МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ

ХАРКІВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ ЕКОНОМІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ ІМЕНІ СЕМЕНА КУЗНЕЦЯ

О. В. Панасенко
С. В. Прокопович

ФІНАНСОВА МАТЕМАТИКА

Навчальний посібник

Харків
ХНЕУ ім. С. Кузнеця
2017

УДК 330.4(075)
П16

Авторський колектив: канд. екон. наук, доцент О. В. Панасенко – розділи 6 – 8; канд. екон. наук, доцент С. В. Прокопович – вступ, розділи 1 – 5.

Рецензенти: завідувач кафедри економіки та менеджменту Харківського національного університету імені В. Н. Каразіна, д-р екон. наук, професор *Г. О. Дорошенко*; завідувач кафедри фінансів, аналізу та страхування Харківського державного університету харчування та торгівлі, д-р екон. наук, професор *А. С. Крутова*.

Рекомендовано до видання рішенням вченої ради Харківського національного економічного університету імені Семена Кузнеця.
Протокол № 8 від 22.05.2017 р.

Самостійне електронне текстове мережеве видання

Панасенко О. В.
П16 Фінансова математика : навчальний посібник [Електронний ресурс] / О. В. Панасенко, С. В. Прокопович. – Харків : ХНЕУ ім. С. Кузнеця, 2017. – 264 с.
ISBN 978-966-676-716-8

Розглянуто особливості застосування фінансової математики для вирішення найбільш поширених завдань. Подано теоретичний матеріал і демонстраційні приклади, що дозволяють засвоїти методику застосування методів і моделей фінансової математики для дослідження економічних процесів. Наведено запитання для самодіагностики; тести; завдання для самостійного опрацювання за темами, глосарій, лабораторні роботи у середовищі MS Excel.

Рекомендовано для студентів економічних спеціальностей, а також практичних спеціалістів, які проводять дослідження, пов'язані із застосуванням фінансової математики.

УДК 330.4(075)

ISBN 978-966-676-716-8

Зміст

Вступ

На сучасному етапі розвитку суспільства вже неможливо уявити процес наукового пізнання в цілому й економіки зокрема без застосування математичного апарата. Проникнення математики в економічну науку пов'язане з подоланням значних труднощів, оскільки економічним явищам і процесам притаманні масовість, динамічність і стохастичність. Особливості стохастичних систем ускладнюють не тільки побудову математичних моделей, але й перевірку їх адекватності й істинності отриманих результатів.

Не викликає сумнівів той факт, що в основу благополучного існування та розвитку макро- та мікроекономічних об'єктів закладений математичний аналіз економічних моделей таких об'єктів, що успішне прогнозування розвитку процесів в економіці може здійснюватись тільки на основі строгих математичних законів.

Сучасні ринкові умови потребують від суб'єктів господарювання вміння оцінювати всі можливі варіанти фінансових наслідків під час здійснення будь-якої комерційної операції та практично використовувати методи фінансово-економічного аналізу в ході проведення кредитних, інвестиційних та інших комерційних операцій. Математичний апарат сучасного фінансово-економічного аналізу складається з методів і моделей фінансової математики, які дозволяють описувати на кількісному та якісному рівнях явища та процеси фінансової сфери економічного життя суспільства. У зв'язку з цим навчальна дисципліна "Фінансова математика" є однією з необхідних в економіко-математичного циклу.

Метою вивчення навчальної дисципліни є формування системи знань з методології та навичок практичного здійснення фінансових розрахунків і операцій та використання моделей фінансової математики. *Завданням* навчальної дисципліни є засвоєння студентами основних понять теорії фінансової математики, методологічних основ фінансових розрахунків і операцій, оволодіння навичками використання моделей фінансової математики для розроблення й ухвалення управлінських рішень та інформаційних технологій і програмних засобів для розрахунку параметрів і виконання фінансових операцій.

Пререквізитами дисципліни "Фінансова математика" є "Вища математика", "Теорія ймовірності та математична статистика", "Фінанси", "Гроші і кредит". У свою чергу, знання з цієї дисципліни забезпечують успішне засвоєння таких навчальних дисциплін, як: "Актуарне оцінювання та управління фінансовими ризиками", "Актуальні проблеми моделювання економіки", "Фінансовий менеджмент", "Управління проектами інформатизації" та інших дисциплін економіко-математичного циклу, а також виконання тренінгів, міждисциплінарних комплексних курсових робіт, бакалаврських й магістерських дипломних робіт.

Вивчення навчальної дисципліни *"Фінансова математика"* передбачає формування у студентів таких *компетентностей:* здатність проводити й аналізувати основні та похідні фінансові розрахунки; визначати нарощені суми на основі простих і складних відсоткових ставок, зокрема в умовах інфляції; здійснювати операції математичного та банківського дисконтування; визначати фінансову еквівалентність зобов'язань; розраховувати й аналізувати рентні платежі за окремими видами рент; проводити розрахунки й аналізувати кредитні операції; здатність визначати й аналізувати ефективність фінансових операцій, окремих інструментів фондового ринку та реальних інвестицій.

Навчальний посібник складено відповідно до програми дисципліни та містить інформацію за такими темами: "Логіка фінансових операцій", "Фінансова еквівалентність зобов'язань", "Рентні платежі та їх аналіз", "Погашення середньострокових і довгострокових кредитів", "Аналіз ефективності фінансових операцій", "Аналіз ефективності інвестицій в облігації та акції", "Аналіз ефективності реальних інвестицій". У рамках кожної теми поданий теоретичний матеріал; демонстраційні приклади, що дозволяють засвоїти змістовність і методику застосування методів і моделей фінансової математики для дослідження економічних процесів; запитання для самодіагностики; тести; задачі для самостійного розв'язання; ключові слова.

Навчальний посібник призначений для студентів спеціальності 051 "Економіка", а також для студентів інших спеціальностей, які виконують дослідження, пов'язані зі застосуванням фінансової математики.

Розділ 1. Логіка фінансових операцій

1.1. Виникнення фінансової математики як науки.

1.2. Основи кількісного аналізу фінансових операцій.

1.3. Нарахування та дисконтування за простими відсотковими ставками.

1.4. Нарахування складних відсотків.

1.5. Облік рівня інфляції для нарахування простих і складних відсотків.

Ключові слова: фінансова операція; прості відсотки; складні відсотки; період нарахування; термін нарахування; нарощення; дисконтування; облікова ставка; точні відсотки з точним числом днів позики; звичайні відсотки з точним числом днів позики; звичайні відсотки з наближеним числом днів позики; змінні ставки; номінальна ставка; ефективна ставка; темп інфляції.

1.1. Виникнення фінансової математики як науки

Фінансова математика має давню історію. У найдавніших текстах зустрічаються завдання практичного порядку – торгові завдання, обсяг роботи, перевезення, розрахунок податків і зростання грошей. Є завдання на складні відсотки, в яких обчислюється "початковий капітал", якщо відомо його приріст і норма збільшення. У клинописних текстах епохи Селевкідів (близько 2000 років до н.е., Вавилон) є таке завдання: "За який час подвоїться сума грошей, надана під 20 % річних?" [26]. Вирішувалась ця задача ітераціями з точністю до кількості днів. Норма виражалась числом дрібних вагових одиниць на одну вагову частину – основну одиницю срібла. Усі розрахунки проводились у шістдесятковій системі числення: міна срібла дає 12 шекелів приросту, причому 1 міна = 60 шекелів, тобто виходить 20 % приросту. Є і зворотна задача: за нормою зростання цього капіталу обчислити прибуток. Розглядалось також зростання відсотків залежно не тільки від капіталу, але і від часу. У Середні віки в завдання вводиться компонента часу, вони вирішувалися за допомогою складного потрійного правила. Таким чином, зароджується поняття норми прибутку. Зазвичай одиницею часу слугував рік, і вважалось за потрібне розрахування приросту капіталу в випадку більшого або меншого терміну.

Формалізація понять ризику й удачі та їх кількісна оцінка змінювалась в комерційних розрахунках протягом двох тисячоліть. В античності удача персоніфікувалася в образ богині Тахо (в Греції) або Фортуни (в Римі). У християнстві віддача грошей у ріст засуджувалась: "У борг давайте, нічого без вичікування від цього". У 1311 року папа Климент V оголосив стягування відсотків противним вченню Христа. Але комерційний кредит, на відміну від лихварського, дозволявся. Його оформляли як безоплатну позику, або як морську позику з платою за ризик. В італійських морських республіках початку XIII ст. позика надавалась у середньому під 20 %, а відсоток для морської позики з урахуванням ризику був вище. Поступово, до XIV ст. комерційний кредит у Венеції знизився до 8 %, оскільки пожвавлення торгівлі викликало приплив капіталу. Лихварський кредит тоді ж був близько 24 %. Позика або давалась на тривалий термін з торговими цілями та відшкодовувалась в іншому місці (морська позика), або гроші давались на збереження з правом інвестиції. Штрафи за несплату в термін становили від 50 % до подвійної суми боргу [1].

З XIII ст. розповсюдженим типом розрахунків і переказу грошей були безготівкові розрахунки. Це було зручно, оскільки не було потреби возити з собою великі суми грошей, наприклад з Венеції на ярмарки в Нюрнберзі або Брюгге. Зазвичай в угоді брали участь четверо – двоє безпосередніх учасників, третя особа виплачувала суму на користь четвертої особи. Гроші виплачувались за пред'явленням обмінного листа через певний час, прибуток становив 5 – 10 %. Допускався і більш тривалий термін – 7 – 8 місяців, який передбачав і більший прибуток: до 10 – 20 %. Так переводилися не тільки готівкові гроші, а й неоплачені – невраховані, опротестовані рахунки. Це привело до виникнення системи безготівкових розрахунків [23].

У Венеції на площі Сан-Джакомо в Ріальто для здійснення платежів щодня збиралися купці та міняйли, які сиділи за лавками та столами (італ. banco) для розкладання монет. "Scrivere e girate in banco" – форма розрахунків, коли банкір лише реєстрував суми, що переводилися з одного рахунку на інший. Тому банки отримали характерну назву "banchi de scripta". Венеціанські та чужоземні купці здійснювали торговельні операції за допомогою усного розпорядження. Це звільняло їх від необхідності носити з собою великі суми грошей. Більш того – оскільки кожне королівство, герцогство, республіка, місто мали власні гроші, відпала необхідність у багаторазовому переказі. Була створена умовна одиниця для розрахунків, пізніше названа "банківської монетою" – moneta di banco, еквівалентна самим повноцінним монетам, як правило, лірі Гросс. Тоді ж з'являється і перекладний вексель (lettera di cambio).

З XIII ст. купці ведуть торговельні книги, занотовуючи всі торгові операції та підводячи помісячний підрахунок підсумків. Прибуток містився на лівій половині аркуша, видаток – на правій. Таке розташування дебету та кредиту – один проти іншого отримало назву "подвійна бухгалтерія" (la partita doppia). Проводилась перевірка дорівненості дебету та кредиту, розбіжності пояснювались; грошові розрахунки приводились до єдиної монети (флорин, сольдо, динар). Рахунки були як персональні, так і рахунки компаній; операції проводились з грошовими сумами, цінностями і товарами. Це міцно встановилось у XIV ст. для флорентійських, сієнських, генуезьких і венеціанських компаній [24].

У 1458 р. вийшла перша книга з бухгалтерського обліку італійського купця, народженого в Дубровнику, Бенедетто Котрульї (Бенедикт Которульєвіч, 1416 – 1469 рр. "Про торгівлю та досконалого купця" (Della mercatura et del mercante perfetto). Котрульї був творцем італійської бухгалтерії як науки. Він систематизував комерційну термінологію, виклав правила подвійного обліку надходжень і витрат (подвійної бухгалтерії), запропонував враховувати грошові кошти в двох колонках: одна для оригінальної валюти, а інша – для місцевої. Наступним керівництвом з комерційної математики був "Трактат про рахунки та записи" Луки Пачолі, який вийшов в 1494 р. у складі його книги "Сума арифметики".

У результаті конкісти протягом XVI ст. Іспанія отримала еквівалент 1,5 трильйонів доларів США (в цінах 1990 р.) золотом і сріблом. Колосальна кількість золота, привезена в Іспанію з Мексики вже через півсторіччя потрапила в Італію. Причин тому було чимало, але однією з них було вміння італійських банкірів управляти фінансовими потоками.

У XIV ст. болонські юристи вже говорили про близькість понять "понесений збиток" і "недоотриманий прибуток". Якщо одна зі сторін не дотримувалась термінів договору, вона повинна була не тільки виконати умови угоди, а й заплатити за понесений збиток (damnum emergens) і неодержаний прибуток (lucrum cessans). Уже Фома Аквінський погоджувався з тим, що винагорода за збиток через відстрочення платежу має бути стягнута з боржника.

Колективне відшкодування збитку на випадок неврожаю (починаючи з другого тисячоліття до нашої ери) замінювалось створенням колективних запасів, а потім і фондів з регулярними внесками.

У Стародавньому Римі розраховувалися страховий ризик (ризик настання нещасного випадку, як правило – втрата корабля з вантажем); страховий термін (термін несення ризику, тобто термін плавання); страхова премія як міра ризику (тобто винагорода за несення ризику); страхова винагорода (тобто відшкодування, яке надається за прийнятим ризиком). Страхова премія в Стародавній Греції становила 24 – 36 % річних за морською позикою проти 12 – 18 % за звичайною позикою. У Римі відсоток за морською позикою був обмежений Юстиніаном до 12 % річних, тоді як за звичайною позикою граничні ставки коливалися від 4 до 8 % [21].

У XIV ст. виникають перші морські страхові товариства в Італії і Нідерландах. Слідом за страхуванням морських перевезень виникає страхування перевезень на суходолі, річках, озерах. У цих суспільствах проводився підрахунок шансів, тому що за більшого ризику збиралась більша страхова премія. Страхові премії для морських перевезень становили 12 – 15 %, а для перевезень усередині країни – 6 – 8 % від вартості перевезених вантажів. З XVI ст. морське страхування вводиться в інших країнах. У XVII ст. починають з'являтись інші види страхування. Дані страхових товариств були тим матеріалом, на підставі якого розвивалась теорія ймовірностей [24].

Інститут страхування пройшов тривалий шлях становлення з XII до XIV ст. Ще в XII ст. генуезці практикували передання ризику з навігації третій особі, оформляючи її як контракт морського обміну із заставою. У Генуї XII ст. відсоток за морською позикою становив приблизно 33,3 % за рейс в обидва кінці, і 20 – 25 % – за короткі рейси.

Товариства судновласників – "societatas maris" укладали договір коменди, в якому комендаторе (інвестор або група пайовиків) надавав гроші або товари, а трактатор повинен був вести на ці кошти торгівлю в умовленому місці. Власником був комендаторе, але він і ніс відповідальність за ризик. Прибуток розподілявся між сторонами, причому комендаторе отримував його більшу частину (зазвичай 2/3), а трактатор – меншу (зазвичай 1/3). Серед пайовиків прибуток, як і збиток, розподілявся пропорційно часткам (каратам) капіталу, тому суспільства називались "a carati". Цьому типу фінансових операцій відповідає "товариське правило" в перших задачниках з комерційної математики. Коменда укладалась на одне плавання, пайовиками могли стати будь-які городяни. Коменда приносила значні прибутки. Поступово коменду змінили комісійні агенти, які отримували 2 % від вартості товару у ході продажу і 1 % – у ході купівлі. Для особливо складної або особливо дохідної операції він міг збільшитись до 3 %. Це призвело до появи купця-резидента, який постійно проживає в місці здійснення торгівлі.

У XII – XIII ст. страхування не виділялось в окрему форму, воно було частиною коменди, позики. У XIII ст. товар продавався страхувальнику з правом перекуповування його в порту призначення. У XIV ст. з'явився новий тип страхування – фіктивна позика. Страхувальник отримував від застрахованого безвідсоткову позику, яку він повинен був повернути через певний термін, за винятком того випадку, коли корабель або товар благополучно досягав порту призначення. Насправді страхувальник отримував лише страхову премію, не позначену в контракті, а в разі лиха сплачував застрахованому суму збитку. Страхувальник-посередник або група пайовиків з'являються в XIV – XV ст. у Флоренції та Генуї. Страхова сума ділилася на квоти, на кожну з них підписувався один страхувальник. Це знижувало частку ризику та приносило значні прибутки, і займалися цим знатні та заможні городяни. Страхова премія на маршруті Генуя – Каффа наприкінці XIV ст. становила від 5 до 6,8 %, а з 1456 р. доходила і до 10 %. У цілому в торговельній практиці обох морських республік XIV – XV ст. вона коливалась від 1,5 до 10 %, залежно від ступеня ризику та протяжності маршруту [21].

У Середземноморських республіках пізнього середньовіччя завдяки жвавій торговій діяльності виникла та сформувалась термінологія і основна структура фінансової математики. У сфері основних фінансових потоків виникли безготівкові форми розрахунку та відповідні їм фінансові документи. У торгових книгах здійснювались записи про торгові операції з подвійним урахуванням надходжень і витрат; перерахунок монет до єдиної монети; розрахунок паїв за прибутком і збитками; розрахунок страхових сум і різні форми несення ризику. Виокремилась роль страхувальника, диференціювались поняття страхового ризику, страхового терміну, страхової премії як міри ризику, страхової винагороди. Поняття ризику, яке розвивалось протягом наступних століть, знайшло математичну форму в теорії ймовірностей XVII ст., але було юридично визначено лише наприкінці XIX ст. Торгові книги, а також купецькі керівництва (книги абака) періоду пізнього Середньовіччя та Відродження, містять не тільки історичну, економічну, а й математичну інформацію. У Середні віка фінансова математика була носієм математичного знання, що поширювалось швидше та ширше, ніж наукова математична література [24].

Фінансова математика як наука продовжила свій розвиток і у XX ст. У 20 – 30-ті рр. XX ст. розпочався розвиток теорії інвестування, представлений передусім працями І. Фішера, присвяченими теорії відсоткової ставки та приведеної вартості. У теоретичних працях того періоду було висунуто гіпотезу щодо цілковитої визначеності умов ухвалення фінансових рішень.

Тогочасні математичні засоби зводились до звичайної алгебри й основ фундаментального аналізу. Незважаючи на панування "детермінованого підходу", важливість факторів невизначеності та ризику усвідомлювалась досить чітко. Однак лише застосування якісних теоретично-ймовірнісних методів уможливило прорив у дослідженнях впливу ризику на ухвалення інвестиційних рішень. Саме роботи даного напряму дістали назву сучасної теорії інвестицій.

Поява в 1952 р. статті Г. Марковіца під назвою "Вибір портфеля" започаткувала теорію оптимального портфеля. Марковіц запропонував теоретично-імовірнісну формалізацію понять дохідності та ризику, що дало змогу перекласти завдання вибору оптимального портфеля на мову математики. Саме він звернув увагу на загальноприйняту практику диверсифікації та довів, що інвестори можуть зменшити стандартне відхилення дохідності портфеля, добираючи акції, ціни на які змінюються по-різному.

Наступним важливим етапом стала робота В. Шарпа (1964 р.), в якій ідеї Г. Марковіца втілились у моделі, яка пояснювала поведінку інвесторів на ринку, що знаходиться в рівноважному стані. Згодом, у 1965 р., П. Самуельсон для опису динаміки зміни вартості акцій вводить так званий геометричний броунівський рух. У 1973 р. Б. Фішером і М. Шоулзом була запропонована модель ціноутворення опціонів. Ця модель визначає теоретичну ціну на європейські опціони, яка передбачає, що якщо базовим активом торгують на ринку, то його ціна неявним чином установлюється самим ринком. Дана модель широко використовується на практиці для оцінювання всіх похідних паперів, включаючи варанти та конвертовані цінні папери, та навіть для оцінювання власного капіталу фінансово залежних фірм.

У сучасному світі фінансова математика дозволяє своєчасно оцінювати та прогнозувати зміну основних макро- та мікроекономічних факторів і сприяє розвитку економіки. Фінансова математика має практичне значення, з її допомогою проводяться всі розрахунки в фінансових операціях.

1.2. Основи кількісного аналізу фінансових операцій

Фінансова операція – це будь-яка операція, пов'язана зі здійсненням або забезпеченням здійснення платежу суб'єктами господарювання, зокрема [33]:

внесення або зняття депозиту (внеску, вкладу);

переказ грошей з рахунка на рахунок;

обмін валюти;

надання послуг з випуску, купівлі або продажу цінних паперів та інших видів фінансових активів;

надання або отримання позики або кредиту;

страхування (перестрахування);

надання фінансових гарантій та зобов'язань;

довірче управління портфелем цінних паперів;

фінансовий лізинг;

здійснення випуску, обігу, погашення (розповсюдження) державної та іншої грошової лотереї;

надання послуг з випуску, купівлі, продажу й обслуговування чеків, векселів, платіжних карток, грошових поштових переказів та інших платіжних інструментів;

відкриття рахунка.

Отже, будь-яка фінансова операція передбачає здійснення платежу або ряду платежів, тому сторонам фінансової операції необхідно узгодити ряд умов. До таких умов належать: *сума платежу, відсоткова ставка, термін операції та ін*. Кожна з даних умов може бути подана по-різному. Сума платежу може бути разовою чи включати кілька платежів. У випадку, якщо фінансова операція передбачає кілька платежів, такі платежі можуть бути постійними або змінними. Можуть відрізнятись також методи нарахування відсотків. Показник часу у фінансовій операції встановлюється у вигляді фіксованих термінів платежів, інтервалів надходжень платежів, моментів погашення заборгованості тощо.

Окрема фінансова операція передбачає узгодження всіх показників, що взаємопов'язуються за певною системою. Результати окремої фінансової операції залежать від багатьох параметрів і часто не є очевидними, а потребують проведення розрахунків. Крім того, навіть незначна зміна одного параметра позначиться на результаті фінансової операції. Змінюватись можуть одночасно декілька параметрів, що також вплине на результат фінансової операції. А отже, такі системи повинні бути об'єктом кількісного фінансового аналізу, що складає **предмет фінансової математики (ФМ).**

Класична фінансова математика передбачає здійснення розрахунків в умовах визначеності коли всі параметри фінансової операції заздалегідь відомі та не змінюються. Наприклад, під час оформлення кредиту обговорюються всі параметри: сума кредиту, відсоткова ставка, термін кредиту, механізм погашення кредиту.

Стохастична фінансова математика передбачає здійснення розрахунків в умовах невизначеності, наприклад в умовах коливання валютного курсу.

Фінансова математика включає як елементарні фінансові розрахунки, пов'язані з нарахуванням відсотків, так і більш складні розрахунки, пов'язані з розрахунком "справедливої" ціни фінансових інструментів, проведенням актуарних розрахунків, прогнозуванням фінансових ринків, оцінюванням ефективності інвестицій та ін.

До **основних завдань ФМ** відносять:

розрахунок кінцевих результатів фінансової операції для кожної із сторін;

розроблення плану виконання фінансової операції (наприклад, плану погашення кредиту);

визначення залежності результатів фінансової операції від зміни одного чи кількох параметрів;

визначення еквівалентних параметрів для беззбиткової зміни початкових умов фінансової операції;

оптимізацію портфеля активів;

проведення актуарних розрахунків;

оцінювання доцільності інвестування в облігації та акції;

аналіз ефективності реальних інвестицій та ін.

Знання методів ФМ необхідне у різних галузях, для роботи в фінансово-кредитній сфері, в тому числі на етапі розроблення умов контрактів для юридичних осіб. Такі знання необхідні також фізичним особам і приватним підприємцям для оформлення кредитних чи депозитних договорів. Не можна обійтись без них у страхуванні й інвестуванні, у прогнозуванні поведінки фінансових ринків.

Фактор часу у фінансових операціях

У будь-якій фінансовій операції суми платежів, незалежно від їх розміру та призначення, здійснюються у певні періоди часу. Для цього сторони фінансової операції фіксують у контракті термін фінансової операції, періодичність і дати платежів. *Фактор часу* суттєво впливає на результати фінансової операції, особливо це відчутно для довгострокових операцій. Необхідність урахування фактору часу випливає із сутності фінансово-кредитних операцій, інвестування, страхування, адже однакові грошові суми, що належать до різних моментів часу, є нерівноцінними. Зрозуміло, що 100 грн сьогодні і та ж сума через два роки матимуть різну цінність.

Різна цінність двох однакових за абсолютною величиною сум у різні моменти часу пов'язана насамперед з тим, що наявна сьогодні сума може бути інвестована та принесе дохід у майбутньому. В умовах інфляції вплив фактору часу на результати фінансової операції багаторазово посилюється.

Важливим у фінансових операціях є *принцип фінансової еквівалентності*, під яким розуміють рівність (еквівалентність) фінансових зобов'язань сторін, що беруть участь в операції. Принцип еквівалентності дозволяє змінювати умови фінансової операції без порушення прийнятих зобов'язань. Таким чином, можна змінювати терміни виконання зобов'язань, розподіл платежів у часі й інші параметри за згодою сторін у рамках однієї операції, зберігаючи початкові результати фінансової операції.

Відсотки, види відсоткових ставок у фінансових операціях

Фінансова операція передбачає відсоткову ставку, яка характеризує її доходність. Отримання відсотків за надані у борг гроші практикувалось ще до нашої ери. Так, у Древній Греції відсоткова ставка визначалась вільно та могла коливатись від 8 до 36 %. У IV ст. до н. е. в Афінах відсоткові ставки, як правило, становили 12 % на заставний кредит і від 16 до 18 % – на інші типи позик, за винятком морських кредитів. У Древній Месопотамії, зокрема у Вавилоні, діяла єдина відсоткова ставка 20 %. У Давньому Римі банкіри встановлювали відсоткову ставку в різні часи від 6 до 60 %. В Єгипті у 249 р. до н. е., в Александрії банківська позика, гарантована злитком срібла, надавалась під 12 %. В іншій частині країни у III і II ст. до н. е. гроші надавались у середньому під 24 %. За часів правління імператора Юстиніана найбільша відсоткова ставка за кредитами у банках Константинополя становила 8 %. У пізньому Середньовіччі у Західній Європі відсоткова ставка досягала 40 – 65 % річних [14].

В Україні за час незалежності відсоткова ставка змінювалась і на кінець 2016 р. середня відсоткова ставка за кредитами становила 29,5 % [37].

Сторони фінансової операції (кредитор і позичальник) домовляються про розмір відсоткової ставки. Під **відсотковою ставкою** розуміють відносну величину доходу за фіксований відрізок часу – відношення доходу (відсоткових грошей) до суми боргу. Відсоткова ставка є одним з найважливіших показників фінансової операції. Вона може бути подана у вигляді десяткового або звичайного дробу (в останньому випадку вона фіксується в контрактах з точністю до 1/16 або 1/32) або у відсотках. Під час розрахунків відсоткові ставки зазвичай вимірюються в десяткових дробах.

Розрізняють *період нарахування* та *термін нарахування* відсоткової ставки. **Період нарахування** – це інтервал часу, до якого приурочена відсоткова ставка (рік, півріччя, квартал, місяць, день). Найчастіше встановлюють річну відсоткову ставку. А **термін нарахування** – це термін дії фінансової операції.

Відсотки можуть виплачуватись у міру їх нарахування або приєднуватись до основної суми бору (капіталізація відсотків). Це регулюється умовами фінансової операції, про які домовляються кредитор і позичальник.

Процес збільшення суми грошей в часі в зв'язку з приєднанням відсотків називають **нарощенням**, або зростанням, цієї суми. Можна проводити розрахунки і в зворотному порядку – від майбутнього часу до теперішнього. Такий спосіб називають **дисконтуванням** (майбутня сума грошей зменшується на величину відповідного дисконту – знижки).

Розмір відсоткової ставки встановлюється сторонами фінансової операції. Він залежить від таких факторів, як:

стан грошово-кредитного ринку;

вид фінансової операції та її валюти;

термін операції;

надійність кредитора та позичальника та їх попередні відносини.

Відсоткова ставка є не лише інструментом нарощення суми, а й показником дохідності фінансової операції, незалежно від того, чи відбувся факт безпосереднього інвестування грошових коштів і процес їх нарощення.

У фінансовій математиці застосовують різні види відсоткових ставок. Розрізняють **прості та складні відсоткові ставки**, вони відрізняються постійною чи змінною (відсотки на відсотки) базою для нарахування відсотків. Відсоткові ставки можуть відрізнятись принципом розрахунку відсоткових грошей: від теперішнього часу до майбутнього і, навпаки, від майбутнього часу до теперішнього. У першому випадку використовують **ставку нарощення**, у другому – **ставку дисконтування** (облікову ставку). Ці два способи визначення та нарахування відсотків ще називають *декурсивним* та *антисипативним* способами нарахування відсотків. Декурсивні відсотки у більшості випадків називають просто відсотками. Також відсоткові ставки можуть бути **фіксованими**, якщо у контракті вказується їх розмір, і **плаваючими**, якщо відсоткова ставка "прив'язана" до певного ринкового показника (її розмір не фіксується на весь термін фінансової операції, а змінюється через певні проміжки часу).

Окреме місце в фінансовій математиці належить обліковій ставці [31]. **Облікова ставка** *(discount rate)* – один із монетарних інструментів, за допомогою якого Національний банк України (надалі – НБУ) встановлює для банків та інших суб'єктів грошово-кредитного ринку орієнтир щодо вартості залучених і розміщених грошових коштів на відповідний період. Облікова ставка є базовою відсотковою ставкою щодо інших відсоткових ставок НБУ. Облікова ставка використовується НБУ одночасно як засіб реалізації грошово-кредитної політики й орієнтир ціни на гроші. Динаміка облікової ставки характеризує основні напрями змін грошово-кредитного регулювання.

Рівень і характер змін облікової ставки залежить від тенденцій економічного розвитку країни, макроекономічних і бюджетних процесів, стану грошово-кредитного ринку тощо. Облікова ставка має підтримуватись на позитивному рівні щодо прогнозованого рівня інфляції, який визначається Кабінетом Міністрів України на відповідний рік і враховується під час складання державного бюджету. Облікова ставка є найнижчою серед відсоткових ставок, за якими НБУ може підтримувати ліквідність банків. Розмір облікової ставки затверджується рішенням Правління НБУ.

1.3. Нарахування та дисконтування за простими відсотковими ставками

Нарахування за простими відсотковими ставками.

Нарощена сума позики (боргу, депозиту, інвестованих грошей) складається з первісної суми та нарахованих відсотків за весь термін позики. Нарощена сума розраховується шляхом множення первісної суми боргу на множник нарощення. Множник нарощення розраховується залежно від виду відсоткової ставки й умов нарощення та показує, у скільки разів нарощена сума перевищує первісну.

Нарахування за простою відсотковою ставкою здійснюється у випадку, коли відсотки не приєднуються до основної суми боргу, та застосовується переважно для короткострокових позик.

Введемо умовні позначення:

S – нарощена сума, тобто сума в кінці терміну (майбутня вартість внеску);

P – первинна сума внеску;

I – відсотки за весь термін вкладу;

i – відсоткова ставка, ставка нарощування відсотків (десятковий дріб);

n – термін вкладу.

Найчастіше термін позики вказується у роках, тоді i означає річну відсоткову ставку. За рік сума нарахованих відсотків розраховується як $P \cdot i$. За весь термін сума відсотків складе $I = Pni$.

За умови, коли прості відсотки нараховуються один раз на рік, майбутня вартість внеску на кінець n–го року визначається за формулою:

$$S = P + I = P + P \cdot n \cdot i = P(1 + n \cdot i), \qquad (1.1)$$

Вираз (1.1) називають *формулою простих відсотків,* а множник $(1 + n \cdot i)$ – *множником нарощування простих відсотків.*

Графічне зображення нарощування за простою відсотковою ставкою подане на рис. 1.1.

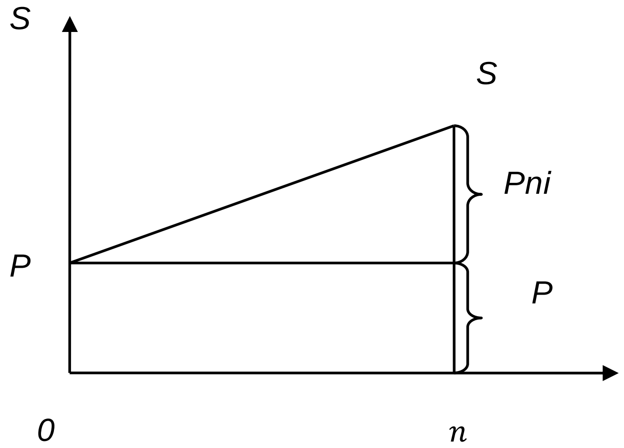


Рис. 1.1. **Графічне зображення нарощування за простою відсотковою ставкою**

Приклад 1.1. Депозитний внесок величиною 1 тис. грн розміщений в банку на десять років під 10 % річних, нарахування відсотків здійснюється за простою відсотковою ставкою.

Якщо $P = 1\ 000, i = 0{,}1$, а $n = 10$, то майбутня вартість внеску через десять років складе:

$$S = 1\ 000(1 + 10 \cdot 0{,}1) = 2\ 000 \text{ (грн).}$$

Результати виконання розрахунку нарощеної вартості покроково (один крок – один рік) подані в табл. 1.1.

Таблиця 1.1

Розрахунки за умови нарахування простих відсотків один раз на рік

Роки	Стан рахунку на початку року, грн	Відсотки, накопичені протягом року, грн	Усього на рахунку в кінці року, грн
1	1 000,00	100,00	1 100,00
2	1 100,00	100,00	1 200,00
3	1 200,00	100,00	1 300,00
4	1 300,00	100,00	1 400,00
5	1 400,00	100,00	1 500,00
6	1 500,00	100,00	1 600,00
7	1 600,00	100,00	1 700,00
8	1 700,00	100,00	1 800,00
9	1 800,00	100,00	1 900,00
10	1 900,00	100,00	2 000,00

Нарахування простих відсотків для короткострокових позик

Для фінансових операцій, як правило, встановлюється розмір річної відсоткової ставки. Якщо термін позики менше року, необхідно визначити, яка частина річного відсотка буде сплачуватись кредиторові. Виразимо термін позики n у вигляді дробу:

$$n = \frac{t}{K},$$

де t – кількість днів позики

K – кількість днів у році, або *часова база нарахування відсотків.*

У цьому випадку формула (1.1) прийме вигляд:

$$S = P \cdot \left(1 + \frac{t}{K} i\right). \tag{1.2}$$

Для розрахунку відсотків застосовують дві часові бази: K = 360 днів (12 місяців по 30 днів) або K = 365 (366) днів. Якщо K = 360, то отримують *звичайні* або *комерційні* відсотки*,* а з використанням дійсної тривалості року (365, 366 днів) розраховують *точні* відсотки*.*

Число днів позики також може розраховуватись приблизно (будь-який місяць приймається дорівненим 30 дням) і точно шляхом підрахунку календарного числа днів позики, починаючи з дати видачі та закінчуючи датою погашення позики, причому день видачі і день погашення вважаються за один день. Таким чином, у фінансових розрахунках використовують такі варіанти розрахунку:

1) *точні відсотки з точним числом днів позики.* Цей варіант дає найбільш точні результати. У комерційних документах він позначається як 365/365 або АСТ/АСТ. Цей варіант застосовується центральними банками багатьох країн і крупними комерційними банками;

2) *звичайні відсотки з точним числом днів позики.* Цей варіант ще називають *банківським, він* поширений в позикових операціях комерційних банків між країнами, у внутрішніх операціях; позначається, як 365/360 або АСТ/360;

3) *звичайні відсотки з наближеним числом днів позики.* Цей варіант застосовують для попередніх і проміжних розрахунків, коли не потрібна висока точність. Метод умовно позначається як 360/360.

Приклад 1.2. Депозит на суму 20 000 грн був відкритий з 10.12.2016 р. до 19.03.2017 р. включно під 15 % річних. Нарахування відсотків здійснюється за простою відсотковою ставкою.

Визначимо спочатку термін позики, приймаючи до уваги, що день відкриття та день закриття депозиту рахують за один день. Таким чином, *точне число днів* позики з 10.12.2016 р. до 19.03.2017 р. складе $t = 22 + 31 + 28 + 19 - 1 = 101$ день.

Наближене число днів складе $t = 21 + 30 + 30 + 20 - 1 = 100$ днів.

Розрахунки майбутньої вартості внеску для нарахування простих відсотків за різними варіантами наведені у табл. 1.2.

Таблиця 1.2

Розрахунки нарощеної суми депозиту для нарахування простих відсотків

Варіанти розрахунку	Формула розрахунку	Усього на рахунку в кінці строку, грн
365/365	$S = 20\,000\left(1 + \frac{101}{365} \cdot 0{,}15\right)$	20 830,14
365/360	$S = 20\,000\left(1 + \frac{101}{360} \cdot 0{,}15\right)$	20 841,67
360/360	$S = 20\,000\left(1 + \frac{100}{360} \cdot 0{,}15\right)$	20 833,33

Якщо загальний термін позики охоплює два суміжні календарні роки і є необхідність у розподіленні суми відсотків між ними (наприклад, у визначенні річних сум доходу), то загальна сума нарахованих простих відсотків складе суму відсотків, отриманих у кожному році:

$$I = I_1 + I_2 = Pn_1 i + Pn_2 i\,, \tag{1.3}$$

де n_1 і n_2 – частини терміну позики, що доводяться на кожен календарний рік.

Приклад 1.3. Депозит на суму 20 000 грн був відкритий з 10.12.2016 р. до 19.03.2017 р. включно під 15 % річних. Нарахування відсотків здійснюється за простою відсотковою ставкою.

За варіантом розрахунку 365/365 відсотки складуть:

$$I_1 = 20\,000 \cdot \frac{22 - 0{,}5}{365} \cdot 0{,}15 = 176{,}71 \text{ (грн)};$$
$$I_2 = 20\,000 \cdot \frac{80 - 0{,}5}{365} \cdot 0{,}15 = 653{,}42 \text{ (грн)};$$
$$I = I_1 + I_2 = 176{,}71 + 653{,}42 = 830{,}14 \text{ (грн)}.$$

За варіантом розрахунку 365/360 відсотки складуть:

$$I_1 = 20\,000 \cdot \frac{22 - 0{,}5}{360} \cdot 0{,}15 = 179{,}17 \text{ (грн)};$$
$$I_2 = 20\,000 \cdot \frac{80 - 0{,}5}{360} \cdot 0{,}15 = 662{,}50 \text{ (грн)};$$
$$I = I_1 + I_2 = 179{,}17 + 662{,}50 = 841{,}67 \text{ (грн)}.$$

За варіантом розрахунку 360/360 відсотки складуть:

$$I_1 = 20\,000 \cdot \frac{21 - 0{,}5}{360} \cdot 0{,}15 = 170{,}83 \text{ (грн)};$$
$$I_2 = 20\,000 \cdot \frac{80 - 0{,}5}{360} \cdot 0{,}15 = 662{,}50 \text{ (грн)};$$
$$I = I_1 + I_2 = 170{,}83 + 662{,}50 = 833{,}33 \text{ (грн)}.$$

Змінні ставки. У фінансових операціях іноді передбачається зміна відсоткової ставки в часі. Для простої відсоткової ставки нарощена на кінець терміну сума визначається таким чином:

$$S = P(1 + n_1 i_1 + n_2 i_2 + \cdots + n_m i_m) = P\left(1 + \sum_{t=1}^{m} n_t i_t\right), \tag{1.4}$$

де i_t – ставка простих відсотків у періоді t;

n_t – тривалість періоду з постійною ставкою.

Приклад 1.4. Депозитний внесок величиною 1 тис. грн розміщений в банку на десять років. За умовами договору передбачена зміна відсоткової ставки: перші п'ять років – 10 %, кожен подальший рік ставка підвищується на 0,5 %. Нарахування відсотків здійснюється за простою відсотковою ставкою, тоді майбутня вартість внеску через десять років з нарахуванням простих відсотків складе:

$$S = 1\,000(1 + 5 \cdot 0{,}1 + 1 \cdot 0{,}105 + 1 \cdot 0{,}11 + 1 \cdot 0{,}115 + 1 \cdot 0{,}12 + 1 \cdot 0{,}125) = \\ = 2\,075 \text{ (грн)}.$$

Результати виконання розрахунку нарощеної вартості покроково подані у табл. 1.3.

Таблиця 1.3

Розрахунки для нарахування простих відсотків зі змінною ставкою

Роки	Ставка відсотків	Стан рахунку на початку року, грн	Відсотки, накопичені протягом року, грн	Всього на рахунку в кінці року, грн
1	0,1	1 000,00	100,00	1 100,00
2	0,1	1 100,00	100,00	1 200,00
3	0,1	1 200,00	100,00	1 300,00
4	0,1	1 300,00	100,00	1 400,00
5	0,1	1 400,00	100,00	1 500,00
6	0,105	1 500,00	105,00	1 605,00
7	0,11	1 605,00	110,00	1 715,00
8	0,115	1 715,00	115,00	1 830,00
9	0,12	1 830,00	120,00	1 950,00
10	0,125	1 950,00	125,00	2 075,00

Нарахування відсотків зі зміною сум депозиту в часі. У випадку, якщо сума депозиту змінюється в часі (з поповненням депозиту або зі зняттям частини коштів), сума нарахованих відсотків визначається за формулою:

$$I = \sum_j R_j n_j \, i, \tag{1.5}$$

де R_j – залишок коштів на рахунку в момент j після чергового надходження або списання коштів;

n_j – термін зберігання грошей (в роках) до нової зміни залишку коштів на рахунку.

Приклад 1.5. Депозит на суму 20 000 грн був відкритий з 10.12.2016 р. до 19.03.2017 р. включно під 15 % річних. Розрахувати суму нарахованих простих відсотків (365/365, 365/360), якщо 1 січня депозит поповнився на первинну суму.

Якщо 1 січня депозит поповнився на первинну суму, то зміни у сумі нарахованих відсотків відбудуться тільки у другому календарному році.

За варіантом розрахунку 365/365 відсотки складуть:

$$I_2 = 40\,000 \cdot \frac{80 - 0{,}5}{365} \cdot 0{,}15 = 1\,306{,}85 \text{ (грн)};$$
$$I = I_1 + I_2 = 176{,}71 + 1\,306{,}85 = 1\,483{,}56 \text{ (грн)}.$$

За варіантом розрахунку 365/360 відсотки складуть:

$$I_2 = 40\,000 \cdot \frac{80 - 0{,}5}{360} \cdot 0{,}15 = 1\,325{,}00 \text{ (грн)};$$
$$I = I_1 + I_2 = 179{,}17 + 1\,325{,}00 = 1\,504{,}17 \text{ (грн)}.$$

Дисконтування за простими відсотковими ставками

Сутність операції полягає в тому, що відсотки нараховуються на початку розрахункового періоду. Для цього за базу (100 %) береться сума погашення боргу, тобто банк утримує авансові відсотки від видачі кредиту (або відсотки за депозитом виплачуються в момент відкриття депозитного рахунку). У цьому випадку застосовується облікова ставка d (це *банківський облік*).

Розмір дисконту, або суми обліку, очевидно дорівнений $S \cdot n \cdot d;$ якщо d – річна облікова ставка, то n вимірюється в роках. Тоді:

$$P = S - Snd = S(1 - nd). \qquad (1.6)$$

Дисконтний множник тут дорівнює $(1 - nd).$ З формули (1.6) витікає, що з $n > 1/d$ величина дисконтного множника і, отже, суми P стане від'ємною. Інакше кажучи, за умови відносно великого терміну зобов'язання облік може привести до нульової або навіть від'ємної суми $P.$ Наприклад, з $d = 25\ \%$ уже чотирирічний термін достатній для того, щоб позичальник нічого не отримав від обліку зобов'язання.

Облік за допомогою облікової ставки найчастіше здійснюється за часовою базою K = 360 днів, число днів позики зазвичай береться точним.

Приклад 1.6. Точне число днів позики 101 день, сума погашення боргу складає 20 тис. грн, проста дисконтна ставка 15 %. Необхідно розрахувати первинну суму боргу.

Розрахувати первинну суму можна у такий спосіб.

За варіантом розрахунку 365/365 первинна сума становить:

$$P = S\left(1 - \frac{t}{K}d\right) = 20\,000\left(1 - \frac{101}{365} \cdot 0{,}15\right) = 19\,169{,}86\ (\text{грн}).$$

За варіантом розрахунку 365/360 первинна сума становить:

$$P = 20\,000\left(1 - \frac{101}{360} \cdot 0{,}15\right) = 19\,158{,}33\ (\text{грн}).$$

Термін "дисконтування" вживається і в більш широкому сенсі – як засіб визначення вартісної величини, віднесеної до майбутнього, на більш ранній момент часу. Величину *P,* знайдену за допомогою дисконтування, називають *сучасною вартістю,* або *сучасною величиною майбутнього платежу S,* а іноді – *поточною,* чи *капіталізованою, вартістю.*

У фінансових операціях застосовують два методи дисконтування – *математичне дисконтування* і *банківський (комерційний) облік.* У першому випадку застосовується ставка нарощення, у другому – облікова ставка.

Математичне дисконтування. Математичне дисконтування передбачає операцію, зворотну нарощуванню: яку початкову суму позики треба видати в борг, щоб отримати в кінці терміну суму *S*, за умови, що на борг нараховуються відсотки за ставкою *i.* Розв'язавши (1.1) відносно *P,* знайдемо:

$$P = \frac{S}{1 + ni}. \tag{1.7}$$

Розрахована величина P є сучасною величиною суми S, яка буде виплачена через n років. Дріб $1/(1 + ni)$ називають *дисконтним,* або *дисконтуючим множником.* Цей множник показує, яку частку становить первісна величина боргу в остаточній його сумі.

Визначення терміну позики та розміру відсоткової ставки

Під час узгодження умов фінансової операції може виникати необхідність визначення терміну позики чи розміру відсоткової ставки.

Термін позики. Для розрахунку терміну позики в роках із формул (1.1) і (1.6) отримуємо:

$$n = \frac{S-P}{P \cdot i} = \frac{S/P-1}{i}; \qquad (1.8) \qquad n = \frac{S-P}{S \cdot d} = \frac{1-P/S}{d}. \qquad (1.9)$$

Термін у днях ($n = \frac{t}{K}$, де K – часова база):

$$t = \frac{S-P}{P \cdot i} \cdot K = \frac{\frac{S}{P}-1}{i} \cdot K; \qquad (1.10) \qquad t = \frac{S-P}{S \cdot d} \cdot K = \frac{1-\frac{P}{S}}{d} \cdot K. \qquad (1.11)$$

Величина відсоткової ставки. У ході порівняння умов кількох фінансових операцій або визначення ефективності фінансової операції, особливо якщо відсоткова ставка не вказана у явному вигляді, виникає необхідність у розрахунку величини відсоткової ставки. Вирішивши вираження (1.1) і (1.6) щодо i або d, отримаємо формули:

$$i = \frac{S-P}{P \cdot n} = \frac{S-P}{P \cdot t} \cdot K; \qquad (1.12) \qquad d = \frac{S-P}{S \cdot n} = \frac{S-P}{S \cdot t} \cdot K. \qquad (1.13)$$

1.4. Нарахування складних відсотків

У фінансовій математиці, окрім простих, можуть застосовуватись *складні відсотки.* Нарахування складних відсотків найчастіше застосовується у середньо- та довгострокових операціях. На відміну від простих відсотків (у цьому випадку база для нарахування не є незмінною) вона збільшується в часі. Це відбувається за рахунок того, що нараховані відсотки не виплачуються одразу після їх нарахування, а приєднуються до основної суми боргу, тим самим збільшуючи її. І тепер вже таке нарахування відсотків відбувається на підвищену суму. Таким чином, з кожним разом розмір бази для нарахування збільшується і сума нарахованих відсотків теж зростає пропорційно. Такий процес ще називають *капіталізацією відсотків*.

Для нарахування складних відсотків один раз на рік майбутня вартість внеску на кінець n–го року визначається за формулою:

$$S = P(1 + i)^n. \tag{1.14}$$

Вираження (1.14) називають *формулою складних відсотків,* а множник $(1 + i)^n$ – *множником нарощування складних відсотків.*

Сума нарахованих відсотків визначається за формулою:

$$I = S - P = P((1 + i)^n - 1). \tag{1.15}$$

Частина з суми нарахованих відсотків отримана за рахунок нарахування відсотків на відсотки. Ця частина визначається за формулою:

$$I_p = P((1 + i)^n - (1 + ni)). \tag{1.16}$$

Графічне зображення нарощування за складною відсотковою ставкою подане на рис. 1.2.

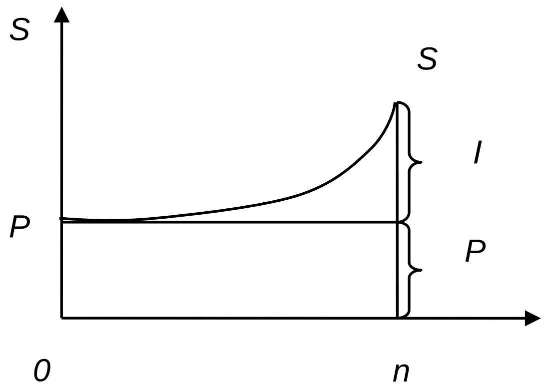


Рис. 1.2. **Графічне зображення нарощування за складною відсотковою ставкою**

Як видно з рис. 1.2, у випадку нарахування складних відсотків для довгострокових фінансових операцій навіть невелика зміна розміру складної відсоткової ставки буде суттєво збільшувати нарощену суму S.

Складні відсотки нараховуються, як правило, за методом АСТ/АСТ (365/365).

Приклад 1.7. Депозитний внесок величиною 1 тис. грн розміщений в банку на десять років під 10 % річних. Нарахування відсотків здійснюється за складною відсотковою ставкою.

Якщо $P = 1\ 000,\ i = 0{,}1$, а $n = 10$, то майбутня вартість внеску через десять років складе:

$$S = 1\ 000(1 + 0{,}1)^{10} = 2\ 539{,}74 \text{ (грн).}$$

Результати виконання розрахунку нарощеної вартості покроково (один крок – один рік) подані у табл. 1.4.

Таблиця 1.4

Розрахунки для нарахування складних відсотків один раз на рік

Роки	Стан рахунку на початку року, грн	Відсотки, накопичені протягом року, грн	Всього на рахунку в кінці року, грн
1	1 000,00	100,00	1 100,00
2	1 100,00	110,00	1 210,00
3	1 210,00	121,00	1 331,00
4	1 331,00	133,10	1 464,10
5	1 464,10	146,41	1 610,51
6	1 610,51	161,05	1 771,56
7	1 771,56	177,16	1 948,72
8	1 948,72	194,87	2 143,59
9	2 143,59	214,36	2 357,95
10	2 357,95	235,79	2 593,74

Нарахування відсотків в суміжних календарних періодах

Якщо фінансова операція охоплює два суміжних календарних періоди, для бухгалтерського обліку та фінансового аналізу необхідно визначити суми нарахованих відсотків окремо за періодами. У цьому випадку загальний термін позики розподіляють на два періоди n_1 і n_2. Відповідно, загальна сума нарахованих відсотків:

$$I = I_1 + I_2 = P((1+i)^{n_1} - 1) + P((1+i)^{n} - (1+i)^{n_1}). \qquad (1.17)$$

Приклад 1.8. Депозит на суму 20 000 грн був відкритий з 10.12.2016 р. до 19.03.2017 р. включно під 15 % річних. Нарахування відсотків здійснюється за складною відсотковою ставкою за методом 365/365.

У випадку визначення нарощеної величини депозиту для нарахування складних відсотків у цілому за період менший одного року формула (1.14) прийме вигляд:

$$S = P\left(1 + \frac{i}{K}\right)^{t}.$$

Відповідно початковим даним $P = 20\,000,\ i = 0{,}15$ варіант розрахунку прийнятий 365/365. Тоді майбутня вартість внеску складе:

$$S = 20\,000\left(1 + \frac{0{,}15}{365}\right)^{101} = 20\,847{,}43\ (\text{грн}).$$

Відсотки за кожним з періодів визначаються за формулами:

$$I_1 = P\left(\left(1 + \frac{i}{K}\right)^{t_1} - 1\right); \qquad I_2 = P\left(\left(1 + \frac{i}{K}\right)^{t} - \left(1 + \frac{i}{K}\right)^{t_1}\right),$$

де t_1 – кількість днів вкладу в першому календарному році.

Відсотки за кожним з періодів для варіанту 365/365 і нарощена сума складуть:

$$I_1 = 20\,000\left(\left(1 + \frac{0{,}15}{365}\right)^{22-0{,}5} - 1\right) = 177{,}46\ (\text{грн});$$

$$I_2 = 20\,000\left(\left(1 + \frac{0{,}15}{365}\right)^{101} - \left(1 + \frac{0{,}15}{365}\right)^{22-0{,}5}\right) = 669{,}97\ (\text{грн});$$

$$I = I_1 + I_2 = 847{,}43\ (\text{грн})$$

$$S = P + I = 20\,000 + 847{,}43 = 20\,847{,}43\ (\text{грн}).$$

Змінні ставки. Майбутню вартість внеску для нарахування складних відсотків, якщо передбачена зміна ставки відсотків, визначають за формулою:

$$S = P \cdot \prod_{t=1}^{m} (1 + i_t)^{n_t}, \tag{1.18}$$

де i_t – послідовні значення ставок;

n_t – періоди, протягом яких діють відповідні ставки.

Приклад 1.9. Депозитний внесок величиною 1 тис. грн розміщений в банку на десять років. Нарахування відсотків здійснюється за складною відсотковою ставкою. За умовами договору передбачена зміна відсоткової ставки: перші п'ять років – 10 %, кожен подальший рік ставка підвищується на 0,5 %.

Якщо передбачена зміна відсоткової ставки, то майбутня вартість внеску через десять років для нарахування складних відсотків складе:

$$S = 1\,000 \cdot (1 + 0{,}1)^5 \cdot (1 + 0{,}105)^1 \cdot (1 + 0{,}11)^1 \cdot (1 + 0{,}115)^1 \cdot$$
$$\cdot (1 + 0{,}12)^1 \cdot (1 + 0{,}125)^1 = 2\,775{,}2\ (\text{грн}).$$

Результати виконання розрахунку нарощеної вартості покроково подані у табл. 1.5.

Таблиця 1.5

Розрахунки для нарахування складних відсотків зі змінною ставкою

Роки	Ставка відсотків	Стан рахунку на початку року, грн	Відсотки, накопичені протягом року, грн	Всього на рахунку в кінці року, грн
1	0,1	1 000,00	100,00	1 100,00
2	0,1	1 100,00	110,00	1 210,00
3	0,1	1 210,00	121,00	1 331,00
4	0,1	1 331,00	133,10	1 464,10
5	0,1	1 464,10	146,41	1 610,51
6	0,105	1 610,51	169,10	1 779,61
7	0,11	1 779,61	195,76	1 975,37
8	0,115	1 975,37	227,17	2 202,54
9	0,12	2 202,54	264,30	2 466,84
10	0,125	2 466,84	308,36	2 775,20

Нарахування відсотків за дробового числа років. У випадку, коли термін фінансової операції в роках не є цілим числом, можливі два варіанти нарахування складних відсотків: *загальний і змішаний*. *Загальний* метод передбачає нарахування складних відсотків за формулою (1.14), а в разі застосування *змішаного* методу за цілу кількість років нараховуються складні відсотки, а за дробову частину – за формулою простих відсотків:

$$S = P(1+i)^a(1+bi), \qquad (1.19)$$

де $n = a + b$ – термін позики,

a – ціле число років,

b – дробова частина року.

Нарощення відсотків *m* раз на рік

Номінальна ставка. Розглянемо проблему *нарощування відсотків m раз на рік*. Складні відсотки можуть нараховуватись не один, а кілька разів на рік: двічі на рік, щоквартально, щомісячно і навіть щоденно. Тоді річна ставка складних відсотків позначається j, число періодів нарахування в році – $m.$ Кожного разу відсотки нараховуються за ставкою j/m. Ставку j/m називають *номінальною.* Формула нарощування (1.14) прийме вигляд:

$$S = P(1 + \frac{j}{m})^{nm}\,, \tag{1.20}$$

де N – загальна кількість періодів нарахування *($N = nm$).*

Приклад 1.10. Депозитний внесок величиною 1 тис. грн розміщений в банку на десять років під 10 % річних. Необхідно розрахувати майбутню вартість внеску для нарахування складних відсотків щокварталу, щомісячно.

Якщо відсотки нараховуються щоквартально, то $j = 0{,}1$, $n = 10$, $m = 4$, а майбутня вартість внеску через десять років складе:

$$S = 1\,000(1 + 0{,}1/4)^{10\cdot 4} = 2\,685{,}06\ \text{(грн)}.$$

Якщо відсотки нараховуються щомісячно, то $m = 12$, а майбутня вартість внеску через десять років складе:

$$S = 1\,000(1 + 0{,}1/12)^{10\cdot 12} = 2\,707{,}04\ \text{(грн)}.$$

Ефективна ставка. У фінансовій математиці застосовується поняття *дійсної*, або *ефективної відсоткової ставки*. Ця ставка вимірює той реальний відносний дохід, який отримують у цілому за рік. Інакше кажучи, ефективна ставка – це річна ставка складних відсотків, яка дає той же результат, що і m-разове нарахування відсотків за ставкою j/m. Прирівнявши відповідні множники нарощення, отримуємо:

$$i = (1 + \frac{j}{m})^{m} - 1. \tag{1.21}$$

За умови $m > 1$ ефективна ставка більше *номінальної.*

Обидві ставки еквівалентні в фінансовому відношенні.

Приклад 1.11. Депозит на суму 20 000 грн був відкритий з 10.12.2016 р. до 19.03.2017 р. включно під 15 % річних. Необхідно розрахувати ефективну відсоткову ставку для нарахування складних відсотків за 360 і 365 днів.

За умови нарахування відсотків протягом 365 і 360 днів ефективні ставки складуть:

$$i = \left(1 + \frac{0{,}15}{365}\right)^{365} - 1 = 0{,}1618; \qquad i = \left(1 + \frac{0{,}15}{360}\right)^{360} - 1 = 0{,}1618.$$

Як бачимо, ефективні ставки рівні для обох варіантів нарахування та перевищують номінальну ставку.

Дисконтування за складною ставкою

Математичне дисконтування має вигляд:

$$P = \frac{S}{(1+i)^n} = S(1+i)^{-n} \ , \qquad (1.22)$$

де $(1+i)^{-n}$ – дисконтний множник.

Для випадків, коли відсотки нараховуються m раз на рік, отримаємо:

$$P = \frac{S}{(1+\frac{j}{m})^{nm}} = S(1+\frac{j}{m})^{-nm} \, . \qquad (1.23)$$

Облік за складною дисконтною ставкою. У практиці облікових операцій іноді застосовують *складну облікову ставку.* У цих випадках процес дисконтування відбувається з уповільненням, оскільки кожного разу облікова ставка застосовується не до первинної суми (як для простої облікової ставки), а до суми, дисконтованої на попередньому кроці в часі. Дисконтування за складною обліковою ставкою здійснюється за формулою:

$$P = S(1-d)^n,$$

де d – складна річна облікова ставка.

Дисконтування може проводитись не один, а m раз на рік, тобто кожного разу облік проводиться за ставкою $f/_{m}$. У цьому випадку:

$$P = S\left(1 - \frac{f}{m}\right)^{nm},$$

де f – номінальна річна облікова ставка.

Приклад 1.12. Точне число днів позики 101 день, сума погашення боргу складає 20 тис. грн, складна дисконтна ставка 15 %. Необхідно розрахувати первинну суму боргу за умови дисконтування один раз на рік (K = 365) і щоденно.

За умови дисконтування один раз на рік (K = 365) первинна сума боргу:

$$P = S(1-d)^{\frac{t}{K}} = 20\,000(1-0{,}15)^{\frac{101}{365}} = 19\,120{,}50 \text{ (грн)}.$$

За умови щоденного дисконтування:

$$P = S\left(1-\frac{f}{K}\right)^{t} = 20\,000\left(1-\frac{0{,}15}{365}\right)^{101} = 19\,186{,}69 \text{ (грн)}.$$

Визначення терміну позики та розміру відсоткової ставки

Термін позики.

Для нарахування складної відсоткової ставки i та номінальної ставки j на основі формул (1.14) і (1.20) отримуємо формули для розрахунку терміну позики:

$$n = \frac{\log(\frac{S}{P})}{\log(1+i)}; \qquad (1.24) \qquad n = \frac{\log(\frac{S}{P})}{m \cdot \log(1+\frac{j}{m})}. \qquad (1.25)$$

Для дисконтування за складною річною обліковою ставкою d і за номінальною обліковою ставкою f отримуємо формули для розрахунку терміну позики:

$$n = \frac{\log(\frac{P}{S})}{\log(1-d)}; \qquad (1.26) \qquad n = \frac{\log(\frac{P}{S})}{\mathrm{m} \cdot \log(1-\frac{f}{m})}. \qquad (1.27)$$

Величина відсоткової ставки.

Для розрахунку розміру відсоткової ставки використовуються такі формули.

За умови нарахування складних відсотків за ставкою i і за номінальною ставкою j отримаємо:

$$i = \sqrt[n]{S/P} - 1; \qquad (1.28) \qquad j = m(\sqrt[nm]{S/P} - 1). \qquad (1.29)$$

Для дисконтування за складними обліковими ставками d і f:

$$d = 1 - \sqrt[n]{P/S}; \qquad (1.30) \qquad f = m(1 - \sqrt[nm]{P/S}). \qquad (1.31)$$

1.5. Урахування рівня інфляції для нарахування простих і складних відсотків

У всіх розглянутих вище формулах нарощені суми вимірювались за номіналом, однак в умовах інфляції необхідно враховувати її темп для визначення реальної прибутковості фінансових операцій.

Введемо позначення:

S – номінальна нарощена сума;

C – нарощена сума з урахуванням її знецінення внаслідок інфляції;

J_p – індекс цін.

Очевидно, що $C = {}^{S}/_{J_p}$.

Індекс купівельної спроможності грошей дорівнює оберненій величині індексу цін, адже чим вище ціни, тим нижче купівельна спроможність.

Очевидно, що темп інфляції пов'язаний з індексом цін. *Темп інфляції* показує відносний приріст цін за період і позначається h. Цей показник вимірюється у відсотках і розраховується за формулою:

$$h = 100 \cdot (J_p - 1), \text{ звідси: } J_p = \left(1 + \frac{h}{100}\right).$$

Інфляція є ланцюговим процесом. Отже, індекс цін за кілька періодів дорівнює *добутку* ланцюгових індексів цін:

$$J_p = \prod_{t=1}^{n} \left(1 + \frac{h}{100}\right),$$

де h_t – темп інфляції в періоді t.

Якщо h – постійний очікуваний (або прогнозований) темп інфляції за один період, то за n таких періодів отримаємо:

$$J_p = (1 + h/100)^n.$$

За умови нарахування відсотків за **простою відсотковою ставкою** отримуємо формулу для визначення нарощеної суми з урахуванням інфляції:

$$C = \frac{S}{J_p} = P \cdot \frac{1 + ni}{(1 + h/100)^n}. \qquad (1.32)$$

Приклад 1.13. Депозитний внесок величиною 1 тис. грн розміщений в банку на десять років під 10 % річних. Необхідно розрахувати майбутню вартість внеску для нарахування простих відсотків з урахуванням щорічного рівня інфляції 7 % і 15 %.

За умовами задачі $P = 1\,000, i = 0{,}1$, а $n = 10$, майбутня вартість внеску з нарахуванням простих відсотків складе:

$$S = 1\,000(1 + 10 \cdot 0{,}1) = 2\,000 \text{ (грн)}.$$

Якщо темп інфляції постійний і складає 7 %, а номінальна нарощена сума за простими відсотками 2 000 грн, то можна визначити нарощену суму з урахуванням її знецінення за формулою:

$$C = \frac{S}{(1 + h/100)^n} = \frac{2\,000}{(1 + 7/100)^{10}} \approx 1\,016{,}70 \text{ (грн)}.$$

Якщо темп інфляції постійний і складає 15 %, то:

$$C = \frac{2\,000}{(1 + 15/100)^{10}} \approx 494{,}37 \text{ (грн)}.$$

За умови нарахування відсотків за **складною відсотковою ставкою** отримуємо формулу для визначення нарощеної суми з урахуванням інфляції:

$$C = \frac{S}{J_p} = P \cdot \frac{(1 + i)^n}{(1 + h/100)^n} = P \cdot \left(\frac{1 + i}{1 + h/100}\right)^n . \tag{1.33}$$

Приклад 1.14. Депозитний внесок величиною 1 тис. грн розміщений в банку на десять років під 10 % річних. Необхідно розрахувати майбутню вартість внеску з нарахуванням складних відсотків з урахуванням щорічного рівня інфляції 7 % і 15 %.

