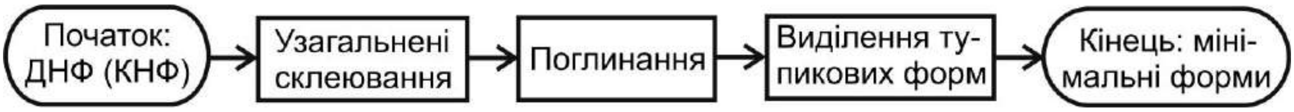


Рис. 4.3.2. **Структурна схема метода Блейка**

Приклад. Мінімізуємо БФ, подану у вигляді КНФ:

$$f(x, y, z) = (x \vee \bar{y})(\bar{x} \vee y \vee z)(y \vee z).$$

Можливі узагальнені склеювання перших двох компонент:

$$\begin{gathered} (x \vee \bar{y})(\bar{x} \vee y \vee z) = (x \vee \bar{y})(\bar{x} \vee y \vee z)(\bar{y} \vee y \vee z), \\ (x \vee \bar{y})(\bar{x} \vee y \vee z) = (x \vee \bar{y})(\bar{x} \vee y \vee z)(x \vee \bar{x} \vee z), \end{gathered}$$

дають тривіальні результати, оскільки $\bar{y} \vee y \vee z \equiv 1$, $x \vee \bar{x} \vee z \equiv 1$, а для першої і третьої – маємо:

$$(x \vee \bar{y})(y \vee z) = (x \vee \bar{y})(y \vee z)(x \vee z).$$

Після виконання поглинань матимемо скорочену КНФ:

$$f = (x \vee \bar{y})(y \vee z)(x \vee z),$$

а імпліцентна таблиця (*побудуйте її самостійно*) дає єдину тупикову форму, яка водночас є мінімальною: $f_{\wedge}^{*} = (x \vee \bar{y})(y \vee z)$.

Аналітичні методи мінімізації БФ реалізують вручну, коли $n \leq 4$, для $n \geq 5$ – на ЕОМ за допомогою спеціально розроблених програм.

ІІ. Табличні методи. Ці методи ґрунтуються на використанні тієї особливості зорового сприйняття, що за його допомогою можна практично миттєво розпізнавати ті чи інші об'єкти та їхні конфігурації.

Метод Карно зводиться до побудови однойменних таблиць (матриць, карт) – таких, що:

комірки (клітинки) карти Карно відповідають усім можливим двійковим наборам значень змінних;

набори, яким відповідають сусідні рядки чи стовпці, відрізняються значенням тільки однієї змінної;

рядки чи стовпці, розташовані на краях карти, також вважають сусідніми (тобто верхній і ніжній, лівий і правий краї карти подумки нібито "склеюються").

На рис. 4.3.3(а – в) зображено карти Карно для двох, трьох, чотирьох змінних відповідно. Видно, що кожна комірка карти стоїть на перетині якихось рядка і стовпця та визначає певний двійковий набір значень відповідно двох, трьох, чотирьох змінних.

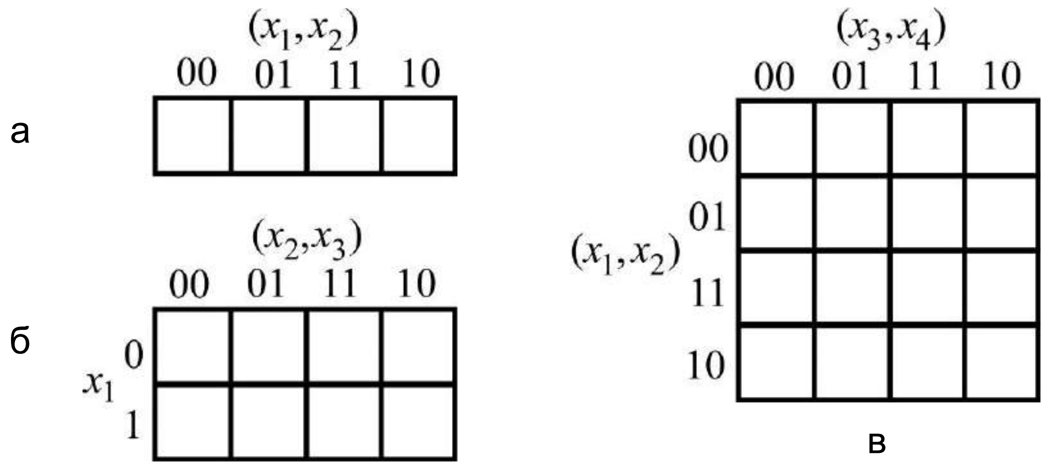


Рис. 4.3.3. **Карти Карно для:**
а) двох змінних; б) трьох змінних; в) чотирьох змінних

Комірки наборів, на яких розглядувана функція набуває значення 1, заповнюють одиницями, інші – нулями. Звичайно у разі знаходження мінімальної ДНФ (КНФ) вписують тільки одиниці (нулі), а інші клітинки залишають порожніми.

Для спрощення користування картами (під час мінімізації БФ) рядки і стовпці, що відповідають значенням 1 деякої змінної, виділяють фігурною дужкою з позначенням цієї змінної, як показано на рис. 4.3.4. У разі такого позначення кожній змінній x_i та її інверсії $\bar{x}_i$ $(i = \overline{1, n};\ n = 2, 3, 4)$

відповідає деяка горизонтальна чи вертикальна смуга з рядків чи стовпців таблиці (враховуючи, що краї таблиці подумки нібито склеюються). Ця відповідність дає змогу легко зорієнтуватися в тому, якій конституенті (одиниці або нуля) відповідає та чи інша комірка таблиці, і навпаки. Для цього досить подивитись, на перетині яких смуг розташована клітинка, яка нас цікавить, і навпаки: за буквами конституенти знайти клітинку, що є результатом перетину відповідних смуг.

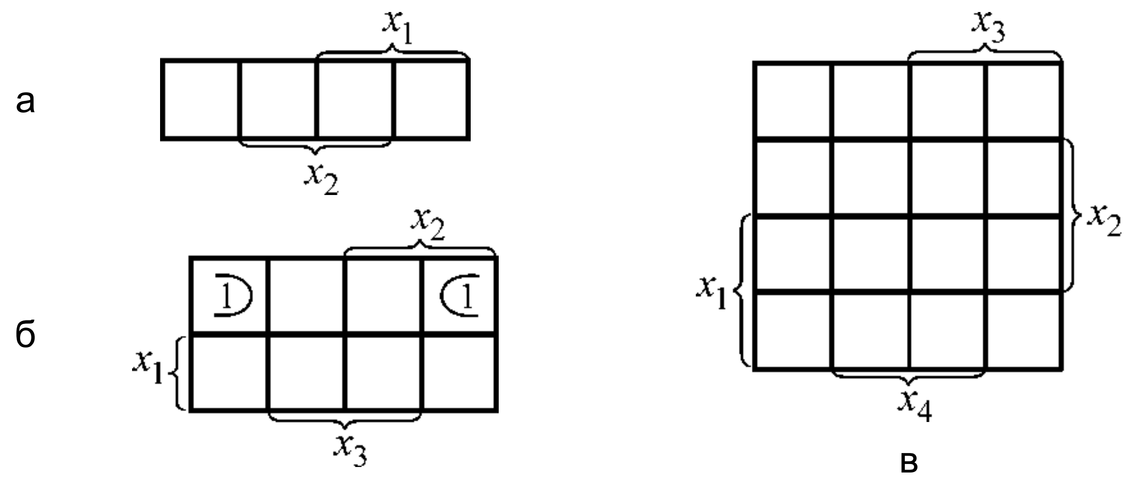


Рис. 4.3.4. **Модифіковані карти Карно для:**
а) двох змінних; б) трьох змінних; в) чотирьох змінних

Наприклад (рис. 4.3.4б), одиниці, що стоїть у правому верхньому куті карти, відповідає конституента одиниці $\bar{x}_1 x_2 \bar{x}_3$; конституенті одиниці $\bar{x}_1 \bar{x}_2 \bar{x}_3$ відповідає одиниця лівого верхнього кута.

Далі розглядатимемо *задачу знаходження мінімальних ДНФ* для заданої БФ, а потім сформулюємо відповідні положення для здобуття мінімальних КНФ.

Нехай згідно з аналітичним (табличним чи графічним) заданням БФ у відповідні комірки карти Карно вписано одиниці множини її значень. Кожну комірку карти розглядатимемо як квадрат із площею, що дорівнює одиниці. Фрагмент таблиці (як сукупність комірок з одиницями) назвемо **правильною конфігурацією рангу $\boldsymbol{r}$**, якщо він становить прямокутник (зокрема, квадрат) площею 2^{n-r}, $r = \overline{0, n}$; $n = 2, 3, 4$.

Сенс уведення в розгляд правильних конфігурацій полягає в тому, що кожній із них рангу r відповідає елементарна кон'юнкція із r букв, тобто кожна правильна конфігурація (крім випадку, коли $r = n$) визначає кон'юнкції, над якими можна виконати операцію логічного склеювання.

Оскільки подумки краї карти ми ототожнюємо, то до правильних конфігурацій слід відносити й такі, що утворені саме крайніми комірками.

Для $n = 4$ всі правильні конфігурації зображені на рис. 4.3.5; вони включають у себе і множини правильних конфігурацій для $n = 2, 3$.

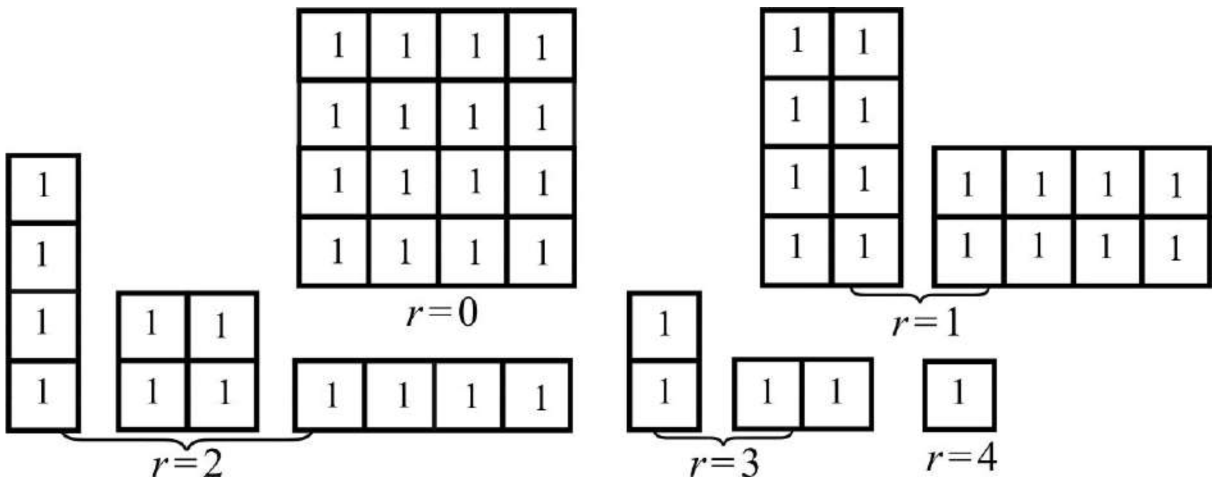


Рис. 4.3.5. **Правильні конфігурації карти Карно для чотирьох змінних**

Наприклад (рис. 4.3.4б), дві комірки з одиницями утворюють правильну конфігурацію рангу 2; вона відповідає кон'юнкції двох букв $\bar{x}_1\bar{x}_3$ – результату склеювання конституент $\bar{x}_1 x_2 \bar{x}_3$ і $\bar{x}_1\bar{x}_2\bar{x}_3$.

Помічаємо, що правильній конфігурації рангу $r = n$ (окрема комірка з одиницею) відповідає конституента одиниці – кон'юнкція n букв, а конфігурації рангу $r = 0$ – тотожна одиниця.

Підсумовуючи проведену підготовчу роботу, вкажемо нарешті послідовність дій (*алгоритм*) процесу знаходження мінімальних ДНФ заданої БФ за методом Карно:

1) *складаємо* карту Карно (відповідно до кількості змінних) і заповнюємо одиницями комірки наборів, на яких БФ набуває значення 1;

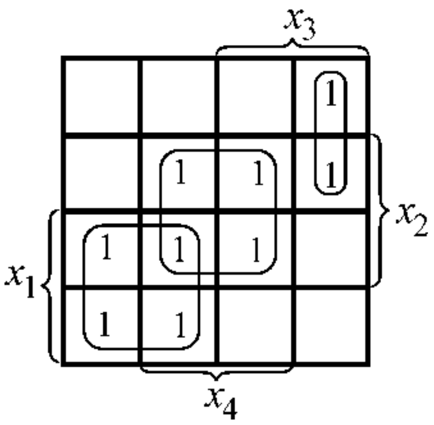
2) *аналізуємо* (візуально) карту з метою встановлення того, об'єднанням якої мінімальної кількості правильних конфігурацій найменшого рангу можна накрити всі одиниці значень БФ (таких накриттів може бути декілька);

3) *визначаємо*, на перетині яких смуг (що відповідають змінним і їхнім інверсіям) стоїть та чи інша правильна конфігурація, і складаємо елементарну кон'юнкцію відповідних букв;

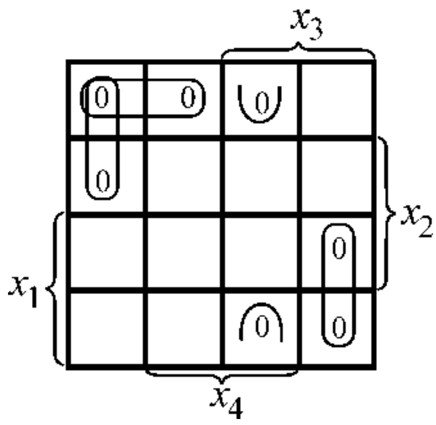
4) *записуємо* диз'юнкцію знайдених кон'юнкцій, що й дає шукану мінімальну ДНФ (або мінімальні ДНФ).

Якщо ставлять *задачу знаходження мінімальних КНФ* заданої БФ, то, згідно з наведеним алгоритмом, аналогічним чином розглядають правильні конфігурації комірок із нулями (які, за бажанням, тимчасово можна замінити на 1) і далі діють так: у здобутій таким чином ДНФ замінюють букви їхніми інверсіями (тобто замість x_i пишуть $\bar{x}_i$, а замість $\bar{x}_i$ – x_i), а знаки кон'юнкцій $(\wedge)$ замінюють знаками диз'юнкцій $(\vee)$, і навпаки.

Приклад. Розглянемо мінімізацію булевої функції чотирьох змінних $f(x_1, x_2, x_3, x_4)$, одиниці і нулі значень якої зображено (для зручності) на окремих картах Карно (рис. 4.3.6а і 4.3.6б).



а



б

Рис. 4.3.6. **Карти Карно для знаходження:**
а) мінімальної ДНФ; б) мінімальної КНФ

Візуальний аналіз рис. 4.3.6а показує, що всі одиниці значень БФ можна накрити щонайменше трьома конфігураціями, дві з яких рангу 2, одна – рангу 3 (на карті їх виділено овальними зімкненими лініями): перша (та, що ліворуч) – результат перетину смуг, які відповідають атомам x_1, $\bar{x}_3$, друга – атомам x_2, x_4, третя – атомам $\bar{x}_1$, x_3, $\bar{x}_4$. Складаючи відповідні елементарні кон'юнкції і їхню диз'юнкцію, маємо мінімальну ДНФ:

$$f_{\vee}^{*} = x_1\bar{x}_3 \vee x_2 x_4 \vee \bar{x}_1 x_3 \bar{x}_4.$$

Для побудови однієї з мінімальних КНФ аналізуємо рис. 4.3.6б: накриття всіх нулів можна здійснити щонайменше чотирма правильними конфігураціями рангу 3, одна з яких утворена крайніми комірками. Цим конфігураціям (зліва направо) відповідають такі кон'юнкції: $\bar{x}_1\bar{x}_3\bar{x}_4$, $\bar{x}_1\bar{x}_2\bar{x}_3$, $\bar{x}_2 x_3 x_4$, $x_1 x_3 \bar{x}_4$, а все накриття описується їхньою диз'юнкцією.

Мінімальну КНФ дістанемо внаслідок заміни символу "$\wedge$" на "$\vee$", і навпаки, а букв – їхніми інверсіями:

$$f_{\wedge}^{*} = (x_1 \vee x_3 \vee x_4)(x_1 \vee x_2 \vee x_3)(x_2 \vee \bar{x}_3 \vee \bar{x}_4)(\bar{x}_1 \vee \bar{x}_3 \vee x_4).$$

Пропонуємо самостійно знайти ще одну мінімальну КНФ.

У випадку мінімізації БФ п'яти змінних відповідну карту Карно подають у вигляді *двох з'єднаних карт для чотирьох змінних* (рис. 4.3.7а), причому набори значень істинності змінних x_3, x_4 другої карти симетричні відносно лінії з'єднання. На рис. 4.3.7б фігурними дужками показано рядки та стовпці, що відповідають значенням змінних x_i $(i = \overline{1,5})$, які дорівнюють одиниці.

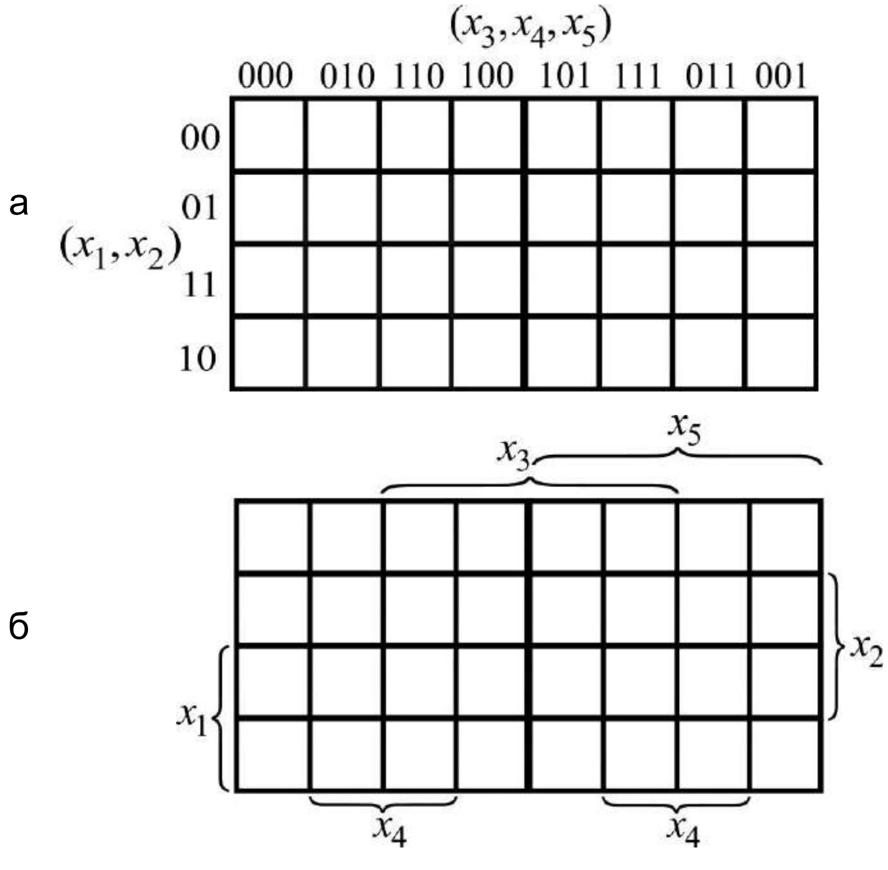


Рис. 4.3.7. **Карти Карно для п'яти змінних:**
а) за наборами значень істинності змінних;
б) за рядками та стовпцями прямого входження змінних

Зауваження. У навчальній і науковій літературі зустрічаються й інші модифікації подання карт Карно, але за сутністю вони однакові. Має місце також відмінність у термінології. Наприклад, правильні конфігурації називають "контурами".

У карт Карно для п'яти змінних (як і у карт для чотирьох змінних) залишається в силі:

суміжні набори значень істинності змінних відрізняються значенням тільки однієї змінної;

верхній рядок є сусіднім із нижнім, а правий стовпець – сусіднім із лівим, тобто вся карта згортається в фігуру тор ("бублик").

Після заповнення комірок (згідно з таблицею істинності) одиницями (для $f_{\vee}^{*}$) або нулями (для $f_{\wedge}^{*}$) розпочинаємо мінімізацію БФ. Відмінною рисою процесу мінімізації БФ п'яти змінних є те, що правильні конфігурації також утворюють комірки, які розташовані *симетрично відносно лінії з'єднання карт для чотирьох змінних*.

Задача 4.3.1. Знайдіть $f_{\vee}^{*}$ за заповненою картою Карно (рис. 4.3.8).

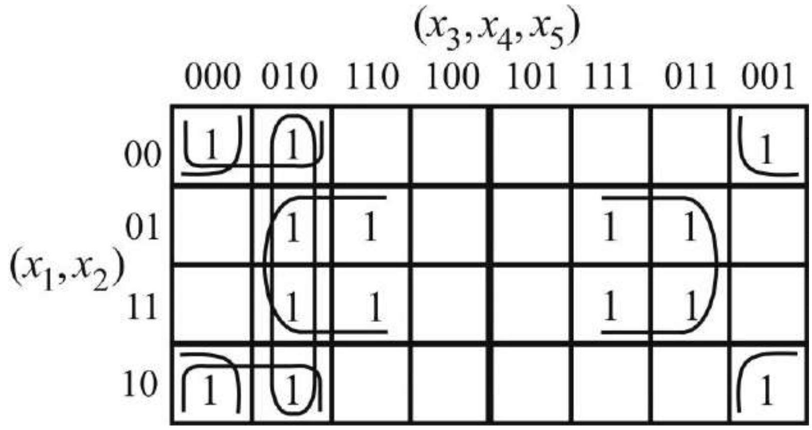


Рис. 4.3.8. **Заповнена карта Карно та правильні конфігурації до задачі 4.3.1**

Розв'язання:

Здійснюємо візуальний аналіз правильних конфігурацій. Отже, всі одиниці значень БФ можна накрити щонайменше трьома конфігураціями, дві з яких рангу 3, одна – рангу 2.

Стовпець (000) містить дві одиниці, які мають на другій карті симетричні одиниці відносно лінії з'єднання карт (у стовпці (001)), а отже, усі вони утворюють правильну конфігурацію третього рангу – квадрат із чотирьох одиниць, якому відповідає триелементна кон'юнкція $\bar{x}_2\bar{x}_3\bar{x}_4$: конституенти склеюються за першою і п'ятою змінними (*простежте*).

Окремо розглядати конфігурації з двох одиниць немає потреби. Взагалі, якщо в контур об'єднано дві клітини, то вираз для контуру містить на одну змінну менше порівняно з конституентою одиниці, якщо чотири клітинки – на дві змінні менше, якщо вісім – на три. Таким чином, якщо контур містить 2^n клітин, то у вираз для контуру входить на n змінних менше, тобто в підсумку отримуємо тотожну одиницю.

Два квадрати, симетричні відносно лінії з'єднання, містять вісім одиниць і дають правильну конфігурацію рангу 2, тому приходимо до двоелементної кон'юнкції x_2x_4: відповідні конституенти склеюються за першою, третьою і п'ятою змінними (*простежте*).

Залишилося розглянути конфігурацію у стовпці (010) із чотирьох одиниць, дві з яких входять у попередню вісімку. Цій конфігурації третього рангу відповідає триелементна кон'юнкція $\bar{x}_3x_4\bar{x}_5$: склеювання здійснюється за змінними x_1, x_2.

Записуємо диз'юнкцію елементарних кон'юнкцій, які забезпечують мінімальне накриття всіх одиниць; отже, мінімальна ДНФ має вигляд:

$$f_{\vee}^* = \bar{x}_2\bar{x}_3\bar{x}_4 \vee x_2x_4 \vee \bar{x}_3x_4\bar{x}_5.$$

Другу мінімальну ДНФ отримаємо, якщо замість останньої конфігурації (із чотирьох вертикальних одиниць) розглядати квадрат із чотирьох одиниць, який є результатом перетину рядків (00), (10) зі стовпцями (000), (001):

$$f_{\vee}^* = \bar{x}_2\bar{x}_3\bar{x}_4 \vee x_2x_4 \vee \bar{x}_2\bar{x}_3\bar{x}_5.$$

Задача 4.3.2. Знайдіть $f_{\vee}^*$ за заповненою картою Карно (рис. 4.3.9).

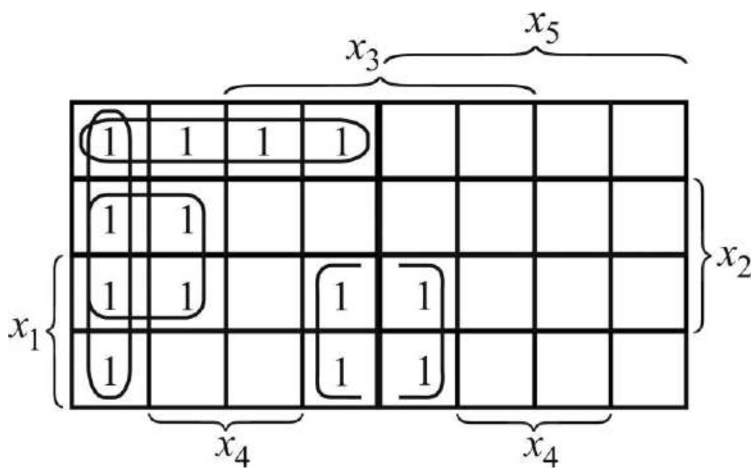


Рис. 4.3.9. **Заповнена карта Карно та правильні конфігурації до задачі 4.3.2**

Розв'язання:

Проводимо візуальний аналіз карти з метою опису правильних конфігурацій. Отже, всі одиниці значень БФ можна накрити щонайменше чотирма конфігураціями третього рангу.

Перший стовпець охоплює чотири вертикальні одиниці, які лежать на перетині смуг для інверсій змінних x_3, x_4, x_5, тому приходимо до триелементної кон'юнкції $\bar{x}_3\bar{x}_4\bar{x}_5$.

Квадрат із чотирьох одиниць на першій карті, дві з яких увійшли до попередньої четвірки, визначається смугами x_2, $\bar{x}_3$, $\bar{x}_5$ і описується елементарною кон'юнкцією $x_2\bar{x}_3\bar{x}_5$.

Чотири одиниці першого рядка накриваються правильною конфігурацією, яка утворена перетином смуг $\bar{x}_1$, $\bar{x}_2$, $\bar{x}_5$, отже, їй відповідає триелементна кон'юнкція $\bar{x}_1\bar{x}_2\bar{x}_5$.

У смузі x_1 маємо два двоелементні контури, симетричні відносно лінії з'єднання карт, тому вони склеюються за змінною x_5 і визначають кон'юнкцію $x_1x_3\bar{x}_4$.

Записуємо диз'юнкцію знайдених елементарних кон'юнкцій, що й дає мінімальну ДНФ:

$$f_{\vee}^{*} = \bar{x}_3\bar{x}_4\bar{x}_5 \vee x_2\bar{x}_3\bar{x}_5 \vee \bar{x}_1\bar{x}_2\bar{x}_5 \vee x_1x_3\bar{x}_4.$$

Задача 4.3.3. Знайдіть $f_{\wedge}^{*}$ за заповненою картою Карно (рис. 4.3.10).

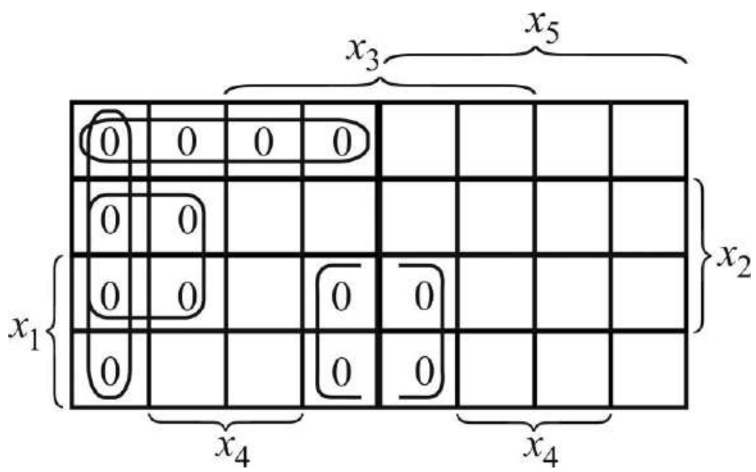


Рис. 4.3.10. **Заповнена карта Карно та правильні конфігурації до задачі 4.3.3**

Розв'язання:

Використовуючи знайдену $f_{\vee}^{*}$ (див. задачу 4.3.2), маємо:

$$f_{\wedge}^{*} = (x_3 \vee x_4 \vee x_5) \wedge (\bar{x}_2 \vee x_3 \vee x_5) \wedge (x_1 \vee x_2 \vee x_5) \wedge (\bar{x}_1 \vee \bar{x}_3 \vee x_4).$$

Обміркуйте побудову самостійно.

Набори вхідних змінних, які за заданих умов перебігу процесу, що вивчає дослідник, не задіяні, називають **невикористаними станами** входів. Функції, що описують процеси з такими станами входів, називають **неповністю визначеними.** У клітинках карти Карно, що відповідають цим станам, проставляють риски або хвилясті дуги (тильди). Для мінімізації таких БФ у комірки з тильдами (не обов'язково в усі) заносять одиниці (для $f_{\vee}^{*}$) чи нулі (для $f_{\wedge}^{*}$) з метою здійснити накриття карти мінімальною кількістю правильних конфігурацій (контурів) щонайменшого рангу.

Задача 4.3.4. Задана неповністю визначена БФ чотирьох змінних. За наведеною картою Карно здійсніть канонічну мінімізацію, тобто знайдіть $f_{\vee}^{*}$ і $f_{\wedge}^{*}$ (рис. 4.3.11).

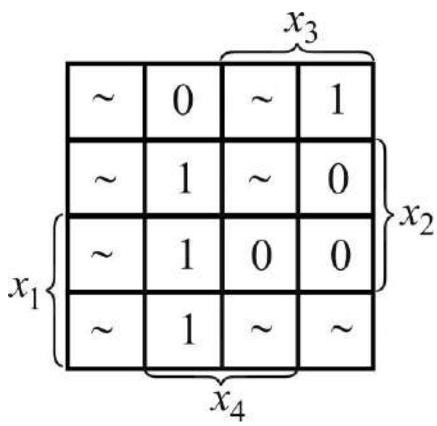


Рис. 4.3.11. **Заповнена карта Карно до задачі 4.3.4**

Розв'язання:

Проводимо візуальний аналіз карти з метою визначити, які саме тильди слід замінити одиницями (для $f_{\vee}^{*}$) так, щоб отримати найменшу кількість правильних конфігурацій якомога меншого рангу, але попередньо вилучимо з карти нулі, щоб не заважали, а тильди залишимо як орієнтир, де ставити одиниці.

Якщо до заданих одиниць додати ще шість, то прийдемо до трьох правильних конфігурацій другого рангу, тобто отримаємо три двоелементні кон'юнкції. Відповідні контури зображені на рис. 4.3.12а.

Чотири одиниці в комірках при вершинах карти (одиниці поза смугами змінних x_2, x_4) описуються кон'юнкцією $\bar{x}_2\bar{x}_4$. Квадратному контуру відповідає кон'юнкція $x_2\bar{x}_3$ (одиниці належать смузі x_2 і лежать поза смугою x_3). Четвірка одиниць нижнього рядка таблиці визначає кон'юнкцію $x_1\bar{x}_2$ (одиниці належать смузі x_1 і лежать поза смугою x_2).

Складаємо диз'юнкцію отриманих кон'юнкцій:

$$f_{\vee}^{*} = x_1\bar{x}_2 \vee x_2\bar{x}_3 \vee \bar{x}_2\bar{x}_4.$$

Подумайте, чи можна зменшити кількість операцій, щоб наблизитися до мінімізації БФ у загальному смислі.

Перейдемо далі до знаходження мінімальної КНФ, для чого у вихідній карті (див. рис. 4.3.11) проігноруємо одиниці й залишимо тільки нулі і тильди (рис. 4.3.12б).

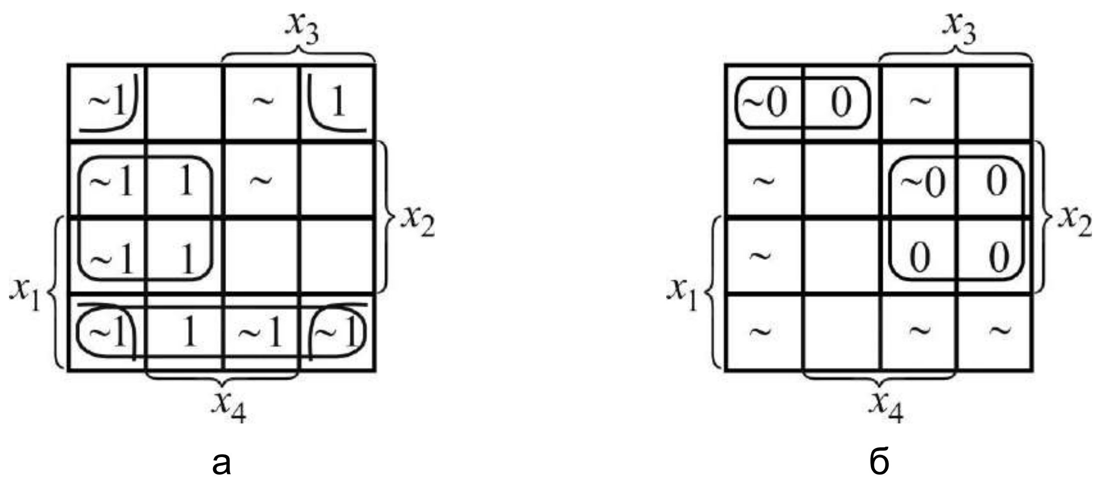


Рис. 4.3.12. **Правильні конфігурації для знаходження: а) мінімальної ДНФ; б) мінімальної КНФ**

Візуальний аналіз показує, що до групи із трьох нулів треба додати ще один, і тоді отримаємо контур із чотирма нулями, розташований на перетині смуг $\bar{x}_2$ і $\bar{x}_3$ (пам'ятаємо, що ми користуємося картою, за якою будували мінімальну ДНФ, тому позначення змінних подумки слід замінити їхніми інверсіями); отже, маємо двоелементну диз'юнкцію $\bar{x}_2 \vee \bar{x}_3$. Залишився один незадіяний нуль, до якого ліворуч додамо ще один. Утворений контур із двома нулями розташований на перетині смуг x_2 і x_3, що дає елементарну диз'юнкцію $x_2 \vee x_3$.

Складаємо кон'юнкцію отриманих диз'юнкцій:

$$f_{\wedge}^{*} = (\bar{x}_2 \vee \bar{x}_3)(x_2 \vee x_3).$$

Пропонуємо переконатися, що знайдені $f_{\vee}^{*}$ і $f_{\wedge}^{*}$ задовольняють умови задачі.

Висновок: більш економною є мінімальна кон'юнктивна форма.

Задача 4.3.5. Неповністю визначена БФ п'яти змінних задана номерами наборів значень змінних, на яких вона набуває значень, що дорівнюють одиниці (одиничні набори): $3, 6, 10, 15, 22, 27, 28$, і на яких вона набуває значень, що дорівнюють нулю (нульові набори): $0, 2, 7, 8, 12, 13, 14, 21, 30, 31$. Здійсніть канонічну мінімізацію за допомогою карти Карно, тобто знайдіть мінімальні ДНФ і КНФ ($f_{\vee}^{*}$ і $f_{\wedge}^{*}$).

Розв'язання:

Для занесення одиниць чи нулів у комірки карти скористаємося допоміжною картою – картою відповідності між наборами значень істинності змінних і їхніми номерами (рис. 4.3.13).

(x_1,x_2) \ (x_3,x_4,x_5)	000	010	110	100	101	111	011	001
00	0	2	6	4	5	7	3	1
01	8	10	14	12	13	15	11	9
11	24	26	30	28	29	31	27	25
10	16	18	22	20	21	23	19	17

Рис. 4.3.13. **Карта відповідності між наборами значень істинності змінних і їхніми номерами**

Вільні ж комірки, що відповідають невикористаним станам, заповнимо тильдами. У результаті отримаємо карту, зображену на рис. 4.3.14.

(x_1,x_2) \ (x_3,x_4,x_5)	000	010	110	100	101	111	011	001
00	0	0	1	~	~	0	1	~
01	0	1	0	0	0	1	~	~
11	~	~	0	1	~	0	1	~
10	~	~	1	~	0	~	~	~

Рис. 4.3.14. **Заповнена карта Карно до задачі 4.3.5**

Далі діємо за алгоритмом мінімізації аналогічно до того, як здійснювалася мінімізація БФ чотирьох змінних.

Почнемо з побудови мінімальної ДНФ. Вилучаємо з карти нулі (рис. 4.3.15) й аналізуємо її з метою знаходження правильних конфігурацій (контурів), які накривають усі одиниці, з урахуванням комірок із тильдами. Порожні комірки обходимо, оскільки в них БФ набуває значень, що дорівнюють нулю.

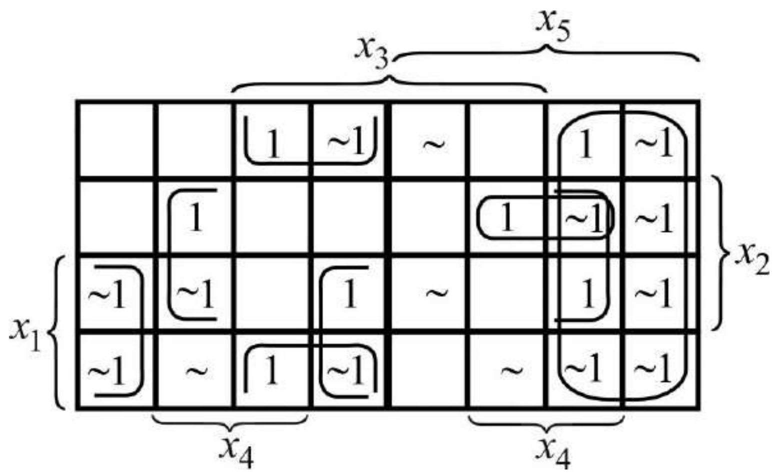


Рис. 4.3.15. **Контури для знаходження мінімальної ДНФ**

Можливі контури наведено на рис. 4.3.15 (*простежте*): дві одиниці в комірках 3 і 27 з урахуванням тильд поруч дають конфігурацію 2-го рангу, яка є перетином смуг $\bar{x}_3$ і x_5; одиниці в комірках 10, 11, 26 і 27 підлягають об'єднанню в конфігурацію 3-го рангу, симетричну відносно лінії з'єднання, – результат перетину смуг x_2, $\bar{x}_3$, x_4; конфігурацію 3-го рангу для чотирьох одиниць у комірках 4, 6, 20, 22 дістаємо перетином смуг $\bar{x}_2$, x_3, $\bar{x}_5$; конфігурація 3-го рангу, яка накриває чотири одиниці в комірках 16, 20, 24, 28, визначається смугами x_1, $\bar{x}_4$, $\bar{x}_5$; залишилася одиниця в комірці з номером 15, до якої залучена одна тильда праворуч, що дає чотириелементну елементарну кон'юнкцію $\bar{x}_1 x_2 x_4 x_5$.

Записуємо мінімальну ДНФ:

$$f_{\vee}^{*} = \bar{x}_3 x_5 \vee x_2 \bar{x}_3 x_4 \vee \bar{x}_2 x_3 \bar{x}_5 \vee x_1 \bar{x}_4 \bar{x}_5 \vee \bar{x}_1 x_2 x_4 x_5.$$

Простежте, чи можливо зменшити кількість операцій групуванням логічних доданків і винесенням спільного множника за дужки.

Переходимо до знаходження мінімальної КНФ, аналізуючи карту з нулями і тильдами (рис. 4.3.16), але тепер під змінною x_i $(i = \overline{1,5})$ розуміємо $\bar{x}_i$, і навпаки, під смугою для x_i – смугу для $\bar{x}_i$, і навпаки. Крім того, порожні комірки не чіпаємо, оскільки в них БФ набуває значень, що дорівнюють одиниці.

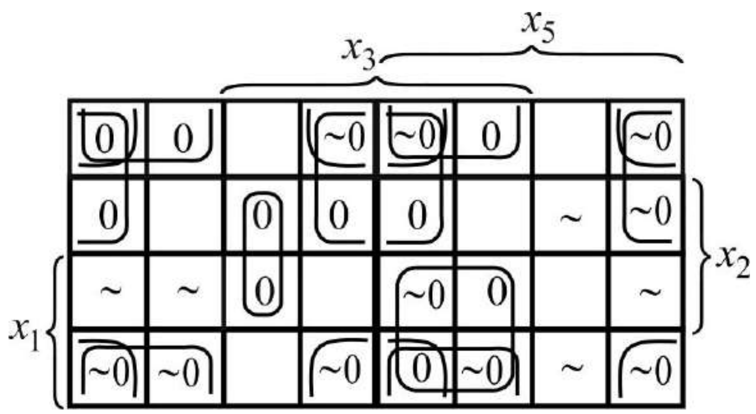


Рис. 4.3.16. **Контури для знаходження мінімальної КНФ**

Спочатку розглянемо контури, *симетричні* відносно лінії з'єднання карт (*простежте*), а саме: правильну конфігурацію 2-го рангу утворюють комірки з номерами 0, 1, 4, 5, 16, 17, 20, 21 в кутах карти, вона визначає елементарну диз'юнкцію $x_2 \vee x_4$; вісімка нулів у комірках із номерами 0, 1, 4, 5 8, 9, 12, 13 накривається конфігурацією 2-го рангу, якій відповідає диз'юнкція $x_1 \vee x_4$. Залишилися чотири контури, *несиметричні* відносно лінії з'єднання: конфігурація 3-го рангу (її визначають комірки 0, 2, 16, 18) дає диз'юнкцію $x_2 \vee x_3 \vee x_5$; квадрат із чотирьох нулів у комірках 21, 23, 29, 31 накривається конфігурацію 3-го рангу, якій відповідає диз'юнкція $\bar{x}_1 \vee \bar{x}_3 \vee \bar{x}_5$; комірки з номерами 5, 7, 21, 23 утворюють конфігурацію 3-го рангу, яка описується диз'юнкцією $x_2 \vee \bar{x}_3 \vee \bar{x}_5$; двоелементний контур (конфігурація 4-го рангу), який охоплює два нулі у комірках 14, 30, визначає диз'юнкцію $\bar{x}_2 \vee \bar{x}_3 \vee \bar{x}_4 \vee x_5$.

Кон'юнкція знайдених елементарних диз'юнкцій дає змогу записати *мінімальну* КНФ:

$$f_{\wedge}^{*} = (x_2 \vee x_4) \wedge (x_1 \vee x_4) \wedge (x_2 \vee x_3 \vee x_5) \wedge (\bar{x}_1 \vee \bar{x}_3 \vee \bar{x}_5)$$
$$\wedge (x_2 \vee \bar{x}_3 \vee \bar{x}_5) \wedge (\bar{x}_2 \vee \bar{x}_3 \vee \bar{x}_4 \vee x_5).$$

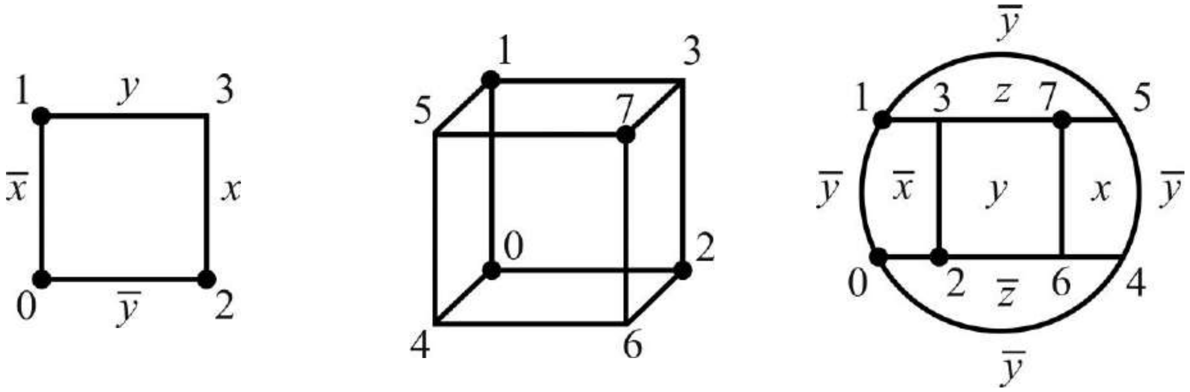
Зіставте форму $f_{\vee}^{*}$ з формою $f_{\wedge}^{*}$ і зробіть висновок, якій із них слід віддати перевагу з огляду на фінансові витрати і конструктивну громіздкість відповідних пристроїв.

III. Графічні методи. В основу цих методів покладено зображення БФ підграфами n-вимірного куба з вершинами, які відповідають наборам значень аргументів, на яких БФ набуває значення 1. Такий підхід легко реалізувати лише для $n=2,3$, хоча можна це зробити і для функцій чотирьох змінних.

Відхилимось від традиційного шляху викладання і спочатку наведемо схему (*алгоритм*) графічних методів (рис. 4.12), а потім дамо необхідні пояснення.

Рис. 4.3.17. **Структурна схема мінімізації БФ за допомогою n-вимірного куба**

Для побудови графа (n-вимірного куба) як області визначення БФ нумерують набори значень змінних і кожному номеру (від 0 до 2^n-1) ставлять у відповідність вершину графа. Це зображено на рис. 4.3.18а і 4.3.18б для $n=2$ і $n=3$ відповідно (*зіставте* з рис. 4.3.1).



а б в

Рис. 4.3.18. **n-вимірні куби: а) двовимірний ($n=2$); б) тривимірний ($n=3$); в) граф, ізоморфний 3-кубу**

Жирними точками (або кружечками) позначаємо вершини графа, які відповідають одиницям значень БФ; підграф, який визначається цими вершинами, і є зображенням БФ.

Для $n=2$ кожному ребру (двом вершинам) ставлять у відповідність букву. Наявність ребра між позначеними вершинами свідчить про те, що конституенти, які відповідають цим вершинам, склеюються і дають елементарну кон'юнкцію з однієї букви. Аналіз підграфа для функції двох змінних не викликає труднощів. Дивимось, об'єднання якої найменшої кількості вершин чи ребер накриває всі позначені вершини графа, і складаємо диз'юнкцію відповідних елементарних кон'юнкцій.

Так, *наприклад*, для функції двох змінних $f(x,y)$, зображеної вершинами $0,\ 1,\ 2$ на рис. 4.3.18а, дістанемо:

$$f_{\vee}^{*}=\bar{x}\vee\bar{y},$$

а вихідна формула, яка реалізує цю функцію, має вигляд:

$$f_{\vee}=\bar{x}\,\bar{y}\vee\bar{x}\,y\vee x\bar{y}.$$

Для $n=3$ аналіз підграфів тривимірного куба дещо ускладнюється, а тому зручніше перейти від просторового графа до плоского, ізоморфного (однакового за формою) відносно 3-куба (рис. 4.3.18в): він має стільки ж, як у куба, вершин, і ту саму інцидентність вершин і ребер (порівняйте рис. 4.3.18б і рис. 4.3.18в). Плоский граф ділить площину на шість (за кількістю букв) областей (граней), включно із зовнішньою, як показано на рис. 4.3.18в. Кожній вершині плоского графа, як і куба, відповідає деяка конституента (триелементна кон'юнкція); кожній дузі – границі граней, – двоелементна кон'юнкція; кожній грані – одна з букв. Ці взаємно однозначні відповідності дають змогу знайти тупикові та мінімальні форми БФ.

Розглянемо, *наприклад*, процес мінімізації БФ трьох змінних $f(x,y,z)$, зображеній на рис. 4.3.18б і 4.3.18в. Аналіз підграфа, що визначається позначеними вершинами (жирними точками), показує, що вершина 7 ізольована, тому їй відповідає конституента xyz, яка з жодними іншими не склеюється; три вершини $\{0,1,2\}$ накриваються ребрами $\bar{x}\,\bar{y}$ і $\bar{x}\,\bar{z}$. Отже, маємо одну тупикову і водночас мінімальну ДНФ:

$$f_{\vee}^{*}=\bar{x}\bar{y}\vee\bar{x}\bar{z}\vee xyz.$$

Для знаходження мінімальних КНФ $f_{\wedge}^{*}$ діють аналогічно до того, як це робили в разі табличної мінімізації, а саме: для вершин, позначених нулями, будують згідно з алгоритмом (див. рис. 4.3.17) $f_{\vee}^{*}$, а потім у ній замінюють букви їхніми інверсіями, і навпаки, а символ "$\vee$" – на символ "$\wedge$", і навпаки.

Насамкінець зазначимо, що вміння мінімізувати булеві функції має велике значення з економічної точки зору, коли йдеться про розв'язання застосовних задач: проєктування і конструювання реальних систем (технічних, інформаційних тощо), математичною базою яких є булеві функції.

4.4. Застосування булевих функцій до аналізу й синтезу контактних схем

Контакти. Алгебра контактів

Розглянемо застосування булевої алгебри $\mathcal{B} = (B, \neg, \wedge, \vee)$ як абстрактного математичного об'єкта для опису і конструювання так званих контактних схем, які становлять реальні технічні об'єкти.

Під **контактом** будемо розуміти будь-який пристрій, який може набувати одного з двох можливих станів. *Прикладами* контактів є: звичайний електровимикач, електромагнітне реле, телеграфний ключ, двірний замок, механічна клямка (засувка), світлофор на залізниці тощо. Для визначеності розглядатимемо електричні контакти як складові частини електричного кола чи електромережі. Конструктивні особливості контактів не мають для нас істотного значення. Який би не був принцип роботи контакту, важливий лише один факт: якщо контакт *замкнений*, то електричним колом проходить струм, а якщо контакт *розімкнений*, то в електричному колі струму немає. Відрізок провідника з контактом називають **ключем**.

Контакти позначають малими латинськими буквами. Якщо висловлення "контакт x замкнений" істинне (хибне), то такому контакту приписують значення 1 (0): $x = 1$ $(x = 0)$.

Розрізняють також **постійно замкнений (постійно розімкнений) контакт**: $x \equiv 1$ $(x \equiv 0)$. На рис. 4.4.1 зображено відповідні ключі.

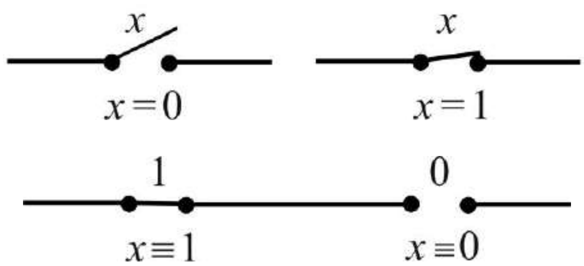


Рис. 4.4.1. **Різновиди контактів**

Контактною схемою (КС) називають сукупність з'єднаних між собою ключів (провідників із контактами), яка сполучає полюси джерела струму. Контакти КС, які одночасно замикаються або розмикаються, позначають однією буквою. В одній КС може бути довільна скінченна кількість контактів, позначених однією буквою.

Дві КС S_1, S_2 називають **еквівалентними** $(S_1 \sim S_2)$, якщо вони діють однаково: або замкнені, або розімкнені за тих самих станів контактів, що входять у ці схеми.

Контакт $\bar{x}$ називають **протилежним** контактові x, якщо він замкнений тоді і тільки тоді, коли x розімкнений, і навпаки (рис. 4.4.2а). Контакти x і $\bar{x}$ є взаємно протилежними. Отже, операція переходу до протилежного контакту відповідає логічній операції "інверсія".

Добутком $x \cdot y$ контактів x і y називають КС, яка замкнена тоді і тільки тоді, коли обидва контакти замкнені, тобто коли КС – послідовне з'єднання ключів з x і y (рис. 4.4.2б). Як бачимо, добуток контактів є аналогом логічної операції "кон'юнкція" мовою контактів.

Сумою $x + y$ контактів x і y називають КС, яка розімкнена тоді і тільки тоді, коли обидва контакти розімкнені, тобто коли КС – паралельне з'єднання ключів з x і y (рис. 4.4.2в). Таким чином, сума контактів є аналогом логічної операції "диз'юнкція" мовою контактів.

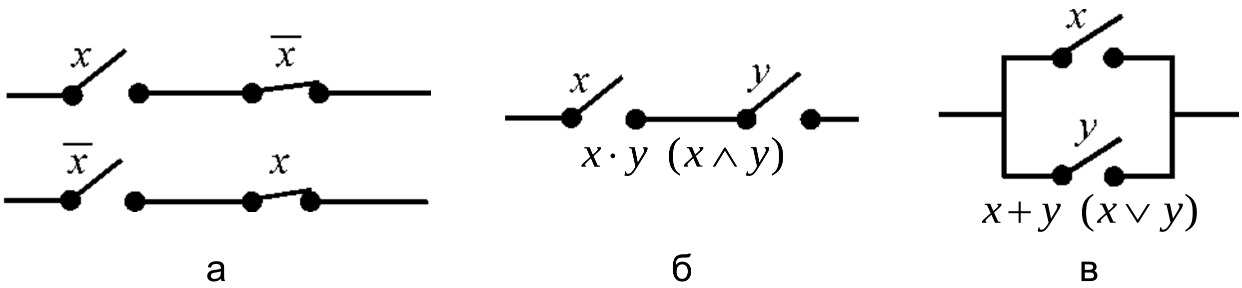


Рис. 4.4.2. **Операції над контактами:**
а) інверсія; б) добуток (кон'юнкція); в) сума (диз'юнкція)

Множину $\mathcal{K}$ контактів, на якій визначені операції $\bar{\ }, \cdot, +$, називають **алгеброю КС**:

$$\mathcal{K} = (K, \bar{\ }, \cdot, +).$$

Оскільки між операціями над контактами $(\bar{\ }, \cdot, +)$ і логічними операціями $(\neg, \wedge, \vee)$ встановлюється взаємно однозначна відповідність (згідно з наведеними означеннями), то алгебра КС є однією з інтерпретацій булевої алгебри $\mathcal{B} = (B, \neg, \wedge, \vee)$ на множині контактів. Операції алгебри КС підкоряються всім законам алгебри логіки, і для їх позначення можна користуватися тими ж символами і вживати ті самі терміни: інверсія, кон'юнкція, диз'юнкція. (*Пропонуємо* для кожного закону алгебри Буля дати відповідне зображення КС).

Кожну КС можна подати у вигляді графа, ребра якого відповідають ключам, а вершини – **вузлам** – точкам з'єднання ключів. Вузли позначають кружечками або жирними точками, а ребра – символами відповідних контактів; ці символи звичайно записують у розривах ліній, які зображують ребра, або над (під) ними. Інші, окрім ребер, лінії графа можуть зображати зв'язки із джерелом струму – **входом** і **виходом** КС, а також зв'язки з іншими КС.

Зазначимо, що вершини другого степеня (тобто вершини, інцидентні парі послідовно з'єднаних ребер) на графі КС можуть не зображатися. Не зображають також джерело струму та його споживачів (навантаження). На рис. 4.4.3(а і б) подано прийнятні зображення двох КС.

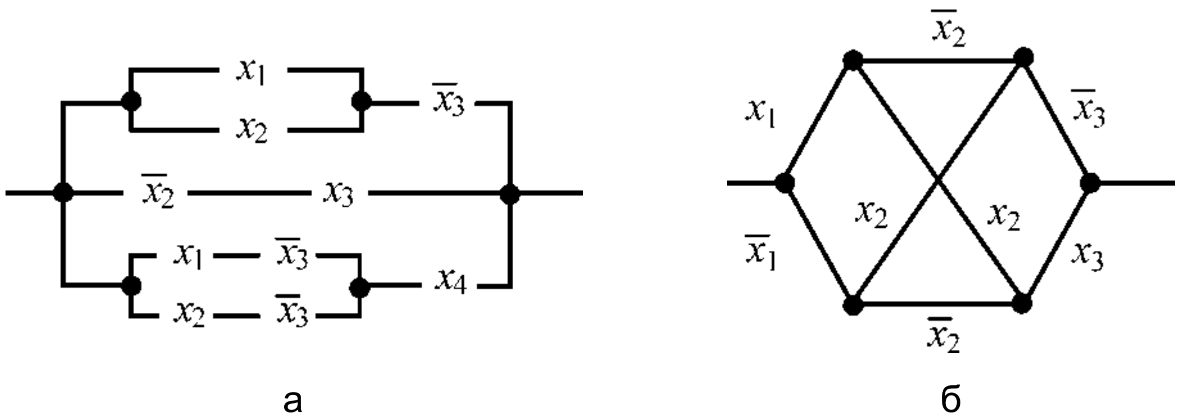


Рис. 4.4.3. **Зображення КС із символами контактів: а) у розривах ребер; б) над (під) ребрами**

Контакти КС типу x_i (i – номер контакту, $i \in \mathbf{N}$) називають **замикальними**, або **нормально розімкненими**, а контакти типу $\overline{x}_i$ – **розмикальними**, або **нормально замкненими**. Під управляючою дією (наприклад, "натисканням кнопки") контакт змінює свій стан: нормально розімкнений контакт замикається, а нормально замкнений – розмикається. Конструктивно ці різновиди контактів можуть виконуватись в одному пристрої.

Стосовно КС виникає два запитання:

1) як за конструктивно виконаною схемою встановити умови (режим) її роботи, тобто за яких станів контактів КС буде (не буде) пропускати струм?

2) як за даними умовами роботи сконструювати відповідну КС? (Під конструктивним виконанням КС будемо розуміти не технічну її реалізацію, а подання КС у вигляді графа.)

Відповіді на ці запитання дає алгебра КС з її функціональним апаратом – інтерпретацією булевих функцій мовою контактів.

Згідно з поставленими запитаннями розглядають *дві основні задачі алгебри КС*: задача аналізу та задача синтезу КС.

1. **Задача аналізу КС** полягає в тому, що для заданої схеми (поданої у вигляді графа) складають відповідну булеву функцію в мінімальній формі (БФ*) і за нею визначають умови роботи (УР) цієї схеми:

$$\boxed{\text{КС}} \to \boxed{\text{БФ}^*} \to \boxed{\text{УР}} \qquad (4.4.1)$$

Алгоритм розв'язання задачі аналізу КС такий:

1) *знаходимо* на графі всі ланцюги (незамкнені маршрути, ребра яких не повторюються), що з'єднують вхід і вихід КС;

2) *подаємо* кожний такий ланцюг добутком відповідних контактів (можливо, водночас з урахуванням сум деяких із них);

3) *записуємо* суму цих добутків, що і дає БФ, яка відповідає даній КС;

4) *мінімізуємо* БФ (якщо це можливо) і за БФ* *описуємо* умови роботи схеми.

Наприклад, аналізуючи КС, зображену на рис. 4.4.3а, робимо висновок, що вона складається із трьох паралельно з'єднаних ланцюгів, верхній і нижній із яких мають, у свою чергу, паралельні розгалуження. Згідно з алгоритмом, дістаємо відповідну БФ:

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4) = (x_1 \vee x_2)\bar{x}_3 \vee \bar{x}_2 x_3 \vee (x_1\bar{x}_3 \vee x_2\bar{x}_3)x_4 .$$

Спробуємо спростити БФ, розкриваючи дужки:

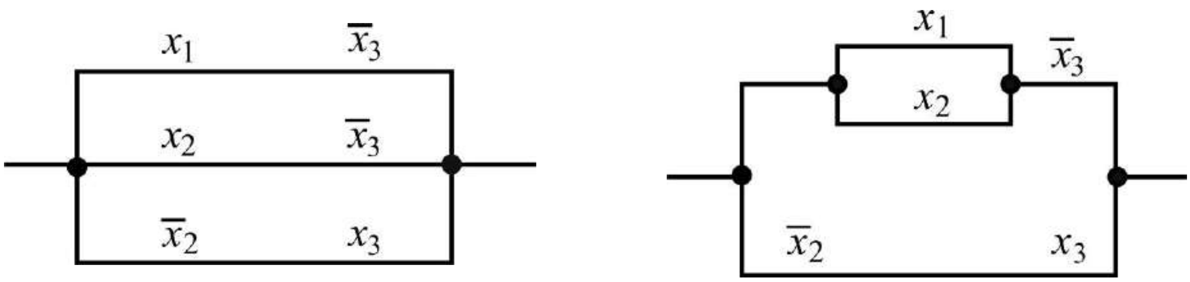
$$f_{\vee} = \underset{1}{x_1\bar{x}_3} \vee \underset{2}{x_2\bar{x}_3} \vee \underset{3}{\bar{x}_2 x_3} \vee \underset{4}{x_1\bar{x}_3 x_4} \vee \underset{5}{x_2\bar{x}_3 x_4}.$$

Перша елементарна кон'юнкція поглинає четверту, а друга – п'яту; отже,

$$f_{\vee} = \underset{1}{x_1\bar{x}_3} \vee \underset{2}{x_2\bar{x}_3} \vee \underset{3}{\bar{x}_2 x_3}.$$

За методом Блейка переконуємось, що це – мінімальна ДНФ $f_{\vee}^{*}$.

Висновок. Задана КС сконструйована неекономно: по-перше, контакт x_4 є зайвим, оскільки $f_{\vee}^{*}$ не містить x_4, тобто він не впливає на роботу схеми (КС працюватиме незалежно від того, замкнений контакт x_4 чи розімкнений); по-друге, із заданої КС можна вилучити паралельні з'єднання у верхньому і нижньому ланцюгах. Отже, КС можна подати у вигляді паралельно з'єднаних трьох ланцюгів, що відповідають добуткам $x_1\bar{x}_3$, $x_2\bar{x}_3$, $\bar{x}_2 x_3$ (рис. 4.4.4а).



а б

Рис. 4.4.4. **Результати аналізу КС, зображеної на рис. 4.4.3а**

Якщо виходити з мінімізації БФ у загальному смислі, то отримана $f_{\vee}^{*}$ не є найбільш простою формою: її можна записати за допомогою меншої кількості букв (і операцій), а саме:

$$f^{*} = (x_1 \vee x_2)\,\bar{x}_3 \vee \bar{x}_2 x_3,$$

і тоді відповідна КС буде ще більш економною (рис. 4.4.4б). (*Пропонуємо* умови роботи КС сформулювати самостійно).

2. **Задача синтезу КС** полягає в тому, що за наперед заданими умовами її роботи складають формулу відповідної БФ (з наступною її мінімізацією) і за формулою мінімальної БФ будують саму схему:

$$\boxed{\text{УР}} \rightarrow \boxed{\text{БФ}^{*}} \rightarrow \boxed{\text{КС}} \qquad (4.4.2)$$

Умови роботи можна задавати у вигляді словесного тексту, множини наборів значень контактів, на яких КС набуває значення 1, або навіть зразу – булевою функцією.

Алгоритм розв'язання відповідної задачі випливає з наведеного означення синтезу КС (4.4.2).

Задача 4.4.1. Побудуйте КС, яка координує роботу трьох електродвигунів так, що у випадку виходу з ладу двох із них вмикається автоматично четвертий аварійний.

Розв'язання:

Нехай x_1, x_2, x_3 – контакти шуканої КС, які певним чином пов'язані з двигунами, а саме: якщо один із двигунів вийшов з ладу, то відповідний контакт замикається.

Складаємо таблицю значень відповідної БФ (табл. 4.4.1) з урахуванням того, що КС спрацьовує (підключає аварійний двигун) за умови виходу з ладу двох із двигунів, що працюють (а тим паче – усіх трьох).

Таблиця 4.4.1

Таблиця значень БФ

ν	x_1	x_2	x_3	$f(x_1,x_2,x_3)$
0	0	0	0	0
1	0	0	1	0
2	0	1	0	0
3	0	1	1	1
4	1	0	0	0
5	1	0	1	1
6	1	1	0	1
7	1	1	1	1

Оскільки кількість одиниць і нулів серед значень БФ однакова, то не суттєво, що саме будувати: ДДНФ чи ДКНФ. Побудуємо ДДНФ:

$$f_{\textcircled{\scriptsize$\vee$}} = \underset{3}{\bar{x}_1 x_2 x_3} \vee \underset{5}{x_1 \bar{x}_2 x_3} \vee \underset{6}{x_1 x_2 \bar{x}_3} \vee \underset{7}{x_1 x_2 x_3}.$$

Мінімізуємо булеву функцію за методом Квайна:

$$f_{\vee}^{*} = x_1 x_2 \vee x_1 x_3 \vee x_2 x_3,$$

а потім ще зменшуємо кількість контактів:

$$f^{*} = x_1 x_2 \vee (x_1 \vee x_2) x_3.$$

КС, яка забезпечує автоматичне ввімкнення аварійного двигуна, зображена на рис. 4.4.5.

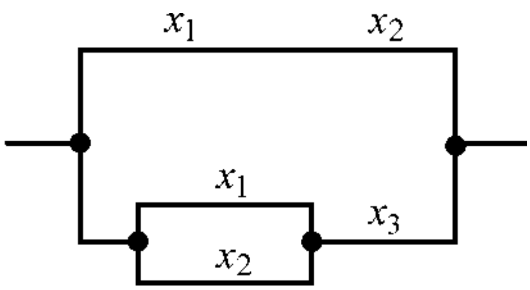


Рис. 4.4.5. **КС ввімкнення аварійного двигуна**

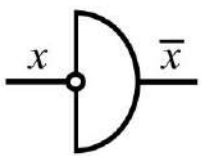
4.5. Застосування булевих функцій до аналізу й синтезу логічних схем

Логічні схеми: означення основних понять

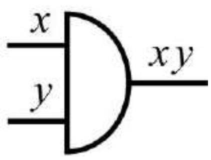
Контактні схеми історично були першими технічними засобами реалізації булевих функцій і першими об'єктами застосування алгебри логіки для розв'язання технічних задач. Пізніше з'явилося багато різних пристроїв, які реалізовували булеві функції однієї і декількох змінних. Вони ґрунтуються на використанні електронних і магнітних ланцюгів, струминної техніки (пневмоніки) тощо.

Пристрої, за допомогою яких виконують основні логічні операції алгебри Буля, тобто реалізують елементарні булеві функції, називають **логічними елементами**. Булевим змінним відповідають так звані **входи**, або **вхідні полюси**, логічного елемента, а самій функції – його **вихід**, або **вихідний полюс**. Словосполучення "логічний елемент виконує логічну операцію (реалізує булеву функцію)" треба розуміти так: на вхід (входи) елемента подають інформаційні сигнали (електричний, звуковий, механічний, світловий тощо), закодовані нулями або одиницями, – значення булевих змінних, а на виході отримують сигнал, що відповідає значенню БФ.

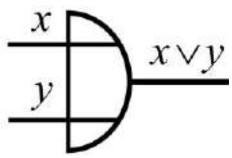
У техніці для позначення логічних елементів використовують різні графічні символи й назви, які враховують властивості та специфічні особливості конкретних елементів. У теорії застосовують спрощені зображення у вигляді прямокутників та інших фігур, усередині яких зазначають умовні назви або символи відповідної функції. *Наприклад*, для $f(x,y)=x\vee y$ логічний елемент можна зобразити прямокутником, усередині якого написано "АБО" чи вказано символ $\vee$. Пропонуємо один із найбільш зручних способів схематичного зображення логічних елементів, що реалізують головні ЛО $\neg$, $\wedge$, $\vee$ (рис. 4.4.6).



а



б



в

Рис. 4.4.6. **Схематичне зображення логічних елементів: а) інверсії; б) кон'юнкції; в) диз'юнкції**

Схематичне зображення логічних елементів, які реалізують інші логічні операції, дістаємо згідно з формулами переходу до головних операцій (4.1.3). Водночас слід враховувати, що деякі з них потребують залучення декількох логічних елементів, які реалізують головні ЛО. Так, для схематичного зображення операції Жегалкіна $x \oplus y = \bar{x}y \vee x\bar{y}$ треба задіяти три елементи: два для реалізації кон'юнкцій, один – диз'юнкції (з урахуванням інверсій), які відповідним чином з'єднуються між собою.

Наприклад, для імплікації, стрілки Пірса та еквіваленції маємо (рис. 4.4.7):

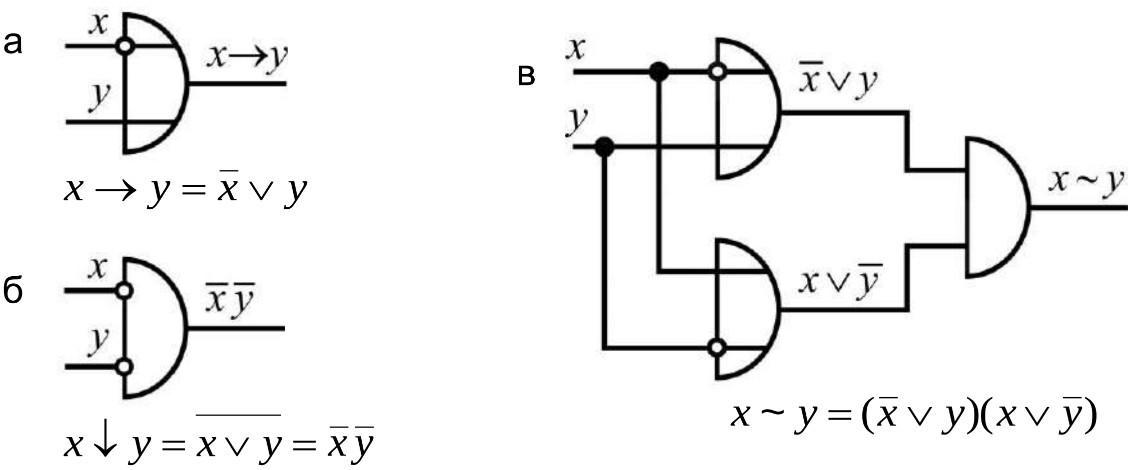


Рис. 4.4.7. **Схематичне зображення логічних елементів: а) імплікації; б) стрілки Пірса; в) еквіваленції**

Пропонуємо як вправу дати зображення БФ $x \overline{\to} y$, $x \oplus y$, $x|y$.