За умовами задачі $P = 1\,000, i = 0{,}1$, а $n = 10$; майбутня вартість внеску для нарахування складних відсотків складе:

$$S = 1\,000(1 + 0{,}1)^{10} = 2\,539{,}74 \text{ (грн)}.$$

Якщо темп інфляції постійний і складає 7 % або 15 %, а номінальна нарощена сума за складними відсотками відома з попередніх розрахунків, то можна визначити нарощену суму з урахуванням її знецінення за формулою:

$$C = \frac{2\,593{,}74}{\left(1 + \frac{7}{100}\right)^{10}} \approx 1\,318{,}53 \text{ (грн)}; \quad C = \frac{2\,593{,}74}{\left(1 + \frac{15}{100}\right)^{10}} \approx 641{,}13 \text{ (грн)}.$$

Завдання для самостійного опрацювання

Контрольні запитання для самодіагностики

1. Назвіть основні етапи розвитку фінансової математики як науки.
2. Дайте визначення поняття "фінансова операція".
3. Наведіть приклади фінансових операцій.
4. У чому полягають концепція вартості грошей у часі й ефект дисконтування?
5. Поясніть сутність понять теперішньої та майбутньої вартості грошей.
6. У чому полягають операції нарощення та дисконтування коштів?
7. Поясніть сутність операцій нарощування та дисконтування за правилом простих відсотків.
8. Як виглядає графік зростання простих відсотків?
9. Поясніть принципи врахування часової бази розрахунків.
10. Назвіть відмінності комерційних та точних відсотків.
11. У чому полягає сутність утримання простих відсотків за обліковою ставкою?
12. Як відбувається нарощення та дисконтування за правилом складних відсотків?
13. Як виглядає графік зростання складних відсотків?
14. Як відбувається нарощення та дисконтування за правилом складних відсотків?
15. Що таке номінальна та ефективна ставка складних відсотків?

Тести

1. Абсолютна величина доходу від надання грошей у борг у будь-якій формі – це:

а) відсотки;
б) нарощена сума;
в) облікова ставка;
г) відсоткова ставка.

2. Часовий інтервал, до якого приурочена відсоткова ставка, називають:

а) терміном позики;
б) терміном нарахування;
в) періодом нарахування.

3. *Дисконтування – це операція:*

а) визначення рівноважних параметрів фінансової операції;

б) визначення критичної ставки відсотків;

в) визначення поточної вартості майбутніх грошових коштів;

г) визначення майбутньої вартості сьогоднішніх грошей.

4. Дисконтування на основі складної відсоткової ставки здійснюється за формулою:

а) $P = S(1 - nd)$;

б) $P = S(1 + nd)$;

в) $P = S(1 - d)^n$;

г) $P = S(1 + d)^n$.

5. Якщо передбачається зміна відсоткової ставки протягом терміну позики, виданої під прості відсотки, то нарощена сума до кінця терміну позики складе:

а) $S = P(1 + \sum_{t=1}^{m} n_t i_t)$;

б) $S = P(1 - \sum_{t=1}^{m} n_t i_t)$;

в) $S = P \cdot \prod_{t=1}^{m} (1 + i_t)^{n_t}$;

г) $S = P \cdot \prod_{t=1}^{m} (1 - i_t)^{n_t}$.

6. Як розраховуються звичайні відсотки з наближеним числом днів позики:

а) 360/365;

б) 365/365;

в) 360/360;

г) 365/360?

7. Як розраховуються точні відсотки з точним числом днів позики:

а) 360/365;

б) 365/365;

в) 360/360;

г) 365/360?

8. Який показник використовується як вимірювач ступеня прибутковості (ефективності) будь-якої фінансової операції:

а) база нарахування;

б) термін фінансової операції;

в) період нарахування;

г) відсоткова ставка?

9. Нарахування простих відсотків зі зміною сум депозиту в часі здійснюється за формулою:

а) $I = Pn_1 i + Pn_2 i$;

б) $I = \sum_j R_j n_j \, i$;

в) $I = P((1+i)^{n_1} - 1)$;

г) $I = P((1+i)^n - (1+i)^{n_1})$.

10. Відносний приріст цін за період – це:

а) темп інфляції;

б) індекс цін;

в) індекс зміни купівельної спроможності грошей за період;

11. Під фінансовою еквівалентністю розуміють:

а) рівність наслідків фінансової операції для сторін, які приймають в ній участь;

б) рівність термінів фінансових операцій;

в) рівність відсоткових ставок в фінансових операціях.

12. Якщо застосоване банківське дисконтування за простою ставкою $d = 16\,\%$, то яким буде термін, достатній для того, щоб позичальник нічого не отримав:

а) 5 років 4 міс.;

б) 6 років 3 міс.;

в) 6 років 7 міс.;

г) 5 років 8 міс?

13. З терміном позики у 1 рік більшу суму нарощення дають:

а) складні відсотки;

б) прості відсотки;

в) нарощені суми будуть рівними.

14. Збільшення відсоткової ставки або терміну в k разів однаковим чином впливає на множник нарощення:

а) з нарахуванням простих відсотків;

б) з нарахуванням складних відсотків;

в) усі відповіді правильні.

15. Ефективна ставка більше номінальної, якщо:

а) $m = 1$;

б) $m > 1$;

в) $m < 1$.

Практичні завдання

1. Депозитний внесок величиною 6 тис. грн розміщений в банку на п'ять років під 12,5 % річних. Необхідно розрахувати: майбутню вартість внеску на кінець терміну з нарахуванням простих відсотків; майбутню вартість внеску з нарахуванням простих відсотків, якщо передбачена зміна відсоткової ставки (перші два роки – 12,5 %, кожен подальший рік ставка підвищується на 1 %); майбутню вартість внеску з нарахуванням простих відсотків з урахуванням щорічного рівня інфляції 8 %. Побудувати графіки зростання вартості внеску.

2. Депозитний внесок величиною 3 тис. грн розміщений в банку на чотири роки під 13 % річних. Необхідно розрахувати: майбутню вартість внеску на кінець терміну з нарахуванням складних відсотків один раз на рік, щокварталу, щомісячно; майбутню вартість внеску з нарахуванням складних відсотків, якщо передбачена зміна відсоткової ставки (перші два роки – 13 %, кожен подальший рік ставка підвищується на 0,5 %); майбутню вартість внеску з нарахуванням складних відсотків з урахуванням щорічного рівня інфляції 9 %. Побудувати графіки зростання вартості внеску.

3. Депозит на суму 12 000 грн був відкритий з 8.12.2016 р. до 20.04.2017 р. включно під 14,5 % річних. Необхідно: визначити нарощену величину депозиту з нарахуванням простих відсотків трьома способами: 365/365, 365/360, 360/360 – у цілому за період і в кожному календарному році окремо; розрахувати суму нарахованих простих відсотків (365/365, 365/360), якщо 3 січня депозит поповнився на 5 000 грн

4. Депозит на суму 8 000 грн був відкритий з 25.11.2016 р. до 25.05.2017 р. включно під 16 % річних. Необхідно: визначити нарощену величину депозиту з нарахуванням складних відсотків (365/365) у цілому за період і в кожному календарному році окремо; розрахувати суму нарахованих складних відсотків, якщо 3 січня депозит поповнився на 3 000 грн; розрахувати ефективну відсоткову ставку для 360 і 365 днів.

5. Сума погашення боргу складає 25 000 грн, термін позики – два роки, дисконтна ставка 15 %. Провести дисконтування та розрахувати первинну суму за простою та складною дисконтною ставкою (365/365, 365/360).

Розділ 2. Фінансова еквівалентність зобов'язань

2.1. Еквівалентність відсоткових ставок.
2.2. Середні величини в фінансових розрахунках.
2.3. Консолідація платежів.
2.4. Загальний випадок зміни умов комерційних контрактів.

Ключові слова: еквівалентні відсоткові ставки; еквівалентні облікові ставки; середня відсоткова ставка; середня облікова ставка; середній розмір позики; середня кількість оборотів позики за рік; середній термін користування позиками; консолідація платежів; зміна умов комерційних контрактів.

2.1. Еквівалентність відсоткових ставок

Еквівалентні прості ставки. У фінансових операціях відсоткова ставка визначає прибутковість операцій нарощення, а на основі облікової ставки визначають розмір суми дисконту для облікових операцій. Оскільки відсоткова й облікова ставки вирішують одне завдання, можна вибрати такі розміри ставок, за якими фінансові наслідки операції нарощування та дисконтування будуть однакові. Ставки, що забезпечують рівноцінність фінансових наслідків, називають *еквівалентними, або релятивними (відносними)* [28]. Рівноцінність фінансових наслідків може бути забезпечена лише за умови рівності множників нарощення та дисконтування. Наприклад, для простої відсоткової та дисконтної ставок формули розрахунку нарощеної суми мають вигляд:

$$S_I = P_I(1 + n \cdot i) \text{ та } S_{II} = P_{II}\frac{1}{1-nd}.$$

Прирівнявши множники нарощення та дисконтування та розв'язавши рівняння відносно i або d, отримаємо формули для розрахунку еквівалентних ставок. Такий принцип використовується для визначення всіх еквівалентних ставок.

Еквівалентність простої відсоткової і облікової ставок.

Еквівалентність простої ставки відсотків і облікової ставки виражається формулами:

$$i = \frac{d}{1-nd}; \qquad (2.1) \qquad\qquad d = \frac{i}{1+ni}, \qquad (2.2)$$

де n – термін позики в роках.

Приклад 2.1. Депозитний внесок величиною 10 тис. грн розміщений в банк на шість років під 10 % річних. Необхідно розрахувати майбутню вартість внеску за умови нарахування простих відсотків один раз на рік, визначити еквівалентну облікову ставку.

Визначимо спочатку майбутню вартість внеску з нарахуванням простих відсотків один раз на рік, якщо $P = 10\,000,\ n = 6,\ i = 0{,}1$:

$$S = 10\,000(1 + 6 \cdot 0{,}1) = 16\,000\ (\text{грн}).$$

Еквівалентна проста облікова ставка складе:

$$d = \frac{0{,}1}{1 + 6 \cdot 0{,}1} = 0{,}0625.$$

Визначимо майбутню вартість внеску через облікову ставку:

$$S = P\frac{1}{1 - nd} = 10000 \cdot \frac{1}{1 - 6 \cdot 0{,}0625} = 16\,000\ (\text{грн}).$$

Як бачимо, результати розрахунків співпадають.

Для короткострокових операцій термін позики визначається як:

$$n = \frac{t}{K},$$

де t – число днів позики;

K – число днів у році (360 або 365/366 днів).

У цьому випадку еквівалентні ставки можна розраховувати як для однакових, так і для різних K .

Для *однакових часових баз* K, наприклад для 360 днів, формули еквівалентності мають вигляд:

$$i = \frac{360 \cdot d}{360 - t \cdot d}; \qquad (2.3) \qquad\qquad d = \frac{360 \cdot i}{360 + t \cdot i}. \qquad (2.4)$$

У випадку, якщо у фінансових операціях використовують *різні часові бази* (наприклад, нарахування відсотків здійснюється з $K = 365$ днів, а для облікової операції $\mathrm{K} = 360$ днів) формули еквівалентності мають вигляд:

$$i = \frac{365 \cdot d}{360 - t \cdot d}; \qquad (2.5) \qquad\qquad d = \frac{360 \cdot i}{365 + t \cdot i}. \qquad (2.6)$$

Приклад 2.2. Депозитний внесок величиною 10 тис. грн розміщений в банк на шість років під 10 % річних. Необхідно: розрахувати майбутню вартість внеску з нарахуванням простих відсотків за умови, що депозит відкритий з 01.02.2017 р. до 15.05.2017 р. включно (365/365); визначити еквівалентну облікову ставку для К = 360, 365.

Визначимо майбутню вартість внеску з нарахуванням простих відсотків за умови, що депозит відкритий з 01.02.2017 р. до 15.05.2017 р. включно (365/365):

$$S = 10\,000\left(1 + \frac{103}{365} \cdot 0{,}1\right) \approx 10\,282{,}19 \text{ (грн)}.$$

Визначимо еквівалентні прості облікові ставки для K = 365, K = 360 за умови, що нарахування відсотків проводиться з K = 365, тобто для двох варіантів: коли часові бази дорівнені та коли вони різні:

$$d_\text{П} = \frac{365 \cdot i_\text{П}}{365 + t \cdot i_\text{П}} = \frac{365 \cdot 0{,}1}{365 + 103 \cdot 0{,}1} = 0{,}09726;$$
$$d_\text{П} = \frac{360 \cdot i_\text{П}}{365 + t \cdot i_\text{П}} = \frac{360 \cdot 0{,}1}{365 + 103 \cdot 0{,}1} = 0{,}09592.$$

Визначимо майбутню вартість внеску через розраховані прості облікові ставки:

$$S = P\frac{1}{1 - \frac{t}{365}d} = 10\,000\frac{1}{1 - \frac{103}{365} \cdot 0{,}09726} \approx 10\,282{,}19 \text{ (грн)};$$
$$S = P\frac{1}{1 - \frac{t}{360}d} = 10\,000\frac{1}{1 - \frac{103}{360} \cdot 0{,}09592} \approx 10\,282{,}19 \text{ (грн)}.$$

Як бачимо, результати розрахунків співпадають.

Умови еквівалентності відсоткової і облікової ставок забезпечуються дотриманням нерівності $d < i$ за інших рівних умов. Крім того, для розрахунку еквівалентних ставок необхідно враховувати, що для кожного періоду обчислюються свої еквівалентні ставки.

Еквівалентність простої і складної відсоткових ставок з нарахуванням відсотків один раз на рік.

Еквівалентність простих і складних відсоткових ставок з нарахуванням відсотків один раз на рік визначається за формулами:

$$i_\text{П} = \frac{(1 + i_C)^n - 1}{n}; \qquad (2.7) \qquad\qquad i_C = (1 + ni_\text{П})^{\frac{1}{n}} - 1. \qquad (2.8)$$

Приклад 2.3. Депозитний внесок величиною 10 тис. грн розміщений в банк на шість років під 10 % річних. Необхідно визначити еквівалентну складну відсоткову ставку.

Визначимо еквівалентну складну відсоткову ставку:

$$i_C = (1 + 6 \cdot 0{,}1)^{\frac{1}{6}} - 1 \approx 0{,}08148.$$

Еквівалентність простої відсоткової ставки і складної ставки j з нарахуванням відсотків m раз на рік. Еквівалентні ставки розраховують за формулами:

$$i_\Pi = \frac{(1 + j/m)^{nm} - 1}{n}; \qquad (2.9) \qquad j = m\left((1 + ni_\Pi)^{\frac{1}{nm}} - 1\right). \qquad (2.10)$$

Приклад 2.4. Депозитний внесок величиною 10 тис. грн розміщений в банк на шість років під 10 % річних. Визначити еквівалентну складну відсоткову ставку, якщо відсотки нараховуються щоквартально та щомісячно. Визначимо еквівалентну складну відсоткову ставку за умови, що відсотки нараховуються щокварталу та щомісяця:

$$j = 4\left((1 + 6 \cdot 0{,}1)^{\frac{1}{6\cdot 4}} - 1\right) \approx 0{,}07911;$$

$$j = 12\left((1 + 6 \cdot 0{,}1)^{\frac{1}{6\cdot 12}} - 1\right) \approx 0{,}07859.$$

Еквівалентність простої облікової ставки і ставки складних відсотків. Якщо у фінансових операціях використовується однакова часова база K = 365 або K = 360, для розрахунку еквівалентної ставки придатна формула:

$$i_c = (1 - nd_\Pi)^{-\frac{1}{n}} - 1. \qquad (2.11)$$

Для різних часових баз (наприклад, якщо для простої облікової ставки K = 360, а для складної відсоткової ставки K = 365) формули мають вигляд:

$$i_c = (1 - d_\Pi \frac{t}{360})^{-\frac{1}{n}} - 1; \qquad (2.12) \qquad d_\Pi = \frac{360}{t}(1 - (1 + i_c)^{-n}). \qquad (2.13)$$

де t – число днів позики.

Еквівалентність номінальної ставки складних відсотків з нарахуванням відсотків m раз на рік і простої облікової ставки. Якщо складні відсотки нараховуються m раз на рік, тоді формули еквівалентності з простою обліковою ставкою для рівних часових баз матимуть вигляд:

$$j = m\left((1 - nd_{\Pi})^{-\frac{1}{nm}} - 1\right); \quad (2.14) \qquad j\, d_{\Pi} = \frac{1}{n}\left(1 - \left(1 + \frac{j}{m}\right)^{-nm}\right). \quad (2.15)$$

Еквівалентність складних ставок. Еквівалентні складна ставка відсотків і складна облікова ставка розраховуються за формулами:

$$i_c = \frac{d_c}{1 - d_c}; \quad (2.16) \qquad d_c = \frac{i_c}{1 + i_c}. \quad (2.17)$$

Еквівалентність складної облікової ставки та номінальної складної відсоткової ставки з нарахуванням відсотків m раз на рік. Відповідні еквівалентні ставки розраховуються за формулами:

$$j = m\left((1 - d_c)^{-\frac{1}{m}} - 1\right); \quad (2.18) \qquad d_c = 1 - \left(1 + \frac{j}{m}\right)^{-m}. \quad (2.19)$$

2.2. Середні величини в фінансових розрахунках

Для кількох фінансових операцій може виникати необхідність розрахунку середньої відсоткової ставки за всіма операціями. Така середня відсоткова ставка є еквівалентною величиною. Розглянемо основні формули розрахунку середніх відсоткових ставок для різних фінансових операцій.

У випадку, коли нараховується проста відсоткова ставка та суми позик однакові, середня відсоткова ставка визначається за формулою середньої арифметичної зваженої, де вагами слугують часові періоди, протягом яких діяла дана ставка:

$$\bar{i} = \frac{\sum i_j \cdot n_j}{\sum n_j}, \quad (2.20)$$

де $\bar{i}$ – середня відсоткова ставка;

n_j – термін дії кожної ставки.

Приклад 2.5. Депозитний внесок величиною 10 тис. грн розміщений в банк на шість років під 10 % річних. Необхідно розрахувати середню відсоткову ставку для простих відсотків, якщо був відкритий депозит на таку ж суму через рік під 15 % річних з однаковим терміном погашення.

Тобто, якщо був відкритий депозит на таку ж суму через рік під 15 % річних з однаковим терміном погашення, то *середня проста відсоткова ставка* складе:

$$\bar{i} = \frac{i_1 n_1 + i_2 n_2}{n_1 + n_2} = \frac{0{,}1 \cdot 6 + 0{,}15 \cdot 5}{6 + 5} \approx 0{,}12273.$$

Визначимо нарощену суму окремо для кожного депозиту та в цілому:

$$S_1 = 16\,000\ (\text{грн}); \quad S_2 = \ 10\,000 \cdot (1 + 5 \cdot 0{,}15) = 17\,500\ (\text{грн});$$
$$S = S_1 + S_2 = 33\,500\ (\text{грн}).$$

Визначимо нарощену суму окремо для кожного депозиту та в цілому через середню відсоткову ставку:

$$S_1 = 10\,000 \cdot (1 + 6 \cdot 0{,}12273) \approx 17\,363{,}64\ (\text{грн});$$
$$S_2 = \ 10\,000 \cdot (1 + 5 \cdot 0{,}12273) \approx 16\,136{,}36\ (\text{грн});$$
$$S = S_1 + S_2 = 33\,500\ (\text{грн}).$$

Як бачимо, результати розрахунків співпадають.

У випадку, коли нараховується проста відсоткова ставка та суми позик різні, середня ставка також обчислюється за формулою середньої арифметичної, але вагами в цьому випадку будуть добутки сум отриманих депозитів на терміни, на які вони відкриті:

$$\bar{i} = \frac{\sum i_j \cdot n_j \cdot P_j}{\sum n_j \cdot P_j}, \tag{2.21}$$

де $\bar{i}$ – середня відсоткова ставка;

n_j – термін дії кожної ставки;

P_j – розмір кожної позики.

Приклад 2.6. Депозитний внесок величиною 10 тис. грн розміщений в банк на шість років під 10 % річних. Розрахувати середню відсоткову ставку для простих відсотків, якщо був відкритий депозит на суму 5 тис. грн через два роки під 15 % річних з однаковим терміном погашення.

Тобто, якщо був відкритий депозит на суму 5 тис. грн через два роки під 15 % річних з однаковим терміном погашення, то *середня проста відсоткова ставка* складе:

$$\bar{\imath} = \frac{i_1 n_1 P_1 + i_2 n_2 P_2}{n_1 P_1 + n_2 P_2} = \frac{0{,}1 \cdot 6 \cdot 10\,000 + 0{,}15 \cdot 4 \cdot 5\,000}{6 \cdot 10\,000 + 4 \cdot 5\,000} = 0{,}1125.$$

Визначимо нарощену суму окремо за кожним депозитом і в цілому:

$$S_1 = 16\,000 \text{ (грн)}; \quad S_2 = 5\,000 \cdot (1 + 4 \cdot 0{,}15) = 8\,000 \text{ (грн)};$$

$$S = S_1 + S_2 = 24\,000 \text{ (грн)}.$$

Визначимо нарощену суму окремо за кожним депозитом і в цілому через середню відсоткову ставку:

$$S_1 = 10\,000 \cdot (1 + 6 \cdot 0{,}1125) = 16\,750{,}00 \text{ (грн)};$$

$$S_2 = 5\,000 \cdot (1 + 4 \cdot 0{,}1125) = 7\,250{,}00 \text{ (грн)};$$

$$S = S_1 + S_2 = 24\,000 \text{ (грн)}.$$

Середня проста облікова ставка також розраховується як середня арифметична зважена:

$$\overline{d} = \frac{\sum d_j \cdot n_j}{\sum d_j}. \qquad (2.22)$$

Середня ставка складних відсотків. Середня ставка за складними відсотками визначається за формулою:

$$\bar{\imath}_c = [(1 + i_1)^{n_1} \cdot (1 + i_2)^{n_2} \cdot \dots \cdot (1 + i_k)^{n_k}]^{\frac{1}{N}} - 1, \qquad (2.23)$$

де $i_1, i_2, \dots, i_k$ – ставки складних відсотків;

$n_1, n_2, \dots, n_k$ – часові інтервали, протягом яких нарахування проводилось за складними відсотками ($N = n_1 + n_2 + \dots + n_k$).

Приклад 2.7. Депозитний внесок величиною 10 тис. грн розміщений в банк на шість років під 10 % річних. Необхідно розрахувати середню ставку складних відсотків, якщо перші два роки ставка складає 10 %, а кожен такий рік підвищується на 1 %.

Якщо перші два роки ставка 10 %, а кожен такий рік підвищується на 1 %, то середня ставка складних відсотків складе:

$$\bar{\iota}_c = [(1+0{,}1)^2 \cdot (1+0{,}11)^1 \cdot (1+0{,}12)^1 \cdot (1+0{,}13)^1]^{\frac{1}{5}} - 1 \approx 0{,}1119.$$

Визначимо нарощену суму депозиту через змінні ставки складних відсотків і через середню складну ставку відсотків:

$$S = 10\,000 \cdot ((1+0{,}1)^2 \cdot (1+0{,}11)^1 \cdot (1+0{,}12)^1 \cdot (1+0{,}13)^1) \approx$$
$$\approx 16\,998{,}27 \text{ (грн)};$$
$$S = 10\,000 \cdot (1+0{,}1119)^5 \approx 16\,998{,}27 \text{ (грн)}.$$

Як бачимо, результати розрахунків співпадають.

Для фінансово-кредитних установ актуальним є розрахунок середніх показників фінансових операцій – таких, як середній розмір позики, середній термін позики, середнє число оборотів позик за рік та ін.

Середній розмір однієї позики ($\bar{P}$) без урахування кількості оборотів за рік знаходять за формулою середньої арифметичної зваженої:

$$\bar{P} = \frac{\sum P_j \cdot n_j}{\sum n_j}, \qquad (2.24)$$

де $\bar{P}$– середній розмір позики;

n_j – термін кожної позики;

P_j – розмір кожної позики.

Приклад 2.8. Філія комерційного банку видала протягом року п'ять позик двом фірмам ("Альфа" та "Бета"). Необхідно визначити середній розмір позики, отриманої кожною фірмою, та всіх позик, виданих банком. Вихідні дані наведені в табл. 2.1.

Таблиця 2.1

Вихідні дані

Квартали	Розмір позики, тис. грн	Термін позики, місяців
Фірма "Альфа"		
I	250	6
II	200	8
IV	500	3
Фірма "Бета"		
II	600	2
III	450	4

Визначимо середній розмір позики, отриманої фірмою "Альфа" ($\bar{P}_{\text{А}}$) і фірмою "Бета" ($\bar{P}_{\text{Б}}$), а також усіх позик, виданих банком:

$$\bar{P}_{\text{А}} = \frac{250 \cdot 6 + 200 \cdot 8 + 500 \cdot 3}{6 + 8 + 3} \approx 270{,}58824 \text{ (тис. грн)};$$

$$\bar{P}_{\text{Б}} = \frac{600 \cdot 2 + 450 \cdot 4}{2 + 4} = 500{,}00 \text{ (тис. грн)};$$

$$\bar{P} = \frac{250 \cdot 6 + 200 \cdot 8 + 500 \cdot 3 + 600 \cdot 2 + 450 \cdot 4}{6 + 8 + 3 + 2 + 4} \approx 330{,}43478 \text{ (тис. грн)}.$$

Середній розмір однієї позики ($\overline{\mathrm{P}}$) з урахуванням кількості оборотів за рік знаходять за формулою:

$$\bar{P} = \frac{\sum P_j \cdot n_j \cdot W_j}{\sum n_j \cdot W_j} = \frac{\sum P_j \cdot D_j}{\sum D_j} = \frac{D \sum P_j}{D \cdot K} = \frac{\sum P_j}{K}, \qquad (2.25)$$

де P_j – розмір j-ї позики;

n_j – термін j-ї позики в роках (якщо позика була видана на термін менше року $n_j = t/360$ або $n_j = t/365$, t – термін позики в днях);

W_j – кількість оборотів;

D_j – тривалість періоду;

K – кількість клієнтів, які отримали позику.

Середній розмір усіх позик з урахуванням числа оборотів за рік розраховується за формулами:

$$\sum \overline{P} = \overline{P} \cdot K; \qquad (2.26) \qquad\qquad \sum \overline{P} = \frac{\sum O}{\overline{\overline{W}}}, \qquad (2.27)$$

де $\sum O$ – загальний оборот (сума всіх погашених позик за період). Звідси:

$$\sum O = \overline{W} \cdot \sum \overline{P}. \qquad (2.28)$$

Середній залишок усіх позик з урахуванням кількості оборотів за рік розраховується за даними щомісячної фінансової звітності фінансово-кредитної установи, що видала позики:

$$\sum \overline{P} = \frac{\frac{P_1}{2} + P_2 + P_3 + \cdots + P_{11} + \frac{P_{12}}{2}}{12 - 1}, \qquad (2.29)$$

де $P_1, \ldots, P_{12}$ – щомісячні залишки виданих позик.

Число оборотів окремих позик за умови їх безперервної оборотності за період, що вивчається, визначається як частка від ділення тривалості періоду ($D = 12$ міс.) на термін видачі позики:

$$W_j = \frac{D}{n_j}. \tag{2.30}$$

Середнє число оборотів усіх позик за період (за умови, що вони обертаються безперервно) розраховується так:

$$\overline{W} = \frac{\sum W_j \cdot P_j}{\sum P_j} = D \cdot \frac{\sum \frac{P_j}{n_j}}{\sum P_j} = \frac{\sum O_j}{\sum P_j}. \tag{2.31}$$

Приклад 2.9. За даними табл. 2.1 (див. приклад 2.8) необхідно визначити середнє число оборотів усіх позик за рік для кожної фірми окремо та в цілому для банку.

Результати проміжних розрахунків наведені в табл. 2.2.

Таблиця 2.2

Результати розрахунків

№ позики	Розмір позики (P_j), тис. грн	Термін позики (n_j), місяців (тривалість одного обороту)	Число оборотів за рік, $W_j = \frac{D}{n_j} = \frac{12}{n_j}$	Річний оборот позики $O_j = P_j \cdot W_j$
Фірма "Альфа"				
1	250	6	2	500
2	200	8	1,5	300
3	500	3	4	2 000
Сума	950	–	–	2 800
Фірма "Бета"				
4	600	2	6	3 600
5	450	4	3	1 350
Сума	1 050	–	–	4 950
Разом	**2 000**			**7 750**

Визначимо середнє число оборотів усіх позик за рік для кожної фірми окремо та в цілому для банку:

$$\overline{W}_{\text{А}} = \frac{2\,800}{950} \approx 2{,}9474; \qquad \overline{W}_{\text{Б}} = \frac{4\,950}{1\,050} \approx 4{,}7143;$$

$$\overline{W} = \frac{7\,750}{2\,000} = 3{,}875.$$

Середній термін користування позиками (за умови їх безперервної оборотності), тобто середній час, протягом якого всі позики обертаються один раз, визначається так:

$$\bar{n} = \frac{\sum P_j}{\sum \frac{P_j}{n_j}}. \tag{2.32}$$

Приклад 2.10. За даними табл. 2.1 (див. приклад 2.8) необхідно визначити середній термін користування позиками для кожної фірми окремо та в цілому для банку.

Визначимо середній термін користування позиками для фірми "Альфа" ($\bar{n}_А$) і фірми "Бета" ($\bar{n}_Б$), а також для банку в цілому:

$$\bar{n}_А = \frac{250 + 200 + 500}{\frac{250}{6} + \frac{200}{8} + \frac{500}{3}} \approx 4{,}0714 \text{ (міс.)}; \quad \bar{n}_Б = \frac{600 + 450}{\frac{600}{2} + \frac{450}{4}} \approx 2{,}5455 \text{ (міс.)};$$

$$\bar{n} = \frac{250 + 200 + 500 + 600 + 450}{\frac{250}{6} + \frac{200}{8} + \frac{500}{3} + \frac{600}{2} + \frac{450}{4}} \approx 3{,}0968 \text{ (міс.)}.$$

2.3. Консолідація платежів

Якщо виникає потреба в об'єднанні кількох фінансових операцій в одну (наприклад, якщо фірма взяла кілька кредитів у одному банку), сторони фінансової операції можуть домовитись про консолідацію платежів. З метою консолідації кілька фінансових операцій об'єднуються у одну. Звичайно, таке об'єднання має базуватись на еквівалентності. У випадку консолідації платежів сторони фінансової операції повинні домовитись про термін консолідованого платежу, який може перевищувати встановлені раніше терміни платежів, або може встановлюватись будь-який термін.

Для консолідації декількох платежів в один за умови, що термін нового консолідованого платежу більше раніше встановлених термінів (тобто $n_0 > n_1, n_2, \ldots, n_k$) використовується проста відсоткова ставка і рівняння еквівалентності має вигляд:

$$S_0 = \sum S_j \cdot (1 + t_j \cdot i), \tag{2.33}$$

де S_0 – нарощена сума консолідованого платежу;

$S_1, S_2, \dots, S_k$ – платежі, що підлягають консолідації, з термінами сплати $n_1, n_2, \dots, n_k$;

t_j – часові інтервали між терміном n_0 і n_j, тобто $t_j = n_0 - n_j$.

Приклад 2.11. За даними табл. 2.1 (див. приклад 2.8) необхідно визначити розмір консолідованого платежу для кожної фірми, за умови, що нараховуються прості відсотки за ставкою 10 % річних, термін погашення консолідованого платежу – 12 міс. Визначимо нарощені суми позик для кожної фірми окремо, як це показано у табл. 2.3.

Таблиця 2.3

Нарощені суми позик

Фірми	Формула розрахунку	Нарощена сума позики, тис. грн
"Альфа"	$S_1^А = 250 \cdot \left(1 + 6 \cdot \frac{0{,}1}{12}\right)$	262,50
	$S_1^А = 200 \cdot \left(1 + 8 \cdot \frac{0{,}1}{12}\right)$	213,33
	$S_1^А = 500 \cdot \left(1 + 3 \cdot \frac{0{,}1}{12}\right)$	512,50
"Бета"	$S_1^Б = 600 \cdot \left(1 + 2 \cdot \frac{0{,}1}{12}\right)$	610,00
	$S_1^Б = 450 \cdot \left(1 + 4 \cdot \frac{0{,}1}{12}\right)$	465,00

Визначимо розмір консолідованого платежу для кожної фірми за умови, що нараховуються прості відсотки за ставкою 10 % річних, термін погашення консолідованого платежу – 12 міс.

Розмір консолідованого платежу для кожної фірми:

$$S_0^А = 262{,}5 \cdot (1 + (12 - 6) \cdot 0{,}1) + 213{,}33 \cdot (1 + (12 - 8) \cdot 0{,}1) + \\ +512{,}5 \cdot (1 + (12 - 3) \cdot 0{,}1) = 1\,047{,}0069 \text{ (тис. грн)};$$

$$S_0^Б = 610 \cdot (1 + 10 \cdot 0{,}1) + 465 \cdot (1 + 8 \cdot 0{,}1) = 1\,156{,}833 \text{ (тис. грн)}.$$

Якщо консолідація передбачає різні терміни виплати консолідованого платежу, його величина розраховується за формулою:

$$S_0 = \sum S_j \cdot \left(1 + t_j \cdot i\right) + \sum S_k \cdot (1 + t_k \cdot i)^{-1}, \qquad (2.34)$$

де S_j – суми платежів, що консолідуються, терміни погашення яких менше нового терміну $n_j < n_0$;

S_k – суми платежів, що консолідуються, терміни погашення яких перевищують новий термін $n_k > n_0$;

$t_j = n_0 - n_j$; $t_k = n_j - n_0$;

Для облікових операцій з консолідації векселів також установлюється термін консолідованого векселя, який може перевищувати встановлені раніше терміни векселів, або може бути встановлений будь-який термін (загальний випадок).

У випадку, якщо термін $n_0 > n_j$, консолідований платіж розраховується за формулою:

$$S_0 = \sum S_j \cdot (1 - t_j \cdot d)^{-1}. \quad (2.35)$$

Якщо може бути встановлений ***будь-який термін консолідованого векселя,*** то формула приймає вигляд:

$$S_0 = \sum S_j \cdot (1 - t_j \cdot d)^{-1} + \sum S_k \cdot (1 - t_k \cdot d). \quad (2.36)$$

Для консолідації платежів з нарахуванням складної відсоткової ставки сума консолідованого платежу визначається за формулами:

$$S_0 = \sum S_j \cdot (1 + i)^{t_j} \quad \text{при } n_0 > n_1, n_2, \ldots, n_j; \quad (2.37)$$

$$S_0 = \sum S_j \cdot (1 + i)^{t_1} + \sum S_k \cdot (1 + i)^{t_2} \text{ при } n_1, n_2, \ldots < n_0 > n_{j.} \quad (2.38)$$

Для консолідації платежів сторони фінансової операції можуть не розраховувати, а узгодити суму консолідованого платежу. Тоді для виконання умови еквівалентності **необхідно розрахувати термін платежу.**

Термін консолідованого платежу розраховується за формулою:

$$n_0 = \frac{1}{i} \cdot \left(\frac{S_0}{P_0} - 1\right), \quad (2.39)$$

де S_0 – сума консолідованого платежу;

P_0 – сучасна величина платежів, що консолідуються;

i – відсоткова ставка, яка використовується для консолідації.

У випадку, якщо сторони фінансової операції домовились, що $S_0 = \sum S_j$, термін консолідованого платежу розраховується за формулою:

$$n_0 = \frac{\sum n_j \cdot S_j}{\sum S_j}. \qquad (2.40)$$

Для розрахунку *терміну консолідованого платежу* може бути використана й *облікова ставка:*

$$n_0 = \frac{1}{d} \cdot \left(1 - \frac{P_0}{S_0}\right), \qquad (2.41)$$

де $P_0 = \sum S_j \cdot (1 - n_j \cdot d)$ – сучасна величина консолідованих платежів, причому $S_0 > P_0$.

Термін консолідованого платежу з нарахуванням складних відсоткових ставок визначається за формулою:

$$n_0 = \frac{ln\left(\frac{S_0}{P_0}\right)}{\ln(1+i)}, \qquad (2.42)$$

де $P_0 = \sum S_j \cdot (1+i)^{-n_j}$ – сучасна величина консолідованих платежів;
S_0 – сума консолідованих платежів.

2.4. Загальний випадок зміни умов комерційних контрактів

В умовах нестабільного економічного середовища одна зі сторін фінансової операції може потребувати зміни умов комерційного контракту. Найчастіше такі зміни пов'язані зі збільшенням терміну платежу або їх консолідацією, однак сторони можуть обговорювати зміну будь якого-параметру чи параметрів контракту. Такі зміни повинні бути беззбитковими для обох сторін фінансової операції, а отже, мають базуватись на принципі фінансової еквівалентності.

Зі зміною умов комерційних угод далеко не завжди можна знайти рішення шляхом підсумовування нарощених сум і дисконтованих платежів. Найчастіше для вирішення цього завдання немає готових формул. Розрахунок величини S_0, що відображає результат зміни умов угоди, можна виконати, використовуючи принцип еквівалентності та його математичний вираз – рівняння еквівалентності.

Якщо приведення платежів здійснюється на деяку початкову дату, то отримаємо такі рівняння еквівалентності в загальному вигляді.

З використанням простих відсотків:

$$\sum_j S_j\left(1 + n_j i\right) = \sum_k S_k(1 + n_k i). \tag{2.43}$$

З використанням складних відсотків:

$$\sum_j S_j v^{n_j} = \sum_k S_k v^{n_k}, \tag{2.44}$$

де v – дисконтний множник;

S_j і n_j – *параметри платежів, що змінюються;*

S_k і n_k – параметри нових платежів.

За момент приведення платежів можуть бути прийняті різні дати: початкова дата, тобто дата надання кредиту; дата, яка перебуває в середині терміну погашення кредиту тощо. Тому конкретний вид рівняння залежить від умов контрактів.

Завдання для самостійного опрацювання

Контрольні запитання для самодіагностики

1. У чому полягає сутність поняття еквівалентності в фінансових розрахунках?
2. Як скласти рівняння для визначення еквівалентних відсоткових ставок?
3. Назвіть основні види еквівалентних ставок.
4. Чи можна знайти співвідношення еквівалентності для будь-якої пари різних ставок?
5. Чи можна розрахувати еквівалентні ставки для фінансових операцій з різними часовими базами K?
6. Для аналізу яких фінансових операцій використовують середні показники?
7. Чи можна розрахувати середню відсоткову ставку, якщо суми позик різні?

8. Назвіть основні середні показники фінансових операцій та методи їх розрахунку.

9. Як визначається число оборотів окремих позик за умови їх безперервної оборотності?

10. Як визначається річний оборот позики?

11. Середній залишок усіх позик з урахуванням кількості оборотів розраховується за даними щомісячної чи щоквартальної фінансової звітності?

12. Що показує середній термін користування позиками?

13. Як здійснюється консолідація платежів?

14. Як скласти рівняння еквівалентності для консолідації платежів?

15. Чи можна застосовувати консолідацію для векселів?

Тести

1. Формула для розрахунку еквівалентної простої ставки відсотків і простої облікової ставки має вигляд:

а) $i = \frac{d}{1-nd}$;

б) $i = \frac{1-nd}{d}$;

в) $i = \frac{d}{(1-n)^d}$;

г) $i = \frac{d}{1+nd}$.

2. Забезпечення еквівалентності простої ставки відсотків і простої облікової ставки досягається дотриманням нерівності:

а) $d \geq i$;

б) $d > i$;

в) $d < i$;

г) $d = i$.

3. Еквівалентність простих і складних відсоткових ставок визначається за формулою:

а) $i_c = (1 + n \cdot i_p)^{\frac{1}{n}} - 1$;

б) $i_p = \frac{(1+i_c)^n - 1}{n}$;

в) обидві формули правильні.

4. Середня відсоткова ставка для однакових сум позик визначається за формулою:

а) $\bar{i} = \frac{\sum i_j . n_j}{\sum n_j}$;

б) $\bar{i} = \frac{\sum n_j}{\sum i_j . n_j}$;

в) $\bar{i} = \frac{\sum n_j - 1}{\sum i_j . n_j}$.

5. Якщо партнери заздалегідь обумовлюють суму консолідованого платежу, для забезпечення еквівалентності необхідно розрахувати:

а) сучасну величину консолідованих платежів;

б) термін сплати консолідованого платежу;

в) відсоткову ставку, що використовується для консолідації;

г) усі відповіді правильні.

6. *Середнє число оборотів усіх позик за період, якщо вони обертаються безперервно, розраховується за формулою:*

а) $\bar{W} = \frac{\sum W_j \cdot P_j}{\sum P_j}$;

б) $\bar{W} = D \cdot \frac{\sum \frac{P_j}{n_j}}{\sum P_j}$;

в) $\bar{W} = \frac{\sum O_j}{\sum P_j}$;

г) усі відповіді правильні.

7. У розрахунку еквівалентності слід враховувати, що необхідно обчислити свою еквівалентну ставку:

а) для кожного періоду нарощення;

б) для кожного терміну нарощення без урахування періоду;

в) немає правильної відповіді.

8. Чи можна розрахувати еквівалентні ставки, якщо в фінансових операція використовуються різні часові бази 360 і 365:

а) так;

б) ні?

9. Основним принципом зміни умов угоди (контракту) є:

а) принцип фінансової еквівалентності;

б) відсоткова ставка;

в) вартість інвестиційних ресурсів;

г) чиста поточна вартість.

10. Консолідація платежів – це:

а) потік платежів, усі члени якого позитивні величини, а інтервали часу між платежами однакові;

б) об'єднання кількох платежів або заміна разового платежу рядом послідовних платежів;

в) частина платежу, витрачена за користування залученими коштами;

г) сума поточних вартостей всіх грошових потоків.

11. Хто з учасників отримує збиток від консолідації платежу:

а) кредитор;

б) позичальник;

в) кредитор, позичальник;

г) немає правильної відповіді?

12. Ставки, що забезпечують рівноцінність фінансових наслідків, називають:

а) рівнозначними;

б) рівними;

в) еквівалентними.

13. У формулі $n = t/K$ показник K означає:

а) число днів позики;

б) термін позики в роках;

в) число днів у році;

г) немає правильної відповіді.

14. Еквівалентними називають ставки, що забезпечують дорівненість:

а) дисконтних множників;

б) множників нарощення;

в) фінансових наслідків;

г) усі відповіді правильні.

Практичні завдання

1. Депозитний внесок величиною 12 тис. грн розміщений в банк на п'ять років під 14,5 % річних. Необхідно: розрахувати майбутню вартість внеску з нарахуванням простих відсотків один раз на рік; визначити еквівалентну облікову ставку; визначити еквівалентну складну ставку, якщо складні відсотки нараховуються один раз на рік, щокварталу, щомісячно.

2. Депозит на суму 18 тис. грн відкритий з 24.03.2017 р. до 19 червня включно (365/365). Необхідно: розрахувати майбутню вартість внеску з нарахуванням простих відсотків; визначити еквівалентну облікову ставку для К=360, 365.

3. Депозитний внесок величиною 25 тис. грн розміщений в банк на чотири роки. Необхідно розрахувати середню ставку складних відсотків, якщо перші два роки ставка складає 12,5 %, а кожен наступний рік підвищується на 1 %.

4. Філія комерційного банку видала протягом року п'ять позик двом фірмам ("Юпітер" і "Оріон"). Дані наведені в табл. 2.4.

Таблиця. 2.4

Вихідні дані

Квартали	Розмір позики, тис. грн	Термін позики, місяців
Фірма "Юпітер"		
I	780	5
II	1 200	6
IV	1 500	4
Фірма "Оріон"		
II	640	3
III	920	7

Необхідно визначити: середній розмір позики, отриманої кожною фірмою, та всіх позик, виданих банком; середній термін користування позиками (за умови їх безперервної оборотності); середнє число оборотів позики за рік; розмір консолідованого платежу для кожної фірми за умови, що нараховуються прості відсотки за ставкою 14,5 % річних, термін погашення консолідованого платежу – 12 міс.

5. Депозитний внесок величиною 20 тис. грн розміщений в банк на шість років під 13,5 % річних. Необхідно розрахувати середню відсоткову ставку для простих відсотків, якщо був відкритий депозит на таку ж суму через рік під 15 % річних з однаковим терміном погашення.

Розділ 3. Рентні платежі та їх аналіз

3.1. Фінансові ренти. Основні поняття.
3.2. Нарощена та сучасна величина ренти.
3.3. Визначення параметрів фінансових рент.
3.4. Конверсія фінансових рент.
3.5. Змінні потоки платежів.

Ключові слова: фінансова рента; член ренти; період ренти; термін ренти; нарощена сума ренти; сучасна величина потоку платежів; рента постнумерандо, рента пренумерандо; вічна рента; відкладена рента; конверсія рент; консолідація рент; змінна рента.

3.1. Фінансові ренти. Основні поняття

У розглянутих фінансових операціях нарахування відсотків і дисконтування здійснювалося відносно разового внеску (депозиту або позики), коли погашення нарощеної суми здійснюється одним платежем в кінці терміну. Однак фінансова операція може передбачати і ряд платежів, розподілених у часі. Ряд таких послідовних платежів називають *потоком платежів*. Потоки платежів застосовують для погашення середньо- та довгострокових кредитів, в інвестуванні, страхуванні, створенні цільових грошових фондів та ін.

Ряд послідовних фіксованих платежів, здійснених через рівні проміжки часу, називають **фінансовою рентою,** або **ануїтетом**.

Фінансова рента (надалі – рента) може бути охарактеризована низкою параметрів [28]:

член ренти – величина кожного окремого платежу;

період ренти – часовий інтервал між двома платежами;

термін ренти – час від початку реалізації ренти до моменту нарахування останнього платежу;

відсоткова ставка – ставка, яка використовується для розрахунку нарощення та дисконтування платежів, що складають ренту.

Крім основних, рента може бути також охарактеризована такими параметрами, як: частота нарахування відсотків протягом року (два рази на рік, щоквартально, щомісячно), кількість платежів протягом року, момент здійснення платежу (на початку, в середині, або в кінці періоду).

Залежно від параметрів використовують різні види фінансових рент. Класифікація видів фінансових рент показана у табл. 3.1 [18, 28].

Таблиця 3.1

Види фінансових рент

Класифікаційні ознаки	Види рент
За кількістю платежів на рік	*Річні* – ренти, за якими платежі здійснюються раз на рік
	P-термінові – ренти, за якими платежі здійснюються кілька разів на рік
	Ренти, у яких період між платежами може перевищувати рік
За частотою здійснення платежів	*Дискретні* – ренти, у яких заданий період між платежами
	Безперервні – ренти, у яких платежі здійснюються так часто, що їх можна розглядати як безперервні
Залежно від частоти нарахування відсотків	*Ренти з нарахуванням відсотків один раз на рік*
	Ренти з нарахуванням відсотків кілька разів на рік
	Ренти з безперервним нарахуванням відсотків
З точки зору стабільності розміру платежів	*Постійні*, у яких платежі – члени ренти рівні між собою
	Змінні, у яких платежі – члени ренти змінюються
За наявністю додаткових умов	*Вірні* – ренти, виплати яких не обмежені певними умовами
	Умовні – ренти, виплати яких обумовлені настанням якої-небудь події (наприклад, страхові внески, що вносяться до настання страхового випадку)
За кількістю членів ренти	*Обмежені* – ренти, що мають кінцеве число членів
	Вічні – ренти з нескінченним числом членів
За моментом початку реалізації рентних платежів	*Негайні,* коли платежі здійснюються відразу ж після укладення контракту
	Відкладені (відстрочені), термін реалізації яких відкладається на вказаний у контракті час
За моментом виплат членів ренти	*Постнумерандо*, в яких платежі здійснюються в кінці відповідних періодів (року, півріччя і т.д.)
	Пренумерандо, в яких платежі здійснюються на початку відповідних періодів
	Ренти, в яких передбачається *надходження платежів в середині періоду*

Основними узагальнювальними показниками ренти, які використовують у фінансових розрахунках, є її *нарощена* та *сучасна величини*. Ці показники застосовують для аналізу та вибору оптимальних умов контракту, для формування плану погашення заборгованості, для аналізу дохідності інвестицій, у недержавному пенсійному страхуванні та ін.

Нарощена сума ренти – це сума всіх членів потоку платежів з нарахованими на них відсотками на кінець терміну, тобто на дату останньої виплати. Нарощена сума показує, яку величину становитиме капітал, внесений через рівні проміжки часу протягом усього терміну ренти разом з нарахованими відсотками [28].

Сучасна величина потоку платежів – сума всіх його членів, зменшена (дисконтована) на величину відсоткової ставки на певний момент часу, що співпадає з початком потоку платежів або передує йому. Сучасна величина показує, яку суму слід було б мати спочатку, щоб, розбивши її на рівні внески, на які б нараховувались установлені відсотки протягом терміну ренти, можна було забезпечити отримання нарощеної суми [28].

3.2. Нарощена та сучасна величина ренти

Нарощена сума звичайної ренти

Річна рента. Розглянемо найбільш простий випадок – річну ренту постнумерандо з річним платежем R, який вноситься в кінці кожного року. Рента передбачає нарахування складних відсотків за ставкою i, термін ренти – n років. Тоді отримуємо ренту з параметрами: член ренти дорівнює R, період ренти – рік, термін ренти n , відсоткова ставка i . Оскільки рента передбачає внесення платежів наприкінці року, на останній платіж не будуть нараховані відсотки, адже цей платіж буде внесений в кінці терміну ренти. Тоді на перший платіж відсотки нараховуються $(n-1)$ рік, на другий – $(n-2)$ роки тощо, а нарощена сума з нарахуванням складних відсотків на кінець кожного року складатиме:

$$R(1+i)^{n-1},\ R(1+i)^{n-2}, \dots, R(1+i), R.$$

Якщо переписати отриманий ряд у зворотному порядку, отримаємо геометричну прогресію, перший член якої дорівнює R, знаменник прогресії $(1+i)$. Сума членів геометричної прогресії є *нарощеною сумою* такої ренти, що розраховується за формулою:

$$S = R\frac{(1+i)^n - 1}{(1+i) - 1} = R\frac{(1+i)^n - 1}{i}. \quad (3.1)$$

Показник $\frac{(1+i)^n-1}{i}$ називають коефіцієнтом нарощення ренти, у фінансовій математиці він позначається $s_{n,i}$. Тоді формулу (3.1) можна записати у вигляді:

$$S = R \cdot s_{n,i}\,. \tag{3.2}$$

Приклад 3.1. Депозитний договір укладений на п'ять років і передбачає щорічні внески в кінці року на депозитний рахунок у розмірі 10 тис. грн, відсоткова ставка складає 10 % складних річних. Необхідно визначити нарощену суму до кінця терміну депозиту, якщо відсотки нараховуються один раз на рік.

За умовами задачі маємо: член ренти $R = 10$ тис. грн, термін ренти $n = 5$ років, а відсоткова ставка на рік $i = 0{,}1$. Тоді нарощена сума річної ренти складе:

$$S = 10000\frac{(1+0{,}1)^5 - 1}{0{,}1} = 61{,}051\ (\text{тис. грн}).$$

Річна рента, нарахування відсотків m раз на рік. Якщо умовами договору для річної ренти передбачається, що відсотки будуть нараховуватись кілька разів на рік (m разів на рік), то нарахування відсотків буде здійснюватись за ставкою j/m. Тоді нарощена сума такої ренти буде визначатись за формулою:

$$S = R\frac{(1+j/m)^{nm} - 1}{(1+j/m)^m - 1}, \tag{3.3}$$

де R – член ренти;

j – номінальна річна ставка складних відсотків;

m – число нарахування відсотків протягом року (два рази на рік, щокварталу, щомісячно);

n – термін ренти в роках.

Приклад 3.2. Депозитний договір укладений на п'ять років і передбачає щорічні внески в кінці року на депозитний рахунок у розмірі 10 тис. грн, відсоткова ставка складає 10 % складних річних. Необхідно визначити нарощену суму до кінця терміну депозиту, якщо відсотки нараховуються щокварталу, щомісячно.

Визначимо нарощену суму річної ренти до кінця терміну депозиту, якщо відсотки нараховуються щокварталу, щомісячно:

$$S = 10\frac{(1 + 0{,}1/4)^{5\cdot 4} - 1}{(1 + 0{,}1/4)^{4} - 1} = 61{,}5161\ (\text{тис. грн});$$

$$S = 10\frac{(1 + 0{,}1/12)^{5\cdot 12} - 1}{(1 + 0{,}1/12)^{12} - 1} = 61{,}6264\ (\text{тис. грн}).$$

Як видно з проведених розрахунків, зі збільшенням m зростає нарощена сума ренти.

Рентні платежі вносяться кілька разів на рік рівними сумами (p-термінова рента), а нарахування відсотків проводиться раз на рік, в кінці року (m = 1). Якщо умовами ренти передбачено, що платежі будуть вноситись кілька разів на рік, а відсотки будуть нараховуватись раз на рік, тоді член ренти буде становити R/p (де R – річний платіж), а число членів ренти дорівнюватиме np. Як і для річної ренти, послідовність таких платежів утворює геометричну прогресію з першим членом R/p і знаменником $(1 + i)^{1/p}$. Нарощена величина ренти визначається як сума членів геометричної прогресії:

$$S = \frac{R}{p}\cdot\frac{(1 + i)^{\left(\frac{1}{p}\right)np} - 1}{(1 + i)^{\frac{1}{p}} - 1} = R\frac{(1 + i)^{n} - 1}{p\left((1 + i)^{\frac{1}{p}} - 1\right)}, \tag{3.4}$$

де R – річний платіж;

p – частота внесення рентних платежів протягом року;

i – річна ставка складних відсотків;

n – термін ренти в роках.

Приклад 3.3. Депозитний договір укладений на три роки і передбачає щоквартальні внески у розмірі 2,5 тис. грн, відсоткова ставка складає 14 % складних річних. Необхідно визначити нарощену суму до кінця терміну депозиту.

Якщо на депозитний рахунок щоквартально вноситься 2,5 тис. грн, то річний платіж складатиме R = 2,5 · 4 = 10 тис. грн, платежі вносяться чотири рази на рік, тобто p = 4. Річна відсоткова ставка i = 14 %, термін депозиту n = 3 роки.

Визначимо нарощену суму річної ренти до кінця терміну депозиту:

$$S = 10\frac{(1+0{,}14)^3 - 1}{4\left((1+0{,}14)^{\frac{1}{4}} - 1\right)} \approx 36{,}1525 \text{ (тис. грн)}.$$

Рента p-термінова (p = m). У випадку, коли і платежі вносяться кілька разів на рік (p), і відсотки нараховуються кілька разів на рік (m), можливі два варіанти: $p = m$ і $p \neq m$. Якщо $p = m$, формула нарощення річної ренти має вигляд:

$$S = R\frac{(1+j/m)^{nm} - 1}{j}, \tag{3.5}$$

де R – річний платіж;

j – номінальна річна ставка складних відсотків;

m – число нарахування відсотків протягом року (два рази на рік, щокварталу, щомісячно);

n – термін ренти в роках.

Приклад 3.4. Депозитний договір укладений на три роки і передбачає щоквартальні внески у розмірі 2,5 тис. грн, відсоткова ставка складає 14 % складних річних, відсотки також нараховуються щокварталу. Необхідно визначити нарощену суму до кінця терміну депозиту.

Якщо на депозитний рахунок щоквартально вноситься 2,5 тис. грн, то річний платіж складатиме $R =$ 2,5 · 4 = 10 тис. грн, платежі вносяться чотири рази на рік, тобто p = 4. Річна відсоткова ставка i = 14 %, відсотки нараховуються щокварталу, тобто m = 4, термін депозиту n = 3 роки.

Визначимо нарощену суму річної ренти до кінця терміну депозиту:

$$S = 10\frac{(1+0{,}14/4)^{3\cdot 4} - 1}{0{,}14} \approx 36{,}5049 \text{ (тис. грн)}.$$

Рента p-термінова (p ≠ m). У випадку, коли і платежі вносяться кілька разів на рік (p), і відсотки нараховуються кілька разів на рік (m) і $p \neq m$, формула нарощення річної ренти має вигляд:

$$S = \frac{R}{p} \cdot \frac{(1+j/m)^{nm} - 1}{(1+j/m)^{m/p} - 1}, \tag{3.6}$$

де R – річний платіж;

j – номінальна річна ставка складних відсотків;

m – число нарахування відсотків протягом року (два рази на рік, щокварталу, щомісячно);

p – частота внесення рентних платежів протягом року;

n – термін ренти в роках.

Приклад 3.5. Депозитний договір укладений на п'ять років і передбачає щоквартальні внески у розмірі 2 тис. грн, відсоткова ставка складає 15 % складних річних, відсотки нараховуються щомісячно. Необхідно визначити нарощену суму до кінця терміну депозиту.

Якщо на депозитний рахунок щоквартально вноситься 2 тис. грн, то річний платіж складатиме R = 2 · 4 = 8 тис. грн, платежі вносяться чотири рази на рік, тобто p = 4. Річна відсоткова ставка i = 15 %, відсотки нараховуються щомісячно, тобто m = 12, термін депозиту n = 5 років.

Визначимо нарощену суму річної ренти до кінця терміну депозиту:

$$S = \frac{8}{4} \cdot \frac{(1 + 0{,}15/12)^{5 \cdot 12} - 1}{(1 + 0{,}15/12)^{12/4} - 1} \approx 58{,}3177 \text{ (тис. грн)}.$$

Порівняння результатів нарощення річних і p-термінових рент постнумерандо з різними умовами виплат і нарощення відсотків. Нарощена сума ренти залежить від частоти внесення платежів і від частоти нарахування відсотків. Для одних і тих же початкових умов ренти та різних параметрів m і p для нарощених сум $S(p, m)$ будуть виконуватись нерівності:

$$\begin{array}{cccccc} S(1{,}1) < & S(1,m) < & S(p,1) & < S(p,m) & < S(p,m) & < S(p,m) \\ & m > 1 & p > 1 & m > p > 1 & p = m > 1 & p > m > 1. \end{array}$$

Приклад 3.6. Сума річного рентного платежу 12 тис. грн, термін ренти сім років, річна ставка складних відсотків дорівнює 13 %. Визначити нарощені суми ренти для різних параметрів m і p.

За умовами задачі маємо ренту з таким параметрами: R = 12, n = 7, i = 13 %. Розрахуємо в табл. 3.2 нарощені суми ренти для різних значень m і p.

Таблиця 3.2

Порівняння нарощених сум рент постнумерандо з різними умовами виплат і нарощування відсотків

Число рентних платежів протягом року	Число періодів нарахування відсотків			
	$m = 1$	$m = 2$	$m = 4$	$m = 12$
$p = 1$	124,856	126,493	127,374	127,987
$p = 2$	128,790	130,604	131,581	132,261
$p = 4$	130,788	132,693	133,719	134,433
$p = 12$	132,131	134,098	135,157	135,895

Сучасна величина звичайної ренти

Під *сучасною (приведеною, або поточною)* величиною потоку платежів розуміють суму дисконтованих членів цього потоку на певний попередній момент часу [18]. Сучасна величина ренти використовується для порівняння різних варіантів фінансових операцій і вибору оптимальних умов, для реструктуризації заборгованості, консолідації рент та ін.

Річна рента. Розглянемо звичайну річну ренту з такими параметрами: R – річний платіж; i – річна ставка складних відсотків; n – термін ренти в роках.

Розрахунок сучасної величини ренти здійснюється на момент початку ренти. Тоді дисконтований перший платіж $\frac{R}{(1+i)}$, дисконтований другий платіж $\frac{R}{(1+i)^2}$, дисконтований третій платіж $\frac{R}{(1+i)^3}$ і т. д., дисконтований останній платіж $\frac{R}{(1+i)^n}$. Дисконтовані платежі утворюють геометричну прогресію з першим членом $\frac{R}{(1+i)}$ і знаменником $\frac{1}{(1+i)}$, сума якої і є сучасною величиною ренти:

$$A = \frac{R}{(1+i)} \cdot \frac{(1+i)^{-n} - 1}{\frac{1}{1+i} - 1} = R \cdot \frac{1 - (1+i)^{-n}}{i}. \qquad (3.7)$$

Показник $\frac{1-(1+i)^{-n}}{i}$ називають коефіцієнтом приведення ренти. У фінансовій математиці він позначається $a_{n,i}$. Тоді формулу (3.7) можна записати у вигляді:

$$A = R \cdot a_{n,i}\,. \qquad (3.8)$$

Сучасна та нарощена величини ренти є взаємопов'язаними величинами. Математично зв'язок можна записати у вигляді формули:

$$A \cdot (1+i)^n = S. \tag{3.9}$$

Приклад 3.7. Депозитний договір укладений на п'ять років і передбачає щорічні внески в кінці року на депозитний рахунок у розмірі 10 тис. грн, відсоткова ставка складає 10 % складних річних. Необхідно визначити сучасну величину ренти.

Розрахуємо сучасну величину ренти:

$$A = 10 \cdot \frac{1-(1+0{,}1)^{-5}}{0{,}1} \approx 37{,}908 \text{ (тис. грн).}$$

Перевіримо взаємозв'язок нарощеної і сучасної величини ренти:

$$A \cdot (1+i)^n = 10 \cdot (1+0{,}1)^5 \approx 61{,}051 \text{ (тис. грн).}$$

Нарощена сума такої ренти складатиме $61{,}051$ тис. грн (див. приклад 3.1), отже, результати співпадають.

Річна рента з нарахуванням відсотків m раз на рік. Якщо умови ренти передбачають нарахування відсотків *m* раз на рік, сучасна величина ренти визначається за формулою:

$$A = R \cdot \frac{1-(1+j/m)^{-nm}}{(1+j/m)^m - 1} = R \cdot a_{nm,j/m}. \tag{3.10}$$

Визначимо сучасну величину ренти, якщо відсотки нараховуються щокварталу та щомісяця.

Приклад 3.8. За умовами прикладу 3.7 слід визначити сучасну величину ренти, якщо відсотки нараховуються щокварталу та щомісяця:

$$A = 10 \cdot \frac{1-(1+0{,}1/4)^{-5\cdot 4}}{(1+0{,}1/4)^4 - 1} \approx 37{,}5415 \text{ (тис. грн);}$$

$$A = 10 \cdot \frac{1-(1+0{,}1/12)^{-5\cdot 12}}{(1+0{,}1/12)^{12} - 1} \approx 37{,}4558 \text{ (тис. грн).}$$

Розрахунок сучасної величини р-термінової ренти з нарахуванням відсотків один раз на рік (m = 1). Якщо рентні платежі вносяться кілька разів на рік (p разів), відсотки нараховуються один раз на рік (m=1), то сучасна величина ренти визначається за формулою:

$$A = \frac{R}{p} \cdot \frac{1-(1+i)^{-n}}{(1+i)^{1/p}-1}. \tag{3.11}$$

Приклад 3.9. Депозитний договір укладений на п'ять років і передбачає внески у розмірі 10 тис. грн за рік, відсоткова ставка складає 10 % складних річних. Необхідно визначити сучасну величину ренти, якщо платежі вносяться щокварталу, а відсотки нараховуються один раз на рік.

Сума дисконтованих платежів у разі їх щоквартального внесення дорівнюватиме:

$$A = \frac{10}{4} \cdot \frac{1-(1+0{,}1)^{-5}}{(1+0{,}1)^{1/4}-1} \approx 39{,}3012 \text{ (тис. грн)}.$$

Рента p-термінова (p=m). Якщо рентні платежі вносяться кілька разів на рік (p), відсотки нараховуються кілька разів на рік (m) і $p = m$, то сучасна величина ренти визначається за формулою:

$$A = R \cdot \frac{1-(1+j/m)^{-nm}}{j}. \tag{3.12}$$

Приклад 3.10. Депозитний договір укладений на п'ять років і передбачає внески у розмірі 10 тис. грн за рік, відсоткова ставка складає 10 % складних річних. Необхідно визначити сучасну величину ренти, якщо платежі вносяться щокварталу, відсотки нараховуються також щокварталу.

Сучасна величина p-термінової ренти, для якої число періодів нарахування відсотків протягом року дорівнює числу рентних платежів (тобто $p = m = 4$), визначається за формулою:

$$A = 10 \cdot \frac{1-(1+0{,}1/4)^{-5\cdot 4}}{0{,}1} \approx 38{,}9729 \text{ (тис. грн)}.$$

Рента p-термінова (p ≠ m). Якщо рентні платежі вносяться кілька разів на рік (p), відсотки нараховуються кілька разів на рік (m) і $p \neq m$, то сучасна величина ренти визначається за формулою:

$$A = \frac{R}{p} \cdot \frac{1-(1+j/m)^{-nm}}{(1+j/m)^{m/p}-1}. \tag{3.13}$$

Приклад 3.11. Депозитний договір укладений на п'ять років і передбачає внески у розмірі 10 тис. грн за рік, відсоткова ставка складає 10 % складних річних. Необхідно визначити сучасну величину ренти, якщо платежі вносяться щокварталу, а відсотки нараховуються щомісяця.