Під **логічною схемою** (**ЛС**) розуміють сукупність логічних елементів таку, що полюси одних логічних елементів з'єднані з полюсами інших; місця з'єднання їхніх полюсів (вхідних і вихідних) називають **внутрішніми вузлами**, або **полюсами**, схеми. Водночас множину всіх полюсів ЛС розбивають відповідно на вхідні, внутрішні, вихідні; вхідні й вихідні полюси називають **зовнішніми**. Так, реалізація функції $f(x, y) = x \sim y$ (рис. 4.4.7в) є ЛС із трьома зовнішніми полюсами (два входи і один вихід) і двома внутрішніми вузлами.

Змінні, що відповідають вхідним, вихідним, внутрішнім вузлам схеми, називають відповідно **вхідними**, **вихідними**, **внутрішніми змінними**. Загалом вхідні змінні позначають через x_1, x_2, …, x_n, вихідні – через y_1, y_2, …, y_m, а внутрішні – через z_1, z_2, …, z_k. Якщо тип змінної невідомий, то для її позначення використовують букви u, v з різними індексами.

Позначення змінних, які відповідають вузлам ЛС, розглядають водночас і як позначення самих цих вузлів. Кожному внутрішньому вузлу z_i, $i=\overline{1,k}$ відповідає деякий сигнал як результат роботи логічного елемента, для якого z_i є вихідним полюсом. Так, для ЛС на рис. 4.4.7в: вхідні змінні (полюси) – x, y; внутрішні змінні (вузли) – $z_1=\bar{x}\vee y$, $z_2=x\vee\bar{y}$; вихідна змінна – функція $f=z_1z_2=(\bar{x}\vee y)(x\vee\bar{y})$. Для спрощення вузли на схемах не зображують і, щоб уникнути зайвих перетинів ліній, один і той самий вхід ЛС можна вказувати декілька разів із позначенням його символом відповідної змінної.

Коректно побудовані ЛС мають задовольняти такі умови:

1) не припускати контурів, які можуть призвести до неоднозначності сигналів на входах елементів;

2) будь-який вхід елемента має бути пов'язаним тільки з одним входом схеми або виходом іншого елемента;

3) виходи елементів, які не є виходами схеми і не пов'язані зі входами інших елементів, вважають зайвими і виключають зі схеми.

Для логічних схем, як і для контактних схем, розрізняють дві основні взаємно обернені *задачі*.

1. **Задача аналізу ЛС** полягає в тому, що для заданої схеми складають вихідні булеві функції в мінімальній формі (БФ*) і за ними визначають умови роботи (УР) цієї схеми:

$$\boxed{\text{ЛС}} \rightarrow \boxed{\text{БФ}^*} \rightarrow \boxed{\text{УР}}\,. \qquad (4.5.1)$$

Часто ланку "УР" випускають і вважають, що коли є БФ, то відомі й умови роботи, і тоді задачу формулюють так: знайдіть загальний засіб (алгоритм), який дозволяє за будь-якою коректно побудованою ЛС побудувати вихідні функції цієї схеми.

Аналітичний опис ЛС з однією вихідною функцією виконують так:

1) *вводять* позначення змінних, які відповідають усім вузлам (зовнішнім і внутрішнім) розглядуваної схеми (кожен внутрішній вузол ототожнює вихідну змінну одного логічного елемента і вхідну змінну другого);

2) *виписують* вихідну функцію кожного логічного елемента, тобто кожну внутрішню змінну z_i $(i=\overline{1,k})$ як булеву функцію результату роботи елемента: $z_i=\varphi_i(u_i,v_i)$, де u_i, v_i – вузли, з якими з'єднуються вхідні

полюси елемента, і вихідну функцію $y=\varphi(u,v)$, де u, v – деякі внутрішні чи вхідні змінні (φ_i $(i=\overline{1,k})$, φ відповідають одній із операцій булевої алгебри, які реалізуються логічними елементами схеми).

Сукупність здобутих у такий спосіб співвідношень:

$$z_i=\varphi_i(u_i,v_i),\ \ i=\overline{1,k};\quad y=\varphi(u,v), \tag{4.5.2}$$

які містять усі зовнішні та внутрішні змінні, називають **системою рівнянь безпосередніх зв'язків ЛС**;

3) *виключають* із системи (4.5.2) внутрішні змінні (якщо ЛС коректна, то це завжди можна зробити) і *знаходять* аналітичний вираз вихідної функції y через вхідні змінні, тобто отримують розв'язок задачі. Далі *проводять*, якщо це можливо, мінімізацію БФ з метою подальшого "покращення" ЛС з огляду на економічність. Якщо ЛС має декілька виходів, то систему (4.5.2) складають для кожного з них.

Приклад. Здійснимо аналіз ЛС, зображеної на рис. 4.4.8, позначаючи вхідні змінні через x, y, внутрішні – через z_1, z_2, а вихідні функції – через f_1, f_2.

Для f_1, згідно з рис. 4.4.6б, зразу отримуємо: $f_1=xy$. У цьому випадку множина внутрішніх вузлів порожня.

Для f_2 маємо таку систему рівнянь безпосередніх зв'язків: $z_1=\bar{x}y$, $z_2=x\bar{y}$, $f_2=z_1\vee z_2$, звідки $f_2=\bar{x}y\vee x\bar{y}=x\oplus y$ – заперечення рівносильності.

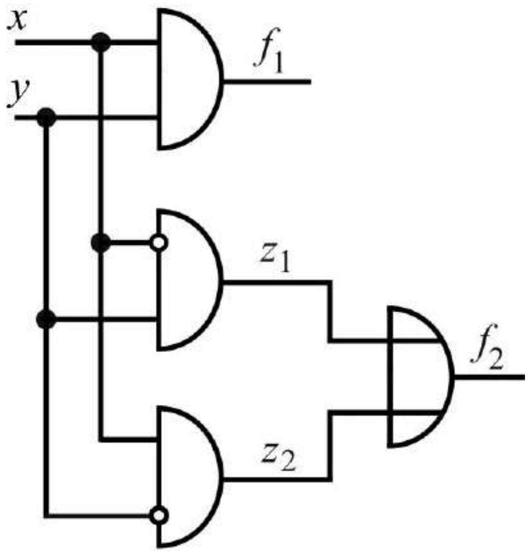


Рис. 4.4.8. **Логічна схема (напівсуматор)**

Відповідна таблиця значень функцій f_1, f_2 (табл. 4.5.1) показує, що ця ЛС здійснює додавання двох однорозрядних чисел за правилом: $0\oplus0=0$, $0\oplus1=1$, $1\oplus0=1$, $1\oplus1=10$, де одиницю перенесення в наступний розряд дає f_1, а значення даного розряду суми доданків – f_2. Такі ЛС називають **напівсуматорами**.

Таблиця 4.5.1

Таблиця значень f_1, f_2

x	y	f_1	f_2
0	0	0	0
0	1	0	1
1	0	0	1
1	1	1	0

Набір напівсуматорів у вигляді складнішої схеми дає змогу виконувати додавання багаторозрядних чисел у двійковій системі числення, що і роблять у реальних ЕОМ (на сучасному рівні – інтегральними схемами).

2. **Задача синтезу ЛС** полягає в тому, що за наперед заданими умовами її роботи складають відповідні булеві функції (з подальшою їх мінімізацією) і за формулами будують із логічних елементів саму схему:

$$\boxed{\text{УР}} \rightarrow \boxed{\text{БФ}^*} \rightarrow \boxed{\text{ЛС}}\,. \qquad (4.5.3)$$

Як і під час аналізу ЛС, ланку "УР" часто випускають і умови роботи задають у вигляді БФ, а задачу формулюють так: знайдіть загальний засіб (алгоритм), що дозволяє за будь-якою системою булевих функцій y_i $(i=\overline{1,m})$, знайти коректно побудовану логічну схему, для якої б ці функції були вихідними.

Дуже важливою обставиною є мінімізація БФ, вона забезпечує найбільш економічну побудову відповідної ЛС.

Процес побудови ЛС за однією заданою БФ здійснюють так:

1) *мінімізують*, якщо це можливо, задану БФ одним із відомих методів;

2) *записують* БФ* у вигляді системи рівнянь безпосередніх зв'язків (4.5.2), для чого достатньо ввести відповідні позначення для всіх складових частин аналітичного виразу функції так, щоб будь-яку позначену частину можна було дістати з інших позначених частин за допомогою однієї з головних логічних операцій, які реалізують логічні елементи;

3) *зображають* за кожним співвідношенням системи (4.5.2), починаючи з першого, відповідний логічний елемент, вхідні і вихідні полюси якого відповідають певним вузлам схеми, в тому числі – вихідному вузлу ЛС. Водночас намагаються розташувати елементи ЛС найбільш раціональним чином з точки зору її компактності та зручності з'єднань логічних елементів між собою. Якщо вихідних функцій декілька, то систему (4.5.2) складають для кожної з них, використовуючи ті самі вхідні змінні.

Приклад. Розглянемо побудову ЛС з трьома входами, вихідну функцію якої задано у вигляді ДДНФ:

$$y = f(x_1, x_2, x_3) = \bar{x}_1\bar{x}_2 x_3 \vee \bar{x}_1 x_2 x_3 \vee x_1\bar{x}_2\bar{x}_3 \vee x_1 x_2 x_3\,.$$

Знаходимо мінімальну ДНФ, наприклад, графічним методом:

$$y^* = \bar{x}_1 x_3 \vee x_2 x_3 \vee x_1 \bar{x}_2 \bar{x}_3,$$

і ще зменшуємо кількість операцій винесенням за дужки x_3:

$$y^* = (\bar{x}_1 \vee x_2) x_3 \vee x_1 \bar{x}_2 \bar{x}_3.$$

Записуємо y^* у вигляді системи рівнянь безпосередніх зв'язків:

$$z_1 = \bar{x}_1 \vee x_2, \quad z_2 = z_1 x_3, \quad z_3 = x_1 \bar{x}_2, \quad z_4 = z_3 \bar{x}_3, \quad y^* = z_2 \vee z_4.$$

Зображаємо послідовно відповідні логічні елементи, як показано на рис. 4.4.9, що й дає шукану ЛС.

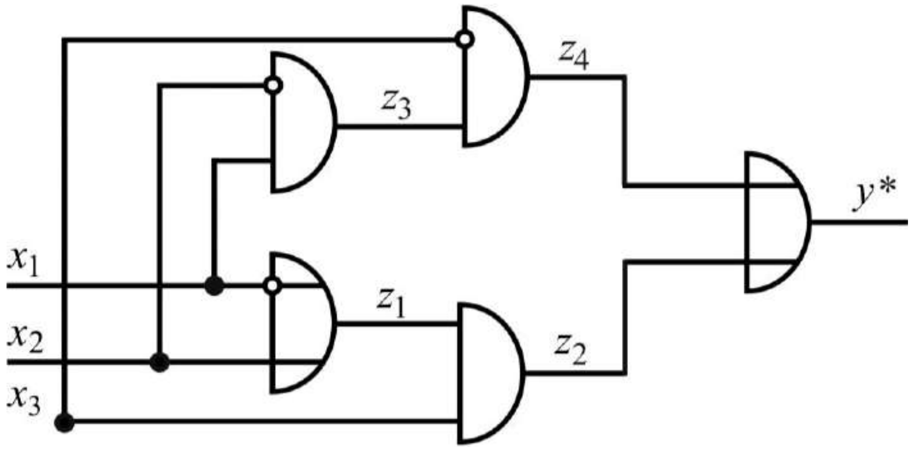


Рис. 4.4.9. **Логічна схема із трьома входами й одним виходом**

Ліній перетину можна було б уникнути, якщо вказувати вхідні змінні ЛС біля відповідного елемента, позначаючи їх щоразу належною буквою. Це звичайно і роблять, коли вхідних змінних забагато.

Насамкінець зазначимо, що контактні й логічні схеми об'єднуються загальною назвою *комбінаційні схеми*, вони є окремим випадком так званих скінченних автоматів – автоматів без пам'яті.

4.6. Предикати і квантори

Предикати: вступні приклади, основні означення, способи задання

Нагадаємо, що в математичній логіці під *висловленням* розуміють (див. п. 4.1) твердження у вигляді розповідного речення, стосовно якого можна сказати, істинне воно чи хибне. Це означає, що твердження, які містять не визначені певним чином складові, не є висловленнями.

Приклад 1. Твердження *"студент* x *– відмінник навчання"* не є висловленням, бо невідомо, про якого студента йдеться. Упишемо замість x певне (конкретне) прізвище студента з розглядуваної множини студентів (групи, курсу тощо).

Нехай x – Василенко, тоді наведене твердження перетвориться на висловлення *"студент Василенко – відмінник навчання"*, значення істинності якого дорівнює одиниці (1), якщо воно відповідає дійсності, і нулю (0) – у протилежному випадку.

Розглядуване твердження можна стлумачити як функцію змінної x (позначимо її через $P(x)$), значення якої вибирають з деякої множини студентів M:

$$P(x) = \text{"}\textit{студент } x \textit{ – відмінник навчання}\text{"},\ x \in M. \tag{4.6.1}$$

Твердження беруть у лапки, як у (4.6.1), або в круглі чи гострі дужки $((\cdot), <\cdot>)$.

Приклад 2. Твердження *"студенти* x *і* y *товаришують"* стане висловленням, якщо визначити певним чином (зафіксувати, конкретизувати) значення x і y як елементів деякої множини студентів S.

Нехай x – Павленко, а y – Ткаченко, тоді дістанемо висловлення (позначимо його через β):

$$\beta = \text{"}\textit{студенти Павленко і Ткаченко товаришують}\text{"}. \tag{4.6.2}$$

Воно, звісна річ, буде або істинним, або хибним.

Вихідне твердження можна розглядати як функцію двох змінних (аргументів):

$$\begin{gathered} Q(x, y) = \text{"}\textit{студенти } x \textit{ і } y \textit{ товаришують}\text{"}, \\ (x, y) \in S \times S = S^2. \end{gathered} \tag{4.6.3}$$

Зазначимо, що фіксація значення тільки одного з аргументів функції $Q(x, y)$ не дає висловлення, оскільки другий – залишається невизначеним. У такому разі приходимо до функції однієї змінної.

Нехай y – Ткаченко, тоді з (4.6.3) маємо функцію змінної x:

$$Q(x, \text{Ткаченко}) = \text{"}\textit{студенти } x \textit{ і Ткаченко товаришують}\text{"},\ x \in S. \tag{4.6.4}$$

Наведені приклади, сподіваємось, дають уявлення про функції (крім булевих) формальної логіки – "предикати" (предикат – від лат. *praedicatum* – присудок: у вузькому смислі – те ж саме, що властивість; у широкому смислі – відношення між предметами (властивість декількох предметів)).

А тепер дамо загальне означення цього поняття в математичній логіці. Нехай (непорожні) множини M_1, M_2, …, M_n елементів довільної природи є відповідно областями припустимих значень (вартостей) змінних x_1, x_2, …, x_n. Об'єднаємо ці змінні в кортеж $X=(x_1,x_2,...,x_n)$, упорядковуючи їхні номери в натуральному порядку. Якщо зафіксувати значення змінних, тобто взяти $x_i=c_i$, де $c_i \in M_i$, $i=\overline{1,n}$, то матимемо ***n*-кортеж (*n*-ку) вартостей змінних** $C=(c_1,c_2,...,c_n)$.

Функцію n змінних $P(X)$, значеннями якої є висловлення про n-ки значень змінних C, називають ***n*-місним предикатом** (**предикатом на *n* місць**), або коротко – ***n*-предикатом**:

$$(P(X)-n\text{-предикат}) \rightleftharpoons (P(X)\big|_{X=C}=\alpha), \qquad (4.6.5)$$

де α – висловлення, яке є значенням предиката за умови, що $X=C$.

Формулювання означення (4.6.5) "мовою відображень" звучить так: предикат $P(X)$ – це відображення множини n-к (кортежів) вартостей змінних C на множину висловлень $P(C)$:

$$\left\{\begin{matrix}\text{Кортеж вартостей}\\(c_1,c_2,...,c_n)\end{matrix}\right\}\xrightarrow[P(x_1,x_2,...,x_n)]{\text{Предикат}}\left\{\begin{matrix}\text{Висловлення}\\P(c_1,c_2,...,c_n)\end{matrix}\right\}. \qquad (4.6.6)$$

Поняттю "предикат" можна дати *нестроге* означення: предикат – це твердження, яке містить невизначені складові (компоненти, елементи) і стає висловленням у разі визначеності всіх його складових. Можливо, воно допоможе кращому розумінню сутності цього поняття.

Для $n=1$ предикат називають **властивістю**, або **умовою** (яку накладають на x). *Прикладом* 1-місного предиката є функція $P(x)$ (див. формулу (4.6.1)).

Для $n>1$ предикат називають **відношенням** (між аргументами), або **умовою** (що накладають на змінні). *Прикладом* 2-місного предиката є функція $Q(x, y)$ (див. формулу (4.6.3)). Він описує відношення між студентами x і y, або умову, яка накладається на x і y.

Позначають предикати, як правило, великими літерами латинського алфавіту з переліком (у круглих дужках через кóму) його аргументів, тобто застосовують стандартне позначення функцій кількох змінних. Якщо число змінних відносно невелике, то їм відповідають різні букви, як у *прикладі 2*. Значення предикатів позначатимемо малими грецькими літерами $(\alpha, \beta, \dots, \omega)$.

Згідно з означенням (4.6.5), **областю визначення** (**існування**) предиката $D(P)$ є множина n-к, які утворюються в результаті прямого (декартового) добутку множин припустимих значень змінних M_i, $i = \overline{1, n}$: $X = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in M = M_1 \times M_2 \times \dots \times M_n$, тобто $D(P) = M$.

Областю значень предиката $E(P)$ є множина висловлень α про n-ки вартостей змінних C, тобто $E(P) = \{\alpha \mid \exists X = C : P(C) = \alpha\}$.

На практиці часто розглядають предикати, в яких області припустимих значень змінних рівні між собою, тобто вартості кожної змінної вибирають з однієї й тієї ж множини M, і тоді $D(P) = M^n$. Такий випадок ілюструє *приклад 2* (див. формулу (4.6.3)).

У теорії предикатів аргументи x_i $(x_i \in M_i, \ i = \overline{1, n})$ називають **предметними змінними** предиката, їхні конкретні значення (вартості) – **предметними сталими**, а його значення – **предметним значенням** (причому термін "предметне" часто опускають).

Стосовно предикатів, крім поняття "предметне значення", вводять поняття "логічне значення". До нього приходять так (наводимо ланцюжок міркувань): кожне висловлення має два значення істинності – істинність (1) і хибність (0), предметне значення предиката – висловлення; отже, предметне значення предиката, як і будь-яке висловлення, має два значення істинності.

Логічним значенням предиката називають значення істинності його предметного значення.

Наприклад, предикат $P(x) = (x - \textit{просте число})$, $x \in \mathbf{N}$, для $x = 5$ $(x = 10)$ дає істинне (хибне) висловлення; відповідне логічне значення предиката 1 (0).

На основі цього означення розрізняють:

область (**множину**) **істинності** предиката $D^1(P)$ як множину n-к предметних сталих C, на яких предикат $P(X)$ набуває логічного значення, що дорівнює 1:

$$(D^1(P) - \text{область істинності}) \rightleftharpoons \{C \mid P(C) = \alpha = 1\}; \qquad (4.6.7)$$

область (**множину**) **хибності** предиката $D^0(P)$ як множину n-к предметних сталих C, на яких предикат $P(X)$ набуває логічного значення, що дорівнює 0:

$$(D^0(P) - \text{область хибності}) \rightleftharpoons \{C \mid P(C) = \alpha = 0\}. \qquad (4.6.8)$$

Зрозуміло, що області істинності й хибності утворюють розбиття множини визначення предиката:

$$D(P) = D^1(P) \bigcup D^0(P), \quad D^1(P) \bigcap D^0(P) = \varnothing. \qquad (4.6.9)$$

Наприклад, для предиката $P(x, y) = (x^2 + y^2 \leq 16)$, $(x, y) \in \mathbf{R}^2$, маємо: $D^1(P)$ – множина точок круга із центром у початку координат, радіус якого дорівнює 4; $D^0(P)$ – зовнішність цього круга.

Зважаючи на те, що в підсумку n-предикат, як і булева функція n змінних, набуває одного з логічних значень $\{1,0\}$, його називають також **логічною функцією n предметних змінних**. На цій підставі поняття "предикат" трактують як розширення поняття "булева функція" в тому сенсі, що незалежні змінні (аргументи) предиката можуть набувати своїх значень із довільних (за природою) множин, а не тільки з булевого алфавіту $\{0,1\}$.

Із навчальної дисципліни "Вища математика" відомо: якщо у функції n змінних $y = f(x_1, x_2, ..., x_n)$ надати конкретні значення одному, двом, …, k аргументам $(k \leq n)$, то матимемо відповідно функції $(n-1)$, $(n-2)$, …, $(n-k)$ змінних; для $k = n$ – окреме значення функції – сталу. Аналогічно, заміна в n-предикаті (як функції) k предметних змінних предметними сталими дає функцію $(n-k)$ аргументів, яку називають **$(n-k)$-предикатом** (**предикатом на $(n-k)$ місць**); для $k = n$ дістанемо просто висловлення – 0-місний предикат (0-предикат). Ілюстрацію 2-, 1-, 0-предиката дає *приклад 2* (див. відповідно формули (4.6.3), (4.6.4), (4.6.5)).

Отже, окреме висловлення є частинним (навіть можна сказати – граничним) випадком предиката. Саме тому теорія предикатів незрівнянно багатша за теорію висловлень. А витоки її сягають (хто б міг подумати!) часів Аристотеля (344 – 322 рр. до н. е.) – грецького філософа і вченого, одного з найвидатніших мислителів людства.

Способи задання предикатів. Предикат вважають *заданим*, якщо вказані (відомі):

1) величини (об'єкти, предмети), які є предметними змінними;

2) властивість-умова, якою вони пов'язані;

3) області припустимих значень предметних змінних.

Задання предикатів за формою дещо відрізняється від основних способів задання функцій у вищій математиці.

1. *Словесний спосіб* – це подання предиката у вигляді розповідного речення (твердження) звичайною (природною) мовою, що містить усі відомості, наявність яких передбачає задання предикатів.

Наприклад, твердження

"сума двох натуральних чисел дорівнює п'яти" (4.6.10)

є двомісним предикатом, предметні змінні якого – доданки – набувають значень із множини натуральних чисел.

2. *Символічний спосіб* – це подання предиката через математичні (і, можливо, інші) символи (знаки) у вигляді співвідношень (формул), які пов'язують предметні змінні. Водночас різні змінні позначають різними символами та зазначають їхні області припустимих значень.

Якщо у твердженні (4.6.10) позначити одне з чисел через x, а друге – через y, використати знак дії додавання $(+)$ і символ (цифру) 5, то дістанемо предикат у символічному записі:

$$P(x, y) = (x + y = 5), \quad (x, y) \in \mathbf{N}^2, \tag{4.6.11}$$

який є (за суттю) заданням одного рівняння з двома невідомими.

У складніших випадках предикати можуть задаватись за допомогою систем рівнянь, нерівностей та їхніх систем, систем рівнянь і нерівностей (різного типу), містити вектори, матриці, інтеграли тощо.

Наприклад:

нерівність $(x^3 + x^{-2} > 0)$, де $x \in \mathbf{R} \setminus \{0\}$, задає одномісний предикат;

нерівність $\left(\int_x^y 2t\, dt \le 0 \right)$, де $x, y \in \mathbf{R}$, – двомісний предикат;

система рівнянь $(x + 2y = 0 \wedge x + y - z = 0)$, де x, y, z – раціональні числа, – тримісний предикат.

Зауважимо, що слід розрізняти предикати, які виражають одну й ту саму умову, але мають предметні змінні з різними припустимими значеннями.

Наприклад: предикати

$$P(x) = (4x^2 - 9 = 0),\ x \in \mathbf{Z};\quad Q(x) = (4x^2 - 9 = 0),\ x \in \mathbf{Q}, \tag{4.6.12}$$

задано одним і тим самим рівнянням, але значеннями $P(x)$ будуть тільки хибні висловлення, а $Q(x)$ даватиме й істинні (для $x = \pm 1{,}5$).

3. *Комбінований спосіб* полягає у поєднанні словесного та символічного способів – це коли певну частину інформації про предикат подають словесно, а інші відомості – у символах.

Таким способом задано, *наприклад*, предикати (4.6.1), (4.6.3). (*Спробуйте* самостійно навести приклади предикатів із різними способами задання).

У теоретичних дослідженнях і на практиці під час розв'язання застосовних задач перевагу віддають символічному способу, оскільки він дозволяє проводити дослідження предиката аналітичними (кількісними) методами; зокрема, методами вищої математики.

Операції (дії) над предикатами

Розглянемо n-предикати $P = P(X)$, $Q = Q(X)$, $R = R(X)$ з однаковими областями існування: $D(P) = D(Q) = D(R) = M$, і з областями істинності: $D^1(P) = M_P$, $D^1(Q) = M_Q$, $D^1(R) = M_R$.

Дамо означення головних операцій над такими предикатами, спираючись на поняття "область істинності" предиката. Урахуємо також, що два предикати вважають *рівними*, якщо вони рівні як функції n змінних.

1. **Інверсією** (**запереченням**) предиката $P(X)$ називають предикат $\overline{P}(X)$, область істинності якого $M_{\overline{P}}$ є доповненням області істинності предиката P (до області існування M) (рис. 4.6.1):

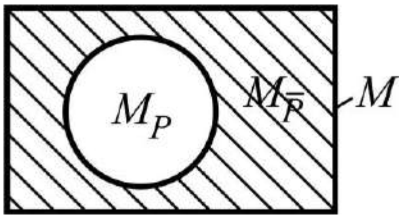


Рис. 4.6.1. **Область істинності предиката $\overline{P}(X)$**

$$(\overline{P} = \overline{P}(X) - \text{інверсія } P(X)) \rightleftharpoons (M_{\overline{P}} = \overline{M}_P = M \setminus M_P). \tag{4.6.13}$$

Із означення випливає, що $\overline{P}(X)$ набуває логічного значення "істина" ("фальш") на тих n-ках значень предметних змінних, на яких предикат $P(X)$ набуває значення "фальш" ("істина").

Для позначення інверсії застосовують також символ $\neg$; $\overline{P}(X)$ чи $\neg P(X)$ читають як: "не $P(X)$", або "неправильно, що $P(X)$".

Приклад 3. Нехай $P(x) = (x$ *– парне число*$)$, $x \in \mathbf{N}$, тоді предикат $\overline{P}(x) = (x$ *не є парним числом*$)$, $x \in \mathbf{N}$; причому $M_P = \{x \mid x = 2n, n \in \mathbf{N}\}$, $M_{\overline{P}} = \overline{M}_P = \{x \mid x = 2n-1, n \in \mathbf{N}\}$;

Приклад 4. $Q(x) = (|x+5| < 10), x \in \mathbf{R} \Rightarrow \neg Q(x) = (|x+5| \geq 10), x \in \mathbf{R}$, причому $M_Q = (-15;\ 5)$, $M_{\overline{Q}} = \overline{M}_Q = (-\infty; -15] \cup [5; +\infty)$.

2. **Диз'юнкцією** (**логічною сумою**) $P \vee Q$ предикатів P і Q називають предикат R, область істинності якого M_R є об'єднанням областей істинності складових P і Q (рис. 4.6.2):

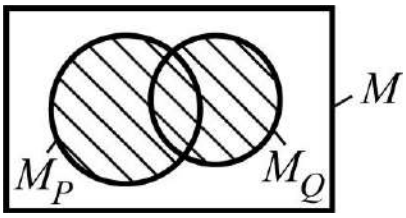


Рис. 4.6.2. **Область істинності предиката $P \vee Q$**

$$(R = P \vee Q) \rightleftharpoons (M_R = M_P \cup M_Q). \tag{4.6.14}$$

Логічна сума набуває значення "істина" ("фальш") на тих і тільки на тих n-ках значень предметних змінних, на яких хоча б один із предикатів набуває значення "істина" (обидва предикати набувають значення "фальш").

Символ $\vee$ читають як нероздільний сполучник "або".

Приклад 5. $(P(x) = ($*x – парне число* $)$, $Q(x) = ($*x ділиться на* $3)$, $x \in \mathbf{N})$ $\Rightarrow$ $(R = P \vee Q = ($*x – парне число або число, яке ділиться на* $3)$, $x \in \mathbf{N})$; причому $M_R = M_P \bigcup M_Q = \{x \mid x = 2n,\ n \in \mathbf{N}\} \bigcup \{x \mid x = 3m,\ m \in \mathbf{N}\}$.

3. **Кон'юнкцією** (**логічним добутком**) $P \wedge Q$ предикатів P і Q називають предикат R, область істинності якого M_R є перетином областей істинності складових P, Q (рис. 4.6.3):

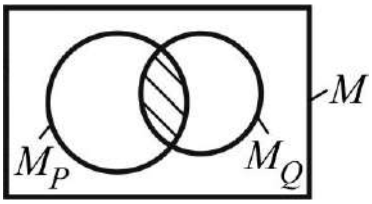


Рис. 4.6.3. **Область істинності предиката $P \wedge Q$**

$$(R = P \wedge Q) \ \rightleftharpoons \ (M_R = M_P \bigcap M_Q). \qquad (4.6.15)$$

Сформулюйте згідно з означенням (4.6.15), для яких n-к значень предметних змінних логічний добуток предикатів набуває логічного значення "істина" ("фальш").

Символ $\wedge$ читають як сполучник "і".

Приклад 6. За умов попереднього прикладу маємо:

$R = P \wedge Q = ($*x – парне число і ділиться на* $3)$, $x \in \mathbf{N}$; причому $M_R = M_P \bigcap M_Q = \{x \mid x = 6n,\ n \in \mathbf{N}\}$.

Операції "логічна сума" і "логічний добуток" можна поширити на будь-яку скінченну кількість операндів.

Виконуючи операції над предикатами треба зважати на те, які предметні змінні операндів позначено різними буквами, а які – однаковими. Ця обставина є суттєвою для встановлення того, на скільки місць буде предикат, що є результатом операції, і яка в нього область істинності.

Приклад 7. Якщо $P = P(x)$, $Q = Q(x)$, $x \in M$, то $R = R(x) = P(x) \wedge Q(x)$ є одномісним предикатом (див. *приклад 6*); якщо ж $P = P(x)$, $x \in M$, $Q = Q(y)$, $y \in M$, то $R = R(x, y) = P(x) \wedge Q(y)$ – двомісний предикат.

У першому випадку припустимі значення підставляють замість єдиної предметної змінної x, а у другому – замість предметних змінних x і y незалежно одне від одного:

$R(x, y) = P(x) \wedge Q(y) = ($*x – парне число і y ділиться на* $3)$, $x \in \mathbf{N}$, $y \in \mathbf{N}$, причому $M_R = \{(x, y) \mid x = 2n,\ n \in \mathbf{N};\ y = 3m,\ m \in \mathbf{N}\}$.

Далі в символах наведемо означення інших дій над предикатами, які відносять до основних (за аналогією з операціями над висловленнями (див. п. 4.1)). Відповідні словесні формулювання *наведіть самостійно*.

4. **Імплікація** (**логічний наслідок**):

$$(R = P \Rightarrow Q) \rightleftharpoons (M_R = M_{\overline{P}} \bigcup M_Q). \qquad (4.6.16)$$

5. **Еквіваленція** (**рівносильність**, **рівнозначність**):

$$(R = P \sim Q) \rightleftharpoons (M_R = (\overline{M}_P \bigcup M_Q) \bigcap (M_P \bigcup \overline{M}_Q)). \qquad (4.6.17)$$

6. **Операція Жегалкіна** (**додавання за модулем 2**):

$$(R = P \oplus Q) \rightleftharpoons (M_R = (M_P \bigcap \overline{M}_Q) \bigcup (\overline{M}_P \bigcap M_Q)). \qquad (4.6.18)$$

7. **Операція (штрих) Шеффера**:

$$(R = P \mid Q) \rightleftharpoons (M_R = \overline{M}_P \bigcup \overline{M}_Q). \qquad (4.6.19)$$

8. **Операція (стрілка) Пірса**:

$$(R = P \downarrow Q) \rightleftharpoons (M_R = \overline{M}_P \bigcap \overline{M}_Q). \qquad (4.6.20)$$

Операції 4 – 8 можна подати через головні $(\neg, \vee, \wedge)$ за допомогою співвідношень, аналогічних до тих, які мають місце для висловлень:

$$\begin{gathered}
P \Rightarrow Q = \overline{P} \vee Q = \neg(P \wedge \overline{Q}), \\
P \sim Q = (P \Rightarrow Q) \wedge (Q \Rightarrow P) = (\overline{P} \vee Q) \wedge (P \vee \overline{Q}) = (\overline{P} \wedge \overline{Q}) \vee (P \wedge Q), \\
P \oplus Q = \neg(P \sim Q) = (P \vee Q) \wedge (\overline{P} \vee \overline{Q}) = (\overline{P} \wedge \overline{Q}) \vee (P \wedge Q), \qquad (4.6.21) \\
P \mid Q = \neg(P \wedge Q) = \overline{P} \vee \overline{Q}, \\
P \downarrow Q = \neg(P \vee Q) = \overline{P} \wedge \overline{Q}.
\end{gathered}$$

Співвідношення (4.6.21) використовують під час розв'язання однієї з *типових задач* стосовно операцій над предикатами: встановити область (множину) істинності складеного предиката, поданого через задані операнди за допомогою дій $\neg$, $\vee$, $\wedge$, $\to$, $\sim$, $\oplus$, $|$, $\downarrow$.

Наведемо **загальний порядок розв'язання** цієї задачі, розглядаючи конкретну задачу.

Задача 4.6.1. Знайдіть область істинності предиката

$$P(x) = ((A(x) \mid \overline{B}(x)) \wedge (A(x) \to (\overline{C}(x) \sim B(x)))), \ x \in \mathbf{R}, \qquad (4.6.22)$$

де $A(x) = (x^3 + x \geq 0)$, $B(x) = (|x| - 3 \leq 0)$, $C(x) = (x^2 - 5x \geq 0)$, (4.6.23)

і дайте її геометричне зображення.

Розв'язання:

1. *Знаходимо* області істинності заданих предикатів-складових (у нас – M_A, M_B, M_C), для чого розв'язуємо відповідні нерівності:

$$\begin{gathered} x^3 + x \geq 0 \Rightarrow x(x^2+1) \geq 0 \Rightarrow x \geq 0 \Rightarrow M_A = [0; +\infty); \\ |x| - 3 \leq 0 \Rightarrow |x| \leq 3 \Rightarrow -3 \leq x \leq 3 \Rightarrow M_B = [-3; 3]; \\ x^2 - 5x \geq 0 \Rightarrow x(x-5) \geq 0 \Rightarrow M_C = (-\infty; 0] \cup [5; +\infty). \end{gathered} \qquad (4.6.24)$$

2. *Здійснюємо* в заданому предикаті перехід до головних операцій (див. співвідношення (4.6.21)) і *спрощуємо* отриманий вираз за законами алгебри логіки (*простежте*):

$$P = (\overline{A} \vee B) \wedge (\overline{A} \vee B\overline{C} \vee \overline{B}C) = \overline{A} \vee (B \wedge \overline{C}). \qquad (4.6.25)$$

Інакше, для заданої логічної функції знаходимо ДНФ або КНФ.

3. *Записуємо* відповідне подання шуканої області істинності через області істинності предикатів-складових (у нас – $M_{\overline{A}}$, M_B, $M_{\overline{C}}$) з урахуванням (4.6.24):

$$M_P = M_{\overline{A}} \cup (M_B \cap M_{\overline{C}}) = \overline{M}_A \cup (M_B \cap \overline{M}_C) = \left| \begin{matrix} \overline{M}_A = (-\infty; 0) \\ \overline{M}_C = (0; 5) \end{matrix} \right| =$$
$$= (-\infty; 0) \cup ([-3; 3] \cap (0; 5)) = (-\infty; 0) \cup (0; 3] = (-\infty; 3] \setminus \{0\}.$$

4. *Зображаємо* знайдену область на числовій осі (рис. 4.6.4):

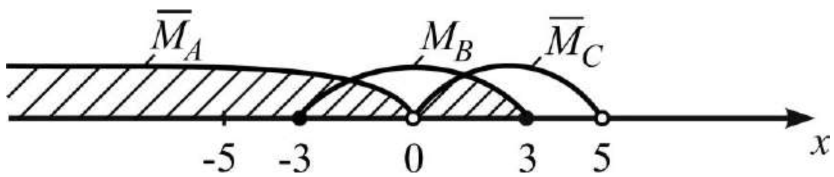


Рис. 4.6.4. **Зображення області істинності предиката**

Класифікація предикатів

Залежно від того, як співвідносяться між собою область існування предиката $D(P)$ і область його істинності $D^1(P)$ чи хибності $D^0(P)$, розрізняють три типи предикатів.

1. **Тотожно істинним** предикатом $P^T(X)$ називають предикат, який на будь-якому наборі значень предметних змінних набуває логічного значення "істина" (1), тобто область істинності предиката співпадає з областю існування:

$$P(X) = P^T(X) \rightleftharpoons D^1(P) = D(P), \tag{4.6.26}$$

де T – символ тотожної істинності.

Прикладом тотожно істинного предиката є 3-предикат $P(x, y, z) = (x^2 + y^2 + z^2 \geq 0)$, де $(x, y, z) \in \mathbf{R}^3$.

2. **Тотожно хибним** предикатом $P^F(X)$ називають предикат, який на будь-якому наборі вартостей предметних змінних набуває логічного значення "фальш" (0), тобто область хибності предиката співпадає з областю існування:

$$P(X) = P^F(X) \rightleftharpoons D^0(P) = D(P), \tag{4.6.27}$$

де F – символ тотожної хибності.

Прикладом тотожно хибного предиката є двомісний предикат $P(x, y) = (x^2 + y^2 = x + y)$, де $(x, y) \in \mathbf{N}^2 \setminus \{(1,1)\}$.

3. **Здійсненним** предикатом $P^C(X)$ називають предикат, який на деякій властивій підмножині області існування набуває логічного значення "істина" (1):

$$P(X) = P^C(X) \rightleftharpoons D^1(P) \subset D(P), \tag{4.6.28}$$

де C – символ здійсненності.

Прикладом здійсненного предиката є двомісний предикат $P(x, y) = (x^2 + y^2 = x + y)$, де $(x, y) \in \mathbf{N}_0^2$, $\mathbf{N}_0 = \mathbf{N} \bigcup \{0\}$.

Із наведених означень випливає, що будь-який предикат або тотожно істинний, або тотожно хибний, або здійсненний. Множини кожного типу предикатів позначимо відповідно через M^T, M^F, M^C, де T, F, C – перші букви слів: true – істинний, false – фальшивий, carry out – здійснювати).

Нехай предикати $P(X)$, $Q(X)$ мають однакові області припустимих значень предметних змінних.

Предикат $Q(X)$ називають **логічним наслідком** предиката $P(X)$, якщо предикат $P(X) \to Q(X)$ є тотожно істинним:

$$P(X) \models Q(X) \ \rightleftharpoons \ P(X) \to Q(X) = R^T(X), \tag{4.6.29}$$

де $\models$ – символ (знак) логічного наслідку.

Прикладом логічного наслідку предиката $P(x_1, x_2) = (x_1^2 + x_2^2 \le 0)$, $(x_1, x_2) \in \mathbf{Z}^2$, є предикат $Q(x_1, x_2) = (x_1 + x_2 = 0)$, $(x_1, x_2) \in \mathbf{Z}^2$. Загалом із тотожно хибного предиката логічно випливає будь-який предикат, а тотожно істинний предикат логічно випливає з будь-якого предиката.

Предикати $P(X)$ і $Q(X)$ називають **рівносильними** (**логічно еквівалентними**), якщо предикат $P(X) \sim Q(X)$ є тотожно істинним:

$$P(X) \equiv Q(X) \ \rightleftharpoons \ P(X) \sim Q(X) = R^T(X), \tag{4.6.30}$$

де $\equiv$ – символ рівносильності.

На підставі означення (4.6.30) зрозуміло, що предикати $P(X)$ і $Q(X)$ рівносильні тоді і тільки тоді, коли $Q(X)$ є наслідком $P(X)$, а $P(X)$ є наслідком $Q(X)$:

$$P(X) \equiv Q(X) \Leftrightarrow (P(X) \models Q(X) \wedge Q(X) \models P(X)). \tag{4.6.31}$$

Прикладом рівносильних предикатів можуть слугувати такі предикати: $P(x,y) = (x^2 - y^2 = 0)$, $Q(x,y) = (2(x-y) = 0 \vee 3(x+y) = 0)$, $(x,y) \in \mathbf{Z}^2$.

Поняття "логічного наслідку" і "логічної еквівалентності" широко використовують в одному з розділів математичної логіки – *теорії доведень*.

Квантори загальності та існування: означення, властивості

У математиці під час формулювання означень і теорем часто доводиться користуватися висловленнями, що містять слова чи групи слів, які виражають:

1) твердження *загальності* – "усі", "кожний", "будь-який", "усякий";

2) твердження *існування* – "хоча б один", "який-небудь", "знайдеться", "існує".

Для того, щоб легше було подавати висловлення словесно чи в символах, у математичних текстах застосовують спеціальні знаки, з якими ви вже зустрічалися в основах теорії множин (див. п. 1.1): першій (другій) групі слів відповідає знак-символ $\forall$ $(\exists)$, який назвали *квантором загальності* (*квантором існування*).

Введені в розгляд символи використовувалися нами, так би мовити, як "замінники" відповідних слів (узятих в однині чи множині та у відповідному відмінку згідно з контекстом). З точки ж зору теорії предикатів названі квантори у смисловому відношенні – це операції, які у застосуванні до предикатів чи висловлень дають у результаті також предикати або висловлення.

Квантор загальності. Розглянемо одномісний предикат $P(x)$ з областю припустимих значень $D(P) = D$ предметної змінної x. Якщо праворуч від знака $\forall$ приписати x, то одержимо символ $\forall x$, який читають "для всіх x" або "для кожного x" (звичайно, – із D). Припишемо цей символ зліва від позначення предиката, тоді матимемо запис $\forall x P(x)$, який читають "для всіх x, P від x", тобто для всіх x справедлива властивість $P(x)$ або "має місце властивість $P(x)$". Відповідне твердження є висловленням, оскільки воно (на відміну від предиката) не залежить від змінної x (*вдумайтесь*!). Це висловлення істинне, коли $P(x)$ тотожно істинний предикат, і хибне – у протилежному випадку. Отже, символ $\forall x$, записаний перед символом $P(x)$, "перетворив" предикат на висловлення.

Операцію (дію) над предикатом $P(x)$, унаслідок виконання якої дістаємо істинне висловлення, якщо $P(x)$ тотожно істинний предикат, і хибне – у протилежному випадку, називають **квантором загальності за змінною** x і позначають через $\forall x$:

$$\forall x\, P(x) = \begin{cases} 1, \text{ якщо } P(x) \in M^T, \\ 0, \text{ якщо } P(x) \notin M^T. \end{cases} \quad (4.6.32)$$

Змінну x, за якою діє квантор загальності $\forall x$ (або, кажуть, яка перебуває під знаком квантора загальності), називають **зв'язаною змінною** (предиката).

Приклад 8. Застосуємо квантор $\forall x$ до предиката $P(x) = (x + 2 = 5)$, $x \in \mathbf{R}$: $\forall x P(x) = 0$, оскільки $P(x)$ – істина тільки для $x = 3$.

Приклад 9. Якщо $Q(x) = (x^2 \geq 0)$, $x \in \mathbf{R}$, то $\forall x\, Q(x) = 1$, оскільки $Q(x) \in M^T$.

Зауваження. Якщо розглядати дію квантора $\forall x$ на деяке висловлення A, то дістанемо (*обміркуйте*):

$$\forall x\, A = \begin{cases} 1, \text{ якщо } A = 1, \\ 0, \text{ якщо } A = 0. \end{cases} \tag{4.6.33}$$

Якщо $P(X)$ – n-предикат, тобто $X = (x_1, x_2, ..., x_i, ..., x_n)$, $n > 1$, з областю існування $D(P) = D$, а $\forall x_i$ – квантор загальності за змінною x_i, $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$, то вираз

$$\forall x_i\, P(x_1, x_2, \ldots, x_i, \ldots, x_n) \tag{4.6.34}$$

описує предикат на $(n-1)$ місць, адже він залежить від усіх предметних змінних, крім однієї – x_i, яка не є невизначеною компонентою твердження $P(X)$: вона пов'язана умовою – для будь-якого x_i має місце $P(X)$.

Змінну x_i, за якою діє квантор загальності $\forall x_i$, називають **зв'язаною змінною** (на відміну від інших змінних, які природно назвати **вільними змінними**). Якщо в $(n-1)$-предикаті (4.6.34) всі вільні змінні x_j ($j = \overline{1, n}$, $j \neq i$) замінити предметними сталими c_j, то матимемо висловлення $\forall x_i\, P(c_1, c_2, \ldots, x_i, \ldots, c_n)$, яке буде істинним у разі, коли одномісний предикат $P(c_1, c_2, ..., x_i, ..., c_n)$ тотожно істинний.

Квантором загальності за змінною $\boldsymbol{x_i}$ n-місного предиката $P(x_1, x_2, ..., x_i, ..., x_n)$ називають операцію $\forall x_i$, унаслідок дії якої на $P(X)$ дістаємо $(n-1)$-предикат $\forall x_i\, P(X)$ від змінних x_1, x_2, …, x_{i-1}, x_{i+1}, …, x_n, а x_i – зв'язана квантором змінна.

Якщо на один і той самий n-предикат діяти кванторами загальності k разів (за різними змінними), то в результаті матимемо предикат на $(n-k)$ місць $(k \leq n)$.

Приклад 10. $P(x, y) = (x^2 - y^2 \geq 0)$, $(x, y) \in \mathbf{R}^2$ $\Rightarrow$ $\forall x\, P(x, y)$ – одномісний предикат від змінної y, $y \in \mathbf{R}$, $\Rightarrow$ $\forall y\, \forall x\, P(x, y) = \alpha$ – 0-місний предикат (висловлення), причому $\alpha = 0$ (*чому?*).

Квантор існування. Розглянемо одномісний предикат $P(x)$ з областю припустимих значень $D(P)=D$ предметної змінної x. Якщо праворуч від знака $\exists$ приписати x, то дістанемо символ $\exists x$, який читають "існує x", або "знайдеться x" (звичайно, – в D). Припишемо цей символ зліва від позначення предиката, тоді дістанемо запис $\exists x P(x)$, який читають "існує x таке, що P від x", або "знайдеться таке x, що має місце властивість $P(x)$". Відповідне твердження є висловленням, адже воно (на відміну від предиката) не залежить від змінної x. Це висловлення істинне, коли $P(x)$ здійсненний чи тотожно істинний предикат, і хибне, коли $P(x)$ – тотожно хибний предикат. Таким чином, символ $\exists x$, записаний перед символом $P(x)$, "перетворив" предикат на висловлення.

Операцію (дію) над предикатом $P(x)$, унаслідок виконання якої дістаємо хибне висловлення, якщо $P(x)$ тотожно хибний предикат, і істинне – у протилежному випадку, називають **квантором існування за змінною** x і позначають через $\exists x$:

$$\exists x P(x) = \begin{cases} 0, \text{ якщо } P(x) \in M^F, \\ 1 \quad \text{у решті випадків.} \end{cases} \tag{4.6.35}$$

Змінну x, за якою діє квантор існування $\exists x$, називають **зв'язаною змінною** (предиката).

Приклад 11. Застосуємо квантор $\exists x$ до предиката $P(x)=(x^2+5<0)$, $x \in \mathbf{R}$: $\exists x P(x)=0$, оскільки $P(x)$ – тотожно хибний предикат.

Приклад 12. Якщо $Q(x)=(x^2+10>0)$, $x \in \mathbf{R}$, то $\exists x Q(x)=1$, оскільки $Q(x) \in M^T$.

Зауваження. Якщо розглядати дію квантора $\exists x$ на деяке висловлення A, то дістанемо (*обміркуйте*):

$$\exists x A = \begin{cases} 1, \text{ якщо } A=1, \\ 0, \text{ якщо } A=0. \end{cases} \tag{4.6.36}$$

У випадку предиката на n місць: $P(X)=P(x_1, x_2, ..., x_n)$ з областю існування $D(P)=D$, як і для квантора загальності, розглядають квантор існування за змінною x_i, $i \in \{1, 2, \dots, n\}$. Його дія породжує $(n-1)$-місний предикат:

$$\exists x_i \, P(x_1, x_2, \dots, x_i, \dots, x_n), \tag{4.6.37}$$

з предметними (вільними) змінними x_1, x_2, …, x_{i-1}, x_{i+1}, …, x_n, а x_i – зв'язана квантором змінна. Якщо в $(n-1)$-предикаті (4.6.37) усі вільні змінні x_j ($j = \overline{1,n}$, $j \neq i$) замінити предметними сталими c_j, то матимемо висловлення $\exists x_i \, P(c_1, c_2, \dots, x_i, \dots, c_n)$, яке буде завжди істинне, крім єдиного випадку, коли одномісний предикат $P(c_1, c_2, \dots, x_i, \dots, c_n)$ тотожно хибний.

Якщо на один і той самий n-предикат діяти квантором існування k разів (за різними аргументами), то в результаті дістанемо предикат на $(n-k)$ місць $(k \leq n)$.

Приклад 13. $P(x, y) = (x + y > 0)$, $(x, y) \in \mathbf{Z}^2 \;\Rightarrow\; \exists y \, P(x, y)$– одномісний предикат від змінної x, $x \in \mathbf{Z} \Rightarrow \exists x \exists y \, P(x, y) = \alpha$ – 0-предикат (висловлення), причому $\alpha = 1$ (*чому?*).

Застосування до заданого предиката або дію на заданий предикат одного або декількох кванторів (загальності, існування) називають **квантифікацією** (предиката). Цей термін використовують і для опису результату дії кванторів.

Відносно один одного квантори $\forall$ і $\exists$ називають **двоїстими**: квантор загальності (існування) є двоїстим відносно квантора існування (загальності).

Щоб уникнути громіздких записів, не порушуючи принципових положень-висновків, наведемо **основні властивості кванторів**, розглядаючи двомісні предикати $P = P(x, y)$, $Q = Q(x, y)$, задані на деякій множині D^2 пар (x, y), тобто $x \in D$, $y \in D$.

1 (*про квантифікацію висловлень*): результат квантифікації висловлення (0-предиката) P_0 істинний тоді і тільки тоді, коли висловлення P_0 є істинним:

$$\forall x \, P_0 = 1 \Leftrightarrow P_0 = 1, \quad \exists x \, P_0 = 1 \Leftrightarrow P_0 = 1. \tag{4.6.38}$$

Справедливість (4.6.38) випливає зі співвідношень (4.6.33) і (4.6.36).

2 (*про однойменну квантифікацію*): квантифікація предиката декілька разів одним і тим самим квантором за різними змінними не залежить від порядку вибору змінних (тобто є комутативною):

$$\begin{aligned} &\forall x \forall y\, P(x,y) \Leftrightarrow \forall y \forall x\, P(x,y), \\ &\exists x \exists y\, P(x,y) \Leftrightarrow \exists y \exists x\, P(x,y). \end{aligned} \tag{4.6.39}$$

Дійсно, якщо у n-предикаті $P(X)$ k змінних $(k \le n)$ зв'язані кванторами одного й того ж типу, то незалежно від порядку їхнього слідування приходимо до $(n-k)$-предикатів від одних і тих самих вільних змінних, а на зв'язані змінні накладають одну й ту ж умову; отже, дістаємо еквівалентні предикати.

3 (*про різнойменну квантифікацію*): квантифікація предиката декілька разів різнойменними кванторами за різними змінними залежить, взагалі кажучи, від порядку їх застосування (тобто не є комутативною):

$$\forall x \exists y\, P(x,y) \not\Leftrightarrow \exists y \forall x\, P(x,y), \tag{4.6.40}$$

$$\exists x \forall y\, P(x,y) \not\Leftrightarrow \forall y \exists x\, P(x,y). \tag{4.6.41}$$

Дійсно, якщо у n-предикаті $P(X)$ k змінних $(k \le n)$ зв'язані кванторами різного типу, то незалежно від порядку їхнього слідування приходимо до $(n-k)$-предикатів від одних і тих самих вільних змінних, але на зв'язані змінні накладають різні умови, і суттєвим є те, яка умова якій передує. Власне, для доведення цієї властивості *методом від супротивного* достатньо одного прикладу, який ми і наведемо.

Приклад 14. $(P(x,y) = (x$ *ділить* $y)$, $x \in \mathbf{N}$, $y \in \mathbf{N}) \Rightarrow (\forall x \exists y\, P(x,y)$ – висловлення: *"для будь-якого x існує таке y, що x ділить y"*, яке істинне; $\exists y \forall x\, P(x,y)$ – висловлення: *"існує таке y, що будь-яке x ділить y"*, яке хибне$) \Rightarrow (\forall x \exists y\, P(x,y) \not\Leftrightarrow \exists y \forall x\, P(x,y))$. *Обміркуйте*, чи має місце (4.6.41) у випадку, коли $(x,y) \in \mathbf{N}_0^2$, $\mathbf{N}_0 = \mathbf{N} \bigcup \{0\}$.

4 (*про заперечення квантифікації*): у разі інверсії квантифікації символ інверсії переносять на предикат, а квантор замінюють двоїстим:

$$\overline{\forall x P(x,y)} \equiv \exists x \overline{P(x,y)}, \quad \overline{\exists x P(x,y)} \equiv \forall x \overline{P(x,y)}. \tag{4.6.42}$$

Аналогічно для квантифікації за змінною *y*.

Доведемо, *наприклад*, першу з тотожностей (4.6.42):

$\overline{\forall x P(x,y)}$ – предикат: "неправильно, що для всіх x має місце $P(x,y)$", а це означає, що "існує таке x, для якого $P(x,y)$ місця немає", тобто $\exists x \overline{P(x,y)}$. (*Доведіть самостійно* другу з тотожностей (4.6.42) і *запишіть* властивість 4, використовуючи символ $\neg$.)

5 (*про дистрибутивність квантифікації*): квантор загальності (існування) дистрибутивний відносно кон'юнкції (диз'юнкції) предикатів:

$$\forall x(P(x,y)\wedge Q(x,y))\equiv\forall x P(x,y)\wedge\forall x Q(x,y), \qquad (4.6.43)$$

$$\exists x(P(x,y)\vee Q(x,y))\equiv\exists x P(x,y)\vee\exists x Q(x,y). \qquad (4.6.44)$$

Аналогічно для квантифікації за змінною y.

З істинністю (4.6.44) пов'язані такі змістовні міркування: ліва частина набуває значення "істина" тоді і тільки тоді, коли принаймні один із предикатів P і Q здійсненний, тобто істинний на деяких двійках із D^2; якщо це так, то за означенням диз'юнкції предикатів і права частина співвідношення буде здійсненним предикатом. (*Наведіть* аналогічні міркування щодо рівносильності (4.6.43)).

Положення теорії предикатів і кванторів слугують насамперед для подання (опису) різноманітних складних висловлень символічною мовою з метою їх подальшого аналізу формальними методами. У математичній логіці є розділ, присвячений вивченню методів опису логічних законів (формул, функцій), який називають *численням предикатів*.

Наприклад, якщо $P(x)=(x$ – *студент*$)$, $Q(y)=(y$ – *залік з ДМ*$)$, $R(x,y)=(x$ *склав* $y)$, то висловлення: *"деякі студенти не склали заліку з ДМ"* у символах числення предикатів запишеться так: $\overline{\forall x(P(x)\wedge Q(y)\to R(x,y))}$, або $\exists x(P(x)\wedge Q(y)\overline{\to} R(x,y))$. *Спробуйте* знайти лаконічніші варіанти подання.

4.7. Задачі та вправи до теми 4

Зразки розв'язання типових задач

1. Вирішіть проблему розв'язності для заданих логічних формул табличним способом:

$$F=(\bar{x}\oplus z)\,|\,((x\downarrow\bar{y})\sim(y\to z)).$$

Розв'язання:

Установлюємо в ЛФ F порядок виконання логічних операцій і вводимо позначення результату кожної з них (інверсії атомів не нумеруємо, щоб не споруджувати для них два зайві стовпці):

$$F = (\underset{\substack{1\\A}}{\bar{x} \oplus z}) \underset{\substack{5\\F}}{|} ((\underset{\substack{2\\B}}{x \downarrow \bar{y}}) \underset{\substack{4\\D}}{\sim} (\underset{\substack{3\\C}}{y \to z})).$$

Далі будуємо власне саму таблицю істинності (табл. 4.7.1): відведемо три стовпці (за кількістю атомів) для запису наборів значень атомів і п'ять стовпців (за кількістю проміжних дій) – для відповідних значень результатів проміжних операцій і самої формули.

Таблиця 4.7.1

Таблиця істинності логічної формули

			A	B	C	D	F
x	y	z	$\bar{x} \oplus z$	$x \downarrow \bar{y}$	$y \to z$	$B \sim C$	$A \mid D$
0	0	0	1	0	1	0	1
0	0	1	0	0	1	0	1
0	1	0	1	1	0	0	1
0	1	1	0	1	1	1	1
1	0	0	0	0	1	0	1
1	0	1	1	0	1	0	1
1	1	0	0	0	0	1	1
1	1	1	1	0	1	0	1

Аналізуємо останній стовпець таблиці – стовпець значень ЛФ F – з метою встановлення того, чи є вона тавтологією. Оскільки на всіх наборах значень атомів x, y, z ЛФ F набуває значення, що дорівнює 1, то робимо *висновок*, що задана ЛФ є тавтологією. Нагадаємо: якщо стовпець значень ЛФ F містить як нулі, так і одиниці, то ЛФ є здійсненною; у випадку суперечності стовпець значень ЛФ містить усі нулі.

2. Доведіть (або спростуйте), що задана логічна формула F є тавтологією, аналітичним способом:

1) $F = ((a \vee b) \wedge (a \vee \bar{b})) \to (a \vee (b \wedge \bar{b}))$;

2) $F = \bar{x} \to (y \to (x \to \bar{y}))$.

Розв'язання:

1. На підставі законів склеювання $((x \vee y) \wedge (x \vee \bar{y}) = x)$, суперечності $(x \wedge \bar{x} = 0)$ і поглинання $(x \vee 0 = x)$ маємо відповідно:

$$(a \vee b)(a \vee \bar{b}) = a, \quad b \wedge \bar{b} = 0, \quad a \vee 0 = a.$$

З урахуванням формули переходу від імплікації до головних операцій $(x \to y = \bar{x} \vee y)$, комутативного закону $(x \vee y = y \vee x)$ і закону виключення третьої можливості $(x \vee \bar{x} = 1)$ остаточно дістаємо:

$$a \to a = \bar{a} \vee a = a \vee \bar{a} \equiv 1 = F.$$

Висновок: задана логічна формула F є тавтологією.

2. Установлюємо в ЛФ F порядок виконання логічних операцій і вводимо позначення результату кожної з них (інверсії атомів нумерувати не будемо):

$$F = \bar{x} \underset{\substack{3\\F}}{\oplus} (y \underset{\substack{2\\B}}{\to} (x \underset{\substack{1\\A}}{\to} \bar{y})).$$

Спрощуємо задану ЛФ за допомогою тотожних перетворень за законами алгебри логіки (див. табл. 4.1.1) із залученням формул переходу до головних ЛО для імплікації $(x \to y = \bar{x} \vee y)$ і операції Жегалкіна $(x \oplus y = (x \wedge \bar{y}) \vee (\bar{x} \wedge y))$ (див. 4.1.3):

1) $x \to \bar{y} = \bar{x} \vee \bar{y} = A$;

2) $y \to A = \bar{y} \vee A = \bar{y} \vee (\bar{x} \vee \bar{y}) = (\bar{y} \vee \bar{y}) \vee \bar{x} = \bar{y} \vee \bar{x} = \bar{x} \vee \bar{y} = B$;

3) $\bar{x} \oplus B = (\bar{x} \wedge \bar{B}) \vee (\bar{\bar{x}} \wedge B) = (\bar{x} \wedge (\overline{\bar{x} \vee \bar{y}})) \vee (x \wedge (\bar{x} \vee \bar{y})) =$
$= (\bar{x} \wedge (x \wedge y)) \vee ((x \wedge \bar{x}) \vee (x \wedge \bar{y})) = (\bar{x} \wedge x \wedge y) \vee (0 \vee (x \wedge \bar{y})) =$
$= (0 \wedge y) \vee (x \wedge \bar{y}) = 0 \vee (x \wedge \bar{y}) = x \wedge \bar{y} = F$.

Висновок: оскільки ЛФ $F = x \wedge \bar{y}$ не є ні тотожною одиницею, ні тотожним нулем, то вона – здійсненна ЛФ.

3. Знайдіть диз'юнктивну і кон'юнктивну нормальні форми (ДНФ і КНФ) заданої логічної формули F за допомогою тотожних перетворень за законами алгебри логіки:

$$F = (x \mid \bar{y}) \wedge (x \to (\bar{z} \sim y)).$$

Розв'язання:

Діємо за загальною схемою зведення ЛФ до нормальних форм (див. п. 4.2), а саме: *здійснимо* перехід до головних операцій алгебри логіки за допомогою співвідношень (4.1.3), *спростимо* здобуту формулу за допомогою законів алгебри логіки і *зведемо* окремі частини формули до елементарних диз'юнкцій чи кон'юнкцій:

$$F = \underset{A}{\underset{1}{(x \mid \bar{y})}} \underset{F}{\underset{4}{\wedge}} (x \underset{C}{\underset{3}{\rightarrow}} (\bar{z} \underset{B}{\underset{2}{\sim}} y)).$$

1) $x \mid \bar{y} = \left| \begin{array}{c} a \mid b = \bar{a} \vee \bar{b} \\ a = x,\ b = \bar{y} \end{array} \right| = \bar{x} \vee \bar{\bar{y}} = \bar{x} \vee y = A;$

2) $\bar{z} \sim y = \left| \begin{array}{c} a \sim b = ab \vee \bar{a}\bar{b} \\ a = \bar{z},\ b = y \end{array} \right| = \bar{z}y \vee z\bar{y} = B;$

3) $x \rightarrow B = \left| \begin{array}{c} a \rightarrow b = \bar{a} \vee b \\ a = x,\ b = B \end{array} \right| = \bar{x} \vee B = \bar{x} \vee \bar{z}y \vee z\bar{y} = C;$

4) $A \wedge C = (\bar{x} \vee y)(\bar{x} \vee \bar{z}y \vee z\bar{y}) = F.$

Ця форма не є ні ДНФ, ні КНФ (хоча є кон'юнкцією диз'юнкцій, але диз'юнкція у других круглих дужках не є елементарною).

Розкриємо дужки (спираючись на дистрибутивні закони) і тоді добуток сум запишеться як сума добутків:

$$F = (\bar{x} \vee y)(\bar{x} \vee \bar{z}y \vee z\bar{y}) = \bar{x}\bar{x} \vee \bar{x}\bar{z}y \vee \bar{x}z\bar{y} \vee y\bar{x} \vee y\bar{z}y \vee yz\bar{y} =$$

$$= \left| \begin{array}{l} \bar{x}\bar{x} = \bar{x} \\ yy = y \\ y\bar{y} = 0 \end{array} \right| = \bar{x} \vee \bar{x}y\bar{z} \vee \bar{x}\bar{y}z \vee \bar{x}y \vee y\bar{z} \vee 0 = \left| \begin{array}{c} a \vee 0 = a \\ a \vee ab = a \end{array} \right| = \bar{x} \vee y\bar{z}.$$

Здобута формула є диз'юнкцією двох елементарних кон'юнкцій: $K_1 = \bar{x}$ і $K_2 = y\bar{z}$, тобто є ДНФ заданої ЛФ F. Отже: $F_{\vee} = \bar{x} \vee y\bar{z}$.

КНФ $F_{\wedge}$ дістанемо із $F_{\vee}$, застосувавши розподільний закон диз'юнкції відносно кон'юнкції: $F_{\vee} = (\bar{x} \vee y)(\bar{x} \vee \bar{z})$.

КНФ можна дістати інакше, якщо у формулі, отриманій у четвертій дії: $F = (\bar{x} \vee y)(\bar{x} \vee \bar{z}y \vee z\bar{y})$, перетворити логічну суму $\bar{x} \vee \bar{z}y \vee z\bar{y}$ на логічний добуток:

$$\bar{x} \vee \bar{z}y \vee z\bar{y} = (\bar{x} \vee \bar{z} \vee z)(\bar{x} \vee \bar{z} \vee \bar{y})(\bar{x} \vee y \vee z)(\bar{x} \vee y \vee \bar{y}) =$$
$$= 1 \cdot (\bar{x} \vee \bar{z} \vee \bar{y})(\bar{x} \vee y \vee z) \cdot 1 = (\bar{x} \vee \bar{y} \vee \bar{z})(\bar{x} \vee y \vee z).$$

Отже, $F'_{\wedge} = (\bar{x} \vee y)(\bar{x} \vee \bar{y} \vee \bar{z})(\bar{x} \vee y \vee z)$, або (після застосування закону поглинання) $F''_{\wedge} = (\bar{x} \vee y)(\bar{x} \vee \bar{y} \vee \bar{z})$.

Ця задача підтверджує те, що логічна формула може мати декілька нормальних форм (у нас $F_{\wedge}$, $F'_{\wedge}$, $F''_{\wedge}$), які рівносильні між собою, тобто на кожному наборі значень атомів усі ці формули мають однакові значення. У цьому можна переконатися, наприклад, за допомогою таблиць істинності.

4. Знайдіть ДНФ і КНФ заданої логічної формули F за допомогою формул розкладу за двома атомами:

$$F = \bar{a} \to (c \wedge (\bar{b} \sim (c \downarrow b))).$$

Розв'язання:

Позначимо формулу через $F(a,b,c)$, підкреслюючи залежність від атомів a, b, c, і запишемо загальний вигляд формули розкладу її за двома атомами b, c типу $\vee\wedge$ (див. п. 4.2):

$$F(a,b,c) = \bigvee_{(\sigma_2,\sigma_3)} b^{\sigma_2} c^{\sigma_3} F(a,\sigma_2,\sigma_3),$$

де диз'юнкції і значення $F(a,\sigma_2,\sigma_3)$ беруть для всіх наборів значень параметрів σ_2, σ_3, тобто в розгорнутому вигляді маємо:

$$F(a,b,c) = b^0c^0F(a,0,0) \vee b^0c^1F(a,0,1) \vee b^1c^0F(a,1,0) \vee b^1c^1F(a,1,1).$$

Підрахунок значень $F(a,\sigma_2,\sigma_3)$ подано у вигляді табл. 4.7.2.

Таблиця 4.7.2

Підрахунок значень логічної формули

σ_2	σ_3	$\bar{a} \to (\sigma_3 \wedge (\bar{\sigma}_2 \sim (\sigma_3 \downarrow \sigma_2))) = F(a,\sigma_2,\sigma_3)$
0	0	$\bar{a} \to (0 \wedge (\bar{0} \sim (0 \downarrow 0))) = a$
0	1	$\bar{a} \to (1 \wedge (\bar{0} \sim (1 \downarrow 0))) = a$
1	0	$\bar{a} \to (0 \wedge (\bar{1} \sim (0 \downarrow 1))) = a$
1	1	$\bar{a} \to (1 \wedge (\bar{1} \sim (1 \downarrow 1))) = 1$

Отже,

$$F(a,b,c)=b^0c^0a\vee b^0c^1a\vee b^1c^0a\vee b^1c^1\cdot 1=a\bar b\,\bar c\vee a\bar b c\vee a b\bar c\vee bc=F_\vee .$$

Для знаходження КНФ використаємо формулу розкладу типу $\wedge\vee$:

$$F(a,b,c)=\bigwedge_{(\sigma_2,\sigma_3)}(b^{\bar\sigma_2}\vee c^{\bar\sigma_3}\vee F(a,\sigma_2,\sigma_3)),$$

і знайдені значення $F(a,\sigma_2,\sigma_3)$ (див. табл. 4.7.2):

$$F(a,b,c)=(b^1\vee c^1\vee a)(b^1\vee c^0\vee a)(b^0\vee c^1\vee a)(b^0\vee c^0\vee 1)=$$
$$=(a\vee b\vee c)(a\vee b\vee\bar c)(a\vee\bar b\vee c)=F_\wedge .$$

Вирази для $F_\vee$, $F_\wedge$ можна спростити за допомогою законів склеювання і поглинання (*поміркуйте*, як це зробити).

5. Знайдіть досконалі ДНФ і КНФ заданої логічної формули F двома способами: 1) за допомогою тотожних перетворень за законами алгебри логіки; 2) за допомогою таблиці істинності.

$$F=\neg((\bar x\vee(y\mid z))\wedge(\bar x\,\overline{\rightarrow}\,(y\wedge\bar z))).$$

Розв'язання:

1. Для знаходження досконалих ДНФ і КНФ аналітичним способом (див. п. 4.2), тобто за допомогою тотожних перетворень за законами алгебри логіки, спочатку здобудемо ДНФ і КНФ, як це робилося під час розв'язання задачі 4. Потім розширимо елементарні кон'юнкції (диз'юнкції) до конституент одиниці (нуля) залученням законів виключення третьої можливості $(x\vee\bar x\equiv 1)$ і суперечності $(x\wedge\bar x\equiv 0)$.