Сучасну величину p-термінової ренти, для якої $p = 4$, $m = 12$ визначають за формулою:

$$A = \frac{10}{4} \cdot \frac{1 - (1 + 0{,}1/12)^{-5 \cdot 12}}{(1 + 0{,}1/12)^{12/4} - 1} \approx 38{,}8961 \text{ (тис. грн)}.$$

Порівняння сучасних вартостей річних і p-термінових рент постнумерандо з різними умовами виплат і нарощення відсотків. Величина сучасної вартості ренти залежить від параметрів p і m. Якщо сучасну величину ренти позначити як $A(p, m)$, то для різних параметрів матиме місце нерівність:

$$A\,(1, \infty) < A\,(1, m) < A\,(1, 1) < A\,(p, \infty) < A\,(p, 1);$$

$$p > m > 1;\ p = m > 1;\ m > p > 1.$$

Приклад 3.12. Сума річного рентного платежу 12 тис. грн, термін ренти – сім років, річна ставка складних відсотків дорівнює 13 %.

Необхідно визначити сучасну вартість ренти для різних параметрів m і p. За умовами задачі маємо ренту з таким параметрами:

R =12, n = 7, i = 13 %.

Розрахуємо в табл. 3.3 сучасну вартість ренти для різних значень m і p.

Таблиця 3.3

Порівняння сучасної вартості рент постнумерандо з різними умовами виплат і нарощування відсотків

Число рентних платежів протягом року	Число періодів нарахування відсотків			
	$m = 1$	$m = 2$	$m = 4$	$m = 12$
$p = 1$	53,071	52,381	52,019	51,771
$p = 2$	54,743	54,083	53,737	53,499
$p = 4$	55,593	54,948	54,610	54,378
$p = 12$	56,164	55,530	55,197	54,969

Отже, з табл. 3.3 видно, що рента з умовами $p = 4$ і $m = 2$ має більшу сучасну вартість, ніж з $p = 2$ і $m = 4$ за рівними іншими умовами.

Залежність між нарощеною та сучасною вартістю ренти.

Для річної ренти з нарахуванням відсотків 1 раз на рік:

$$S = A(1+i)^n; \qquad (3.14) \qquad A = S(1+i)^{-n}. \qquad (3.15)$$

Для рент з нарахуванням відсотків m раз на рік:

$$S = A(1+j/m)^{nm}; \qquad (3.16) \qquad A = S(1+j/m)^{-nm}. \qquad (3.17)$$

3.3. Визначення параметрів фінансових рент

Окрім нарощеної і сучасної величин ренти, можна розрахувати інші її параметри. Розглянемо формули для визначення різних параметрів фінансової ренти.

Визначення розміру члена ренти. Якщо сторони фінансової операції узгодили такі параметри ренти, як нарощену або сучасну величину, термін ренти та відсоткову ставку, виникає необхідність розрахунку члена ренти. Для звичайної ренти постнумерандо формули для визначення розміру члена ренти мають вигляд:

$$R = \frac{S}{s_{n,i}} = \frac{S}{((1+i)^n - 1)/i}; \qquad (3.18) \qquad R = \frac{A}{a_{n,i}} = \frac{A}{(1-(1+i)^{-n})/i}. \qquad (3.19)$$

Визначення терміну ренти. Якщо сторони фінансової операції узгодили всі параметри ренти, окрім її терміну, він може бути розрахований з використанням нарощеної або сучасної величини [28].

Якщо відома нарощена величина ренти S, термін ренти розраховується залежно від параметрів p і m (табл. 3.4)

Таблиця 3.4

Розрахунок тривалості ренти, якщо відома величина S

p	m	Формула розрахунку
1	2	3
=1	=1	$n = \frac{\ln\left(\frac{S}{R}i + 1\right)}{\ln(1+i)}$

Закінчення табл. 3.4

1	2	3
=1	>1	$n = \dfrac{\ln\left(\frac{S}{R}[(1+j/m)^m - 1] + 1\right)}{m\ln(1+j/m)}$
>1	=1	$n = \dfrac{\ln\left(\frac{S}{R}p\left[(1+i)^{1/p} - 1\right] + 1\right)}{\ln(1+i)}$
>1	$= p$	$n = \dfrac{\ln\left(\frac{S}{R}j + 1\right)}{m\ln(1+j/m)}$
>1	$\neq p$	$n = \dfrac{\ln\left(\frac{S}{R}p[(1+j/m)^{m/p} - 1] + 1\right)}{m\ln(1+j/m)}$

Якщо відома сучасна величина ренти A, термін ренти розраховується залежно від параметрів p і m (табл. 3.5)

Таблиця 3.5

Розрахунок тривалості ренти, якщо відома величина A

p	m	Формула розрахунку
1	2	3
=1	=1	$n = \dfrac{\ln\left(1 - \frac{A}{R}i\right)^{-1}}{\ln(1+i)}$
=1	>1	$n = \dfrac{\ln\left(1 - \frac{A}{R}[(1+j/m)^m - 1]\right)^{-1}}{m\ln(1+j/m)}$
>1	=1	$n = \dfrac{\ln\left(1 - \frac{A}{R}p\left[(1+i)^{1/p} - 1\right]\right)^{-1}}{\ln(1+i)}$
>1	$= p$	$n = \dfrac{\ln\left(1 - \frac{A}{R}j\right)^{-1}}{m\ln(1+j/m)}$
>1	$\neq p$	$n = \dfrac{\ln\left(1 - \frac{A}{R}p[(1+j/m)^{m/p} - 1]\right)^{-1}}{m\ln(1+j/m)}$

Якщо розрахований термін ренти не є цілим числом, його округлюють до найменшого цілого значення. У випадку округлення зменшується нарощена сума S, і ця різниця компенсується під час укладання контракту.

Визначення відсоткової ставки. Якщо виникає необхідність розрахунку відсоткової ставки фінансової ренти, застосовується метод лінійної інтерполяції. Для цього спочатку розраховують коефіцієнти нарощення $s_{n,i} = \frac{S}{R}$ або приведення $a_{n,i} = \frac{A}{R}$. Далі встановлюють прогнозоване верхнє та нижнє значення відсоткової ставки $i_{в}$ та $i_{н}$, тоді відсоткова ставка розраховується за формулами:

$$i = i_{н} + \frac{s_{n,i} - s_{Н}}{s_{В} - s_{Н}} \cdot (i_{В} - i_{Н}), \quad (3.20)$$

де $s_{В}$ і $s_{Н}$ – коефіцієнти нарощення для ставок $i_{в}$ та $i_{н}$;

$$i = i_{н} + \frac{a_{n,i} - a_{Н}}{a_{В} - a_{Н}} \cdot (i_{В} - i_{Н}), \quad (3.21)$$

де $a_{В}$ і $a_{Н}$ – коефіцієнти нарощення для ставок $i_{в}$ та $i_{н}$.

Визначення параметрів інших видів рентних платежів

Рентні платежі з простими відсотками. Фінансові ренти, як правило, передбачають нарахування складних відсотків. Якщо за умовами контракту нараховуються прості відсотки, нарощена та сучасна величина ренти визначаються за формулами:

$$S = \frac{n \cdot R \cdot (2 + (n-1) \cdot i)}{2}; \quad (3.22)$$

$$A = R \cdot \sum (1 + t \cdot i)^{-1}, t = 1, \dots, n. \quad (3.23)$$

Вічна рента – це рента з нескінченним числом членів, наприклад виплати за облігаціями з необмеженим терміном дії. Тоді нарощена сума такої ренти наближається до нескінченості, а сучасна величина ренти з $n \to \infty$ визначається за формулою:

$$A_{\infty} = R \frac{1 - \frac{1}{(1+i)^{\infty}}}{i} = R \frac{1 - \frac{1}{\infty}}{i} = R \frac{1-0}{i} = \frac{R}{i}. \quad (3.24)$$

Якщо рентні платежі виплачуються кілька разів на рік ($p > 1$), сучасна величина вічної ренти визначається за формулою:

$$A_{\infty} = \frac{R}{p((1 + j/m)^{m/p} - 1)}. \quad (3.25)$$

Відкладена рента. Якщо умовами фінансової операції передбачене відстрочення терміну реалізації ренти, сучасна величина такої ренти визначається шляхом дисконтування величини негайної ренти:

$$A_t = A \cdot \frac{1}{(1+i)^t}, \tag{3.26}$$

де A_t – сучасна величина відкладеної ренти;
A – сучасна величина негайної ренти;
t– період відстрочення ренти.

Рента пренумерандо. Якщо ренті платежі вносяться не в кінці періоду (рента постнумерандо), а на його початку, така рента є рентою пренумерандо. Нарощена сума ренти пренумерандо визначається за формулою:

$$S' = R(1+i)\frac{(1+i)^n}{i}. \tag{3.27}$$

Різниця між рентою постнумерандо та пренумерандо у кількості періодів нарахування відсотків. Сума членів ренти пренумерандо більше нарощеної суми ренти постнумерандо в $(1+i)$ разів, тому нарощену суму ренти пренумерандо можна записати у вигляді:

$$S' = S(1+i), \tag{3.28}$$

де S – нарощена сума ренти постнумерандо.

Якщо $p = 1$ і $m > 1$, нарощена сума ренти пренумерандо визначається за формулою:

$$S' = S(1+j/m)^m . \tag{3.29}$$

Для $p > 1$ і $m = 1$:

$$S' = S(1+i)^{1/p} . \tag{3.30}$$

Для $p > 1$ і $m > 1$:

$$S' = S(1+j/m)^{m/p}. \tag{3.31}$$

Сучасні величини рент пренумерандо розраховують аналогічно на основі сучасної величини ренти постнумерандо (A):

$$A' = A(1+i);\ \ A' = A(1+j/m)^m;\ \ A' = A(1+i)^{1/p};\ \ A' = A(1+j/m)^{m/p}.$$

Ренти з платежами в середині періодів. Якщо умовами фінансової операції передбачено внесення рентних платежів в середині періодів, нарощену та сучасну величину такої ренти знаходять за формулами:

$$S^{1/2} = S(1+i)^{1/2};\ S^{1/2} = S(1+j/m)^{m/2};$$
$$S^{1/2} = S(1+i)^{1/2p};\ S^{1/2} = S(1+j/m)^{m/2p}.$$

$$A^{1/2} = A(1+i)^{1/2};\ A^{1/2} = A(1+j/m)^{m/2};$$
$$A^{1/2} = A(1+i)^{1/2p}; A^{1/2} = A(1+j/m)^{m/2p}.$$

3.4. Конверсія фінансових рент

Під *конверсією* фінансових рент розуміють зміну умов виплати ренти через певні причини, інакше кажучи, мова йде про конвертації умов, не передбачених для виплати фінансової ренти. Простими випадками конверсії є заміна ренти разовим платежем (викупівля ренти) або, навпаки, заміна разового платежу рентою (розстрочення платежу). Більш складним випадком є об'єднання декількох рент з різними характеристиками в одну – консолідація рент. За цієї умови передбачається, що конверсія не повинна приводити до зміни фінансових наслідків для кожної із сторін, що беруть участь, тобто конверсія ґрунтується на принципі фінансової еквівалентності [28].

Розглянемо основні випадки конверсії рент.

Викупівля ренти. Така конверсія передбачає заміну ренти разовим платежем. У цьому випадку сучасну величину ренти розраховують на момент викупівлі залежно від її початкових умов.

Заміна разового платежу рентним. Для вирішення завдання прирівнюємо сучасну вартість ренти, за допомогою якої проводиться розстрочення, до суми боргу. Завдання полягає у визначенні одного з параметрів цієї ренти – члена ренти – за умови, що решта параметрів задана:

$$A = R \cdot \frac{1-(1+i)^{-n}}{p \cdot \left((1+i)^{1/p} - 1\right)}. \tag{3.32}$$

Звідси:

$$R = A \div \frac{1-(1+i)^{-n}}{p \cdot ((1+i)^{1/p} - 1)}, \tag{3.33}$$

де A – сучасна величина потоків платежів;

i – річна відсоткова ставка;

n – термін ренти;

p – терміновість ренти (кількість платежів на рік).

Приклад 3.13. Фірма пропонує покупцеві свою продукцію на суму 2 млн грн з умовою її оплати протягом двох років під 15 % річних (складні відсотки). Платежі повинні вноситись щокварталу, відсотки нараховуються в кінці року. Необхідно визначити умови конверсії даної пропозиції.

Якщо A = 2 млн грн, n = 2 роки, p = 4, m = 1, i = 0,15, тоді член ренти дорівнює:

$$R = 2 \div \frac{1-(1+0{,}15)^{-2}}{4\cdot((1+0{,}15)^{1/4}-1)} = 1{,}16652\ (\text{млн грн}).$$

Далі знаходимо квартальний платіж:

$$R\text{кв} = \frac{R}{4} = \frac{1{,}16652}{4} \approx 0{,}291631\ (\text{млн грн}).$$

Для визначення доцільності здійснення купівлі на пропонованих умовах розрахуємо нарощену величину ренти:

$$S = R\cdot\frac{(1+i)^n-1}{p\cdot\left((1+i)^{1/p}-1\right)} = 1{,}166525\cdot\frac{(1+0{,}15)^2-1}{4\cdot\left((1+0{,}15)^{1/4}-1\right)} =$$
$$= 2{,}645\ (\text{млн грн}).$$

Таким чином, приймаючи умови фірми, покупцеві необхідно буде щокварталу виплачувати 291,631 тис. грн; переплата складе 645 тис. грн.

Зміна умов ренти. Зміна умов ренти означає часткову або повну зміну початкових параметрів ренти, що приводить до утворення нової ренти. Якщо сторони фінансової операції бажають зберегти фінансову еквівалентність, необхідно зберегти рівність сучасних величин початкової та нової ренти $A_0 = A_1$ і рівність відсоткових ставок.

Найпростіший випадок зміни умов ренти – перетворення негайної ренти на відстрочену, коли внесення першого внеску переноситься на більш пізній термін (t років, місяців). Загальна тривалість ренти може залишатись незмінною (тобто $n_0 = n_1$) або ж вона може змінюватись (тобто $n_0 \neq n_1$). Відповідно, члени ренти можуть бути рівні між собою ($R_0 = R_1$) або ж не рівні.

У разі, якщо негайна рента замінюється на відкладену зі збереженням термінів ренти $(n_0 = n_1)$ і рівності сучасних величин$(A_0 = A_1)$, розрахунок величини рентного платежу проводиться таким чином:

$$A_0 = R_0 \frac{1-(1+i)^{-n}}{i}, A_1 = R_1 \frac{1-(1+i)^{-n}}{i} \cdot \frac{1}{(1+i)^t},$$

де R_0 і R_1 – відповідно, річні рентні платежі початкової і зміненої ренти;
i – період, на який відкладена рента.

Оскільки за умовою конверсії $A_0 = A_1$, то:

$$R_1 = R_0(1+i)^t.$$

З нарахуванням відсотків m раз на рік ця формула набуде вигляду:

$$R_1 = R_0(1+j/m)^{tm}. \qquad (3.34)$$

З перетворенням негайної ренти на відкладену $n_0 \neq n_1$ розрахунок величини рентного платежу здійснюватиметься за формулою:

$$R_t = R_0 \cdot \left(\frac{(1-(1+i)^{-n_0}/_i}{(1-(1+i)^{-n_t}/_i} \right) \cdot (1+i)^t. \qquad (3.35)$$

Загальний випадок заміни ренти. У разі заміни не одного, а декількох параметрів ренти член нової ренти визначається за формулою:

$$R_1 = A_0 \frac{p_1\left((1+j_1/m_1)^{m_1/p_1} - 1\right)}{1-(1+j_1/m_1)^{-n_1 m_1}}. \qquad (3.36)$$

Приклад 3.14. Фірма з торгівлі нерухомістю пропонує об'єкт вартістю 1,5 млн грн, пропонуючи такі варіанти оплати: а) одноразова оплата; б) оплата протягом двох років рівними платежами, що вносяться в кінці року під 9 % річних; в) оплата з відстроченням платежу в один рік, останні умови аналогічні попередньому варіанту; г) оплата з відстроченням в один рік, але термін ренти зростає до трьох років. Необхідно визначити фінансові наслідки та зробити висновки.

Початкові дані: A = 1,5 млн грн, n = 2 роки, i = 0,09.

Розв'язання:

а) *одноразова оплата,* даний варіант припускає, що виплата буде проведена відразу, тобто $S = A = 1{,}5$ (млн грн);

б) *оплата рівними платежами, що вносяться в кінці кожного року.* Знаходимо член ренти:

$$R = A \div \frac{(1+i)^{-n}}{i} = 1{,}5 \div \frac{(1+0{,}09)^{-2}}{0{,}09} = 0{,}852703 \text{ млн грн.}$$

Далі розраховуємо нарощену величину ренти:

$$S = R \cdot \frac{(1+i)^{n}-1}{i} = 0{,}852703 \cdot \frac{(1+0{,}09)^{2}-1}{0{,}09} = 1{,}782149 \text{ (млн грн);}$$

в) *оплата з відстроченням платежу (термін ренти не змінюється)* – дане завдання припускає розрахунок відстроченої ренти, тобто коли внесення першого внеску переноситься на пізніший термін (t років, місяців). У цьому випадку загальна тривалість ренти залишається попередньою:

$$R_t = R_0 \cdot (1+i)^{t} = 0{,}852703 \cdot (1+0{,}09)^{1} = 0{,}929446 \text{ (млн грн).}$$

Тоді:

$$S = R_t \cdot \frac{(1+i)^{n}-1}{i} = 0{,}929446 \cdot \frac{(1+0{,}09)^{1}-1}{0{,}09} = 1{,}942543 \text{ (млн грн);}$$

г) *оплата з відстроченням зі збільшенням терміну ренти*, тобто необхідно знайти відкладену ренту за умови, що загальна тривалість ренти зростає до трьох років.

Для розрахунку величини рентного платежу нової ренти, відстроченої на період $t = 1$ і з новим терміном, використовується формула:

$$R_t = R_0 \cdot \left(\frac{(1-(1+i)^{-n_0} / i}{(1-(1+i)^{-n_t} / i} \right) \cdot (1+i)^{t};$$

$$R_3 = 0{,}852703 \cdot \left(\frac{(1-(1+0{,}09)^{-2} / 0{,}09}{(1-(1+0{,}09)^{-3} / 0{,}09} \right) \cdot (1+0{,}09)^{1} = 0{,}645914 \text{ (млн грн).}$$

Тоді:

$$S = R_t \cdot \frac{(1+i)^n - 1}{i} = 0{,}645914 \cdot \frac{(1+0{,}09)^1 - 1}{0{,}09} = 2{,}11737\ (\text{млн грн}).$$

Як було зазначено, зміна умов виплати ренти, тобто часткова або повна зміна її первинних параметрів, приводить до зміни фінансових наслідків.

Об'єднання (консолідація) рент. Консолідація рент передбачає заміну кількох рент однією. Консолідація базується на принципі фінансової еквівалентності, для дотримання якого сучасну величину консолідованої ренти визначають як суму сучасних величин рент, що підлягають консолідації:

$$A = \sum_q A_q, \tag{3.37}$$

де A – сучасна вартість консолідованої ренти;

A_q – сучасна вартість q-ї ренти, що підлягає консолідації.

Ренти, що підлягають консолідації, можуть мати різні параметри термінів, відсоткової ставки, рентних платежів тощо. Для консолідованої ренти сторони фінансової операції визначають усі параметри, крім одного, який розраховується, виходячи з формули (3.37). Найчастіше в якості розраховуваного параметра консолідованої ренти виступає термін ренти або член ренти.

Умови консолідації рент можуть передбачати *збіг початку терміну нової (консолідованої) ренти та рент, що об'єднуються,* або розбіжність цих термінів. Якщо моменти початку виплати ренти не збігаються в часі, то, дисконтуючи їх сучасні величини на початок найбільш ранньої ренти, отримаємо необхідні для об'єднання рент значення сучасних величин.

Член консолідованої ренти визначається за формулою:

$$R = \frac{\sum_{q=1}^{K} A_q}{(1-(1+i)^{-n}\big/_i}, \tag{3.38}$$

де n, i – параметри консолідованої ренти.

Для консолідації річних рент з нарахуванням відсотків в кінці періоду, що відрізняються між собою величиною рентного платежу та тривалістю ренти, член консолідованої ренти може бути визначений за формулою:

$$R = \frac{\sum_{q=1}^{K} R_q \cdot {}^{1-(1+i_q)^{-n_q}}\!/_{i_q}}{(1-(1+i)^{-n})/_{i}}, \tag{3.39}$$

де R_q – член q-ї ренти;

n_q – тривалість q-ї ренти;

i_q – відсоткова ставка q-ї ренти;

i – параметри консолідованої ренти.

У випадку, якщо оплата по консолідованій ренті відкладається на t років, член консолідованої ренти визначається за формулою:

$$R_t = \frac{\sum_{q=1}^{K} R_q \cdot {}^{1-(1+i_q)^{-n_q}}\!/_{i_q}}{(1-(1+i)^{-n})/_{i}} \cdot (1+i)^t, \tag{3.40}$$

де R_t – член відкладеної консолідованої ренти;

R_q – член q-ї ренти;

n_q – тривалість q-ї ренти;

i_q – відсоткова ставка q-ї ренти;

n, t, i – параметри консолідованої ренти.

Приклад 3.15. Є три річні ренти (негайні з нарахуванням відсотків у кінці періодів) з такими параметрами: $R_1 = 0{,}2$ млн грн, $n_1 = 2$ роки, $i_1 = 9$ %; $R_2 = 0{,}25$ млн грн, $n_2 = 4$ роки, $i_2 = 8$ %; $R_3 = 0{,}37$ млн грн, $n_3 = 5$ років, $i_3 = 10$ %. Їх запропоновано замінити однією річною рентою з нарахуванням відсотків у кінці періоду, термін погашення консолідованої ренти $n = 5$ років, $i = 10$ %.

Необхідно визначити величину рентного платежу консолідованої ренти, якщо:

а) початок її терміну збігається з початком терміну всіх замінюваних рент;

б) оплата за новою рентою відкладається на два роки.

У табл. 3.6 показані основні характеристики об'єднуваних рент.

Таблиця 3.6

Основні характеристики об'єднуваних рент

№ ренти, q	Член ренти, R_q, млн грн	Термін ренти, n_q, років	Відсоткова ставка, i, %
1	0,20	2	9
2	0,25	4	8
3	0,37	5	7

Розв'язання:

а) умови консолідації рент передбачають *збіг початку терміну нової (консолідованої) ренти й об'єднуваних рент*, тому член консолідованої ренти визначається за формулою (3.39) (n = 5, i = 0,1).

У табл. 3.7 подані результати розрахунку сучасних величин об'єднуваних рент.

Таблиця 3.7

Результати розрахунку сучасних величин

№ ренти, q	Член ренти, R_q, млн грн	Термін ренти, n_q, років	Відсоткова ставка, i_q, %	Сучасна величина, A_q, млн грн
1	0,2	2	0,09	0,3518222
2	0,25	4	0,08	0,8280317
3	0,37	5	0,07	1,5170731
Разом	**-**	**-**	**-**	**2,696927**

Підставивши набутих значень у формулу, розрахуємо значення річного платежу нової консолідованої ренти:

$$R = \frac{2,696927}{(1-(1+0,1)^{-5}\big/_{0,1}} = 0,7114425 \text{ (млн грн)};$$

б) умови консолідації рент передбачають, що *оплата за новою рентою відкладається* на два роки, тому член консолідованої ренти визначається за формулою (3.40) (n = 5, i = 0,1, t = 2).

Скоректуємо платіж консолідованої ренти:

$$R_t = \frac{\sum_{q=1}^{K} R_q \cdot 1-\left(1+i_q\right)^{-n_q}\big/_{i_q}}{(1-(1+i)^{-n}\big/_{i}} \cdot (1+i)^t = 0,7114425 \cdot (1+0,1)^2 =$$

$$= 0,8608455 \text{ (млн грн)}.$$

Для об'єднання рент можуть бути запропоновані різні умови, що супроводжується необхідністю розрахунку характеристик консолідованої ренти. Виведення формул для їх обчислення завжди засноване на рівності сучасних величин.

3.5. Змінні потоки платежів

Потоки з разовими змінами платежів

Потік послідовних платежів, члени якого не є постійними величинами, називається **змінною рентою.**

У разі, коли потік платежів є дискретним і кожен член ренти постійний тільки в межах свого часового відрізку, розраховується *змінна рента з разовими змінами розміру члена ренти*:

$$S = R_1 \cdot s_{n_1,i_1} \cdot (1+i)^{n-n_1} + R_2 \cdot s_{n_2,i_2} \cdot (1+i)^{n-(n_1+n_2)} + \dots + \\ + R_k \cdot s_{n_k,i_k}. \qquad (3.41)$$

Коефіцієнти нарощування річної ренти $s_{n,i}$ визначають за формулою:

$$s_{n,i} = \frac{(1+i)^n - 1}{i}. \qquad (3.42)$$

Сучасна величина річної ренти:

$$A = R_1 \cdot a_{n_1,i_1} + R_2 \cdot a_{n_2,i_2} \cdot v^{n_1} + \dots + R_k \cdot a_{n_k,i_k} \cdot v^{n-n_1}. \qquad (3.43)$$

Коефіцієнти приведення річної ренти визначаються за формулою:

$$a_{n,i} = \frac{1-(1+i)^{-n}}{i}. \qquad (3.44)$$

Для знаходження нарощеної суми або сучасної величини у p-термінової ренті використовуються відповідні коефіцієнти нарощення або приведення

Приклад 3.16. На модернізацію підприємства отриманий довгостроковий кредит на десять років, погашення якого здійснюватиметься на таких умовах: у перші п'ять років платежі у розмірі 3 млн грн вносяться кожні півроку під 8 % річних; наступні три роки платежі у розмірі 5 млн грн вносяться також за півріччями під 10 % річних; останні два роки платежі у розмірі 6 млн грн вносяться щокварталу під 10 % річних. Протягом усього терміну ренти відсотки нараховуються один раз на рік. Необхідно визначити нарощену величину ренти.

У табл. 3.8 поданий план погашення довгострокового кредиту.

Таблиця 3.8

Початкові дані погашення довгострокового кредиту

№ ренти, k	Термін ренти, n_k	Річний платіж, R_k	Відсоткова ставка, i_k	Терміновість ренти (кількість виплат на рік), p_k
1	5	6	0,08	2
2	3	10	0,1	2
3	2	24	0,1	4

Оскільки схема погашення довгострокового кредиту (m = 1 і n = 10) є змінною рентою з платежами які здійснюються кілька разів на рік (*рента p-термінова*), коефіцієнти нарощування визначаються за формулою:

$$s_{n,i}^{(p)} = \frac{(1+i)^n - 1}{p \cdot \left((1+i)^{1/p} - 1\right)}.$$

У табл. 3.9 надані результати розрахунку коефіцієнтів нарощування.

Таблиця 3.9

Результати розрахунку коефіцієнтів нарощування

№ ренти, k	Термін ренти, n_k	Відсоткова ставка, i_k	Терміновість ренти (кількість виплат на рік), p_k	Коефіцієнт нарощування, $s_{n,i}^{(p)}$
1	5	0,08	2	5,981676
2	3	0,1	2	3,390779
3	2	0,1	4	2,177187

Таким чином, нарощена величина ренти дорівнює:

$$S = 6 \cdot 5{,}981676 \cdot (1+0{,}08)^{10-5} + 10 \cdot 3{,}390779 \cdot (1+0{,}1)^{10-(5+3)} +$$
$$+24 \cdot 2{,}177187 = 146{,}01516 \text{ (млн грн)}.$$

Загальна сума виплат за довгостроковим кредитом складе 146,01516 млн грн.

Змінна рента з постійною абсолютною зміною її членів. Рента, члени якої змінюються за законом арифметичної прогресії, називається *змінною рентою з постійною абсолютною зміною її членів* (на величину d).

Нарощена сума даної ренти визначається за формулою:

$$S = R \cdot s_{n,i} + \frac{d}{i} \cdot \left(s_{n,i} - n\right). \tag{3.45}$$

Якщо члени ренти не збільшуються, а зменшуються на постійну величину d, то нарощена сума буде визначатись як:

$$S = R \cdot s_{n,i} - \frac{d}{i} \cdot \left(s_{n,i} - n\right). \tag{3.46}$$

Приклад 3.17. Кредит розміром 15 млн грн має бути погашений протягом п'яти років постійно зростаючими платежами з абсолютним щорічним приростом, дорівненим 0,5 млн грн. Платежі та нарахування відсотків на них проводять в кінці року, відсоткова річна ставка – 9 %. Визначити розмір першого платежу та загальну суму виплат.

Початкові дані: A = 15 млн грн, n = 5 років, i = 9 %, d = 0,5 млн грн, нарахування відсотків і виплати здійснюються в кінці року.

Розв'язання:

Знаючи поточну суму боргу, тобто величину A, можна визначити розмір першого платежу:

$$R = \frac{A \cdot (1+i)^n - \frac{d}{i} \cdot (s_{n,i} - n)}{s_{n,i}},$$

де $s_{n,i}$ – коефіцієнт нарощування.

$$R = \frac{15 \cdot (1+0{,}09)^5 - \frac{0{,}5}{0{,}09} \cdot (5{,}98471 - 5)}{5{,}98471} = 2{,}942288 \text{ (млн грн)}.$$

Нарощена сума даної ренти визначається за формулою:

$$S = R \cdot s_{n,i} + \frac{d}{i} \cdot \left(s_{n,i} - n\right);$$

$$S = 2{,}942288 \cdot 5{,}98471 + \frac{0{,}5}{0{,}09} \cdot (5{,}98471 - 5) = 23{,}079359 \text{ (млн грн)}.$$

Так, щоб виплатити кредит у розмірі 15 млн грн за запропонованою схемою, необхідно внести перший платіж у розмірі 2,942 288 млн грн, переплата складе 8,079 359 млн грн.

Для рент пренумерандо, тобто коли платежі вносяться на початку кожного року, зі збереженням умови, що кожен новий платіж збільшується порівняно з попереднім на постійну величину $d,$ нарощена сума ренти визначається за формулою:

$$S = R \cdot \left(s_{n+1,i} - 1\right) + \frac{d}{i} \cdot \left(\left(s_{n+1,i} - 1\right) - n(1+i)\right). \qquad (3.47)$$

Наведена формула справедлива за умови використання коефіцієнтів нарощення, розрахованих для рент постнумерандо.

З використанням коефіцієнтів нарощення, розрахованих для рент пренумерандо, нарощена сума визначається за формулою:

$$S = R \cdot s_{n,i} + \frac{d}{i} \cdot \left(s_{n,i} - n \cdot (1+i)\right). \qquad (3.48)$$

Сучасну величину змінної ренти знаходять через її нарощену суму:

$$A = S \cdot (1+i)^{-n}.$$

Розмір першого платежу ренти, члени якої змінюються в арифметичній прогресії, визначається за формулою:

$$R = \frac{S - \frac{d}{i} \cdot (s_{n,i} - n)}{s_{n,i}}. \qquad (3.49)$$

Розмір першого платежу ренти можна визначити через сучасну величину A:

$$R = \frac{A(1+i)^n - \frac{d}{i} \cdot (s_{n,i} - n)}{s_{n,i}}. \qquad (3.50)$$

Величина абсолютного приросту d визначається за формулою:

$$d = \frac{i \cdot (S - R \cdot s_{n,i})}{s_{n,i} - n}.$$

Рента з постійною відносною зміною платежів. Рента, члени якої змінюються за законом зростаючої геометричної прогресії, називається *рентою з постійною відносною зміною платежів*.

Нарощена величина такої ренти визначається за формулою:

$$S = R \cdot \frac{q^n - (1+i)^n}{q - (1+i)}. \tag{3.51}$$

Приведена величина ренти:

$$A = R \cdot \frac{q^n \cdot (1+i)^{-n} - 1}{q - (1+i)}. \tag{3.52}$$

Нарощена та сучасна величини p-термінової ренти:

$$S = R \cdot \frac{q^{n \cdot p} - (1+i)^n}{q - (1+i)^{\frac{1}{p}}}; \tag{3.53}$$

$$A = R \cdot \frac{q^{n \cdot p} \cdot (1+i)^{-n} - 1}{q - (1+i)^{\frac{1}{p}}}. \tag{3.54}$$

Приклад 3.18. Отриманий кредит строком на сім років. Умови погашення: перший платіж 0,2 млн грн; кожен такий платіж зростає на 10 %; платежі вносяться двічі на рік; відсоткова ставка 8 % річних. Необхідно визначити розмір отриманого кредиту та суму, що підлягає виплаті.

У табл. 3.10 подані початкові дані для погашення кредиту.

Таблиця 3.10

Початкові дані схеми погашення кредиту

Параметри	Позначення	Значення
Перший член ренти, млн грн	R	0,2
Коефіцієнт зміни членів ренти	q	1,1
Терміновість ренти (кількість виплат на рік)	p	2
Термін ренти	n	7
Відсоткова ставка	i	0,08

Підсумкова величина виплат за наданим кредитом розраховується за формулою знаходження нарощеної величини p-термінової ренти з постійною відносною зміною платежів:

$$S = R \cdot \frac{q^{n \cdot p} - (1+i)^n}{q - (1+i)^{\frac{1}{p}}} = 0{,}2 \cdot \frac{1{,}1^{7 \cdot 2} - (1+0{,}08)^7}{1{,}1 - (1+0{,}08)^{\frac{1}{2}}} = 6{,}857629 \text{ (млн грн)}.$$

Сучасна величина p-термінової ренти визначається за формулою:

$$A = R \cdot \frac{q^{n \cdot p} \cdot (1+i)^{-n} - 1}{q - (1+i)^{\frac{1}{p}}} = 0{,}2 \cdot \frac{1{,}1^{7 \cdot 2} \cdot (1+0{,}08)^{-7} - 1}{1{,}1 - (1+0{,}08)^{\frac{1}{2}}} =$$

$$= 4{,}00136 \text{ (млн грн)}.$$

Таким чином, розмір отриманого кредиту складає 4,00136 млн грн, підсумкова сума виплат за запропонованою схемою – 6,85769 млн грн, тобто за сім років переплата за кредитом складе 2,856268 млн грн.

Завдання для самостійного опрацювання

Контрольні запитання для самодіагностики

1. Які фінансові параметри розраховуються для використання рентних розрахунків?
2. Які види фінансових рент розрізняють за кількістю платежів на рік?
3. Які види фінансових рент розрізняють за частотою здійснення платежів?
4. Наведіть приклади вірних і умовних рент.
5. Чим відрізняються ренти постнумерандо та пренумерандо?
6. Наведіть приклади "вічної" ренти.
7. Дайте визначення нарощеної суми ренти.
8. Що показує сучасна величина потоку платежів?
9. Як розраховують основні показники фінансових рент за умови внесення платежів і нарахування відсотків кілька разів на рік?
10. Які методи використовують для визначення відсоткової ставки фінансової ренти?
11. Чому дорівнюють нарощена та сучасна величини "вічної" ренти?
12. Як визначається сучасна величина відкладеної ренти?

13. Назвіть основні види конверсії фінансових рент.
14. Як відбувається консолідація фінансових рент?
15. Назвіть основні види змінних рент.

Тести

1. Конверсія ренти передбачає:

а) об'єднання кількох рент;

б) заміну разового платежу рентою (розстрочення платежу);

в) заміну ренти разовим платежем;

г) усі відповіді правильні.

2. Сучасну величину вічної ренти можна визначити за формулою:

а) $\frac{R}{i}$;

б) $\frac{R}{(1+i)^n}$;

в) $R(1+i)^n$.

3. Математично взаємозв'язок між сучасною і нарощеної величиною ренти описується формулою:

а) $S = A(1+i)^{-n}$;

б) $S = A(1+i)^n$;

в) $A = S(1+i)^n$.

4. Якщо платежі здійснюються на початку кожного періоду, то такі ренти називаються:

а) змінні ренти;

б) постнумерандо;

в) пренумерандо;

г) постійні ренти.

5. Зі збільшенням сучасної величини річної ренти постнумерандо нарощена вартість ренти:

а) збільшується;

б) зменшується;

в) не змінюється;

г) ці величини не пов'язані.

6. *Коефіцієнт приведення ренти залежить від:*

а) члена річної ренти та номінальної ставки відсотків;

б) терміну ренти та відсоткової ставки;

в) відсоткової ставки та члена річної ренти ;

г) терміну ренти та члена річної ренти.

7. Заміна майбутньої послідовності виплат одноразовим платежем – це:

а) об'єднання рент;

б) зміна тривалості ренти;

в) розстрочення платежів;

г) викупівля ренти.

8. Якщо члени ренти рівні між собою, то це рента:

а) постійна;

б) умовна;

в) обмежена;

г) безперервна.

9. Дискретними є ренти:

а) з нарахуванням відсотків m разів на рік;

б) p-термінові;

в) постійні;

г) змінні;

д) річні.

10. Якщо для визначення терміну ренти розраховане значення n є дробовою величиною, його необхідно округлити:

а) за правилами округлення;

б) до найменшого цілого значення;

в) до найбільшого цілого значення.

11. Фінансовою рентою або ануїтетом називають:

а) ряд послідовних фіксованих платежів, зроблених через рівні проміжки часу;

б) суму всіх невід'ємних членів потоку платежів;

в) потік платежів, усі члени якого – невід'ємні величини, а часові інтервали постійні.

12. За рівності всіх інших умов, яка рента дає більшу нарощену суму:

а) $p = 4, m = 2$;

б) $p = 2, m = 4$;

в) $p = 2, m = 2$?

13. Ренти, в яких платежі здійснюються наприкінці відповідного періоду, називають:

а) змінні ренти;

б) постнумерандо;

в) пренумерандо;

г) постійні ренти.

14. Сума всіх членів потоку платежів з нарахованими на них відсотками на кінець терміну, тобто на дату останньої виплати – це:

а) сучасна вартість;

б) нарощена вартість;

в) фінансова рента;

г) ануїтет.

15. Ренти p-термінові відносять до:

а) дискретних рент;

б) безперервних рент.

Практичні завдання

1. Депозитний договір укладено на чотири роки, і він передбачає щорічні внески в кінці року на депозитний рахунок у розмірі 6 тис. грн, відсоткова ставка складає 12 % складних річних. Необхідно визначити: нарощену суму до кінця терміну депозиту, якщо відсотки нараховуються один раз на рік, щокварталу, щомісячно; нарощену суму до кінця терміну депозиту, якщо рентні платежі вносяться щокварталу, відсотки нараховуються один раз на рік, щокварталу, щомісячно.

2. Депозитний договір укладено на три роки, і він передбачає щорічні внески в кінці року на депозитний рахунок у розмірі 12 тис. грн, відсоткова ставка складає 14,5 % складних річних. Необхідно визначити: сучасну величину ренти, якщо відсотки нараховуються один раз на рік, щокварталу, щомісячно; сучасну величину ренти, якщо рентні платежі вносяться щокварталу, відсотки нараховуються один раз на рік, щокварталу, щомісячно.

3. Фірма з торгівлі нерухомістю пропонує об'єкт вартістю 20 млн грн за такими варіантами оплати: а) одноразова оплата; б) оплата протягом п'яти років рівними платежами, що вносяться в кінці року під 12 % річних; в) оплата з відстроченням платежу в один рік, останні умови аналогічні попередньому варіанту; г) оплата з відстроченням на один рік, але термін ренти зростає до шести років. Необхідно визначити фінансові наслідки, зробити висновки.

4. Є три річні ренти (негайні з нарахуванням відсотків в кінці періодів) з такими параметрами: $R_1 = 0{,}8$ млн грн, $n_1 = 3$ роки, $i_1 = 11\ \%$; $R_2 =$

$= 0{,}54$ млн грн, $n_2 = 4$ роки, $i_2 = 13{,}5\ \%$; $R_3 = 0{,}72$ млн грн, $n_3 = 5$ років, $i_3 = 14\ \%$. Їх запропоновано замінити однією річною рентою з нарахуванням відсотків в кінці періоду, термін погашення консолідованої ренти $n = 6$ років, $i = 15\ \%$. Необхідно визначити величину рентного платежу консолідованої ренти, якщо: а) початок її терміну збігається з початком терміну всіх замінюваних рент; б) оплата за новою рентою відкладається на два роки.

5. На модернізацію підприємства отриманий довгостроковий кредит строком на вісім років, погашення якого здійснюватиметься на таких умовах: у перші чотири роки платежі у розмірі 2,5 млн грн вносяться кожні півроку під 12 % річних; наступні два роки платежі у розмірі 5,5 млн грн вносяться також за півріччями під 13 % річних; останні два роки платежі у розмірі 7,5 млн грн вносяться щокварталу під 14 % річних. Протягом усього терміну ренти відсотки нараховуються раз на рік. Необхідно визначити нарощену величину ренти.

Розділ 4. Погашення середньострокових і довгострокових кредитів

4.1. Погашення боргу рівними терміновими виплатами.

4.2. Погашення позики рівними та змінними виплатами основного боргу.

4.3. Конверсія та консолідація позик. Формування фонду погашення.

4.4. Розрахунки за іпотечними позиками.

Ключові слова: банківський кредит; термінові виплати; рівні виплати основного боргу; змінні виплати основного боргу; план погашення заборгованості; конверсія боргу; консолідація позик; фонд погашення заборгованості; іпотечна позика.

4.1. Погашення боргу рівними терміновими виплатами

Банківський кредит – це основна форма кредиту, за якої банком надається у тимчасове користування частина власного або залученого капіталу на умовах повернення зі сплатою банківського відсотка [4].

Банки можуть кредитувати як юридичних, так і фізичних осіб.

Банківський кредит класифікують за такими ознаками:

цільова спрямованість;

термін кредиту;

вид відсоткової ставки;

валюта кредиту;

види обслуговування.

Залежно від терміну розрізняють:

короткостроковий (до одного року);

середньостроковий (до трьох років);

довгостроковий кредити (понад три роки).

Існують різні способи погашення заборгованості, які обговорюють сторони фінансової операції під час підписання кредитного договору. Відповідно до підписаного кредитного договору формується план погашення заборгованості. Витрати, пов'язані з погашенням заборгованості (основної суми боргу та відсотків), називають *витратами на обслуговування боргу*, чи *амортизацією боргу*. Одним з найважливіших питань у ході формування плану погашення заборгованості є визначення періодичності виплат за кредитом протягом року. Такі виплати з погашення кредиту називають *терміновими виплатами*. Термінові виплати включають як погашення основної суми боргу, так і нарахованих відсотків. Платежі, призначені на погашення основної суми боргу, можуть бути рівними або можуть змінюватись за певним законом. А відсотки нараховуються на фактичну суму боргу, що залишилась на початок кожного періоду. Умови кредитного договору можуть передбачати різні варіанти погашення заборгованості. Наприклад, погашення ануїтетом, тобто платежами, які включають як виплату основної суми боргу, так і відсотків за кредитом, і вносяться через однакові проміжки часу. Ануїтет відрізняється від такого графіка погашення заборгованості, за яким вся сума боргу разом з нарахованими відсотками сплачується в кінці терміну кредиту, або від графіка, за яким періодично виплачуються відсотки, а основна сума боргу виплачується в кінці терміну кредиту.

Розглянемо випадок, коли умови кредитного договору передбачають **погашення заборгованості рівними терміновими виплатами.**

Позначимо:

Y – термінова виплата;

R – сума погашення основного боргу;

I – сума відсотків.

Кожна термінова виплата буде розраховуватись як:

$$Y = R + I = const. \tag{4.1}$$

Відсотки нараховуються на фактичний залишок суми боргу на початок періоду. З кожним періодом частина боргу буде виплачуватись, і залишок боргу буде зменшуватись, а отже, буде зменшуватись сума відсоткового платежу I. Для того, щоб виконувалась умова рівності термінових виплат, річна витрата на погашення основного боргу R буде зменшуватись, а термінові виплати будуть постійними й утворюватимуть ануїтети ренти постнумерандо. Тоді величина кредиту D є сучасною величиною такої ренти, яка може бути записана у вигляді формули:

$$D = \frac{Y_1}{(1+i)} + \frac{Y_2}{(1+i)^2} + \frac{Y_3}{(1+i)^2} + \cdots + \frac{Y_n}{(1+i)^n} = Y \cdot \frac{(1+i)^n - 1}{(1+i)^n \cdot i}, \tag{4.2}$$

де $Y_1 = Y_2 = Y_3 = \cdots = Y_n$ – термінові виплати;

i – відсоткова ставка;

n – термін кредиту.

Із формули (4.2) знайдемо величину термінової виплати:

$$Y = D \cdot \frac{i \cdot (1+i)^n}{(1+i)^n - 1}. \qquad (4.3)$$

Величину $\frac{i \cdot (1+i)^n}{(1+i)^n - 1}$ називають *коефіцієнтом погашення заборгованості*.

Приклад 4.1. Банк видав довгостроковий кредит в сумі 125 тис. грн на п'ять років під 13 % річних. Погашення кредиту повинне проводитись рівними щорічними виплатами в кінці кожного року; вони включають погашення основного боргу та відсоткові платежі. Нарахування відсотків проводиться раз на рік. Треба скласти план погашення позики.

Параметри позики: D = 125 тис. грн; n = 5 років; i =13 %. Щорічна виплата дорівнює:

$$Y = D \cdot \frac{i \cdot (1+i)^n}{(1+i)^n - 1} = 125 \cdot \frac{0{,}13 \cdot (1+0{,}13)^5}{(1+0{,}13)^5 - 1} \approx 35{,}53932 \text{ (тис. грн)}.$$

У табл. 4.1 поданий поетапний план погашення боргу.

Таблиця 4.1

План погашення боргу, тис. грн

Роки	Залишок боргу, D	Відсотковий платіж, I	Річна витрата на погашення основного боргу, R	Річна термінова сплата (ануїтет), Y
1	125,00000	16,25000	19,28932	35,53932
2	105,71068	13,74239	21,79693	35,53932
3	83,91375	10,90879	24,63053	35,53932
4	59,28322	7,70682	27,83250	35,53932
5	31,45072	4,08859	31,45072	35,53932
Разом		**52,69659**	**125,00000**	**177,69659**

Як видно з табл. 4.1, залишок боргу з кожною виплатою зменшується, отже, зменшується і сума нарахованих відсотків, а виплати на погашення основного боргу зростають, таким чином забезпечується рівність термінових платежів.

За умовами кредитного договору може передбачатись зміна відсоткової ставки протягом терміну кредиту. Розглянемо на прикладі формування плану погашення боргу, якщо передбачається зміна відсоткової ставки.

Приклад 4.2. Банк видав довгостроковий кредит в сумі 500 тис. грн на п'ять років під 10 % річних. Погашення кредиту повинне проводитись рівними щорічними виплатами в кінці кожного року; вони включають погашення основного боргу та відсоткові платежі. Нарахування відсотків проводиться раз на рік. Необхідно скласти план погашення кредиту рівними щорічними виплатами, якщо передбачається зміна відсоткової ставки: перші два роки – 10 %, останні три роки – 12 %.

Для складання плану погашення позики визначимо величину щорічної виплати, враховуючи, що загальний термін погашення складе п'ять років:

$$Y_1 = D \cdot \frac{i \cdot (1+i)^n}{(1+i)^n - 1} = 500 \cdot \frac{0{,}1 \cdot (1+0{,}1)^5}{(1+0{,}1)^5 - 1} \approx \ 131{,}89874 (\text{тис. грн}).$$

Покроковий розрахунок здійснюється виходячи із співвідношень:

$$Y = D \cdot \frac{i \cdot (1+i)^n}{(1+i)^n - 1};$$

$$I = D \cdot i; \qquad R = Y - I; \qquad D_i = D_{i-1} - R_{i-1}.$$

У табл. 4.2 подано поетапний план погашення боргу.

Таблиця 4.2

План погашення боргу, тис. грн

Роки	Відсоткова ставка, i	Залишок боргу, D	Відсотковий платіж, I	Річна витрата на погашення основного боргу R	Річна термінова сплата, Y
1	0,10	500,00000	50,00000	81,89874	131,89874
2	0,10	418,10126	41,81013	90,08861	131,89874
3	0,12	328,01265	39,36152	97,20621	136,56773
4	0,12	230,80643	27,69677	108,87096	136,56773
5	0,12	121,93547	14,63226	121,93547	136,56773
Разом			**173,50067**	**500,00000**	**673,50067**

Таким чином, збільшення відсоткової ставки приводить до збільшення щорічних виплат.

Між двома послідовними виплатами основного боргу є взаємозв'язок. Розглянемо два послідовних періоди k і $(k+1)$.

Для k–го періоду термінова виплата визначається як:

$$Y_k = D_k \cdot i + R_k. \tag{4.4}$$

Залишок основного боргу на початок k–го періоду:

$$D_k = \frac{Y - R_k}{i}. \tag{4.5}$$

Для $(k+1)$ періоду залишок основного боргу:

$$D_{k+1} = D_k - R_k. \tag{4.6}$$

Тоді термінова виплата у $(k+1)$ періоді буде визначатись як:

$$Y_{k+1} = (D_k - R_k) \cdot i + R_{k+1}. \tag{4.7}$$

Оскільки $Y_1 = Y_2 = Y_3 = \cdots = Y_k = Y_{k+1}$, то можна прирівняти формули (4.4) і (4.7). Тоді:

$$D_k \cdot i + R_k = (D_k - R_k) \cdot i + R_{k+1}. \tag{4.8}$$

З рівняння (4.8) знайдемо R_{k+1}:

$$R_{k+1} = R_k(1+i). \tag{4.9}$$

Отже, дві послідовні виплати основного боргу відрізняються на величину $(1+i)$. Таким чином можна визначити суму виплати основного боргу для будь-якого періоду:

$$R_2 = R_1(1+i);\ R_3 = R_1(1+i)^2; \dots;\ R_k = R_1(1+i)^{k-1}. \tag{4.10}$$

Розмір першої виплати основного боргу R_1 визначається виходячи з того, що величина боргу D є сумою всіх виплат основного боргу:

$$D = R_1 + R_1(1+i) + R_1(1+i)^2 + \cdots + R_1(1+i)^{n-1}. \tag{4.11}$$

З формули (4.11) можна знайти R_1:

$$R_1 = D \cdot \frac{i}{(1+i)^n - 1}. \tag{4.12}$$

Величину $\frac{i}{(1+i)^n-1}$ називають ставкою погашення боргу.

Суму виплати основного боргу для будь-якого періоду можна визначити і в інший спосіб:

$$R_k = D \cdot \frac{i}{(1+i)^n - 1} \cdot (1+i)^{k-1}\,. \tag{4.13}$$

Також для кожного періоду можна визначити суму нарахованих відсотків I. Оскільки $Y = I_k + R_k$, звідси можна знайти $I_k = Y - R_k$. Підставивши в цей вираз значення R_k, отримаємо формулу:

$$I_k = Y - Y \cdot (1+i)^{-n+k-1}. \tag{4.14}$$

Залишок боргу на початок k–го періоду визначається за формулою:

$$D_k = \frac{D((1+i)^n - (1+i)^{k-1})}{(1+i)^n - 1} = \frac{Y - R_k}{i}\,. \tag{4.15}$$

Приклад 4.3. Банк видав довгостроковий кредит в сумі 240 тис. грн на п'ять років під 11,5 % річних. Погашення кредиту повинне проводитись рівними щорічними виплатами в кінці кожного року; вони включають погашення основного боргу та відсоткові платежі. Нарахування відсотків проводиться раз на рік. Необхідно розрахувати величину першого та четвертого платежів для погашення основного боргу, величину відсоткового платежу на кінець останнього року погашення позики, залишок основного неоплаченого боргу на початок четвертого року погашення.

Визначимо спочатку величину термінової виплати:

$$Y = D \cdot \frac{i \cdot (1+i)^n}{(1+i)^n - 1} = 240 \cdot \frac{0{,}115 \cdot (1+0{,}115)^5}{(1+0{,}115)^5 - 1} = 65{,}75563 \text{ (тис. грн).}$$

Знаючи розмір кредиту, відсоткову ставку i і термін погашення кредиту n, розрахуємо величину першої виплати погашення основного боргу R_1:

$$R_1 = D \cdot \frac{i}{(1+i)^n - 1} = 240 \cdot \frac{0{,}115}{(1+0{,}115)^5 - 1} = 38{,}15563 \text{ (тис. грн).}$$

Розмір платежу основного боргу в будь-якому періоді (R_k) можна визначити за формулою:

$$R_k = R_1 \cdot (1+i)^{k-1};$$

$$R_4 = R_1 \cdot (1+i)^{k-1} = 38{,}15563 \cdot (1+0{,}115)^{4-1} = 52{,}89117 \text{ (тис. грн).}$$

За умовою завдання необхідно розрахувати величину відсоткового платежу на кінець останнього року погашення позики:

$$I_5 = Y - Y \cdot (1+i)^{-n+k-1} = 65{,}75563 \cdot [1-(1+0{,}115)^{-5+5-1}] = 6{,}78197 \text{ (тис. грн)}.$$

За умовою завдання необхідно визначити залишок основного неоплаченого боргу на початок третього року погашення:

$$D_4 = \frac{Y - R_4}{i} = \frac{65{,}75563 - 52{,}89117}{0{,}115} = 111{,}86483 \text{ (тис. грн)}.$$

4.2. Погашення позики рівними та змінними виплатами основного боргу

Погашення позики дорівненими виплатами основного боргу. Умовами кредитного договору може передбачатись погашення позики (тіла кредиту) дорівненими виплатами. У цьому випадку платежі основного боргу будуть дорівнені один одному:

$$\frac{D}{n} = R_1 = R_2 = \cdots = R_k = R_n. \qquad (4.16)$$

Залишок боргу на початок k–го періоду визначається за формулою:

$$D_k = D - R(k-1). \qquad (4.17)$$

Величина термінової виплати для k–го періоду розраховується як:

$$Y_k = D_k \cdot i + R. \qquad (4.18)$$

Підставивши у формулу (4.18) значення D_k із формули (4.17), отримаємо:

$$Y_k = \big(D - R(k-1)\big) \cdot i + R. \qquad (4.19)$$

Сума відсотків для k–го періоду розраховується за формулою:

$$I_k = D_k \cdot i = \big(D - R \cdot (k-1)\big) \cdot i. \qquad (4.20)$$

Приклад 4.4. Банк видав довгостроковий кредит в сумі 725 тис. грн на п'ять років під 11 % річних. Необхідно скласти план погашення кредиту, якщо за умовами контракту погашення основного боргу повинне проводитись рівними щорічними платежами, нарахування відсотків – в кінці року. Необхідно розрахувати величину відсоткового платежу та термінової виплати для четвертого року, порівняти розраховане значення з планом погашення боргу.

За умовою завдання погашення основного боргу повинне проводитись рівними щорічними платежами. У цьому випадку розміри платежів за основним боргом дорівнюватимуть:

$$R = \frac{725}{5} = 145 \text{ (тис. грн).}$$

Величина термінової виплати для четвертого року:

$$Y_4 = D_4 \cdot i + R = \big(D - R \cdot (k-1)\big) \cdot i + R =$$

$$= \big(725 - 145 \cdot (4-1)\big) \cdot 0{,}11 + 145 = 162{,}4 \text{ (тис. грн).}$$

Величина відсоткового платежу для четвертого року:

$$I_4 = D_4 \cdot i = \big(D - R \cdot (k-1)\big) \cdot i = \big(725 - 145 \cdot (4-1)\big) \cdot 0{,}11 =$$

$$= 17{,}4 \text{ (тис. грн).}$$

У табл. 4.3 поданий поетапний план погашення боргу.

Таблиця 4.3

План погашення боргу, тис. грн

Роки	Залишок боргу; D	Відсотковий платіж, I	Річна витрата на погашення основного боргу, R	Річна термінова сплата, Y
1	725,00	43,50	145,00	188,50
2	580,00	34,80	145,00	179,80
3	435,00	26,10	145,00	171,10
4	290,00	17,40	145,00	162,40
5	145,00	8,70	145,00	153,70
Разом		**130,50**	**725,00**	**855,50**

Таким чином, за умови погашення позики рівними виплатами основного боргу з часом річна термінова виплата зменшується. Це відбувається за рахунок того, що залишок боргу та відсотковий платіж з кожною виплатою зменшується.

Погашення позики змінними виплатами основного боргу. Умовами кредитного договору може передбачатись погашення позики змінними виплатами основного боргу. Зміна виплат може збільшуватись або зменшуватись в арифметичній чи геометричній прогресії.

Зміна виплат в арифметичній прогресії. У випадку зміни виплат основного боргу в арифметичній прогресії задається її різниця d. Тоді виплати основного боргу:

1-й рік – R_1;
2-й рік – $R_1 \pm d$;
3-й рік – $R_1 \pm 2d$;
…
передостанній рік – $R_1 \pm (n-2)d$;
останній рік – $R_1 \pm (n-1)d$.

Отже, для k–го періоду:

$$R_k = R_1 \pm (n-k) \cdot d. \tag{4.21}$$

Сума основного боргу дорівнює сумі всіх виплат, тобто сумі членів арифметичної прогресії:

$$D = \frac{(R_1 + R_1 + (n-1) \cdot d) \cdot n}{2} = \frac{n}{2} \cdot (2 \cdot R_1 + (n-1) \cdot d). \tag{4.22}$$

Виразивши з формули (4.22) R_1, отримаємо такі формули для розрахунку величини першої виплати:

для зростаючої арифметичної прогресії:

$$R_1 = \frac{D}{n} - \frac{(n-1)}{2} \cdot d; \tag{4.23}$$

для спадної арифметичної прогресії:

$$R_1 = \frac{D}{n} + \frac{(n-1)}{2} \cdot d\ . \tag{4.24}$$

Приклад 4.5. Банк видав довгостроковий кредит в сумі 147 тис. грн на п'ять років під 9 % річних. Необхідно скласти план погашення кредиту, якщо виплати основного боргу повинні зростати щорічно на 3 тис. грн, нарахування відсотків проводиться в кінці року.

За умовами контракту передбачено погашення основного боргу платежами, що зростають в арифметичній прогресії з різницею d = 3 тис. грн. Величина першої виплати основного боргу для зростаючої арифметичної прогресії розраховується за формулою:

$$R_1 = \frac{D}{n} - \frac{(n-1)}{2} \cdot d = \frac{147}{5} - \frac{(5-1)}{2} \cdot 3 = 23{,}4 \text{ (тис. грн).}$$

У табл. 4.4 подано поетапний план погашення боргу.

Таблиця 4.4

План погашення боргу, тис. грн

Роки	Залишок боргу; D	Відсотковий платіж, I	Річна витрата на погашення основного боргу, R	Річна термінова сплата, Y
1	147,000	8,820	23,400	32,220
2	123,600	7,416	26,400	33,816
3	97,200	5,832	29,400	35,232
4	67,800	4,068	32,400	36,468
5	35,400	2,124	35,400	37,524
Разом		**28,260**	**147,000**	**175,260**

Зміна виплат у геометричній прогресії. Якщо умовами кредитного договору передбачається зміна виплат основного боргу в геометричній прогресії, задається її знаменник q, який показує, у скільки разів наступний платіж більше або менше попереднього. Тоді виплати основного боргу:

1-й рік – R_1;

2-й рік – $R_1 \cdot q$;

3-й рік – $R_1 \cdot q^2$;

…

передостанній рік – $R_1 \cdot q^{n-2}$;

останній рік – $R_1 \cdot q^{n-1}$.

Сума основного боргу дорівнює сумі всіх цих виплат, тобто сумі членів геометричної прогресії, де R_1 – перший член прогресії і одночасно перший платіж основного боргу, q – знаменник прогресії. Тоді основний борг D дорівнюватиме:

$$D = R_1 \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1}, \text{для } q > 1 \tag{4.25}$$

або

$$D = R_1 \cdot \frac{1 - q^n}{1 - q}, \text{для } q < 1. \tag{4.26}$$

Звідси величина першої виплати основного боргу розраховуватиметься:

$$R_1 = D \cdot \frac{q - 1}{q^n - 1} - \text{ для } q > 1 \tag{4.27}$$

або

$$R_1 = D \cdot \frac{1 - q}{1 - q^n} - \text{ для } q < 1. \tag{4.28}$$

Приклад 4.6. Банк видав довгостроковий кредит в сумі 80 тис. грн на п'ять років під 12 % річних. Необхідно скласти план погашення кредиту, якщо виплати основного боргу повинні збільшуватись щорічно на 10 %, нарахування відсотків проводиться в кінці року.

За умовами задачі виплати основного боргу повинні збільшуватись щороку на 10 %. Отже, кожний такий платіж збільшується у 1,1 рази порівняно з попереднім, тобто знаменник геометричної прогресії q = 1,1.

У табл. 4.5 подано поетапний план погашення боргу, враховуючи, що виплати основного боргу повинні зростати в геометричній прогресії.

Таблиця 4.5

План погашення боргу, тис. грн

Роки	Залишок боргу; D	Відсотковий платіж, I	Річна витрата на погашення основного боргу, R	Річна термінова сплата, Y
1	80,0000	4,8000	13,1038	17,9038
2	66,8962	4,0138	14,4142	18,4280
3	52,4820	3,1489	15,8556	19,0045
4	36,6264	2,1976	17,4412	19,6387
5	19,1853	1,1511	19,1853	20,3364
Разом		**15,3114**	**80,0000**	**95,3114**

4.3. Конверсія та консолідація позик. Формування фонду погашення

Конверсія позик. Якщо умовами кредитного договору передбачається можливість зміни однієї чи кількох початкових умов, виникає необхідність *конверсії позики.* Для здійснення фінансових розрахунків у ході конверсії позики, необхідно обчислити величину залишку боргу на момент конверсії. Цей залишок боргу розглядається як новий борг за новими умовами, за якими формується план погашення кредиту до кінця його терміну.

Розглянемо один з варіантів конверсії, коли змінюються термін погашення позики та відсоткова ставка, а термінові сплати як за старими, так і за новими умовами проводяться рівними платежами; відсотки нараховуються один раз в кінці кожного розрахункового періоду.

Позначимо параметри позик:

n – первинний термін погашення позик до конверсії;

n_1 – термін, на який продовжений період погашення в результаті конверсії;

k – число сплачених розрахункових періодів до конверсії;

i – відсоткова ставка до конверсії;

i_1 – відсоткова ставка після конверсії;

Y – величина термінової сплати до конверсії;

Y_1 – величина термінової сплати після конверсії;

D – величина основного боргу;

D_{n-k} – залишок боргу на момент конверсії.

Для складання плану погашення конверсійної позики визначають:

1) величину термінової сплати за старими умовами:

$$Y = D \cdot \frac{i \cdot (1+i)^n}{(1+i)^n - 1}; \qquad (4.29)$$

2) залишок боргу на момент конверсії:

$$D_{n-k} = Y \cdot \frac{(1+i)^{n-k} - 1}{(1+i)^{n-k} \cdot i}; \qquad (4.30)$$

3) величину термінової сплати за новими умовами:

$$Y_1 = D_{n-k} \cdot \frac{i_1 \cdot (1+i_1)^{n-k+n_1}}{(1+i_1)^{n-k+n_1} - 1}. \qquad (4.31)$$

Приклад 4.7. Банк видав довгостроковий кредит в сумі 920 тис. грн на п'ять років під 8 % річних. Необхідно скласти план погашення кредиту рівними щорічними виплатами, якщо після виплати третього платежу між кредитором і позичальником досягнута домовленість про продовження терміну погашення позики на два роки зі збільшенням відсоткової ставки з моменту конверсії до 10,5 %.

Величина термінової сплати за старими умовами:

$$Y = 920 \cdot \frac{0{,}08 \cdot (1 + 0{,}08)^5}{(1 + 0{,}08)^5 - 1} \approx 242{,}6937 \text{ (тис. грн).}$$

Залишок боргу на момент конверсії:

$$D_4 = 242{,}6937 \cdot \frac{(1 + 0{,}08)^{5-k} - 1}{(1 + 0{,}08)^{5-3} \cdot 0{,}08} = 371{,}0543 \text{ (тис. грн).}$$

Величина термінової сплати за новими умовами:

$$Y_1 = 371{,}0543 \cdot \frac{0{,}105 \cdot (1 + 0{,}105)^{5-3+2}}{(1 + 0{,}105)^{5-3+2} - 1} \approx 118{,}3262 \text{ (тис. грн).}$$

План погашення конверсованого кредиту поданий в табл. 4.6.

Таблиця 4.6

План погашення боргу, тис. грн

Роки	Залишок боргу, D	Відсотковий платіж, I	Річна витрата на погашення основного боргу, R	Річна термінова сплата, Y
до конверсії				
1	920,0000	73,6000	169,0937	242,6937
2	750,9063	60,0725	182,6212	242,6937
3	568,2851	45,4628	197,2309	242,6937
після конверсії				
4	371,0543	38,9607	79,3655	118,3262
5	291,6887	30,6273	87,6989	118,3262
6	203,9898	21,4189	96,9073	118,3262
7	107,0826	11,2437	107,0826	118,3262
Разом		**281,3859**	**920,0000**	**1201,3859**

Консолідація позик. Якщо один позичальник взяв кілька кредитів у одному банку, зручно буде об'єднати (консолідувати) ці кредити в один. Для цього спочатку визначають залишки боргу за кожним кредитом на момент консолідації, сумують ці залишки й отримують консолідований борг. Для консолідованого боргу визначають усі його параметри та складають новий план погашення за новими умовами.