З урахуванням формул переходу від основних операцій $\mid$, $\rightarrow$ до головних $\vee$, $\wedge$, $\neg$, а саме: $y\mid z=\bar y\vee\bar z$; $a\rightarrow b=\bar a\vee b$ для $a=\bar x$, $b=y\bar z$, що дає:

$$\bar x\,\overline{\rightarrow}\,y\bar z=\neg(\bar x\rightarrow y\bar z)=\neg(\bar{\bar x}\vee y\bar z)=\bar x\wedge(\bar y\vee z),$$

законів де Моргана та закону поглинання, для заданої ЛФ F дістанемо:

$$F=\neg((\bar x\vee\bar y\vee\bar z)\wedge(\bar x\wedge(\bar y\vee z)))=\neg(\bar x\vee\bar y\vee\bar z)\vee\neg(\bar x\wedge(\bar y\vee z))=$$
$$=xyz\vee x\vee y\bar z=x\vee y\bar z=F_\vee .$$

Кожний доданок у $F_{\vee}$ замінюємо рівносильним виразом:

$$x = x(y \vee \bar{y})(z \vee \bar{z}), \quad y\bar{z} = y\bar{z}(x \vee \bar{x}).$$

Після розкриття дужок здобудемо конституенти одиниці, а F набуде досконалої ДНФ:

$$F_{\ovee} = x(y \vee \bar{y})(z \vee \bar{z}) \vee y\bar{z}(x \vee \bar{x}) = xyz \vee \underline{xy\bar{z}} \vee x\bar{y}z \vee x\bar{y}\bar{z} \vee$$
$$\vee \underline{xy\bar{z}} \vee \bar{x}y\bar{z} = xyz \vee xy\bar{z} \vee x\bar{y}z \vee x\bar{y}\bar{z} \vee \bar{x}y\bar{z}.$$

Далі знаходимо КНФ, застосувавши до $F_{\vee}$ розподільний закон:

$$F_{\vee} = x \vee y\bar{z} \;\Rightarrow F_{\wedge} = (x \vee y)(x \vee \bar{z}).$$

Щоб дістати ДКНФ, замінимо в $F_{\wedge}$ кожну з елементарних диз'юнкцій рівносильним виразом:

$$x \vee y = x \vee y \vee z\,\bar{z}, \quad x \vee \bar{z} = x \vee \bar{z} \vee y\bar{y},$$

і подамо у вигляді добутку конституент нуля (за розподільним законом):

$$x \vee y = (x \vee y \vee z)(x \vee y \vee \bar{z}), \quad x \vee \bar{z} = (x \vee y \vee \bar{z})(x \vee \bar{y} \vee \bar{z}).$$

Таким чином, з урахуванням закону ідемпотентності маємо:

$$F_{\owedge} = (x \vee y \vee z)(x \vee y \vee \bar{z})(x \vee \bar{y} \vee \bar{z}).$$

2. Другий спосіб передбачає застосування формул розкладу логічної формули за всіма атомами (див. п. 4.2), що зводиться (у підсумку) до аналізу таблиці істинності. Отже, розставляємо порядок виконання дій, вводимо позначення результатів проміжних операцій і всієї формули:

$$F = \underset{\substack{6\\F}}{\neg}((\bar{x} \underset{\substack{2\\B}}{\vee} (y \underset{\substack{1\\A}}{|} z)) \underset{\substack{5\\E}}{\wedge} (\bar{x} \underset{\substack{4\\D}}{\overline{\rightarrow}} (y \underset{\substack{3\\C}}{\wedge} \bar{z}))),$$

і будуємо таблицю істинності (табл. 4.7.3).

Згідно з правилом побудови ДДНФ, розглядаємо всі набори значень атомів (x, y, z), на яких $F = 1$. У нас це набори (010), (100), (101), (110), (111). Вони визначають конституенти одиниці, які входять до складу

ДДНФ: кожну одиницю набору замінюємо атомом, значенням якого є ця одиниця, а кожний нуль – інверсією атома.

Таблиця 4.7.3

Таблиця істинності логічної формули

			A	B	C	D	E	F
x	y	z	$y \mid z$	$\bar{x} \vee A$	$y \wedge \bar{z}$	$\bar{x} \overline{\to} C$	$B \wedge D$	$\neg E$
0	0	0	1	1	0	1	1	0
0	0	1	1	1	0	1	1	0
0	1	0	1	1	1	0	0	1
0	1	1	0	1	0	1	1	0
1	0	0	1	1	0	0	0	1
1	0	1	1	1	0	0	0	1
1	1	0	1	1	1	0	0	1
1	1	1	0	0	0	0	0	1

Отже, $F_{\textcircled{\vee}} = \bar{x}y\bar{z} \vee x\bar{y}\bar{z} \vee x\bar{y}z \vee xy\bar{z} \vee xyz$, що співпадає з точністю до порядку запису доданків із ДДНФ, яку здобуто першим способом.

Аналогічно для побудови ДКНФ розглядаємо всі набори значень атомів, на яких $F = 0$. У нас це набори (000), (001), (011). Вони визначають конституенти нуля, які входять до складу ДКНФ: кожний нуль набору замінюємо атомом, значенням якого є цей нуль, а кожну одиницю – інверсією атома.

Отже, $F_{\textcircled{\wedge}} = (x \vee y \vee z)(x \vee y \vee \bar{z})(x \vee \bar{y} \vee \bar{z})$. (*Порівняйте* з ДКНФ, яку здобуто першим способом).

6. Мінімізувати булеву функцію, тобто знайти її мінімальні ДНФ і КНФ, трьома способами: 1) аналітичним (методом Квайна або методом Блейка); 2) табличним (методом Карно); 3) графічним (за допомогою графів):

$$F = (x \wedge \overline{x \downarrow y} \wedge z) \vee (\overline{y \mid z} \overline{\to} (y \downarrow z)).$$

Розв'язання:

1. *Аналітичний метод*. Із аналітичних методів мінімізації булевих функцій виберемо метод Квайна (див. п. 4.3). Для його реалізації зводимо F до однієї з досконалих форм (частіше беруть ДДНФ, а ми будемо розглядати обидві). ДДНФ і ДКНФ дістанемо за допомогою таблиці істинності (табл. 4.7.4), у яку внесемо додатково стовпець номерів значень

аргументів ν. Як завжди, розставляємо порядок виконання дій, вводимо позначення результатів проміжних операцій і всієї формули:

$$F=(x\underset{\substack{5\\E}}{\wedge}\overline{x\underset{\substack{4\\D}}{\downarrow}y}\underset{\substack{6\\K}}{\wedge}z)\underset{\substack{7\\F}}{\vee}(\overline{y\underset{\substack{1\\A}}{|}z}\underset{\substack{3\\C}}{\overline{\rightarrow}}(y\underset{\substack{2\\B}}{\downarrow}z)).$$

Таблиця 4.7.4

Таблиця істинності логічної формули

				A	B	C	D	E	K	F
ν	x	y	z	$\overline{y\mid z}$	$y\downarrow z$	$A\overline{\rightarrow}B$	$\overline{x\downarrow y}$	$x\wedge D$	$E\wedge z$	$K\vee C$
0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0
1	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0
2	0	1	0	0	0	0	1	0	0	0
3	0	1	1	1	0	1	1	0	0	1
4	1	0	0	0	1	0	1	1	0	0
5	1	0	1	0	0	0	1	1	1	1
6	1	1	0	0	0	0	1	1	0	0
7	1	1	1	1	0	1	1	1	1	1

Аналізуючи останній стовпець таблиці, робимо висновок, що ДДНФ визначається наборами $\nu\big|_{F=1}=3,5,7$, а ДКНФ – $\nu\big|_{F=0}=0,1,2,4,6$. Отже,

$$F_{\textcircled{\vee}}=\underset{3}{\bar{x}\,y\,z}\vee\underset{5}{x\,\bar{y}\,z}\vee\underset{7}{x\,y\,z},$$

$$F_{\textcircled{\wedge}}=\underset{0}{(x\vee y\vee z)}\underset{1}{(x\vee y\vee \bar{z})}\underset{2}{(x\vee \bar{y}\vee z)}\underset{4}{(\bar{x}\vee y\vee z)}\underset{6}{(\bar{x}\vee \bar{y}\vee z)},$$

де під конституентами вказано номери відповідних наборів ν, які будемо вважати і номерами самих конституент.

Здійснимо мінімізацію ДДНФ. За методом Квайна треба провести операції неповного склеювання – це коли до конституент одиниці застосовують закон склеювання і водночас зберігають самі операнди (для можливого подальшого склеювання), тобто залучають формулу: $AB\vee A\overline{B}=AB\vee A\overline{B}\vee A$, де A, B – формули, зокрема аргументи БФ.

У нашому випадку склеюються конституенти 3 і 7 за змінною x: $\bar{x}yz\vee xyz=yz$; конституенти 5 і 7 – за змінною y: $x\bar{y}z\vee xyz=xz$. (Як бачимо, конституента xyz двічі бере участь у склеюваннях).

У результаті неповних склеювань дістанемо:

$$F_{\vee} = \underset{3}{\bar{x}yz} \vee \underset{5}{x\bar{y}z} \vee \underset{7}{xyz} \vee yz \vee xz.$$

Далі проводимо всі можливі поглинання за формулою $A \vee AB = A$:

$$\bar{x}yz \vee yz = yz, \quad xyz \vee yz = yz, \quad x\bar{y}z \vee xz = xz.$$

Видно, що всі конституенти поглинаються: третя і сьома – елементарною кон'юнкцією yz, а п'ята – кон'юнкцією xz. Це означає, що скорочена ДНФ $F_{\vee}$ має вигляд: $F_{\vee} = xz \vee yz$.

Тепер (за методом Квайна) складаємо імплікантну таблицю (табл. 4.7.5), щоб із скороченої ДНФ виділити тупикові, а серед них і мінімальні.

Таблиця 4.7.5

Імплікантна таблиця для мінімізації булевої функції

c^1 / $g_{\wedge}$	$\bar{x}yz$	$x\bar{y}z$	xyz
xz		*	*
yz	*		*

Жодну з імплікант xz, yz вилучити не можна, адже тільки ними двома накриваються всі одиниці значень БФ. Таким чином, існує одна тупикова ДНФ, яка визначає і єдину мінімальну ДНФ: $F_{\vee}^{*} = xz \vee yz$.

Мінімізуємо також ДКНФ:

$$F_{\textcircled{\wedge}} = \underset{0}{(x \vee y \vee z)}\underset{1}{(x \vee y \vee \bar{z})}\underset{2}{(x \vee \bar{y} \vee z)}\underset{4}{(\bar{x} \vee y \vee z)}\underset{6}{(\bar{x} \vee \bar{y} \vee z)},$$

для чого аналогічно до попереднього проведемо неповні склеювання за формулою $(A \vee B)(A \vee \bar{B}) = (A \vee B)(A \vee \bar{B})A$, що дає:

$$(0,1):\ (x \vee y \vee z)(x \vee y \vee \bar{z}) = x \vee y = a;$$
$$(0,2):\ (x \vee y \vee z)(x \vee \bar{y} \vee z) = x \vee z = b;$$
$$(0,4):\ (x \vee y \vee z)(\bar{x} \vee y \vee z) = y \vee z = c;$$
$$(2,6):\ (x \vee \bar{y} \vee z)(\bar{x} \vee \bar{y} \vee z) = \bar{y} \vee z = d;$$
$$(4,6):\ (\bar{x} \vee y \vee z)(\bar{x} \vee \bar{y} \vee z) = \bar{x} \vee z = e.$$

Оскільки всі конституенти нуля, які входять до складу ДКНФ, беруть участь у склеюваннях, то вони всі відповідно поглинатимуться однією із диз'юнкцій a, b, c, d, e (*переконайтеся в цьому*), тому можна записати:

$$F_{\wedge} = \underset{a}{(x \vee y)}\underset{b}{(x \vee z)}\underset{c}{(y \vee z)}\underset{d}{(\bar{y} \vee z)}\underset{e}{(\bar{x} \vee z)}.$$

Ця форма не є скороченою, оскільки в свою чергу, допускає склеювання:

$$(b,e):(x \vee z)(\bar{x} \vee z) = z;$$
$$(c,d):(y \vee z)(\bar{y} \vee z) = z.$$

Таким чином, $F_{\wedge} = abcdez = az = (x \vee y)z$, адже диз'юнкції b, c, d, e поглинаються змінною z, і ми приходимо до скороченої КНФ.

Складаємо імпліцентну таблицю (табл. 4.7.6) з метою виділення тупикових форм.

Таблиця 4.7.6

Імпліцентна таблиця для мінімізації булевої функції

c^0 / $g_{\vee}$	$x \vee y \vee z$	$x \vee y \vee \bar{z}$	$x \vee \bar{y} \vee z$	$\bar{x} \vee y \vee z$	$\bar{x} \vee \bar{y} \vee z$
$x \vee y$	*	*			
z	*		*	*	*

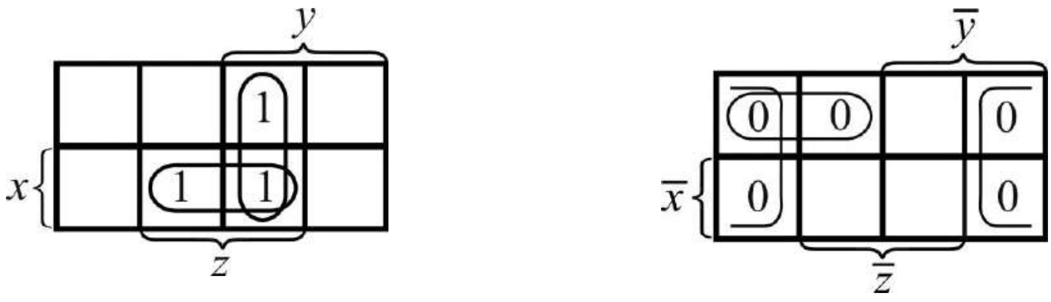
Оскільки всі нулі значень функції накриваються тільки всією множиною імпліцент $\{x \vee y, z\}$, то існує одна тупикова КНФ, а отже, і єдина мінімальна КНФ $F_{\wedge}^{*} = (x \vee y)z$.

2. *Табличний метод.* Для реалізації методу Карно (див. п. 4.3) складаємо однойменні таблиці (карти) для трьох змінних $x_1 = x$, $x_2 = y$, $x_3 = z$, і якщо мінімізується ДДНФ (ДКНФ), то заповнюємо одиницями (нулями) комірки наборів, на яких функція набуває значення 1 (0). Відповідні карти Карно зображені на рис. 4.7.1 а і б, де фігурними дужками позначено смуги, кожна з яких відповідає певній змінній x, y, z або її інверсії.

Заповнення карти одиницями в разі мінімізації ДДНФ заданої БФ:

$$F_{\vee} = \underset{3}{\bar{x}yz} \vee \underset{5}{x\bar{y}z} \vee \underset{7}{xyz},$$

здійснюється так: одиниці заносимо у комірки (рис. 4.7.1а), які стоять на перетині смуг, що відповідають змінним або інверсіям змінних конституент одиниці із $F_{\textcircled{$\vee$}}$ (*простежте!*).



а б

Рис. 4.7.1. **Карти Карно для мінімізації: а) ДДНФ; б) ДКНФ**

Потім проводимо візуальний аналіз карти для встановлення мінімальної кількості правильних конфігурацій найменшого рангу, які накривають усі одиниці значень функції. У нас таких конфігурацій дві: одна з них – "горизонтальний" овал – є результатом перетину смуг, що відповідають змінним x, z; друга – "вертикальний" овал, – результат перетину смуг, що відповідають змінним y, z. Отже, $F_{\vee}^{*} = xz \vee yz$.

Аналогічно заповнюємо нулями карту у разі мінімізації ДКНФ:

$$F_{\textcircled{$\wedge$}} = \underset{0}{(x \vee y \vee z)}\underset{1}{(x \vee y \vee \bar{z})}\underset{2}{(x \vee \bar{y} \vee z)}\underset{4}{(\bar{x} \vee y \vee z)}\underset{6}{(\bar{x} \vee \bar{y} \vee z)},$$

а саме: нулі заносимо до комірок (рис. 4.7.1а), які стоять на перетині смуг, що відповідають змінним або інверсіям змінних конституент нуля із $F_{\textcircled{$\wedge$}}$ (*простежте!*).

Візуальний аналіз дає щонайменше дві правильні конфігурації, які накривають усі нулі значень функції: одна – овал – стоїть на перетині смуг, що відповідають змінним x, y; друга – лівий і правий краї таблиці – охоплює смугу, що відповідає змінній z. Отже, $F_{\wedge}^{*} = (x \vee y) \wedge z$.

Зауважимо, що мінімізацію ДКНФ можна здійснити за допомогою тієї ж карти, що використовували під час мінімізації ДДНФ, тільки в такому разі правильній конфігурації відповідатиме не елементарна кон'юнкція, а елементарна диз'юнкція, водночас змінні x, y, z треба замінити їхніми інверсіями, і навпаки.

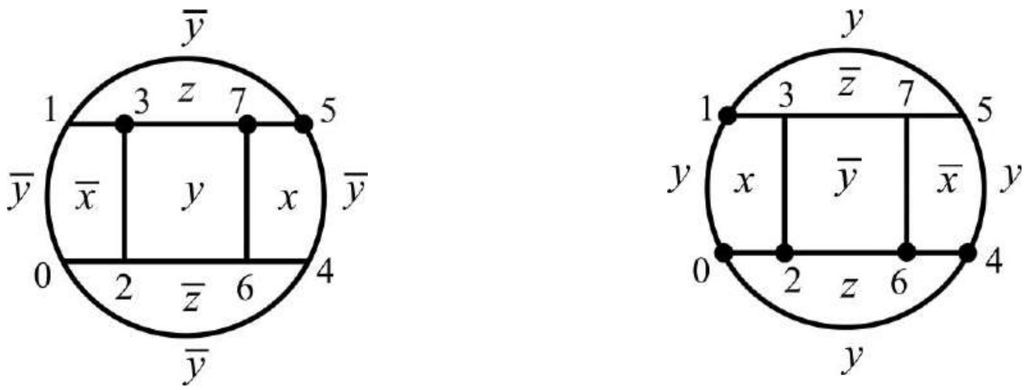
3. *Графічний метод.* Для побудови графа мінімізації нам знову знадобиться нумерація наборів значень аргументів (і, відповідно, конституент одиниці чи нуля), оскільки їй відповідають номери вершин графа. Булеву функцію у вигляді ДДНФ (ДКНФ) задають підграфом із вершинами, номери яких дають набори, що відповідають значенням функції, які дорівнюють 1 (0).

Графи мінімізації заданої функції у вигляді ДДНФ, ДКНФ, а саме:

$$F_{\textcircled{\vee}} = \underset{3}{\bar{x}\,y\,z} \vee \underset{5}{x\,\bar{y}\,z} \vee \underset{7}{x\,y\,z},$$

$$F_{\textcircled{\wedge}} = \underset{0}{(x \vee y \vee z)}\underset{1}{(x \vee y \vee \bar{z})}\underset{2}{(x \vee \bar{y} \vee z)}\underset{4}{(\bar{x} \vee y \vee z)}\underset{6}{(\bar{x} \vee \bar{y} \vee z)},$$

зображені на рис. 4.7.2а, б відповідно.



а б

Рис. 4.7.2. **Графи мінімізації БФ у вигляді: а) ДДНФ; б) ДКНФ**

Візуальний аналіз рис. 4.7.2а показує, що вершини 3, 5, 7 можна накрити щонайменше двома ребрами $(3,7)$ і $(5,7)$, які відповідають кон'юнкціям yz і xz, оскільки вони є межами граней y, z і x, z відповідно. Отже, $F_{\vee}^{*} = yz \vee xz$.

У результаті аналізу рис. 4.7.2б маємо: вершини 0, 2, 6, 4 накриваються гранню z, а вершини 0, 1 – ребром $x \vee y$, і це накриття відповідає мінімальній КНФ: $F_{\wedge}^{*} = z \wedge (x \vee y)$.

7. Проведіть синтез контактної схеми, умови роботи якої задано таблицею значень БФ F на номерах наборів значень змінних ν:

ν	1	2	3	4	5	6	7	8
F	0	1	1	0	1	0	1	0

.

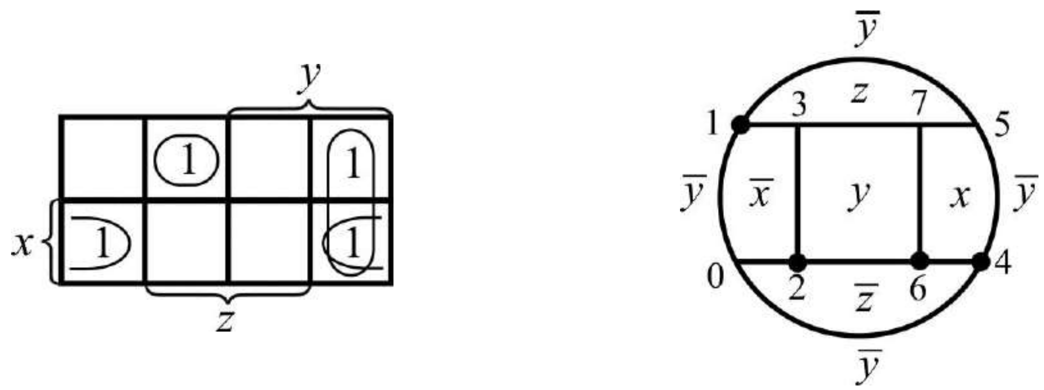
Розв'язання:

Задача синтезу контактної схеми полягає в її побудові за відповідною булевою функцією в мінімальній формі (БФ*), яку складено за відомими умовами роботи (УР) схеми: УР$\rightarrow$БФ*$\rightarrow$КС.

Запишемо ДДНФ і вкажемо відповідні номери конституент одиниці:

$$F_{\textcircled{\vee}} = \underset{1}{\bar{x}\,\bar{y}\,z} \vee \underset{2}{\bar{x}\,y\,\bar{z}} \vee \underset{4}{x\,\bar{y}\,\bar{z}} \vee \underset{6}{x\,y\,\bar{z}}.$$

Мінімізуємо функцію методом Карно і методом графів (рис. 4.7.3б). Аналіз карти Карно (рис. 4.7.3а) показує, що всі одиниці накриваються щонайменше трьома правильними конфігураціями, які визначаються: другою (ізольованою) коміркою, що стоїть на перетині смуг для $\bar{x}$, $\bar{y}$, z; комірками, які є результатом перетину смуг для y і $\bar{z}$; комірками перетину смуг для x і $\bar{z}$ – це крайні нижні клітини лівого і правого країв карти, які також вважають сусідніми. Таким чином, $F_{\vee}^{*} = \bar{x}\bar{y}z \vee y\bar{z} \vee x\bar{z}$.



а б

Рис. 4.7.3. **Мінімізації БФ: а) картою Карно; б) графом**

Як відомо, канонічна мінімальна форма БФ не завжди є абсолютно мінімальною. У нашому випадку кількість букв, які входять до складу $F_{\vee}^{*}$, можна зменшити, якщо у двох останніх доданках винести за дужки $\bar{z}$, проте така форма вже не є ДНФ: $F^{*} = \bar{x}\bar{y}z \vee \bar{z}(x \vee y)$.

Аналіз графа мінімізації (рис. 4.7.3б) дає для $F_{\vee}^{*}$ такий самий результат, як і карта Карно (*зробить його самостійно*).

Контактну схему зобразимо (рис. 4.7.4), спираючись на те, що добутку контактів відповідає послідовне з'єднання ключів; а сумі контактів – паралельне з'єднання ключів; БФ же візьмемо у формі F^{*}. Якби ми взяли БФ у формі $F_{\vee}^{*}$, то КС містила б ще один ключ, що економічно невигідно.

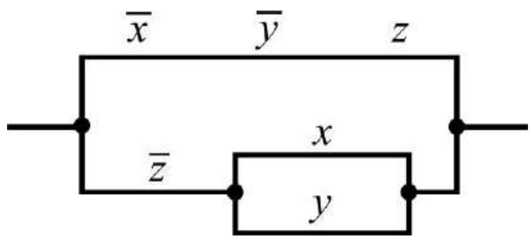


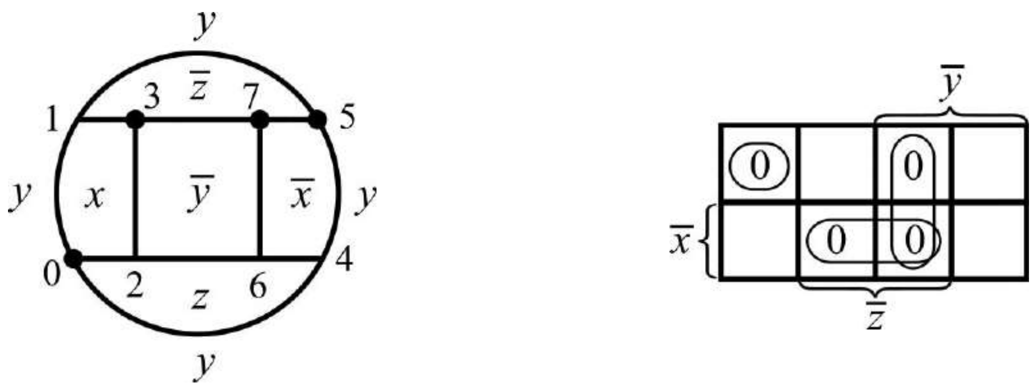
Рис. 4.7.4. **Контактна схема, що відповідає мінімізованій БФ F^***

Умови роботи схеми тепер можна подати так: КС замкнена тоді і тільки тоді, коли замкнені контакти $\bar{x}$, $\bar{y}$, z або коли замкнений контакт $\bar{z}$ і один із контактів x, y.

Побудуємо також КС, відштовхуючись від ДКНФ:

$$F_{\textcircled{\wedge}} = \underset{0}{(x \vee y \vee z)}\underset{1}{(x \vee y \vee \bar{z})}\underset{2}{(x \vee \bar{y} \vee z)}\underset{4}{(\bar{x} \vee y \vee z)}\underset{6}{(\bar{x} \vee \bar{y} \vee z)},$$

мінімізуючи її методом графів (рис. 4.7.5а) і методом Карно (рис. 4.7.5б).



а б

Рис. 4.7.5. **Мінімізація БФ: а) графом; б) картою Карно**

Аналіз графа показує, що серед позначених жирними точками вершин, які відповідають $F_{\textcircled{\wedge}}$, вершина 0 ізольована, вона є спільною точкою граней x, y, z; вершини 3, 7, 5 накриваються двома ребрами $(3,7)$, $(7,5)$, які є межами граней $\bar{y}$, $\bar{z}$ і $\bar{x}$, $\bar{z}$ відповідно.

Отже, мінімальна КНФ має вигляд: $F_{\wedge}^{*} = (x \vee y \vee z)(\bar{y} \vee \bar{z})(\bar{x} \vee \bar{z})$.

Її можна дещо спростити, якщо у двох останніх диз'юнкціях винести за дужки $\bar{z}$, проте така форма вже не є КНФ: $F^{*} = (x \vee y \vee z)(\bar{x}\bar{y} \vee \bar{z})$; відповідну контактну схему зображено на рис. 4.7.6.

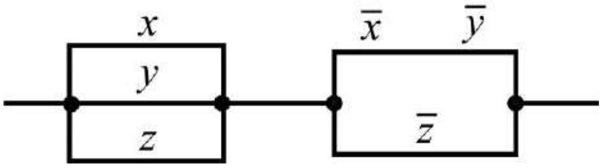


Рис. 4.7.6. **Контактна схема, що відповідає мінімізованій БФ F^***

Ця схема еквівалентна схемі, зображеній на рис. 4.7.6, адже обидві вони відповідають одній і тій самій булевій функції (записаній у різних формах), і умови роботи їх однакові. (*Переконайтеся* в цьому, зіставляючи обидві схеми.)

8. Проведіть аналіз КС, побудованої на основі заданого орієнтованого графа (рис. 4.7.7):

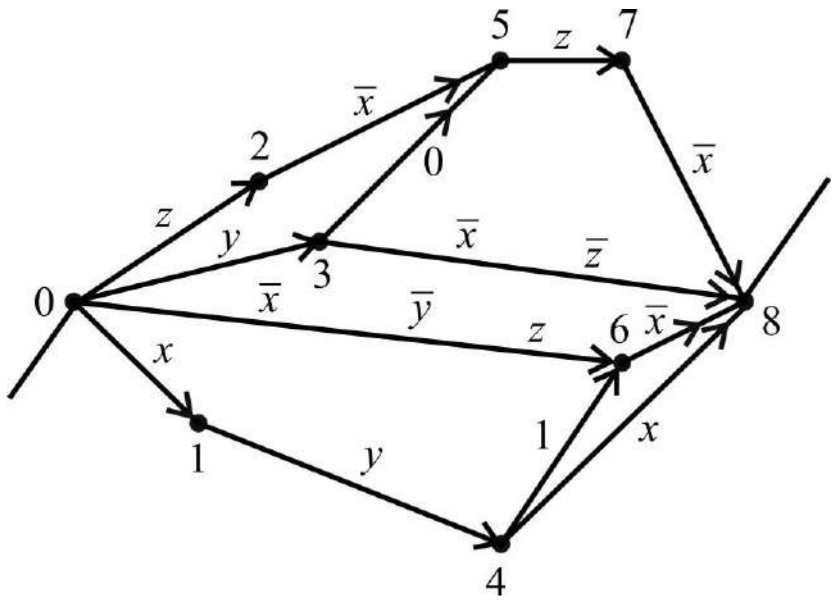


Рис. 4.7.7. **Контактна схема, що підлягає аналізу**

Розв'язання:

Задача аналізу КС полягає у визначенні умов її роботи відповідно до булевої функції, яку складено за заданою КС: КС$\to$БФ*$\to$УР.

За смислом задачі ребра графа – ключі КС, тобто провідники з контактами x, y, z або їх інверсіями $\bar{x}$, $\bar{y}$, $\bar{z}$, а вершини графа – вузли КС, тобто точки, у яких ключі з'єднані між собою. Приймемо, що x_0 (x_8) – вхід (вихід) КС, тобто вузли схеми, які з'єднуються із джерелом струму, і виберемо контакти, як показано на рис. 4.7.7; символ 0 (1) означає постійно розімкнений (постійно замкнений) контакт. Вважатимемо, що струм тече в напрямку від вершини з меншим номером до вершини з більшим номером, на що вказують стрілки.

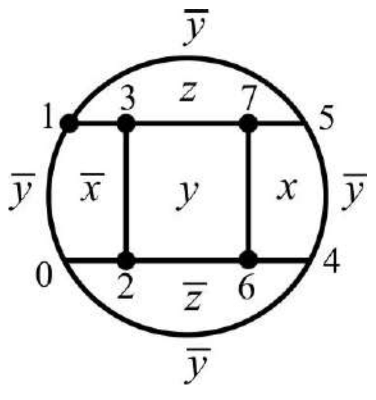
Для проведення аналізу КС перебираємо всі шляхи від x_0 до x_8 і записуємо елементарні кон'юнкції, які відповідають послідовному з'єднанню контактів на кожному шляху:

$$\mu_1 = (0 \to 2 \to 5 \to 7 \to 8) \leftrightarrow z\bar{x}z\bar{x} = \bar{x}z,$$
$$\mu_2 = (0 \to 3 \to 5 \to 7 \to 8) \leftrightarrow y0z\bar{x} = 0,$$
$$\mu_3 = (0 \to 3 \to 8) \leftrightarrow y\bar{x}\bar{z},$$
$$\mu_4 = (0 \to 6 \to 8) \leftrightarrow \bar{x}\bar{y}z\bar{x} = \bar{x}\bar{y}z,$$
$$\mu_5 = (0 \to 1 \to 4 \to 6 \to 8) \leftrightarrow xy1\bar{x} = 0,$$
$$\mu_6 = (0 \to 1 \to 4 \to 8) \leftrightarrow xyx = xy.$$

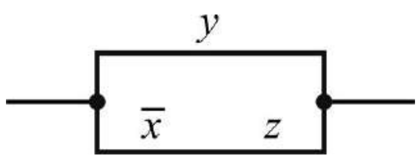
Логічна сума (диз'юнкція) здобутих логічних добутків (кон'юнкцій) контактів дає булеву функцію, що відповідає заданій КС:

$$F_\vee = \bar{x}z \vee 0 \vee \bar{x}y\bar{z} \vee \bar{x}\bar{y}z \vee 0 \vee xy = \left| \begin{array}{c} A \vee 0 = A \\ \bar{x}z \vee \bar{x}\bar{y}z = \bar{x}z \end{array} \right| = \bar{x}z \vee \bar{x}y\bar{z} \vee xy.$$

Для мінімізації $F_\vee$ можна "розширити" її до ДДНФ, хоча це й не обов'язково. Проведемо мінімізацію на графі (рис. 4.7.8а), а поруч зобразимо відповідну КС (рис. 4.7.8б).



а



б

Рис. 4.7.8. **Граф мінімізації $F_\vee$ (а) та мінімальна КС (б)**

Аналіз графа показує, що мінімальна ДНФ має вигляд: $F_\vee^* = y \vee \bar{x}z$ (*простежте!*); отже, мінімальна КС* містить тільки три контакти $\bar{x}$, y, z.

Висновок: задана КС не є оптимальною з технічної та економічної точок зору, і її слід замінити еквівалентною мінімальною КС*.

Умови її роботи такі: схема замкнена тоді і тільки тоді, коли контакт y замкнений або замкнені контакти $\bar{x}$ і z.

Зауваження. Може статися так, що схема не працюватиме за жодних положень контактів, тобто буде постійно розімкненою $(F \equiv 0)$, або працюватиме незалежно від положення контактів, тобто буде постійно замкненою $(F \equiv 1)$.

9. Знайдіть область (множину) істинності предиката:

$$(P(x) \sim \overline{Q}(x)) \to (R(x) \mid \overline{P}(x)),\ x \in \mathbf{R},$$

і дайте її геометричне зображення, якщо:

$$P(x) = (3x + 6 \le 0),\ Q(x) = (2\,|x| - 10 \ge 0),\ R(x) = (|x| - 10 < 0).$$

Розв'язання:

Позначимо предикат через $A(x)$ і здійснимо перехід від операцій $\sim$, $\to$, $\mid$ до головних операцій $\vee$, $\wedge$, $\neg$ згідно зі співвідношеннями:

$$a \mid b = \overline{a \wedge b} = \bar{a} \vee \bar{b},\quad a \to b = \bar{a} \vee b,\quad a \mathbin{\overline{\sim}} b = a \oplus b = (\bar{a} \vee \bar{b})(a \vee b),$$

і законами алгебри логіки:

$$A(x) = \overline{P \sim \overline{Q}} \vee R \mid \overline{P} = (P \oplus \overline{Q}) \vee \overline{R\overline{P}} = ((\overline{P} \vee Q) \wedge (P \vee \overline{Q})) \vee (\overline{R} \vee \overline{\overline{P}}) =$$
$$= (\overline{P} \vee Q)(P \vee \overline{Q}) \vee (P \vee \overline{R}) = (\overline{P} \vee Q \vee P \vee \overline{R})(P \vee \overline{Q} \vee P \vee \overline{R}) = P \vee \overline{Q} \vee \overline{R}.$$

Скористаємося зв'язком між логічними операціями над предикатами (чи висловленнями) і теоретико-множинними операціями. Зокрема, множина істинності диз'юнкції (кон'юнкції) двох предикатів дорівнює об'єднанню (перетину) множин істинності цих предикатів; множина істинності заперечення предиката дорівнює доповненню множини істинності цього предиката:

$$M_{P \vee Q} = M_P \bigcup M_Q,\ M_{P \wedge Q} = M_P \bigcap M_Q,\ M_{\overline{P}} = \overline{M}_P,$$

де $M_P = \{x \mid P(x)\}$, $M_Q = \{x \mid Q(x)\}$ – множини істинності предикатів $P(x)$, $Q(x)$, тобто множини, на яких предикати перетворюються на істинні висловлення.

Отже, можна записати:

$$M_A = M_P \cup M_{\overline{Q}} \cup M_{\overline{R}} = M_P \cup \overline{M}_Q \cup \overline{M}_R .$$

У нашому прикладі:

$$M_P = \{x \mid 3x + 6 \le 0\} = \{x \mid x \le -2\},$$
$$M_Q = \{x \mid 2|x| - 10 \ge 0\} = \{x \mid |x| \ge 5\}, \quad M_{\overline{Q}} = \{x \mid |x| < 5\},$$
$$M_R = \{x \mid |x| - 10 < 0\} = \{x \mid |x| < 10\}, \quad M_{\overline{R}} = \{x \mid |x| \ge 10\}.$$

Зображаємо відповідні множини на числовій прямій (рис. 4.7.9а).

а)

б)

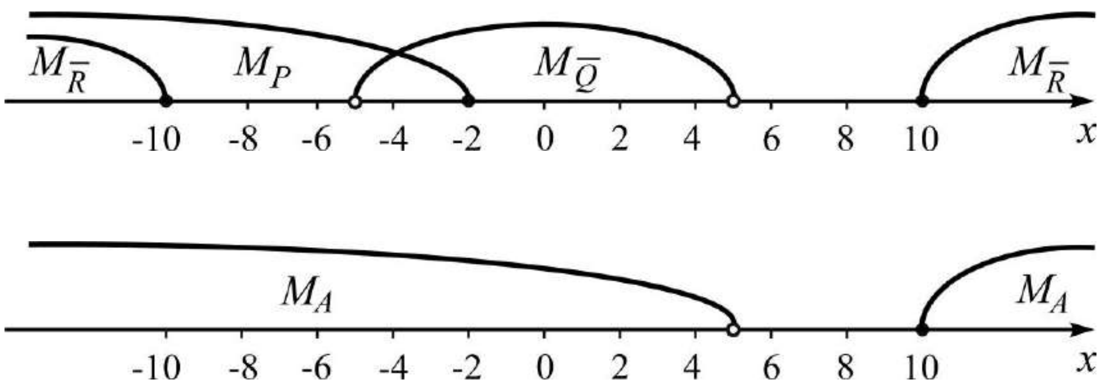


Рис. 4.7.9. **Області істинності:**
а) складових предиката A; б) предиката A

Об'єднання зображених множин (рис. 4.7.9б) дає:

$$M_A = \{x \mid x < 5\} \cup \{x \mid x \ge 10\}, \text{ або } M_A = (-\infty; 5) \cup [10; +\infty).$$

У складніших випадках приходимо до того, що область існування предиката можна подати у вигляді об'єднання перетинів або перетину об'єднань множин істинності його складових частин (операндів).

Задачі та вправи для самостійного розв'язання

10. Зазначте, які з поданих речень є висловленнями, і встановіть їхні логічні значення:

1) "дзвонити тричі!"; 2) "іде дощ!"; 3) "чи можна зайти?";

4) "трикутник, усі сторони якого рівні, називають правильним";

5) $2 + 5 > 4 + \sqrt{8}$; 6) "число 21 має п'ять простих дільників".

11. Нехай $x =$"*студент не має академічних заборгованостей*", $y =$"*студент – відмінник навчання*". Прочитайте словами (сформулюйте словесно) такі висловлення:

1) $x \wedge \neg y$; 2) $\bar{x} \vee \bar{y}$; 3) $\neg(x \to y)$; 4) $y \to x$;

5) $\neg(x \vee y)$; 6) $\bar{x} \sim y$; 7) $(x \to y) \vee (x \to \bar{y})$.

Які з наведених висловлень тотожно істинні чи тотожно хибні?

12. Нехай $x =$"*температура повітря підвищується*", $y =$"*стовпчик ртуті в термометрі підіймається*". Прочитайте словами і спростіть (де можливо) наведені в символах висловлення:

1) $x \to y$; 2) $\bar{x} \to \bar{y}$; 3) $\neg(\bar{x} \to \bar{y})$;

4) $\neg(\bar{x} \wedge \bar{y})$; 5) $\neg(\bar{y} \vee \bar{x})$.

13. Доведіть справедливість заданих рівносильностей за допомогою: таблиць істинності; тотожних перетворень за законами алгебри логіки:

1) $a \vee b \equiv \neg(\bar{a} \wedge b)$;

2) $(a \wedge (a \to b)) \to b \equiv \bar{a} \vee (a \wedge \bar{b}) \vee b$;

3) $(a \wedge b) \vee ((a \vee b) \wedge (\bar{a} \vee \bar{b})) \equiv a \vee b$.

14. Установіть, які з наведених пар формул пов'язані відношенням логічного наслідку:

1) $a \overline{\to} b \wedge (\neg a \to c)$, $\neg b \to c$;

2) $(x \leftrightarrow y) \wedge (y \vee z) \wedge \bar{z}$, $\bar{x}$;

3) $(p \to r) \wedge (q \leftrightarrow s) \wedge (\bar{r} \vee s)$; $p \to q$.

15. Побудуйте таблиці істинності для всіх можливих елементарних диз'юнкцій і кон'юнкцій, складених із: а) двох; б) трьох різних атомів.

16. Доведіть (або спростуйте), що задана логічна формула F є тавтологією: а) аналітичним способом; б) табличним способом:

1) $(x \wedge y) \to z \sim x \to (y \to z)$; 2) $\big(x \wedge y\big) \to z \Leftrightarrow (x \wedge \neg z) \to \bar{y}$;

3) $(a \to b) \to (a \wedge c \to b \wedge c)$; 4) $(x \oplus y) \leftrightarrow (x \downarrow y) | \overline{y \to x}$.

17. Знайдіть диз'юнктивну і кон'юнктивну нормальні форми (ДНФ і КНФ) заданої логічної формули за допомогою: а) тотожних перетворень за законами алгебри логіки; б) формул розкладу за двома атомами:

1) $F = (x \to y) \vee ((\bar{x} \wedge y) \to \bar{z})$; 2) $F = q \to (\bar{p} \wedge (r \sim (p \downarrow r)))$;

3) $F = (\bar{m} \downarrow \bar{n}) \oplus ((\bar{z} \to n) \sim (n | z))$; 4) $F = (\bar{a} | b) \wedge (a \to (\bar{c} \sim b))$.

18. В умовах задачі 17 побудуйте досконалі диз'юнктивну і кон'юнктивну форми (ДДНФ і ДКНФ): а) за допомогою таблиці істинності; б) на основі знайдених ДНФ і КНФ.

19. Доведіть, що будь-яку логічну формулу можна подати логічно еквівалентною їй формулою, побудованою тільки за допомогою однієї з наступних пар операцій:

а) $\neg$, $\to$; б) $\neg$, $\vee$; в) $\neg$, $\wedge$.

20. Мінімізуйте булеву функцію трьома способами: 1) аналітичним (методом Квайна або методом Блейка); 2) табличним (методом Карно); 3) графічним (за допомогою графів).

1) $F = (x \vee y \vee \overline{y \wedge z}) \wedge (y \downarrow z \oplus y \,|\, z)$;

2) $F = (a \,|\, b \to (\bar{c} \to b)) \downarrow (a \wedge c)$;

3) $F = ((\bar{p} \vee q) \sim (p \vee \bar{r})) \to (\bar{q} \to r)$.

21. Проведіть синтез контактної схеми, умови роботи якої задано таблицею значень булевої функції F на номерах наборів значень змінних ν (знайдіть мінімальні ДНФ і КНФ):

1)

ν	0	1	2	3	4	5	6	7
F	1	1	0	0	0	0	1	1

;

2)

ν	0	1	2	3	4	5	6	7
F	0	1	0	1	1	1	0	0

;

3)

ν	0	1	2	3	4	5	6	7
F	1	1	1	1	1	0	0	1

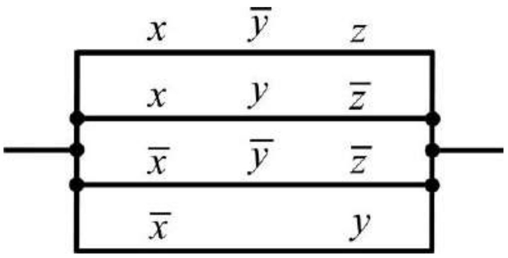
;

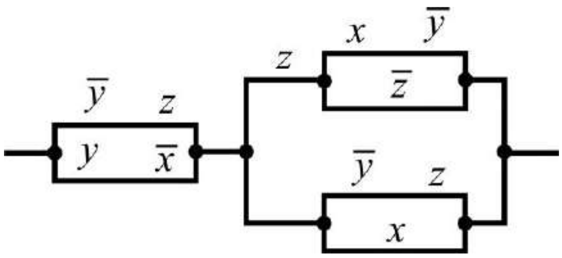
4)

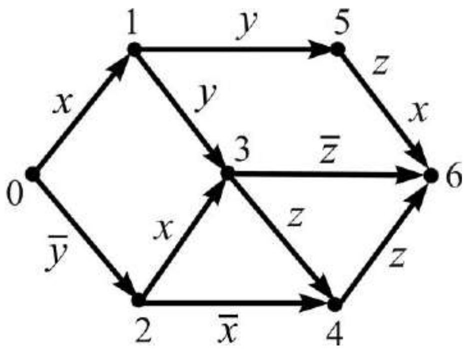
ν	0	1	2	3	4	5	6	7
F	0	1	1	1	0	1	1	0

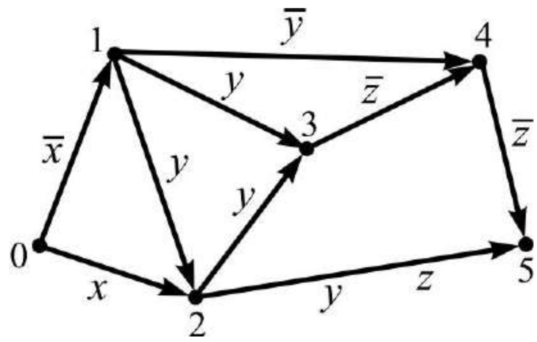
.

22. Проведіть аналіз заданих контактних схем:

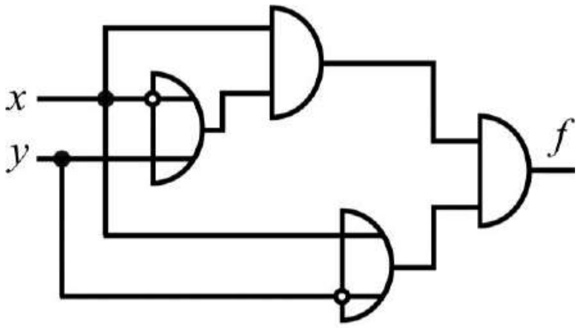
1) 
;

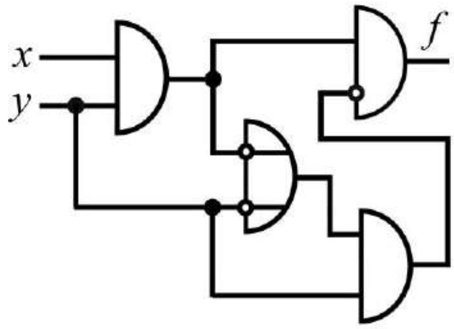
2) 
;

3) 
;

4) 
.

23. Здійсніть аналіз зображених логічних схем:

1) 

2) 

24. Здійсніть синтез ЛС, попередньо подаючи її вихідну функцію $f = f(x, y, z)$ у вигляді ДДНФ або ДКНФ:

1) $f = (\bar{x} \mid y) \oplus (y \to \bar{z})$; 2) $f = \overline{(x \wedge \bar{y})} \oplus (y \to z)$;

3) $f = (x \downarrow \bar{y}) \sim (y \to z)$. 4) $f = \neg((x \wedge \bar{z}) \oplus (x \to y))$.

25. Запишіть мовою предикатів наведені висловлення:

1) *деякі дійсні числа є раціональними*;

2) *жодне просте число не є точним квадратом*;

3) *існують парні числа, які не діляться на 8*;

4) *будь-яке число, кратне 6, ділиться на 3*.

26. Нехай S – множина студентів академічної групи, на якій визначені одномісні предикати: $P(x) = ($x *добре навчається*), $Q(x) = ($x *займається спортом*), $R(x) = ($x – *член студкому*). Прочитайте словами предикати, утворені із заданих предикатів за допомогою логічних операцій:

1) $P(x) \vee Q(x)$; 2) $P(x) \wedge Q(x)$; 3) $Q(x) \sim R(x)$;

4) $\overline{P(x)} Q(x) \to R(x)$; 5) $\overline{R(x)} \sim Q(x) \vee R(x)$.

27. Нехай $P(x) = (x$ – *просте число*), $Q(x) = (x$ – *парне число*), $R(x) = (x$ – *ціле число*), $D(x, y) = (x$ ділить $y)$, $(x, y) \in \mathbf{N}^2$. Сформулюйте словами наступні висловлення, записані мовою предикатів. Зазначте, які з них істинні і які хибні:

1) $\forall x P(x) \to \neg Q(x)$; 2) $\forall x \exists y (R(x) \wedge R(y) \to D(x, y))$;

3) $\forall y \exists x (R(x) \wedge R(y) \to D(x, y))$; 4) $\exists x \forall y (R(x) \wedge R(y) \to D(x, y))$.

28. Виведіть формули, які виражають квантор існування через квантор загальності, і навпаки:

$\exists x P(x) \equiv \neg(\forall x \neg P(x))$; $\forall x P(x) \equiv \neg(\exists x \neg P(x))$.

29. З'ясуйте, чи мають місце зазначені рівносильності для будь-яких предикатів $Q(x)$, $R(x)$, за умови $D(Q)=D(R)=D$. Якщо "ні", то наведіть приклади предикатів, які підтверджують це:

а) $\forall x \forall y (R(x) \vee Q(y)) \equiv \forall x R(x) \vee \forall x Q(x)$;

б) $\forall x Q(x) \to \exists x R(x) \equiv \exists x (Q(x) \to R(x))$;

в) $\exists x R(x) \vee \forall x Q(x) \equiv \exists x (R(x) \to Q(x))$;

г) $\forall x\ (R(x) \to Q(x)) \equiv \forall x R(x) \to \forall x Q(x)$.

Запитання для самодіагностики засвоєння матеріалу теми 4

Відповіді на всі запитання сформулюйте словесно, запишіть у символьній формі, обґрунтуйте (на підставі означень, теорем, правил, формул тощо), наведіть відповідні конкретні приклади.

1. Що в математичній логіці розуміють під висловленням (простим, складним, тотожно хибним, тотожно істинним), його областю істинності?

2. Які операції називають логічними? Які основні логічні операції ви знаєте? (Дайте означення кожної операції, побудуйте її ТІ.)

3. Які співвідношення називають формулами переходу від основних ЛО до головних?

4. Що розуміють під алгеброю висловлень, ізоморфними алгебрами, булевими алгебрами?

5. Які основні закони алгебри логіки ви знаєте? (Дайте назву кожного закону, наведіть його символьний запис та доведіть за допомогою ТІ).

6. Які формули називають логічними (ЛФ)? На які класи еквівалентності поділяють множину всіх ЛФ?

7. Що розуміють під задачею (проблемою) розв'язності? Які існують способи її розв'язання?

8. Які символи в алгебрі формальної логіки називають двоїстими та в чому полягає принцип двоїстості?

9. Що називають диз'юнктивною та кон'юнктивною нормальними формами (ДНФ, КНФ) ЛФ?

10. У чому полягає зведення заданої ЛФ до ДНФ, КНФ за допомогою тотожних перетворень за законами алгебри логіки?

11. Як формулюють правила переходу від ДНФ до КНФ і навпаки?

12. Що називають досконалими диз'юнктивною та кон'юнктивною нормальними формами (ДДНФ, ДКНФ) заданої ЛФ?

13. У чому полягає зведення заданої ЛФ до ДДНФ і ДКНФ на основі відомих ДНФ і КНФ?

14. Як здійснюють побудову ДДНФ і ДКНФ заданої ЛФ за допомогою таблиці істинності?

15. Які функції називають булевими (БФ)?

16. Що розуміють під областю існування й областю значень БФ?

17. Які існують способи задання БФ? Чи можливо здійснити перехід від однієї форми задання БФ до іншої?

18. У чому полягає задача мінімізації БФ: а) канонічна; б) у загальному смислі?

19. Що називають: а) імплікантою та імпліцентою БФ; б) простою імплікантою та імпліцентою?

20. Які форми БФ називають: а) скороченою ДНФ (КНФ); б) тупиковою ДНФ (КНФ)?

21. Яке перетворення ЛФ називають операцією: а) неповного склеювання; б) узагальненого склеювання?

22. Які існують методи мінімізації БФ?

23. Які перетворення БФ є основою її мінімізації методом Квайна?

24. Що таке карти (таблиці) Карно? Який вигляд мають правильні конфігурації карти Карно для БФ n змінних ($n = 2, 3, 4$)?

25. У чому полягає метод Карно (табличний метод) мінімізації БФ?

26. У чому полягає графічний метод мінімізації БФ?

27. Що розуміють під контактами? Які існують різновиди контактів?

28. Що називають контактною схемою (КС)? Наведіть приклади КС.

29. Що розуміють під операціями над контактами?

30. Яку алгебру називають алгеброю контактів?

31. У чому полягає задача аналізу КС?

32. Який алгоритм розв'язання задачі аналізу КС? Наведіть ілюстративний приклад.

33. У чому полягає задача синтезу КС?

34. Який алгоритм розв'язання задачі синтезу КС? Наведіть ілюстративний приклад.

35. Які пристрої називають логічними елементами?

36. Що називають логічною схемою (ЛС)? Наведіть приклади ЛС.

37. Що розуміють під логічними елементами?

38. Які змінні називають: а) вхідними; б) вихідними; в) внутрішніми?

39. Які умови має задовольняти коректно побудована ЛС?

40. У чому полягає задача аналізу ЛС?

41. У чому полягає алгоритм розв'язання задачі аналізу ЛС? Наведіть ілюстративний приклад.

42. У чому полягає задача синтезу ЛС?

43. Який алгоритм розв'язання задачі синтезу ЛС? Наведіть ілюстративний приклад.

44. Якою загальною назвою об'єднують контактні й логічні схеми?

45. Що називають предикатом, його областю визначення та областю існування?

46. Що розуміють під предметними змінними, предметними сталими, предметним значенням, логічним значенням предиката?

47. Що називають областю істинності та хибності предиката? Наведіть приклад їх знаходження.

48. Як із n-предиката дістають предикат на $(n-k)$ місць, де $k \leq n$? Опишіть та покажіть на прикладі.

49. Що таке нульмісний предикат? Як співвідносяться між собою нульмісний предикат і предметне значення n-предиката? Поясніть на конкретному прикладі.

50. За яких умов предикат вважають заданим?

51. Які існують способи задання предикатів? Опишіть та наведіть приклади задання предикатів різними способами.

52. Які операції над предикатами називають головними?

53. Як класифікують предикати залежно від області їхньої істинності? Наведіть ілюстративні приклади.

54. Що розуміють під квантором загальності? Які властивості він має? Наведіть приклади застосування.

54. Що розуміють під квантором існування? Які властивості він має? Наведіть приклади застосування.

55. Сумісне застосування кванторів існування та загальності: властивості, ілюстративні приклади.

Рекомендована література до теми 4: [3; 5; 6; 9; 12; 13; 16; 21].

Тема 5. Елементи теорії скінченних автоматів

Створення Єдиної державної мережі
обчислювальних центрів дозволяє
збирати й оптимальним чином використовувати
економічну, науково-технічну і будь-яку іншу
інформацію, що дуже важливо в наш час
переходу до інформаційного суспільства.
В. М. Глушков

Мета: донести до майбутніх фахівців значущість теорії скінченних автоматів як основи для створення інформаційних систем в економіці, навчити вмінню застосовувати її під час розв'язання практичних задач.

Компетентності, які набуває студент після вивчення теми:

знання: формування системи знань щодо використання математичного апарату теорії скінченних автоматів у професійній діяльності, а саме: аналізу, композиції та декомпозиції інформаційних комплексів і процесів та їх застосування до створення інформаційних систем;

уміння: здатність виконувати аналіз, синтез та мінімізацію скінченних автоматів для математичного забезпечення моделей інформаційних систем;

комунікації: презентація результатів аналізу інформаційних систем з метою передавання інформації;

автономність і відповідальність: здатність самостійно використовувати ідеї та методи логічного аналізу для розв'язання задач проєктування інформаційних систем за критеріями мінімізації обчислювальних витрат, стійкості, складності, а також відповідати за результати своєї діяльності.

Основні питання теми:

5.1. Скінченні автомати: основні означення, класифікація.

5.2. Аналіз, синтез і мінімізація скінченних автоматів.

Ключові слова: автомат (скінченний), алфавіт (вхідний, вихідний, станів), аналіз, граф, закон функціонування, інтервал дискретності, канал, керована система, мінімізація, об'єкт, оператор, процес, сигнал, синтез, способи задання, стан, такт, функція (виходів, переходів).

5.1. Скінченні автомати: основні означення, класифікація

Скінченні автомати: основні означення, класифікація

Кібернетика – наука про керування, зв'язок і передавання інформації (буквально "мистецтво керування кермом").

Фундаментальним поняттям кібернетики є поняття **системи** як сукупності (множини) взаємопов'язаних об'єктів (елементів), які діють один на одного. Кібернетика не звертає уваги на фізичний зміст властивостей об'єктів та зв'язки між ними і розглядає реальну систему як абстрактну множину елементів. Такий підхід дозволяє відмовитись від звичного поділу систем на механічні, електричні, хімічні, соціальні, біологічні, інформаційні тощо.

В основу математичного опису кібернетичних систем покладено теорію множин і математичну логіку. Кожній системі можна поставити у відповідність певний набір числових характеристик (параметрів, показників). Якщо відбулася зміна характеристик системи (хоча б однієї), то кажуть, що система перейшла в інший **стан**. Послідовну зміну станів системи називають **процесом** (функціонування).

Системи, що зустрічаються на практиці, залежно від їхньої структури (будови) і характеру зв'язків поділяють на детерміновані і стохастичні. **Детермінованою** називають систему, закони функціонування якої точно відомі й поведінку якої в майбутньому можна передбачити (годинниковий механізм, світлофор, технологічна лінія на виробництві та ін.). Для **стохастичної** системи не можна точно передбачити її майбутньої поведінки. Саме до таких систем належить більшість виробничих систем, економічні, соціальні та біологічні системи. Для математичного опису таких систем, окрім теорії множин і математичної логіки, широко застосовують апарат теорії ймовірностей і методи математичної статистики.

Поряд із поняттям "система" ще одним фундаментальним поняттям кібернетики є поняття "керування". У широкому сенсі під **керуванням** розуміють організаційну діяльність, спрямовану на зміну стану системи для досягнення певних цілей. Керування (так само, як і стан) описують набором деяких параметрів. Кібернетика ставить своїм завданням полегшення людині процесу схвалення відповідальних рішень, покладаючи на систему збирання та оброблення великої кількості інформації щодо стану того чи іншого процесу (наприклад, виробничого), аналіз ситуації, що склалася, і формування рекомендацій щодо доцільних дій.

Будь-яку відомість про те, що відбувається в тій чи іншій системі або поза нею, називають **повідомленням**. Зв'язки між елементами системи, за допомогою яких передають повідомлення, називають **каналами**, або **лініями**, **зв'язку**. Фізичні носії інформації в каналах зв'язку називають сигналами. Слово "сигнал" (від лат. *signum* – знак) означає умовні механічні, звукові, зорові, електричні чи іншої природи знаки, які використовують для передавання повідомлень.

Керована система, тобто система, яка допускає керування нею, складається з двох частин: керованої частини, яку називають **об'єктом керування**, і керівної частини, яку називають **керівним пристроєм**, або **оператором**. Функції оператора може виконувати або людина, або механічний чи електронний пристрій (наприклад, ЕОМ). В об'єкті керування відбувається процес перероблення керівної інформації, який виявляється у зміні стану об'єкта керування; повідомлення про ці зміни передають оператору так званими **каналами зворотного зв'язку**.

Зауважимо, що керівні пристрої здебільшого, у свою чергу, є системами, тому їх називають **керівними системами**.

У техніці зазвичай із поняттям *автомата* як керівної системи пов'язують деякий пристрій, здатний виконувати певні функції без втручання людини або з її обмеженою участю. Проте таке розуміння надто вузьке. У широкому розумінні **автомат** – це математична модель, яка відображає фізичні або інші явища найрізноманітнішої природи. Тлумачення автомата як математичної моделі дозволяє розглядати з єдиної точки зору різні за природою об'єкти, встановлювати зв'язки й аналогії між ними, переносити результати з однієї області застосування в іншу.

Найпростішими прикладами автоматів є розглянуті в темі 4 контактні та логічні схеми, які називають **комбінаційними схемами**. Термін "комбінаційні" пояснюється тим, що значення вихідних змінних визначають тільки деякою комбінацією (сполученням) значень вхідних змінних (вхідних сигналів) у заданий момент часу. У більш загальному випадку вихідні змінні (вихідні сигнали) можуть залежати від значень вхідних змінних не тільки в певний момент, але і від їхніх попередніх значень, тобто визначатися деякою послідовністю значень вхідних змінних. Контактні й логічні схеми, значення вихідних змінних яких визначаються послідовністю значень вхідних змінних, називають **послідовнісними**.

Якщо вхідні та вихідні сигнали набувають значень зі скінченних множин символів – так званих *скінченних алфавітів*, – то обидва типи схем об'єднують назвою **скінченні автомати**. На особливу увагу заслуговують скінченні автомати, пов'язані з булевим (двійковим) алфавітом $B = \{0,1\}$, залежності між вхідними і вихідними змінними яких виражаються булевими функціями. Їхнє застосовне значення обумовлене тим, що будь-яка інформація може бути подана у двійкових кодах і в разі технічної реалізації автоматів використовують переважно двійкові елементи та двозначну логіку.

На відміну від комбінаційних схем, у яких проміжні змінні безпосередньо не беруть участі у співвідношенні вхід-вихід, вихідні функції скінченних автоматів серед своїх аргументів, окрім вхідних змінних, обов'язково містять певну сукупність проміжних змінних $s = (s_1, s_2, \ldots, s_k)$, які характеризують стан автомата.

Стосовно переходу автомата з одного стану в інший виходять із *припущення*, яке добре узгоджується з дійсністю: після переходу автомата в довільний стан перехід у наступний стан виявляється можливим не раніше, ніж через деякий фіксований для цього автомата проміжок часу $\Delta t > 0$, – так званий **інтервал дискретності автомата**.

Моменти часу t_0, t_1, …, t_ν, …, у які відбувається перехід автомата із одного стану в інший, називають **тактами**. Позначати такти зручно їхніми номерами $\nu = 0, 1, 2, \ldots$, оскільки це дає можливість вхідні, вихідні та проміжні змінні (або змінні станів, або просто стани) розглядати як функції не від фізичного часу, а від номера такту ν – так званого *автоматного часу*: $x_i = x_i(\nu)$, $i = \overline{1,n}$; $y_j = y_j(\nu)$, $j = \overline{1,m}$; $s_l = s_l(\nu)$, $l = \overline{1,k}$.

З урахуванням зазначеного, значення сукупності вихідних змінних у (на) ν-му такті $y(\nu) = (y_1(\nu),\ y_2(\nu),\ \ldots,\ y_m(\nu))$ визначають (і до того ж однозначно) значеннями вхідних змінних $x(\nu) = (x_1(\nu), x_2(\nu),\ \ldots, x_n(\nu))$ і станом автомата $s(\nu) = (s_1(\nu), s_2(\nu),\ \ldots, s_k(\nu))$ на тому ж такті. Стан $s(\nu + 1)$ на наступному $(\nu + 1)$-му такті однозначно визначають вхідними змінними $x(\nu)$ і станом $s(\nu)$ на попередньому такті.

Зрозуміло, що скінченні автомати мають зберігати попередній стан до наступного такту, у зв'язку із чим їх називають також **автоматами з пам'яттю**. Відповідні елементи, які забезпечують збереження стану системи доти, поки він не зміниться внаслідок діяння на їхні входи, називають **елементами пам'яті**.

Функцію, яка визначає стан системи на наступному такті залежно від значень вхідних змінних і стану на попередньому такті, називають **функцією переходів**:

$$s(\nu+1)=\delta(x(\nu),s(\nu)),\quad \nu=0,1,2,.... \tag{5.1.1}$$

Функцію, яка визначає значення вихідних змінних на ν-му такті залежно від значень вхідних змінних і стану системи на тому ж такті, називають **функцією виходів**:

$$y(\nu)=\lambda(x(\nu),s(\nu)),\ \nu=0,1,2,.... \tag{5.1.2}$$

Функції переходів і виходів називають ще **характеристичними функціями** автомата, і кажуть, що вони визначають **закон функціонування** автомата.

Тепер дамо формалізоване означення (абстрактного) скінченного автомата, який є одним із найважливіших видів керівних систем.

Нехай X_i, $i=\overline{1,n}$; Y_j, $j=\overline{1,m}$; S_l, $l=\overline{1,k}$, – скінченні алфавіти (з потужностями $|X_i|=p_i$, $|Y_j|=q_j$, $|S_l|=r_l$) відповідно вхідних, вихідних змінних і змінних стану.

Прямі (декартові) добутки $X=X_1\times X_2\times...\times X_n$, $Y=Y_1\times Y_2\times...\times Y_m$, $S=S_1\times S_2\times...\times S_k$ з потужностями:

$$|X|=\prod_{i=1}^{n}p_i=p,\ |Y|=\prod_{j=1}^{m}q_j=q,\ |S|=\prod_{i=1}^{n}r_l=r,$$

визначають відповідно так звані **вхідний**, **вихідний алфавіти** і **алфавіт станів** автомата: $X=\{\xi_1,\xi_2,...,\xi_p\}$, $Y=\{\nu_1,\nu_2,...,\nu_q\}$, $S=\{\sigma_1,\sigma_2,...,\sigma_r\}$.

Отже, символами вхідного алфавіту є кортежі – *слова* – $x=(x_1,x_2,...,x_n)$ довжини n, символами вихідного алфавіту – слова $y=(y_1,y_2,...,y_m)$ довжини m, а множину станів описують словами $s=(s_1,s_2,...,s_k)$ довжини k, де $x_i\in X_i$, $y_j\in Y_j$, $s_l\in S_l$, і на кожному такті ν матимемо: $x(\nu)\in X$, $y(\nu)\in Y$, $s(\nu)\in S$.

Скінченним автоматом (**СА**) $\boldsymbol{A}$ називають керівну систему зі скінченним вхідним алфавітом X, скінченним вихідним алфавітом Y, скінченною множиною станів S і двома характеристичними функціями $\delta(x,s)$, $\lambda(x,s)$, які визначають закон її функціонування. Позначають скінченний автомат упорядкованою п'ятіркою $A=(X,Y,S,\delta,\lambda)$.

Якщо бажають підкреслити потужності множин X, Y, S, на яких визначено автомат, то його називають **(p,q,r)-автоматом**. У випадку використання двійкового алфавіту: $X_i=Y_j=S_l=B=\{0,1\}$, $i=\overline{1,n}$, $j=\overline{1,m}$, $l=\overline{1,k}$, маємо $p=2^n$, $q=2^m$, $r=2^k$.

Характеристичні функції (5.1.1) і (5.1.2) є відображеннями множини $X\times S$ або її підмножини $D\subset X\times S$ відповідно на множини S і Y, залежно від чого і класифікують автомати:

якщо δ: $X\times S\xrightarrow{\text{на}}S$ і λ: $X\times S\xrightarrow{\text{на}}Y$, то автомат називають **повним**;

якщо тільки δ: $X\times S\xrightarrow{\text{на}}S$, то автомат називають **повним за переходами**;

якщо функції δ і λ визначені не для всіх наборів із множини $X\times S$, то автомат називають **неповним** або **частково визначеним**.

У випадку, коли λ: $S\xrightarrow{\text{на}}Y$, або $y=\lambda(s)$, тобто вихідні змінні є функціями тільки стану, відповідні автомати називають **автоматами другого роду** (**автоматами Мура**), а наведене означення пов'язують з **автоматами першого роду** (**автоматами Мілі**). Між автоматами цих двох типів існує взаємний зв'язок, і кожен із них може бути перетворений на інший. Для комбінаційних схем функція переходів не має сенсу, а функція виходів вироджується до вигляду $y=\lambda(x)$, тому їх називають ще **автоматами без пам'яті**, або **тривіальними автоматами**.

Приклад. Нехай $A=(X,Y,S,\delta,\lambda)$ визначається множинами $X=Y=S=B=\{0,1\}$ (тобто вхідні, вихідні змінні і стан автомата описують елементами 0, 1 булевого алфавіту) і функціями переходів і виходів:

$$s'=s(\nu+1)=\delta(x(\nu),s(\nu))=x(\nu)\sim s(\nu)=xs\vee\bar{x}\bar{s},$$

$$y=y(\nu)=\lambda(x(\nu),s(\nu))=\overline{xs}=\bar{x}\vee\bar{s};\quad x=x(\nu),\quad s=s(\nu).$$

Відповідну послідовнісну схему зображено на рис. 5.1.1 за допомогою знайомих логічних елементів (див. тему 4) і елемента пам'яті D (від англ. *delay* – затримка), який забезпечує збереження стану s' до наступного

$(\nu+1)$-го такту. У табл. 5.1.1 наведено значення істинності функцій δ, λ для всіх можливих наборів значень x, s.

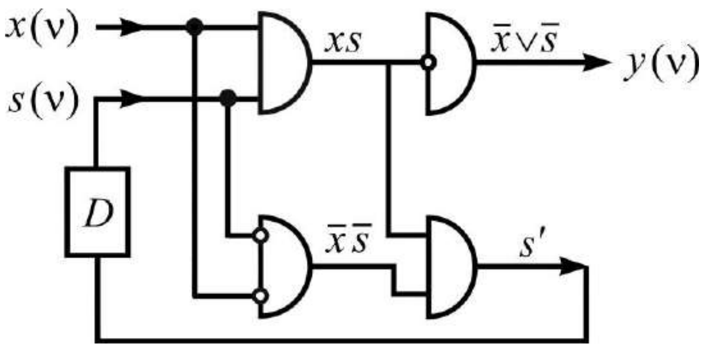


Рис. 5.1.1. **Послідовнісна схема з елементом пам'яті**

Таблиця 5.1.1

Таблиця значень функцій δ, λ

x	s	δ	λ
0	0	1	1
0	1	0	1
1	0	0	1
1	1	1	0

Вона дає можливість легко простежити функціонування автомата за заданою послідовністю вхідних сигналів, для чого складають відповідні послідовності (кортежі) станів автомата і значень вихідної змінної.