Формування фонду погашення. Якщо кредитний договір передбачає виплату позики разовим платежем, позичальник може самостійно формувати фонд погашення кредиту. Такий фонд створюється шляхом грошових внесків у банк на спеціальний рахунок з нарахуванням на них відсотків. Розмір фонду погашення (внески та нараховані відсотки) повинен забезпечити своєчасну виплату кредиту.

Для створення фонду погашення використовують такі ж фінансові розрахунки, як і для формування плану погашення кредиту. Тобто і в цьому випадку необхідно визначити розмір термінової виплати, яка може бути як постійною, так і змінною.

Якщо план формування фонду погашення передбачає постійні термінові внески R, на них нараховують відсотки за ставкою i. Одночасно на величину боргу нараховують відсотки за ставкою g. Якщо на величину боргу нараховують прості відсотки, термінова виплата визначатиметься за формулою:

$$Y_t = D \cdot g + R, \tag{4.32}$$

де Y_t – термінова виплата в період t;

D – величина боргу.

Якщо на величину боргу нараховують складні відсотки, термінова виплата визначається за формулою:

$$Y_t' = D(1+g)^{t-1} \cdot g + R. \tag{4.33}$$

Формування фонду погашення розраховано на термін N років. Отже, платежі, які вносяться до цього фонду, утворюють ренту з параметрами R, N, I. Сума даної ренти дорівнює величині основного боргу:

$$D = R\frac{(1+i)^N - 1}{i} = R \cdot s_{N,i}. \tag{4.34}$$

Звідки:

$$R = \frac{D}{s_{N,i}}\,. \tag{4.35}$$

Тоді, підставивши значення R у формулу (4.32), можна записати:

$$Y_t = D \cdot g + \frac{D}{s_{N,i}} = D \cdot \left(g + \frac{1}{s_{N,i}}\right). \quad (4.36)$$

Якщо на основний борг нараховують складні відсотки, величина термінової виплати розраховується за формулою:

$$Y_t' = D(1+g)^{t-1} \cdot g + \frac{D}{s_{N,i}} = D\left((1+g)^{t-1} \cdot g + \frac{1}{s_{N,i}}\right). \quad (4.37)$$

Якщо умови кредитного договору передбачають приєднання відсотків до суми основного боргу, величина термінової виплати визначається за формулою:

$$Y = \frac{D(1+g)^n}{s_{n,i}}. \quad (4.38)$$

Створення фондів погашення зі змінними внесками. Можливе також формування фондів погашення зі внесками, які змінюються в арифметичній чи геометричній прогресії.

Для зростаючої арифметичної прогресії величина першого внеску визначається за формулою:

$$R_1 = \frac{D - d \cdot \frac{1}{i}(s_{n,i} - n)}{s_{n,i}}. \quad (4.39)$$

Для спадної арифметичної прогресії:

$$R_1 = \frac{D + d \cdot \frac{1}{i}(s_{n,i} - n)}{s_{n,i}}. \quad (4.40)$$

Якщо у фонд погашення вносяться внески, що змінюються у геометричній прогресії, величина першого внеску визначається за формулою:

$$R_1 = D \cdot \frac{q - (1+i)}{q^n - (1+i)^n}. \quad (4.41)$$

4.4. Розрахунки за іпотечними позиками

Окремим видом кредитів є іпотечні кредити, які видаються під заставу нерухомого майна. В Україні для врегулювання всіх юридичних питань з іпотечних позик діє Закон України "Про іпотеку" (надалі – Закон) [32].

У Законі визначаються основні терміни:

Нерухоме майно (нерухомість) – земельні ділянки, а також об'єкти, розташовані на земельній ділянці і невід'ємно пов'язані з нею, переміщення яких є неможливим без їх знецінення та зміни їх призначення.

Іпотека – вид забезпечення виконання зобов'язання нерухомим майном, що залишається у володінні і користуванні іпотекодавця, згідно з яким іпотекодержатель має право в разі невиконання боржником забезпеченого іпотекою зобов'язання отримати задовільнення своїх вимог за рахунок предмета іпотеки переважно перед іншими кредиторами цього боржника у порядку, встановленому Законом.

Іпотекодавець – особа, яка передає в іпотеку нерухоме майно для забезпечення виконання власного зобов'язання або зобов'язання іншої особи перед іпотекодержателем. Іпотекодавцем може бути боржник або майновий поручитель.

Іпотекодержатель – кредитор за основним зобов'язанням.

Іпотекодержатель та іпотекодавець узгоджують основні параметри фінансової операції і складають план погашення іпотечної позики. Для складання такого плану використовують такі ж показники, як і для звичайних довгострокових кредитів, а саме визначають розміри термінових виплат і залишок заборгованості на початок кожного періоду.

Якщо умовами іпотечного кредиту передбачене погашення рівними щомісячними виплатами, розмір такої виплати визначається за формулою:

$$Y = \frac{D \cdot \frac{i}{m} \cdot \left(1 + \frac{i}{m}\right)^{mn}}{\left(1 + \frac{i}{m}\right)^{mn} - 1}, \qquad (4.42)$$

де D – сума боргу;

Y – величина термінової сплати;

$p = m$ – число періодів нарахування відсотків на рік і число виплат;

n – число років, на які надано кредит.

Розрахунок залишку суми основного боргу на початок k–го періоду здійснюється за формулою:

$$D_k = d \cdot \frac{\left(1+\frac{i}{m}\right)^{mn} - \left(1+\frac{i}{m}\right)^{k-1}}{\left(1+\frac{i}{m}\right)^{mn} - 1},$$

де D – сума основного боргу;

m – число періодів нарахування відсотків на рік;

n – число років, на які надано кредит;

k – номер розрахункового періоду.

Приклад 4.8. Іпотечний кредит на суму 950 тис. грн було видано на п'ять років під 15 %. Погашатись кредит буде щомісячними рівними платежами. Необхідно скласти план погашення кредиту.

Вихідні дані кредиту: D = 950 тис. грн, $m = 12$, n = 5 років = 60 місяців. Для спрощення розрахунків приймемо кожний місяць дорівнений 30 дням, план погашення кредиту за таких умов наведено в табл. 4.7.

Таблиця 4.7

План погашення іпотечного кредиту рівними терміновими виплатами, тис. грн

Місяці	Залишок боргу на початок місяця; D	Відсотковий платіж, I	Щомісячна витрата на погашення основного боргу, R	Щомісячна термінова виплата, Y
1	950,0000	11,8750	10,7254	22,6004
2	939,2746	11,7409	10,8595	22,6004
3	928,4151	11,6052	10,9952	22,6004
4	917,4198	11,4677	11,1327	22,6004
…				
58	66,1409	0,8268	21,7737	22,6004
59	44,3673	0,5546	22,0458	22,6004
60	22,3214	0,2790	22,3214	22,6004
Разом		**406,0260**	**950,0000**	**1 356,0260**

Крім цього, план погашення іпотечного кредиту може передбачати погашення основного боргу (тіла кредиту) рівними платежами. Тоді розраховується щомісячна витрата на погашення основного боргу $R = \frac{D}{n \cdot 12}$, n – термін кредиту у роках. Відсотки нараховуються на залишок боргу на початок місяця, а щомісячна термінова сплата розраховується як сума щомісячної витрати на погашення основного боргу та відсоткового платежу ($Y = R + I$).

Приклад 4.9. За даними прикладу 4.8 складіть план погашення іпотечного кредиту рівними виплатами основного боргу.

Вихідні дані кредиту: D = 950 тис. грн, $m = 12$, n = 5 років = 60 місяців. Для спрощення розрахунків приймемо кожний місяць дорівнений 30 дням. План погашення кредиту наведено в табл. 4.8.

Таблиця 4.8

План погашення іпотечного кредиту рівними виплатами основного боргу, тис. грн

Місяці	Залишок боргу на початок місяця; D	Відсотковий платіж, I	Щомісячна витрата на погашення основного боргу, R	Щомісячна термінова виплата, Y
1	950,0000	11,8750	15,8333	27,7083
2	934,1667	11,6771	15,8333	27,5104
3	918,3333	11,4792	15,8333	27,3125
4	902,5000	11,2813	15,8333	27,1146
…				
58	47,5000	0,5937	15,8333	16,4271
59	31,6667	0,3958	15,8333	16,2292
60	15,8333	0,1979	15,8333	16,0313
Разом		**362,1875**	**950,0000**	**1 312,1875**

Як видно з проведених розрахунків, у випадку погашення іпотечного кредиту рівними терміновим виплатами сума відсотків за весь термін кредиту складатиме 406,0260 тис. грн і буде вищою, ніж у випадку погашення іпотечного кредиту рівними платежами основного боргу 362,1875 тис. грн.

Крім розглянутих двох основних методів погашення іпотечної позики, можливі також і інші методи, наприклад позики зі змінною відсоткової ставкою, позики з можливістю "іпотечних канікул". Оскільки ці показники і їх динаміка на майбутнє невідомі, то первісний план погашення заборгованості коректується у разі фактичної зміни відсоткової ставки чи надання іпотекодавцю "іпотечних канікул".

Завдання для самостійного опрацювання

Контрольні запитання для самодіагностики

1. Дайте визначення поняття "банківський кредит".
2. За якими ознаками класифікують банківський кредит?
3. Які види кредитів розрізняють залежно від терміну?
4. Назвіть основні параметри, які визначаються для формування фонду погашення довгострокових кредитів.
5. Поясніть принципи розрахунку плану погашення кредиту рівними платежами.
6. У чому полягає механізм погашення кредиту рівними виплатами основного боргу?
7. Яким чином здійснюють формування плану погашення боргу зі зміною виплат в арифметичній прогресії?
8. Як здійснюється погашення кредиту змінними виплатами в геометричній прогресії?
9. Як відбувається конверсія кредиту?
10. Поясніть механізм консолідації кредитів.
11. Охарактеризуйте основні принципи формування фонду погашення кредитів.
12. Як визначається розмір платежу до фонду погашення, якщо на основний борг нараховуються прості відсотки?
13. Якщо на основний борг нараховуються складні відсотки, як розраховується величина термінової виплати?
14. Дайте визначення поняття "іпотека".
15. Що таке іпотечний кредит?
16. Як формується план погашення іпотечного кредиту рівними терміновими виплатами?
17. У чому полягають особливості формування плану погашення іпотечного кредиту рівними виплатами основного боргу?
18. Який план погашення іпотечного кредиту: рівними терміновими виплатами чи рівними платежами основного боргу – дає більшу суму нарахованих відсотків?
19. У чому полягає особливість розрахунку відсоткових платежів за іпотечними кредитами?
20. Чи можливе застосування змінної відсоткової ставки в іпотечних кредитах?

Тести

1. *Термінова сплата – це кошти для погашення:*

а) основного боргу;

б) відсоткових платежів;

в) основного боргу та поточних відсотків;

г) страхових витрат і основного боргу.

2. Якщо позичальникові надається пільговий період для погашення суми боргу, чи повинні сплачуватись відсотки за кредитом протягом цього періоду:

а) так;

б) ні?

3. За інших рівних умов позики у якому разі сума нарахованих відсотків буде меншою:

а) зміна виплат основного боргу в зростаючій арифметичній прогресії;

б) зміна виплат основного боргу в зростаючій геометричній прогресії;

в) погашення позики рівними виплатами основного боргу d?

4. В іпотечних позиках число днів у місяці:

а) приймається дорівненим 30 дням;

б) визначається за календарем.

5. Який кредит можна вважати середньостроковим (за стабільним станом економіки та незначною інфляцією):

а) до 1 року;

б) від 1 до 3 років;

в) від 3 до 5 років?

6. *Чи можлива консолідація позик, якщо за першою позикою виплати здійснювалися щомісяця, а за другою – щоквартально:*

а) так;

б) ні?

7. "Конверсія позики" – це:

а) погашення заборгованості одним платежем;

б) зміна умов погашення заборгованості;

в) об'єднання декількох заборгованостей в одну.

8. Виберіть формулу, за якою можна розрахувати залишок основного боргу в k-му періоді (D – сума кредиту, R – річний платіж з погашення основного боргу):

а) $D_k = D + R$;

б) $D_k = D - Rk$;

в) $D_k = D - R(k-1)$;

г) $D_k = D + R(k+1)$.

9. Як можна розрахувати величину термінової сплати в k-му періоді (Dk – залишок основного боргу в k-му періоді, R – річний платіж з погашення основного боргу):

а) $Y_k = D_k + R$;

б) $Y_k = D_k i + R$;

в) $Y_k = D_k i - R$;

г) $Y_k = D_k - R$?

10. Для погашення позики зі зміною виплат основного боргу в арифметичній прогресії необхідно спочатку розрахувати:

а) Y_n;

б) Y_1;

в) R_n;

г) R_1.

11. "Іпотечний кредит" – це:

а) короткостроковий безвідсотковий кредит;

б) кредит, що видається фізичним особам;

в) державний "молодіжний кредит";

г) кредит під заставу нерухомого майна.

12. У разі, якщо у консолідованих позик були різні відсоткові ставки, у якості відсоткової ставки консолідованої позики вибирають:

а) максимальну з двох ставок;

б) мінімальну з двох ставок;

в) середню ставку;

г) будь-яку відсоткову ставку, яка влаштовує обидві сторони фінансової операції.

13. "Консолідація позик" – це:

а) об'єднання декількох заборгованостей в одну;

б) погашення заборгованості одним платежем;

в) зміна умов погашення заборгованості.

14. Витрати, пов'язані з погашенням позики – це:

а) величина ануїтету;

б) амортизація позики;

в) термінові сплати;

в) видатки на обслуговування боргу.

15. *Погашення кредиту може здійснюватись щорічною рентою:*

а) так;

б) ні.

Практичні завдання

1. Банк "Альфа" видав довгостроковий кредит у сумі 350,0 тис. грн на сім років під 9,5 % річних. Погашення кредиту повинне проводитись рівними щорічними виплатами в кінці кожного року; вони включають погашення основного боргу та відсоткові платежі. Нарахування відсотків проводиться раз на рік.

Необхідно:

а) скласти план погашення позики;

б) розрахувати величину першого платежу для погашення основного боргу, величину відсоткового платежу на кінець останнього року погашення позики, залишок основного неоплаченого боргу на початок п'ятого року погашення;

в) порівняти розраховані значення з планом погашення позики;

г) скласти план погашення кредиту рівними щорічними виплатами, якщо передбачається зміна відсоткової ставки: перші два роки – 9,5 %, а кожного наступного року відсоткова ставка підвищується на 0,5 %

2. Банк "Бета" видав довгостроковий кредит в сумі 540,0 тис. грн на шість років під 12 % річних.

Необхідно:

а) скласти план погашення кредиту, якщо за умовами контракту погашення основного боргу повинне проводитись рівними щорічними платежами, нарахування відсотків – в кінці року;

б) розрахувати величину відсоткового платежу та термінової сплати для третього року;

в) порівняти розраховане значення з планом погашення боргу.

3. Банк видав довгостроковий кредит в сумі 775,0 тис. грн на вісім років під 14 % річних.

Необхідно:

а) скласти план погашення кредиту, якщо виплати основного боргу повинні зростати щорічно на 15 тис. грн, нарахування відсотків проводиться в кінці року;

б) скласти план погашення кредиту, якщо виплати основного боргу повинні зростати на 5 % щорічно, нарахування відсотків проводиться в кінці року.

4. Банк видав довгостроковий кредит в сумі 285,0 тис. грн на шість років під 13,5 % річних.

Необхідно:

а) скласти план погашення кредиту рівними щорічними виплатами, якщо після виплати четвертого платежу між кредитором і позичальником досягнута домовленість про продовження терміну погашення позики на два роки та збільшення відсоткової ставки з моменту конверсії до 14 %.

5. Банк видав іпотечний кредит в сумі 500 тис. грн на десять років під 16 % річних.

Необхідно:

а) скласти план погашення іпотечного кредиту з щомісячним погашенням основного боргу та відсотків за ним рівними терміновими сплатами;

б) скласти план погашення іпотечного кредиту рівними щомісячними виплатами основного боргу (кожний місяць приймається дорівненим 30 дням).

Розділ 5. Аналіз ефективності фінансових операцій

5.1. Прибутковість як показник ефективності фінансової операції.

5.2. Визначення повної дохідності для позикових та облікових операцій з утриманням комісійних.

5.3. Вибір оптимальних умов у комерційних контрактах.

5.4. Граничні значення параметрів комерційних контрактів.

5.5. Прибутковість купівлі – продажу фінансових інструментів.

Ключові слова: прибутковість; ефективна ставка; внутрішня норма прибутку; повна дохідність; позикові операції; облікові операції; ставка повної прибутковості; оптимальні умови контрактів; показник прибутковості; комісійні та інші утримання; метод порівняння сучасних величин; ставка порівняння; граничні значення параметрів контракту; вексель; депозитний сертифікат.

5.1. Прибутковість як показник ефективності фінансової операції

Ефективність фінансової операції не можна оцінити тільки за абсолютною величиною доходу. *Порівняння прибутку (доходу) із витратами, зробленими за певний проміжок часу, дає змогу визначити ефективність*.

У попередніх розділах відсоткову ставку розглядали в якості показника прибутковості кредитної операції. Утім навіть у кредитній операції дохід кредитора може не обмежуватись отриманням відсоткових грошей. Банки, крім стягнення відсоткової ставки за наданий кредит, отримують комісійну винагороду за здійснення операцій на розрахункових рахунках клієнтів, а також утримують з клієнта певну суму, яка покриває витрати банку за кожною операцією. Отже, за умови проведення кредитної операції загальний дохід банку є сумою доходів з кількох джерел.

Для інших фінансових операцій загальний дохід також можна обчислити шляхом підсумовування доходів з різних джерел. Наприклад, власник облігації має дохід від курсової різниці між ціною її придбання та ціною викупівлі або продажу, а також отримує відсоткові гроші за купонами. Таким чином, вимірювання ефективності (прибутковості) будь-якої фінансової операції зводиться до обліку всіх джерел доходу, тобто знаходження сумарного доходу за певний проміжок часу та зіставлення його з початковими витратами. Цими витратами для кредитних операцій є величина капіталу, наданого в позику, для власника цінних паперів – сума, витрачена на їх придбання та ін.

Визначення прибутковості, еквівалентної прибутковості від проведення позикової операції, – це загальний принцип визначення фінансової ефективності будь-якої операції. Отже, проблема зводиться до розрахунку відсоткової ставки, що виражає загальну дохідність на вкладений капітал.

Розрахункову відсоткову ставку в позикових операціях зазвичай називають *ефективною ставкою*. У розрахунках за оцінкою облігацій її називають *дохідністю на момент погашення*.

Під час аналізу виробничих інвестиційних проектів показник прибутковості називають *внутрішньою нормою прибутку* або *маржинальною ефективністю капіталу*:

$$\frac{\text{Чистий сучасний прибуток від проекту}}{\text{Чиста сучасна вартість витрат на проект}}.$$

Однак у вітчизняній економічній літературі найчастіше розрахункову відсоткову ставку позначають терміном "повна дохідність" (ПД) [18]. Надалі для позначення відповідної річної ставки будемо використовувати саме цей термін.

Мінімальна величина ПД – це розрахункова річна ставка відсотків, за якої всі капіталізовані доходи складуть суму, не меншу суми інвестицій.

Для позикової операції це означає, що сума дисконтованих річних виплат дорівнює фактично отриманій сумі кредиту (номінальна сума кредиту мінус комісійні виплати).

Під час оцінки прибутковості облігацій мінімальна ПД буде означати дорівненість ціни придбання облігації сумі дисконтованих за мінімальною ПД купонних платежів і викупівельної ціни.

Звісно, чим більше величина ПД, тим вище прибутковість операції. За несприятливих умов ПД може бути меншою за мінімальну, тобто може прийняти від'ємне значення.

Показник ПД має двоїстий характер, тобто, будучи вимірником дохідності для кредитора, він одночасно є ціною кредиту для позичальника.

Для визначення величини мінімальної ПД можна скласти математичне рівняння, яке б виражало змістовність цього показника: різниця між сумою наданого кредиту (сумою інвестицій) і сумою всіх дисконтованих доходів на момент отримання кредиту або початку інвестиційного процесу повинна дорівнювати нулю:

$$D - (Y_1 \cdot V^{t_1} + Y_1 \cdot V^{t_1+1} + Y_1 \cdot V^T) = 0, \qquad (5.1)$$

де D – сума наданого кредиту;

Y – термінові платежі в рахунок погашення заборгованості;

V^t – дисконтні множники;

$T = \sum t_j$ – термін фінансової операції, тобто час від моменту платежу Y_1 до моменту погашення кредиту.

Рівняння еквівалентності дозволяє вирішити кілька важливих в практичному відношенні завдань, а саме: виміряти прибутковість від операції і розподілити отриманий дохід за їх джерелами та періодами, передбаченими умовами контракту, або за календарними відрізками часу.

5.2. Визначення повної дохідності для позикових та облікових операцій з утриманням комісійних

Позикові операції. Прибутковість позикових операцій без урахування комісійних утримань вимірюється еквівалентною річною ставкою складних відсотків. Однак банки та інші кредитори з суми виданого кредиту утримують різні виплати. Саме з цих причин для позичальника плата за кредит підвищується, а прибутковість кредитора зростає.

Розглянемо **метод розрахунку річної ставки повної прибутковості i_e, що є річною ставкою складних відсотків.**

Припустимо, що позичальник отримав позику D на термін n за ставкою простих відсотків i. Під час видачі позики утримуються комісійні в розмірі G. Тоді величина фактично виданої позики складе $D - G$. Для визначення ставки повної прибутковості (i_e) вважаємо, що нарощення величини $D - G$ за ставкою i_e має дорівнювати нарощеній величині D за ставкою i, що можна записати у вигляді рівності:

$$(D - G) \cdot (1 + i_e)^n = D \cdot (1 + n \cdot i). \qquad (5.2)$$

Оскільки комісійні та інші утримання в більшості випадків указуються не в абсолютному вимірюванні, а у вигляді відсотка від суми кредиту або від суми проведеної операції, то можна записати:

$$G = D \cdot g,$$

де g – відсоток комісійних утримань від суми кредиту.

Необхідно підставити значення G у рівняння (5.2) і розв'язати його відносно i_e. Тоді отримаємо:

$$i_e = \left(\frac{1 + n \cdot i}{1 - g}\right)^{\frac{1}{n}} - 1.$$

Для розрахунку i_e приймають часову базу $K = 365$ днів. За умови нарахування відсотків на суму позики часова база $K = 360$ або 365 днів.

Отриманий показник прибутковості можна інтерпретувати як скориговану ціну кредиту.

Характеристика *прибутковості у вигляді ставки простих відсотків* $i_{еп}$ розраховується за формулою:

$$i_{еп} = \frac{1 + n \cdot i}{(1 - g) \cdot n} - 1.$$

У разі видачі *позики під складні відсотки* i_e приймає вигляд:

$$(D - G) \cdot (1 + i_e) \cdot n = D \cdot (1 + i).n,$$

тоді:

$$i_e = \frac{1 + i}{(1 - g)^{\frac{1}{n}}} - 1.$$

Приклад 5.1. Фірмі надали кредит на 250 днів під 12 % річних. Комісійні склали 0,5 % від суми кредиту. Необхідно визначити прибутковість операції для кредитора у вигляді річної ставки складних відсотків, якщо кредит був виданий під прості відсотки (365/360), під складні відсотки (365/365).

Розв'язання.

Початкові дані: t = 250, i = 0,12, g = 0,005, K = 360 (365).

Прибутковість операції складе:

а) у разі видачі позики під прості відсотки (365/360):

$$i_e = \left(\frac{1 + n \cdot i}{1 - g}\right)^{\frac{1}{n}} - 1 = \left(\frac{1 + \frac{250}{360} \cdot 0{,}12}{1 - 0{,}005}\right)^{\frac{360}{250}} - 1 = 0{,}130296;$$

б) у разі видачі позики під складні відсотки (365/365):

$$i_e = \frac{1 + i}{(1 - g)^{\frac{1}{n}}} - 1 = \frac{1 + 0{,}12}{(1 - 0{,}005)^{\frac{365}{250}}} - 1 = 0{,}128227.$$

Облікові операції. Прибутковість облікової операції з використанням *простої облікової ставки без утримання комісійних* визначається за формулою еквівалентної ставки $i = \frac{d}{1-nd}$. Власник векселя за умови утримання дисконту та комісійних отримає:

$$D - D \cdot n' \cdot d - G,$$

де D – номінальна вартість фінансового інструменту (векселя);

n' – часовий інтервал від моменту обліку векселя до моменту сплати за нього;

d – облікова ставка;

$D \cdot n' \cdot d$ – величина дисконту;

$G = D \cdot g$ – сума комісійних утримань.

У цьому випадку *показник прибутковості* (i_e) дорівнює:

$$i_e = \left(\frac{1}{1 - n' \cdot d - g}\right)^{\frac{1}{n}} - 1.$$

Якщо ж розрахунок проводиться за *ставкою простих відсотків* $i_{еп}$, то:

$$i_{еп} = \frac{1}{(1 - n' \cdot d - g) \cdot n} - 1.$$

У всіх розглянутих випадках шукана ставка i_e є окремим випадком ПД, вплив комісійних на i_e зменшується зі збільшенням терміну угоди.

Приклад 5.2. За умовами прикладу 5.1 необхідно визначити прибутковість облікової операції, якщо в початкових даних вказана сума векселя та ставка дисконту.

Розв'язання.

Прибутковість облікової операції складе:

$$i_e = \left(\frac{1}{1 - n' \cdot d - g}\right)^{\frac{1}{n}} - 1 = \left(\frac{1}{1 - \frac{250}{360} \cdot 0{,}12 - 0{,}005}\right)^{\frac{365}{250}} - 1 = 0{,}144562.$$

5.3. Вибір оптимальних умов у комерційних контрактах

Вільна конкуренція на ринку товарів і послуг в умовах сучасної ринкової економіки дає споживачеві можливість обрати найбільш прийнятні умови їх придбання.

Масштабні комерційні контракти, як правило, передбачають їх кредитування або самим виробником (товар відпускається в кредит), або із залученням кредитів третіх сторін – різноманітних фінансових компаній.

Споживач, купуючи товар з однаковими якісними параметрами, обирає не тільки найнижчу ціну, але і найкращі умови кредиту – розмір відсоткової ставки, термін кредиту, наявність пільгового періоду тощо. Жорсткі умови кредиту (короткий термін для його погашення, висока відсоткова ставка та ін.) можуть знищити перевагу низької ціни товару.

Споживач під час укладання великого контракту може спрямовувати свої дії за такими напрямами. Перший – вибір товару з найнижчою ціною та вибір фінансової установи (кредитора), яка забезпечить найвигідніші умови кредиту. Другий – вибір продавця (виробника) товару, який готовий надати комерційний кредит і разом з цим забезпечує найбільш привабливі ціни й умови кредиту.

У ході реалізації комерційних контрактів аналіз фінансових наслідків може відбуватись на основі використання **методу порівняння сучасних величин** усіх платежів, передбачених цими контрактами, коли всі платежі наводяться до моменту початку їх дії.

Сучасна величина всіх витрат характеризує грошову суму, яка з нарахованими на неї відсотками буде забезпечувати виконання всіх платежів, передбачених контрактом. Найменша сучасна величина є найбільш вигідною для покупця.

Дисконтування всіх платежів, передбачених контрактами, в процесі обчислення сучасних величин проводиться за єдиною відсотковою ставкою – **ставкою порівняння**.

Ставка порівняння дозволяє "виміряти" фактор часу. Зменшення терміну кредиту супроводжується зростанням ставки, збільшення терміну кредиту зменшує розмір ставки. Під час вибору рівня ставки порівняння використовують чинний або прогнозований середній рівень позикової відсоткової ставки.

Порівняння різних контрактів проводиться на основі тієї самої ставки. У всіх випадках ставка порівняння повинна відрізнятись від пропонованих у контрактах відсоткових ставок – перевищувати найбільшу або бути менше найменшої ставки [18].

Сучасні величини, отримані з використанням ставки порівняння, є *умовними показниками*, проте вони досить достовірно відображають *рейтинг контрактів*. Зміна розміру ставок порівняння не вплине на місце кожного контракту в рейтингу.

Існує й інший **метод** вибору оптимальних для покупця умов контракту – розрахунок **граничних значень параметрів контракту**. Більш детально цей метод розглянемо в наступному питанні.

Розглянемо процес вибору оптимального контракту на основі методу порівняння сучасних величин виходячи з припущення, що власник товару надає покупцеві комерційний кредит. Разом з цим пропонуються різні варіанти погашення кредиту, але ціна товару залишається незмінною. Отже, необхідно обрати найбільш вигідний варіант погашення заборгованості.

Комерційні контракти можуть значно відрізнятись за своїми параметрами (ціна товару, рівень відсоткових ставок, термін кредиту, наявність або відсутність пільгового періоду тощо). Розрахунок сучасних (поточних) величин, в яких враховуються всі особливості кожного контракту, дозволяє здійснити вибір оптимальних умов.

Здебільшого в контрактах передбачається внесення авансових платежів. Моменти їх внесення можуть бути різними, наприклад у ході укладання контракту або в інший час. Саме тому для визначення сучасної величини важливою умовою є встановлення моменту часу, з якого обчислюється заборгованість і починається її погашення, а також розмір самої заборгованості.

За умови одноразового (разового) постачання товару заборгованість зазвичай визначається на момент поставки.

За умови поставки товару партіями із заздалегідь обумовленими термінами поставки заборгованість визначається у встановлені моменти часу для кожної партії.

Під час проведення аналізу умов різних контрактів необхідно враховувати, що скорочення сучасної величини витрат покупця відбувається зі збільшенням терміну поставки. Тільки в тому випадку, коли терміни поставок однакові, можуть бути отримані зіставні результати.

Розглянемо метод розрахунку сучасної величини для таких умов: товар поставляється однією партією; аванс вноситься під час укладання угоди; відсотки за заборгованістю в пільговому періоді сплачуються в кінці терміну; погашення заборгованості здійснюється рівними терміновими сплатами в кінці року.

Тоді сучасна величина за ставкою порівняння q складе:

$$A = Q + I \cdot V^{t+L} + Y \cdot a_{n,q} \cdot V^{t+L}, \tag{5.3}$$

де Q – сума авансового платежу;

I – відсотки в пільговому періоді (прості або складні);

$V = (1+q)^{-1}$;

t – час від моменту укладання угоди до моменту поставки товару;

L – час пільгового періоду;

n – термін погашення заборгованості;

Y – величина щорічних термінових сплат.

Якщо Y – постійна величина, то:

$$Y = D \cdot \frac{i \cdot (1+i)^n}{(1+i)^n - 1},$$

де $D = P - Q$ – залишок заборгованості після сплати авансу (P – повна вартість товару).

За умови використання *складних відсоткових ставок* величина відсоткового платежу за пільговий період визначається так:

$$I = D \cdot ((1+i)^L - 1).$$

Необхідно підставити цей вираз у формулу (5.3) і перетворити його, тоді отримаємо:

$$A = Q + D \cdot V^{t+L} + \left\{((1+i)^L - 1) + \frac{i \cdot (1+i)^n}{(1+i)^n - 1} \cdot a_{n,q}\right\}. \tag{5.4}$$

За умови щорічної виплати відсотків протягом пільгового періоду в кінці кожного року замість формули (5.4) отримаємо (за умови, що L – ціле число):

$$A = Q + D \cdot \left\{\frac{i \cdot (1+i)^n}{(1+i)^n - 1} \cdot a_{n,q} \cdot V^{t+L} + i \cdot a_{L,q} \cdot V^t\right\}.$$

Розглянемо випадок, коли *постачання товару проводиться декількома партіями.* Оцінювання конкуруючих контрактів і в цьому випадку проводиться за допомогою методу зіставлення сучасних величин. Але необхідно враховувати терміни поставок і вартість поставленого в кожній партії товару.

Позначимо параметри такої угоди:

M_j – вартість кожної партії товару, що поставляється ($M = \sum M_j$ – загальна вартість товару);

T_j – терміни поставок кожної партії товару ($T = \sum T_j$ – загальний термін);

T_k – час від моменту виплати останнього авансового платежу до кінця терміну поставок ($T_k = T - k$);

t – термін виплати останнього авансового платежу;

Q_1 і Q_2 – суми авансових платежів;

L – пільговий період (відсотки виплачуються щорічно);

n – термін погашення заборгованості (погашення здійснюється рівними річними платежами);

i – договірна відсоткова ставка;

I – нараховані за пільговий період відсотки;

q – ставка порівняння;

$Y = D \cdot \frac{i \cdot (1+i)^n}{(1+i)^n - 1}$ – величина щорічних термінових сплат;

D – накопичена заборгованість на кінець терміну поставки за умови, що на авансові платежі нараховуються відсотки:

$$D = \sum_j M_j \cdot (1+i)^{T_j} - \sum_k Q_k \cdot (1+i)^{T_k}.$$

Для ставки порівняння q сучасна величина сукупності платежів визначається за виразом:

$$A = Q_1 + Q_2 \cdot V^t + I \cdot a_{L,q} \cdot V^t + Y \cdot a_{L,q} \cdot V^{t+L},$$

де $I = D \cdot ((1+i)^L - 1)$.

Таким чином, сучасна величина всіх витрат визначається на основі рівняння, що виводиться для кожної конкретної ситуації.

Приклад 5.3. Дві фірми подали заявки на конкурс з будівництва промислового об'єкта. У табл. 5.1 показані початкові умови для кожної фірми.

Таблиця 5.1

Початкові умови фірм з будівництва промислового об'єкта

Параметри	Умови фірми А	Умови фірми Б
Ціна нового об'єкту, млн грн	50,0	55,0
Термін будівництва, років	1	1
Авансові платежі вносяться під час підписання контракту, млн грн	20,0	10,0
Термін кредиту, років	8	7
Пільговий період, років	2	3
Ставка відсотків, %	10,0	11,0

Ставка порівняння $q = 12\ \%$. Кредит погашається рівними річними виплатами. Необхідно вибрати оптимальні умови контракту.

У табл. 5.2 подані розрахункові значення основних параметрів комерційних контрактів.

Таблиця 5.2

Розрахункові значення основних параметрів комерційних контрактів

Параметри контрактів	Умовне позначення	А	Б
Сума авансового платежу, млн грн	Q	20	10
Залишок заборгованості після сплати авансу, млн грн	D	30	45
Час від моменту укладення контракту до моменту постачання товару, років	t	1	1
Термін погашення заборгованості (термін кредиту – пільговий період), років	n	6	4
Ставка відсотків за кредитом	i	0,1	0,11
Пільговий період, років	L	2	3
Множник дисконтування з параметром (t)	V^t	0,892857	0,892857
Множник дисконтування з параметром $(t+L)$	V^{t+L}	0,71178	0,635518
Коефіцієнт приведення з параметрами (n,q)	$a_{n,q}$	4,111407	3,037349
Коефіцієнт приведення з параметрами (L,q)	$a_{L,q}$	1,690051	2,401831
Сучасна вартість заборгованості, млн грн	$\boldsymbol{A}$	**44,68474**	**48,61349**

Таким чином, умови фірми А є переважнішими, оскільки сучасна величина кредиту в даній фірмі менша, ніж у фірмі Б.

5.4. Граничні значення параметрів комерційних контрактів

Метод визначення граничних значень параметрів альтернативних контрактів, за якого зіставляються ціни або відсоткові ставки, також може бути використаний для порівняння конкурентоспроможності цих контрактів.

Граничним значенням параметра контракту є величина, що забезпечує його конкурентоспроможність щодо іншого, базового, тобто порівнюваного з ним, контракту за незмінності інших умов [18]. Подібний аналіз може бути використаний покупцем для визначення допустимих значень ціни або ставки відсотків, якщо продавець дає згоду змінити початкові умови.

Урахування всіх умов контрактів з використанням граничних значень їх параметрів має забезпечити дорівненість сучасних величин платежів покупця за обома альтернативними контрактами.

Якщо один з постачальників пропонує ціну, меншу, ніж у іншого ($P_1 < P_2$), і відсоткова ставка $I_1 < I_2$, то вибір безсумнівний. Якщо ж $P_1 < P_2$, а ставка $I_1 > I_2$, то виникає проблема вибору контракту.

Припустимо, що ставка порівняння не відома, тому замість порівняння сучасних величин платежів знайдемо граничне максимальне значення ставки другого варіанту (позначимо його як i_2^*), за якого він буде конкурентоспроможний. Тоді з будь-яким значенням ставки i_2, меншим i_2^*, він виявиться переважним. Аналогічно знаходять максимально допустиме значення P_2 (позначимо його як P_2^*).

Метод розрахунку граничних значень може бути використаний для знаходження параметрів, що обмежують область допустимих рішень. В економічній літературі цю межу називають *критичною точкою* або *точкою рівноваги*.

Для контрактів, що передбачають разові розрахунки за ними в кінці терміну угоди без авансових платежів за умови рівності сучасних величин витрат, можна записати:

$$P_1 \cdot \left(\frac{1 + i_1}{1 + q}\right)^{-n_1} = P_2 \cdot \left(\frac{1 + i_2}{1 + q}\right)^{-n_2}, \tag{5.5}$$

де P_1 і P_2 – вартість товару за умовами першого та другого контрактів;
i_1 і i_2 – відсоткові ставки;
n_1 і n_2 – терміни платежів;
q – ставка порівняння.

З формули (5.5) знайдемо i_2^* та P_2^*:

$$i_2^* = (1+q) \cdot \left[\frac{P_2}{P_1} \cdot \left(\frac{1+i_1}{1+q}\right)^{n_1}\right]^{\frac{1}{n_2}} - 1; \tag{5.6}$$

$$P_2^* = P_1 \cdot \frac{(1+i_2)^{n_2}}{(1+i_1)^{n_1}} \cdot (1+q)^{n_1-n_2}. \tag{5.7}$$

За $i_2 < i_2^*$ умови другого варіанту кращі для покупця, ніж умови першого варіанта;

якщо $i_2 = i_2^*$ – забезпечується рівноцінність варіантів;

якщо $i_2 > i_2^*$, умови другого варіанта гірше умов першого;

якщо $P_2 = P_2^*$, друга угода еквівалентна першій;

якщо $P_2 < P_2^*$, друга угода краще.

Значення i_2^* і P_2^* суттєво залежать від прийнятої ставки порівняння та терміну кредитування. У разі, якщо $n_1 = n_2 = n$, то для розрахунків граничних значень параметрів угоди можна обійтись без ставки порівняння:

$$i_2^* = (1+i_1) \cdot \left(\frac{P_1}{P_2}\right)^{\frac{1}{n}} - 1; \tag{5.8}$$

$$P_2^* = P_1 \cdot \left(\frac{1+i_1}{1+i_2}\right)^{n}. \tag{5.9}$$

Приклад 5.4. У табл. 5.3 надані умови двох контрактів.

Таблиця 5.3

Умови двох контрактів

Параметри	Умовне позначення	Умови контракту А	Умови контракту Б
Вартість товару за умовами контракту, млн грн	P_i	10	12
Термін платежів, років	n_i	5	4
Ставка відсотків, %	i	8	7

Необхідно:

а) визначити граничні параметри другого контракту, прийнявши ставку порівняння $q = 10~\%$;

б) визначити граничні параметри другого контракту, якщо $n_1 = n_2 = 5$ років.

Розв'язання:

а) за формулами (5.6) – (5.7) знайдемо i_2^* і P_2^*:

$$i_2^* = (1+q) \cdot \left[\frac{P_2}{P_1} \cdot \left(\frac{1+i_1}{1+q}\right)^{n_1}\right]^{\frac{1}{n_2}} - 1 = (1+0{,}1) \cdot \left[\frac{12}{10} \cdot \left(\frac{1+0{,}08}{1+0{,}1}\right)^{5}\right]^{\frac{1}{4}} - 1 =$$
$$= 0{,}125193;$$

$$P_2^* = P_1 \cdot \frac{(1+i_2)^{n_2}}{(1+i_1)^{n_1}} \cdot (1+q)^{n_1-n_2} = 10 \cdot \frac{(1+0{,}07)^4}{(1+0{,}08)^5} \cdot (1+0{,}1)^{5-4} =$$
$$= 9{,}813163 \text{ (млн грн)};$$

б) за формулами (5.8) – (5.9) знайдемо значення i_2^* і P_2^* у випадку, якщо $n_1 = n_2 = n$:

$$i_2^* = (1+i_1) \cdot \left[\frac{P_1}{P_2}\right]^{\frac{1}{n}} - 1 = (1+0{,}08) \cdot \left[\frac{10}{12}\right]^{\frac{1}{5}} - 1 = 0{,}0413279;$$

$$P_2^* = P_1 \cdot \left(\frac{1+i_1}{1+i_2}\right)^{n} = 10 \cdot \left(\frac{1+0{,}08}{1+0{,}07}\right)^{5} = 10{,}476106 \text{ (млн грн)}.$$

Таким чином, за умови, що терміни контрактів однакові, переважатимуть умови першого, оскільки $i_2^* > i_2$ і $P_2^* < P_2$.

5.5. Прибутковість купівлі – продажу фінансових інструментів

Грошово-кредитний ринок використовує різні фінансові інструменти – депозитні сертифікати, облігації, прості та переказні векселі та ін. У разі потреби власник фінансового інструменту може продати його до настання терміну платежу. У такому випадку ціна продажу може бути вище або нижче номіналу. Однак продаж фінансового інструменту нижче номіналу не завжди приносить для його власника збитки.

Ефективність таких фінансових операцій вимірюється у вигляді простих або складних відсотків, величина яких залежить від різниці цін купівлі – продажу, термінів, що залишилися до погашення цих інструментів, і розміру облікових ставок.

Прибутковість торгових операцій з векселями. Нехай номінал векселя дорівнює величині S, і він був куплений банком за t_1 днів до настання терміну платежу за дисконтною ставкою d_1. Ціна, сплачена банком за вексель в момент його купівлі (обліку), склала:

$$P_1 = S \cdot \left(1 - \frac{t_1}{K} \cdot d_1\right),$$

де K – часова база, яка дорівнює 360 днів.

Якщо банк буде обмежуватись тільки цією сумою, то максимальний дохід, який він може отримати, є різницею між сумою, сплаченою за вексель за його обліку, та номінальною вартістю векселя, тобто $S - P_1$.

За умови виникнення сприятливої фінансової ситуації банк продасть вексель за ціною P_2, яка повинна бути більше P_1, але менше величини S, тобто $P_1 < P_2 < S$.

Отже:

$$P_2 = S \cdot \left(1 - \frac{t_2}{K} \cdot d_2\right),$$

де часовий інтервал між моментом купівлі векселя за ціною P_1 і продажу за ціною P_2 дорівнює $t_1 - t_2$.

Сума P_1, сплачена банком з обліком векселя до моменту його продажу за ціною P_2, могла б принести дохід за простою або складною річною відсотковою ставкою, яку приймають в якості міри ефективності.

Якщо просту відсоткову ставку позначити $i_{еп}$, то можна записати рівняння:

$$P_1 \cdot \left(1 - \frac{t_1 - t_2}{K} \cdot i_{еп}\right) = P_2,$$

де $K = 365$ днів, звідки прибутковість цієї угоди у вигляді ставки простих відсотків:

$$i_{еп} = \frac{P_2 - P_1}{P_1 \cdot (t_1 - t_2)} \cdot K. \tag{5.10}$$

Необхідно підставити у формулу (5.10) раніше розраховані значення P_1 і P_2. Тоді отримаємо ефективну просту відсоткову ставку:

$$i_{еп} = \frac{(t_1 \cdot d_1 - t_2 \cdot d_2)}{(K' - t_1 \cdot d_1\,)} \cdot \frac{K}{(t_1 - t_2)},$$

де $K = 365$ або 360 днів.

Прибутковість операцій забезпечується дотриманням нерівності $t_2 \cdot d_2 < t_1 \cdot d_1$ або $P_1 < P_2$.

З використанням в якості міри ефективності річної складної ставки можна записати таке рівняння:

$$P_1 \cdot (1 + i_e)^{\frac{(t_1 - t_2)}{K}} = P_2,$$

де $K = 365$ днів, звідки ефективна складна відсоткова ставка:

$$i_e = \left(\frac{P_2}{P_1}\right)^{\frac{K}{(t_1 - t_2)}} - 1. \qquad (5.11)$$

Необхідно підставити у формулу (5.11) значення P_1 і P_2. Тоді отримаємо:

$$i_e = \left(\frac{K' - t_2 \cdot d_2}{K' - t_1 \cdot d_1}\right)^{\frac{K}{(t_1 - t_2)}} - 1,$$

де $K = 365$ або 360 днів.

Як і у випадку з простими відсотками прибутковість операції забезпечується дотриманням нерівності $t_2 \cdot d_2 < t_1 \cdot d_1$ або $P_1 < P_2$.

Операції з депозитними сертифікатами.

Депозитний сертифікат (*certificate of deposit*) (ДС) – іменний цінний папір, що підтверджує суму внесеного клієнтом у банк вкладу та право отримати його після закінчення встановленого строку з відсотками в повному обсязі. На нього не поширюються законодавчі обмеження з отримання вкладів. ДС є одним з найпоширеніших фінансових інструментів, що забезпечують фіксований відсотковий дохід.

Цей документ виписується на пред'явника, і тому не може бути предметом купівлі – продажу без обов'язкового повідомлення про це банка-емітента сертифікату.

Розміщення та розрахунки за ДС здійснюються лише в безготівковій формі в національній валюті України [31].

Продаються ДС у момент випуску за номіналом і передбачають виплату певних відсотків, що нараховуються за простими або складними ставками відсотків.

У разі, коли власник ДС пред'являє його до оплати раніше встановленого терміну, емітент утримує частину відсоткових платежів в якості штрафних санкцй, що відповідає зниженню оголошеної відсоткової ставки.

У разі здійснення операцій з ДС на фінансовому ринку для визначення ефективності угоди можливі такі варіанти:

1) купівля ДС відбулась в емітента за номіналом, а продається він за t_2 днів раніше встановленого терміну погашення (t_1);

2) купівля ДС на вторинному фінансовому ринку відбулась через деякий час після випуску, а погашається він у кінці встановленого терміну (t_1);

3) купівля ДС на вторинному фінансовому ринку відбулась через деякий час після випуску, і продається він раніше встановленого терміну погашення.

Для оцінювання ефективності угоди у разі варіанту 1 можна скористатись рівнянням:

$$P_1 \cdot \left(1 + \frac{(t_1 - t_2)}{K} \cdot i_{еп}\right) = P_2,$$

де P_1 – номінал фінансового інструменту, встановлений емітентом у момент первинного продажу;

P_2 – ціна продажу інструменту раніше встановленого терміну його погашення;

t_1 – установлений термін погашення;

t_2 – термін, що залишається до дати погашення.

Проста ставка, яка визначає дохідність цієї операції $(i_{еп})$, обчислюється за формулою:

$$i_{еп} = \frac{P_2 - P_1}{P_1 \cdot (t_1 - t_2)} \cdot K.$$

Якщо ж під час продажу ДС відсоткова ставка змінилась, тобто $i_1 \neq i_2$, то ставка ефективності обчислюється за формулою:

$$i_{еп} = \frac{1 + \frac{t_1}{K} \cdot i_1}{1 + \frac{t_2}{K} \cdot i_2} \cdot \frac{K}{t_1 - t_2},$$

де $K = 365$ або 360 днів.

У разі, коли вимірювачем ефективності угоди слугує складна відсоткова ставка:

$$i_e = \left(\frac{K + t_1 \cdot i_1}{K + t_2 \cdot i_2} - 1\right)^{\frac{К}{(t_1 - t_2)}} - 1.$$

Прибутковість операції можлива тільки за дотримання нерівності $t_1 \cdot i_1 > t_2 \cdot i_2$.

Для варіанту 2 справедлива рівність:

$$P_2 \cdot \left(1 + \frac{t_2}{K} \cdot i_{еп}\right) = P_1 \cdot \left(1 + \frac{t_1}{K} \cdot i_{еп}\right),$$

де P_1 – номінал фінансового інструменту;

P_2 – ціна придбання фінансового інструменту;

i – відсоткова ставка, оголошена емітентом, який випустив фінансовий інструмент.

З наведеного рівняння отримаємо:

$$i_{еп} = \left[\frac{P_1 \cdot (1 + \frac{t_1}{K} \cdot i)}{P_2} - 1\right] \cdot \frac{K}{t_2}.$$

Використана в якості вимірювача ставка складних відсотків дорівнює:

$$i_e = \left[\frac{P_1 \cdot (1 + \frac{t_1}{K} \cdot i)}{P_2} - 1\right]^{\frac{365}{t_2}}.$$

Для варіанта 3, коли купівля ДС відбувається через деякий час після його випуску, а продаж – до моменту погашення, з метою визначення $i_{еп}$ і i_e можна користуватись раніше наведеними формулами. Однак слід зазначити, що в цих формулах P_1 означає ціну придбання, а не номінал.

Завдання для самостійного опрацювання

Контрольні запитання для самодіагностики

1. Що таке повна дохідність фінансової операції?
2. Як розраховується ставка повної дохідності для фінансових операцій з утриманням комісійних?
3. Наведіть методи вибору оптимальних умов комерційних контрактів.
4. Для чого використовують граничні значення параметрів комерційних контрактів?

5. Які показники виступають у якості граничних параметрів комерційних контрактів?

6. Наведіть механізми розрахунку дохідності операцій із векселями.

7. Що таке депозитні сертифікати?

8. Як визначається повна дохідність депозитних сертифікатів?

9. Що таке внутрішня норма прибутку або маржинальна ефективність капіталу?

10. Що таке "ефективна ставка" в позикових операціях?

11. Як визначається мінімальна повна доходність під час оцінювання прибутковості облігацій?

12. У чому полягає двоїстий характер показника повної дохідності?

13. Яким чином складається рівняння для розрахунку величини мінімальної повної дохідності?

Тести

1. Якою повинна бути ставка порівняння порівняно з пропонованими відсотковими ставками в контрактах:

а) менше від найменшої ставки;

б) перевищувати найбільшу ставку;

в) дорівнювати еквівалентній ставці;

г) більше найбільшої чи менше найменшої ставки?

2. Прибутковість будь-якої фінансової операції зводиться:

а) до обліку всіх джерел доходу;

б) до знаходження сумарного доходу за певний проміжок часу та зіставлення його з початковими витратами;

в) обидві відповіді правильні;

г) немає правильної відповіді.

3. Абсолютна величина доходу свідчить про ефективність фінансової операції:

а) так;

б) ні;

в) не можна визначити.

4. Вплив комісійних на ставку i_e в разі збільшення терміну угоди:

а) збільшується;

б) залишається незмінним;

в) зменшується.

5. Якщо терміни контрактів рівні, то для розрахунків граничних параметрів ставка порівняння:

а) дорівнює меншій ставці двох контрактів;

б) дорівнює більшій ставці двох контрактів;

в) дорівнює середній ставці двох контрактів;

г) не враховується.

6. Для вибору оптимальних умов контракту застосовується:

а) ставка порівняння;

б) граничні значення параметрів контракту;

в) обидві відповіді правильні.

7. За несприятливих умов повна дохідність може приймати від'ємне значення:

а) ні;

б) так.

8. Для порівняння конкурентоспроможності двох альтернативних контрактів може використовуватись метод визначення граничних значень параметрів, за яким зіставляються:

а) ціни або облікові ставки;

б) ціни чи відсоткові ставки;

в) прості або складні відсоткові ставки;

г) відсоткові або дисконтні ставки.

9. В оцінюванні прибутковості облігацій мінімальна повна дохідність буде означати:

а) дорівненість ціни придбання облігації сумі дисконтованих за мінімальної ПД купонних платежів і викупівельної ціни;

б) менше значення ціни придбання облігації порівняно з сумою дисконтованих купонних платежів і викупівельної ціни;

в) перевищення ціни придбання облігації суми дисконтованих за мінімальної ПД купонних платежів і викупівельної ціни;

г) дорівненість ціни придбання облігації викупівельній ціні.

10. Отриманий за обраною ставкою порівняння рейтинг контрактів зі зміною ставки порівняння:

а) зміниться;

б) збережеться;

в) може як зберегтись, так і змінитись – усе залежить від величини нової ставки порівняння.

11. Для знаходження величини мінімальної повної прибутковості:

а) сума інвестицій прирівнюється до суми всіх дисконтованих доходів на момент початку інвестиційного процесу;

б) сума інвестицій повинна бути більше суми всіх дисконтованих доходів на момент початку інвестиційного процесу;

в) сума інвестицій повинна бути менше суми всіх дисконтованих доходів на момент початку інвестиційного процесу.

12. Для контрактів, що передбачають разові розрахунки за ними у кінці терміну угоди без авансових платежів за умови рівності сучасних величин витрат, можна записати:

а) $P_1\left(\frac{1-i_1}{1+q}\right)^{-n_1} = P_2\left(\frac{1-i_2}{1+q}\right)^{-n_2}$;

б) $P_1\left(\frac{1-i_1}{1+q}\right)^{n_1} = P_2\left(\frac{1-i_2}{1+q}\right)^{n_2}$;

в) $P_1\left(\frac{1+i_1}{1+q}\right)^{n_1} = P_2\left(\frac{1+i_2}{1+q}\right)^{n_2}$;

г) $P_1/\left(\frac{1+i_1}{1+q}\right)^{n_1} = P_2/\left(\frac{1+i_2}{1+q}\right)^{n_2}$.

13. Прибутковість торгових операцій з векселями забезпечується за дотримання нерівності:

а) $t_2 d_2 < t_1 d_1$ або $P_1 < P_2$;

б) $t_2 d_2 \geq t_1 d_1$ або $P_1 \geq P_2$;

в) $t_2 d_2 = t_1 d_1$ або $P_1 = P_2$;

г) $t_2 d_2 > t_1 d_1$ або $P_1 > P_2$.

14. Граничним значенням параметра контракту є величина, що забезпечує:

а) рівність відсоткових ставок;

б) рівновага фінансових наслідків;

в) його конкурентоспроможність щодо іншого, базового контракту;

г) немає правильної відповіді.

15. Розрахункову відсоткову ставку в розрахунках за оцінкою облігацій називають:

а) прибутковістю на момент погашення;

б) еквівалентної ставкою;

в) облігаційною ставкою;

г) ефективною ставкою.

Практичні завдання

1. Фірмі надали кредит на 250 днів під 12 % річних. Комісійні склали 0,5 % від суми кредиту. Необхідно визначити прибутковість операції для кредитора у вигляді річної ставки складних відсотків:

а) якщо кредит був виданий під прості відсотки (365/360);

б) якщо кредит був виданий під складні відсотки (365/365).

2. Необхідно визначити прибутковість облікової операції за умовами завдання 1, якщо в початкових даних указані сума векселя та ставка дисконту.

3. Розглядаються пропозиції двох фірм з будівництва житлового комплексу. У табл. 5.1 указані початкові умови для кожної фірми.

Таблиця 5.1

Початкові умови

Параметри	Умови фірми А	Умови фірми Б
Ціна нового об'єкту, млн грн	50,0	55,0
Термін будівництва, років	1	1
Авансові платежі (вносяться при підписанні контракту), млн грн	20,0	10,0
Термін кредиту, років	8	7
Пільговий період, років	2	3
Ставка відсотків, %	10,0	11,0

Кредит погашається рівними річними виплатами, ставка порівняння $q = 12$ %. Необхідно вибрати оптимальні умови контракту.

4. Умови двох контрактів: $P_1 = 15{,}0$ млн грн, $P_2 = 17{,}0$ млн грн, $i_1 = 12$ %, $i_2 = 14$ %, $n_1 = 6$ років, $n_2 = 5$ років.

Необхідно:

а) визначити граничні параметри другого контракту, прийнявши ставку порівняння $q = 16$ %;

б) визначити граничні параметри другого контракту, якщо $n_1 = n_2 = 6$ років.

Розділ 6. Аналіз ефективності інвестицій в облігації та акції

Ключові слова: інвестиція; акція; облігація; фундаментальний аналіз цінних паперів; технічний аналіз; рейтингові оцінки простих і привілейованих акцій; рейтингові оцінки облігацій; повний дохід; облік фактора ризику; очікувана норма доходу інвестицій; ефективна прибутковість; номінальна ціна акції; балансова (або "книжкова") ціна акції; ліквідаційна вартість акції; ринкова (курсова) ціна акції; поточна прибутковість акції для інвестора (рендит); інвестиційний портфель (портфель цінних паперів).

6.1. Принципи оцінювання інвестицій в цінні папери

Розвиток сучасних економічних систем неможливий без інвестицій. Для підприємства залучення додаткового капіталу відкриває нові можливості, виводить на новий рівень розвитку, забезпечує фінансову стійкість. Для інвестора вдале вкладання капіталу є джерелом стабільного прибутку.

Інвестиція – це усвідомлена відмова від поточного споживання на користь можливого більшого доходу в майбутньому, який, як очікується, забезпечить і більше сумарне споживання [12].

Інвестування в цінні папери є достатньо потужним інструментом фінансового ринку, здатним забезпечити економічне зростання. Раціональна інвестиційна політика здатна забезпечити високий рівень розвитку будь-якого бізнесу. Однак ця політика пов'язана з витратами (вкладанням коштів) і ризиком (неможливістю передбачити всі обставини, які очікують інвестора в майбутньому). Завжди існує ненульова ймовірність того, що інвестиції будуть повністю або частково втрачені.

Саме для того, щоб результат інвестування в цінні папери був позитивним, інвестори та спеціалізовані агентства вивчають цінні папери і відстежують ті з них, які з більшою ймовірністю принесуть найбільший зиск.

Оцінювання інвестиційних якостей цінних паперів починається з попереднього відбору активів, які цікавлять інвестора. Для цього враховуються, наприклад, такі фактори, як: особливості випуску й обігу окремих видів цінних паперів; рівень їх безпеки; надійність і прибутковість; ступінь ліквідності.

Сьогодні інвестори віддають перевагу інвестиціям в облігації або акції.

Акція (франц. *action*, від лат. *actio*) – це цінний папір, що випускається акціонерним товариством і закріплює права її власника (акціонера) на отримання частини прибутку акціонерного товариства (АТ) у вигляді дивідендів, на участь в управлінні акціонерним товариством і на частину майна, що залишилось після ліквідації [25].

Слід розглянути класифікацію акцій для визначення їхніх інвестиційних якостей.

Класифікація акцій наведена у табл. 6.1.

Таблиця 6.1

Види акцій

Класифікаційні ознаки	Види акцій
1	2
За характером зобов'язань емітента	*Звичайні* (*прості*) – надають право власнику отримувати частину прибутку АТ у вигляді дивідендів, отримувати частину майна АТ у разі його ліквідації, брати безпосередню участь в управлінні товариством, зокрема в розробленні дивідендної політики, а також надають інші права, передбачені законом. Є найбільш привабливими з точки зору прибутковості, оскільки краще пристосовані до змін кон'юнктури фондового ринку і умов інфляційної економіки. Не підлягають конвертації у привілейовані акції або інші цінні папери АТ
	Привілейовані – надають власнику переважне право на отримання встановленого умовами випуску річного доходу. Власник має пріоритет (відносно власників простих акцій) під час розрахунків АТ з акціонерами. Як правило, не дають власнику права на участь в управлінні товариством, у тому числі – права голосу на зборах акціонерів. Є менш ризикованими через гарантоване право на отримання дивідендів і частки майна в разі ліквідації АТ
За характером розпорядження	*Іменні* – належать певній особі; реєструються у системі реєстру власників
	На пред'явника – власником вважається фактичний утримувач. АТ не фіксує обіг цих акцій. Чинне українське законодавство забороняє існування таких акцій

Закінчення табл. 6.1

1	2
За формою існування	*Документарні* – існують у матеріальній формі – формі документу
	Бездокументарні – існують у формі електронних записів на рахунках
За моментом придбання	*Ексдивідендні (без дивідендів)* – придбані після видачі дивідендів
	Камдивідендні – придбані до видачі дивідендів

Найбільшу цікавість викликає розподіл на прості та привілейовані акції.

За ступенем надійності вкладень привілейовані акції займають проміжне положення між простими акціями та корпоративними облігаціями, оскільки, на відміну від облігацій, не мають чіткого терміну погашення.

З погляду на інвестиційні якості звичайні та привілейовані акції мають деякі переваги та недоліки.

Перевагами звичайних акцій є:

можливість впливу на господарську діяльність АТ шляхом участі в управлінні ним;

можливість участі в розробленні дивідендної політики підприємства;

більш висока ліквідність на фондовому ринку;

можливість отримання більш високих доходів у період ефективної діяльності АТ.

Недоліками звичайних акцій є:

можливість втратити весь інвестиційний капітал під час банкрутства та ліквідації АТ;

нестабільність рівня доходів і можливість отримання низьких дивідендів (за умов неефективної діяльності АТ дивіденди можуть не виплачуватись взагалі);

низька захищеність від інвестиційних ризиків.

Перевагами привілейованих акцій є:

захищеність від інвестиційних ризиків унаслідок переважного права на отримання дивідендів і розподіл майна за умови ліквідації АТ;

забезпечення стабільного доходу у вигляді фіксованого розміру дивідендів, виплата яких проводиться незалежно від результатів господарської діяльності підприємства.

Недоліками привілейованих акцій є:

обмеженість права участі в управлінні АТ;

можливість відкликання (зворотної викупівлі) акцій незалежно від бажання акціонера;

нижчий рівень ліквідності на фондовому ринку;

нижчий рівень доходів порівняно зі звичайними акціями у період ефективної діяльності АТ.

Облігаціями (лат. *obligatio* – зобов'язання; англ. *bond* – довгострокова, *note* – короткострокова) називають цінні папери з фіксованим доходом, за якими емітент зобов'язується виплачувати власнику облігації за певною схемою суму фіксованого відсотка і, крім того, в день погашення – номінал облігації.

Класифікація облігацій наведена у табл. 6.2.

Таблиця 6.2

Види облігацій

Класифікаційні ознаки	Види облігацій
За видами емітентів	*Державні* (*облігації внутрішньої державної позики*) – є найменш ризикованими, але приносять найменший доход
	Муніципальні (місцевих позик) – займають проміжне положення між державними та корпоративними з точки зору ризику та доходу
	Корпоративні – мають найбільший рівень ризику та забезпечують зазвичай найбільший дохід
За терміном погашення	*Короткострокові* – мають найменший рівень ризику
	Середньострокові – зі зростанням терміну погашення облігації зростає і рівень ризику
	Довгострокові – забезпечують більший дохід (і більший ризик)
За формою виплати	*Відсоткові* – передбачають виплату відсоткових доходів; забезпечують зростання капіталу інвестора у грошовій формі та мають більш високу поточну ліквідність на фондовому ринку
	Безвідсоткові (цільові) – дозволяють виконання зобов'язань за ними товарами та/або послугами відповідно до вимог, установлених умовами розміщення таких облігацій
	Дисконтні – розміщуються за ціною, нижчою за їх номінальну вартість. Різниця між ціною придбання та номінальною вартістю облігації виплачується власнику облігації під час її погашення та становить дохід (дисконт) за облігацією
За формою існування	*Документарні* – існують у матеріальній формі – формі документу
	Бездокументарні – існують у формі електронних записів на рахунках

Найбільший рівень ризику мають корпоративні облігації, хоча вони менш ризиковані, ніж привілейовані акції.

Фундаментальний і технічний аналіз цінних паперів. На практиці оцінити інвестиційну привабливість акцій і облігацій можна з точки зору їх ринкової кон'юнктури; досліджуючи динаміку курсів або даючи інвестиційні характеристики конкретного цінного паперу; вивчаючи з цією метою фінансово-економічний стан підприємства-емітента, галузі, до якої воно належить тощо. Так, історично склались два напрями в аналізі фондового ринку – технічний і фундаментальний.

Фундаментальний аналіз базується на оцінюванні ефективності діяльності підприємства-емітента. Він передбачає вивчення комплексу показників фінансового стану підприємства, тенденцій розвитку галузі, до якої воно належить, ступеня конкурентоспроможності продукції, що виробляється сьогодні і в перспективі. Базою для аналізу є баланси, які публікуються компанією-емітентом, звіти про прибутки та збитки та інші матеріали [9].

Фундаментальний аналіз також називають факторним, оскільки він спирається: на вивчення впливу окремих факторів на динаміку цін цінних паперів, які випускаються підприємством у теперішньому періоді, та на прогнозування значень цих факторів на майбутній період. Так, отримані на його базі результати дозволяють визначити, як співвідноситься вартість цінних паперів емітента з реальною вартістю активів, грошовими надходженнями, та зробити прогноз доходу, який визначає майбутню вартість цінного паперу і, отже, може впливати на її ціну. Виходячи з цього робиться висновок про доцільність інвестування коштів.

Технічний аналіз ґрунтується на оцінюванні ринкової кон'юнктури та динаміки курсів. Концепція технічного аналізу передбачає, що всі фундаментальні фактори підсумовуються та відображаються в русі цін на фондовому ринку. Об'єктами вивчення є показники попиту та пропозиції цінних паперів, динаміка курсової вартості, загальні тенденції руху курсів цінних паперів на фондовому ринку. Технічний аналіз базується на побудові та дослідженні графіків динаміки окремих показників (як правило, ринкових цін) в аналізованому періоді, знаходження певної тенденції (тренд) і її екстраполювання на перспективу [9].