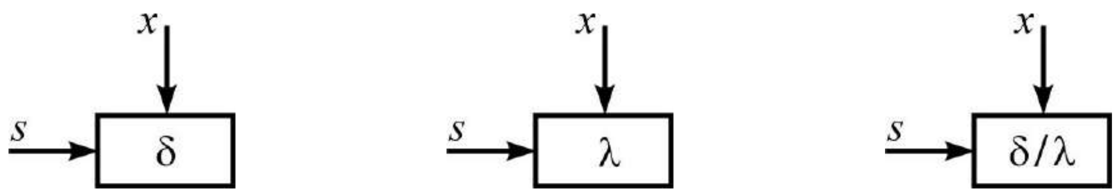
Візьмемо для розгляду перші десять тактів $(\nu=\overline{0,9})$ із такою послідовністю вхідної змінної: $\{x(\nu)\}=0,1,0,0,1,0,0,0,1,0$, і нехай на нульовому такті система перебувала у стані 0 (так званий *початковий стан*). Тоді послідовності для $s(\nu)$, $y(\nu)$ матимуть вигляд (*простежте!*): $\{s(\nu)\}=0,1,1,0,1,1,0,1,0,0$, $\{y(\nu)\}=1,0,1,1,0,1,1,1,1,1$.

Процес функціонування автомата можна простежити і відштовхуючись від зображеної схеми.

Способи задання скінченних автоматів

Аналітичний спосіб – це явне задання функцій переходів і виходів, тобто задають аналітичні (у вигляді формул) залежності результату від значень аргументів – стану і вхідного символу (див. наведений *приклад*). Цей спосіб є найбільш містким, але застосовний для вузького класу спеціальних автоматів, коли відповідний опис залежностей компактний і функції можна швидко обчислити.

Табличний спосіб – це коли функції переходів і виходів зображають так званими **таблицями переходів і виходів**, які мають два входи: для $x=x(\nu)$ і $s=s(\nu)$, і рядки таблиць позначені номерами станів $\overline{0,r-1}$, а стовпці – номерами входів $\overline{0,p-1}$. Перша відповідає функції δ, її комірки заповнюють номерами станів $s' = s(\nu+1)$, у які переходить автомат під впливом сигналу $x(\nu)$ і стану $s(\nu)$ в даний тактовий момент. Друга таблиця відповідає функції λ, її комірки заповнюють номерами $\overline{0, q-1}$ виходів $y(\nu)$ в даний тактовий момент, які відповідають сигналу $x(\nu)$ і стану $s(\nu)$ в той самий момент. Схематично це зображено на рис. 5.1.2(а і б). Обидві таблиці також можна об'єднати у **спільну таблицю переходів і виходів**, якщо домовитись записувати у клітинах пари чисел: номер наступного стану в чисельнику, а номер виходу – у знаменнику (рис. 5.1.2в).



а б в

Рис. 5.1.2. **Комірки: а) таблиці переходів; б) таблиці виходів; в) спільної таблиці переходів і виходів**

Розглянутий у прикладі $(2, 2, 2)$-автомат описують таблицями, які зображено на рис. 5.1.3.

$s' = \delta(x(\nu), s(\nu))$

$s(\nu)$ \ $x(\nu)$	0	1
0	1	0
1	0	1

а

$y = \lambda(x(\nu), s(\nu))$

$s(\nu)$ \ $x(\nu)$	0	1
0	1	1
1	1	0

б

δ/λ

$s(\nu)$ \ $x(\nu)$	0	1
0	1/1	0/1
1	0/1	1/0

в

Рис. 5.1.3. **Задання автомата таблицею: а) переходів; б) виходів; в) переходів і виходів**

Графічний спосіб полягає у зображенні автомата орієнтованим графом – **графом автомата**, вершини якого взаємно однозначно відповідають станам автомата, а дуги вказують на всі можливі переходи із одного стану в інший і позначаються парами x/y, де перший символ вказує на те, під дією якого вхідного сигналу $x(\nu)$ здійснюється перехід із одного стану в інший, а другий – на те, який відповідний вихідний сигнал $y(\nu)$. Щоб уникнути строго паралельних дуг (однаково напрямлених відносно заданої вершини), коли перехід із одного стану в інший відбувається під дією різних сигналів, відповідні пари x/y з'єднують знаком диз'юнкції $\vee$.

Наприклад, запис $3/0 \vee 2/1$ показує, що перехід із якогось стану в інший здійснюється під впливом третього або другого вхідних сигналів, і їм відповідають вихідні сигнали за номерами 0 і 1.

Петлями зображують переходи, за яких стан автомата не змінюється. На рис. 5.1.4 показано граф, побудований відповідно до наведеної спільної таблиці переходів і виходів (див. рис. 5.1.3в).

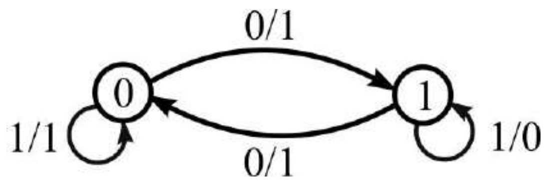


Рис. 5.1.4. **Граф СА**

Граф автомата називають ще **діаграмою переходів** і **виходів автомата**.

Матричний спосіб – це коли автомат описують квадратною матрицею M – **матрицею переходів** – r-го порядку (r – кількість станів), на перетині i-го рядка і j-го стовпця якої стоїть диз'юнкція пар x/y ("вхід/вихід"), яку приписують дузі графа, що виходить із вершини i і заходить у вершину j. За відсутності такої дуги ставлять нуль або залишають місце вільним.

Отже, матриця переходів автомата є аналогом матриці суміжності графа: суміжним вершинам графа автомата ставлять у відповідність диз'юнкцію пар "вхід/вихід".

Так, для розглядуваного *прикладу* маємо:

$$M = \begin{array}{c} \\ 0 \\ 1 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cc} 0 & \quad 1 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1/1 & 0/1 \\ 0/1 & 1/0 \end{bmatrix} \end{array}.$$

Випадково матриця переходів співпала зі спільною таблицею переходів і виходів, оскільки в першій беруть пари x/y, а в другій – пари $\delta/\lambda = s'/y$.

5.2. Аналіз, синтез і мінімізація скінченних автоматів

Задача аналізу скінченних автоматів

Скінченні автомати стали передвісником автоматизованих систем управління (АСУ), або автоматизованих систем керування (АСК) – систем, що ґрунтуються на комплексному використанні технічних, математичних, інформаційних та організаційних засобів для управління складними технічними й економічними об'єктами. **АСК** – це сукупність керованого об'єкта й автоматичних вимірювальних та керівних пристроїв, у якій частину функцій виконує людина. Піонером у створенні АСК є академік національної академії наук В. М. Глушков (1923 – 1982) – перший директор Інституту кібернетики АН УРСР.

Нехай $A=\left(X, Y, S, \delta, \lambda\right)$ – скінченний автомат, описаний одним із розглянутих способів задання.

Задача аналізу СА полягає у побудові алгоритму (скінченного набору правил), який дозволяв би для заданого автомата A і заданої послідовності вихідних сигналів $\{y(\nu)\}$ знаходити послідовність вхідних сигналів $\{x(\nu)\}$, у разі збудження якими у тактові моменти часу автомат видає $\{y(\nu)\}$ або індукує $\{y(\nu)\}$ (від лат. *inductio* – наводити, спонукати). Задачу можна розглядати як своєрідне відображення пар "автомат, множина вихідних сигналів" на множини відповідних вхідних сигналів: тобто:

$$\text{аналіз СА } A\text{: } (A, \{y(\nu)\}) \to \{x(\nu) \mid y(\nu) = f(x(\nu))\},$$

де f – закон відповідності між вхідними і вихідними змінними в тактові моменти часу $\nu = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ N,\ \ldots$.

Розв'язання задачі знаходження послідовності вхідних змінних $\{x(\nu)\} = \alpha_0, \alpha_1, ..., \alpha_N$ для деякої скінченної фіксованої послідовності вихідних змінних $\{y(\nu)\} = \beta_0, \beta_1, ..., \beta_N$ полягає в такому:

1. *Вибираємо* початковий стан $s(0)$, такий, що виконуються умови:

а) перехід до якогось іншого стану $s(1)$ супроводжується парою (дугою) $x(0)/y(0)$, де $y(0) = \beta_0$ (таких пар може бути декілька);

б) існує пара $x(1)/y(1)$, де $y(1) = \beta_1$, яка відповідає переходу від $s(1)$ до іншого стану автомата, і тоді беремо $\alpha_0 = x(0)$, вибираючи одне з кількох можливих значень $x(0)$. (Повний автомат забезпечує виконання вказаних умов для всіх його станів-вершин, чого не можна сказати про частково визначений автомат. У нього для деяких або навіть для всіх станів розглядувані умови можуть не виконуватись, а це означатиме, що для такого автомата не існує вхідної послідовності $\{x(\nu)\}$, яка б відповідала заданій $\{y(\nu)\}$).

2. *Розглядаємо* $s(1)$ в ролі початкового стану (як $s(0)$ у першому пункті) і згідно з парою $x(1)/y(1)$, де $y(1)=\beta_1$ (а $x(1)$ поки ще не визначене) *знаходимо* стан $s(2)$, такий, що існує пара $x(2)/y(2)$, у якої $y(2)=\beta_2$, і беремо $\alpha_1 = x(1)$.

3. *Продовжуємо* процес доти, поки не буде перебрано всі β_i, $i=\overline{0,N}$, і знайдено відповідні α_i, $i=\overline{0,N}$, а саме: якщо $\alpha_i = x(i)$, $i\in[0;N-2]$, уже встановлено (тобто відомі стан $s(i)$ і пара $x(i)/y(i)$, де $s(i)$, $x(i)$ визначають стан $s(i+1)$, то відштовхуючись від стану $s(i+1)$ і пари $x(i+1)/y(i+1)$, де $y(i+1)=\beta_{i+1}$ (а $x(i+1)$ поки ще не визначене), знаходимо стан $s(i+2)$, такий, що існує пара $x(i+2)/y(i+2)$, у якій $y(i+2)=\beta_{i+2}$, і беремо $\alpha_{i+1}=x(i+1)$ для $i<N-2$, а для $i=N-2$ беремо $\alpha_{i+1}=x(i+1)$, $\alpha_{i+2}=x(i+2)$, причому $N\ge 3$.

Розглянемо конкретний *приклад*. Нехай СА A описують алфавітами $X=\{0,1,2,3\}$, $Y=\{0,1\}$, $S=\{0,1,2\}$ і спільною таблицею переходів і виходів (табл. 5.1.2), якій відповідає матриця переходів M і граф автомата, зображений на рис. 5.1.5.

Таблиця 5.1.2

Спільна таблиця δ/λ

$s(\nu)$ \ $x(\nu)$	0	1	2	3
0	0/0	1/0	2/1	1/0
1	1/1	0/0	0/0	2/1
2	2/1	1/1	0/1	1/0

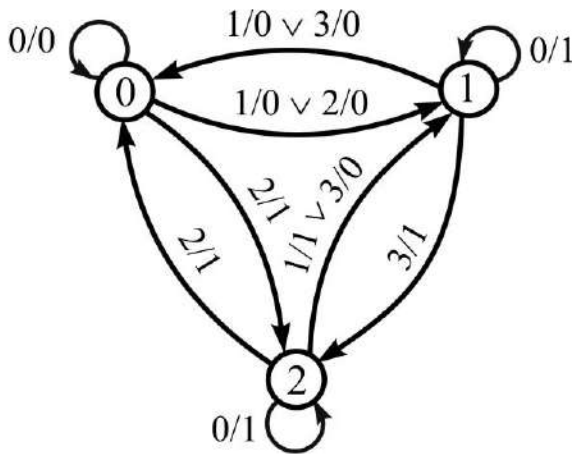


Рис. 5.1.5. **Граф СА**

$$M=\begin{array}{c} \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{array}\!\!\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} 0 & 1 & 2 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0/0 & 1/0\vee 3/0 & 2/1 \\ 1/0\vee 2/0 & 0/1 & 3/1 \\ 2/1 & 1/1\vee 3/0 & 0/1 \end{bmatrix} \end{array}.$$

Проведемо аналіз автомата за послідовністю значень вихідних сигналів $\{y(\nu)\} = 1,0,1,1,0,0,1,1,0,0,0,1$, де $\nu = \overline{0,11}$, тобто встановимо послідовність $\{x(\nu)\} = \alpha_0, \alpha_1, ..., \alpha_{11}$ елементів вхідного алфавіту X (якщо вона існує), яка забезпечує вихідні сигнали із $\{y(\nu)\}$. За допомогою візуального аналізу графа (таблиці чи матриці) визначаємо початковий стан $s(0)$ автомата. У нашому випадку в ролі $s(0)$ може бути обрано будь-який зі станів 0, 1, 2, адже з кожної вершини графа виходить дуга з написом ("дробом") x/y, де $y = \beta_0 = 1$, і заходить у вершину, з якої виходить дуга з написом x/y, де $y = \beta_1 = 0$. Виберемо, наприклад, $s(0) = 0$, тоді $x(0)/y(0) = 2/1$, $s(1) = 2$, а $x(1)/y(1) = 3/0$; отже, можна брати $x(0) = 2$. Відштовхуємось далі від $s(2) = 1$, дробу $3/0$ і робимо висновок, що $s(2) = 1$, а $x(2)/y(2) = 0/1$, хоча можна взяти і $3/1$, оскільки вершина 1 інцидентна двом дугам, які відповідають вихідному сигналу, що дорівнює 1; отже, беремо $x(1) = 3$. Згідно з описаним алгоритмом продовжуємо просування по графу і заповнюємо таблицю відповідностей між членами $y(\nu)$, $x(\nu)$ вихідних і вхідних послідовностей, а також указуємо послідовність відповідних станів $\{s(\nu)\}$ (табл. 5.1.3).

Таблиця 5.1.3

Відповідність між сигналами $x(\nu)$, $y(\nu)$ та станами $s(\nu)$ для $s(0)=0$

$x(\nu)$	2	3	0	3	3	1	2	0	3	2	3	0
$s(\nu)$	0	2	1	1	2	1	0	2	2	1	0	1
$y(\nu)$	1	0	1	1	0	0	1	1	0	0	0	1

Якщо взяти $s(0) = 2$, то один із можливих розв'язків задачі подано в табл. 5.1.4 (*пропонуємо* переконатися в цьому самостійно).

Таблиця 5.1.4

Відповідність між сигналами $x(\nu)$, $y(\nu)$ та станами $s(\nu)$ для $s(0)=2$

$x(\nu)$	1	1	2	0	3	1	2	1	1	3	2	2
$s(\nu)$	2	1	0	2	1	1	0	2	1	0	1	0
$y(\nu)$	1	0	1	1	0	0	1	1	0	0	0	1

Зауваження. Часто розглядають автомати, у яких початковий стан закріплюють за одним із можливих станів, а не вибирають щоразу інший. Такі автомати і сам початковий стан називають **ініціальними**. У разі функціонування ініціального автомата припускають, що до початкового моменту часу, тобто перед діянням на вхід послідовністю певних вхідних сигналів автомат перебуває в ініціальному стані.

Задача синтезу скінченних автоматів

Як і для задачі аналізу, постановку задачі синтезу скінченного автомата дамо у спрощеному варіанті.

Задача синтезу СА A полягає у знаходженні алгоритму (скінченного списку правил), який дозволяв би для заданих послідовностей вхідних сигналів $\{x(\nu)\}$ і відповідних вихідних сигналів $\{y(\nu)\}$ побудувати скінченний автомат A, який реалізує залежність f між входами і виходами, описану послідовностями $\{x(\nu)\}$, $\{y(\nu)\}$, тобто:

$$\textit{синтез СА } A\text{:}\ \big(\{x(\nu)\},\{y(\nu)\}\big)\to A=(X,Y,S,\delta,\lambda)\,|\,y(\nu)=f(x(\nu)).$$

Постановка задачі, як бачимо, не містить жодних відомостей щодо станів автомата. Це пояснюється тим, що з утилітарної (від лат. *utilitas* – користь, вигода, зиск) точки зору стосовно автоматів інтерес становить лише залежність між входами і виходами автомата, а роль його станів зводиться виключно до участі у формуванні цих залежностей як проміжних змінних. Отже, будь-яка сукупність станів, яка забезпечує необхідні залежності між входом і виходом, може бути вибрана як множина станів автомата. Водночас цей вибір природно підкорити певним цілям, наприклад, мінімізації кількості станів чи оптимізації автомата загалом у певному сенсі.

Під час вибору множини станів S будемо передусім виходити з того, що характеристичні функції $\delta(x,s)$ (5.1.1) і $\lambda(x,s)$ (5.1.2) мають забезпечувати виконання *умов однозначності*, себто якщо в тактові моменти ν_1, ν_2 $(\nu_1\neq\nu_2)$ вхідні сигнали однакові $(x(\nu_1)=x(\nu_2)=x)$ і автомат перебуває в одному й тому ж стані $(s(\nu_1)=s(\nu_2)=s)$, то для вихідних змінних $(y(\nu_1)=y_1,\ y(\nu_2)=y_2)$ і наступних станів $(s(\nu_1+1)=s_1'$, $s(\nu_2+1)=s_2')$ відповідно маємо:

$$y_1 = y_2 = y = \lambda(x, s), \quad s_1' = s_2' = s' = \delta(x, s), \tag{5.1.3}$$

тобто вихідні сигнали і наступні стани мають бути однаковими.

Схематично це зображають із залученням трійок $(x, s, y)^T$, де T – символ транспонування:

$$\begin{gathered}(x, s, y_1)^T \wedge (x, s, y_2)^T \Rightarrow (y_1 = y_2 = y), \\ (x, s, y)^T \to s_1' \wedge (x, s, y)^T \to s_2' \Rightarrow (s_1' = s_2' = s')\end{gathered} \tag{5.1.4}$$

Вибір множини станів S автомата можна здійснити так:

спочатку потужність $|S|$ беруть такою, що дорівнює потужності множини вхідних сигналів ($|S| = |X| = p$) і кожному вхідному сигналу з номером $\alpha_i \in \{x(\nu)\}$ ставлять у відповідність стан автомата $S(i) = \alpha_i$, $i = \overline{0, N}$ (хоча різним вхідним сигналам може відповідати один і той самий стан), тобто нумерують стани так, як і елементи множини X, а саме: $S = \{0, 1, 2, ..., p-1\}$;

потім згідно із заданими $\{x(\nu)\}$, $\{y(\nu)\}$ досягають виконання умов однозначності (5.1.4), змінюючи відповідним чином другі елементи трійок $(x(\nu), s(\nu), y(\nu))^T$ завдяки аналізу стовпців, утворених записаними одна під одною послідовностями:

$x(\nu)$	α_0	α_1	α_2	$\cdots$	α_N
$s(\nu)$	α_0	α_1	α_2	$\cdots$	α_N
$y(\nu)$	β_0	β_1	β_2	$\cdots$	β_N

;

далі намагаються зменшити кількість станів (що не завжди вдається) вилученням (заміною іншими) тих, які в послідовності $\{s(\nu)\}$ зустрічаються найменшу кількість разів, не порушуючи, звісна річ, виконання умов однозначності.

Процедура вибору множини станів автомата складає кістяк алгоритму розв'язання задачі синтезу, оскільки за заданої $\{x(\nu)\}$ другі елементи пар $x(\nu)/y(\nu)$ визначаються саме послідовністю зміни станів $\{s(\nu)\}$. У зв'язку із цим часто навіть ототожнюють сам автомат із множиною його станів.

Розв'язання задачі побудови автомата $A=(X,Y,S,\delta,\lambda)$ за заданими $\{x(\nu)\}=\alpha_0,\alpha_1,...,\alpha_N$ і $\{y(\nu)\}=\beta_0,\beta_1,...,\beta_N$ можна здійснити так:

1. *Встановлюємо* потужності множин X, Y, підраховуючи кількість різних символів серед α_i, β_i, $i=\overline{0,N}$, відповідно; нехай $|X|=p$, $|Y|=q$.

2. *Визначаємо* множину станів S автомата (як це описано вище). Якщо потужності $|S|=p$ множини станів S для забезпечення виконання умов однозначності (стосовно виходів і станів) не вистачає, то вводимо в необхідній кількості додаткові стани.

3. *Задаємо* характеристичні функції $\delta(x,s)$ і $\lambda(x,s)$ за допомогою спільної таблиці переходів і виходів, спираючись на трійки $(x(\nu),s(\nu),y(\nu))^T$, $\nu=\overline{0,N}$; за необхідності будуємо граф і (або) матрицю переходів.

Як правило, у разі такого підходу до розв'язання задачі синтезу дістаємо частково визначений (неповний) автомат. Для автоматів такого типу не виконується так звана *умова повноти*: для будь-якої вершини графа автомата і для будь-якого вхідного символу існує вихідна дуга-стрілка, позначена цим символом. Із неповного автомата легко зробити повний автомат, для чого треба лише до його графа додати дуги і вхідні символи, яких не вистачає для виконання умови повноти, а вихідні символи можна брати з алфавіту Y довільно.

Приклад. Розглянемо застосування запропонованого алгоритму до синтезу автомата за послідовностями $\{x(\nu)\}$, $\{y(\nu)\}$ із табл. 5.1.3 (тоді, під час аналізу автомата, послідовність $\{x(\nu)\}$ знаходили, а автомат і $\{y(\nu)\}$ було задано).

1. Перш за все, із вигляду вхідної і вихідної послідовностей робимо висновок, що $X=\{0,1,2,3\}$, $Y=\{0,1\}$.

2. Беремо $S=\{0,1,2,3\}$, $s(i)=\alpha_i$, $i=\overline{0,N}$, і записуємо одна під одною послідовності для $x(\nu)$, $s(\nu)$, $y(\nu)$, $\nu=\overline{0,N}$ (табл. 5.1.5).

Таблиця 5.1.5

Початкові відповідності між сигналами і станами

$x(\nu)$	2	3	0	3	3	1	2	0	3	2	3	0
$s(\nu)$	2	3	0	3	3	1	2	0	3	2	3	0
$y(\nu)$	1	0	1	1	0	0	1	1	0	0	0	1

Проглядаємо стовпці таблиці й аналізуємо різні типи трійок $(x,s,y)^T$, у яких $x=s$ (подамо їх для наочності у вигляді матриць, хоча цього можна й не робити):

$$A_2=\begin{pmatrix}2&2&2\\2&2&\cancel{2}\,0\\1&1&0\end{pmatrix},\ A_3=\begin{pmatrix}3&3&3&3&3\\3&\cancel{3}\,2&3&3&3\\0&1&0&0&0\end{pmatrix},\ A_0=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\1&1&1\end{pmatrix},\ A_1=\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}.$$

Для виконання першої умови однозначності (стосовно вихідних символів) в A_2 замінимо у третьому стовпці стан 2 на стан 0, щоб задовольнялася одночасно і друга умова однозначності (стосовно станів) для стовпців, між якими стоїть розглядуваний (це стовпці $(3,3,0)^T$).

Далі для перших двох трійок із A_2 перевіряємо виконання другої умови однозначності: вона не виконується, оскільки

$$\begin{pmatrix}2\\2\\1\end{pmatrix}\to 3\wedge\begin{pmatrix}2\\2\\1\end{pmatrix}\to 0,$$

тому замінимо, наприклад, 0 на 3 (а можна й навпаки).

У матриці A_3 у стовпці $(3,3,1)^T$ замінимо другий елемент на 2 (а можна й на 1 чи на 0). A_0 і A_1 залишимо поки що без змін.

Далі перевіряємо, чи виконується друга умова однозначності для стовпців із A_3 виду $(3,3,0)^T$; тут довелося замінити у трійці $(1,1,0)^T$ стан 1 на стан 0.

Нижче наведено табл. 5.1.6, у якій відображено результат процедури вибору послідовності станів.

Таблиця 5.1.6

Корегування відповідностей між сигналами і станами

$x(\nu)$	2	3	0	3	3	1	2	0	3	2	3	0
$s(\nu)$	2	3	0	$\cancel{3}\,2$	3	$\cancel{1}\,0$	2	$\cancel{0}\,3$	3	$\cancel{2}\,0$	3	0
$y(\nu)$	1	0	1	1	0	0	1	1	0	0	0	1

У процесі корегування послідовності $\{s(\nu)\}$ з метою задовольнити умови однозначності стан 1 "зник сам по собі" і в підсумку $S=\{0,2,3\}$. Стани можна перепозначити і взяти $S'=\{0,1,2\}$, але, з точки зору кодування станів за допомогою двійкового алфавіту $\{0,1\}$, це не має принципового значення: $S=\{00,10,11\}$, $S'=\{00,01,10\}$.

3. Будуємо спільну таблицю переходів і виходів (табл. 5.1.7), для чого по черзі перебираємо стовпці табл. 5.1.6; зображаємо граф автомата (рис. 5.1.6).

Задачу синтезу розв'язано.

Таблиця 5.1.7

Спільна таблиця δ/λ

$s(\nu)$ \ $x(\nu)$	0	1	2	3
0	2/1	2/0	3/0	
2			3/1	3/1
3	3/1			0/0

Примітка. Порожні комірки таблиці вказують на невизначені стани / виходи.

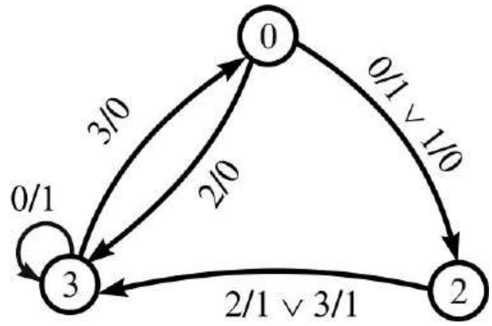


Рис. 5.1.6. **Граф автомата з трьома станами**

Виникає запитання: чи можна зменшити кількість станів із метою зменшення, у свою чергу, кількості елементів пам'яті автомата? Спробуємо це зробити. Із табл. 5.1.8 випливає, що найменша кількість разів – три рази – у послідовності $\{s(\nu)\}$ зустрічається стан 2, причому два стовпці вигляду $(2,2,1)^T$:

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 2 \\ \cancel{2}\,3 & \cancel{2}\,0 & \cancel{2}\,3 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Замінити в них стан 2 на стан 0 не можна, оскільки це не узгоджується з іншою трійкою $(2,0,0)^T$, а стан 3 придатний (*обґрунтуйте!*). У стовпці $(3,2,1)^T$ стан 2 замінимо на стан 0 (*а чому* не 3?). Таким чином, кількість станів вдалося зменшити до двох: $S=\{0,3\}$. Відповідна таблиця трійок $(x,s,y)^T$ і граф зображені нижче (табл. 5.1.8 і рис. 5.1.7).

Таблиця 5.1.8

Корегування графа станів

$x(\nu)$	2	3	0	3	3	1	2	0	3	2	3	0
$s(\nu)$	$\cancel{2}3$	3	0	$\cancel{2}0$	3	0	$\cancel{2}3$	3	3	0	3	0
$y(\nu)$	1	0	1	1	0	0	1	1	0	0	0	1

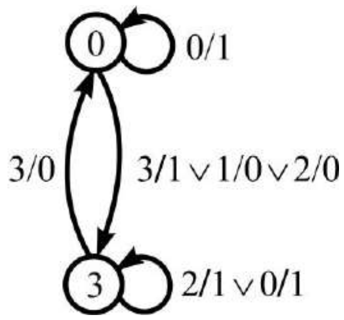


Рис. 5.1.7. **Граф СА із двома станами**

Спільну таблицю переходів і виходів *пропонуємо* побудувати самостійно.

Задача мінімізації скінченних автоматів

Поряд із задачами аналізу та синтезу мінімізація автоматів є основною задачею теорії автоматів, оскільки має важливе економічне значення під час проєктування за абстрактною моделлю автомата реального технічного пристрою.

Нехай A – повний СА, а σ_i, σ_j – елементи множини-алфавіту станів $S=\{\sigma_1,\sigma_2,\dots,\sigma_r\}$. Стани σ_i, $\sigma_j \in S$ автомата A називають **еквівалентними** $\sigma_i \sim \sigma_j$, якщо, відштовхуючись від цих станів як від початкових, під дією будь-якої вхідної послідовності $\{x(\nu)\}$ автомат індукує однакові вихідні послідовності $\{y(\nu)\}$. Термін "еквівалентність" виправдовується тим, що множини пар станів, описаних раніше, мають властивості рефлексивності $(\sigma_i \sim \sigma_i)$, симетричності $(\sigma_i \sim \sigma_j \Rightarrow \sigma_j \sim \sigma_i)$ і транзитивності $(\sigma_i \sim \sigma_k \wedge \sigma_k \sim \sigma_j \Rightarrow \sigma_i \sim \sigma_j)$. Якщо стани не є еквівалентними, то їх називають **розрізнюваними**. Автомат, у якого всі стани розрізнювані (тобто немає еквівалентних), називають **нескоротним**, або зведеним.

Нехай A, B – повні СА, у яких співпадають як вхідний, так і вихідний алфавіти. Автомати A, B називають **еквівалентними**, якщо для будь-якого стану автомата A знайдеться еквівалентний йому стан автомата B, і навпаки.

Задача мінімізації скінченного автомата A полягає у розробленні методів і алгоритмів, які дозволяють для заданого СА знаходити еквівалентний йому автомат A^* з *найменшою можливою кількістю станів* (надалі казатимемо: A^* – *мінімальна форма автомата* A). У частинному випадку, коли всі стани автомата еквівалентні, він зводиться до еквівалентного автомата з одним станом, тобто є за суттю комбінаційною схемою. Зрозуміло також, що коли A^* – мінімальна форма автомата A, то вона єдина і нескоротна, тобто має містити тільки розрізнювані стани.

Теорема (*про мінімізацію повних СА*). Нехай $S=\{\sigma_1,\sigma_2,...,\sigma_r\}$ – множина станів автомата A, $S/_\sim=\{S_0,S_1,...,S_v\}$ – фактор-множина множини S за еквівалентністю станів (тобто $S_0 \bigcup S_1 \bigcup ... \bigcup S_v = S$, підмножини $S_i \subset S$ $(i=\overline{0,v})$ не перетинаються $(S_i \bigcap S_j = \varnothing$ для $i \neq j)$ і кожна з них містить еквівалентні між собою стани), $S'=\{\sigma'_0,\sigma'_1,...,\sigma'_v\}$ – множина представників σ'_i із кожного класу еквівалентності $S_i \ni \sigma'_i$, $i=\overline{0,v}$ $(v<r)$, тоді автомат A' з множиною станів S' є мінімальною формою автомата A: $A^*=A'$.

Доведення. Дійсно, згідно з означенням еквівалентності автоматів, робимо висновок, що $A' \sim A$, оскільки для кожного стану із S знайдеться еквівалентний йому стан із S' як представник деякого класу еквівалентності $S_i \in S/_\sim$ $(i=\overline{0,v})$, і навпаки: для кожного стану із S' існує еквівалентний йому стан із певного класу еквівалентності множини S. Крім того, автомат A' міститиме найменшу можливу кількість розрізнюваних станів, оскільки всіх їх вибрано з різних класів еквівалентності. Отже, A' – мінімальна форма автомата A.

Із теореми випливає, що задача мінімізації зводиться за суттю до задачі знаходження фактор-множини $S/_\sim$ множини S за еквівалентністю станів. Знаходження класів еквівалентності на множині станів S автомата A назвемо **еквівалентним розбиттям** множини станів. *Зауважимо*, що стан $\sigma_k \in S$, який не має еквівалентного йому стану, становить клас еквівалентності, єдиним елементом якого є цей стан $(S_k=\{\sigma_k\})$. Для здійснення еквівалентного розбиття S скористаємося твердженнями, які є наслідками з означень еквівалентних і розрізнюваних станів.

1. *Достатня умова наявності розрізнюваних станів*: якщо рядки таблиці виходів $\lambda(x,s)$, які відповідають номерам станів σ_i, σ_j, не однакові, то стани σ_i і σ_j розрізнювані.

2. *Достатня умова наявності еквівалентних станів*: якщо рядки спільної таблиці переходів і виходів – рядки пар δ/λ – однакові або стають такими внаслідок заміни кожного номера стану σ_i на номер стану σ_j (або навпаки), то стани σ_i і σ_j еквівалентні.

3. *Достатня умова еквівалентності наступних станів*: якщо (попередні) стани σ_i, σ_j еквівалентні, то еквівалентні й (наступні) стани σ'_i, σ'_j, у які автомат переходить під дією будь-якого вхідного сигналу.

Стани σ_i, σ_j, які задовольняють достатню умову 1 (умову 2), називають **явно розрізнюваними** (**явно еквівалентними**). Термін "явно ..." пояснюється тим, що наведені умови не є необхідними, тобто множини всіх пар розрізнюваних і еквівалентних станів не вичерпуються, на жаль, вказаними типами станів і не завжди можуть бути виявлені безпосереднім порівнянням рядків таблиці переходів і спільної таблиці переходів і виходів відповідно.

Таблиця 5.1.9

Спільна таблиця δ/λ

$s(\nu)$ \ $x(\nu)$	0	1	2
0	0/0	1/1	0/1
1	1/0	0/1	1/1
2	2/0	0/1	2/1
3	2/0	3/1	4/1
4	0/1	1/1	3/1

Наприклад, аналіз табл. 5.1.9 показує, що стани з номерами 0, 1 явно еквівалентні $(\sigma_0 \sim \sigma_1)$, оскільки, якщо у відповідних рядках у чисельниках (вони відповідають номерам станів) замінити 0 на 1 (або 1 на 0), то дістанемо однакові рядки: (1/0, 1/1, 1/1) (або (0/0, 0/1, 0/1)).

Аналогічно для станів σ_1, σ_2 з номерами 1, 2 (*переконайтеся!*).

Стани з номерами 0, 2 не є явно еквівалентними, оскільки відповідні рядки пар δ/λ не однакові, і заміна, наприклад, у чисельниках пар двійок на нулі не дає однакових рядків: (0/0, 1/1, 0/1), (0/0, 0/1, 0/1). Однак ці стани еквівалентні $(\sigma_0 \sim \sigma_2)$ за властивістю транзитивності: $(\sigma_0 \sim \sigma_1) \wedge (\sigma_1 \sim \sigma_2) \Rightarrow \sigma_0 \sim \sigma_2$. Стан із номером 3 не є явно розрізнюваним із першими трьома, оскільки знаменники дробів (вони відповідають вихідним сигналам) однакові, зате він явно розрізнюваний зі станом із номером 4. У підсумку можна свідомо вказати пари номерів явно розрізнюваних станів: $\{0,4\}$, $\{1,4\}$, $\{2,4\}$, $\{3,4\}$.

Як же встановити, яким станам відповідають пари $\{0,3\}$, $\{1,3\}$, $\{2,3\}$ – розрізнюваним чи еквівалентним? Для відповіді на це запитання (і для здійснення еквівалентного розбиття S взагалі) можна скористатися достатньою умовою еквівалентності наступних станів 3), а точніше – твердженням, протилежним до оберненого: якщо наступні стани σ'_i, σ'_j, у які автомат переходить під дією будь-якого вхідного сигналу, нееквівалентні, то нееквівалентні (розрізнювані) й попередні стани σ_i, σ_j. Процедуру перевірки виконання цього твердження (для всіх пар, окрім явно розрізнюваних) здійснюють за допомогою спеціальної таблиці – **таблиці пар станів**, яку будують на основі спільної таблиці переходів і виходів, а саме:

кожній парі станів σ_i, σ_j (окрім явно розрізнюваних станів, оскільки вони не можуть бути еквівалентними) відводять рядок;

кожному вхідному сигналу $x(\nu)$, як і в таблиці переходів та виходів, відповідає стовпець;

у кожній комірці, яка стоїть на перетині рядка і стовпця, на основі таблиці переходів та виходів вказують пари станів σ'_i, σ'_j, у які переходить автомат із даної пари $\{\sigma'_i, \sigma'_j\}$ за певного вхідного сигналу (порядок запису станів у кожній парі несуттєвий).

Пари, що виключають із таблиці надалі (як нееквівалентні) якось виділяють: жирним шрифтом, підкресленням, "галочками" тощо.

Для розглядуваного прикладу таблиця пар станів має вигляд табл. 5.1.10, де в першому стовпці записані пари станів, які не є явно розрізнюваними, тобто є "підозрілими" на еквівалентність, а в інших стовпцях – пари чисел, узятих із табл. 5.1.10. До елементів першого стовпця таблиці пар станів застосовують **правило виключення** нееквівалентних (розрізнюваних) пар:

Таблиця 5.1.10

Таблиця пар станів $\{\sigma_i, \sigma_j\}$

$\{\sigma_i, \sigma_j\}$ \ $x(\nu)$	0	1	2
0, 1	0, 1	1, 0	0, 1
0, 2	0, 2	1, 0	0, 2
∨ 0, 3	0, 2	1, 3	**0, 4**
1, 2	1, 2	0, 0	1, 2
∨ 1, 3	1, 2	0, 3	**1, 4**
∨ 2, 3	2, 2	0, 3	**2, 4**

на першому кроці вилучають (позначають) ті пари, які переходять у пари, складені із номерів різних станів і які відсутні в першому стовпці таблиці пар;

на кожному наступному кроці вилучають (виключають, позначають) ті пари, які переходять (за якихось $x(\nu)$) у пари, позначені на попередньому кроці;

процес закінчують тоді, коли серед невилучених пар уже немає таких, які можна вилучити (згідно з порушенням достатньої умови еквівалентності наступних станів).

Застосування правила виключення до табл. 5.1.11 на першому кроці відкидає (як нееквівалентні) пари станів із такими парами номерів: $\{0,3\}$, $\{1,3\}$, $\{2,3\}$ (вони позначені галочками), оскільки за $x(\nu)=2$ ці пари не переходять в еквівалентні пари станів (пари $\{0,4\}$, $\{1,4\}$, $\{2,4\}$ відповідають явно розрізнюваним станам, ці пари надруковано жирним шрифтом). На другому кроці позначати вже нічого, оскільки рядки непозначених пар не містять у собі пар, позначених на першому кроці. Це означає, що пари $\{0,1\}$, $\{0,2\}$, $\{1,2\}$ відповідають еквівалентним станам, як це й було встановлено раніше за допомогою окремого аналізу (без таблиці пар станів). Таким чином, множину станів $S=\{0,1,2,3,4\}$ автомата A, закон функціонування якого описаний у табл. 5.1.7, можна розбити на три класи еквівалентності $S_0=\{0,1,2\}$, $S_1=\{3\}$, $S_2=\{4\}$, тобто фактор-множина $S/_\sim=\{S_0,S_1,S_2\}$, де $S_0 \bigcup S_1 \bigcup S_2 = S$, $S_i \bigcap S_j = \varnothing$ для $i \neq j$.

Позначивши представників здобутих трьох класів відповідно числами 0, 1, 2, дістанемо для розглядуваного автомата мінімальну форму A^* із трьома станами ($S^*=\{0,1,2\}$) і спільною таблицею переходів (табл. 5.1.11). (Граф автомата A^* *пропонуємо* зобразити самостійно).

Таблиця 5.1.11

Спільна таблиця δ/λ

$s(\nu)$ \ $x(\nu)$	0	1	2
0	0/0	0/1	0/1
1	0/1	1/1	2/1
2	0/1	0/1	1/1

Розв'язання задачі мінімізації повного скінченного автомата $A=(X,Y,S,\delta,\lambda)$ одним зі способів (як підсумок розглянутого) полягає в такому:

1. *Встановлюємо* множину пар явно розрізнюваних станів (аналізуючи рядки таблиці виходів або знаменники пар δ/λ спільної таблиці переходів і виходів).

2. *Складаємо* таблицю пар станів (на основі спільної таблиці переходів і виходів).

3. *Застосовуємо* правило виключення розрізнюваних пар станів і встановлюємо вигляд фактор-множини $S/_{\sim} = \{S_0, S_1, \ldots, S_v\}$.

4. *Вибираємо* одного представника з кожного класу еквівалентності ($\sigma_i' \in S_i$, $i = \overline{0, v}$) і описуємо мінімальну форму $A^* = (X, Y, S^*, \delta^*, \lambda^*)$, де $S^* = \{0, 1, \ldots, v\}$ – множина станів, складена з номерів представників σ_i', $i = \overline{0, v}$; (δ^*, λ^*) – закон функціонування A^*.

У випадку, коли автомат частково визначений, його, як було вказано, легко перетворити на повний автомат, а потім уже розв'язувати задачу мінімізації. Проте такий шлях не гарантує здобуття саме мінімальної форми заданого автомата, оскільки довільне довизначення невизначених "переходів / виходів" породжує цілий клас повних автоматів.

Існують спеціальні методи мінімізації неповних автоматів, але ми не будемо їх торкатися. В окремих випадках кількість станів неповного автомата можна зменшити у спосіб, який розглянуто на тлі синтезування автомата. Загалом мінімізація має тісний зв'язок із синтезом автомата, тому її часто розглядають навіть як складову частину задачі синтезу.

5.2. Задачі та вправи до теми 5

Зразки розв'язання типових задач

1. За таблицями переходів (а) і виходів (б) скінченного автомата побудуйте спільну таблицю переходів і виходів:

$s(\nu+1) = \delta(x(\nu), s(\nu))$

$s(\nu)$ \ $x(\nu)$	0	1
0	1	0
1	0	1

а

$y(\nu) = \lambda(x(\nu), s(\nu))$

$s(\nu)$ \ $x(\nu)$	0	1
0	0	1
1	1	0

.

б

Розв'язання:

Комірки таблиці переходів є номерами станів $s(\nu+1)$, у які автомат переходить залежно від дії вхідних змінних $x(\nu)$ на ν-му такті і стану $s(\nu)$ у даний тактовий момент. Комірки таблиці виходів заповнюють номерами виходів $y(\nu)$ у даний тактовий момент, які відповідають дії $x(\nu)$ і стану $s(\nu)$ в той самий момент.

Для об'єднання заданих таблиць в одну (спільну) таблицю діють так: у комірки записують пари чисел – номер наступного стану (у чисельнику) і номер виходу (у знаменнику). Таким чином, спільна таблиця переходів і виходів має вигляд:

$s(\nu)$ \ $x(\nu)$	0	1
0	1/0	0/1
1	0/1	1/0

Однією з інтерпретацій такого автомата із двома станами є два перемикачі, що розташовані в різних місцях і незалежно один від одного вмикають або вимикають пристрій, наприклад, світильник.

2. Скінченний автомат задано спільною таблицею переходів і виходів:

$s(\nu)$ \ $x(\nu)$	0	1	2
0	2/0	1/0	0/1
1	2/1	1/2	2/0
2	2/0	1/1	1/0

Зобразіть автомат: 1) графом; 2) матрицею переходів.

Розв'язання:

1. Вершини графа автомата взаємно однозначно відповідають станам автомата, а дуги вказують на всі можливі переходи з одного стану в інший і позначаються парами, записаними у вигляді дробу.

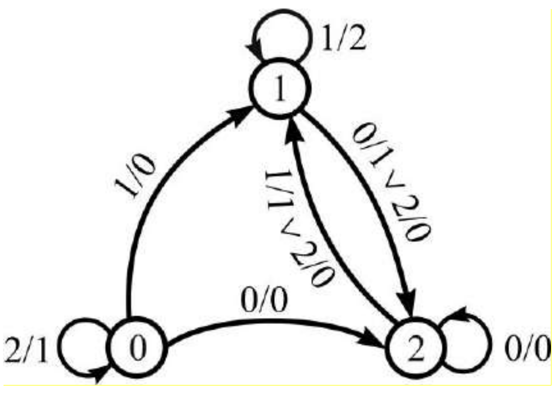


Рис. 5.2.1. **Граф СА**

За вихідними даними із вершини 0 автомат переходить у стани 0, 1, 2; це означає, що вершина 0 графа з'єднана дугами з вершинами 0, 1, 2 (рис. 5.2.1). Перехід у стан 0 відбувається під дією 2, і йому відповідає вихід 0, тому дугу з вершини 0 в 0 помічено як $2/1$. Перехід у стан 1 здійснюється під дією 1, і йому відповідає вихід 0, тому дугу з вершини 0 в 1 помічено як $1/0$. Перехід у стан 2

здійснюється під дією 0, і йому відповідає вихід 0, тому дугу з вершини 0 в 2 помічено як $0/0$. Оскільки автомат переходить зі стану 2 у стан 2 у разі дій $0,\ 2$, яким відповідають виходи $1,\ 0$, то петлю при вершині 1 помічаємо через диз'юнкцію $0/1 \vee 2/0$. Перехід зі стану 1 у стан 2 відбувається під діями 0 і 2, і йому відповідають виходи 1 і 0, тому дугу з вершини 1 в вершину 2 помічено як $0/1 \vee 2/0$, а перехід зі стану 2 у стан 1 відбувається під діями $1,\ 2$ з виходами $1,\ 0$, тому дугу з вершини 2 у вершину 1 помічено як $1/1 \vee 2/0$. Вершина 2 має петлю, оскільки під дією 0 автомат не змінює стану, якому відповідає вихід 0; петлю помічено як $0/0$.

2. Матриця СА є квадратною матрицею, номери рядків і стовпців якої відповідають номерам станів. Комірка, яка розташована на перетині i-го рядка і j-го стовпця матриці, містить пари "вхід/вихід" або їхні диз'юнкції. За відсутності таких пар клітинку матриці заповнюють нулем або залишають вільною. У нашому випадку маємо:

$$M = \begin{array}{c} \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} 0 & 1 & 2 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 2/1 & 1/0 & 0/0 \\ 0 & 1/2 & 0/1 \vee 2/0 \\ 0 & 1/1 \vee 2/0 & 0/0 \end{bmatrix} \end{array}.$$

Замість відсутніх зв'язків між станами автомата проставлено нулі.

Від матричного задання СА легко перейти до графічного. *Пропонуємо* виконати це самостійно.

3. Розв'яжіть задачу аналізу СА, зображеного графом (рис. 5.2.2), за послідовністю вихідних сигналів: $\{y(\nu)\} = 0, 0, 1, 0, 1, 0, 1, 0, 1, 1$.

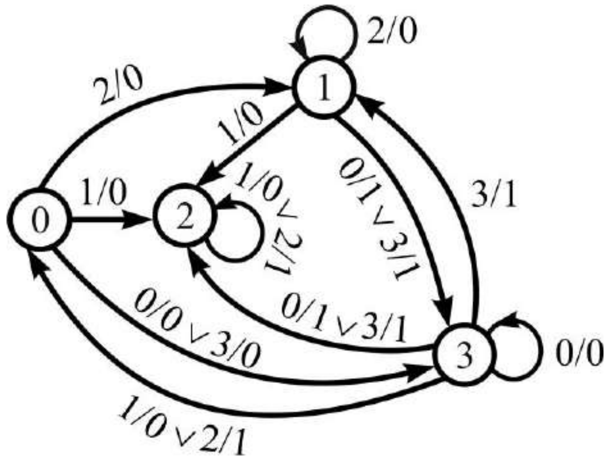


Рис. 5.2.2. **Граф СА**

Розв'язання:

Згідно з постановкою задачі аналізу треба побудувати алгоритм, який дозволяв би для заданого автомата A і заданої послідовності вихідних сигналів $\{y(\nu)\}$ знаходити послідовність вхідних сигналів $\{x(\nu)\} = \alpha_0, \alpha_1, ..., \alpha_N$, у разі збудження якими автомат видає $\{y(\nu)\}$.

Задача знаходження послідовності вхідних змінних $\{x(\nu)\}$ для заданої скінченної послідовності вихідних змінних $\{y(\nu)\} = 0,0,1,0,1,0,1,0,1,1$ згідно з наведеним алгоритмом зводиться до знаходження ланцюжка переходів зі стану у стан, який давав би кортеж вихідних сигналів.

Виберемо як початковий стан $s(0)$, тобто стан у тактовий момент 0. Під дією сигналу 2 здійснюється перехід у стан 1 із вихідним сигналом $\beta_0 = 0$. Результати кожного кроку аналізу автомата A заносимо у табл. 5.2.1.

Таблиця 5.2.1

Відповідність між $x(\nu)$, $y(\nu)$ та станами $s(\nu)$, коли $s(0) = 0$

$x(\nu)$	2	1	3	0	2	1	2	1	2	0
$s(\nu)$	1	2	1	3	0	2	2	2	2	3
$y(\nu)$	0	0	1	0	1	0	1	0	1	1

Під дією сигналу 1 здійснюємо перехід у стан 2 із виходом $\beta_1 = 0$. Наступний крок потребує на виході одиницю (1). Цього досягнемо під дією сигналу 3 переходом у стан 1 із вихідним сигналом $\beta_2 = 1$. Далі вихід $\beta_3 = 0$ досягається під дією вхідного сигналу 0 із переходом у стан 3. Під дією вхідного сигналу 2 під час переходу у стан 0 маємо на виході $\beta_4 = 1$. Дія вхідного сигналу 1 за умови, що автомат перейде у стан 2, забезпечує нульовий вихідний сигнал $\beta_5 = 0$. Вихідний сигнал $\beta_6 = 1$ забезпечується під дією вхідного сигналу 2. Під дією вхідного сигналу 1 здійснюється перехід у стан 2, який забезпечує вихідний сигнал $\beta_7 = 0$. Дія вхідного сигналу 2 переводить автомат у стан 2, який забезпечує вихідний сигнал $\beta_8 = 1$. Нарешті, вхідний сигнал 0 переводить автомат у стан 3, який забезпечує вихідний сигнал $\beta_9 = 1$.

Таким чином, перебрано всі β_i, $i = \overline{0,9}$.

Пропонуємо підтвердити або спростувати, що знайдений ланцюг $\{x(\nu)\}$ не єдиний.

4. Розв'яжіть задачу синтезу скінченного автомата A за заданими вхідними і вихідними сигналами:

$$\{x(\nu)\} = \alpha_0, \alpha_1, ..., \alpha_N = 1, 2, 3, 0, 2, 0, 1, 2, 3, 0;$$
$$\{y(\nu)\} = \beta_0, \beta_1, ..., \beta_N = 1, 1, 1, 0, 1, 0, 1, 0, 0, 0.$$

Розв'язання:

Згідно з постановкою задачі синтезу СА:

$$(\{x(\nu)\}, \{y(\nu)\}) \to A = (X, Y, S, \delta, \lambda) \mid y(\nu) = f(x(\nu)),$$

необхідно побудувати автомат, який за послідовністю вхідних сигналів $\{x(\nu)\}$ і послідовністю вихідних сигналів $\{y(\nu)\}$ забезпечує функціональну залежність між входами і виходами за деяким законом f.

За наведеним в п. 5.1 алгоритмом складаємо таблицю (табл. 5.2.2).

Таблиця 5.2.2

Початкові відповідності між сигналами і станами

$x(\nu)$	1	2	3	0	2	0	1	2	3	0
$s(\nu)$	1	2	3	0	2	0	1	2	3	0
$y(\nu)$	1	1	1	0	1	0	1	0	0	0

Стовпці табл. 5.2.2, що мають однакові значення $x(\nu)$ і $s(\nu)$, подаємо для наочності у вигляді матриць:

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix},\ A_2 = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix},\ A_3 = \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 3 & \cancel{3}2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},\ A_0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cancel{0}3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

аналізуємо їх і змінюємо з метою перевірки того, чи виконано умови однозначності.

У матриці A_3 стан 3 змінюємо на стан 2, оскільки перехід у стан 3 забезпечує вихід 1, а нам потрібен 0; у другому стовпці матриці A_0 стан 0 змінюємо на стан 3, оскільки саме такий перехід забезпечує вихід 1.

Тепер подамо скореговану таблицю (табл. 5.2.3).

Таблиця 5.2.3

Скореговані відповідності між сигналами і станами

$x(\nu)$	1	2	3	0	2	0	1	2	3	0
$s(\nu)$	1	2	3	0	2	3	1	2	2	0
$y(\nu)$	1	1	1	0	1	0	1	0	0	0

Будуємо матрицю автомата і зображуємо його графом (рис. 5.2.3):

$$M = \begin{array}{c} \\ 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} 0 & 1 & 2 & 3 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0/0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/1 & 0 \\ 3/0 & 0 & 2/0 & 2/1 \\ 3/1 & 0/0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{array}.$$

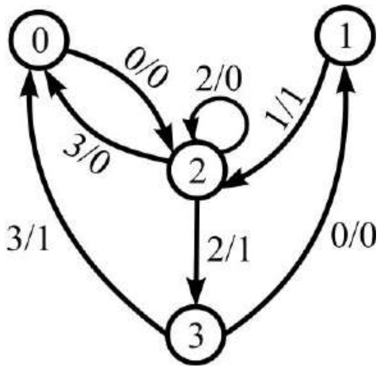


Рис. 5.2.3. **Граф автомата**

Позначені нулем комірки матриці M вказують на невизначені стани-виходи. Відштовхуючись від того, що стани 1 і 3 зустрічаються найменшу кількість разів – два, спробуємо зменшити кількість станів. Проведемо аналіз матриці A_1:

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

У кожному з її стовпців стан 1 можна замінити на стан 2, оскільки перехід зі стану 2 у стан 2 забезпечує на виході сигнал 1. Таким чином, кількість станів автомата можна зменшити до двох. Відповідну таблицю трійок наведено в табл. 5.2.4.

Таблиця 5.2.4

Корегування графа станів

$x(\nu)$	1	2	3	0	2	0	1	2	3	0
$s(\nu)$	$\cancel{1}\,2$	2	3	0	2	3	$\cancel{1}\,2$	2	2	0
$y(\nu)$	1	1	1	0	1	0	1	0	0	0

Пропонуємо скорегувати граф станів, спираючись на матрицю A_3, і зобразити відповідний граф.

7. Скінченний автомат задано спільною таблицею переходів і виходів. Подайте автомат: 1) графом; 2) матрицею переходів:

1)

$s(\nu)$ \ $x(\nu)$	0	1
0	1/0	1/1
1	0/1	1/0

;

2)

$s(\nu)$ \ $x(\nu)$	0	1	2
0	1/0	1/1	1/0
1	0/0	0/0	0/1

;

3)

$s(\nu)$ \ $x(\nu)$	0	1
0	0/1	0/1
1	1/0	0/0

;

4)

$s(\nu)$ \ $x(\nu)$	0	1	2
0	0/0	1/0	1/1
1	1/1	0/0	0/0

;

5)

$s(\nu)$ \ $x(\nu)$	0	1
0	1/0	0/1
1	1/1	1/0

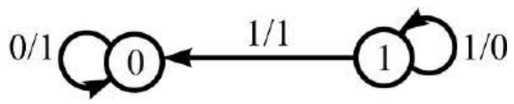
;

6)

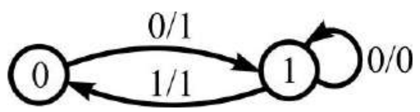
$s(\nu)$ \ $x(\nu)$	0	1	2
0	0/1	0/0	1/0
1	0/1	1/1	1/0

.

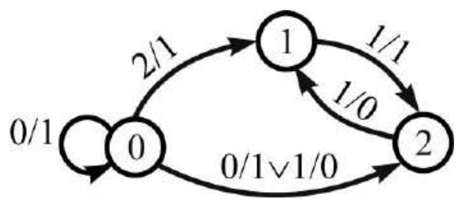
8. Скінченний автомат задано графом. Подайте автомат: 1) спільною таблицею переходів і виходів; г) матрицею переходів:

1) 

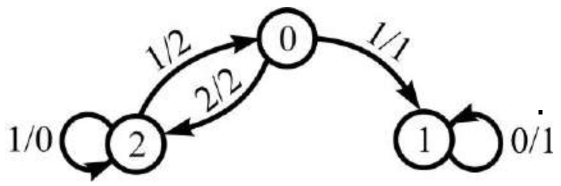
;

2) 

;

3) 

;

4) 

.

9. Скінченний автомат задано матрицею переходів. Подайте автомат: 1) спільною таблицею переходів і виходів; 2) графом:

1) $\begin{array}{c c} & \begin{array}{cc} 0 & 1 \end{array} \\ \begin{array}{c} 0 \\ 1 \end{array} & \begin{bmatrix} 0/0 \vee 1/1 & 0/1 \\ 0/1 & 1/0 \end{bmatrix} \end{array}$;

2) $\begin{array}{c c} & \begin{array}{ccc} 0 & 1 & 2 \end{array} \\ \begin{array}{c} 0 \\ 1 \end{array} & \begin{bmatrix} 0/1 & 2/0 & 1/1 \\ 2/1 \vee 1/1 & 0/0 & 1/0 \end{bmatrix} \end{array}$;

3) $\begin{array}{c c} & \begin{array}{cc} 0 & 1 \end{array} \\ \begin{array}{c} 0 \\ 1 \end{array} & \begin{bmatrix} 1/1 & 1/0 \vee 0/0 \\ 1/0 & 0/1 \end{bmatrix} \end{array}$;

4) $\begin{array}{c c} & \begin{array}{ccc} 0 & 1 & 2 \end{array} \\ \begin{array}{c} 0 \\ 1 \end{array} & \begin{bmatrix} 0/0 & 1/0 \vee 2/0 & 2/1 \\ 2/0 & 0/1 & 2/1 \end{bmatrix} \end{array}$;

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cc} 0 & 1 \end{array} \\ \text{5) } \begin{array}{c} 0 \\ 1 \end{array} & \begin{bmatrix} 0/0 & 0/0 \vee 1/1 \\ 0/1 & 1/1 \end{bmatrix}; \end{array} \qquad \begin{array}{cc} & \begin{array}{ccc} 0 & 1 & 2 \end{array} \\ \text{6) } \begin{array}{c} 0 \\ 1 \end{array} & \begin{bmatrix} 0/1 \vee 0/2 & 1/0 & 1/2 \\ 2/1 & 1/1 & 0/1 \end{bmatrix}. \end{array}$$

10. Розв'яжіть задачу аналізу скінченного автомата, зображеного графом (рис. 5.2.4), за послідовністю вихідних сигналів:

1) $\{y(\nu)\} = 1,1,0,0,1,1,0,0,0,1;$

2) $\{y(\nu)\} = 1,0,1,1,0,0,0,0,0,1;$

3) $\{y(\nu)\} = 1,0,0,0,1,1,0,0,1,1;$

4) $\{y(\nu)\} = 0,0,1,1,0,0,1,1,0,1.$

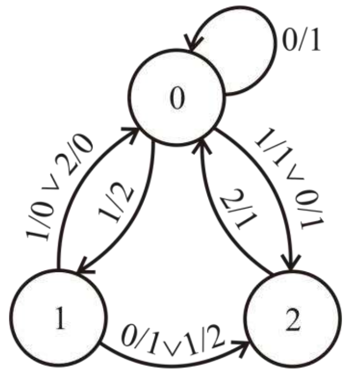


Рис. 5.2.4. **Граф СА, що підлягає аналізу**

11. Розв'яжіть задачу синтезу скінченного автомата за заданими послідовностями вхідних і вихідних сигналів:

1)

$x(\nu)$	1	0	0	0	0	0	0	1
$y(\nu)$	0	0	1	1	0	0	0	1

;

2)

$x(\nu)$	1	0	2	1	0	0	2
$y(\nu)$	1	1	0	0	1	1	0

;

3)

$x(\nu)$	0	0	1	1	1	0	0
$y(\nu)$	1	0	0	0	0	0	1

;

4)

$x(\nu)$	0	1	0	2	0	1	2
$y(\nu)$	1	0	1	1	0	0	0

;

5)

$x(\nu)$	1	1	0	0	1	1	0
$y(\nu)$	0	0	1	1	0	0	1

;

6)

$x(\nu)$	1	2	0	0	2	1	0
$y(\nu)$	1	0	0	0	1	1	0

.

12. Розв'яжіть (якщо це можливо) задачу мінімізації скінченних автоматів в умовах: задачі 7 (2, 4, 6); задачі 8 (3, 4); задачі 9 (2, 4, 6).

13. Скінченний автомат задано матрицею переходів:

$$M = \begin{array}{cc} & \begin{array}{ccc} 0 & 1 & 2 \end{array} \\ \begin{array}{c} 0 \\ 1 \\ 2 \end{array} & \begin{bmatrix} 0/0 & 0/1 \vee 2/0 & 1/2 \\ 3/0 \vee 1/0 & 1/0 & 1/1 \vee 3/0 \\ 1/2 & 1/3 & 0/1 \end{bmatrix}. \end{array}$$

Визначте: 1) множину станів; 2) вхідний алфавіт; 3) вихідний алфавіт; 4) чи припускає заданий автомат мінімізацію (якщо "так", то здійсніть її); 5) чи є заданий автомат повним; 6) подання автомата графом; 7) подання автомата спільною таблицею переходів і виходів.

Запитання для самодіагностики засвоєння матеріалу теми 5

Відповіді на всі запитання сформулюйте словесно, запишіть у символьній формі, обґрунтуйте (на підставі означень, теорем, правил, формул тощо), наведіть відповідні конкретні приклади.

1. Що розуміють під "комбінаційними схемами" та "скінченними автоматами"?
2. Що називають функціями переходів і виходів СА?
3. На які класи поділяють СА?
4. Якою упорядкованою п'ятіркою позначають СА?
5. Які існують способи задання СА?
6. У чому полягає задача аналізу СА та алгоритм її розв'язання?
7. У чому полягає задача синтезу СА та алгоритм її розв'язання?
8. Що розуміють під "мінімізацією" СА та як її здійснюють?
9. Як формулюють теорему про мінімізацію повних СА?

Рекомендована література до теми 5: [3; 8; 9; 13].

Покажчик позначень

P_n – кількість переставлень без повторень, 74

A_n^m (C_n^m) – кількість розміщень (комбінацій) без повторень, 75

$P_m(k_1, k_2, ..., k_n)$ – кількість переставлень з повтореннями, 76

$\overline{A}_n^m$ ($\overline{C}_n^m$) – кількість розміщень (комбінацій) із повтореннями, 77 (79)

$p(n)$ – функція розбиття (енумератор), 88

G ($\overline{G}$) – граф неорієнтований (орієнтований), 101 (109)

$U_{i\to}$ ($U_{\to k}$) – множина робіт на СГ, які починаються (закінчуються) подією i (k), 115

$t(i)$ ($R(i)$) – строк звершення (резерв часу) події i на СГ, 115 (117)

$t(i,k)$ – тривалість роботи (i,k) на СГ, 115

$t_{\text{кр}}$ ($\mu_{\text{кр}}$) – критичний час (шлях) на СГ, 117 (118)

$c(u)$ ($\varphi(u)$) – пропускна спроможність (дуговий потік) дуги u, 121

φ_z – потік на ТМ, 122

$\varphi_z^{\text{п}}$ (φ_z^*) – повний (максимальний) потік на ТМ, 122 (126)

$c(U_A)$ – пропускна спроможність розрізу U_A, 125

$u \uparrow\uparrow \mu$ ($u \uparrow\downarrow \mu$) – попутна (зустрічна) дуга u на шляху μ, 129

$\bar{x}$ ($\neg x$) – інверсія (заперечення) висловлення x, 155

$\oplus$ – символ операції Жегалкіна, 157

$|$ ($\downarrow$) – штрих Шеффера (стрілка Пірса), 158

$F_\vee$ ($F_\wedge$) – ДНФ (КНФ) ЛФ F, 165

$F_{\ovee}$ ($F_{\owedge}$) – ДДНФ (ДКНФ) ЛФ F, 167

$B = \{0,1\}$ – булевий алфавіт, 174

$f(x_1, x_2, ..., x_n)$ – булева функція, 174

$g_\wedge$ ($g_\vee$) – проста імпліканта (імпліцента) БФ, 178

$f_\wedge^*$ ($f_\vee^*$) – мінімальна КНФ (ДНФ) БФ, 180 (181)

$P(x_1, x_2, ..., x_n)$ – n-предикат, 210

$P \models Q$ – предикат Q є логічним наслідком предиката P, 220

$\delta(x,s)$ ($\lambda(x,s)$) – функція переходів (виходів) системи, 255

$A = (X, Y, S, \delta, \lambda)$ – скінченний автомат A, 256

$x(\nu)$ ($y(\nu)$), $s(\nu)$ – послідовність значень вхідної (вихідної) змінної, станів автомата, 254

$(X, Y, S^*, \delta^*, \lambda^*)$ – мінімальна форма A^* автомата A, 268

Предметний покажчик

Рекомендована література

Основна

1. Аляев Ю. А. Дискретная математика и математическая логика / Ю. А. Аляев, С. Ф. Тюрин. – Москва : Финансы и статистика, 2006. – 368 с.

2. Белов В. В. Теория графов / В. В. Белов, Е. М. Воробьев, В. Е. Шаталов. – Москва : Высшая школа, 1976. – 392 с.

3. Гаврилов Г. П. Сборник задач по дискретной математике / Г. П. Гаврилов, А. А. Сапоженко. – Москва : Наука, 1977. – 368 с.

4. Глускин Л. М. Задачи и алгоритмы комбинаторики и теории графов / Л. М. Глускин, Л. А. Шор, В. Я. Шварц. – Донецк : ДПИ, 1982. – 112 с.

5. Горбатов В. А. Основы дискретной математики / В. А. Горбатов. – Москва : Высшая школа, 1986. – 312 с.

6. Коршунов Ю. М. Математические основы кибернетики / Ю. М. Коршунов. – Москва : Энергия, 1972. – 376 с.

7. Нефедов В. Н. Курс дискретной математики / В. Н. Нефедов, В. А. Осипова. – Москва : Наука, 1992. – 268 с.

8. Сенчуков В. Ф. Основи дискретної математики : навч. посіб. / В. Ф. Сенчуков, Т. В. Денисова. – Харків : Вид. ХНЕУ, 2007. – 344 с.

9. Сигорский В. П. Математический аппарат инженера / В. П. Сигорский. – Киев : Техника, 1975. – 766 с.

Додаткова

10. Дискретна математика : методичні рекомендації до лабораторних робіт для студентів галузі знань 12 "Інформаційні технології" першого (бакалаврського) рівня / уклад. Т. В. Денисова, В. Ф. Сенчуков. – Харків : ХНЕУ ім. С. Кузнеця, 2018. – 114 с.

11. Кофман А. Введение в прикладную комбинаторику / А. Кофман. – Москва : Наука, 1988. – 452 с.

12. Кук Д. Компьютерная математика / Д. Кук, Г. Бейз. – Москва : Наука, 1990. – 292 с.

13. Лавров И. А. Задачи для теории множеств, математической логики и теории алгоритмов / И. А. Лавров, Л. А. Максимова. – Москва : Высшая школа, 1984. – 402 с.

14. Липский В. Комбинаторика для программистов / В. Липский. – Москва : Мир, 1988. – 392 с.

15. Мальцев Ю. Н. Введение в дискретную математику (элементы комбинаторики, теории графов и теории кодирования) : учеб. пособ. / Ю. Н. Мальцев, Е. П. Петров. – Барнаул : Изд. Алт. ун-та, 1997. – 138 с.

16. Новиков П. С. Элементы математической логики / П. С. Новиков. – Москва : Наука, 1973. – 398 с.

17. Оре О. Теория графов / О. Оре. – Москва : Мир, 1979. – 320 с.

18. Рыбников К. А. Введение в комбинаторный анализ / К. А. Рыбников. – Москва : МГУ, 1972. – 268 с.

19. Соболева Т. С. Дискретная математика / Т. С. Соболева, А. В. Чечкин ; под ред. А. В. Чечкина. – Москва : Издательский центр "Академия", 2006. – 256 с.

20. Харрари Ф. Теория графов / Ф. Харрари. – Москва : Мир, 1973. – 208 с.

21. Яблонский В. Н. Введение в дискретную математику / В. Н. Яблонский. – Москва : Наука, 1991. – 312 с.

Інформаційні ресурси

22. Бондаренко М. Ф. Комп'ютерна дискретна математика [Електронний ресурс] : підручник / М. Ф. Бондаренко, Н. В. Білоус, А. Г. Руткас. – Харків : Компанія СМІТ, 2004. – 480 с. – Режим доступу : http://www.ex.ua/75299234.

23. Боднарчук Ю. В. Основи дискретної математики [Електронний ресурс] : навч. посіб. / Ю. В. Боднарчук, Б. В. Олійник. – Київ : НаУКМА, 2007. – 138 с. – Режим доступу : http://www.twirpx.com/file/589927/.

24. Стрелковська І. В. Дискретна математика [Електронний ресурс] : навч. посіб. / І. В. Стрелковська, А. Г. Буслаєв, О. М. Харсун. – Одеса : ОНАЗ ім. О. С. Попова, 2010. − 196 с. – Режим доступу : http://www.dut.edu.ua/uploads/l_373_44193539.pdf.

25. Стрелковська І. В. Практичні заняття з дискретної математики [Електронний ресурс] / І. В. Стрелковська, А. Г. Буслаєв, В. М. Вишневська. – Одеса : ОНАЗ ім. О. С. Попова, 2008. – 49 с. – Режим доступу : https://metod.onat.edu.ua/metod/ download/443/ua.

26. Швачич Г. Г. Основи дискретної математики. Ч. 3. Основи теорії графів [Електронний ресурс] : навч. посіб. / Г. Г. Швачич, Г. М. Бартенєв, О. В. Оніщенко. – Дніпропетровськ : НМетАУ, 2014. – 67 с. – Режим доступу : http://nmetau.edu.ua/file/shvachich_g.g._osnovy_diskretnoy_matematiki. _chast_iii._osnovy_teorii_grafov_2014.pdf.

НАВЧАЛЬНЕ ВИДАННЯ

Денисова Тетяна Володимирівна
Сенчуков Віктор Федорович

ДИСКРЕТНА МАТЕМАТИКА

Навчальний посібник

Самостійне електронне текстове мережеве видання

Відповідальний за видання *Л. М. Малярець*

Відповідальний редактор *М. М. Оленич*

Редактор *О. С. Новицька*

Коректор *З. В. Зобова*

План 2019 р. Поз. № 2-ЕНП. Обсяг 288 с.

Видавець і виготовлювач – ХНЕУ ім. С. Кузнеця, 61166, м. Харків, просп. Науки, 9-А

Свідоцтво про внесення суб'єкта видавничої справи до Державного реєстру
ДК № 4853 від 20.02.2015 р.