Вивчення динаміки курсів дозволяє виконувати купівлю та продаж цінних паперів, а також приблизно оцінити темпи змін і приріст курсової вартості.

Для оцінювання динаміки курсів акцій і облігацій використовують індекси фондового ринку. У світовій практиці добре відомі основні індекси та відпрацьовані прийоми їх врахування під час ухвалення інвестиційних рішень.

На розвинених фондових ринках надання інформації для інвесторів відбувається шляхом побудови рейтингових оцінок акцій та облігацій. У світі найбільш відомими й авторитетними є чотири американські агентства – "Standard & Poor's Corporation" (S&P), "Moody's Investor Service, Inc.", "Fitch IBSA", "Duff&Phelps Credit Rating Co" (DCR).

На основі аналізу інвестиційних якостей цінних паперів фахівці рейтингових агентств присвоюють цінним паперам відповідні категорії (табл. 6.3) [9].

Таблиця 6.3

Рейтингові оцінки простих і привілейованих акцій

<table>
<tr><td colspan="2">Прості акції</td><td colspan="2">Привілейовані акції</td></tr>
<tr><td>Індекси оцінки Standard&Poor's</td><td>Значення індексу</td><td>Індекси оцінки Canadian Bond Rating Service</td><td>Значення індексу</td></tr>
<tr><td>A +</td><td>Вища інвестиційна якість</td><td>P +</td><td>Найвища інвестиційна якість</td></tr>
<tr><td>A</td><td>Висока інвестиційна якість</td><td>P1</td><td>Вища інвестиційна якість</td></tr>
<tr><td>A -</td><td>Інвестиційна якість вище середньої</td><td>P2</td><td>Дуже гарна інвестиційна якість</td></tr>
<tr><td>B +</td><td>Середня інвестиційна якість</td><td>P3</td><td>Гарна інвестиційна якість</td></tr>
<tr><td>B</td><td>Інвестиційна якість нижче середнього рівня</td><td>P4</td><td>Середня інвестиційна якість</td></tr>
<tr><td>B -</td><td>Низька інвестиційна якість</td><td rowspan="2">P5</td><td rowspan="2">Низька інвестиційна якість – спекулятивні</td></tr>
<tr><td>C -</td><td>Дуже низька інвестиційна якість</td></tr>
</table>

У табл. 6.4 подані рейтингові оцінки облігацій [9].

Таблиця 6.4

Рейтингові оцінки облігацій

Індекси оцінки		Значення індексу
Standard&Poor's	Moody's	
1	2	3
Платоспроможні		
AAA	Aaa	Висока надійність – вища категорія. Здатність до оплати позики та відсоткової суми
AA	Aa	Надійність – висока якість. Висока ймовірність оплати позики та відсоткової суми
A	A	Середня якість – вища категорія. Здатність до оплати позики та відсоткової суми за високою чутливістю до несприятливої кон'юнктури
BBB	Bbb	Середня якість – нижча категорія. Наявність капіталу для покриття позики, висока чутливість до несприятливої кон'юнктури
Спекулятивні		
BB	Bb	Невизначена платоспроможність. Можливість на даний час до погашення боргів
B	B	Низька ступінь надійності. Можливість у даний час погасити борги
CCC	Ccc	Високий ступінь ризику несплати
CC	Cc	Високоспекулятивні, з більш високим ступенем ризику несплати, ніж CC і CCC
C	C	Високоспекулятивні, з більш високим ступенем ризику несплати, ніж CC і Cc
P	p	Ті, що мають непогашену заборгованість

6.2. Основні характеристики інвестицій в цінні папери

Для прийняття остаточного інвестиційного рішення необхідною передумовою є проведення оцінювання ефективності інвестицій в цінні папери з використанням двох основних характеристик – прибутковості та ризику.

Повний дохід від інвестування в цінні папери складається з поточного доходу, який отримує інвестор у вигляді регулярних платежів відсотків за облігаціями та дивідендів за акціями, і курсового доходу, який утворюється від зміни ціни, зростання вартості (приріст капіталу).

Повний дохід – важлива характеристика, але вона не висвітлює ефективність інвестицій. Для характеристики ефективності використовують відносну величину, дорівнену відношенню повного доходу до початкової вартості цінного паперу. Цю величину називають *прибутковістю за даний проміжок часу*. Прибутковість є кількісною характеристикою цінних паперів, і за своїм визначенням вона тісно пов'язана з часом. Облік фактору часу має величезне значення, оскільки дає можливість зробити реальні обчислення прибутковості.

Для обчислення **прибутковості** необхідно знати три величини: **початкову вартість цінного паперу, її кінцеву вартість і поточний дохід за період**. Зазвичай тільки початкова вартість відома в початковий період часу. Після певного періоду всі три величини будуть визначені та відомі, і обчислена тоді прибутковість буде реалізованою прибутковістю. Але на початку цього інвестиційного періоду мова може йти лише про оцінювання цих величин за очікуваних значень. Прибутковість, обчислену за очікуваними значеннями поточного доходу та майбутньої вартості, називають *очікуваною прибутковістю*.

Очікувана прибутковість ($\bar{k}$) визначається за формулою середньої арифметичної зваженої:

$$\bar{k} = \sum_{i=1}^{n} k_i \cdot p_i,$$

де $\overline{k_i}$ – норма доходу за i-го стану ринку;

p_i – ймовірність настання i-го стану ринку;

n – число ймовірних результатів.

Інвестор прагне вкласти кошти в найбільш дохідні активи. Але невизначеність майбутнього значення прибутковості вимагає врахування ризику, пов'язаного з інвестуванням у даний вид цінного паперу.

Урахування фактора ризику – дуже складне завдання, оскільки важко визначити кількісний вимірник ризику, який дозволив би порівнювати цінні папери. У більшості практичних ситуацій доводиться говорити лише про якісну міру ризику, яка дозволяє порівняти один цінний папір з іншим за ступенем ризику.

Вимірювання ризику засноване на побудові ймовірнісного розподілу значень дохідності й обчисленні стандартного відхилення від середньої прибутковості. Стандартне відхилення (s) є *мірою ризику*:

$$s = \sqrt{\sum_{i=1}^{n}(k_i - \bar{k})^2 \cdot p_i}.$$

Сучасний підхід до інвестування в цінні папери передбачає оптимізацію процесу, тобто найбільш вигідне розміщення капіталу з урахуванням оптимального співвідношення дохідності та ризику.

Оцінювання інвестором облігацій і акцій в рамках аналізу інвестиційних якостей цінних паперів полягає у визначенні їх поточної вартості (P):

$$P = \frac{F_n}{(1+i)^n},$$

де F_n – очікуваний грошовий потік у n-му періоді;
i – дисконтна ставка.

Очікуваний грошовий потік (F_n) за окремими видам цінних паперів формується по-різному.

Щодо облігацій сума очікуваного грошового потоку складається з надходжень відсотків і вартості самої облігації на момент погашення. Можливі різні варіанти формування очікуваного потоку: без виплати відсотків (нульовий купон); з періодичною виплатою відсотків і погашенням облігацій в кінці терміну обігу; з виплатою всієї суми відсотків за погашені облігації в кінці передбаченого терміну звернення.

Щодо акцій сума очікуваного грошового потоку формується виключно за рахунок обчислюваних дивідендів. Розрізняють акції: зі стабільним рівнем дивідендів (привілейовані); з постійно зростаючим рівнем дивідендів (постійний темп приросту); зі змінним рівнем дивідендів (змінюється темп приросту).

Дисконтну ставку (i) називають *нормою поточної прибутковості*, прийнятною для інвестора. Вона визначається як сума поточної прибутковості за безризиковими цінними паперами та нормою премій за ризик. У нормі поточної прибутковості за безризиковими цінними паперами враховується і передбачуваний темп інфляції.

6.3. Оцінювання ефективності інвестицій в облігації

Облігація має номінальну, викупівельну та ринкову ціну. **Номінальна ціна** надрукована на бланку облігації; позначає суму, яка береться в борг і підлягає поверненню після закінчення терміну облігаційної позики. **Викупівельна ціна**, яка може збігатись з номінальною, – це ціна, за якою емітент викуповує облігацію в інвестора після закінчення терміну позики. За вітчизняним законодавством викупівельна ціна завжди повинна збігатись з номінальною. **Ринкова ціна** – це ціна, за якою облігація продається та купується на ринку. Значення ринкової ціни, вираженої в відсотках до її номіналу, називають *курсом облігації* [10]:

$$P_k = \frac{PV}{N} \cdot 100\ \%,$$

де P_k – курс облігації;
PV – ринкова ціна;
N – номінальна ціна облігації.

Загальна формула для визначення *поточної ринкової ціни* облігацій з позиції інвестора (PV) має вигляд:

$$PV = \sum_{n=1}^{n} \frac{I_n}{(1+i)^n} + \frac{F_T}{(1+i)^T}$$

де F_T – сума, яку виплачують за погашення облігації;
I_n – щорічні виплати за відсотками;
i – необхідна для інвестора норма доходу;
n – конкретний період часу (рік);
T – число років до моменту погашення облігації.

Найпростіший випадок – оцінювання *облігацій з нульовим купоном* (безкупонні облігації, тобто без виплати відсотків). Оскільки грошові надходження за роками (крім останнього) дорівнюють нулю, вартість облігації буде визначатись за таким рівнянням:

$$PV = \frac{F_T}{(1+i)^T}.$$

Безстрокова облігація передбачає невизначено довгу виплату доходу, тому розрахунок її вартості визначають рівнянням:

$$PV = \frac{F_T}{i}.$$

В оцінюванні *облігацій з постійним доходом* грошовий потік складається з однакових за роками надходжень і номінальної вартості облігації, що виплачується в момент погашення:

$$PV = \sum_{i=1}^{N} \frac{I_n}{(1+i)^n} + \frac{F_T}{(1+i)^T}.$$

Причому щорічні виплати за відсотками постійні з року в рік.

Оцінювання *облігацій з плаваючим купоном* може бути проведене за формулою:

$$PV = \frac{I_1}{1+i} + \frac{I_2}{(1+i)^2} + \frac{I_3}{(1+i)^3} + \cdots + \frac{I_n}{(1+i)^n} + \frac{F_T}{(1+i)^T}.$$

Причому щорічні виплати за відсотками змінюються з року в рік.

Для оцінювання облігацій можуть використовуватись купонна прибутковість, поточна прибутковість і кінцева прибутковість (прибутковість до погашення).

Купонна прибутковість (Y_k), встановлювана за випуск облігацій, розраховується за формулою:

$$Y_k = \frac{I}{N} \cdot 100\ \%, \qquad (6.1)$$

де I – річний купонний дохід;

N – номінальна вартість облігації.

Поточна прибутковість (Y_T) визначається за формулою:

$$Y_T = \frac{I}{PV} \cdot 100\ \%,$$

де PV – ціна, за якою облігація була придбана інвестором.

Кінцева прибутковість (Y_Π) визначається таким чином:

$$Y_\Pi = \frac{I + (F - PV) : T}{(F + PV) : 2}. \qquad (6.2)$$

Для безкупонних облігацій можливий розрахунок таких показників ефективності [29].

Очікувана норма доходу інвестицій в облігації за весь період до погашення. Оцінювання здійснюється за формулою (6.1) з урахуванням обставини, що реальна вартість облігації і є її номінальною вартістю N, а витрачає інвестор в момент придбання кошти, менші за номінальну вартість облігації. Розрахунок можна провести так:

$$R = \frac{100 - P_p}{P_p} \cdot 100, \tag{6.3}$$

де R – норма доходу інвестицій в безкупонні облігації, %;

P_p – ціна купівлі облігації, % до її номінальної вартості.

Приклад 6.1. Облігації ВАТ "Банк-Базис" реалізуються за ціною 81,7 % до номінальної вартості. Необхідно розрахувати *очікувану норму доходу інвестицій у безкупонні облігації за весь період до погашення*.

Очікувана норма доходу за весь період до погашення складе:

$$R = \frac{(100 - 81{,}7)}{81{,}7} \cdot 100 = 22{,}4\ \%.$$

Номінальна прибутковість до погашення (*yield to maturity*, *YTM*) розраховується для безкупонних облігацій за формулою простих відсотків на поточну дату купівлі (t_p):

$$YTM = \frac{100 - P_p}{P_p} \cdot \frac{365}{T - t_p} \cdot 100, \tag{6.4}$$

де $T - t_p$ – час до погашення облігації з часу купівлі.

Приклад 6.2. За умовами прикладу 6.1 і з урахуванням того, що до погашення облігації 250 днів, необхідно розрахувати *номінальну прибутковість до погашення для безкупонних облігацій.*

Номінальна прибутковість до погашення складе:

$$YTM = 22{,}4 \cdot \frac{365}{250} = 32{,}7\ \%$$

річних на день купівлі облігації.

YTM (котирування) публікуються емітентом облігацій з метою підвищення ефективності розміщення та слугують інформацією, необхідною для прийняття рішень про їх купівлю. Однак такі рішення на основі YTM інвестор може приймати тільки для короткострокових інвестицій за умови володіння облігаціями до часу їх погашення.

Ефективна прибутковість – норма прибутковості облігацій за календарний рік, що розраховується за формулою складних відсотків:

$$i_e = \left[\left(\frac{R}{100} + 1\right)^{\frac{t}{T}} - 1\right] \cdot 100, \qquad (6.5)$$

де i_e – норма прибутковості облігацій з розрахунку за календарний рік (ефективна прибутковість),% річних;

R – норма прибутковості облігацій за весь термін до погашення T;

T – кількість днів (років) до погашення облігації;

t – кількість днів у році (за умови розрахунку в річному розрізі, приймається дорівненим 1).

Приклад 6.3. Необхідно розрахувати *ефективну прибутковість безкупонних облігацій за рік* за умовами прикладів 6.1 і 6.2.

Ефективна прибутковість облігацій складе:

$$i_e = \left[\left(\frac{22{,}4}{100} + 1\right)^{\frac{365}{250}} - 1\right] \cdot 100 = 34{,}3\ \%.$$

Тобто 34,3 % річних.

Прибутковість облігацій зі змінним купонним відсотком, до яких в Україні відносять переважно облігації внутрішньої державної позики (ОВДП) і облігації місцевих позик (ОМП), визначається в складі тих же показників.

Очікувана норма доходу:

$$R^K = \frac{K}{P_p} \cdot 100, \qquad (6.6)$$

де K – купонний платіж у % до номінальної ціни облігації.

Номінальна прибутковість до погашення:

$$YTM^K = \frac{100 + K_{t_n} - P_p}{P_p} \cdot \frac{365}{t_n - t_p} \cdot 100, \qquad (6.7)$$

де K_{t_n} – черговий купонний платіж, який здійснюється у момент часу t_n, % до номінальної ціни облігації.

Приклад 6.4. Облігація компанії "Альфа" номіналом 200 грн реалізується за ціною 255 грн (це складає 255/200 = 1,275, або 127,5 %). Щорічна купонна ставка за нею становить 23 % від номінальної вартості. Необхідно розрахувати *очікувану норму доходу облігацій зі змінним купонним відсотком*.

Очікувана норма доходу інвестицій в облігації складе:

$$R^K = \frac{23 \cdot 100}{127{,}5} = 18\ \%.$$

Тобто 18 % річних.

У даному випадку немає необхідності дисконтувати розрахункові величини, оскільки річний купонний платіж, а також ціна купівлі облігації приводяться до теперішньої вартості за однаковим коефіцієнтом дисконтування.

Приклад 6.5. Необхідно розрахувати *номінальну прибутковість до погашення облігацій зі змінним купонним відсотком.*

Ціна закриття на біржових торгах 01.03.17 з випуску муніципальних облігацій з датою погашення 19.06.18 і датою найближчої купонної виплати 13.06.17 становила 95,3 % до номіналу. Оголошений купонний відсоток дорівнює 34,2 % річних. Купонний період – 182 дні. Тоді купонна виплата складе: $K_{t_n} = \frac{182}{365} \cdot 34{,}2\ \% = 17{,}05\ \%$. До найближчої купонної виплати залишається 104 дні, тому частина купонного доходу вже накопичена і її доведеться доплатити під час купівлі облігації: $\frac{182\text{-}104}{365} \cdot 34{,}2\ \% = 7{,}31\ \%$. Номінальна прибутковість до погашення (YTM^K) складе:

$$YTM^K = \frac{100 + K_{t_n} - P_p}{P_p} \cdot \frac{365}{t_n - t_p} \cdot 100 =$$

$$= \frac{100 + 17{,}05 - (95{,}3 + 7{,}31)}{95{,}3 + 7{,}31} \cdot \frac{365}{104} \cdot 100 = 49{,}4\ \%.$$

Якщо інвестор орієнтований на тримання купонної облігації до погашення (довгостроковий інвестор), то для визначення ефективності інвестицій можливий розрахунок чистого дисконтованого доходу (NPV) потоку платежів за формулою [29]:

$$NPV = -P_p + \sum_{t_n > t_p} \frac{K_{t_n}}{(1 + E_d)^{t_n}} + \frac{100}{(1 + E_d)^{T - t_p}}, \qquad (6.8)$$

де E_d – норма доходу за альтернативними варіантами інвестицій, найчастіше відсоткова ставка за депозитами (найпростіший спосіб інвестування купонних виплат);

t_n – термін, що залишився до чергового купонного платежу.

У цій формулі підсумовують тільки ті купонні виплати, які надходять після купівлі облігації під час t_p.

Приклад 6.6. Необхідно за умовами прикладу 6.5 розрахувати *чистий дисконтований дохід за рік за муніципальними облігаціями з умовою інвестування до їх погашення*. Відома прибутковість за депозитами. Вона складає 14 %. До погашення облігації 475 днів. Визначимо тепер кількість і терміни чергових купонних платежів – таких, для яких виконуються співвідношення: $t_p < t_n <$ 475. Отже, перший платіж – на 104 день, другий – на 104 + 182 = 286 день, третій – на 104 + 2*182 = 468 день.

З урахуванням приведення до річної розмірності чистий дисконтований дохід (NPV) за муніципальними облігаціями складе:

$$NPV = -(95{,}3 + 7{,}31) + \frac{17{,}05}{(1+0{,}14)^{104/365}} + \frac{17{,}05}{(1+0{,}14)^{286/365}} +$$
$$+\frac{17{,}05}{(1+0{,}14)^{468/365}} + \frac{100}{(1+0{,}14)^{475/365}} =$$
$$= -102{,}61 + 16{,}43 + 15{,}39 + 14{,}41 + 84{,}32 = 27{,}94\ \%$$

річних від номінальної вартості облігації.

У порівнянні з вкладенням на депозит інвестиції в муніципальні облігації забезпечують позитивне значення NPV, тобто вони є більш прибутковими. У даному прикладі слід виходити з припущення про незмінність купонного доходу та ставки за депозитами. Однак купонний дохід оголошується тільки на найближчий період виплат, інші параметри також можуть змінюватись.

Короткостроковий інвестор здійснює продаж облігації в найбільш вигідний момент до її погашення. У своїх рішеннях він повинен керуватись значеннями *поточної прибутковості облігацій за день:*

$$i_{\text{пот}} = \frac{1}{t_s - t_p} \cdot \frac{P_s - P_p}{P_p}, \tag{6.9}$$

де t_s, t_p – дати продажу та купівлі облігацій, дн.;

P_s, P_p – відповідно, ціна продажу та купівлі облігації в задані моменти часу.

Поточну норму прибутковості можна перерахувати в річну:

$$i_{\text{рік}} = (1 + i_{\text{пот}})^{365} - 1. \qquad (6.10)$$

Оскільки в момент інвестування коштів у купівлю облігацій ціна продажу невідома, її можна тільки прогнозувати. Тому ризик короткострокових інвестицій в облігації більше, ніж довгострокових.

Приклад 6.7. Відомо, що інвестор придбав державні облігації 10.04.2017 р. за ціною 91,3 % від номінальної вартості, а продав 29.05.2017 р. за ціною 93,8 % від номінальної вартості. Необхідно розрахувати *поточну та річну прибутковість облігацій за умови короткострокових інвестицій*.

Між купівлею та продажем пройшло 49 днів. З урахуванням цього можна визначити поточну прибутковість за день даної серії облігацій:

$$i_{\text{пот}} = \frac{1}{t_s - t_p} \cdot \frac{P_s - P_p}{P_p} = \frac{1}{49} \cdot \frac{93{,}8 - 91{,}3}{91{,}3} = 0{,}00056,$$

або 0,056 % за день.

Річна прибутковість інвестицій в облігації складе:

$$i_{\text{рік}} = (1 + i_{\text{пот}})^{365} - 1 = (1 + 0{,}00056)^{365} - 1 = 0{,}226,$$

або 22,6 % річних.

Ефективність облігацій з виплатою всієї суми відсотків під час погашення ($i_{\text{пог}}$) наприкінці передбаченого періоду їх обігу визначається таким чином:

$$i_{\text{пог}} = \frac{100 + i_{\text{відсот}}}{\left(P_p/100\right)^{\frac{1}{T - t_p}}} - 100, \qquad (6.11)$$

де P_p – поточна ціна купівлі облігації, % до її номінальної вартості в момент часу купівлі t_p;

$i_{\text{відсот}}$ – відсоткова ставка за облігацією під час погашення, %;

$T - t_p$ – час, що залишився до погашення облігації з часу купівлі, в днях або роках.

Приклад 6.8. Облігація компанії реалізується на ринку за ціною 72,4 % до номінальної вартості. Погашення облігації і разова виплата відсотка за нею за ставкою 19 % передбачені через два роки. Необхідно розрахувати *норму прибутковості облігацій з виплатою всієї суми відсотків під час погашення*.

Норма доходу складе:

$$i_{\text{пог}} = \frac{100 + i_{\text{відсот}}}{\left(P_p/100\right)^{\frac{1}{T-t_p}}} - 100 = \frac{100 + 19}{(0{,}724)^{\frac{1}{2}}} - 100 = 39{,}85\ \%.$$

Розглянуті методи оцінювання ефективності облігацій застосовні й до розрахунку аналогічних показників щодо ощадних сертифікатів та інших кредитних цінних паперів.

Значення норми прибутковості інвестицій в цінні папери порівнюються з нормою доходу, що формується з урахуванням середньої ставки кредитного відсотка на фондовому ринку, прогнозованого темпу інфляції і премії за інвестиційний ризик з конкретних фінансових інструментів за принципами, викладеними раніше.

6.4. Оцінювання ефективності інвестицій в акції

Акція має номінальну, балансову, ліквідаційну та ринкову ціни.

Номінальна ціна акції – це величина, позначена на бланку акції. Вона показує, яка частка статутного капіталу припадала на одну акцію на момент створення АТ.

Балансова (або "книжкова") ціна акції – це величина власного капіталу, яка припадає на одну акцію за балансом.

Ліквідаційна вартість акції – вартість реалізованого майна АТ у фактичних цінах, яка припадає на одну акцію.

Ринкова (курсова) ціна акції – це ціна, за якою акція продається або купується на ринку. Відношення ринкової ціни до номінальної, виражене у відсотках, називають *курсом акції*.

Розрахувати ринкову ціну акції складно, оскільки акції є цінними паперами з плаваючим доходом. Для розрахунку їх курсів використовують різні моделі. Найбільш поширеною з них є *дивідендна модель М. Гордона* [3]. Ця модель передбачає три варіанти розрахунку поточної ринкової ціни акції.

1. Темп приросту дивідендів (q) дорівнює нулю. *Модель нульового зростання*. Поточна ринкова ціна акції (P_0) визначається за формулою:

$$P_0 = \frac{D_0}{i},$$

де D_0– поточний дивіденд;
i – ставка доходу, необхідна інвестору.

2. Темп приросту дивідендів постійний ($q = const,\ q < i$). *Модель постійного зростання*:

$$P_0 = \frac{D_1}{i - q} = \frac{D_0(1 + q)}{1 - q},$$

де D_1 – величина дивіденду на найближчий прогнозований період.

Якщо вимога $q < i$ порушується, то формула дає від'ємне значення P_0. Однак це не означає, що акція має від'ємну ціну, просто порушується необхідна умова застосування формули.

3. Темп приросту дивідендів змінюється ($q \neq const, q < i$). *Модель змінного зростання*:

$$P_0 = \sum_{n=1}^{N} \frac{D_n}{(1 + i)^n} + \frac{D_{N+1}}{(i - q)(1 + i)^N}.$$

Головна особливість цього варіанту полягає в знаходженні періоду часу N, після якого очікується, що дивіденди будуть зростати з постійним темпом q. Необхідно скласти прогноз дивідендів до періоду N виходячи з індивідуального прогнозу за величиною дивідендів ($D_1, D_2,\ \ldots, D_n$) і прогнозувати настання моменту N.

Відповідно до цієї формули поточна вартість акції буде дорівнювати сумі приведеної вартості дивідендів, що виплачуються до періоду N включно, та наведеної вартості всіх виплат дивідендів після періоду N. Для аналізу ефективності вкладень інвестора в купівлю акцій можуть бути використані такі види прибутковості: ставка дивіденду, поточна прибутковість акції для інвестора, поточна ринкова прибутковість, кінцева та сукупна прибутковість.

Ставка дивіденду (d_c) визначається за формулою:

$$d_c = \frac{D}{N} \cdot 100,$$

де D – величина виплачуваних річних дивідендів;

N – номінальна ціна акції.

У вітчизняній практиці ставка дивіденду зазвичай використовується для оголошення річних дивідендів.

Поточна прибутковість акції для інвестора (*рендит*) (d_r) розраховується за формулою:

$$d_r = \frac{D}{P_p} \cdot 100,$$

де P_p – ціна придбання акції.

Поточна ринкова прибутковість (d_p) визначається відношенням величини виплачуваних дивідендів до поточної ринкової ціни акції (P_0):

$$d_p = \frac{D}{P_0} \cdot 100.$$

Кінцева прибутковість (d_k) може бути розрахована за формулою:

$$d_k = \frac{\frac{\left(P_s - P_p\right)}{n} + \overline{D}}{P_p} \cdot 100,$$

де $\overline{D}$ – величина дивідендів, виплачена в середньому на рік (визначається як середнє арифметичне);

n – кількість років, протягом яких інвестор володіє акцією;

P_s – ціна продажу акції.

Узагальнювальним показником ефективності вкладень інвестора в купівлю акцій є *сукупна прибутковість* (d_t):

$$d_t = \frac{\sum_{i+1}^{n} D_n + \Delta P}{P_p} \cdot 100,$$

де D_n – величина виплачених дивідендів.

Кінцева та сукупна прибутковість може бути розрахована в тому випадку, якщо інвестор продав акцію або має намір це зробити за відомою йому ціною.

Привілейовані акції, як і безстрокові облігації, генерують дохід невизначено довго. Тому дивіденди, які носять фіксований характер, виплачуються нескінченно.

Оцінка привілейованих акцій (P) визначається за формулою:

$$P = \frac{D}{i},$$

де D – фіксований дивіденд;

i – необхідна інвестору норма доходу.

У світовій практиці цей вид інвестицій вважається найбільш доступним.

Приклад 6.9. Інвестор очікує, що, купуючи привілейовані акції ВАТ "Дельта" за 300 грн, він зможе продати їх через два роки за ціною 390 грн. Фіксовані дивіденди, обов'язкові до сплати, складуть в рік 40 грн. Норма прибутковості, використовувана для порівняння, становить 15 %. Необхідно визначити ефективність інвестицій в привілейовані акції.

Ефективність інвестицій в акції можна оцінити через норму доходу інвестицій за формулою:

$$d_T = \frac{P_s \cdot a_t + D_t \cdot a_t - P_p}{P_p}, \qquad (6.12)$$

де d_T – норма доходу інвестицій в акції за період T володіння ними;

P_p – ціна купівлі акцій в момент t;

P_s – ціна продажу акцій через час T;

D_t – сума дивідендів, отриманих за час T, приведена до часу t;

a_t – коефіцієнт приведення (дисконтування).

Норма доходу інвестицій в акції складе:

$$d_T = \frac{390 \cdot \frac{1}{(1+0{,}15)^2} + 40 \cdot \frac{1}{(1+0{,}15)^1} + 40 \cdot \frac{1}{(1+0{,}15)^2} - 300}{300} = 0{,}1997$$

або 19,97 % річних. Видно, що ефективність інвестицій в привілейовані акції ВАТ "Дельта" вище (19,97 %), ніж середня прибутковість інвестицій на ринку (15 %).

Формула (6.12) може оцінювати фактичну ефективність інвестицій в акції. Однак якщо дати купівлі та продажу акцій фіксувались довільно, використовувати її для прогнозування майбутньої прибутковості недоцільно, оскільки великий вплив випадкових факторів.

Під час оцінювання ефективності інвестицій в акції вітчизняних підприємств слід ураховувати, що більшість з них практично не котирується на ринку, тому замість ринкових цін часто використовується номінальна вартість акції. Якщо інвестиції здійснюються на заздалегідь не визначений час, то майбутній грошовий потік формується за рахунок очікуваних дивідендів. Залежно від умов обігу акцій, стадії життєвого циклу компанії-емітента та розробленої нею дивідендної політики величина дивідендів в майбутньому періоді може змінюватись. Стабільні дивідендні виплати передбачають привілейовані акції. Звичайні акції можуть передбачати різні схеми виплати дивідендів: стабільний, постійно зростаючий, непостійний рівень виплат. У разі неефективної діяльності виплата дивідендів за звичайними акціями може не проводитись. Тому для визначення норми доходу (ефективності інвестицій) за звичайними акціями необхідний аналіз і прогнозування загальноекономічних тенденцій розвитку ринку.

Інвестування в цінні папери відкриває перед інвесторами великі можливості. Проте неграмотне вкладення коштів в будь-який цінний папір може призвести до небажаних результатів.

Будь-який грамотний інвестор, перш ніж вкладатись у купівлю цінних паперів, має провести їх порівняльний аналіз з метою оцінювання своїх шансів на отримання значного прибутку в майбутньому. Для цього йому потрібно оцінити такі важливі інвестиційні якості цінних паперів, як надійність, прибутковість, ліквідність, безпека, ступінь інвестиційного ризику.

6.5. Аналіз інвестиційного портфеля

Фінансові інвестиції більш ризиковані, ніж реальні. З метою зменшення ризику (мінімізації можливих втрат) доцільно вкладати кошти, які інвестуються в різні фінансові інструменти, тобто **диверсифікувати інвестиці**ї. Оскільки прибутковість за різними видами цінних паперів, перебуваючи під впливом специфічних факторів, змінюється по-різному, зниження доходу за одними може компенсуватись його підвищенням за іншими. Диверсифікація фінансових інвестицій пов'язана з формуванням інвестиційного портфеля.

Інвестиційний портфель (портфель цінних паперів) – це капітал, розподілений між різними видами фінансових інвестицій. Питання формування інвестиційного портфеля та його реструктуризації залежно від кон'юнктури ринку посідають у сучасній економічній теорії одне з провідних місць. Наявність великої іноземної літератури, безліч різних методик (за які в останні роки присуджено кілька Нобелівських премій) вимагають від фахівців, які досліджують дані проблеми, професійних знань у сфері технічного та фундаментального аналізу фондового ринку.

Однак вітчизняний фондовий ринок не дозволяє в повній мірі використовувати на вітчизняних підприємствах сучасну портфельну теорію, розроблену на Заході. Тому застосовуються спрощені підходи, засновані на експертних оцінках. У даній ситуації українським підприємствам слід здійснювати формування портфеля цінних паперів тільки в тому випадку, якщо відсутні ефективні проекти реальних інвестицій або сформований інвестиційний клімат перешкоджає їх ефективної реалізації. Формування інвестиційного портфеля здійснюється після конкретизування цілей інвестиційної стратегії. Установленим цілям відповідає певний тип портфеля цінних паперів (табл. 6.5)

Таблиця 6.5

Типи портфелів цінних паперів

Портфель акцій	Портфель облігацій та ощадних сертифікатів
Середньоризиковий, орієнтований на дохід	Середньоризиковий, орієнтований на дохід
Середньоризиковий, орієнтований на зростання	Середньоризиковий, орієнтований на зростання
Консервативний, орієнтований на дохід	Консервативний, орієнтований на дохід
Консервативний, орієнтований на зростання	Консервативний, орієнтований на зростання
Агресивний, орієнтований на дохід	Агресивний, орієнтований на зростання

За критеріями західних фахівців, диверсифікований інвестиційний портфель повинен включати не менше десяти видів цінних паперів різних емітентів, очікувана норма доходу за якими вище безризикової прибутковості. Звичайно, норми доходу за ними повинні бути приведені до одного інтервалу часу. Інвестований в акції капітал розподіляється пропорційно відношенню прибутку, отриманого фірмою-емітентом у розрахунку на одну акцію, до її ціни (параметр публікується для всіх акцій фондової біржі ПФТС): чим вище прибуток з 1 грн інвестицій, тим більшу частку в портфелі вони повинні мати.

Формування портфеля будь-якого типу засноване на аналізі норми прибутку та ризику за окремими фінансовими інструментами. Орієнтиром для порівняння може слугувати номінальна прибутковість до погашення державних облігацій (див. формулу (6.4)), що є безризиковими, термін погашення яких відповідає передбачуваній тривалості інвестицій. Інвестиції в акції є більш ризикованими, ніж інвестиції в облігації, тому розподіл капіталу між ними – вибір інвестора, заснований на його схильності до ризику.

Метою формування портфеля цінних паперів на окремих стадіях життєвого циклу підприємств є захист накопичуваних інвестиційних ресурсів від інфляції, щоб в подальшому вкласти їх в реальні інвестиційні проекти. Отже, необхідно враховувати його ліквідність (найбільш ліквідний варіант – короткострокові облігації і ощадні сертифікати). Однак підвищення ліквідності інвестиційного портфеля призводить не тільки до зменшення ризику, але і до зниження прибутковості. Сформований портфель цінних паперів оцінюється в цілому за показниками прибутковості, ризику та ліквідності з тим, щоб визначити відповідність даного типу портфеля цілям його формування. За необхідності посилення цілеспрямованості портфеля за окремими напрямами в нього вносять відповідні корективи.

Завдання для самостійного опрацювання

Контрольні запитання для самодіагностики

1. Поясніть основні засади аналізу інструментів фондового ринку.
2. Які характеристики розраховують під час вибору акцій?
3. Які характеристики розраховують під час вибору облігацій?
4. У чому полягає сутність механізму аналізу портфеля облігацій?
5. Наведіть моделі оцінювання вартості облігацій.
6. Наведіть моделі оцінювання дохідності облігацій.
7. Наведіть моделі оцінювання вартості та дохідності акцій.
8. Поясніть сутність аналізу похідних цінних паперів.
9. У чому полягає сутність дивідендної моделі Гордона?
10. Що таке "очікувана норма доходу" облігації ?
11. Що таке "ефективна прибутковість" облігації?
12. Що таке "номінальна прибутковість до погашення" облігації?
13. У чому полягає різниця між балансовою та ринковою ціною акції?
14. Що таке "інвестиційний портфель"?
15. Які типи портфелів цінних паперів ви знаєте?

Тести

1. Як розраховується очікувана норма доходу від інвестицій в облігації за весь період до погашення, якщо P_{pok} – ціна купівлі; P_{nom} – номінальна ціна:

а) $\frac{P_{pok}-P_{nom}}{P_{pok}} \cdot 100;$

б) $\frac{P_{nom}-P_{pok}}{P_{pok}} \cdot 100;$

в) $\frac{P_{nom}-P_{pok}}{P_{nom}} \cdot 100;$

г) $\frac{P_{pok}-P_{nom}}{P_{nom}} \cdot 100?$

2. Більший рівень ризику мають:

а) корпоративні облігації;

б) привілейовані акції;

в) облігації внутрішньої державної позики.

3. Фінансовий важіль – це відношення:

а) позикових коштів до власного капіталу;

б) прибутку підприємства (до вирахування податків і відсоткових платежів) до суми відсотків за облігаціями;

в) чистого прибутку до власного капіталу;

г) чистого прибутку підприємства, за винятком дивідендів, виплачених за привілейованими акціями, до кількості звичайних акцій.

4. Для визначення доходу на звичайні акції використовують показник:

а) рентабельність власного капіталу;

б) фінансового важеля;

в) відсоткового покриття;

г) усі відповіді правильні.

5. За критеріями західних фахівців диверсифікований інвестиційний портфель повинен включати:

а) не менше п'яти видів цінних паперів;

б) не менше десяти видів цінних паперів;

в) лише від двадцяти до тридцяти видів цінних паперів;

г) не більше п'ятдесяти видів цінних паперів.

6. Привілейовані акції захищають власника від інвестиційних ризиків:

а) ні;

б) так?

7. Зростання показника відсоткового покриття:

а) знижує безпеку інвестицій;

б) збільшує безпеку інвестицій;

в) безпека інвестицій не залежить від цього показника.

8. Фактори, які враховуються у відборі активів інвестором:

а) оцінка банку;

б) ліквідність;

в) корисність;

г) рівень безпеки;

д) ступінь участі на ринку цінних паперів.

9. Прибутковість (рентабельність) власного капіталу – це відношення:

а) позикових коштів до власного капіталу;

б) прибутку підприємства до суми дивідендів за привілейованими акціями та відсотків за облігаціями;

в) чистого прибутку до власного капіталу;

г) відношення прибутку підприємства (до вирахування податків і відсоткових платежів) до суми відсотків за облігаціями.

10. Для оцінювання поточної вартості (Р) акцій та облігацій використовується операція:

а) математичного дисконтування;

б) нарощення;

в) банківського дисконтування.

11. Поточна ринкова ціна безстрокової облігації визначається за формулою:

а) $PV = \frac{F_t}{1+i*T}$;

б) $PV = \frac{F_t}{i}$;

в) $PV = \frac{F_t}{(1+i)^T}$.

12. Оцінювання фінансового стану підприємства використовується для проведення:

а) фундаментального аналізу акцій;

б) технічного аналізу акцій;

в) усі відповіді правильні.

13. За характером зобов'язань емітента акції розподіляють на:

а) звичайні та привілейовані;

б) прості та складні;

в) комерційні та державні;

г) цільові та звичайні.

14. Балансова ціна акції – це:

а) вартість реалізованого майна акціонерного товариства у фактичних цінах, що припадає на одну акцію;

б) величина власного капіталу, що припадає на одну акцію;

в) ціна, за якою акція продається на ринку;

г) величина, позначена на бланку акції.

15. Рівень ліквідності вище у:

а) привілейованих акцій;

б) простих акцій;

в) однаковий у всіх видів акцій.

16. Привілейовані акції надають власнику право участі в управлінні акціонерним товариством?

а) ніколи;

б) завжди;

в) не завжди.

17. Дисконтна ставка (i), використовувана для визначення поточної вартості цінних паперів, розраховується як:

а) сума поточної прибутковості за безризиковими цінними паперами та норми премії за ризик;

б) середня ставка за депозитними вкладами;

в) поточна дохідність за безризиковими цінними паперами з урахуванням інфляції;

г) середня ставка за кредитами.

18. Облігації з нульовим купоном – це:

а) облігації з постійним доходом;

б) безстрокові облігації;

в) облігації без виплати відсотків;

г) безкупонні облігації.

19. Зростання дивідендного доходу можливе за умови:

а) падіння курсу акцій;

б) збільшення дивідендних виплат;

в) усі відповіді правильні.

Практичні завдання

1. Безкупонні облігації ВАТ "Примара" реалізуються за ціною 94,36 % до номінальної вартості. До погашення облігації 380 днів.

Необхідно розрахувати:

а) очікувану норму доходу інвестицій в облігації за весь період до погашення;

б) номінальну прибутковість до погашення;

в) ефективну прибутковість за рік.

2. Облігація компанії "АРТА" номіналом 400 грн реалізується за ціною 560 грн. Щорічна купонна ставка за нею становить 18,5 % від номінальної вартості.

Необхідно розрахувати очікувану норму доходу облігацій зі змінним купонним відсотком.

3. Облігація компанії "Маркус" реалізується на ринку за ціною 88,6 % до номінальної вартості. Погашення облігації і разова виплата відсотка за нею за ставкою 20,5 % передбачені через чотири роки.

Необхідно розрахувати норму прибутковості облігацій з виплатою всієї суми відсотків під час погашення.

4. Ціна закриття на біржових торгах 05.02.2017 р. по випуску державних облігацій з датою погашення 26.08.2018 р. і датою найближчої купонної виплати 17.05.17 р. становила 91,2 % до номіналу. Оголошений купонний відсоток дорівнює 28,7 % річних.

Необхідно розрахувати номінальну прибутковість до погашення облігацій зі змінним купонним відсотком.

5. Інвестор очікує, що, купуючи привілейовані акції ВАТ "Дельта" за 550 грн, він зможе продати їх через чотири роки за ціною 670 грн. Фіксовані дивіденди, обов'язкові до сплати, складуть в рік 75 грн. Норма прибутковості, використовувана для порівняння, становить 17 %.

Необхідно визначити ефективність інвестицій в привілейовані акції.

Розділ 7. Аналіз ефективності реальних інвестицій

7.1. Метод розрахунку чистої поточної вартості.

7.2. Термін окупності інвестицій.

7.3. Внутрішня норма прибутковості, індекс рентабельності та коефіцієнт ефективності інвестицій.

7.4. Дюрація інвестиційного проекту та вартість інвестиційних ресурсів.

7.5. Аналіз ефективності інвестиційних проектів в умовах інфляції.

Ключові слова: чиста поточна вартість; термін окупності інвестицій; внутрішня норма прибутковості; індекс прибутковості; коефіцієнт ефективності інвестицій; дюрація; вартість інвестиційних ресурсів.

7.1. Метод розрахунку чистої поточної вартості

Чиста поточна вартість (чиста сучасна вартість, чистий дисконтований дохід, *Net Present Value*, NPV) – сума поточних вартостей усіх прогнозованих грошових потоків (зі знаками "+" і "–"), з урахуванням дисконтування грошових потоків.

Метод розрахунку чистої поточної вартості (NPV) включає такі етапи.

1. Визначення поточної вартості витрат (IC). Тобто вирішується питання, скільки коштів потрібно зарезервувати для інвестування у проект.

2. Розрахунок поточної вартості майбутніх грошових надходжень від проекту. Для цього доходи за кожний рік (P_k) приводяться до поточної дати. Отримані результати покажуть, скільки коштів потрібно було б вкласти сьогодні для отримання запланованих доходів, якби ставка доходів дорівнювала *бар'єрній ставці* (для інвестора – ставці відсотка в банку, для підприємства – ціні сукупного капіталу тощо). Загальна поточна вартість доходів від проекту (PV) є сумою поточної вартості дисконтованих доходів за всі роки:

$$PV = \sum_{k=1}^{n} \frac{P_k}{(1+i)^k},$$

де P_k – річні грошові надходження в період k;

i – ставка порівняння.

3. Порівняння поточної вартості інвестиційних витрат (IC) з поточною вартістю доходів (PV). Чиста поточна вартість доходів (NPV) є різницею між ними:

$$NPV = PV - IC = \sum_{k=1}^{n} \frac{P_k}{(1+i)^k} - IC.$$

NPV показує чисті доходи або чисті збитки інвестора від інвестування капіталу в проект порівняно з вкладенням грошей на депозит у банк.

Якщо $NPV > 0$, то можна вважати, що інвестиція примножить капітал підприємства, й інвестицію слід здійснювати.

За умови $NPV < 0$ доходи від запропонованої інвестиції недостатньо високі, щоб компенсувати ризик, властивий даному проекту (або з точки зору ціни капіталу не вистачить грошей на виплату дивідендів і відсотків за кредитами) й інвестиційну пропозицію потрібно відхилити.

Якщо $NPV = 0$, то проект не є прибутковим, але й не є збитковим.

Чиста поточна вартість (NPV) – це один з основних показників, що використовують в інвестиційному аналізі, але він не може бути єдиним інструментом оцінювання інвестиції, оскільки має деякі недоліки. NPV визначає абсолютну величину віддачі від інвестиції, і чим більше інвестиція, тим більше чиста поточна вартість. Таким чином, порівняння інвестицій різного розміру за допомогою цього показника неможливе. Крім цього, NPV не визначає період, через який інвестиція окупиться.

Якщо капітальні вкладення, пов'язані з майбутньою реалізацією проекту, проводять у декілька етапів (інтервалів), то розрахунок показника NPV здійснюють за такою формулою:

$$NPV = \sum_{k=1}^{n} \frac{P_k}{(1+i)^k} - \sum_{j=1}^{m} \frac{IC_j}{(1+i)^j}.$$

7.2. Термін окупності інвестицій

Термін окупності інвестицій (*payback period, PP).* Під час проведення аналізу інвестиційного проекту потрібно визначити, чи окупляться дані інвестиції і коли можна чекати фінансової віддачі від їх використання.

Слід звернути увагу, що кожен проект може бути корисний протягом всього свого життєвого циклу. Для оцінювання проекту слід зіставити його життєвий цикл і період окупності капітальних вкладень.

Терміном окупності інвестиційного проекту називають строк з дня початку його фінансування до дня, коли різниця між накопиченою сумою чистого прибутку з амортизаційними відрахуваннями й обсягом інвестиційних витрат набуває додатного значення.

Методичні рекомендації щодо оцінювання ефективності інвестиційних проектів виділяють: *простий термін окупності* й *окупність з урахуванням дисконтування*.

Терміном окупності ("простим" терміном окупності, *payback period)* вважають тривалість періоду від початкового моменту до моменту окупності. Початковим моментом є початок нульового кроку або початок операційної діяльності (він указується в завданні на проектування). Моментом окупності є той найбільш ранній момент часу в розрахунковому періоді, після якого поточний чистий дохід $NV(n)$ стає та надалі залишається невід'ємним. Під час оцінювання ефективності термін окупності, як правило, виступає лише як обмеження: серед проектів, які відповідають заданому обмеженню, подальший відбір за цим показником проводитись не повинен.

Термін окупності з урахуванням дисконтування – це тривалість періоду від початкового моменту до моменту окупності з урахуванням дисконтування. Моментом окупності з урахуванням дисконтування називають той найбільш ранній момент часу в розрахунковому періоді, після якого поточний чистий дисконтований дохід $NPV(n)$ стає і надалі залишається невід'ємним.

Якщо не враховувати фактор часу, то термін окупності можна розрахувати за формулою:

$$n_y(PP) = \frac{CI}{P_k},$$

де $n_y(PP)$ – спрощений показник строку окупності;

CI – розмір інвестицій;

P_k – щорічний чистий дохід.

Більш обґрунтованим є інший метод визначення терміну окупності. У використанні даного методу під терміном окупності $n_{\text{ок}}(PP)$ розуміють тривалість періоду, протягом якого сума чистих доходів, дисконтованих на момент завершення інвестицій, дорівнює сумі інвестицій. Тоді:

$$n_{\text{ок}}(PP) = \frac{-\ln\left(1 - \frac{IC}{P_k} \cdot i\right)}{\ln(1 + i)}.$$

Результатом розрахунку є кількість років, необхідна для повернення початкових вкладень і витрат. Її ще називають *точкою окупності*. Однак вкладений капітал повинен не тільки окупитись, але й принести дохід не нижче відсотка за депозитами. В іншому разі недоцільно інвестувати цей проект. У цілому, період окупності показує, через який час проект почне приносити прибуток.

Якщо термін окупності (точка окупності) та життєвий цикл інвестиційного проекту співпадають, то фірма хоч не отримує прибутку за даними вкладенням, проте не понесе збитків (крім прихованих витрат від втраченої можливості вкладання інвестицій в більш прибутковий проект).

Якщо період життя об'єкта капітальних вкладень перевищить термін окупності, то проект буде прибутковим. Якщо період життєвого циклу виявиться нижче терміну окупності, то проект принесе збитки.

7.3. Внутрішня норма прибутковості, індекс рентабельності та коефіцієнт ефективності інвестицій

Внутрішня норма прибутковості (внутрішній коефіцієнт окупності, *Internal Rate of Return* – IRR) – норма прибутку, породжена інвестицією. Це **така норма прибутку (бар'єрна ставка, ставка дисконтування)**, за якої чиста поточна вартість інвестиції дорівнює нулю, або це та ставка дисконту, за якої дисконтовані доходи від проекту дорівнюють інвестиційним витратам. Цей показник визначає найбільшу прийнятну ставку дисконту за якої можна вкладати кошти без жодних втрат для інвестора: $IRR = i$, за якої $NPV = 0$.

Економічний сенс внутрішньої норми прибутковості полягає в тому, що вона показує очікувану норму прибутку (рентабельність інвестицій) або максимально допустимий рівень інвестиційних витрат в оцінюваний проект. IRR повинен бути більше середньозваженої ціни інвестиційних ресурсів: $IRR > CC$ (*cost of capital*). Якщо ця умова виконується, то проект можна прийняти, в іншому випадку проект необхідно відхилити.

Орієнтуючись на існуючі в момент аналізу відсоткові ставки на позиковий капітал, вибирають два значення коефіцієнта дисконтування таким чином, щоб в інтервалі між ними функція NPV змінювала своє значення з "+" на "–" або навпаки, тоді:

$$IRR = i_1 + \frac{NPV(i_1)}{NPV(i_1) - NPV(i_2)} \cdot (i_2 - i_1),$$

де i_1, i_2 – відповідні відсоткові ставки для дисконтних множників.

Показник внутрішньої норми прибутковості (IRR) не тільки визначає рівень рентабельності інвестиції, але й дає можливість порівняти проекти різної тривалості та різні за масштабом.

Показник ефективності інвестицій IRR має три основних недоліки.

1) висувається припущення, що додатні грошові потоки реінвестуються за ставкою, яка дорівнює внутрішній нормі прибутковості. У разі, якщо IRR близько до рівня реінвестицій фірми, то цієї проблеми не виникає. Коли IRR, особливо привабливого інвестиційного проекту дорівнює, наприклад, 75 %, то мається на увазі, що всі грошові надходження повинні бути реінвестовані за ставкою 75 %. Однак малоймовірно, що підприємство має щорічні інвестиційні можливості, які забезпечують рентабельність у 75 %. У цій ситуації показник IRR завищує ефект від інвестицій (у показнику MIRR – модифікованої внутрішньої норми прибутковості – дана проблема усунена);

2) відсутня можливість визначити, скільки грошей принесе інвестиція в абсолютних значеннях (гривнях, доларах);

3) в ситуації зі знакозмінними грошовими потоками може розраховуватись кілька значень IRR або є загроза визначення неправильного значення.

Індекс прибутковості (*profitability index*, PI) показує відносну прибутковість проекту – дисконтовану вартість грошових надходжень від проекту в розрахунку на одиницю вкладень. Він розраховується шляхом розподілу чистих наведених надходжень від проекту на вартість первинних вкладень. Метод розрахунку даного показника є ніби продовженням методу розрахунку чистого наведеного доходу. Показник PI, на відміну від NPV, є відносною величиною.

Якщо інвестиції здійснюються разовим вкладенням, то даний показник розраховується за формулою:

$$PI = \sum_{k=1}^{n} \frac{P_k}{(1+i)^k} \div IC = \frac{\sum_{k=1}^{n} P_k (1+i)^{-k}}{IC}.$$

Якщо інвестиції є деяким потоком, то:

$$PI = \sum_{k=1}^{n} \frac{P_k}{(1+i)^k} \div \sum_{j=1}^{m} \frac{IC_j}{(1+i)^j} = \frac{\sum_{k=1}^{n} P_k (1+i)^{-k}}{\sum_{j=1}^{m} IC_j (1+i)^{-j}}.$$

Якщо показник $PI = 1$, то це означає, що прибутковість інвестицій точно відповідає нормативу рентабельності (ставці порівняння). За $PI < 1$ інвестиції нерентабельні, оскільки не забезпечують цей норматив.

Однак не слід забувати, що дуже великі значення індексу прибутковості не завжди відповідають високому значенню NPV, і навпаки. Справа в тому, що, маючи високу чисту поточну вартість, проекти не обов'язково ефективні, а отже, мають незначний індекс прибутковості.

Коефіцієнт ефективності інвестицій (ARR). Сутність методу полягає в тому, що величина середньорічного прибутку (PN) ділиться на середню величину інвестиції, коефіцієнт виражається у відсотках. Середню величину інвестиції визначають шляхом ділення вихідної суми капітальних вкладень на 2, якщо передбачається, що після закінчення терміну реалізації аналізованого проекту всі капітальні витрати будуть списані. Якщо ж допускається наявність залишкової, або ліквідаційної, вартості (RV), то її величина повинна бути виключена.

Таким чином, величина цього коефіцієнта розраховується як:

$$ARR = \frac{PN}{0{,}5(IC - RV)}$$

Даний показник можна порівнювати з коефіцієнтом рентабельності.

Основний недолік цього методу полягає в тому, що він не враховує фактора часу в процесі формування грошових потоків.

7.4. Дюрація інвестиційного проекту та вартість інвестиційних ресурсів

Дюрація. За наявності кількох альтернативних проектів з однаковими (близькими) значеннями NPV і IRR під час вибору остаточного варіанта інвестування враховується тривалість інвестицій *(duration).* **Дюрація (D)** – це середньозважений термін життєвого циклу інвестиційного проекту, де в якості ваг виступають поточні вартості грошових потоків, отримуваних в період t, або як точку рівноваги термінів дисконтованих платежів. Вона дозволяє привести до єдиного стандарту найрізноманітніші за своїми характеристиками проекти (за термінами, кількістю платежів у періоді, методами розрахунку належного відсотка).

Ключовим моментом цієї методики є не те, як довго кожен інвестиційний проект буде приносити дохід, а те, коли він буде приносити дохід і скільки надходжень доходу буде щомісяця, щокварталу або щороку протягом всього терміну його дії.

Дюрація (середньозважений термін погашення або середньозважена тривалість платежів) вимірює середній час життя інвестиційного проекту або його ефективний час дії. У результаті менеджери отримують відомості про те, як довго окупаються для компанії інвестиції доходами, приведеними до поточної дати.

Для розрахунку дюрації (D) використовують зазвичай таку формулу:

$$D = \frac{\sum_{k=1}^{n} k \cdot \frac{P_k}{(1+i)^k}}{\sum_{k=1}^{n} \frac{P_k}{(1+i)^k}}, \quad D = \frac{\sum_{t=1}^{n} t \cdot PV_t}{\sum_{t=1}^{n} PV_t}, \quad PV_t = \frac{CF_t}{(1+r)^t},$$

де CF_t – приток грошових коштів у період t;

PV_t – поточна вартість доходів за n періодів до закінчення терміну дії проекту;

r – бар'єрна ставка (коефіцієнт дисконтування);

t – періоди надходження доходів (1, 2, ..., n);

n – число періодів.

Один з варіантів використання дюрації базується на тому, що вона приблизно характеризує чутливість суми дисконтованих позитивних грошових потоків до змін бар'єрної ставки. Таким чином, використовуючи дюрацію, можна управляти ризиком, пов'язаним зі зміною бар'єрної ставки.

Вартість інвестиційних ресурсів. Економічну природу інвестиційних рішень можна звести до балансу між доходами та витратами. Значну частину витрат складає плата за користування залученими коштами. Відношення суми, сплаченої за використання фінансових ресурсів до загального обсягу цих ресурсів, називають *ціною капіталу* (*cost of capital*, СС), вона виражається у відсотках.

Ціна капіталу може істотно впливати на показник ефективності інвестиційного проекту. Знаючи вартість капіталу, що залучається з різних джерел, можна визначити середньозважену вартість капіталу фірми (*weighted average cost of capital*, WACC) і зрозуміти, яким чином використовувати цю вартість, порівнявши її з різними ставками прибутковості, для прийняття рішень щодо інвестиційних проектів.

Даний показник (WACC) може бути визначений як рівень прибутковості, який повинен приносити інвестиційний проект, щоб можна було забезпечити отримання всіма категоріями інвесторів доходу, аналогічного тому, який їм був би забезпечений від вкладень в інші проекти з тим же рівнем ризику. Середньозважена ціна капіталу є відносною величиною, вираженою у відсотках. Вона розраховується як середня величина з необхідної прибутковості за різними джерелами фінансування; вагами слугує частка кожного джерела в загальній сумі інвестицій:

$$WACC = \sum_{i=1}^{m} r_i \cdot d_i \,,$$

де r_i – необхідна прибутковість (норма прибутку) за капіталом, отриманим з i-го джерела;

d_i – частка капіталу (інвестиційних ресурсів), отриманого з i-го джерела.

7.5. Аналіз ефективності інвестиційних проектів в умовах інфляції

Інфляція спотворює результати аналізу ефективності довгострокових інвестицій. Основна причина полягає в тому, що амортизаційні відрахування розраховуються виходячи з первісної вартості об'єкта, а не його вартості під час заміни. У результаті зі зростанням доходу одночасно з ростом інфляції збільшується оподатковувана база, тоді як стримувальний фактор (амортизаційні відрахування) залишається постійним, унаслідок чого реальні грошові потоки відстають від інфляції.

Реальні грошові потоки після оподаткування поступаються номінальним потокам і стійко зменшуються з часом. Причиною є те, що амортизаційні відрахування не змінюються залежно від інфляції, тому зростаюча частина прибутку стає об'єктом оподаткування. У цьому випадку необхідно у розрахунках передбачити коригування всіх факторів, що впливають на грошові потоки інвестиційних проектів, основним з яких є інфляція.

Існує залежність між звичайною ставкою прибутковості (i), ставкою прибутковості в умовах інфляції (r) і показником інфляції (α):

$$1 + r = (1 + i) \cdot (1 + \alpha).$$

Спростивши формулу, отримаємо:

$$1 + r = 1 + \alpha + i + i \cdot \alpha \,;$$
$$r = \alpha + i + i \cdot \alpha \,.$$

У практичних розрахунках величина $i \cdot \alpha$ вважається незначною та прирівнюється до *0*, тоді коефіцієнт дисконтування в умовах інфляції розраховується за формулою:

$$\frac{1}{1+r} = \frac{1}{1+i+\alpha}.$$

Використання даного коефіцієнта дисконтування в усіх наведених формулах дає можливість враховувати інфляцію у розрахунку економічних показників ефективності проекту, що дає більш точну оцінку.

Завдання для самостійного опрацювання

Контрольні запитання для самодіагностики

1. Як розраховується показник чистого приведеного доходу в інвестиційних проектах?
2. Наведіть графічне зображення процесу інвестування та віддачі від інвестицій.
3. Які існують способи розрахунку терміну окупності інвестицій? У чому полягають недоліки кожного способу?
4. Як визначається внутрішня норма дохідності інвестицій, із чим порівнюється цей показник?
5. Назвіть відмінності показників індексу рентабельності та коефіцієнту ефективності інвестицій.
6. За допомогою яких показників здійснюється аналіз альтернативних інвестиційних проектів?
7. Наведіть алгоритм проведення порівняльного аналізу інвестиційних проектів різної тривалості.
8. У чому полягає врахування темпів інфляції у ставках дохідності?

Тести

1. Чи можна порівнювати проекти різного масштабу та різної тривалості з допомогою показника IRR:

а) ні; б) так?

2. Якщо IRR менше рівня реінвестицій фірми, то даний показник:

а) відображає реальний ефект від інвестицій;

б) завищує реальний ефект від інвестицій;

в) занижує реальний ефект від інвестицій.

3. На ставку дисконту не впливає:

а) доходи за альтернативними проектами;

б) грошовий потік проекту;

в) ризик проекту;

г) відсоткова ставка за депозитами.

4. Коефіцієнт дисконтування в умовах інфляції розраховується за формулою (де і – ставка дохідності):

а) $\frac{1}{1+i-a}$; б) $\frac{1}{1-i+a}$; в) $\frac{1}{1+i+a}$; г) $\frac{1}{2i-a}$.

5. Чистий приведений дохід (NPV) від проекту визначається за формулою:

а) $PV = \sum_{k=1}^{n} \frac{P_k}{(1+i)^k} - IC$; б) $PV = \sum_{k=1}^{n} \frac{P_k}{(1+i)^k}$;

в) $PV = \sum_{k=1}^{n} \frac{P_k}{(1+i)^k} + IC$; г) $PV = IC - \sum_{k=1}^{n} \frac{P_k}{(1+i)^k}$.

6. Проект можна вважати ефективним, якщо:

а) $PI > 0$; б) $PI = 1$; в) $PI < 0$;

г) $PI < 1$; д) $PI > 1$.

7. Кількість років, необхідна для повернення початкового вкладення інвестицій, називають:

а) точкою окупності;

б) життєвим циклом проекту;

в) терміном інвестицій.

8. Проект можна вважати прибутковим, якщо:

а) NPV>0; б) NPV<1; в) NPV=0;

г) NPV<0; д) NPV>1.

9. Великі значення PI завжди відповідають високому значенню NPV:

а) ні; б) так.

10. Серед альтернативних проектів з однаковими або близькими значеннями NPV необхідно вибрати проект, у якого показник дюрації:

а) менше; б) більше.

11. Проект є ефективним, якщо:

а) IRR проекту більше середньозваженої вартості капіталу;

б) IRR проекту менше середньозваженої вартості капіталу;

в) IRR проекту дорівнює середньозваженій вартості капіталу.

12. Ціна капіталу (cost of capital, CC) у ході прийняття інвестиційних рішень визначається за формулою:

а) величина середньорічний прибуток/середня величина інвестиції;

б) вартість капіталу, що залучається з різних джерел/дисконтний множник;

в) сума, сплачена за використання фінансових ресурсів/загальний обсяг цих ресурсів;

г) дохід від капіталу/вартість капіталу, що залучається з різних джерел.

13. Термін з дня початку фінансування інвестиційного проекту до дня, коли різниця між накопиченою сумою чистого прибутку з амортизаційними відрахуваннями й обсягом інвестиційних витрат набуває позитивне значення, – це:

а) термін окупності проекту; б) показник дюрації проекту.

14. У прибуткового проекту термін окупності:

а) дорівнює життєвому циклу проекту;

б) менше життєвого циклу проекту;

в) більше життєвого циклу проекту.

15. Поточна вартість доходів від проекту визначається за формулою:

а) $PV = \sum_{k=1}^{n} \frac{P_k}{(1+i)^k}$; б) $PV = \sum_{k=1}^{n} \frac{P_k}{(1+i)^k} - IC$;

в) $PV = IC - \sum_{k=1}^{n} \frac{P_k}{(1+i)^k} - IC$; г) $PV = \sum_{k=1}^{n} \frac{P_k}{(1+i)^k} + IC$.

Практичні завдання

1. Інвестиційний проект розрахований на три роки, розмір необхідних інвестицій – 20 млн грн. Заплановані грошові надходження в перший рік реалізації проекту складуть 3 млн грн, у другий рік – 8 млн грн, третій рік – 14 млн грн. Фінансування проекту здійснюється за рахунок банківської позики під 15 % річних.

Необхідно розрахувати чистий приведений дохід проекту.

2. За умовами завдання 1 необхідно розрахувати індекс рентабельності та внутрішню норму прибутковості проекту; зробити висновки.

3. Інвестиційний проект розрахований на чотири роки, розмір необхідних інвестицій – 35 млн грн. Заплановані грошові надходження у перший

рік реалізації проекту складуть 6 млн грн, другий рік – 10 млн грн, третій рік – 20 млн грн, четвертий рік – 20 млн грн. Фінансування проекту здійснюється за рахунок банківської позики під 16 % річних.

Необхідно визначити чистий приведений дохід проекту, індекс рентабельності, внутрішню норму прибутковості проекту, термін окупності інвестицій.

4. За умовами завдання 3 під час оцінювання інвестиційного проекту необхідно врахувати інфляційні процеси. Прогнозований показник інфляції складе 5 % річних. Порівняйте результати, зробіть висновки.

Розділ 8. Лабораторний практикум

Лабораторні роботи призначені для закріплення теоретичного матеріалу, оволодіння навичками прийняття науково обґрунтованих рішень у процесі планування економічної діяльності й оцінювання всіх можливих фінансових наслідків під час здійснення будь-якої комерційної операції на основі ефективного використання методів і моделей фінансової математики, які дозволяють описувати на кількісному та якісному рівнях явища та процеси фінансової сфери економічного життя суспільства.

Лабораторні роботи слід виконувати послідовно, оскільки послідовне виконання дозволяє краще засвоїти та закріпити матеріал навчальної дисципліни.

Лабораторні роботи розроблені за всіма темами навчальної дисципліни і ґрунтуються на теоретичному матеріалі відповідної теми, а також попередніх тем. Кожна робота містить мету, завдання та методичні рекомендації до їх виконання в середовищі *MS Excel*.

Оцінка за виконання роботи виставляється за результатами виконання та захисту лабораторної роботи. Особлива увага приділяється вивченню теоретичного матеріалу, правильності висновків і повноті економічної інтерпретації отриманих результатів.

Лабораторна робота 1
Фінансові розрахунки з використанням простих і складних відсотків

Мета – закріплення теоретичного та практичного матеріалу, набуття навиків нарахування простих і складних відсотків.

Початкові дані. Депозитний внесок величиною 1 тис. грн розміщений в банку на десять років під 10 % річних.

Необхідно розрахувати майбутню вартість внеску за умов:

1. Нарахування простих відсотків:

1.1. За постійною ставкою один раз на рік;

1.2. Якщо передбачена зміна відсоткової ставки: перші п'ять років – 10 %, кожен подальший рік ставка підвищується на 0,5 %;

1.3. З урахуванням щорічного рівня інфляції 7 % і 15 %.

2. Нарахування складних відсотків:

2.1. За постійною ставкою один раз на рік, щокварталу, щомісячно;

2.2. Якщо передбачена зміна відсоткової ставки: перші п'ять років – 10 %, кожен подальший рік ставка підвищується на 0,5 %;

2.3. З урахуванням щорічного рівня інфляції 7 і 15 %.

3. Побудувати графіки зростання вартості внеску.

1. Прості відсотки

1.1. Постійні ставки.

Для запису формул нарощування простих і складних відсотків приймемо позначення: S – нарощена сума, тобто сума в кінці терміну (майбутня вартість внеску); P – первинна сума внеску; I – відсотки за весь термін вкладу; i – відсоткова ставка, ставка нарощування відсотків (десятковий дріб); n – термін вкладу.

Якщо термін вимірюється в роках, то i означає річну відсоткову ставку. Відповідно, щороку приносить відсотки в сумі $P \cdot i$. Нараховані за весь термін відсотки складуть $I = Pni$.

З нарахуванням простих відсотків один раз на рік майбутня вартість внеску на кінець n–го року визначається за формулою:

$$S = P + I = P + P \cdot n \cdot i = P(1 + n \cdot i). \qquad (8.1)$$

Вираз (8.1) називають *формулою простих відсотків,* а множник $(1 + n \cdot i)$ *множником нарощування простих відсотків.*

Якщо $P = 1\ 000$, $i = 0{,}1$, а $n = 10$, то майбутня вартість внеску через десять років складе:

$$S = 1\ 000(1 + 10 \cdot 0{,}1) = 2\ 000 \text{ (грн)}.$$

Розрахунок простих відсотків можна здійснити покроково. Процес покрокового розрахунку простих відсотків організуємо у *MS Excel* на новому листі, який назвемо "Прості відсотки". Для створення такого листа необхідно виконати такі кроки:

1. Задайте початкові умови для розрахунків (суму внеску P = 1 000, ставку річних відсотків 0,1 і термін вкладу десять років) у комірках B3:B5 так, як це подано на рис. 8.1.

	A	B	C	D
1	**ПРОСТИЙ ВІДСОТОК**			
2	**1) нарахування відсотків 1 раз на рік**			
3	P=	1000		
4	i=	0,1		
5	n=	10		
6				
7–9	**Рік**	**Стан рахунку на початку року, грн**	**Відсотки, накопичені протягом року, грн**	**Всього на рахунку в кінці року, грн**
10	1	=B3	=$B$4*$B$10	=C10+B10
11	2	=D10	=$B$4*$B$10	=C11+B11
12	3	=D11	=$B$4*$B$10	=C12+B12
13	4	=D12	=$B$4*$B$10	=C13+B13
14	5	=D13	=$B$4*$B$10	=C14+B14
15	6	=D14	=$B$4*$B$10	=C15+B15
16	7	=D15	=$B$4*$B$10	=C16+B16
17	8	=D16	=$B$4*$B$10	=C17+B17
18	9	=D17	=$B$4*$B$10	=C18+B18
19	10	=D18	=$B$4*$B$10	=C19+B19
20				
21	Розрахунок простих відсотків за формулою (1)		=B3*(1+B5*B4)	

Рис. 8.1. **Розрахунок майбутньої вартості внеску за умови нарахування простих відсотків один раз на рік**

2. Стан рахунку на початок першого року у комірці B10 дорівнює сумі вкладу P, тобто 1 000 грн.

3. У комірці C10 розрахуйте відсотки накопичені протягом першого року як добуток суми первісного вкладу на ставку річних відсотків. Зверніть увагу, що під час розрахунку простих відсотків нарахування відсотків у кожному році завжди здійснюється на суму первинного вкладу.

4. Розрахуйте стан рахунку на кінець першого року у комірці D10 як суму стану рахунку на початок першого року та відсотків, накопичених протягом року.

5. Оскільки стан рахунку на кінець першого року дорівнює стану рахунку на початок другого року, прирівняйте комірку B11 до отриманого на попередньому кроці значення в комірці D10.

6. Здійсніть аналогічні розрахунки для наступних дев'яти років, повторюючи кроки 3 – 10.

7. Суму на рахунку на кінець періоду нарахування, тобто на кінець десятого року, порівняйте із розрахованою за формулою (8.1) майбутньою вартістю внеску.

Результати виконання розрахунку нарощеної вартості за умови нарахування простих відсотків покроково (один крок – один рік) наведені на рис. 8.2.

	A	B	C	D
1	ПРОСТИЙ ВІДСОТОК			
2	1) нарахування відсотків 1 раз на рік			
3	P=	1000		
4	i=	0,1		
5	n=	10		
6				
7–9	Рік	Стан рахунку на початку року, грн	Відсотки, накопичені протягом року, грн	Всього на рахунку на кінець року, грн
10	1	1 000,00	100,00	1 100,00
11	2	1 100,00	100,00	1 200,00
12	3	1 200,00	100,00	1 300,00
13	4	1 300,00	100,00	1 400,00
14	5	1 400,00	100,00	1 500,00
15	6	1 500,00	100,00	1 600,00
16	7	1 600,00	100,00	1 700,00
17	8	1 700,00	100,00	1 800,00
18	9	1 800,00	100,00	1 900,00
19	10	1 900,00	100,00	2 000,00
20				
21	Розрахунок простих відсотків за формулою (1)		2000,00	

Рис. 8.2. **Результати розрахунків майбутньої вартості внеску за умови нарахування простих відсотків один раз на рік**

Нараховані майбутні суми у комірках D19 та C21 співпадають.

1.2. Змінні ставки. У кредитних угодах іноді передбачаються відсоткові ставки, що змінюються в часі. Якщо це прості ставки, то нарощена на кінець терміну сума визначається таким чином:

$$S = P(1 + n_1 i_1 + n_2 i_2 + \ldots + n_m i_m) = P(1 + \sum_{t=1}^{m} n_t i_t), \tag{8.2}$$

де i_t – ставка простих відсотків у періоді t;

n_t – тривалість періоду з постійною ставкою.

Якщо передбачена зміна відсоткової ставки: перші п'ять років – 10 %, кожен подальший рік ставка підвищується на 0,5 %, то майбутня вартість внеску через десять років з нарахуванням простих відсотків складе:

$$S = 1\,000(1 + 5 \cdot 0{,}1 + 0{,}105 + 0{,}11 + 0{,}115 + 0{,}12 + 0{,}125) = 2\,075 \text{ (грн).}$$

Покроковий розрахунок і результати розрахунку простих відсотків зі змінною ставкою, а також розрахунок нарощеної суми за формулою (8.2) наведено на рис. 8.3; 8.4.

	A	B	C	D	E
24					
25	**Змінна відсоткова став**				
26	Щорічна зміна ставки, починаючи з 6-го року		0,005		
27–29	**Рік**	**Ставка відсотків**	**Стан рахунку на початку року, грн**	**Відсотки, накопичені протягом року, грн**	**Всього на рахунку на кінець року, грн**
30	1	=$B$4	=B3	=B30*$C$30	=D30+C30
31	2	=$B$4	=E30	=B31*$C$30	=D31+C31
32	3	=$B$4	=E31	=B32*$C$30	=D32+C32
33	4	=$B$4	=E32	=B33*$C$30	=D33+C33
34	5	=$B$4	=E33	=B34*$C$30	=D34+C34
35	6	=B34+$C$26	=E34	=B35*$C$30	=D35+C35
36	7	=B35+$C$26	=E35	=B36*$C$30	=D36+C36
37	8	=B36+$C$26	=E36	=B37*$C$30	=D37+C37
38	9	=B37+$C$26	=E37	=B38*$C$30	=D38+C38
39	10	=B38+$C$26	=E38	=B39*$C$30	=D39+C39
40					
41	Розрахунок нарощеної суми при нарахуванні простих відсотків за формулою (2)			=B3*(1+B4*5+B35+B36+B37+B38+B39)	

Рис. 8.3. **Розрахунки за умови нарахування простих відсотків зі змінною ставкою**

	A	B	C	D	E
24					
25	**2) Змінна відсоткова ставка**				
26	Щорічна зміна ставки, починаючи з 6-го року		0,50%		
27–29	**Рік**	**Ставка відсотків**	**Стан рахунку на початку року, грн**	**Відсотки, накопичені протягом року, грн**	**Всього на рахунку на кінець року, грн**
30	1	10%	1 000,00	100,00	1 100,00
31	2	10%	1 100,00	100,00	1 200,00
32	3	10%	1 200,00	100,00	1 300,00
33	4	10%	1 300,00	100,00	1 400,00
34	5	10%	1 400,00	100,00	1 500,00
35	6	10,5%	1 500,00	105,00	1 605,00
36	7	11%	1 605,00	110,00	1 715,00
37	8	11,5%	1 715,00	115,00	1 830,00
38	9	12%	1 830,00	120,00	1 950,00
39	10	12,5%	1 950,00	125,00	2 075,00
40					
41	Розрахунок нарощеної суми при нарахуванні простих відсотків за формулою (2)			2075,00	

Рис. 8.4. **Результати розрахунків за умови нарахування простих відсотків зі змінною ставкою**

1.3. Урахування інфляції. У розглянутих формулах нарощування всі грошові величини вимірювались за номіналом. Проте в сучасних умовах інфляція в грошових відносинах відіграє помітну роль у процесі вимірювання реальної прибутковості фінансової операції.

Введемо позначення: S – нарощена сума грошей номінальна; C – нарощена сума з урахуванням її знецінення внаслідок інфляції; J_p – індекс цін. Очевидно, що $C = {}^{S}/_{J_p}$. Якщо нарощування проводиться за простою ставкою, то нарощена сума з урахуванням інфляції дорівнює:

$$C = \frac{S}{J_p} = P \cdot \frac{1 + ni}{(1 + h/100)^n}.$$

Якщо темп інфляції постійний і складає 7 і 15 %, а номінальна нарощена сума за простими відсотками, відома з попередніх розрахунків, дорівнює 2 000 грн, то можна визначити нарощену суму з урахуванням її знецінення за формулою:

$$C(7\ \%) = \frac{S}{(1 + h/100)^n} = \frac{2\ 000}{(1 + 7/100)^{10}} \approx 1\ 016{,}70\ (\text{грн});$$

$$C(15\ \%) = \frac{2\ 000}{(1 + 15/100)^{10}} \approx 494{,}37\ (\text{грн}).$$

Розрахунок майбутньої вартості депозитного внеску за умови нарахування простих відсотків з урахуванням рівня інфляції наведено на рис. 8.5.

	A	B	C	D
42				
43	**3) Майбутня вартість внеску з урахуванням інфляції**			
44	**Постійний щорічний темп інфляції**	**Рівень інфляції за 10 років**	**Майбутня вартість вкладу із врахуванням рівня інфляції, грн**	**Майбутня вартість вкладу без врахування рівня інфляції, грн**
45	0,07	=(1+A45)^10	=D45/B45	2000
46	0,15	=(1+A46)^10	=D46/B46	2000

Рис. 8.5. **Розрахунок майбутньої вартості депозиту за умови нарахування простих відсотків з урахуванням рівня інфляції**

Результати розрахунків наведені на рис. 8.6.

3) Майбутня вартість внеску з урахуванням інфляції

Постійний щорічний темп інфляції	Рівень інфляції за 10 років	Майбутня вартість вкладу із врахуванням рівня інфляції, грн	Майбутня вартість вкладу без врахування рівня інфляції, грн
7%	196,72%	1016,70	2000
15%	404,56%	494,37	2000

Рис. 8.6. **Результати розрахунку майбутньої вартості депозиту за умови нарахування простих відсотків з урахуванням рівня інфляції**

2. Складні відсотки

2.1. Постійні ставки.

За умови нарахування складних відсотків один раз на рік майбутня вартість внеску на кінець n–го року визначається за формулою:

$$S = P(1 + i)^n. \quad (8.3)$$

Якщо $P = 1\ 000, i = 0{,}1$, а $n = 10$, то майбутня вартість внеску через десять років складе:

$$S = 1\ 000(1 + 0{,}1)^{10} = 2\ 539{,}74 \text{ (грн)}.$$

Розрахунок складних відсотків також можна здійснити покроково. Процес покрокового розрахунку простих відсотків організуємо у *MS Excel* на новому листі, який назвемо "Складні відсотки". Закінчений робочий лист і використані формули наведені на рис. 8.7.

Для створення листа необхідно виконати такі кроки.

1. Задайте початкові умови для розрахунків (суму внеску P=1 000, ставку річних відсотків 0,1 і термін вкладу десять років) у комірках B3:B5 так, як це показано на рис. 8.1.

2. Стан рахунку на початок першого року у комірці B10 дорівнює сумі вкладу P, тобто 1 000 грн

3. У комірці C10 розрахуйте відсотки, накопичені протягом першого року, як добуток стану рахунку на початок року на ставку річних відсотків. Зверніть увагу, що під час розрахунку складних відсотків нарахування

відсотків у поточному році завжди здійснюється на суму вкладу на початок поточного року.

	A	B	C	D
1	**СКЛАДНИЙ ВІДСОТОК**			
2	**1) нарахування відсотків 1 раз на рік**			
3	P=	1000		
4	i=	0,1		
5	n=	10		
6				
7–9	**Рік**	**Стан рахунку на початку року, грн**	**Відсотки, накопичені протягом року, грн**	**Всього на рахунку на кінець року, грн**
10	1	=B3	=B10*$B$4	=C10+B10
11	2	=D10	=B11*$B$4	=C11+B11
12	3	=D11	=B12*$B$4	=C12+B12
13	4	=D12	=B13*$B$4	=C13+B13
14	5	=D13	=B14*$B$4	=C14+B14
15	6	=D14	=B15*$B$4	=C15+B15
16	7	=D15	=B16*$B$4	=C16+B16
17	8	=D16	=B17*$B$4	=C17+B17
18	9	=D17	=B18*$B$4	=C18+B18
19	10	=D18	=B19*$B$4	=C19+B19
20				
21	Розрахунок складних відсотків за формулою (3)		=B3*(1+B4)^B5	
22	Розрахунок складних відсотків функцією БС		=БС(B4;B5;;-B3)	

Рис. 8.7. **Покроковий розрахунок за умови нарахування складних відсотків зі змінною ставкою один раз на рік**

4. Розрахуйте стан рахунку на кінець першого року у комірці D10 як суму стану рахунку на початок першого року та відсотків, накопичених протягом року.

5. Оскільки стан рахунку на кінець першого року дорівнює стану рахунку на початок другого року, прирівняйте комірку B11 до отриманого на попередньому кроці значення в комірці D10.

6. Здійсніть аналогічні розрахунки для наступних дев'яти років, повторюючи кроки 3 – 10.

7. Суму на рахунку на кінець періоду нарахування, тобто на кінець десятого року, порівняйте із розрахованою за формулою (8.3) майбутньою вартістю внеску.

Примітка: У середовищі *Excel* є можливість розрахунку майбутньої вартості внеску за умови нарахування складних відсотків за допомогою вбудованої функції БС, яка має такий синтаксис:

БС(ставка, кпер, плт, [пс], [тип]),

де *ставка* – обов'язковий аргумент – відсоткова ставка за період;

кпер – обов'язковий аргумент – період нарахування внеску;

плт – обов'язковий аргумент – виплата, за кожний період; це значення не може змінюватись протягом усього періоду виплат. Зазвичай аргумент "*плт*" складається з основного платежу та платежу за відсотками, але не включає інших податків і зборів. Якщо він опущений, аргумент "пс" є обов'язковим;

пс – обов'язковий аргумент, якщо аргумент "*плт*" опущений. Сума внеску приведена до теперішнього моменту (береться зі знаком "-");

тип – необов'язковий аргумент. Приймає значення 0, якщо виплата повинна здійснюватись у кінці періоду нарахування, або 1 – на початку періоду. За замовчуванням дорівнює 0.

Результати виконання покрокового розрахунку нарощеної вартості (один крок – один рік) наведені на рис. 8.8.

	A	B	C	D
1	**СКЛАДНИЙ ВІДСОТОК**			
2	**1) нарахування відсотків 1 раз на рік**			
3	P=	1000		
4	i=	0,1		
5	n=	10		
6				
7–9	**Рік**	**Стан рахунку на початку року, грн**	**Відсотки, накопичені протягом року, грн**	**Всього на рахунку на кінець року, грн**
10	1	1 000,00	100,00	1 100,00
11	2	1 100,00	110,00	1 210,00
12	3	1 210,00	121,00	1 331,00
13	4	1 331,00	133,10	1 464,10
14	5	1 464,10	146,41	1 610,51
15	6	1 610,51	161,05	1 771,56
16	7	1 771,56	177,16	1 948,72
17	8	1 948,72	194,87	2 143,59
18	9	2 143,59	214,36	2 357,95
19	10	2 357,95	235,79	2 593,74
20				
21	Розрахунок складних відсотків за формулою (3)		2 593,74	
22	Розрахунок складних відсотків функцією БС		2 593,74	

Рис. 8.8. **Результати розрахунків за умови нарахування складних відсотків зі змінною ставкою один раз на рік**

Розглянемо проблему *нарощування складних відсотків m раз на рік*. За умови нарахування відсотків кілька разів на рік можна скористатись формулою (8.2). Параметр n у цих умовах означатиме число періодів нарахування, а під ставкою i слід розуміти ставку за відповідний період.

Отже, нехай річна ставка дорівнює j, число періодів нарахування в році – m. Кожного разу відсотки нараховуються за ставкою j/m. Ставку j/m називають *номінальною.* Формулу нарощування тепер можна подати таким чином:

$$S = P\left(1 + \frac{j}{m}\right)^{nm}. \qquad (8.4)$$

Якщо відсотки нараховуються щоквартально, то $j = 0{,}1$, $n = 10$, $m = 4$, а майбутня вартість внеску через десять років складе:

$$S = 1\,000\left(1 + \frac{0{,}1}{4}\right)^{10\cdot 4} = 2\,685{,}06 \text{ (грн)}.$$

Якщо відсотки нараховуються щомісячно, то $m = 12$, а майбутня вартість внеску через десять років складе:

$$S = 1\,000\,(1 + \frac{0{,}1}{12})^{10\cdot 12} = 2\,707{,}04 \text{ (грн)}$$

Розрахунок складних відсотків, які нараховуються кілька разів за рік, у середовищі *Excel* наведено на рис. 8.9.

	A	B	C	D
23				
24		**Кількість періодів нарахування складних відсотків**	**За формулою (4)**	**За функцією БС**
25		Щоквартальне нарахування складних відсотків,грн	=B3*(1+B4/4)^(4*B5)	=БС(B4/4;B5*4;;-B3)
26		Щомісячне нарахування складних відсотків, грн	=B3*(1+B4/12)^(12*B5)	=БС(B4/12;B5*12;;-B3)

Рис. 8.9. **Розрахунки за умови нарахування складних відсотків кілька разів на рік (щоквартально, щомісячно)**

Результати розрахунку складних відсотків за умови щоквартального та щомісячного нарахування наведено на рис. 8.10.

	A	B	C	D
23				
24		**Кількість періодів нарахування складних відсотків**	**За формулою (4)**	**За функцією БС**
25		Щоквартальне нарахування складних відсотків,грн	2685,06	2685,06
26		Щомісячне нарахування складних відсотків, грн	2707,04	2707,04

Рис. 8.10. **Результати розрахунків за умови нарахування складних відсотків кілька разів на рік (щоквартально, щомісячно)**

2.2. Змінні ставки. Майбутню вартість внеску за умови нарахування складних відсотків, якщо передбачена зміна ставки відсотків визначають так:

$$S = P \cdot \prod_{t=1}^{m} (1 + i_t)^{n_t}. \tag{8.5}$$

Якщо передбачена зміна відсоткової ставки, то майбутня вартість внеску через десять років за умови нарахування складних відсотків складе:

$$S = 1\,000 \cdot (1 + 0{,}1)^5 \cdot (1 + 0{,}105)^1 \cdot (1 + 0{,}11)^1 \cdot (1 + 0{,}115)^1 \cdot$$

$$\cdot (1 + 0{,}12)^1 \cdot (1 + 0{,}125)^1 = 2\,775{,}2 \text{ (грн)}.$$

Покроковий розрахунок нарощеної вартості депозиту за умови нарахування складних відсотків зі змінною ставкою наведений на рис. 8.11.

	A	B	C	D	E
27					
28	**2) Змінна відсоткова ставі**				
29	Щорічна зміна ставки, починаючи з 6-го року		0,005		
30–32	**Рік**	**Ставка відсотків**	**Стан рахунку на початку року, грн**	**Відсотки, накопичені протягом року, грн**	**Всього на рахунку на кінець року, грн**
33	1	=$B$4	=B3	=B3*B4	=C33+D33
34	2	=$B$4	=E33	=C34*0,1	=C34+D34
35	3	=$B$4	=E34	=C35*$B$4	=C35+D35
36	4	=$B$4	=E35	=C36*$B$4	=C36+D36
37	5	=$B$4	=E36	=C37*$B$4	=C37+D37
38	6	=B37+$C$29	=E37	=C38*0,105	=C38+D38
39	7	=B38+$C$29	=E38	=C39*0,11	=C39+D39
40	8	=B39+$C$29	=E39	=C40*0,115	=C40+D40
41	9	=B40+$C$29	=E40	=C41*0,12	=C41+D41
42	10	=B41+$C$29	=E41	=C42*0,125	=C42+D42
43					
44	Розрахунок нарощеної суми при нарахуванні простих відсотків за формулою (5), грн			=C33*((1+B4)^5)*(1+B38)*(1+B39)*(1+B40)*(1+B41)*(1+B42)	

Рис. 8.11. **Розрахунки майбутньої вартості внеску за умови нарахування складних відсотків зі змінною ставкою**

Результати виконання покрокового розрахунку нарощеної вартості наведені на рис. 8.12.

	A	B	C	D	E
27					
28	**2) Змінна відсоткова ставка**				
29	Щорічна зміна ставки, починаючи з 6-го року		0,5%		
30–32	**Рік**	**Ставка відсотків**	**Стан рахунку на початку року, грн**	**Відсотки, накопичені протягом року, грн**	**Всього на рахунку на кінець року, грн**
33	1	10%	1 000,00	100,00	1 100,00
34	2	10%	1 100,00	110,00	1 210,00
35	3	10%	1 210,00	121,00	1 331,00
36	4	10%	1 331,00	133,10	1 464,10
37	5	10%	1 464,10	146,41	1 610,51
38	6	10,5%	1 610,51	169,10	1 779,61
39	7	11%	1 779,61	195,76	1 975,37
40	8	11,5%	1 975,37	227,17	2 202,54
41	9	12%	2 202,54	264,30	2 466,84
42	10	12,5%	2 466,84	308,36	2 775,20
43					
44	Розрахунок нарощеної суми при нарахуванні простих відсотків за формулою (5), грн			2775,20	

Рис. 8.12. **Результати розрахунків за умови нарахування складних відсотків зі змінною ставкою**

2.3. Урахування інфляції. Нарощена сума з урахуванням інфляції за складними відсотками розраховується за формулою:

$$C = \frac{S}{J_p} = P \cdot \frac{(1+i)^n}{\left(1+\frac{h}{100}\right)^n} = P \cdot \left(\frac{1+i}{1+\frac{h}{100}}\right)^n .$$

Якщо темп інфляції постійний і складає 7 %, а номінальна нарощена сума за складними відсотками відома з попередніх розрахунків, то можна визначити нарощену суму з урахуванням її знецінення за формулою:

$$C = \frac{2\,593{,}74}{\left(1+\frac{7}{100}\right)^{10}} \approx 1\,318{,}53 \text{ (грн)}.$$

Якщо темп інфляції постійний і складає 15 %, то:

$$C = \frac{2\,593{,}74}{\left(1+\frac{15}{100}\right)^{10}} \approx 641{,}13 \text{ (грн)}.$$

Розрахунок майбутньої вартості депозитного внеску за умови нарахування складних відсотків з урахуванням рівня інфляції наведено на рис. 8.13.

	A	B	C	D
45				
46	**3) Майбутня вартість внеску з урахуванням інфляції**			
47	**Постійний щорічний темп інфляції**	**Рівень інфляції за 10 років**	**Майбутня вартість вкладу із врахуванням рівня інфляції, грн**	**Майбутня вартість вкладу без врахування рівня інфляції, грн**
48	0,07	=(1+A48)^B5	=D48/B48	=C21
49	0,15	=(1+A49)^B5	=D49/B49	=C21

Рис. 8.13. **Розрахунок майбутньої вартості депозиту за умови нарахування складних відсотків з урахуванням рівня інфляції**

Результати розрахунків наведені на рис. 8.14.

	A	B	C	D
45				
46	**3) Майбутня вартість внеску з урахуванням інфляції**			
47	**Постійний щорічний темп**	**Рівень інфляції за 10 років**	**Майбутня вартість вкладу із врахуванням рівня інфляції, грн**	**Майбутня вартість вкладу без врахування рівня інфляції, грн**
48	7%	196,72%	1318,53	2593,74
49	15%	404,56%	641,13	2593,74

Рис. 8.14. **Результати розрахунку майбутньої вартості депозиту за умови нарахування складних відсотків з урахуванням рівня інфляції**

3. Графіки. Побудовані графіки щорічної зміни нарощеної суми за простими та складними відсотками наведені на рис. 8.15.

Таким чином, нарощена сума за складними відсотками більше, ніж за простими; за змінними відсотками, що зростають, більше, ніж за постійними; чим довший термін, тим відчутніше різниця. В умовах інфляції зростання реальної нарощеної суми можливе тільки, якщо відсоткова ставка суттєво перевищує темп росту цін.

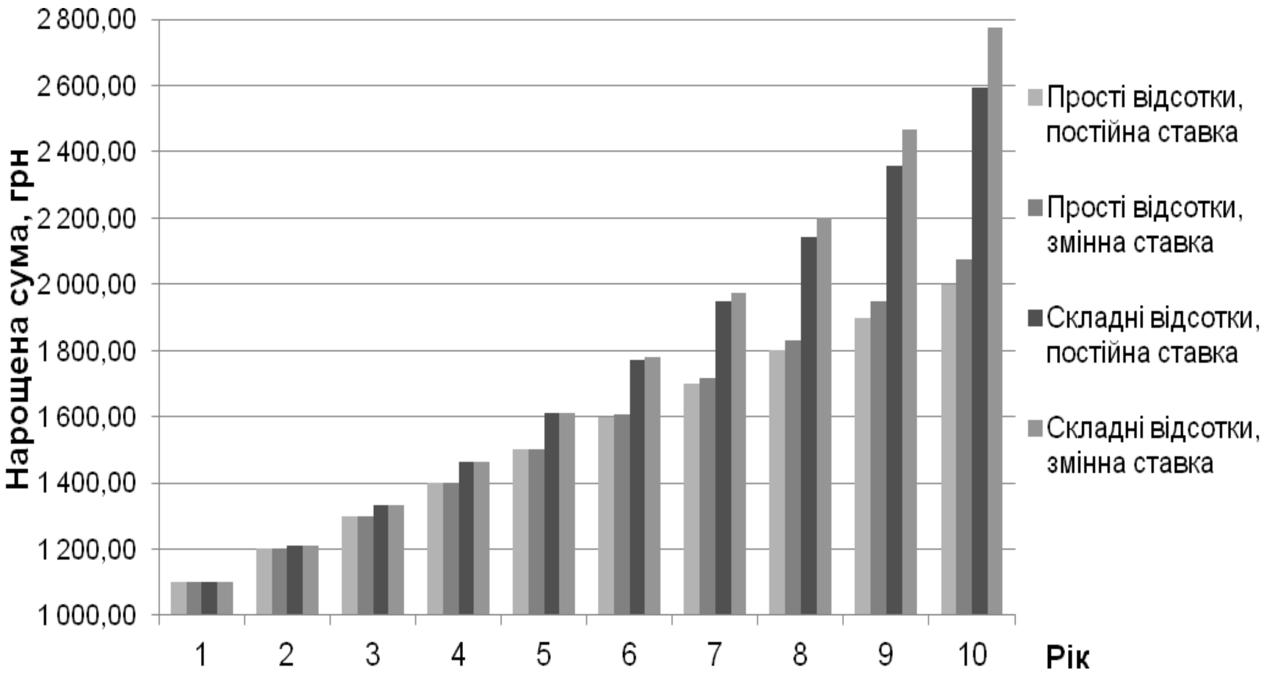


Рис. 8.15. **Динаміка зміни нарощеної суми за різних умов вкладу**

Лабораторна робота 2. Похідні відсоткові розрахунки

Мета – закріплення теоретичного та практичного матеріалу, набуття навиків проведення похідних відсоткових розрахунків.

Початкові дані. Депозит на суму 20 000 грн був відкритий 10 грудня 2015 року до 20 березня 2016 року включно під 15 % річних.

Необхідно:

1. Визначити нарощену величину депозиту за умови нарахування простих відсотків:

1.1. Трьома способами: 365/365, 365/360, 360/360 – у цілому за період та в кожному календарному році окремо.

1.2. Розрахувати суму нарахованих простих відсотків (365/365, 365/360), якщо 1 січня депозит поповнився на первинну суму.

2. Визначити нарощену величину депозиту за умови нарахування складних відсотків способом 365/365 у цілому за період і в кожному календарному році окремо.

3. Провести дисконтування:

3.1. Розрахувати первинну суму, якщо в початкових даних указані сума погашення та проста дисконтна ставка (365/365, 365/360).

3.2. Розрахувати первинну суму, якщо в початкових даних указані сума погашення та складна дисконтна ставка.

4. Розрахувати ефективну відсоткову ставку для 360 і 365 днів.

1. Нарахування простих відсотків за депозитом

1.1. Нарахування простих відсотків способами 365/365, 365/360, 360/360. Оскільки відсоткова ставка, як правило, встановлюється в розрахунку за рік, то, якщо термін позики менше року, необхідно визначити, яка частина річного відсотка сплачується кредиторові.

Розглянемо найбільш поширений в практиці випадок – з річними періодами нарахування. Очевидно, що термін позики необов'язково дорівнює цілому числу років. Виразимо термін n у вигляді дробу: $n = \frac{t}{K}$, де

t – число днів позики; K – число днів у році.

У цьому випадку формула (8.1) прийме вигляд:

$$S = P \cdot \left(1 + \frac{t}{K} i\right).$$

Під час розрахунку відсотків застосовують дві часові бази: K = 360 днів (12 місяців по 30 днів) або K = 365 (366) днів. Якщо K = 360, то отримують *звичайні* або *комерційні* відсотки, а за умови використання дійсної тривалості року (365, 366 днів) розраховують *точні* відсотки.

Число днів позики також можна визначати приблизно або точно. У першому випадку тривалість позики визначається з умови, згідно з якою будь-який місяць приймається дорівненим 30 дням. У свою чергу, точне число днів позики визначається шляхом підрахунку числа днів між датою видачі позики та датою її погашення.

Визначимо спочатку термін позики, приймаючи до уваги, що день відкриття та день закриття депозиту рахують за один день. Таким чином, *точне число днів* позики з 10 грудня 2015 року до 20 березня 2016 року складе $t = 22 + 31 + 29 + 20 - 1 = 101$ день. *Наближене число днів* складає $t = 21 + 30 + 30 + 20 - 1 = 100$ днів.

Відповідно до початкових даних $P = 20\ 000,\ i = 0{,}15$. Розрахунки майбутньої вартості внеску за умови нарахування простих відсотків за різними варіантами наведені у табл. 8.1.

Таблиця 8.1

Розрахунки нарощеної суми депозиту за умови нарахування простих відсотків

Варіант розрахунку	Формула розрахунку	Усього на рахунку в кінці терміну, грн
365/365	$S = 20\,000\left(1 + \frac{101}{365} \cdot 0{,}15\right)$	20 830,14
365/360	$S = 20\,000\left(1 + \frac{101}{360} \cdot 0{,}15\right)$	20 841,67
360/360	$S = 20\,000\left(1 + \frac{100}{360} \cdot 0{,}15\right)$	20 833,33

Нарахування простих відсотків способами 365/365, 365/360, 360/360 можна здійснити у *MS Excel* на новому листі, який назвемо "Похідні відсоткові розрахунки". Кінцевий робочий лист і використані формули наведені на рис. 8.16.

	A	B	C
1	**1. Нарахування простих відсотків за депозитом**		
2	**1.1. Нарахування простих відсотків способами 365/365, 365/360, 360/360**		
3	Вихідні дані		
4	P	20000	
5	i	0,15	
6			
7	Спосіб нарахування відсотків	Всього на рахунку в кінці строку, грн	
8	**365/365**	S=	=B4*(1+101/365*B5)
9	**365/360**	S=	=B4*(1+101/360*B5)
10	**360/360**	S=	=B4*(1+100/360*B5)

Рис. 8.16. **Розрахунок майбутньої вартості внеску за умови нарахування простих відсотків різними способами**

Результати виконання у *MS Excel* розрахунку майбутньої вартості за умови нарахування простих відсотків різними способами наведені на рис. 8.17.

Як видно з рис. 8.17, нарощена сума депозиту буде максимальною із застосуванням способу 365/360. Отже, під час відкриття банківського депозиту вкладнику доцільно обрати саме цей спосіб.

	A	B	C	D	E
1	**1. Нарахування простих відсотків за депозитом**				
2	**1.1. Нарахування простих відсотків способами 365/365, 365/360, 360/360**				
3	Вихідні дані				
4	P	20000			
5	i	0,15			
6					
7	Спосіб нарахування відсотків	Всього на рахунку в кінці строку, грн			
8	**365/365**	S=	20830,14		
9	**365/360**	S=	20841,67		
10	**360/360**	S=	20833,33		

Рис. 8.17. **Результати розрахунку майбутньої вартості внеску за умови нарахування простих відсотків різними способами**

Якщо загальний термін позики охоплює два суміжні календарні роки і є необхідність в розділенні суми відсотків між ними (наприклад, для визначення річних сум доходу), то загальна сума нарахованих простих відсотків складе суму відсотків, отриманих у кожному році:

$$I = I_1 + I_2 = Pn_1 i + Pn_2 i,$$

де n_1 і n_2 – частини терміну позики, що припадають на кожен календарний рік.

За варіантом розрахунку 365/365 відсотки складуть:

$$I_1 = 20\,000 \cdot \frac{22 - 0,5}{365} \cdot 0,15 = 176,71 \text{ (грн)};$$

$$I_2 = 20\,000 \cdot \frac{80 - 0,5}{365} \cdot 0,15 = 653,42 \text{ (грн)};$$

$$I = I_1 + I_2 = 176,71 + 653,42 = 830,14 \text{ (грн)}.$$

За варіантом розрахунку 365/360 відсотки складуть:

$$I_1 = 20\,000 \cdot \frac{22 - 0,5}{360} \cdot 0,15 = 179,17 \text{ (грн)};$$

$$I_2 = 20\,000 \cdot \frac{80 - 0,5}{360} \cdot 0,15 = 662,50 \text{ (грн)};$$

$$I = I_1 + I_2 = 179,17 + 662,50 = 841,67 \text{ (грн)}.$$

За варіантом розрахунку 360/360 відсотки складуть:

$$I_1 = 20\,000 \cdot \frac{21 - 0{,}5}{360} \cdot 0{,}15 = 170{,}83 \text{ (грн)};$$
$$I_2 = 20\,000 \cdot \frac{80 - 0{,}5}{360} \cdot 0{,}15 = 662{,}50 \text{ (грн)};$$
$$I = I_1 + I_2 = 170{,}83 + 662{,}50 = \ 833{,}33 \text{ (грн)}.$$

Розрахунок у *MS Excel* суми відсотків за депозитом у кожному календарному році окремо наведено на рис. 8.18.

	A	B
13	**Відсотки в кожному календарному періоді, грн**	
14	**365/365**	
15	I1	=$B$4*(22-0,5)/365*$B$5
16	I2	=$B$4*(80-0,5)/365*$B$5
17	**I**	**=СУММ(B15:B16)**
18		
19	**365/360**	
20	I1	=$B$4*(22-0,5)/360*$B$5
21	I2	=$B$4*(80-0,5)/360*$B$5
22	**I**	**=СУММ(B20:B21)**
23		
24	**365/360**	
25	I1	=$B$4*(21-0,5)/360*$B$5
26	I2	=$B$4*(80-0,5)/360*$B$5
27	**I**	**=СУММ(B25:B26)**

Рис. 8.18. **Розрахунок суми відсотків за депозитом у кожному календарному році окремо**

Результати розрахунку суми відсотків за депозитом у кожному календарному році окремо наведено на рис. 8.19.

	A	B	C
13	**Відсотки в кожному календарному періоді, грн**		
14	**365/365**		
15	I1	176,71	
16	I2	653,42	
17	**I**	**830,14**	
18			
19	**365/360**		
20	I1	179,17	
21	I2	662,50	
22	**I**	**841,67**	
23			
24	**365/360**		
25	I1	170,83	
26	I2	662,50	
27	**I**	**833,33**	

Рис. 8.19. **Результати розрахунку суми відсотків за депозитом у кожному календарному році окремо**

1.2. Поповнення депозиту. Якщо 1 січня депозит поповнився на первинну суму, то зміни у сумі нарахованих відсотків відбудуться тільки у другому календарному році.

За варіантом розрахунку 365/365 відсотки складуть:

$$I_2 = 40\,000 \cdot \frac{80 - 0{,}5}{365} \cdot 0{,}15 = 1\,306{,}85 \text{ (грн)};$$
$$I = I_1 + I_2 = 176{,}71 + 1\,306{,}85 = 1\,483{,}56 \text{ (грн)}.$$

За варіантом розрахунку 365/360 відсотки складуть:

$$I_2 = 40\,000 \cdot \frac{80 - 0{,}5}{360} \cdot 0{,}15 = 1\,325{,}00 \text{ (грн)};$$
$$I = I_1 + I_2 = 179{,}17 + 1\,325{,}00 = 1\,504{,}17 \text{ (грн)}.$$

Розрахунок у *MS Excel* суми відсотків за депозитом, якщо 1 січня депозит поповнився на первинну суму, наведено на рис. 8.20.

	A	B	C
28			
29	Спосіб нарахування відсотків	Сума відсотків, грн	
30	365/365	I=	=$B$4*(22-0,5)/365*$B$5+40000*(80-0,5)/365*$B$5
31	365/360	I=	=$B$4*(22-0,5)/360*$B$5+40000*(80-0,5)/360*$B$5

Рис. 8.20. **Розрахунок суми відсотків за депозитом за умови його поповнення**

Результати розрахунку суми відсотків за депозитом, якщо 1 січня депозит поповнився на первинну суму, наведено на рис. 8.21.

	A	B	C
28			
29	Спосіб нарахування відсотків	Сума відсотків, грн	
30	365/365	I=	1483,56
31	365/360	I=	1504,17

Рис. 8.21. **Результати розрахунку суми відсотків за депозитом за умови його поповнення**

2. Нарахування складних відсотків за депозитом

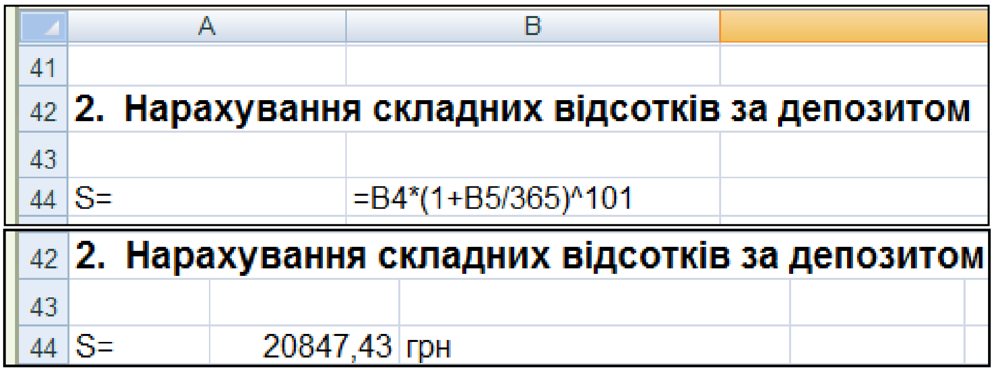
У випадку визначення нарощеної величини депозиту за умови нарахування складних відсотків у цілому за період менший одного року формула має вигляд:

$$S = P\left(1+\frac{i}{K}\right)^{t}.$$

Відповідно до початкових даних $P = 20\ 000$, $i = 0{,}15$, варіант розрахунку прийнятий 365/365. Тоді майбутня вартість внеску складе:

$$S = 20\ 000\left(1+\frac{0{,}15}{365}\right)^{101} = 20\ 847{,}43\ (\text{грн}).$$

Розрахунок у *MS Excel* нарощеної величини депозиту за умови нарахування складних відсотків у цілому за період наведено на рис. 8.22.



	A	B	
41			
42	2. Нарахування складних відсотків за депозитом		
43			
44	S=	=B4*(1+B5/365)^101	

42	2. Нарахування складних відсотків за депозитом			
43				
44	S=	20847,43	грн	

Рис. 8.22. **Розрахунок і результат розрахунку нарощеної величини депозиту за умови нарахування складних відсотків**

Відсотки за кожним з періодів у випадку нарахування складних відсотків визначають за формулами:

$$I_1 = P\left(\left(1+\frac{i}{K}\right)^{t_1} - 1\right); \quad I_2 = P\left(\left(1+\frac{i}{K}\right)^{t} - \left(1+\frac{i}{K}\right)^{t_1}\right),$$

де t_1 – кількість днів вкладу в першому календарному році.

Відсотки за кожним з періодів для варіанту 365/365 і нарощена сума складуть:

$$I_1 = 20\ 000\left(\left(1+\frac{0{,}15}{365}\right)^{22-0{,}5} - 1\right) = 177{,}46\ (\text{грн});$$

$$I_2 = 20\,000\left(\left(1+\frac{0{,}15}{365}\right)^{101} - \left(1+\frac{0{,}15}{365}\right)^{22-0{,}5}\right) = 669{,}97\ (\text{грн});$$
$$I = I_1 + I_2 = 847{,}43\ (\text{грн});$$
$$S = P + I = 20\,000 + 847{,}43 = 20\,847{,}43\ (\text{грн}).$$

Розрахунок у *MS Excel* суми складних відсотків за депозитом у кожному календарному році окремо наведено на рис. 8.23 – 8.24.

	A	B
155	**Сума складних відсотків у кожному календарному періоді**	
156	I1=	=B4*(((1+B5/365)^(22-0,5))
157	I2=	=B4*((1+B5/365)^101-(1+0,
158	I=	=СУММ(B156:B157)

Рис. 8.23. **Розрахунок суми складних відсотків за депозитом у кожному календарному році окремо**

	A	B	C	D	E
155	**Сума складних відсотків у кожному календарному періоді, грн**				
156	I1=	177,46			
157	I2=	669,97			
158	I=	847,43			

Рис. 8.24. **Результати розрахунку суми складних відсотків за депозитом у кожному календарному році окремо**

3. Дисконтування

3.1. Дисконтування за простою дисконтною ставкою. Сутність операції полягає в такому: відсотки нараховуються на початку розрахункового періоду; за базу (100 %) береться сума погашення боргу, тобто банк утримує авансові відсотки під час видачі кредиту (або відсотки за депозитом виплачуються в момент відкриття депозитного рахунку). У цьому випадку застосовується облікова ставка d (це *банківський облік*).

Розмір дисконту, або суми обліку, очевидно дорівнений $S \cdot n \cdot d$; якщо d – річна облікова ставка, то n вимірюється в роках. Тоді:

$$P = S - Snd = S(1 - nd). \tag{8.6}$$

Дисконтний множник тут дорівнює $(1 - nd)$. З формули (8.6) витікає, що за умови $n > 1/d$ величина дисконтного множника і, отже, сума P стане від'ємною. Інакше кажучи, за умови відносно великого терміну зобов'язання облік може призвести до нульової або навіть від'ємної суми P. Наприклад, якщо $d = 20\ \%$, то вже п'ятирічний термін достатній для того, щоб позичальник нічого не отримав під час обліку зобов'язання.

Облік за допомогою облікової ставки найчастіше здійснюється за часовою базою K = 360 днів, число днів позики зазвичай береться точним.

Якщо вважати, що в початкових даних указані сума погашення та проста дисконтна ставка, то розрахувати первинну суму можна у такий спосіб.

За варіантом розрахунку 365/365 первинна сума становить:

$$P = S\left(1 - \frac{t}{K}d\right) = 20\,000\left(1 - \frac{101}{365} \cdot 0{,}15\right) = 19\,169{,}86\ (\text{грн}).$$

За варіантом розрахунку 365/360 первинна сума становить:

$$P = 20\,000\left(1 - \frac{101}{360} \cdot 0{,}15\right) = 19\,158{,}33\ (\text{грн}).$$

Розрахунок у *MS Excel* первинної суми депозиту за простою дисконтною ставкою наведено на рис. 8.25 – 8.26.

	A	B	
33	**Дисконтування за простою дисконтною ставкою**		
34	365/365		
35	P=	=$B$4*(1-101/365*$B$5)	грн
36	365/360		
37	P=	=$B$4*(1-101/360*$B$5)	грн
38			

Рис. 8.25. **Розрахунок первинної суми депозиту за простою дисконтною ставкою**

	A	B	C	
33	**Дисконтування за простою дисконтною ставкою**			
34	365/365			
35	P=	19169,86	грн	
36	365/360			
37	P=	19158,33	грн	

Рис. 8.26. **Результати розрахунку первинної суми депозиту за простою дисконтною ставкою**

3.2. Дисконтування за складною дисконтною ставкою. У практиці облікових операцій іноді застосовують *складну облікову ставку.*

Якщо вважати, що в початкових даних указані сума погашення та складна дисконтна ставка, то розрахувати первинну суму за умови дисконтування один раз на рік (K = 365) можна так:

$$P = S(1-d)^{\frac{t}{K}} = 20\,000(1-0{,}15)^{\frac{101}{365}} = 19\,120{,}50\ (\text{грн}).$$

За умови щоденного дисконтування:

$$P = S\left(1-\frac{f}{K}\right)^{t} = 20\,000\left(1-\frac{0{,}15}{365}\right)^{101} = 19\,186{,}69\ (\text{грн}).$$

Розрахунок у *MS Excel* первинної суми депозиту за складною дисконтною ставкою наведено на рис. 8.27.

	A	B	C	D
164	**Дисконтування за складною дисконтною ставкою**			
165	1 раз на рік	P=	=B4*(1-B5)^(101/365)	грн
166	щоденно	P=	=B4*(1-B5/365)^101	грн

	A	B	C	D	E	F
164	**Дисконтування за складною дисконтною ставкою**					
165	1 раз на рік	P=	19120,50	грн		
166	щоденно	P=	19186,69	грн		

Рис. 8.27. **Розрахунок і результати розрахунку первинної суми депозиту за складною дисконтною ставкою**

4. Ефективна відсоткова ставка

Дійсна або *ефективна ставка відсотка* вимірює той реальний відносний дохід, який отримують у цілому за рік. Інакше кажучи, ефективна ставка – це річна ставка складних відсотків, яка дає той же результат, що і m*-разове* нарахування відсотків за ставкою $j/_{m}$.

$$i = \left(1+\frac{j}{m}\right)^{m} - 1.$$

Ефективна ставка за m > 1 більше номінальної. *Обидві ставки еквівалентні у фінансовому відношенні.*

Примітка: У середовищі *Excel* є можливість розрахунку ефективної відсоткової ставки за умови нарахування складних відсотків за допомогою вбудованої функції *ЭФФЕКТ*, яка має такий синтаксис:

ЭФФЕКТ(номинальная_ставка; кол_пер),

де *номинальная_ставка* – номінальна річна відсоткова ставка;

кол_пер – кількість періодів в році, за які нараховуються складні відсотки.

І навпаки, знаючи ефективну ставку, можна розрахувати номінальну відсоткову ставку за допомогою вбудованої функції *НОМИНАЛ*, яка має такий синтаксис:

НОМИНАЛ(эффект_ставка; кол_пер),

де *эффект_ставка* – фактична відсоткова ставка;

кол_пер – кількість періодів в році, за які нараховуються складні відсотки.

За умови нарахування відсотків протягом 365 і 360 днів ефективні ставки складуть:

$$i = \left(1 + \frac{0{,}15}{365}\right)^{365} - 1 = 0{,}1618; \quad i = \left(1 + \frac{0{,}15}{360}\right)^{360} - 1 = 0{,}1618.$$

Розрахунок у *MS Excel* ефективних ставок за умови нарахування відсотків протягом 365 і 360 днів наведено на рис. 8.28 – 8.29.

	A	B	C	D	E
161	Ефективні ставки				
162	Кількість періодів в році, за які нараховуються складні відсотки	Ефективна ставка за формулою		Ефективна ставка за функцією ЭФФЕКТ	Номінальна ставка за функцією НОМИНАЛ
163	365	i=	=((1+$B$5/365)^365)-1	=ЭФФЕКТ(0,15;A163)	=НОМИНАЛ(C163;A163)
164	360	i=	=((1+$B$5/360)^360)-1	=ЭФФЕКТ(0,15;A164)	=НОМИНАЛ(C164;A164)

Рис. 8.28. **Розрахунок ефективних ставок за умови нарахування відсотків протягом 365 і 360 днів**

	A	B	C	D	E
161	Ефективні ставки				
162	Кількість періодів в році, за які нараховують ся складні відсотки	Ефективна ставка за формулою		Ефективна ставка за функцією ЭФФЕКТ	Номінальна ставка за функцією НОМИНАЛ
163	365	i=	0,1618	0,1618	0,15
164	360	i=	0,1618	0,1618	0,15

Рис. 8.29. **Результати розрахунку ефективних ставок за умови нарахування відсотків протягом 365 і 360 днів**

Як бачимо, ефективні ставки рівні для обох варіантів нарахування та перевищують номінальну ставку.

Лабораторна робота 3
Розрахунок еквівалентних параметрів фінансових операцій

Мета – закріплення теоретичного та практичного матеріалу, набуття навиків розрахунку еквівалентних параметрів фінансових операцій.

1. Початкові дані. Депозитний внесок величиною 10 тис. грн розміщений в банк на шість років під 10 % річних.

Необхідно:

1.1. Розрахувати майбутню вартість внеску за умови нарахування простих відсотків один раз на рік, визначити еквівалентну облікову ставку.

1.2. Визначити еквівалентну складну ставку, якщо складні відсотки нараховуються один раз на рік, щокварталу, щомісячно.

1.3. Розрахувати майбутню вартість внеску з нарахуванням простих відсотків за умови, що депозит відкритий 1 лютого 2016 року до 14 травня включно (365/365), визначити еквівалентну облікову ставку для К=360, 365.

1.4. Розрахувати середню відсоткову ставку для простих відсотків, якщо був відкритий депозит на таку ж суму через рік під 15 % річних з однаковим терміном погашення, а також якщо був відкритий депозит на суму 5 тис. грн через два роки під 15 % річних з однаковим терміном погашення.

1.5. Розрахувати середню ставку складних відсотків, якщо перші два роки ставка 10 %, а кожен наступний рік вона підвищується на 1 %.

2. Початкові дані. Філія комерційного банку видала протягом року п'ять позик двом фірмам ("Силікат" і "Дельта"). Дані наведені в табл. 8.2.

Таблиця 8.2

Вихідні дані

Квартал	Розмір позики, тис. грн	Термін позики, місяців
1	2	3
Фірма "Силікат"		
I	250	6
II	200	8
IV	500	3

Закінчення табл. 8.2

1	2	3
Фірма "Дельта"		
II	600	2
III	450	4

Необхідно:

2.1. Визначити середній розмір позики, отриманої кожною фірмою, та всіх позик, виданих банком.

2.2. Визначити середній термін користування позиками (за умови їх безперервної оборотності).

2.3. Визначити середнє число оборотів позики за рік.

2.4. Визначити розмір консолідованого платежу для кожної фірми, за умови, що нараховуються прості відсотки за ставкою 10 % річних, термін погашення консолідованого платежу – 12 міс.

1. Депозитний внесок величиною 10 тис. грн розміщений в банк на шість років під 10 % річних.

1.1. Еквівалентні прості ставки. Ставки, що забезпечують рівноцінність фінансових наслідків, називають *еквівалентними, або релятивними (відносними).* Рівноцінність фінансових наслідків може бути забезпечена в тому випадку, якщо спостерігається рівність множників нарощування (дисконтних множників).

Визначимо спочатку майбутню вартість внеску за умови нарахування простих відсотків один раз на рік, якщо $P = 10\ 000,\ n = 6,\ i = 0{,}1$:

$$S = 10\ 000(1 + 6 \cdot 0{,}1) = 16\ 000\ (\text{грн}).$$

Еквівалентна проста облікова ставка складе:

$$d = \frac{i}{1 + ni} = \frac{0{,}1}{1 + 6 \cdot 0{,}1} = 0{,}0625.$$

Визначимо майбутню вартість внеску через облікову ставку:

$$S = P\frac{1}{1 - nd} = 10\ 000 \cdot \frac{1}{1 - 6 \cdot 0{,}0625} = 16\ 000\ (\text{грн}).$$

Розрахунок у *MS Excel* еквівалентних простих ставок наведено на рис. 8.30; 8.31.

	A	B	
4	**Вихідні дані**		
5	P=	10000	грн
6	n=	6	років
7	i=	0,1	
8			
9	**Еквівалентні прості ставки**		
10	S прост=	=B5*(1+B6*B7)	
11	d=	=B7/(1+B6*B7)	
12	S для d=	=B5*(1/(1-B6*B11))	

Рис. 8.30. **Розрахунок еквівалентної облікової ставки за умови нарахування простих відсотків**

	A	B	C
4	**Вихідні дані**		
5	P=	10000	грн
6	n=	6	років
7	i=	0,1	
8			
9	**Еквівалентні прості ставки**		
10	S прост=	16000	
11	d=	0,0625	
12	S для d=	16000	

Рис. 8.31. **Результати розрахунку еквівалентної облікової ставки за умови нарахування простих відсотків**

Як бачимо, результати розрахунків співпадають.

1.2. Еквівалентні складні ставки. Визначимо еквівалентну складну відсоткову ставку:

$$i_C = (1 + ni_\Pi)^{\frac{1}{n}} - 1 = (1 + 6 \cdot 0{,}1)^{\frac{1}{6}} - 1 \approx 0{,}08148.$$

Визначимо еквівалентну складну відсоткову ставку за умови, що відсотки нараховуються щокварталу та щомісяця:

$$j = m\left((1 + ni_\Pi)^{\frac{1}{nm}} - 1\right) = 4\left((1 + 6 \cdot 0{,}1)^{\frac{1}{6 \cdot 4}} - 1\right) \approx 0{,}07911;$$

$$j = m\left((1 + ni_\Pi)^{\frac{1}{nm}} - 1\right) = 12\left((1 + 6 \cdot 0{,}1)^{\frac{1}{6 \cdot 12}} - 1\right) \approx 0{,}07859.$$

Розрахунок у *MS Excel* еквівалентних ставок складних відсотків наведено на рис. 8.32; 8.33.

	A	B
13		
14	**Еквівалентні складні ставки**	
15	ic=	=(1+B6*B7)^(1/B6)-1
16	S для ic=	=B5*(1+B15)^B6
17	j кварт =	=4*((1+$B$6*$B$7)^(1/(4*$B$6))-1)
18	S	=$B$5*(1+$B$17/4)^(4*$B$6)
19	j щоміс. =	=12*((1+$B$6*$B$7)^(1/(12*$B$6))-1)
20	S	=$B$5*(1+$B$19/12)^(12*$B$6)

Рис. 8.32. **Розрахунок еквівалентних ставок складних відсотків**

	A	B
13		
14	**Еквівалентні складні ставки**	
15	ic=	0,08148
16	S для ic=	16000
17	j кварт =	0,07911
18	S	16000
19	j щоміс. =	0,07859
20	S	16000

Рис. 8.33. **Результати розрахунку еквівалентних ставок складних відсотків**

1.3. Еквівалентні ставки для короткострокових операцій. Визначимо майбутню вартість внеску за умови нарахування простих відсотків за умови, що депозит відкритий 1 лютого 2016 року по 14 травня включно (365/365):

$$S = 10\,000(1 + 103/365 \cdot 0{,}1) \approx 10\,282{,}19 \text{ (грн)}.$$

Визначимо еквівалентні прості облікові ставки для K = 365, K = 360, за умови, що нарахування відсотків проводиться за K = 365, тобто для двох варіантів: коли часові бази дорівнені та коли вони різні:

$$d_{\Pi} = \frac{365 \cdot i_{\Pi}}{365 + t \cdot i_{\Pi}} = \frac{365 \cdot 0{,}1}{365 + 103 \cdot 0{,}1} = 0{,}09726;$$
$$d_{\Pi} = \frac{360 \cdot i_{\Pi}}{365 + t \cdot i_{\Pi}} = \frac{360 \cdot 0{,}1}{365 + 103 \cdot 0{,}1} = 0{,}09592.$$

Визначимо майбутню вартість внеску через розраховані прості облікові ставки:

$$S = P\frac{1}{1 - t/365\,d} = 10\,000\frac{1}{1 - 103/365 \cdot 0{,}09726} \approx 10\,282{,}19 \text{ (грн)};$$

$$S = P\frac{1}{1 - t/365\,d} = 10\,000\frac{1}{1 - 103/365 \cdot 0{,}09592} \approx 10\,282{,}19\ (\text{грн}).$$

Розрахунок у *MS Excel* еквівалентних ставок для короткострокових операцій наведено на рис. 8.34; 8.35.

	A	B	C
25	Строк депозиту, днів		=29+31+30+14-1
26	S=	=B5*(1+C25/365*B7)	
27	d (365)=	=365*B7/(365+C25*B7)	
28	S=	=B5*1/(1-103/365*B27)	
29	d (360)=	=360*B7/(365+C25*B7)	
30	S=	=B5*1/(1-C25/360*B29)	

Рис. 8.34. **Розрахунок еквівалентних ставок для короткострокового депозиту**

	A	B	C
25	Строк депозиту, днів		103
26	S=	10282,19	
27	d (365)=	0,09726	
28	S=	10282,19	
29	d (360)=	0,09592	
30	S=	10282,19	

Рис. 8.35. **Результати розрахунку еквівалентних ставок для короткострокового депозиту**

Як бачимо, результати розрахунків співпадають.

1.4. Середні прості відсоткові ставки. У випадку, якщо суми отриманих кредитів рівні між собою, то середня відсоткова ставка (відсотки прості) розраховується за формулою середньої арифметичної зваженої, де вагами слугують часові періоди, протягом яких діяла дана ставка. Тобто, якщо був відкритий депозит на таку ж суму через рік під 15 % річних з однаковим терміном погашення, то *середня проста відсоткова ставка* складе:

$$\bar{i} = \frac{i_1 n_1 + i_2 n_2}{n_1 + n_2} = \frac{0{,}1 \cdot 6 + 0{,}15 \cdot 5}{6 + 5} \approx 0{,}12273$$

Визначимо нарощену суму окремо за кожним депозитом і в цілому:

$$S_1 = 16\,000\ (\text{грн});\quad S_2 = 10\,000 \cdot (1 + 5 \cdot 0{,}15) = 17\,500\ (\text{грн})$$
$$S = S_1 + S_2 = 33\,500\ (\text{грн})$$

Визначимо нарощену суму окремо за кожним депозитом і в цілому через середню відсоткову ставку:

$$S_1 = 10\,000 \cdot (1 + 6 \cdot 0{,}12273) \approx 17\,363{,}64 \text{ (грн)};$$
$$S_2 = 10\,000 \cdot (1 + 5 \cdot 0{,}12273) \approx 16\,136{,}36 \text{ (грн)};$$
$$S = S_1 + S_2 = 33\,500 \text{ (грн)}.$$

Розрахунок у *MS Excel* середньої простої відсоткової ставки наведено на рис. 8.36; 8.37.

	A	B	C
34			
35	**Показник**	**Значення**	**Одиниці виміру**
36	ісередн=	=(0,1*6+0,15*5)/11	процентна ставка в сотих долях
37	S1	=B5*(1+B6*B7)	грн
38	S2	=B5*(1+5*0,15)	грн
39	S	=B37+B38	грн
40	S1*	=B5*(1+B6*B36)	грн
41	S2*	=B5*(1+5*B36)	грн
42	S*	=B40+B41	грн

Рис. 8.36. **Розрахунок середньої простої відсоткової ставки**

	A	B	C
34			
35	**Показник**	**Значення**	**Одиниці виміру**
36	ісередн=	0,12273	процентна ставка в сотих долях
37	S1	16000	грн
38	S2	17500	грн
39	S	33500	грн
40	S1*	17363,64	грн
41	S2*	16136,36	грн
42	S*	33500	грн

Рис. 8.37. **Результати розрахунку середньої простої відсоткової ставки**

Як бачимо, результати розрахунків співпадають.

Під час відкриття різних за величиною депозитів, виданих під різні відсоткові ставки, середня ставка також обчислюється за формулою середньої арифметичної, але вагами в цьому випадку будуть добутки сум отриманих депозитів на терміни, на які вони відкриті. Тобто, якщо був відкритий депозит на суму 5 тис. грн через два роки під 15 % річних з однаковим терміном погашення, то *середня проста відсоткова ставка* складе:

$$\bar{\imath} = \frac{i_1 n_1 P_1 + i_2 n_2 P_2}{n_1 P_1 + n_2 P_2} = \frac{0{,}1 \cdot 6 \cdot 10\,000 + 0{,}15 \cdot 4 \cdot 5\,000}{6 \cdot 10\,000 + 4 \cdot 5\,000} = 0{,}1125.$$

Визначимо нарощену суму окремо за кожним депозитом і в цілому:

$$S_1 = 16\,000\ (\text{грн}); \quad S_2 = 5\,000 \cdot (1 + 4 \cdot 0{,}15) = 8\,000\ (\text{грн});$$
$$S = S_1 + S_2 = 24\,000\ (\text{грн}).$$

Визначимо нарощену суму окремо за кожним депозитом і в цілому через середню відсоткову ставку:

$$S_1 = 10\,000 \cdot (1 + 6 \cdot 0{,}1125) = 16\,750{,}00\ (\text{грн});$$
$$S_2 = 5\,000 \cdot (1 + 4 \cdot 0{,}1125) = 7\,250{,}00\ (\text{грн});$$
$$S = S_1 + S_2 = 24\,000\ (\text{грн}).$$

Розрахунок у *MS Excel* середньої простої відсоткової ставки для різних за величиною депозитів наведено на рис. 8.38; 8.39.

	A	B	C
48	**Показник**	**Значення**	**Одиниці виміру**
49	ісередн=	=(B7*B6*B5+0,15*4*5000)/(B6*B5+4*5000)	процентна ставка в сотих долях
50	S1	=B5*(1+B6*B7)	грн
51	S2	=5000*(1+4*0,15)	грн
52	**S**	**=B50+B51**	грн
53	S1*	=B5*(1+B6*B49)	грн
54	S2*	=5000*(1+4*B49)	грн
55	**S***	**=B53+B54**	грн

Рис. 8.38. **Розрахунок середньої простої відсоткової ставки для різних за величиною депозитів**

	A	B	C
48	**Показник**	**Значення**	**Одиниці виміру**
49	ісередн=	0,1125	процентна ставка в сотих долях
50	S1	16000	грн
51	S2	8000	грн
52	**S**	**24000**	грн
53	S1*	16750	грн
54	S2*	7250	грн
55	**S***	**24000**	грн

Рис. 8.39. **Результати розрахунку середньої простої відсоткової ставки для різних за величиною депозитів**

1.5. Середня ставка складних відсотків. Середня ставка за складними відсотками визначається за формулою:

$$\bar{\iota}_c = [(1 + i_1)^{n_1} \cdot (1 + i_2)^{n_2} \cdot \ldots \cdot (1 + i_k)^{n_k}]^{\frac{1}{N}} - 1,$$

де $i_1, i_2, \ldots, i_k$ – ставки складних відсотків;

$n_1, n_2, \ldots, n_k$ – часові інтервали, протягом яких нарахування проводилося за складними відсотками;

$N = n_1 + n_2 + \ldots + n_k$.

Якщо перші два роки ставка 10 %, а кожен наступний рік вона підвищується на 1 %, то середня ставка складних відсотків складе:

$$\bar{\iota}_c = [(1 + 0{,}1)^2 \cdot (1 + 0{,}11)^1 \cdot (1 + 0{,}12)^1 \cdot (1 + 0{,}13)^1 \cdot (1 + 0{,}14)^1]^{\frac{1}{6}} - 1 \approx$$
$$\approx 0{,}1166.$$

Визначимо нарощену суму депозиту через змінні ставки складних відсотків і через середню складну ставку відсотків:

$$S = 10\,000 \cdot ((1{,}1)^2 \cdot (1{,}11)^1 \cdot (1{,}12)^1 \cdot (1{,}13)^1 \cdot (1{,}14)^1) \approx 19\,378{,}03 \text{ (грн)};$$

$$S = 10\,000 \cdot (1 + 0{,}1166)^6 \approx 19\,378{,}03 \text{ (грн)}.$$

Розрахунок у *MS Excel* середньої ставки складних відсотків наведено на рис. 8.40; 8.41

	A	B	C
59			
60	**Показник**	**Значення**	**Одиниці виміру**
61	iсередн=	=(1,1^2*1,11*1,12*1,13*1,14)^(1/B6)-1	процентна ставка в сотих долях
62	S=	=B5*(1,1^2)*1,11*1,12*1,13*1,14	грн
63	S*=	=B5*(1+B61)^B6	грн

Рис. 8.40. **Розрахунок середньої ставки складних відсотків**

	A	B	C
59			
60	**Показник**	**Значення**	**Одиниці виміру**
61	iсередн=	0,1166	процентна ставка в сотих долях
62	S=	19378,03	грн
63	S*=	19378,03	грн

Рис. 8.41. **Результати розрахунку середньої ставки складних відсотків**

Як бачимо, результати розрахунків співпадають.

2. Філія комерційного банку видала протягом року п'ять позик двом фірмам ("Силікат" і "Дельта"). Дані наведені в табл. 8.2.

2.1. Середній розмір позики. Середній розмір однієї позики ($\bar{P}$) без урахування кількості оборотів за рік обчислюється за формулою середньої арифметичної зваженої.

Визначимо середній розмір позики, отриманої фірмою "Силікат" ($\bar{P}_С$) і фірмою "Дельта" ($\bar{P}_Д$), а також усіх позик, виданих банком:

$$\bar{P}_С = \frac{\sum P_j \cdot n_j}{\sum n_j} = \frac{250 \cdot 6 + 200 \cdot 8 + 500 \cdot 3}{6 + 8 + 3} \approx 270{,}58824 \text{ (тис. грн)};$$

$$\bar{P}_Д = \frac{\sum P_j \cdot n_j}{\sum n_j} = \frac{600 \cdot 2 + 450 \cdot 4}{2 + 4} = 500{,}00 \text{ (тис. грн)};$$

$$\bar{P} = \frac{250 \cdot 6 + 200 \cdot 8 + 500 \cdot 3 + 600 \cdot 2 + 450 \cdot 4}{6 + 8 + 3 + 2 + 4} \approx 330{,}43478 \text{ (тис. грн)}.$$

Розрахунок у *MS Excel* середнього розміру позики для кожної фірми та середнього розміру позик, виданих банком усім фірмам, наведено на рис. 8.42; 8.43

	A	B	C
69	Вихідні дані		
70	№ ссуды	Розмір позики P, тис.грн.	Термін позики n, місяців
71		Фирма «Силікат»	
72	1	250	6
73	2	200	8
74	3	500	3
75	Сума	=СУММ(B72:B74)	-
76		Фірма «Дельта»	
77	4	600	2
78	5	450	4
79	Сума	=СУММ(B77:B78)	-
80	Всьго	=B75+B79	
81			
82	**Середній розмір позики**		
83	Фірма «Силікат»		
84	P середн.=	=(B72*C72+B73*C73+B74*C74)/(C72+C73+C74)	тис. грн
85			
86	Фірма «Дельта»		
87	P середн.=	=(B77*C77+B78*C78)/(C77+C78)	тис. грн
88			
89	Середній розмір всіх позик, виданих банком		
90	P средн.=	=(B72*C72+B73*C73+B74*C74+B77*C77+B78*C78)/(C72+C73+C74+C77+C78)	тис. грн

Рис. 8.42. **Розрахунок середнього розміру позики**

70	№ ссуды	Розмір позики P, тис.грн.	Термін позики n, місяців
71	Фирма «Силікат»		
72	1	250	6
73	2	200	8
74	3	500	3
75	Сума	950	-
76	Фірма «Дельта»		
77	4	600	2
78	5	450	4
79	Сума	1050	-
80	Всього	2000	
81			
82	**Середній розмір позики**		
83	Фірма «Силікат»		
84	P середн.=	270,5882	тис. грн
85			
86	Фірма «Дельта»		
87	P середн.=	500	тис. грн
88			
89	Середній розмір всіх позик, виданих банком		
90	P средн.=	330,4348	тис. грн

Рис. 8.43. **Результати розрахунку середнього розміру позики**

2.2. Середній термін користування позиками (за умови їх безперервної оборотності), тобто середній час, протягом якого всі позики обертаються один раз, визначається так: $\bar{n} = \frac{\sum P_j}{\sum \frac{P_j}{n_j}}$.

Визначимо середній термін користування позиками для фірми "Силікат" ($\bar{n}_{\text{С}}$) і фірми "Дельта" ($\bar{n}_{\text{Д}}$), а також для банку в цілому:

$$\bar{n}_{\text{С}} = \frac{250+200+500}{\frac{250}{6}+\frac{200}{8}+\frac{500}{3}} \approx 4{,}071\ (\text{міс.});\quad \bar{n}_{\text{Д}} = \frac{600+450}{\frac{600}{2}+\frac{450}{4}} \approx 2{,}545\ (\text{міс.});$$

$$\bar{n} = \frac{250+200+500+600+450}{\frac{250}{6}+\frac{200}{8}+\frac{500}{3}+\frac{600}{2}+\frac{450}{4}} \approx 3{,}097\ (\text{міс}).$$

Розрахунок у *MS Excel* середнього терміну користування позиками для кожної фірми окремо та для обох фірм наведено на рис. 8.44; 8.45.

	A	B	
93	**Середній термін користування позиками** (за умови їх безперервної оборотності),		
94	тобто середній час, протягом якого усі позики обертаються один раз.		
95			
96	Фірма «Силікат»		
97	n середн =	=B75/(B72/C72+B73/C73+B74/C74)	міс.
98			
99	Фірма «Дельта»		
100	n середн =	=B79/(B77/C77+B78/C78)	міс.
101			
102	Для обох фірм		
103	n середн =	=B80/(B72/C72+B73/C73+B74/C74+B77/C77+B78/C78)	міс.

Рис. 8.44. **Розрахунок середнього терміну користування позиками**

96	Фірма «Силікат»		
97	n середн =	4,071	міс.
98			
99	Фірма «Дельта»		
100	n середн =	2,545	міс.
101			
102	Для обох фірм		
103	n середн =	3,097	міс.

Рис. 8.45. **Результати розрахунку середнього терміну користування позиками**

2.3. Середнє число оборотів позики за рік. Число оборотів окремих позик за умови їх безперервної оборотності за період, що вивчається, визначається як частка від ділення тривалості періоду ($D = 12$ міс.) на термін видачі позики: $W_j = \frac{D}{n_j}$.

Результати проміжних розрахунків у *MS Excel* наведені на рис. 8.46; 8.47.

	A	B	C	D	E
69					
70	№ ссуды	Розмір позики P, тис.грн.	Термін позики n, місяців	Число оборотів за рік, Wj=D/nj-12/nj	Річний оборот позики Oj=PjWj
71	Фирма «Силікат»				
72	1	250	6	=12/C72	=B72*D72
73	2	200	8	=12/C73	=B73*D73
74	3	500	3	=12/C74	=B74*D74
75	Сума	=СУММ(B72:B74)	-	-	=СУММ(E72:E74)
76	Фірма «Дельта»				
77	4	600	2	=12/C77	=B77*D77
78	5	450	4	=12/C78	=B78*D78
79	Сума	=СУММ(B77:B78)	-	-	=СУММ(E77:E78)
80	Всього	=B75+B79			=E75+E79

Рис. 8.46. **Проміжні розрахунки для визначення середнього числа оборотів позики за рік**

70	№ ссуды	Розмір позики P, тис.грн.	Термін позики n, місяців	Число оборотів за рік, Wj=D/nj-12/nj	Річний оборот позики Oj=PjWj
71	Фирма «Силікат»				
72	1	250	6	2	500
73	2	200	8	1,5	300
74	3	500	3	4	2000
75	Сума	950	-	-	2800
76	Фірма «Дельта»				
77	4	600	2	6	3600
78	5	450	4	3	1350
79	Сума	1050	-	-	4950
80	Всього	2000			7750

Рис. 8.47. **Результати проміжних розрахунків для визначення середнього числа оборотів позики за рік**

Тоді середнє число оборотів усіх позик за період (за умови, що вони обертаються безперервно) розраховується так:

$$\bar{W} = \frac{\sum W_j \cdot P_j}{\sum P_j} = D \cdot \frac{\sum \frac{P_j}{n_j}}{\sum P_j} = \frac{\sum O_j}{\sum P_j}.$$

Визначимо середнє число оборотів усіх позик за рік для кожної фірми окремо та в цілому для банку:

$$\bar{W}_{\text{С}} = \frac{2\,800}{950} \approx 2{,}947, \quad \bar{W}_{\text{Д}} = \frac{4\,950}{1\,050} \approx 4{,}714, \quad \bar{W} = \frac{7\,750}{2\,000} = 3{,}875.$$

Розрахунок у *MS Excel* середнього числа оборотів позики за рік для кожної фірми окремо та для обох фірм наведено на рис. 8.48; 8.49.

	A	B
105	**Середнє число оборотів позики за рік**	
106	Фірма «Силікат»	
107	W середн. =	=(B72*D72+B73*D73+B74*D74)/B75
108		
109	Фірма «Дельта»	
110	W середн. =	=E79/B79
111		
112	Для обох фірм	
113	W середн. =	=E80/B80

Рис. 8.48. **Розрахунок середнього числа оборотів позики за рік**

105	**Середнє число оборотів позики за рік**		
106	Фірма «Силікат»		
107	W середн. =	2,947	
108			
109	Фірма «Дельта»		
110	W середн. =	4,714	
111			
112	Для обох фірм		
113	W середн. =	3,875	

Рис. 8.49. **Результати розрахунку середнього числа оборотів позики за рік**

2.4. Консолідація платежів. Під час консолідації декількох платежів в один за умови, що термін нового консолідованого платежу більше раніше встановлених термінів (тобто $n_0 > n_1, n_2, \ldots, n_k$), використовується проста відсоткова ставка. Рівняння еквівалентності має вигляд:

$$S_0 = \sum S_j \cdot (1 + t_j \cdot i)$$

де S_0 – нарощена сума консолідованого платежу;

$S_1, S_2, \ldots, S_k$ – платежі, що підлягають консолідації, з термінами сплати $n_1, n_2, \ldots, n_k$;

t_j – часові інтервали між терміном n_0 і n_j, тобто $t_j = n_0 - n_j$.

Визначимо нарощені суми позик для кожної фірми окремо, як це подано у табл. 8.3.

Таблиця 8.3

Нарощені суми позик

Назва фірми	Формула розрахунку	Нарощена сума позики, тис. грн
"Силікат"	$S_1^С = 250 \cdot \left(1 + 6 \cdot \frac{0,1}{12}\right)$	262,50
	$S_1^С = 200 \cdot \left(1 + 8 \cdot \frac{0,1}{12}\right)$	213,33
	$S_1^С = 500 \cdot \left(1 + 3 \cdot \frac{0,1}{12}\right)$	512,50
"Дельта"	$S_1^Д = 600 \cdot \left(1 + 2 \cdot \frac{0,1}{12}\right)$	610,00
	$S_1^Д = 450 \cdot \left(1 + 4 \cdot \frac{0,1}{12}\right)$	465,00

Визначимо розмір консолідованого платежу для кожної фірми за умови, що нараховуються прості відсотки за ставкою 10 % річних, термін погашення консолідованого платежу – 12 місяців:

$$S_0^{\text{С}} = 262{,}5 \cdot (1 + (12 - 6) \cdot 0{,}1) + 213{,}33 \cdot (1 + (12 - 8) \cdot 0{,}1) +$$
$$+512{,}5 \ \cdot (1 + (12 - 3) \cdot 0{,}1) = 1\,047{,}007 \text{ (тис. грн);}$$
$$S_0^{\text{Д}} = 610 \cdot (1 + 10 \cdot 0{,}1) + 465 \cdot (1 + 8 \cdot 0{,}1) = 1\,156{,}833 \text{ (тис. грн).}$$

Розрахунок у *MS Excel* розміру консолідованого платежу для обох фірм наведено на рис. 8.50; 8.51.

	A	B	C	D	E
114					
115	**Розмір консолідованого платежа для кожної фірми за умови,**				
116	**що нараховуються прості проценти i= 10 % річних, тис. грн**				
117	Фірма «Силікат»			Фірма «Дельта»	
118	S1	=B72*(1+C72*0,1/12)		S1	=B77*(1+C77*0,1/12)
119	S2	=B73*(1+C73*0,1/12)		S2	=B78*(1+C78*0,1/12)
120	S3	=B74*(1+C74*0,1/12)			
121	S0	=B118*(1+(12-6)*0,1/12)+B119*(1+(12-8)*0,1/12)+B120*(1+(12-3)*0,1/12)		S0	=E118*(1+(12-C77)*0,1/12)+E119*(1+(12-C78)*0,1/12)
122	P=	=B121/(1+12*0,1/12)		P=	=E121/(1+12*0,1/12)

Рис. 8.50. **Розрахунок розміру консолідованого платежу**

115	**Розмір консолідованого платежа для кожної фірми за умови,**				
116	**що нараховуються прості проценти i= 10 % річних, тис. грн**				
117	Фірма «Силікат»			Фірма «Дельта»	
118	S1	262,5		S1	610
119	S2	213,333		S2	465
120	S3	512,5			
121	S0	1047,007		S0	1156,833
122	P=	951,824		P=	1051,667

Рис. 8.51. **Результати розрахунку розміру консолідованого платежу для кожної фірми**

Розраховані в лабораторній роботі еквівалентні параметри забезпечують рівноцінність фінансових результатів для всіх розглянутих фінансових операцій.

Лабораторна робота 4
Конверсія фінансових рент. Змінювані ренти

Мета – закріплення теоретичного та практичного матеріалу, набуття навиків розрахунку параметрів конверсії рент і змінних фінансових рент (потоків платежів).

1. Початкові дані. Фірма пропонує покупцеві свою продукцію на суму 2 млн грн з умовою її оплати протягом двох років під 15 % річних (складні відсотки). Платежі повинні вноситись щокварталу, відсотки нараховуються в кінці року.

Необхідно визначити умови конверсії даної пропозиції. Зробити висновки.

2. Початкові дані. Фірма з торгівлі нерухомістю виставляє на продаж об'єкт вартістю 1,5 млн грн Пропонуються різні варіанти оплати.

Необхідно:

2.1. Визначити фінансові наслідки одноразової оплати.

2.2. Визначити фінансові наслідки, якщо оплата відбудеться протягом двох років рівними платежами, що вносяться в кінці року під 9 % річних.

2.3. Визначити фінансові наслідки, якщо буде оплата з відстроченням платежу в один рік, а інші умови аналогічні попередньому варіанту.

2.4. Визначити фінансові наслідки, якщо буде оплата з відстроченням в один рік, але термін ренти зростає до трьох років; зробити висновки.

3. Початкові дані. Є три річні ренти (негайні з нарахуванням відсотків у кінці періодів) з такими параметрами: $R_1 = 0{,}2$ млн грн; $n_1 = 2$ роки; $i_1 = 9\,\%$; $R_2 = 0{,}25$ млн грн; $n_2 = 4$ роки; $i_2 = 8\,\%$; $R_3 = 0{,}37$ млн грн; $n_3 = 5$ років; $i_3 = 10\,\%$. Їх запропоновано замінити однією річною рентою з нарахуванням відсотків у кінці періоду, термін погашення консолідованої ренти $n = 5$ років, $i = 10\,\%$.

Необхідно:

3.1. Визначити величину рентного платежу консолідованої ренти, якщо початок її терміну збігається з початком терміну всіх замінюваних рент.

3.2. Визначити величину рентного платежу консолідованої ренти, якщо оплата за новою рентою відкладається на два роки.

4. Початкові дані. На модернізацію підприємства отриманий довгостроковий кредит строком на десять років, погашення якого здійснюватиметься на таких умовах: у перші п'ять років платежі у розмірі 3 млн грн вносяться кожні півроку під 8 % річних; наступні три роки платежі у розмірі 5 млн грн вносяться також по півріччям під 10 % річних, останні два роки платежі у розмірі 6 млн грн вносяться щокварталу під 10 % річних. Протягом усього терміну ренти відсотки нараховуються раз на рік.

Необхідно визначити нарощену величину ренти.

5. Початкові дані. Кредит розміром 15 млн грн має бути погашений протягом п'яти років постійно зростаючими платежами з абсолютним щорічним приростом у 0,5 млн грн. Платежі та нарахування відсотків на них відбуваються в кінці року, відсоткова річна ставка – 9 %.

Необхідно визначити розмір першого платежу та загальну суму виплат.

6. Початкові дані. Отриманий кредит строком на сім років. Умови погашення: перший платіж – 0,2 млн грн; кожен наступний зростає на 10 %, платежі вносяться двічі на рік; відсоткова ставка – 8 % річних.

Необхідно визначити розмір отриманого кредиту і суму, що підлягає виплаті.

1. Заміна разового платежу рентним. Введемо позначення: A – сучасна величина потоків платежів; i – річна відсоткова ставка; n – термін ренти; p – терміновість ренти (кількість платежів на рік).

Якщо A = 2 млн грн, n = 2 роки, p = 4, m = 1, i = 0,15, тоді член ренти дорівнює:

$$R = A \div \frac{1-(1+i)^{-n}}{p \cdot ((1+i)^{1/p}-1)} = 2 \div \frac{1-(1+0{,}15)^{-2}}{4 \cdot ((1+0{,}15)^{1/4}-1)} = 1{,}16652 \text{ (млн грн).}$$

Далі знаходимо квартальний платіж:

$$R\text{кв} = \frac{R}{4} = \frac{1{,}16652}{4} \approx 0{,}291631 \text{ (млн грн).}$$

Для визначення доцільності здійснення купівлі на пропонованих умовах розрахуємо нарощену величину ренти:

$$S = R \cdot \frac{(1+i)^n - 1}{p \cdot \left((1+i)^{1/p}-1\right)} = 1{,}166525 \cdot \frac{(1+0{,}15)^2-1}{4 \cdot \left((1+0{,}15)^{1/4}-1\right)} =$$
$$= 2{,}645 \text{ (млн грн).}$$

Розрахунок у *MS Excel* нарощеної суми p – термінової ренти з нарахуванням відсотків m раз на рік наведено на рис. 8.52; 8.53.

	A	B	C
1	**1. Заміна разового платежа рентним**		
2	A=	2	млн. грн.
3	n=	2	роки
4	p=	4	
5	m=	1	
6	i=	0,15	
7			
8	R=	=B2/((1-(1+B6)^(-B3))/(B4*((1+B6)^(1/B4)-1)))	млн. грн.
9	**кварт. платіж**	=B8/4	млн. грн.
10	S=	=B8*(1,15*1,15-1)/(4*(1,15^(1/4)-1))	млн. грн.

Рис. 8.52. **Розрахунок члена ренти та нарощеної суми**

Таким чином, приймаючи умови фірми, покупцеві необхідно буде щокварталу виплачувати 291,631 тис. грн, переплата складе 645 тис. грн.

	A	B	C	D
1	**1. Заміна разового платежа рентним**			
2	A=	2	млн. грн.	
3	n=	2	роки	
4	p=	4		
5	m=	1		
6	i=	0,15		
7				
8	**R=**	**1,166525**	млн. грн.	
9	**кварт. платіж**	**0,291631**	млн. грн.	
10	**S=**	**2,645**	млн. грн.	

Рис. 8.53. **Результати розрахунку нарощеної суми p – термінової ренти з нарахуванням відсотків m раз на рік**

2. Зміна умов ренти. Зміна умов виплати ренти, тобто часткова або повна зміна первинних параметрів ренти, приводить до утворення нової ренти, що викликає зміну фінансових наслідків.

Початкові дані: A = 1,5 млн грн; n = 2 роки; i = 0,09.

2.1. Одноразова оплата припускає, що виплата буде проведена відразу, тобто $S = A = 1{,}5$ (млн грн).

2.2. Оплата рівними платежами, що вносяться в кінці кожного року. З формули розрахунку звичайної річної ренти $\mathrm{A} = R \cdot \frac{(1+i)^{-n}}{i}$ знаходимо член ренти:

$$R = A \div \frac{(1+i)^{-n}}{i} = 1{,}5 \div \frac{(1+0{,}09)^{-2}}{0{,}09} = 0{,}852703 \text{ млн грн.}$$

Далі розраховуємо нарощену величину ренти:

$$S = R \cdot \frac{(1+i)^n - 1}{i} = 0{,}852703 \cdot \frac{(1+0{,}09)^2 - 1}{0{,}09} = 1{,}782149 \text{ (млн грн).}$$

Розрахунок у *MS Excel* члена ренти та нарощеної суми наведено на рис. 8.54; 8.55.

	A	B	C	D	E	F
12	**2. Зміна умов ренти**					
13	***а) одноразова оплата***					
14	S=	**1,5**	млн. грн.			
16	***б) оплата протягом 2 років рівними платежами, що вносяться в кінці кожного року під 9 % річних***					
17						
18	A=	1,5	млн. грн.			
19	n=	2		R=	=B18/((1-(1+B20)^(-B19))/B20)	
20	i=	0,09		S=	=E19*((1+B20)^B19-1)/B20	

Рис. 8.54. **Розрахунок члена ренти та нарощеної величини ренти**

	A	B	C	D	E	F
12	**2. Зміна умов ренти**					
13	***а) одноразова оплата***					
14	S=	**1,5**	млн. грн.			
16	***б) оплата протягом 2 років рівними платежами, що вносяться в кінці кожного року під 9 % річних***					
17						
18	A=	1,5	млн. грн.			
19	n=	2		R=	**0,8527033**	
20	i=	0,09		S=	**1,782149**	

Рис. 8.55. **Результати розрахунку члена ренти та нарощеної величини ренти**

2.3. Оплата з відстроченням платежу (термін ренти не змінюється). Дане завдання припускає розрахунок відстроченої ренти, тобто коли внесення першого внеску переноситься на пізніший термін (t років, місяців). У нашому випадку загальна тривалість ренти залишається попередньою.

$$R_t = R_0 \cdot (1+i)^t = 0{,}852703 \cdot (1+0{,}09)^1 = 0{,}929446 \text{ (млн грн),}$$

тоді:

$$S = R_t \cdot \frac{(1+i)^n - 1}{i} = 0{,}929446 \cdot \frac{(1+0{,}09)^2 - 1}{0{,}09} = 1{,}942543 \text{ (млн грн)}$$

Розрахунок у *MS Excel* члену ренти та нарощеної суми за умови оплати з відстроченням платежу з незмінним терміном ренти наведено на рис. 8.56; 8.57.

	A	B	C	D	E	F
22	***в) оплата з відстроченням платежу (термін ренти не змінюється)***					
23	A=	1,5	млн. грн.			
24	n=	2				
25	i=	0,09		R=	=E19*(1+B25)^B26	
26	t=	1		S=	=E25*((1+B25)^B26-1)/B25	

Рис. 8.56. **Розрахунок члена ренти та нарощеної величини ренти за умови оплати з відстроченням платежу з незмінним терміном**

	A	B	C	D	E	F
22	***в) оплата з відстроченням платежу (термін ренти не змінюється)***					
23	A=	1,5	млн. грн.			
24	n=	2				
25	i=	0,09		R=	**0,929446**	
26	t=	1		S=	**1,942542**	

Рис. 8.57. **Результати розрахунку члена ренти та нарощеної величини ренти**

2.4. Оплата з відстроченням та зі збільшенням терміну ренти. Необхідно знайти відкладену ренту за умови, що загальна тривалість ренти зростає до трьох років.

Для розрахунку величини рентного платежу нової ренти, відстроченої на період $t = 1$ і з новим терміном, використовується формула:

$$R_t = R_0 \cdot \left(\frac{(1-(1+i)^{-n_0})/i}{(1-(1+i)^{-n_0})/i}\right) \cdot (1+i)^t;$$

$$R_3 = 0{,}852703 \cdot \left(\frac{(1-(1+0{,}09)^{-2})/0{,}09}{(1-(1+0{,}09)^{-3})/0{,}09}\right) \cdot (1+0{,}09)^1 = 0{,}645914 \text{ млн грн;}$$

$$S = R_t \cdot \frac{(1+i)^n - 1}{i} = 0{,}645914 \cdot \frac{(1+0{,}09)^3 - 1}{0{,}09} = 2{,}11737 \text{ (млн грн).}$$

Розрахунок у *MS Excel* наведено на рис. 8.58; 8.59.

	A	B	C	D	E	F	G
28	*г) оплата з відстроченням в один рік, но термін ренти збільшується до 3 років*						
29	A=	1,5	млн. грн.				
30	n=	3					
31	i=	0,09		R=	=E19*((1-(1+B31)^(-B19))/(1-(1+B20)^(-B30)))*(1+B31)^B32		
32	t=	1		S=	=E31*((1+B31)^B30-1)/B31		

Рис. 8.58. **Розрахунок члена ренти та нарощеної величини ренти**

	A	B	C	D	E
28	*г) оплата з відстроченням в один рік, но термін ренти збільшується до 3 років*				
29	A=	1,5	млн. грн.		
30	n=	3			
31	i=	0,09		R=	**0,645914**
32	t=	1		S=	**2,117371**

Рис. 8.59. **Результати розрахунку члена ренти та нарощеної величини ренти за умови оплати з відстроченням платежу та зі збільшенням терміну ренти**

Таким чином, зміна умов виплати ренти, тобто часткова або повна зміна її первинних параметрів, приводить до зміни фінансових наслідків.

3. Консолідація (об'єднання) рент полягає в заміні декількох рент однією, параметри якої необхідно визначити.

3.1. Консолідація за умови збігу початку терміну нової (консолідованої) ренти й об'єднуваних рент. Тому член консолідованої ренти визначається за формулою:

$$R = \frac{\sum_{q=1}^{K} A_q}{(1-(1+i)^{-n})/_i} = \frac{\sum_{q=1}^{K} R_q \cdot \left(1-\left(1+i_q\right)^{-n_q}\right)/i_q}{(1-(1+i)^{-n})/_i},$$

де R_q – член q-ї ренти;

n_q – тривалість q-ї ренти;

i_q – відсоткова ставка q-ї ренти;

i – параметри консолідованої ренти (n = 5, i = 0,1 %).

На рис. 8.60 вказані основні характеристики об'єднуваних рент і розрахунок у *MS Excel* сучасних їх величин і членів консолідованої ренти.

	A	B	C	D	E
35	№ ренти, q	Член ренти, R_q	Термін ренти, n_q	Річна % ставка, i_q	Сучасн. величина, A_q
36	1	0,2	2	0,09	=B36*((1-(1+D36)^(-C36))/D36)
37	2	0,25	4	0,08	=B37*((1-(1+D37)^(-C37))/D37)
38	3	0,37	5	0,07	=B38*((1-(1+D38)^(-C38))/D38)
39	Итого				=СУММ(E36:E38)

Рис. 8.60. **Основні характеристики та розрахунок сучасних величин об'єднуваних рент і члена консолідованої ренти**

На рис. 8.61 подані результати розрахунку цих показників.

	A	B	C	D	E
34	**3. Консолідація рент**				
35	№ ренти, q	Член ренти, Rq	Термін ренти, nq	Річна % ставка, iq	Сучасн. величина, Aq
36	1	0,2	2	0,09	0,3518222
37	2	0,25	4	0,08	0,8280317
38	3	0,37	5	0,07	1,5170731
39	Итого				2,696927

Рис. 8.61. **Результати розрахунку сучасних величин**

Підставивши набутих значень у формулу, віднайдемо значення річного платежу нової консолідованої ренти:

$$R = \frac{2{,}696927}{(1-(1+0{,}1)^{-5})/0{,}1} = 0{,}7114425 \text{ (млн грн).}$$

Розрахунок у *MS Excel* члена консолідованої ренти наведено на рис. 8.62.

	A	B
41	Член консолідованої ренти	
42	n=	5
43	i=	0,1
44	а) без відстрочення	
45	R=	=E39/(1-(1+B43)^(-B42))*B43

41	Член консолідованої ренти	
42	n=	5
43	i=	0,1
44	а) без відстрочення	
45	R=	0,711442

Рис. 8.62. **Розрахунок члена консолідованої ренти**

3.2. Консолідація за умови, що оплата за новою рентою відкладається на два роки. Введемо позначення: R_t – член відкладеної консолідованої ренти; R_q – член q -ї ренти; n_q – тривалість q-ї ренти; i_q – відсоткова ставка q-ї ренти; n_t, i – параметри консолідованої ренти (n = 5; i = 0,1 %; t = 2). Скоректуємо платіж консолідованої ренти:

$$R_t = \frac{\sum_{q=1}^{K} R_q \cdot \left(1-\left(1+i_q\right)^{-n_q}\right)/i_q}{\left(1-(1+i)^{-n}\right)/_{i}} \cdot (1+i)^t = 0{,}7114425 \cdot (1+0{,}1)^2 =$$

$$= 0{,}8608455 \text{ (млн грн).}$$

Розрахунок у *MS Excel* члена консолідованої ренти з відстроченням на два роки наведено на рис. 8.63.

	D	E
44	б) з відстроченням 2 роки	
45	R=	=B45*(1+B43)^2

	D	E	F
44	б) з відстроченням 2 роки		
45	R=	0,86084	

Рис. 8.63. **Розрахунок і результат розрахунку члена консолідованої ренти з відстроченням на два роки**

Таким чином, ґрунтуючись на принципі еквівалентності, розраховано величину річного платежу консолідованої ренти; доведено,що зміна умов виплат приводить до збільшення рентного платежу.

4. Рента з разовою зміною платежу. У разі, коли потік платежів є дискретним і кожен член ренти постійний тільки в межах свого часового відрізку, розраховується змінна рента з разовими змінами розміру члена ренти:

$$S = R_1 \cdot s_{n_1,i_1} \cdot (1+i)^{n-n_1} + R_2 \cdot s_{n_2,i_2} \cdot (1+i)^{n-(n_1+n_2)} + \dots + R_k \cdot s_{n_k,i_k}.$$

Оскільки схема погашення довгострокового кредиту (m = 1 і n = 10) є змінною рентою з p-терміновими платежами, коефіцієнти нарощування визначають за формулою:

$$s_{n,i}^{(p)} = \frac{(1+i)^n - 1}{p \cdot \left((1+i)^{1/p} - 1\right)}.$$

На рис. 8.64 наведений план погашення довгострокового кредиту та розрахунок у *MS Excel* коефіцієнтів нарощення.

	A	B	C	D	E	F	G	H
49	**4. Рента з разовою зміною плате**							
50	n=	10		m=	1			
51	Номер ренти, k	Термін ренти, n_k	Річний платіж, R_k	Процентна ставка, i_k	Строковість ренти, p_k	Коефіцієнт нарощення, $s_{n,i}^{(p)}$		
52	1	5	6	0,08	2	=(((1+D52)^B52)-1)/(E52*((1+D52)^(1/E52)-1))		
53	2	3	10	0,1	2	=(((1+D53)^B53)-1)/(E53*((1+D53)^(1/E53)-1))		
54	3	2	24	0,1	4	=(((1+D54)^B54)-1)/(E54*((1+D54)^(1/E54)-1))		
55								
56	S=	=C52*F52*(1+D52)^(B50-B52)+C53*F53*(1+D53)^(B50-(B52+B53))+C54*F54						

	A	B	C	D	E	F
49	**4. Рента з разовою зміною платежу**					
50	n=	10		m=	1	
51	Номер ренти, k	Термін ренти, n_k	Річний платіж, R_k	Процентна ставка, i_k	Строковість ренти, p_k	Коефіцієнт нарощення, $s_{n,i}^{(p)}$
52	1	5	6	0,08	2	5,981675759
53	2	3	10	0,1	2	3,390778644
54	3	2	24	0,1	4	2,177186569

Рис. 8.64. **План погашення кредиту, розрахунок і результати розрахунку коефіцієнтів нарощення**

Таким чином, нарощена величина ренти дорівнює:

$$S = 6 \cdot 5{,}981676 \cdot (1 + 0{,}08)^{10-5} + 10 \cdot 3{,}390779 \cdot (1 + 0{,}1)^{10-(5+3)} +$$
$$+24 \cdot 2{,}177187 = 146{,}01516 \text{ (млн грн)}.$$

Розрахунок у *MS Excel* нарощеної величини ренти наведений на рис. 8.65.

	A	B	C	D	E	F	G
56	S=	=C52*F52*(1+D52)^(B50-B52)+C53*F53*(1+D53)^(B50-(B52+B53))+C54*F54					

56	S=	146,0151641

Рис. 8.65. **Розрахунок і результат розрахунку нарощеної суми**

Таким чином, загальна сума виплат за довгостроковим кредитом складе 146,01516 млн грн.

5. Рента з постійною абсолютною зміною членів. Ренту, члени якої змінюються за законом арифметичної прогресії, називають *змінною рентою з постійною абсолютною зміною її членів* (на величину d).

Початкові дані: A = 15 млн грн; n = 5 років; i = 9 %; d = 0,5 млн грн. Нарахування відсотків і виплати здійснюються в кінці року.

Знаючи поточну суму боргу, тобто величину A, можна визначити розмір першого платежу:

$$R = \frac{A \cdot (1+i)^n - \frac{d}{i} \cdot \left(s_{n,i} - n\right)}{s_{n,i}} = \frac{15 \cdot (1+0{,}09)^5 - \frac{0{,}5}{0{,}09} \cdot (5{,}98471 - 5)}{5{,}98471} =$$
$$= 2{,}942288 \text{ (млн грн).}$$

Нарощена сума даної ренти визначається за формулою:

$$S = R \cdot s_{n,i} + \frac{d}{i} \cdot \left(s_{n,i} - n\right);$$

$$S = 2{,}942288 \cdot 5{,}98471 + \frac{0{,}5}{0{,}09} \cdot (5{,}98471 - 5) = 23{,}079359 \text{ (млн грн).}$$

Розрахунок у *MS Excel* члена ренти, нарощеної суми та сучасної вартості ренти наведені на рис. 8.66; 8.67.

	A	B	C	D	E
58	**5.Рента з постійною абсолютною зміною членів**				
59	A=	15		sn,i	=(((1+B62)^B60)-1)/B62
60	n=	5			
61	d=	0,5			
62	i=	0,09			
63					
64	**R=**	=(B59*((1+B62)^B60)-B61/B62*(E59-B60))/E59			
65	**S=**	=B64*E59+B61/B62*(E59-B60)			
66	**A=**	=B65/((1+B62)^B60)			

Рис. 8.66. **Розрахунок члена ренти та нарощеної суми**

	A	B	C
64	**R=**	**2,942288436**	
65	**S=**	**23,07935932**	
66	**A=**	**15**	

Рис. 8.67. **Результати розрахунку члена ренти та нарощеної суми ренти з постійною абсолютною зміною членів**

Так, щоб виплатити кредит у розмірі 15 млн грн за запропонованою схемою, необхідно внести перший платіж у розмірі 2,942288 млн грн; переплата складе 8,079359 млн грн.

6. Рента з постійною відносною зміною членів. Ренту, члени якої змінюються за законом зростаючої геометричної прогресії, називають *рентою з постійною відносною зміною платежів*.

У табл. 8.4 наведені початкові дані для погашення кредиту.

Таблиця 8.4

Початкові дані схеми погашення кредиту

Параметри	Позначення	Значення
Перший член ренти, млн грн	R	0,2
Коефіцієнт зміни членів ренти	q	1,1
Терміновість ренти (кількість виплат на рік)	p	2
Термін ренти	n	7
Відсоткова ставка	i	0,08

Сучасна величина p-термінової ренти визначається за формулою:

$$A = R \cdot \frac{q^{n \cdot p} \cdot (1+i)^{-n} - 1}{q - (1+i)^{\frac{1}{p}}} = 0{,}2 \cdot \frac{1{,}1^{7 \cdot 2} \cdot (1+0{,}08)^{-7} - 1}{1{,}1 - (1+0{,}08)^{\frac{1}{2}}} =$$
$$= 4{,}00136 \text{ (млн грн)}.$$

Підсумкова величина виплат за наданим кредитом розраховується за формулою знаходження нарощеної величини p-термінової ренти з постійною відносною зміною платежів:

$$S = R \cdot \frac{q^{n \cdot p} - (1+i)^{n}}{q - (1+i)^{\frac{1}{p}}} = 0{,}2 \cdot \frac{1{,}1^{7 \cdot 2} - (1+0{,}08)^{7}}{1{,}1 - (1+0{,}08)^{\frac{1}{2}}} = 6{,}857629 \text{ (млн грн)}.$$

Розрахунок у *MS Excel* нарощеної суми та сучасної вартості ренти з постійною відносною зміною членів наведений на рис. 8.68

	A	B	C	D	E
68	6. Рента з постійною відносною зміною членів				
69	R=	0,2			
70	q=	1,1		A=	=B69*(B70^(B72*B71)*(1+B73)^(-B72)-1)/(B70-(1+B73)^(1/B71))
71	p=	2		S=	=B69*(B70^(B72*B71)-(1+B73)^B72)/(B70-(1+B73)^(1/B71))
72	n=	7			
73	i=	0,08			

A=	4
S=	6,85762

Рис. 8.68. **Розрахунок і результати розрахунку нарощеної суми та сучасної вартості ренти з постійною відносною зміною членів**

Таким чином, розмір отриманого кредиту складає 4,00136 млн грн; підсумкова сума виплат за запропонованою схемою дорівнює 6,85769 млн грн, тобто за 7 років переплата по кредиту складе 2,856268 млн грн.

Лабораторна робота 5
Планування погашення середньострокових і довгострокових кредитів

Мета – закріплення теоретичного та практичного матеріалу, набуття навиків складання плану погашення середньострокових і довгострокових кредитів різними методами.

Початкові дані. Банк видав довгостроковий кредит в сумі 40,0 тис. дол. на п'ять років під 6 % річних. Погашення кредиту повинне проводитись рівними щорічними виплатами в кінці кожного року. Виплати включають погашення основного боргу та відсоткові платежі. Нарахування відсотків проводиться раз на рік.

Необхідно:

1. Скласти план погашення позики. Розрахувати величину першого платежу для погашення основного боргу, величину відсоткового платежу на кінець останнього року погашення позики, залишок основного неоплаченого боргу на початок третього року погашення. Порівняти розраховані значення з планом погашення позики.

2. Скласти план погашення кредиту рівними щорічними виплатами, якщо передбачається зміна відсоткової ставки: перші два роки – 6 %, наступні три роки – 8 %.

3. Скласти план погашення кредиту, якщо за умовами контракту погашення основного боргу повинне проводитись рівними щорічними платежами, нарахування відсотків – в кінці року. Розрахувати величину відсоткового платежу та термінової сплати для четвертого року. Порівняти розраховане значення з планом погашення боргу.

4. Скласти план погашення кредиту, якщо виплати основного боргу повинні зростати щорічно на 1 тис. дол., нарахування відсотків проводиться в кінці року.

5. Скласти план погашення кредиту, якщо виплати основного боргу повинні зростати на 5 % щорічно, нарахування відсотків проводиться в кінці року.

6. Скласти план погашення кредиту рівними щорічними виплатами, якщо після виплати третього платежу між кредитором і позичальником досягнута домовленість про продовження терміну погашення позики на два роки та збільшення відсоткової ставки з моменту конверсії до 10 %.

7. Скласти план погашення кредиту, якщо виданий кредит є іпотекою з щомісячним погашенням основного боргу та відсотків за ним рівними терміновими сплатами. Розрахувати залишок боргу на початок четвертого місяця (кожний місяць приймається дорівненим 30 дням).

8. Скласти план погашення іпотечного кредиту рівними щомісячними виплатами основного боргу (кожний місяць приймається дорівненим 30 дням). Зробити висновки.

1. Погашення боргу рівними терміновими сплатами. Параметри позики: D = 40,0 тис. дол.; n = 5 років; i = 0,06; m = 1. Щорічна виплата дорівнює:

$$Y = D \cdot \frac{i \cdot (1+i)^n}{(1+i)^n - 1} = 40 \cdot \frac{0{,}06 \cdot (1+0{,}06)^5}{(1+0{,}06)^5 - 1} \approx 9{,}49586\ (\text{тис. дол.}).$$

Розрахуємо:

$$I = D \cdot i = 40 \cdot 0{,}06 = 2{,}4\ (\text{тис. дол.});$$
$$R = Y - I = 9{,}49586 - 2{,}4 = 7{,}09586\ (\text{тис. дол.}).$$

На рис. 8.69; 8.70 наведені розрахунки поетапного плану погашення боргу в *MS Excel.*

	A	B	C	D	E
1	Вихідні дані				
2	D	40	тис. дол.		
3	n	5	років		
4	i	0,06			
5	**1. Погашення долгу рівними терміновими сплатами**				
6	Річна термінова сплата Y=			=B2*(B4*(1+B4)^B3)/((1+B4)^B3-1)	
7	Рік	Залишок боргу на початок року, ***D***	Процентний платіж, ***I***	Річна витрата по погашенню основного боргу, ***R***	Річна термінова сплата (ануїтет), ***Y***
8	1	=B2	=B8*$B$4	=E8-C8	=$D$6
9	2	=B8-D8	=B9*$B$4	=E9-C9	=$D$6
10	3	=B9-D9	=B10*$B$4	=E10-C10	=$D$6
11	4	=B10-D10	=B11*$B$4	=E11-C11	=$D$6
12	5	=B11-D11	=B12*$B$4	=E12-C12	=$D$6
13	**Всього**		**=СУММ(C8:C12)**	**=СУММ(D8:D12)**	**=СУММ(E8:E12)**

Рис. 8.69. **Розрахунок поетапного плану погашення боргу рівними терміновими сплатами**

7	Рік	Залишок боргу на початок року, ***D***	Процентний платіж, ***I***	Річна витрата по погашенню основного боргу, ***R***	Річна термінова сплата (ануїтет), ***Y***
8	1	40,00	2,4000	7,0959	9,4959
9	2	32,9041	1,9742	7,5216	9,4959
10	3	25,3825	1,5230	7,9729	9,4959
11	4	17,4096	1,0446	8,4513	9,4959
12	5	8,9584	0,5375	8,9584	9,4959
13	**Всього**		**7,4793**	**40,0000**	**47,4793**

Рис. 8.70. **Результати розрахунку поетапного плану погашення боргу рівними терміновими сплатами**

Знаючи розмір кредиту, відсоткову ставку i та термін погашення кредиту n, розрахуємо величину першої виплати погашення основного боргу:

$$R_1 = D \cdot \frac{i}{(1+i)^n - 1} = 40 \cdot \frac{0{,}06}{(1+0{,}06)^5 - 1} = \ 7{,}09586\ (\text{тис. дол.}).$$

Розмір платежу основного боргу в будь-якому періоді (R_k) можна визначити за формулою:

$$R_k = R_1 \cdot (1+i)^{k-1};$$
$$R_3 = R_1 \cdot (1+i)^{k-1} = 7{,}09586 \cdot (1+0{,}06)^{3-1} = 7{,}9729\ (\text{тис. дол.}).$$

Використовуючи наведені формули, можна розрахувати величину відсоткового платежу I для будь-якого періоду k:

$$I_k = Y - R_k = Y - Y \cdot (1+i)^{-n+k-1} = Y \cdot [1 - (1+i)^{-n+k-1}].$$

За умовою завдання необхідно розрахувати величину відсоткового платежу на кінець останнього року погашення позики:

$$I_5 = Y - R_k = Y - Y \cdot (1+i)^{-n+k-1} = 9{,}49586 \cdot [1 - (1+0{,}06)^{-5+5-1}] =$$
$$= 0{,}537501\ (\text{тис. дол.}).$$

Для розрахунку залишку неоплаченого основного боргу на будь-який k-й період використовується формула:

$$D_k = \frac{Y - R_k}{i}.$$

За умовою завдання необхідно визначити залишок основного неоплаченого боргу на початок третього року погашення:

$$D_3 = \frac{Y - R_3}{i} = \frac{9{,}49586 - 7{,}9729}{0{,}06} = 25{,}382536\ (\text{тис. дол.}).$$

Розрахунки окремих параметрів погашення боргу рівними терміновими сплатами у *MS Excel* наведені на рис. 8.71.

	A	B	C
14	R_1=	=(B2*B4)/((1+B4)^B3-1)	
15	I_5=	=D6*(1-(1+B4)^(-B3+5-1))	
16	D_3=	=B2*((1+B4)^B3-(1+B4)^(3-1))/((1+B4)^B3-1)	

	A	B
14	R_1=	7,09586
15	I_5=	0,53750
16	D_3=	25,3825

Рис. 8.71. **Розрахунки та результати розрахунків окремих параметрів погашення боргу рівними терміновими сплатами**

Таким чином, за умови погашення позики рівними платежами залишок боргу з кожною виплатою зменшується; отже, зменшуються і виплати за відсотками. У результаті від періоду до періоду зростає розмір платежів, що йдуть на погашення основного боргу. Порівнюючи розрахунки з планом погашення позики, бачимо, що отримані результати не відрізняються; сумарна переплата складає 47,4793 тис. дол.

2. Погашення боргу рівними терміновими сплатами зі зміною відсоткових ставок.

Параметри позики: D = 40,0 тис. дол.; n_1 = 2 роки; i_1 = 0,06; n_2 = 3 роки; i_2 = 0,08; m = 1 $n = n_1 + n_2 = 5$.

Для складання плану погашення позики визначимо величину щорічної виплати, враховуючи, що загальний термін погашення складе п'ять років:

$$Y_1 = D \cdot \frac{i \cdot (1+i)^n}{(1+i)^n - 1} = 40 \cdot \frac{0{,}06 \cdot (1+0{,}06)^5}{(1+0{,}06)^5 - 1} \approx 9{,}49586\ (\text{тис. дол.}).$$

Покроковий розрахунок здійснюється виходячи із співвідношень:

$$Y = D \cdot \frac{i \cdot (1+i)^n}{(1+i)^n - 1}; \quad I = D \cdot i; \quad R = Y - I; \quad D_i = D_{i-1} - R_{i-1}.$$

На рис. 8.72; 8.73 поданий поетапний план погашення боргу зі зміною відсоткових ставок у *MS Excel*.

	A	B	C	D	E	F	G
18	2. Погашення боргу рівними терміновими сплатами при зміні процентних ставок						
19	n1=	2	i1=	0,06			
20	n2=	3	i2=	0,08			
21	Рік	Процентна ставка, i	Залишок боргу на початок року, **D**	Процентний платіж, **I**	Річна витрата по погашенню основного боргу, **R**	Річна термінова сплата, **Y**	
22	1	0,06	=B2	=B22*C22	=F22-D22	=C22*(B22*(1+B22)^$B$3)/((1+B22)^$B$3-1)	
23	2	0,06	=C22-E22	=B23*C23	=F23-D23	=C23*(B23*(1+B23)^4)/((1+B23)^4-1)	
24	3	0,08	=C23-E23	=B24*C24	=F24-D24	=C24*(B24*(1+B24)^3)/((1+B24)^3-1)	
25	4	0,08	=C24-E24	=B25*C25	=F25-D25	=C25*(B25*(1+B25)^2)/((1+B25)^2-1)	
26	5	0,08	=C25-E25	=B26*C26	=F26-D26	=C26*(B26*(1+B26)^1)/((1+B26)^1-1)	
27	**Всього**			=СУММ(D22:D26)	=СУММ(E22:E26)	=СУММ(F22:F26)	

Рис. 8.72. **Розрахунок поетапного плану погашення боргу рівними терміновими сплатами**

21	Рік	Процентна ставка, i	Залишок боргу на початок року, **D**	Процентний платіж, **I**	Річна витрата по погашенню основного боргу, **R**	Річна термінова сплата, **Y**
22	1	0,06	40,0000	2,4000	7,0959	9,4959
23	2	0,06	32,9041	1,9742	7,5216	9,4959
24	3	0,08	25,3825	2,0306	7,8187	9,8493
25	4	0,08	17,5639	1,4051	8,4442	9,8493
26	5	0,08	9,1197	0,7296	9,1197	9,8493
27	**Всього**			**8,5395**	**40,0000**	**48,5395**

Рис. 8.73. **Результати розрахунку поетапного плану погашення боргу рівними терміновими сплатами зі зміною відсоткових ставок**

Таким чином, збільшення відсоткової ставки приводить до збільшення щорічних виплат. Як видно з прикладу, за три роки зміна ставки на 2 % призвела до збільшення сумарної переплати на 1,0603 тис. дол. і складає 48,5395 тис. дол.

3. Погашення позики рівними виплатами основного боргу. В цьому випадку розміри платежів за основним боргом дорівнюватимуть:

$$\frac{D}{n} = R_1 = R_2 = \cdots = R_k = R_k, \qquad R = \frac{40}{5} = 8\ (\text{тис. дол.}).$$

Залишок основного боргу на початок кожного розрахункового періоду (D_k) визначається як: $D_k = D - R \cdot (k-1)$, де D – сума всього боргу; k – номер розрахункового періоду.

Величина термінової сплати в кожному розрахунковому періоді дорівнює $Y_k = D_k \cdot i + R$. Наприклад, $Y_4 = D_4 \cdot i + R = \big(D - R \cdot (k-1)\big) \cdot i + R = (40 - 8 \cdot (4-1)) \cdot 0{,}06 + 8 = 8{,}96$ (тис. дол.)

Величина відсоткового платежу для k-го розрахункового періоду визначається за формулою: $I_k = D_k \cdot i$.

Наприклад, $I_4 = D_4 \cdot i = (D - R \cdot (k-1)) \cdot i = (40 - 8 \cdot (4-1)) \cdot 0{,}06 = = 0{,}96$ (тис. дол.)

На рис. 8.74; 8.75 подано розрахунок поетапного плану погашення позики рівними виплатами основного боргу, а також розрахунок окремих параметрів позики.

	A	B	C	D	E
29	**3. Погашення позики рівними виплатами основного боргу**				
30	Рік	Залишок боргу на початок року, **D**	Процентний платіж, **I**	Річна витрата по погашенню основного боргу, **R**	Річна термінова сплата, **Y**
31	1	=B2	=B31*$B$4	=$B$31/$B$3	=C31+D31
32	2	=B31-D31	=B32*$B$4	=$B$31/$B$3	=C32+D32
33	3	=B32-D32	=B33*$B$4	=$B$31/$B$3	=C33+D33
34	4	=B33-D33	=B34*$B$4	=$B$31/$B$3	=C34+D34
35	5	=B34-D34	=B35*$B$4	=$B$31/$B$3	=C35+D35
36	**Всього**		=СУММ(C31:C35)	**=СУММ(D31:D35)**	**=СУММ(E31:E35)**
37	I_4=	=(B2-D31*3)*B4			
38	Y_4=	=(B31-D31*3)*B4+D31			

Рис. 8.74. **Розрахунок поетапного плану погашення позики рівними виплатами основного боргу**

	A	B	C	D	E
29	**3. Погашення позики рівними виплатами основного боргу**				
30	Рік	Залишок боргу на початок року, **D**	Процентний платіж, **I**	Річна витрата по погашенню основного боргу, **R**	Річна термінова сплата, **Y**
31	1	40	2,4	8,00	10,40
32	2	32,00	1,92	8,00	9,92
33	3	24,00	1,44	8,00	9,44
34	4	16,00	0,96	8,00	8,96
35	5	8,00	0,48	8,00	8,48
36	**Всього**		**7,2**	**40,00**	**47,20**
37	I_4=	0,96			
38	Y_4=	8,96			

Рис. 8.75. **Результат розрахунку поетапного плану погашення позики рівними виплатами основного боргу**

Таким чином, за умови погашення позики рівними виплатами основного боргу з часом річна термінова сплата зменшується. Це відбувається за рахунок того, що залишок боргу та відсотковий платіж з кожною виплатою зменшуються. Сумарна переплата складає 7,2 тис. дол.

4. Погашення позики змінними виплатами основного боргу (зміна виплат в арифметичній прогресії). За умовами контракту передбачено погашення основного боргу платежами, що зростають в арифметичній прогресії з різницею d = 1 тис. дол. У цьому випадку величина виплати основного боргу в періоді k дорівнює:

$$R_k = R_1 \pm (n-k) \cdot d.$$

Величина основного боргу дорівнює сумі всіх виплат, тобто сумі членів арифметичної прогресії:

$$D = \frac{(R_1 + R_1 + (n-1) \cdot d) \cdot n}{2} = \frac{n}{2} \cdot (2 \cdot R_1 + (n-1) \cdot d).$$

Величина першої виплати основного боргу для прогресії розраховується за формулою:

$$R_1 = \frac{D}{n} \mp \frac{(n-1)}{2} \cdot d.$$

На рис. 8.76 наведений розрахунок поетапного плану погашення боргу зі зміною виплат в арифметичній прогресії.

	A	B	C	D	E
39	**4. Зміна виплат основного боргу в арифметичній прогресії**				
40	d =	1			
41	Рік	Залишок боргу на початок	Процентний платіж, I	Річна витрата по погашенню основного боргу, R	Річна термінова сплата, Y
42	1	=B2	=B42*$B$4	=(B2/B3)-(((B3-1)/2)*B40)	=C42+D42
43	2	=B42-D42	=B43*$B$4	=D42+$B$40	=C43+D43
44	3	=B43-D43	=B44*$B$4	=D43+$B$40	=C44+D44
45	4	=B44-D44	=B45*$B$4	=D44+$B$40	=C45+D45
46	5	=B45-D45	=B46*$B$4	=D45+$B$40	=C46+D46
47	**Всього**		=СУММ(C42:C46)	**=СУММ(D42:D46)**	**=СУММ(E42:E46)**

41	Рік	Залишок боргу на початок року, D	Процентний платіж, I	Річна витрата по погашенню основного боргу, R	Річна термінова сплата, Y
42	1	40,00	2,40	6,00	8,40
43	2	34,00	2,04	7,00	9,04
44	3	27,00	1,62	8,00	9,62
45	4	19,00	1,14	9,00	10,14
46	5	10,00	0,60	10,00	10,60
47	**Всього**		**7,80**	**40,00**	**47,80**

Рис. 8.76. **Розрахунок і результати розрахунку поетапного плану погашення боргу зі зміною виплат в арифметичній прогресії**

Таким чином, сумарні виплати за кредитом складуть 47,8 тис. дол.; переплата при цьому дорівнюватиме 7,8 тис. дол.

5. Зміна виплат у геометричній прогресії. Одним з варіантів погашення кредитної заборгованості є погашення основного боргу платежами, кожен з яких більше або менше попереднього в q разів.

Величина основного боргу визначається за формулою геометричної прогресії, де R_1 – перший член прогресії і одночасно перший платіж основного боргу, q – знаменник прогресії. Тоді основний борг D дорівнює:

$$D = R_1 \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1}, \qquad де\ q > 1 \quad або \quad D = R_1 \cdot \frac{1 - q^n}{1 - q}, \qquad де\ q < 1.$$

Звідси, величина першої виплати основного боргу:

$$R_1 = D \cdot \frac{q - 1}{q^n - 1}, \qquad \text{де } q > 1, \qquad \text{або} \quad R_1 = D \cdot \frac{1 - q}{1 - q^n}, \qquad \text{де } q < 1.$$

На рис. 8.77; 8.78 поданий поетапний план погашення боргу, враховуючи, що виплати основного боргу повинні зростати на 5 % щорічно.

	A	B	C	D	E
49	5. Зміна виплат основного боргу в геометрчній прогресії				
50	q =	1,05			
51	Рік	Залишок боргу на початок	Процентний платіж, **I**	Річна витрата по погашенню основного боргу, **R**	Річна термінова сплата, **Y**
52	1	=B2	=B52*$B$4	=B2*(B50-1)/(B50^B3-1)	=C52+D52
53	2	=B52-D52	=B53*$B$4	=D52*$B$50	=C53+D53
54	3	=B53-D53	=B54*$B$4	=D53*$B$50	=C54+D54
55	4	=B54-D54	=B55*$B$4	=D54*$B$50	=C55+D55
56	5	=B55-D55	=B56*$B$4	=D55*$B$50	=C56+D56
57	Всього		=СУММ(C52:C56)	=СУММ(D52:D56)	=СУММ(E52:E56)

Рис. 8.77. **Розрахунок поетапного плану погашення боргу зі зміною виплат в арифметичній прогресії**

51	Рік	Залишок боргу на початок року, **D**	Процентний платіж, **I**	Річна витрата по погашенню основного боргу, **R**	Річна термінова сплата, **Y**
52	1	40,00	2,4	7,2390	9,6390
53	2	32,7610	1,9657	7,6009	9,5666
54	3	25,1601	1,5096	7,9810	9,4906
55	4	17,1791	1,0307	8,3800	9,4108
56	5	8,7990	0,5279	8,7990	9,3270
57	Всього		7,4340	40,0000	47,4340

Рис. 8.78. **Результат розрахунку поетапного плану погашення боргу зі зміною виплат в арифметичній прогресії**

Таким чином, сумарні виплати за кредитом складуть 47,434 тис. дол.; переплата дорівнюватиме 7,434 тис. дол.

6. Конверсія позик. Позначимо параметри позик:

n – первинний термін погашення позик до конверсії;

n_1 – термін, на який продовжений період погашення в результаті конверсії;

k – число сплачених розрахункових періодів до конверсії;

i – відсоткова ставка до конверсії;

i_1– відсоткова ставка після конверсії;

Y – величина термінової сплати до конверсії;

Y_1 – величина термінової сплати після конверсії;

D – величина основного боргу;

D_{n-k}– залишок боргу на момент конверсії.

Для складання плану погашення конверсійної позики визначають:

1) величину термінової сплати за старими умовами:

$$Y = D \cdot \frac{i \cdot (1+i)^n}{(1+i)^n - 1} = 40 \cdot \frac{0{,}06 \cdot (1+0{,}06)^5}{(1+0{,}06)^5 - 1} \approx 9{,}49586\ (\text{тис. дол.});$$

2) залишок боргу на момент конверсії:

$$D_{n-k} = Y \cdot \frac{(1+i)^{n-k} - 1}{(1+i)^{n-k} \cdot i} = D_4 = 9{,}49586 \cdot \frac{(1+0{,}06)^{5-k} - 1}{(1+0{,}06)^{5-3} \cdot 0{,}06} =$$
$$= 17{,}4097\ (\text{тис. дол.});$$

3) величину термінової сплати за новими умовами:

$$Y_1 = D_{n-k} \cdot \frac{i_1 \cdot (1+i_1)^{n-k+n_1}}{(1+i_1)^{n-k+n_1} - 1} = 17{,}4097 \cdot \frac{0{,}1 \cdot (1+0{,}1)^{5-3+2}}{(1+0{,}1)^{5-3+2} - 1} \approx$$
$$\approx 5{,}4923\ (\text{тис. дол.}).$$

Розрахунок у *MS Excel* плану погашення конверсованого кредиту та його результат наведені на рис. 8.79; 8.80.

Таким чином, після зміни умов виплати боргу сумарна сума виплат склала 50,4565 тис. дол., що на 2,9772 тис. дол. більше величини виплат за первісним планом погашення.

	A	B	C	D	E	F
59	**6. Конверсія позик**					
60	Вихідні дані кредиту					
61	D =	40	i_1 =	0,06		
62	n =	5	i_1 =	0,1		
63	n_1 =	2				
64	Після виплати третього платежу досягнута домовленість про продовження терміну погашення позики на 2 роки і збільшення процентної ставки з моменту конверсії до 10 %					
65	Рік	Залишок боргу на початок	Процентний платіж, I	Річна витрата по погашенню основного боргу,	Річна термінова сплата, Y	
66	1	=B61	=B66*$D$61	=E66-C66	=$F$22	- до конверсії
67	2	=B66-D66	=B67*$D$61	=E67-C67	=$F$22	
68	3	=B67-D67	=B68*$D$61	=E68-C68	=$F$22	
69	4	=B68-D68	=B69*0,1	=E69-C69	=B69*(0,1*(1+0,1)^(5-3+2))/((1+0,1)^(5-3+2)-1)	- після конверсії
70	5	=B69-D69	=B70*0,1	=E70-C70	=$E$69	
71	6	=B70-D70	=B71*0,1	=E71-C71	=$E$69	
72	7	=B71-D71	=B72*0,1	=E72-C72	=$E$69	
73	**Всього**		=СУММ(C66:C72)	=СУММ(D66:D72)	=СУММ(E66:E72)	
74	D_4 =	=E66*((1+D61)^(5-3)-1)/((1+D61)^(5-3)*D61)				

Рис. 8.79. **Розрахунок плану погашення конверсованого кредиту**

65	Рік	Залишок боргу на початок року, D	Процентний платіж, I	Річна витрата по погашенню основного боргу, R	Річна термінова сплата, Y
66	1	40	2,4	7,0959	9,4959
67	2	32,9041	1,97424864	7,5216	9,4959
68	3	25,3825	1,5229522	7,9729	9,4959
69	4	17,4096	1,74096328	3,7513	5,4922
70	5	13,6584	1,36583652	4,1264	5,4922
71	6	9,5320	0,95319709	4,5390	5,4922
72	7	4,9929	0,49929371	4,9929	5,4922
73	**Всього**		**10,4564914**	**40,0000**	**50,4565**
74	D_4 =	17,4096			

Рис. 8.80. **Результат розрахунку плану погашення конверсованого кредиту**

7. Іпотечний кредит з щомісячним погашенням основного боргу та відсотків за ним рівними терміновими сплатами.

Розрахунок у *MS Excel* плану погашення іпотечного кредиту з щомісячним погашенням основного боргу та відсотків за ним рівними терміновими сплатами наведений на рис. 8.81; 8.82.

	A	B	C	D	E
76	**7. Щомісячне погашення іпотечного кредиту з рівними терміновими сплатами**				
77	Вихідні дані кредиту				
78	D	40000			
79	n	5	років	місяців	=B79*12
80	i	0,06		щоміс. % =	=B80/12
81	Міс	Залишок боргу на початок місяця, **D**	Процентний платіж, **I**	Ежемесячный расход по погашению основного долга, **R**	Щомісячна термінова сплата, ***Y***
82	1	=B78	=B82*$E$80	=E82-C82	=B78*E80*(1+E80)^(5*12)/((1+E80)^(5*12)-1)
83	2	=B82-D82	=B83*$E$80	=E83-C83	=$E$82
84	3	=B83-D83	=B84*$E$80	=E84-C84	=$E$82
137	56	=B136-D136	=B137*$E$80	=E137-C137	=$E$82
138	57	=B137-D137	=B138*$E$80	=E138-C138	=$E$82
139	58	=B138-D138	=B139*$E$80	=E139-C139	=$E$82
140	59	=B139-D139	=B140*$E$80	=E140-C140	=$E$82
141	60	=B140-D140	=B141*$E$80	=E141-C141	=$E$82
142	**Всього**		**=СУММ(C82:C141)**	**=СУММ(D82:D141)**	**=СУММ(E82:E141)**

Рис. 8.81. **Розрахунок плану погашення іпотечного кредиту з рівними терміновими сплатами** (фрагмент)

81	Месяц	Залишок боргу на початок місяця, **D**	Процентний платіж, **I**	Ежемесячный расход по погашению основного долга, **R**	Щомісячна термінова сплата, ***Y***
82	1	40000	200	573,312	773,312
83	2	39426,688	197,133	576,179	773,312
84	3	38850,509	194,253	579,059	773,312
137	56	3809,236	19,046	754,266	773,312
138	57	3054,97	15,275	758,037	773,312
139	58	2296,933	11,485	761,827	773,312
140	59	1535,106	7,676	765,636	773,312
141	60	769,47	3,847	769,465	773,312
142	**Всього**		**6398,725**	**40000,00**	**46398,72**

Рис. 8.82. **Результат розрахунку плану погашення іпотечного кредиту з рівними терміновими сплатами** (фрагмент)

Так, переплата за цими умовами позики складає 6 398,725 дол.

8. Погашення іпотечного кредиту рівними щомісячними виплатами основного боргу.

Розрахунок у *MS Excel* плану погашення іпотечного кредиту рівними щомісячними виплатами основного боргу наведений на рис. 8.83; 8.84.

	A	B	C	D	E
144	**8. Погашення іпотечного кредиту рівними щомісячними виплатами основного боргу**				
145	Міс	Залишок боргу на початок місяця, **D**	Процентний платіж, **I**	Щомісячна витрата по погашенню основного боргу, **R**	Щомісячна термінова сплата, ***Y***
146	1	=B78	=B146*$E$80	=B146/60	=C146+D146
147	2	=B146-D146	=B147*$E$80	=$D$146	=C147+D147
148	3	=B147-D147	=B148*$E$80	=$D$146	=C148+D148
203	58	=B202-D202	=B203*$E$80	=$D$146	=C203+D203
204	59	=B203-D203	=B204*$E$80	=$D$146	=C204+D204
205	60	=B204-D204	=B205*$E$80	=$D$146	=C205+D205
206	**Всього**		=СУММ(C146:C205)	=СУММ(D146:D205	=СУММ(E146:E20

Рис. 8.83. **Розрахунок плану погашення іпотечного кредиту рівними щомісячними виплатами основного боргу**

145	Мес яц	Залишок боргу на початок місяця, **D**	Процентний платіж, **I**	Годовой расход по погашению основного долга, **R**	Щомісячна термінова сплата, ***Y***
146	1	40 000,00	200	666,67	866,67
147	2	39 333,33	196,67	666,67	863,34
148	3	38 666,66	193,33	666,67	860
203	58	1 999,81	10	666,67	676,67
204	59	1 333,14	6,67	666,67	673,34
205	60	666,47	3,33	666,67	670
206	**Всього**		**6100**	**40000,2**	**46100,2**

Рис. 8.84. **Результат розрахунку плану погашення іпотечного кредиту рівними щомісячними виплатами основного боргу**

За такими умовами позики переплата менша і складає лише 6 100 дол.

Лабораторна робота 6
Розрахунок та аналіз показників ефективності фінансових операцій та інвестицій

Мета – закріплення теоретичного та практичного матеріалу, набуття навиків розрахунку показників ефективності фінансових операцій.

1. Початкові дані. Фірмі надали кредит на 250 днів під 12 % річних. Комісійні склали 0,5 % від суми кредиту.

Необхідно:

1. Визначити прибутковість операції для кредитора у вигляді річної ставки складних відсотків:

1.1. Якщо кредит був виданий під прості відсотки (365/360).

1.2. Якщо кредит був виданий під складні відсотки (365/365).

2. Визначити прибутковість облікової операції, якщо в початкових даних вказана сума векселя та ставка дисконту.

2. Початкові дані. Розглядаються пропозиції від двох фірм щодо будівництва промислового об'єкта. У табл. 8.5 вказані початкові умови для кожної фірми.

Таблиця 8.5

Початкові умови фірм з будівництва промислового об'єкту

Параметри	Умови фірми А	Умови фірми Б
Ціна нового об'єкта, млн грн	50,0	55,0
Термін будівництва, років	1	1
Авансові платежі (вносяться під час підписання контракту), млн грн	20,0	10,0
Термін кредиту, років	8	7
Пільговий період, років	2	3
Ставка відсотків, %	10,0	11,0

Кредит погашається рівними річними виплатами, ставка порівняння $q = 12\ \%$.

Необхідно вибрати оптимальні умови контракту.

3. Початкові дані. Умови двох контрактів: $P_1 = 10{,}0$ млн грн; $P_2 = 12{,}0$ млн грн; $i_1 = 8\ \%$; $i_2 = 7\ \%$; $n_1 = 5$ років; $n_2 = 4$ роки.

Необхідно:

3.1. Визначити граничні параметри другого контракту, прийнявши ставку порівняння $q = 10\ \%$.

3.2. Визначити граничні параметри другого контракту, якщо $n_1 = n_2 = 5$ років.

Для запису формул розрахунку ставок повної прибутковості приймемо такі позначення:

$i_{\text{е}}$ – ставка повної прибутковості;

i – відсоткова ставка;

g – відсоток комісійних утримань від суми кредиту;

n – термін погашення заборгованості ($n = t/K$);

n' – часовий інтервал від моменту обліку векселя до моменту сплати за ним;

d – облікова ставка.

1. Розрахунок ставки повної прибутковості з урахуванням комісійних.

Початкові дані: t = 250; i = 0,12; g = 0,005; K = 360 (365).

1.1. Видача позики під прості відсотки (365/360)*:*

$$i_e = \left(\frac{1+n\cdot i}{1-g}\right)^{\frac{1}{n}} - 1 = \left(\frac{1+\frac{250}{360}\cdot 0{,}12}{1-0{,}005}\right)^{\frac{360}{250}} - 1 = 0{,}130296.$$

1.2. Видача позики під складні відсотки (365/365):

$$i_e = \frac{1+i}{(1-g)^{\frac{1}{n}}} - 1 = \frac{1+0{,}12}{(1-0{,}005)^{\frac{365}{250}}} - 1 = 0{,}128227.$$

1.3. Реалізація облікової операції:

$$i_e = \left(\frac{1}{1-n'\cdot d-g}\right)^{\frac{1}{n}} - 1 = \left(\frac{1}{1-\frac{250}{360}\cdot 0{,}12-0{,}005}\right)^{\frac{365}{250}} - 1 = 0{,}144562.$$

Розрахунок у *MS Excel* ефективної ставки (ставки повної прибутковості) з урахуванням комісійних під час видачі позики під різні умови наведений на рис. 8.85.

	A	B	C	D	E	F	G
1	1. Розрахунок ставки повної прибутковості з урахуванням комісійних						
2	t=	250	днів				
3	i=	0,12		K=	360	365	
4	g=	0,005					
5	1.1. Ефективна ставка складних % при видачі позики під прості відсотки (365/360)						
6	$i_э$ =	=((1+B2/E3*B3)/(1-B4))^(E3/B2)-1					
7	1.2. Ефективна ставка складних % при видачі позики під складні відсотки (365/365)						
8	$i_э$ =	=((1+B3)/((1-B4)^(F3/B2)))-1					
9	1.3. Ефективна ставка складних % при реалізації облікової операції						
10	$i_э$ =	=((1/(1-(B2/E3)*B3-B4))^(F3/B2))-1					

Рис. 8.85. **Розрахунок і результати розрахунку ефективної ставки з урахуванням комісійних під час видачі позики під різні умови**

5	1.1. Ефективна ставка складних % при видачі позики під прості відсотки (365/360)		
6	$i_э$ =	**0,130296**	
7	1.2. Ефективна ставка складних % при видачі позики під складні відсотки (365/365)		
8	$i_э$ =	**0,128227**	
9	1.3. Ефективна ставка складних % при реалізації облікової операції		
10	$i_э$ =	**0,144562**	

Закінчення рис. 8.85

Таким чином, найвища ефективна ставка – за умов реалізації облікової операції.

2. Вибір оптимальних умов у комерційних контрактах. Аналіз фінансових наслідків реалізації комерційних контрактів може проводитись на основі використання методу порівняння сучасних величин усіх платежів, передбачених цими контрактами, коли всі платежі приводяться до моменту початку їх дії. Під час обчислення сучасних величин дисконтування всіх платежів, передбачених контрактами, проводиться за єдиною відсотковою ставкою – так званою *ставкою порівняння.* Під час аналізу умов різних контрактів необхідно враховувати, що збільшення терміну постачання скорочує сучасну величину витрат покупця. Тому зіставні результати можуть бути отримані у тому випадку, коли терміни постачань однакові.

За одноразового постачання товару заборгованість, як правило, визначається на момент постачання:

$$A = Q + I \cdot V^{t+L} + Y \cdot a_{n,q} \cdot V^{t+L},$$

де Q – сума авансового платежу;

I – відсотки в пільговому періоді (прості або складні);

$V = (1+q)^{-1}$;

t – час від моменту укладення оборудки до моменту постачання товару;

L – час пільгового періоду;

$a_{n,q}$ – коефіцієнт приведення;

n – термін погашення заборгованості;

Y – величина щорічних термінових сплат.

За умови постачання товару партіями із заздалегідь обумовленими термінами постачання для кожної партії встановлюють відповідні моменти часу, що визначають заборгованість:

$$A = Q_1 + Q_2 \cdot V^t + I \cdot a_{L,q} \cdot V^t + Y \cdot a_{L,q} \cdot V^{t+L},$$

де t – термін виплати останнього авансового платежу;

Q_1 і Q_2 – суми авансових платежів;

L – пільговий період (відсотки виплачуються щорічно);

$Y = D \cdot \frac{i \cdot (1+i)^n}{(1+i)^n - 1}$ – величина щорічних термінових сплат;

n – термін погашення заборгованості (погашення проводиться рівними річними платежами);

i – договірна відсоткова ставка;

I – нараховані за пільговий період відсотки;

q – ставка порівняння;

D – накопичена заборгованість на кінець терміну постачання за умови, що на авансові платежі нараховуються відсотки:

$$D = \sum_j M_j \cdot (1+i)^{T_j} - \sum_k Q_k \cdot (1+i)^{T_k},$$

де M_j – вартість кожної партії товару, що поставляється ($M = \sum M_j$ – загальна вартість товару);

T_j – терміни постачань кожній партії товару ($T = \sum T_j$ – загальний термін);

T_k – час від моменту виплати останнього авансового платежу до кінця терміну постачань ($T_k = T - k$).

Зважаючи на початкові дані завдання, в табл. 8.6 наведені умовні значення основних параметрів комерційних контрактів.

Таблиця 8.6

Умовні позначення основних параметрів контрактів

Параметри контрактів	Умовне позначення	Параметри контрактів	Умовне позначення
Сума авансового платежу, млн грн	Q	Залишок заборгованості після сплати авансу, млн грн	D
Час від моменту укладення контракту до моменту постачання товару, років	t	Термін погашення заборгованості (термін кредиту – пільговий період), років	n
Ставка відсотків за кредитом	i	Пільговий період, років	L
Множник дисконтування з параметром (t)	V^t	Множник дисконтування з параметром $(t+L)$	V^{t+L}
Коефіцієнт приведення з параметрами (n,q)	$a_{n,q}$	Коефіцієнт приведення з параметрами (L,q)	$a_{L,q}$
Сучасна вартість заборгованості, млн грн	$\boldsymbol{A}$	--	--

Розрахунок у *MS Excel* основних параметрів контрактів наведений на рис. 8.86; 8.87.

	E	F	G
22	**Ум. позн.**	**А**	**Б**
23	**Q**	20	10
24	**D**	=D14-D16	=E14-E16
25	**t**	1	1
26	**n**	6	4
27	**i**	0,1	0,11
28	**L**	2	3
29	V^t	=(1+$B$20)^(-F25)	=(1+$B$20)^(-G25)
30	$V^{(t+L)}$	=(1+$B$20)^(-(F25+F28))	=(1+$B$20)^(-(G25+G28))
31	$a_{n,q}$	=(1-(1+$B$20)^(-$F$26))/$B$20	=(1-(1+$B$20)^(-$G$26))/$B$20
32	$a_{L,q}$	=(1-(1+$B$20)^(-$F$28))/$B$20	=(1-(1+$B$20)^(-$G$28))/$B$20
33		=(F27*(1+F27)^F26)/(((1+F27)^F26)-1)	=(G27*(1+G27)^G26)/(((1+G27)^G26)-1)
34		=F33*F31*F30	=G33*G31*G30
35		=F27*F32*F29	=G27*G32*G29
36	**A**	**=F23+F24*(F34+F35)**	**=G23+G24*(G34+G35)**

Рис. 8.86. **Розрахунок основних параметрів комерційних контрактів**

	E	F	G
29	V^t	0,892857143	0,892857143
30	$V^{(t+L)}$	0,711780248	0,635518078
31	$a_{n,q}$	4,111407324	3,037349347
32	$a_{L,q}$	1,69005102	2,401831268
33		0,22960738	0,322326352
34		0,671927291	0,622183469
35		0,150897413	0,235894142
36	**A**	**44,68474111**	**48,61349249**

Рис. 8.87. **Результати розрахунку основних параметрів комерційних контрактів**

Таким чином, слід надати перевагу умовам фірми А, оскільки сучасна величина кредиту в даній фірмі менша, ніж у фірми Б.

3. Граничні значення параметрів комерційних контрактів. Для порівняння конкурентоспроможності двох альтернативних контрактів використовується метод визначення граничних значень параметрів, за якими зіставляються ціни або відсоткові ставки.

Граничним значенням параметра контракту є величина, що забезпечує його конкурентоспроможність щодо іншого, базового, тобто порівнюваного з ним, контракту за незмінності інших умов

У табл. 8.7 наведені умови двох контрактів.

Таблиця 8.7

Умови двох контрактів

Параметри	Умовне позначення	Умови контракту А	Умови контракту Б
Вартість товару за умовами контракту, млн грн	P_i	10	12
Термін платежів, років	n_i	5	4
Ставка порівняння, %	q	10	
Ставка відсотків, %	i	8	7

Облік усіх умов контрактів з використанням граничних значень їх параметрів повинен забезпечити рівність сучасних величин платежів покупця за обома контрактами.

$$P_1 \cdot \left(\frac{1+i_1}{1+q}\right)^{-n_1} = P_2 \cdot \left(\frac{1+i_2}{1+q}\right)^{-n_2},$$

де P_1 і P_2 – вартість товару за умовами першого та другого контрактів;
i_1 і i_2 – відсоткові ставки;
n_1 і n_2 – терміни платежів;
q – ставка порівняння.

а) з приведеного виразу знайдемо i_2^* і P_2^*:

$$i_2^* = (1+q) \cdot \left[\frac{P_2}{P_1} \cdot \left(\frac{1+i_1}{1+q}\right)^{n_1}\right]^{\frac{1}{n_2}} - 1 = (1+0{,}1) \cdot \left[\frac{12}{10} \cdot \left(\frac{1+0{,}08}{1+0{,}1}\right)^{5}\right]^{\frac{1}{4}} - 1 = \\ = 0{,}125193;$$

$$P_2^* = P_1 \cdot \frac{(1+i_2)^{n_2}}{(1+i_1)^{n_1}} \cdot (1+q)^{n_1-n_2} = 10 \cdot \frac{(1+0{,}07)^4}{(1+0{,}08)^5} \cdot (1+0{,}1)^{5-4} = \\ = 9{,}813163 \text{ (млн грн)};$$

б) значення i_2^* і P_2^* істотно залежать від прийнятої ставки порівняння та терміну кредитування. У випадку, якщо $n_1 = n_2 = n$, то для розрахунків граничних значень параметрів операції можна обійтись без ставки порівняння, а саме:

$$i_2^* = (1+i_1)\cdot\left[\frac{P_1}{P_2}\right]^{\frac{1}{n}} - 1 = (1+0{,}08)\cdot\left[\frac{10}{12}\right]^{\frac{1}{5}} - 1 = 0{,}0413279;$$

$$P_2^* = P_1\cdot\left(\frac{1+i_1}{1+i_2}\right)^n = 10\cdot\left(\frac{1+0{,}08}{1+0{,}07}\right)^5 = 10{,}476106\ (\text{млн грн}).$$

Розрахунок у *MS Excel* граничних значень параметрів комерційних контрактів наведений на рис. 8.88; 8.89.

	A	B	C	D	E	
38	**3. Граничні значення параметрів комерційних контрактів**					
39	P_1 =	10	P_2 =	12	q=	0,1
40	i_1 =	0,08	i_2 =	0,07		
41	n_1 =	5	n_2 =	4		
42	i2*=	=((1+F39)*((D39/B39*(((1+B40)/(1+F39))^B41))^(1/D41)))-1				
43	A1=	=B39*(((1+B40)/(1+F39))^(-B41))				
44	A2*=	=D39*((1+B42)/(1+F39))^(-D41)				
45						
46	i2*=	=(1+B40)*((B39/D39)^(1/B41))-1				
47	S1=	=B39*(1+B40)^5				
48	S2*=	=D39*(1+B46)^5				

Рис. 8.88. **Розрахунок граничних значень параметрів комерційних контрактів**

42	i2*=	0,1252
43	A1=	10,961
44	A2*=	10,961
45		
46	i2*=	0,0413
47	S1=	14,693
48	S2*=	14,693

Рис. 8.89. **Результати розрахунку граничних значень параметрів комерційних контрактів**

Таким чином, за умови, що терміни контрактів однакові, переважатимуть умови першого, оскільки $i_2^* < i_2$ і $P_2^* < P_2$.

Глосарій

Акція (англ. *stock*, рос. *акция*) – пайовий цінний папір, що підтверджує право її власника брати участь в управлінні товариством (зазвичай, за винятком привілейованих акцій), у розподілі прибутку товариства й отриманні частки майна, пропорційної його внеску у статутний капітал, у разі ліквідації цього товариства.

Амортизація боргу (англ. *amortization of debt*, рос. *амортизация долга*) – витрати, пов'язані з погашенням боргу та виплатою відсотків за ним (обслуговування боргу); погашення боргу шляхом періодичних виплат частини основної суми боргу (на відміну від погашення боргу разовою виплатою).

Англійська практика (точні відсотки з точною кількістю днів позики) (англ. *English practice*, рос. *английская практика* (*точные проценты с точным числом дней ссуды*) – метод відсоткових розрахунків, за якого тривалість року вважають такою, що дорівнює 365 або 366 дням, а кількість днів між датами отримання та погашення кредиту розраховують точно за календарем.

Антисипативний (попередній) метод нарахування відсотків (англ. *anticipating method of charging interest*, рос. *антисипативный (предварительный) метод начисления процентов*) – полягає в тому, що відсотки нараховують на початку розрахункового періоду, до того ж за основу (100 %) беруть суму боргу, що підлягає погашенню.

Ануїтет (фінансова рента) (англ. *annuity*, рос. *аннуитет*) – односпрямований грошовий потік з однаковими інтервалами часу. Будь-який елемент грошового потоку називають членом ануїтету (членом ренти), а величину постійного часового інтервалу між двома його послідовними елементами – періодом ануїтету (періодом ренти); ряд послідовних платежів, здійснених через однакові проміжки часу.

Ануїтет безперервний (англ. *continuous annuity*, рос. *аннуитет непрерывный*) – ануїтет, у якому платежі здійснюють так часто, що їх можна розглядати як безперервні.

Ануїтет безстроковий (англ. *perpetual annuity*, рос. аннуитет бессрочный) – ануїтет, кількість елементів якого може бути необмежено великою.

Ануїтет відстрочений (англ. *deferred annuity*, рос. *аннуитет отсроченный*) – ануїтет, початок першого періоду якого зрушено вправо за часовою віссю від моменту часу, на який відбувається аналіз.

Ануїтет змінний (англ. *variable annuity*, рос. *аннуитет переменный*) – ануїтет із неоднаковими елементами.

Ануїтет постнумерандо (англ. *ordinary annuity*, рос. *аннуитет постнумерандо*) – ануїтет, кожен елемент якого має місце в кінці відповідного періоду.

Ануїтет пренумерандо (англ. *annuity due*, рос. *аннуитет пренумерандо*) – ануїтет, кожен елемент якого має місце на початку відповідного періоду.

Ануїтет терміновий (англ. *term annuity*, рос. *аннуитет срочный*) – ануїтет, кількість періодів якого обмежено.

Ануїтет умовний (англ. *contingent annuity*, рос. *аннуитет условный*) – ануїтет, виплата якого є залежною від настання деякої події (наприклад, платежі з особистого страхування).

Банк (англ. *bank*, рос. *банк*) – установа, яка має ліцензію на здійснення операцій із фінансовими активами, включаючи приймання вкладів, здійснення розрахунків, кредитування, емісії грошей, операцій із золотом, іноземною валютою та ін.

Банківський кредит (англ. *banking credit*, рос. *банковский кредит*) – кредит, що надає один суб'єкт угоди (переважно фінансовий інститут) іншому у вигляді грошової суми.

Безперервні відсотки (англ. *continuous compounding*, рос. *непрерывные проценты*) – нарахування відсотків на суму, видану (отриману) у кредит, або дисконтування нарощених сум, що відбувається з частотою, за якої їх можна розглядати як безперервні.

Бета-коефіцієнт ($\boldsymbol{\beta}$) (англ. *beta coefficient*, рос. *бета-коэффициент*) – кількісний показник, що оцінює зміни у прибутковості окремих акцій у зіставленні з динамікою ринкового доходу. Акції з $\beta > 1$ характеризуються як агресивні та є більш ризикованими, ніж ринок у цілому. Акції з $\beta < 1$ характеризуються як захищені і є менш ризикованими, ніж ринок загалом.

Брутто-ставка (страховий тариф, повна премія) (англ. *gross premium*, рос. *брутто-ставка*) – виражена в гривнях плата з одиниці страхової суми або відсоткова ставка від сукупної страхової суми. Вона є основою для формування страхового фонду; до її складу входить нетто-ставка.

Брутто-ставка відсотка (повна ставка) (англ. *gross rate*, рос. *брутто-ставка процента*) – будь-яка відсоткова ставка, що перевищує номінальну.

Вартість (англ. *value*, рос. *стоимость*) – грошова оцінка цінності певного об'єкта.

Вартість внутрішня, або теоретична (англ. *intrinsic value*, рос. *стоимость внутренняя*, или *теоретическая*) – вартість фінансового активу, розрахована шляхом дисконтування за прийнятною ставкою очікуваних надходжень, генерованих цим активом.

Вартість залишкова (англ. *residual value*, рос. *стоимость остаточная*) – різниця між первісною (відновлювальною) вартістю основного засобу та сумою накопиченої амортизації. Це вартість активу, що залишилася до списання на витрати.

Вартість ліквідаційна (англ. *liquidation value*, рос. *стоимость ликвидационная*) – вартість, за якою можна продати деякий актив. Термін нерідко використовують у додатку до активів ліквідованої фірми. Операція з вимушеної ліквідації активу, тобто його продаж за ліквідаційною вартістю, зазвичай пов'язана зі збитками.

Вартість первісна (англ. *original cost*, рос. *стоимость первоначальная*) – вартість будівництва або величина витрат на придбання, доставку та встановлення основного засобу.

Вартість чиста зведена (англ. *net present value*, *NPV*, рос. *стоимость чистая приведенная*) – зведена вартість пов'язаних із реалізацією проекту майбутніх чистих грошових надходжень за вирахуванням зведеної вартості первинних інвестицій.

Вартість чиста термінальна (англ. *net terminal value*, *NTV*, рос. *стоимость чистая терминальная*) – майбутня вартість пов'язаних із реалізацією проекту майбутніх чистих грошових надходжень за вирахуванням майбутньої вартості первинних інвестицій. Вибір проекту за критерієм NTV дає точно такий же результат, як і в разі використання NPV-критерію.

Вексель (англ. *bill*, рос. *вексель*) – письмове боргове зобов'язання точно встановленої законом форми, що видає позичальник (векселедавець) кредитору (векселедержателю); надає останньому право вимагати від позичальника сплати до певного терміну суми грошей, вказаної у векселі.

Відкладена рента (англ. *deferred annuity*, рос. *отложенная рента*) – рента, термін реалізації якої відкладають на час, указаний у контракті.

Відсотки безперервні (англ. *continuous compounding*, рос. *проценты непрерывные*) – припускають безперервне нарахування відсотків у часі в теоретичних фінансових розрахунках – відсотки, що нараховують за нескінченно малі проміжки часу.

Відсотки дискретні (англ. *discrete compounding*, рос. *проценты дискретные*) – припускають, що нарахування відсотків здійснюють дискретно, тобто в окремі (зазвичай рівновіддалені) моменти часу, причому періодом нарахування беруть рік, півріччя, квартал, місяць.

Відсотки звичайні (комерційні) (англ. *ordinary interests*, рос. *проценты обыкновенные, коммерческие*) – відсотки, які визначають виходячи з наближеної кількості днів у році, кварталі та місяці (відповідно, 360, 90, 30).

Відсотки прості (англ. *simple interest*, рос. *проценты простые*) – нарахування відсотків протягом усього терміну кредиту на одну і ту ж величину капіталу, наданого у кредит, тобто ставку відсотка застосовують до однієї й тієї ж початкової суми протягом усього терміну позики.

Відсотки складні (англ. *compound interest*, рос. *проценты сложные*) – нарахування відсотків, за якого нараховані відсотки на початкову суму додають до цієї суми, а в таких періодах відсотки нараховують на вже нарощену суму. У разі використання цього методу база для нарахування відсотків постійно змінюється.

Відсотки точні (англ. *exact interests*, рос. *проценты точные*) – відсотки, які визначають виходячи з точної кількості днів у році (365 або 366), кварталі (від 89 до 92), місяці (від 28 до 31).

Відсоткова (процентна) ставка (англ. *interest rate*, рос. *процентная ставка*) – величина, що характеризує прибутковість кредитної угоди. Вона показує, яку частку від суми виданого кредиту буде повернуто власнику капіталу у вигляді доходу.

Відсоток (процентні гроші) (англ. *Interest*, рос. *процент, процентные деньги*) – величина доходу від надання в борг деякої грошової суми.

Внутрішня норма прибутковості (англ. *internal rate of return*, *IRR*, рос. *внутренняя норма доходности*) – ставка дисконтування, використання якої забезпечує дорівненість поточної вартості очікуваних грошових відтоків і поточної вартості очікуваних грошових притоків, що в результаті дає нульову чисту зведену вартість. Синоніми: внутрішня дохідність, внутрішня окупність.

Грант-елемент (англ. *grant element*, рос. *грант-элемент*) – добровільно упущена вигода кредитора, викликана застосуванням більш низької відсоткової ставки, ніж узята в цей момент на ринку капіталів. Грант-елемент може бути обчислений у вигляді абсолютної або відносної величини.

Грошовий потік (потік готівки) (англ. *cash flow*, рос. *денежный поток*) – приплив або відплив капіталу як результат діяльності за певний період. Як елемент грошового потоку може виступати дохід, витрати, прибуток, платіж та ін.

Дата погашення (дата викупівлі) облігації (англ. *put date*, рос. *дата погашения* (*дата выкупа*) *облигации*) – день, коли має бути виплачено номінальну вартість облігації або ціну викупівлі. Дата погашення визначає термін облігації.

Девальвація (англ. *devaluation*, рос. *девальвация*) – офіційне зниження курсу національної валюти.

Девізи (англ. paper exchanges, рос. *девизы*) – платіжні засоби (частіше в іноземній валюті), за допомогою яких здійснюють міжнародні розрахунки; до девізів належать: перекази, чеки, акредитиви, векселі, іноземні банкноти й іноземні монети.

Декурсивний метод (декурсивне нарахування відсотків) (англ. *decursive method*, рос. *декурсивный метод*) – метод відсоткових розрахунків, за якого нарахування відсотків здійснюють в кінці розрахункового періоду.

Депозит (англ. *deposit*, рос. *депозит*) – матеріальна цінність (зазвичай гроші або цінні папери), що вносять до державної чи комерційної установи (банку, ощадної каси, нотаріальної контори та ін.) та яка підлягає поверненню.

Депозитний сертифікат (англ. *certificate of deposit*, рос. *депозитный сертификат*) – письмове свідоцтво кредитної установи (банку-емітента) про депонування грошових коштів, яке засвідчує право власника на отримання після закінчення встановленого терміну суми депозиту та відсотків за ним.

Депорт (англ. *deport*, рос. *депорт*) – угоди, за яких купують іноземну валюту на умовах "спот" і одночасно її ж продають на умовах "форвард"; учасники угоди грають на зниження курсу цінних паперів, із метою отримання курсової різниці.

Дефляція (англ. *deflation*, рос. *дефляция*) – процес, що характеризується зниженням загального рівня цін в економіці.

Дивіденд (англ. *dividend*, рос. *дивиденд*) – частина прибутку компанії, що припадає на одну акцію та яку розподіляють серед акціонерів компанії.

Дивізор (процентний ключ) (англ. *interest divisor*, рос. *дивизор*) – відношення взятої кількості днів у році до відсоткової ставки; чисельно дорівнює такій кількості грошових одиниць, з якої за цієї відсоткової ставки виходить 1 грошова одиниця доходу на день.

Дисконт (англ. *discount*, рос. *дисконт*) – а) дохід, отриманий за обліковою ставкою; б) відсоток, що стягує банк за обліку векселів; в) власне облікова ставка; г) знижка (наприклад, із ціни товару, кінцевої суми боргу тощо).

Дисконтний множник (англ. *discount factor*, рос. *дисконтный множитель*) – показник, що характеризує, у скільки разів початкова сума позики менша від нарощеної суми. Коефіцієнт, що показує яку частку становить початкова сума позики в остаточній величині боргу (нарощеній сумі).

Дисконтування (англ. *discounting*, рос. *дисконтирование*) – процес, зворотний нарощенню, в якому задані очікувана в майбутньому сума до отримання та ставка.

Дисконтування банківське (англ. *bank discounting*, рос. *дисконтирование банковское*) – ґрунтується на використанні облікової ставки, тобто відсотки за користування позикою нараховують на суму, що підлягає сплаті в кінці терміну позики.

Дисконтування математичне (англ. *mathematical discounting*, рос. *дисконтирование математическое*) – дисконтування, здійснюване за відсотковою ставкою. Математичне дисконтування – вид дисконтування, що становить розв'язання задачі, зворотної до нарощення початкової позики.

Дисконт-фактор (англ. *discount-factor*, рос. *дисконт-фактор*) – відношення початкової грошової суми до суми, отриманої в результаті фінансової операції з початковою грошовою сумою.

Дискретні ренти (англ. *gale*, рос. *дискретные ренты*) – ренти, за якими платежі здійснюють у певні терміни (рік, кілька разів на рік або терміни, що перевищують рік).

Еквівалентна відсоткова ставка (англ. *equivalent interest rate*, рос. *эквивалентная процентная ставка*) – ставка, що забезпечує такий же фінансовий результат, як і під час використання альтернативної відсоткової ставки.

Ефективна відсоткова ставка (англ. *effective rate*, рос. *эффективная процентная ставка*) – ставка, що відображає реальний дохід від комерційної угоди, тобто ставка, за якої фактично було нараховано відсотки на початкову суму.

Інвестиційний проект (англ. *investment project*, рос. *инвестиционный проект*) – сукупність інвестицій і доходів, що генеруються ними.

Інвестиція (англ. *investment,* рос. *инвестиция*) – вкладення капіталу на довгостроковій основі.

Інвестор (англ. *investor*, рос. *инвестор*) – юридична або фізична особа, що робить інвестицію із метою отримання доходу в майбутньому.

Індекс (англ. *index*, рос. *индекс*) – відносна величина, що характеризує співвідношення двох значень показника, який описує одне й те саме явище.

Індекс купівельної спроможності грошей (англ. *purchasing power index*, рос. *индекс покупательной способности денег*) – величина, зворотна індексу цін.

Індекс рентабельності (англ. *profitability index*, рос. *индекс рентабельности*) – відношення величини чистого зведеного доходу до величини стартових інвестицій, що характеризує ефективність інвестиційних укладень.

Індекс цін (англ. *price index*, рос. *индекс цен*) – відношення вартості певного набору товарів і послуг у цей період до вартості того ж набору в деякому базовому періоді.

Інфляційна премія (англ. *inflation premium*, рос. *инфляционная премия*) – коригування ставки відсотків для компенсації знецінення грошей; додатковий дохід на цінні папери, установлений із метою компенсації їхнім власникам очікуваного збитку від інфляції.

Інфляція (англ. *inflation*, рос. *инфляция*) – процес, що характеризується підвищенням загального рівня цін в економіці; це, відповідно, є свідченням зниження купівельної спроможності грошей.

Іпотека (англ. *mortgage*, рос. *ипотека*) – застава підприємства, будови, будівлі, споруди, іншого об'єкта, безпосередньо пов'язаного із землею, разом із земельною ділянкою або правом користування ним. Під заставу нерухомості банк видає іпотечну позику, яку часто називають також іпотекою.

Квота валюти (англ. *allocation of currency*, рос. *квота валюты*) – співвідношення курсу двох валют, одна з яких є "основою квоти", тобто валюта, відносно якої здійснюють валютні розрахунки. Валюту, курс якої визначають відносно "основи квоти", називають "валютою квоти".

Коефіцієнт беззбитковості (англ. *break-even load factor*, рос. *коэффициент безубыточности*) – показник, що характеризує необхідну кількість одиниць реалізованої продукції або послуг для відшкодування здійснених постійних витрат.

Коефіцієнт ефективності інвестицій (англ. *investment efficiency factor*, рос. *коэффициент эффективности инвестиций*) – співвідношення середньорічного прибутку та середньої величини інвестицій.

Коефіцієнт нарощення ренти (англ. *future value annuity factor*, рос. *коэффициент наращения ренты*) – показує, у скільки разів нарощена сума ренти більша від першого члена ренти.

Коефіцієнт погашення заборгованості (англ. *repayment factor*, рос. *коэффициент погашения задолженности*) – показує, яку частку залишку боргу разом з нарахованими відсотками має бути сплачено в цей період.

Коефіцієнт зведення ренти (англ. *present value annuity factor*, рос. *коэффициент приведения ренты*) – показує, скільки рентних платежів міститься в сучасній величині.

Конверсія валюти (англ. *switching currency*, рос. *конверсия валюты*) – обмін однієї валюти на іншу за чинним валютним курсом.

Конверсія позики (англ. *debt conversation*, рос. *конверсия займа*) – зміна початкових умов позики (відсотків, терміну погашення, терміну купонних виплат).

Конверсія рент (англ. *annuities conversion*, рос. *конверсия рент*) – зміна умов виплати ренти, тобто часткова або повна зміна початкових параметрів ренти, що приводить до утворення нової ренти і, отже, до зміни фінансових результатів угоди.

Консолідація платежів (англ. *payments consolidation*, рос. *консолидация платежей*) – об'єднання декількох платежів в один зі встановленням єдиного терміну погашення.

Консолідація рент (англ. *annuities consolidation*, рос. *консолидация рент*) – об'єднання декількох рент в одну, засноване на принципі фінансової еквівалентності.

Короткострокові позики (англ. *short-term loan*, рос. *краткосрочные ссуды*) – позики, що надають на термін до одного року з одноразовим нарахуванням відсотків.

Крос-курс (перехресний курс) (англ. *cross rate*, рос. *кросс-курс*) – співвідношення між двома валютами, яке визначають на основі курсу цих валют щодо будь-якої третьої валюти.

Купон (англ. *coupon,* рос. *купон*) – частина цінного паперу у вигляді відривного талона, що надає право на отримання суми відсотків після настання терміну, зазначеного в талоні.

Купонна прибутковість (англ. *coupon yield*, рос. *купонная доходность*) – процентний дохід від номіналу облігації, який указаний на цінному папері та який емітент зобов'язаний сплатити за кожним купоном.

Купонна процентна ставка (норма облігації) (англ. *coupon rate,* рос. *купонная процентная ставка*) – відношення суми, що виплачують за рік (сума відсотків) до номіналу, виражене у відсотках.

Курс облігації (англ. *bond rate*, рос. *курс облигации*) – купівельна ціна облігації в розрахунку на 100 грошових одиниць її номіналу.

Курсова вартість акції (курс акції) (англ. *share price*, рос. *курсовая стоимость акции*) – ціна акції, що складається на фондовому ринку під час її купівлі або продажу.

Лінія капіталу (англ. *capital line*, рос. *линия капитала*) – співвідношення, яке пов'язує показники ефективності цінних паперів, що складають інвестиційний портфель, і ступінь ризику портфеля.

Ломбардний кредит (англ. *collateral credit*, рос. *ломбардный кредит*) – короткостроковий кредит під заставу легкореалізованого рухомого майна.

Майбутня вартість (англ. *future value*, рос. *будущая стоимость*) – сума інвестованих у теперішній момент коштів, в яку вони мають перетворитись через певний проміжок часу з урахуванням певної ставки відсотка.

Майбутня вартість грошового потоку (англ. *future value of cashflow*, рос. *будущая стоимость денежного потока*) – сума всіх нарощених елементів цього потоку.

Маржа (англ. *margin*, рос. *маржа*) – величина, що виражає різницю між двома певними показниками (наприклад, між ціною покупця та продавця). Зокрема, за допомогою маржі можна характеризувати змінну відсоткову ставку, коли фіксується сама ставка, а змінюється в часі її база та маржа – величина (постійна або змінна) надбавки до бази. Крім того, під маржею розуміють гарантійний внесок у терміновій біржовій торгівлі.

Маржинальна (гранична) вартість капіталу (англ. *marginal cost of capital*, рос. *маргинальная* (*предельная*) *стоимость капитала*) – зміна в загальній сумі прибутку від величини інвестицій, необхідних для задовільнення вимоги інвестора, з урахуванням нових інвестицій і їх структури.

Метод лінійної інтерполяції (англ. *method of proportional parts*, рос. *метод линейной интерполяции*) – математичний метод, який дозволяє визначити величину відсоткової ставки, що забезпечує досягнення заздалегідь обумовлених фінансових результатів.

Множник нарощення (англ. *accumulation factor*, рос. *множитель наращения*) – величина, яка показує, у скільки разів зріс початковий капітал, характеризує майбутню вартість 1-ї грошової одиниці через кілька відсоткових періодів виходячи зі ставки нарощення за період.

Модель змінного зростання (англ. *multiple-growth model*, рос. *модель переменного роста*) – модель оцінювання фінансового активу виходячи з припущення про нерівномірність зростання генерованого ним доходу в різні періоди часу (зазвичай застосовується в додатку до акцій).

Модель нульового зростання (англ. *zero-growth model*, рос. *модель нулевого роста*) – модель оцінювання фінансового активу виходячи з припущення про незмінність генерованого ним доходу.

Модель постійного зростання (англ. *constant-growth model*, рос. *модель постоянного роста*) – модель оцінювання фінансового активу виходячи з припущення про сталість темпу приросту генерованого ним доходу (найчастіше застосовується в додатку до акцій).

Модифікована мінливість (англ. *modified variability*, рос. *модифицированная изменчивость*) – показник, що характеризує ступінь еластичності (реакції) ціни облігації за умови незначних змін величини відсоткової ставки на грошових ринках.

Наведена (сучасна) величина ренти (англ. *current value of the rent*, рос. *приведенная* (*современная*) *величина ренты*) – один з узагальнювальних показників ренти: сума всіх членів ренти, зменшених (дисконтованих) на величину відсоткової ставки на певний момент часу, що співпадає з початком потоку платежів або передує йому. Показує, яку суму треба мати спочатку, щоб, розбивши її на рівні внески, на які б нараховувались установлені відсотки протягом терміну ренти, можна було б забезпечити отримання нарощеної суми.

Наведена вартість (англ. *current value*, рос. *приведенная стоимость*) – величина, знайдена в результаті процесу дисконтування. Оцінює величину, очікувану до отримання в майбутньому, з позиції моменту, до якого здійснюється приведення (дисконтування).

Наведена вартість грошового потоку (англ. *current value of cash flow*, рос. *приведенная стоимость денежного потока*) – сума всіх дисконтованих елементів цього потоку.

Нарощена сума (англ. *accumulated value*, *amount*, рос. *наращенная сумма*) – сума початкового капіталу та нарахованих на нього відсотків; отримується в результаті здійснення процесу нарощення.

Нарощена сума ренти (нарощена сума потоку платежів) (англ. *future value annuity*, рос. *наращенная сумма ренты*) – сума всіх членів потоку платежів з нарахованими на них відсотками на кінець терміну ренти, тобто на дату останньої виплати.

Нарощення (англ. *accumulation, accretion*, рос. *наращение*) – фінансова операція, за якої відбувається розрахунок майбутньої вартості сьогоднішньої інвестиції із заданим терміном і відсотковою ставкою.

Нетто-ставка (англ. *net premium*, рос. *нетто-ставка*) – величина, що визначає необхідну суму, яка стягується із страхувальника для покриття страхового відшкодування; вона також включає суми, необхідні для покриття накладних витрат.

Німецька практика (звичайні відсотки з наближеним числом днів позики) (англ. *German practice*, рос. *германская практика – обыкновенные проценты с приближенным числом дней ссуды*) – метод відсоткових розрахунків, за якого термін позики, не дорівнений цілому числу років, визначається в неповному році кількістю місяців по 30 днів в кожному, починаючи з моменту видачі позики та до моменту її погашення, та точним числом днів позики в неповному місяці; тривалість року приймається дорівненою 360 дням. Для звичайного відсотка тривалість визначають виходячи з приблизного числа днів у році – 360, кварталі – 90, місяці – 30.

Номінальна вартість акції (англ. *face value of a stock*, рос. *номинальная стоимость акции*) – зазначена на акції ціна, за якою вона продається під час первинного розміщення акціонерного капіталу.

Номінальна вартість облігації (англ. *face value of a bond*, рос. *номинальная стоимость облигации*) – зазначена на облігації грошова сума, яку позичальник зобов'язується повернути її власникові після закінчення терміну облігації.

Номінальна відсоткова ставка (англ. *nominal interest rate*, рос. *номинальная процентная ставка*) – передбачена кредитною угодою річна відсоткова ставка за умови нарахування відсотків кілька разів на рік.

Норма прибутку (англ. *rate of return*, рос. *норма прибыли*) – відношення прибутку до вихідного капіталу, що становить джерело генерування цього прибутку (найчастіше вимірюється у відсотках). У фінансових обчисленнях норму прибутку нерідко називають дохідністю.

Нульовий купон (англ. *zero-coupon*, рос. *нулевой купон*) – дохід від облігації, який утворюється в результаті різниці між ціною продажу та сумою, яка виплачується власнику облігації в момент погашення.

Облігація (англ. *bond*, рос. *облигация*) – цінний папір, що засвідчує внесення її власником грошових коштів емітенту та зобов'язання останнього відшкодувати власнику номінальну вартість облігації в заздалегідь встановлений термін зі сплатою фіксованого відсотка.

Облік векселя (англ. *bill discounting*, рос. *учет векселя*) – купівля векселя у власника до настання терміну оплати за ціною, меншою тієї суми, яка повинна бути виплачена за векселем в кінці терміну.

Облікова ставка (англ. *bank-rate*, рос. *учетная ставка*) – ставка, яка використовується для обліку векселів, в антисипативному методі нарахування відсотків і знаходженні сучасної величини, а також як відсоткова ставка Центрального банку.

Овердрафт (англ. *overdraft*, рос. *овердрафт*) – форма короткострокового кредиту, надання якого здійснюється списанням коштів на рахунку клієнта банку (понад залишок на рахунку), в результаті чого утворюється дебетове сальдо. О. використовується, коли величина платежу перевищує залишок коштів на рахунку клієнта.

Операційний леверидж (важіль) (англ. *operating leverage*, рос. *операционный леверидж – рычаг*) – показник, що дозволяє визначити залежність між темпом приросту (зниження) прибутку та темпом приросту (зниження) виручки від реалізації продукції.

Операційний лізинг (англ. *operating lease*, рос. *операционный лизинг*) – оренда машин і устаткування, термін якої менше амортизаційного періоду устаткування.

Опуклість облігації (англ. *convexity*, рос. *выпуклость облигации*) – показник, що характеризує реакцію ціни облігації на значні зміни відсоткової ставки на ринку капіталів.

Оцінювання облігації (англ. *bond rating*, рос. *оценка облигации*) – процес визначення ринкової вартості цінного паперу.

Параметри облігації (англ. *options bonds*, рос. *параметры облигации*) – показники, що характеризують облігацію: номінальна ціна; викупівельна ціна в разі, якщо вона відрізняється від номінальної; норма прибутковості; терміни виплати відсотків.

Перекладний вексель (тратта) (англ. *bill of exchange* (*draft*), рос. *переводной вексель*) – письмовий наказ кредитора (трасанта) позичальнику (трасату) про сплату суми, визначеної у векселі, третій особі (ремітенту) або пред'явнику, якщо вексель на пред'явника.

Період нарахування відсотків (англ. *interest-paying period*, рос. *период начисления процентов*) – інтервал часу, до якого належить (застосовується) відсоткова ставка.

Період ренти (англ. *annuity period*, рос. *период ренты*) – інтервал часу між двома сусідніми рентними платежами.

Підприємницький ризик (англ. *business risk*, рос. *предпринимательский риск*) – ризик, пов'язаний з діяльністю компанії; обумовлений характером бізнесу компанії.

Повна дохідність інвестицій (англ. *yield to maturity*, рос. *полная доходность инвестиций*) – мінімальна розрахункова річна ставка відсотків, з використанням якої всі капіталізовані доходи складуть суму не меншу суми інвестицій.

Попередні (форвардні) валютні угоди (англ. *forward currency transactions*, рос. *предварительные (форвардные) валютные сделки*) – угоди, що передбачають купівлю однієї валюти за іншу за курсом, зафіксованим у момент угоди.

Портфель цінних паперів (англ. *investment portfolio*, рос. *портфель ценных бумаг*) – набір цінних паперів, що знаходяться в розпорядженні інвестора.

Потік платежів (англ. *cash flow*, рос. *поток платежей*) – ряд послідовних виплат і надходжень. Виплати є від'ємними величинами, а надходження – додатними.

Поточна вартість (англ. *present value*, PV, рос. *текущая стоимость*) – вартість майбутніх надходжень грошей, віднесена до поточного моменту, або проекція планованих до отримання грошей, через певний проміжок часу і за певної відсоткової ставки, на даний момент часу.

Поточна прибутковість облігації (англ. *current profitability of bonds*, рос. *текущая прибыльность облигации*) – характеризує річний відсоток, який виплачують на вкладений капітал, тобто на суму, сплачену під час придбання облігації.

Практика розрахунку простих відсотків (англ. *practice the calculation of simple interest*, рос. *практика расчета простых процентов*) – розрізняє три варіанти розрахунку: (1) точні відсотки з точним числом днів позички (англійська або британська практика); (2) звичайні відсотки з точним числом днів позички (французька практика); (3) звичайні відсотки з наближеним числом днів позики (німецька практика).

Приблизне число днів позики (англ. *approximate number of days the loan*, рос. *приблизительное число дней ссуды*) – тривалість періоду нарахування визначають приблизно, вважаючи, що в місяці 30 днів.

Прибутковість фінансового активу (англ. *return on assets*, рос. *доходность финансового актива*) – відносний показник, який розраховують відношенням деякого доходу, що генерується цим активом, до величини вихідної інвестиції в нього.

Прибуток чистий (англ. *net profit*, рос. *прибыль чистая*) – прибуток, доступний до розподілу серед власників.

Принцип нерівноцінність грошей (англ. *inequality of money principle*, рос. *принцип неравноценности денег*) – гроші, які належать до різних моментів часу, мають різну поточну вартість.

Принцип ринкової рівноваги фондового ринку (англ. *the principle of market equilibrium stock market*, рос. *принцип рыночного равновесия фондового рынка*) – поняття засноване на тому, що всі цінні папери, які обертаються на ринку, є в будь-який час у продажу і, крім того, адміністрація фондових бірж передбачає ряд заходів, спрямованих на зменшення розриву в цінах попиту та пропозиції.

Процентне число (англ. *interest number*, рос. *процентное число*) – чисельник показника, який використовують у фінансовій практиці для обчислення відсоткового доходу; дорівнює добутку суми, наданої у кредит, на термін кредиту у днях.

Процентний ключ (дільник) (англ. *interest divisor*, рос. *процентный ключ, дивизор*) – відношення взятої кількості днів у році до відсоткової ставки; чисельно дорівнює такій кількості грошових одиниць, із якої за цієї відсоткової ставки виходить 1 грошова одиниця доходу на день.

Реальні інвестиції (англ. *real investment*, рос. *реальные инвестиции*) – фінансові вкладення в рухоме і нерухоме майно: будівлі і споруди, машини і обладнання, транспортні засоби, обчислювальну техніку, а також витрати на геологорозвідувальні роботи.

Реінвестування (англ. *reinvestment*, рос. *реинвестирование*) – неодноразове повторення процесу інвестування суми депозиту разом з нарахованими на неї в попередньому періоді відсотками. Вкладання доходів в певний проект виробничого або фінансового характеру з наміром надалі отримати на них додатковий дохід. Купівля додаткових цінних паперів на відсотки і дивіденди від уже наявних інвестицій в цінні папери або від нових цінних паперів на виручку від реалізації або погашення за настанням терміну цінних паперів, що раніше належали інвестору. Цей термін зазвичай застосовується щодо номінальної вартості облігацій, за якою здійснюється погашення боргу або відсотків, що нараховуються. Так як основний час погашення облігацій і відсоткових купонів по ним – 1 січня і 1 липня, то на ці ж дати, переважно, припадає і підвищений попит, пов'язаний з реінвестуванням капіталу.

Рента p-термінова (англ. *p-terms annuity*, рос. *рента p-срочная*) – рента, що передбачає p рівних платежів у році.

Рента вірна (англ. *absolute rent*, рос. *рента верная*) – рента, члени якої підлягають безумовній виплаті.

Рента вічна (безстрокова, нескінченна рента) (англ. *perpetual annuity*, рос. *рента вечная, бессрочная*) – рента з нескінченним числом членів, тобто ануїтет, що припускає постійну виплату доходу. Нарощена сума такої ренти наближається до нескінченості.

Рента змінна (англ. *variable annuity*, рос. *рента переменная*) – потік послідовних платежів, члени якого не є постійними величинами.

Рента негайна (англ. *immediate annuity*, рос. *рента немедленная*) – рента, термін якої починається негайно.

Рента постійна (англ. *permanent rent*, рос. *рента постоянная*) – рента з рівними членами.

Рента постнумерандо (звичайна рента) (англ. *ordinary annuity*, рос. *рента постнумерандо, обычная рента*) – рента, в якій платежі здійснюються в кінці відповідних періодів (року, півріччя, кварталу і т. д.).

Рента пренумерандо (англ. *annuity due*, рос. *рента пренумерандо*) – рента, в якій платежі здійснюються на початку відповідних періодів (року, півріччя, кварталу і т.д.).

Рента умовна (англ. *imputed rent*, рос. *рента условная*) – рента, виплата членів якої ставиться в залежність від настання деякої випадкової події.

Ренти змішані (англ. *hybrid annuity*, рос. *ренты смешанные*) – метод нарахування процентних платежів у фінансових рентах, який поєднує нарахування відсотків за цілі річні періоди за ставкою складних відсотків, а на платежі, що вносяться протягом року, – за ставкою простих відсотків.

Рівняння еквівалентності (англ. *equivalence equation*, рос. *уравнение эквивалентности*) – рівняння, в якому сума замінюваних платежів, приведених до якогось одного моменту часу, прирівнюється до суми платежів за новим зобов'язанням, приведених до тієї ж дати. Використовується зі зміною умов контракту.

Річна рента (англ. *annual rent*, рос. *годовая рента*) – рента, за якою платежі здійснюються раз на рік.

Своп (англ. *swap*, рос. *своп*) – валютна операція, за якою відбувається одночасна купівля і продаж іноземної валюти на приблизно рівні суми за умови розрахунків по них на різні дати.

Сила росту (англ. *increase force*, рос. *сила роста*) – відносний приріст нарощеної суми до нарощеної суми за нескінченно малий проміжок часу.

Споживчий кредит (англ. *consumer loan*, рос. *потребительский кредит*) – кредит, який надає банк, фінансова компанія або роздрібний торговець окремій особі на споживчі цілі.

Спот (англ. *spot*, рос. *спот*) – умови розрахунків, за яких оплата здійснюється негайно; у валютних операціях умови "спот" означають розрахунок на другий день після укладення угоди або в межах двох робочих днів.

Спред (англ. *spread*, рос. *спред*) – а) різниця між валютним курсом попиту і пропозиції; б) різниця між ціною, виручено ї за цінні папери емітентом, і ціною, сплаченою за них інвестором.

Ставка (англ. *rate*, рос. *ставка*) – відношення процентних грошей, сплачених (отриманих) за одиницю часу (зазвичай за рік), до деякого базового капіталу, виражене в десяткових дробах або у відсотках.

Ставка відсоткова номінальна (англ. *nominal interest rate*, рос. *ставка процентная номинальная*) – вихідна базова (переважно, річна) відсоткова ставка, що вказується в угодах. Прибутковість, що виражається цією ставкою, не скоригована на інфляцію.

Ставка відсоткова плаваюча (англ. *floating interest rate*, рос. *ставка процентная плавающая*) – відсоткова ставка, розмір якої переглядається протягом часу нарахування відсотків.

Ставка відсоткова позитивна (англ. *positive interest rate*, рос. *ставка процентная положительная*) – будь-яка ставка, за якої буде відбуватись реальне збільшення вартості капіталу при даному індексі інфляції.

Ставка відсоткова реальна (англ. *real interest rate*, рос. *ставка процентная реальная*) – відсоткова ставка, що нараховується в умовах елімінування впливу інфляції. Реальна відсоткова ставка завжди менше номінальної за рахунок негативного впливу інфляції.

Ставка дисконтування (англ. *discount rate*, рос. *ставка дисконтирования*) – ставка, яка використовується для розрахунку приведеної вартості. В якості ставки дисконтування може використовуватись як облікова, так і відсоткова ставка.

Ставка ефективна (англ. *effective rate*, рос. *ставка эффективная*) – річна ставка складних відсотків, що забезпечує той же фінансовий результат, що і нарахування відсотків кілька разів на рік за номінальною ставкою, поділеною на число періодів нарахування.

Ставка інвестування (інвестиційна прибутковість) (англ. *investment rate*, рос. *ставка инвестирования*) – відсоткова ставка, що характеризує ефективність інвестування, тобто віддачу на вкладений капітал.

Ставка купонна (англ. *coupon rate*, рос. *ставка купонная*) – відсоткова ставка, що визначає періодичний дохід по облігації і оголошується під час емісії.

Ставка нарощення (англ. *accrual rate*, рос. *ставка наращения*) – ставка, яка використовується для розрахунку майбутньої вартості.

Ставка номінальна (англ. *nominal rate*, рос. *ставка номинальная*) – річна ставка складних відсотків j за числом періодів нарахування на рік m. Тоді за кожен період відсотки нараховують за ставкою j/m.

Ставка погашення боргу (англ. *loan repayment rate*, рос. *ставка погашения долга*) – показник, що характеризує величину частки виплати основного боргу в певний період.

Ставка порівняння (англ. *comparison rate*, рос. *ставка сравнения*) – показник, який використовується для порівняння вигідності альтернативних комерційних контрактів.

Ставка розміщення облігації (англ. *placement rate bonds*, рос. *ставка помещения облигации*) – показник повної дохідності облігації; є розрахунковою величиною і в явному вигляді на ринку цінних паперів не виступає.

Ставки еквівалентні (англ. *equivalent rate*, рос. *ставки эквивалентные*) – ставки, що призводять до одного фінансового результату з єдиним первинним капіталом і терміном інвестування.

Строкова сплата (англ. *discharge of a debt*, рос. *срочная уплата*) – грошова сума, призначена для погашення частини основного боргу і поточних відсотків за ним за певний період часу.

Сучасна величина потоку платежів (англ. *present value of cash flow*, рос. *современная величина потока платежей*) – сума всіх його членів, дисконтованих (приведених) на деякий момент часу, що співпадає з початком потоку платежів або передує йому.

Термін облігації (англ. *term bond*, рос. *срок облигации*) – середньозважена величина, яка визначає середній термін усіх виплат за облігаціями.

Термін окупності інвестицій (період окупності) (англ. *pay back period*, рос. *срок окупаемости инвестиций*) – тривалість періоду, протягом якого сума чистих доходів, дисконтованих на момент завершення інвестицій, дорівнює сумі приведених на цей же момент інвестицій.

Термін ренти (англ. *term annuity*, рос. *срок ренты*) – час від початку реалізації ренти до моменту нарахування останнього платежу.

Точне число днів позики (англ. *exact day interest*, рос. *точное число дней ссуды*) – тривалість періоду нарахування визначається точним числом днів позики.

Точний відсоток (англ. *exact interest*, рос. *точный процент*) – тривалість визначають виходячи з точного числа днів: для року рахують 365 або 366, для кварталу – від 89 до 92, для місяця від 28 до 31.

Фінансовий актив (англ. *financial asset*, рос. *финансовый актив*) – документ, що підтверджує право власника на частину власності або прибутку фірми, яка випустила документ; грошові кошти.

Фінансовий леверидж (важіль) (англ. *financial leverage*, рос. *финансовый леверидж* (*рычаг*)) – показник, що дозволяє визначити залежність між часткою боргових зобов'язань в структурі інвестиційного капіталу і величиною прибутку.

Фінансовий лізинг (англ. *financial leasing*, рос. *финансовый лизинг*) – угода, що передбачає виплату протягом періоду своєї дії сум, що покривають повну вартість амортизації взятого в оренду обладнання або більшу її частину, а також прибуток орендодавця.

Фінансовий ризик (англ. *financial risk*, рос. *финансовый риск*) – ризик інвестора, залежить від зміни ринкової ставки доходу на вкладений капітал.

Форвардні очки (англ. *forward points*, рос. *форвардные очки*) – відображають різницю відсоткових ставок двох валют. Форвардні очки додаються або віднімаються від касового курсу спот, щоб отримати форвардний курс.

Форфейтинг (англ. *forfeiting*, рос. *форфейтинг*) – форма перетворення комерційного кредиту в банківський; реалізується шляхом обліку векселів, отриманих продавцем товару від покупця. Форфейтна кредитна операція (операція а форфе) – операція, в якій беруть участь продавець, покупець і банк-кредитор. Покупець виписує продавцю комплект векселів на суму вартості товару плюс відсотки за кредит, термін векселів рівномірно розподілений в часі. Продавець одразу ж враховує портфель векселів в банку без права обороту на себе. Банк, форфетуючи угоду, бере весь ризик на себе.

Французька практика (звичайні відсотки з точним числом днів позички) (англ. *French practice*, рос. *французская практика* (*обыкновенные проценты с точным числом дней ссуды*) – метод відсоткових розрахунків, коли тривалість року приймається дорівненою 360 дням, а число днів між датами отримання і погашення кредиту розраховується як різниця календарних днів.

Ціна капіталу (англ. *cost of capital*, рос. *цена капитала*) – відношення суми, сплаченої за використання позикових фінансових ресурсів до загального обсягу цих ресурсів; виражається у відсотках.

Член ренти (англ. *annuity member*, рос. *член ренты*) – величина окремого рентного платежу.

Предметний покажчик

Рекомендована література

1. Бакаєв Л. О. Кількісні методи в управлінні інвестиціями : навч. посіб. / Л. О. Бакаєв. – Київ : КНЕУ, 2000. – 151 с.
2. Башарин Г. П. Начала финансовой математики / Г. П. Башарин. – Москва : ИНФРА-М, 1998. – 160 с.
3. Беннинга Ш. Финансовое моделирование с использованием Excel / Ш. Беннинга. – Москва : ООО "И.Д. Вильямс", 2007. – 592 с.
4. Бердар М. М. Фінанси підприємств : навч. посіб. / М. М. Бердар – Київ : Центр учбової літератури, 2010. – 352 с
5. Бланк И. А. Инвестиционный менеджмент : учебный курс / И. А. Бланк. – Киев : Эльга-Н; Ника-Центр, 2001. – 448 с.
6. Бочаров П. П. Финансовая математика : учебник / П. П. Бочаров, Ю. Ф. Касимов. – Москва : ИНФРА-М, 2002. – 624 с.
7. Вітлінський В. В. Аналіз, моделювання та управління економічним ризиком : навч.-метод. посіб. для самост. вивч. дисципліни / В. В. Вітлінський, П. І. Верченко. – Київ : КНЕУ, 2000. – 292 с.
8. Долінський Л. Б. Фінансові обчислення та аналіз цінних паперів : навч. посіб. / Л. Б. Долінський. – Київ : Майстер-Клас, 2005. – 192 с.
9. Игонина Л. Л. Инвестиции : учеб. пособ. / Л. Л. Игонина; под ред. д-ра экон. наук, проф. В. А. Слепова. – Москва : Экономистъ, 2005. – 478 с.
10. Инвестиции : учеб. пособ. / Г. П. Подшиваленко, Н. И. Лахметкина, М. В. Макарова и др. – 3-е изд., перераб. и доп. – Москва : КНОРУС, 2006. – 200 с.
11. Ковалев В. В. Курс финансовых вычислений / В. В. Ковалев, В. А. Уланов. – Москва : Финансы и статистика, 2001. – 328 с.
12. Ковалев В. В. Финансовый менеджмент: теория и практика. – 2-е изд., перераб. и доп. – Москва : ТК Велби; Изд. Проспект, 2007. – 1024 с.
13. Кочович Е. Финансовая математика : Теория и практика финансово-банковских расчетов / Е. Кочович; пер. с серб. – Москва : Финансы и статистика, 1994. – 268 с.
14. Кравець В. М. Західноєвропейський банківський бізнес : Становлення і сучасність / В. М. Кравець, О. В. Кравець. – Київ : Знання-Прес, 2003. – 470 с.
15. Лукасевич И. Я. Анализ финансовых операций. Методы, модели, техника вычислений / И. Я. Лукасевич. – Москва : Финансы, ЮНИТИ, 1998. – 400 с.

16. Малыхин В. И. Финансовая математика : учеб. пособ. для вузов / В. И. Малыхин. – Москва : ЮНИТИ-ДАНА, 2000. – 247 с.

17. Медведев Г. А. Начальный курс финансовой математики : учеб. пособ. / Г. А. Медведев. – Москва : ИНФРА-М, 2000. – 267 с.

18. Мелкумов Я. С. Финансовые вычисления. Теория и практика : учеб. пособ. / Я. С. Мелкумов. – Москва : ИНФРА-М, 2007. – 408 с.

19. Мелкумов Я. С. Финансовые вычисления. Теория и практика : учеб.-справ. пособ. / Я. С. Мелкумов. Москва : ИНФРА-М, 2002. – 383 с.

20. Николаев И. Excel для финансового директора / И. Николаев. – Москва : Актион, 2015. – 92 с.

21. Райхерт В. К. Общественно-исторические типы страхования / В. К. Райхерт. – М.-Л. : АН СССР, 1947. – 289 с.

22. Робоча програма навчальної дисципліни "Фінансова математика" для студентів напряму підготовки 6.030502 "Економічна кібернетика" денної форми навчання / укл. : С. В. Прокопович, О. В. Панасенко. – Харків : Вид. ХНЕУ ім. С. Кузнеця, 2015. – 50 с.

23. Рутенбург В. И. Очерк из истории раннего капитализма в Италии / В.И. Рутенбург. – М.-Л. : АН СССР, 1951. – 236 с.

24. Синкевич Г. И. Возникновение финансовой математики как науки и формирование категории риска на материале торговых книг эпохи позднего Средневековья и Возрождения / Г. И. Синкевич // История, современное состояние математики и астрономии и взгляд в будущее. Мат-лы конф., посвящённой памяти Насираддина Туси (Баку, 10 – 12 сентября 2014 г.). – Баку : Нац. академия наук Азербайджана; Ин-т математики и механики, 2014. – С. 338–351.

25. Словник фінансово-правових термінів / [за заг. ред. д.ю.н., проф. Л. К. Воронової]. – 2-ге вид., перероб. і доповн. – Київ : Алерта, 2011. – 558 с.

26. Стройк Д. Я. Краткий очерк истории математики / Д. Я. Стройк. – Москва : Наука, 1969. – 328 с.

27. Фомин Г. П. Финансовая математика: 300 примеров и задач : учеб. пособ. / Г. П. Фомин. – Москва : Гном-Пресс, 2000. – 120 с.

28. Четыркин Е. М. Финансовая математика : учебник / Е. М. Четыркин. – Москва. : Дело, 2004. – 400 с.

29. Экономическая оценка инвестиций : учебник для вузов / под ред. М. Риммера. – 5-е изд., перераб. и доп. – СПб. : Питер, 2014. – 432 с.

30. Віртуальна бібліотека книг з фінансової математики [Електронний ресурс]. – Режим доступу : http ://www.allmath.ru/finance.htm.

31. Глосарій банківської термінології [Електронний ресурс]. – Режим доступу : https://bank.gov.ua/control/uk/publish/article?art_id=123475&cat_id=123219.

32. Закон України Про іпотеку [Електронний ресурс]. – Режим доступу : http://pravo.ligazakon.ua/document/view/T030898?edition=2013_07_04.

33. Рекомендації щодо виявлення та інформування про фінансові операції, які підлягають фінансовому моніторингу від 18.08.2003 р. № 6 [Електронний ресурс]. – Режим доступу : http://search.ligazakon.ua/l_doc2.nsf/link1/TM019084.html.

34. Финансовая математика [Электронный ресурс]. – Режим доступа : http://www.finmath.ru/.

35. Финансовая математика [Электронный ресурс]. – Режим доступа : http://matekonomika.narod.ru/data/5.htm.

36. Финансовая математика. Формулы расчетов доходности финансовых, инвестиционных и торговых операций [Электронный ресурс]. – Режим доступа : http://www.finances-analysis.ru/financial-maths/.

37. Якушева Л. Кредиты для украинцев: проще не брать [Электронный ресурс]. – Режим доступа : https://economy.apostrophe.ua/article/finansy-i-banki/2017-02-10/kredityi-dlya-ukraintsev-prosche-ne-brat/10163.

38. Baxter M. W. Financial calculus : an introduction to derivative pricing / M. W. Baxter, A. J. O. Rennie. – Cambridge ; N.Y. : Cambridge University Press, 1996. – 244 p.

НАВЧАЛЬНЕ ВИДАННЯ

Панасенко Оксана Володимирівна
Прокопович Світлана Валеріївна

ФІНАНСОВА МАТЕМАТИКА

Навчальний посібник

Самостійне електронне текстове мережеве видання

Відповідальний за видання *Т. С. Клебанова*

Відповідальний редактор *М. М. Оленич*

Редактор *Н. І. Ганцевич*

Коректор *Т. А. Маркова*

План 2017 р. Поз. № 17-ЕНП. Обсяг 264 с.

Видавець і виготовлювач – ХНЕУ ім. С. Кузнеця, 61166, м. Харків, просп. Науки, 9-А

Свідоцтво про внесення суб'єкта видавничої справи до Державного реєстру ***ДК № 4853 від 20.02.2015 р.***