МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ

ХАРКІВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ ЕКОНОМІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ
ІМЕНІ СЕМЕНА КУЗНЕЦЯ

ПРИКЛАДНА МАТЕМАТИКА

Методичні рекомендації та завдання
до самостійної роботи студентів
спеціальності 186 "Видавництво та поліграфія"
першого (бакалаврського) рівня

Харків
ХНЕУ ім. С. Кузнеця
2017

УДК 517(07.034)
П75

Укладач К. О. Ковальова

Затверджено на засіданні кафедри вищої математики й економіко-математичних методів.

Протокол № 7 від 15.03.2017 р.

Самостійне електронне текстове мережеве видання

П75 **Прикладна** математика : методичні рекомендації та завдання до самостійної роботи студентів спеціальності 186 "Видавництво та поліграфія" першого (бакалаврського) рівня [Електронний ресурс] / уклад. К. О. Ковальова. – Харків : ХНЕУ ім. С. Кузнеця, 2017. – 54 с.

Наведено матеріал змістового модуля 1 "Основи чисельного аналізу та математичного програмування" за темою "Чисельне розв'язання рівнянь та систем", що складається з теоретичних питань, практичних завдань та завдань для самостійної роботи.

Рекомендовано для студентів спеціальності 186 "Видавництво та поліграфія" першого (бакалаврського) рівня.

УДК 517(07.034)

© Харківський національний економічний університет імені Семена Кузнеця, 2017

Вступ

Фахівцям, що володіють сучасними технологіями створення друкованих та мультимедійних видань, часто доводиться вирішувати алгебраїчні та трансцендентні рівняння чи системи нелінійних рівнянь, що може представляти собою самостійну задачу чи є складовою частиною більш складних задач. В обох випадках практична цінність чисельного методу значною мірою визначається швидкістю та ефективністю отримання розв'язку. Вибір необхідного алгоритму для розв'язання рівнянь чи систем залежить від характеру задачі, яка розглядається. Розглянемо основні теоретичні поняття та практичні рекомендації під час розв'язання нелінійних рівнянь та систем.

Метою методичних рекомендацій є вивчення класичних чисельних методів розв'язання нелінійних рівнянь та систем, підготовка студентів до вивчення спеціальних дисциплін, а також навчання аналізу та математичному моделюванню систем і процесів для розв'язування широкого спектру задач видавничо-поліграфічної справи.

У процесі вивчення навчальної дисципліни "Прикладна математика", а саме теми "Чисельне розв'язання рівнянь та систем" відбувається формування у студентів таких професійних компетентностей: застосування інструментів чисельних методів математичного аналізу до розв'язання економічних задач поліграфії, а саме вміння самостійно доводити та обґрунтовувати вибір того чи іншого методу вирішення алгебраїчних та трансцендентних рівнянь та систем; відокремлювання коренів рівнянь, розв'язання алгебраїчних та трансцендентних рівнянь засобами чисельних методів, розв'язання систем нелінійних рівнянь.

У результаті вивчення навчальної дисципліни студент вмітиме відокремлювати корені алгебраїчних та трансцендентних рівнянь та уточнювати їх за допомогою методів хорд, дотичних, комбінованим методом та методом простих ітерацій; розв'язувати системи нелінійних рівнянь за допомогою метода простих ітерацій та метода Ньютона.

1. Чисельне розв'язання алгебраїчних та трансцендентних рівнянь

1.1. Загальні поняття та визначення

Під час розв'язання практичних задач часто доводиться зустрічатися з розв'язанням рівнянь виду:

$$\varphi(x) = g(x), \tag{1.1}$$

або

$$f(x) = 0, \tag{1.2}$$

де $\varphi(x)$, $g(x)$ та $f(x)$ – нелінійні функції, визначенні на деякій числовій множині X , яка називається **областю допустимих значень рівняння**.

Рівняння виду (1.1) або (1.2) називаються **нелінійними рівняннями**. Усі нелінійні рівняння можна поділити на алгебраїчні та трансцендентні (рис. 1).

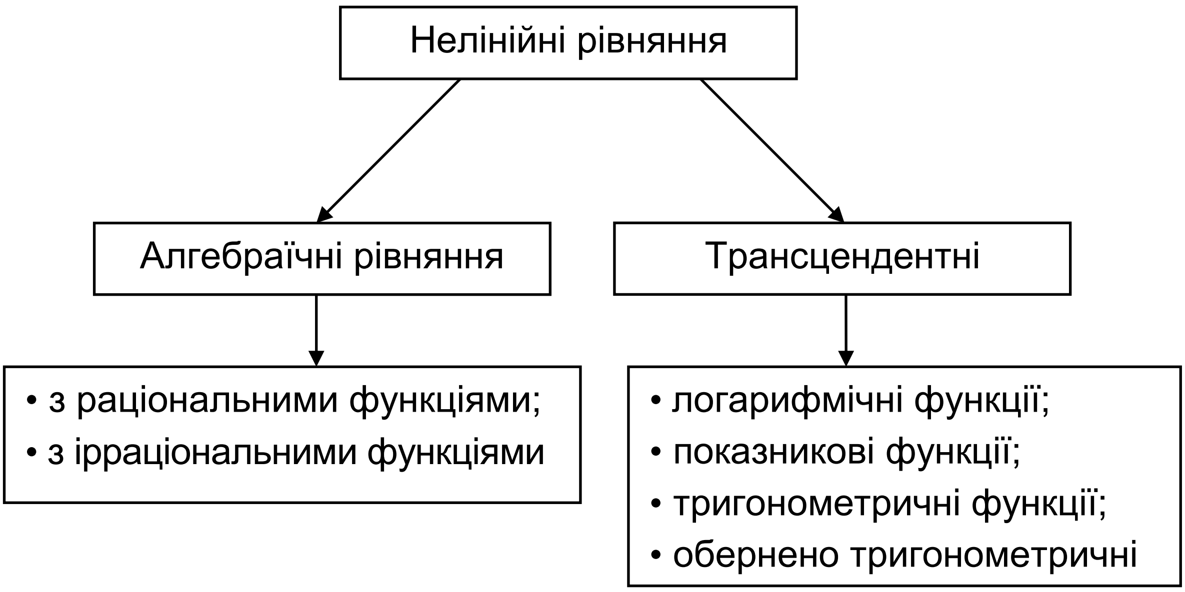

Рис. 1. **Класифікація нелінійних рівнянь**

Функція називається алгебраїчною, якщо для отримання значення функції на заданої множині X потрібно здійснити арифметичні операції та піднесення в степінь із раціональним або ірраціональним показником.

Рівняння, які містять алгебраїчні функції називаються **нелінійними алгебраїчними рівняннями**.

До трансцендентних функцій належать усі неалгебраїчні функції: показникові a^x, логарифмічні $\log_a x$, тригонометричні $\sin x$, $\cos x$, tgx, $ctgx$, обернені тригонометричні $\arcsin x$, $\arccos x$, $arctgx$, $arcctgx$ та інші.

Нелінійні рівняння, які містять трансцендентні функції називаються **нелінійними трансцендентними рівняннями**.

Розв'язати рівняння – значить встановити, чи має воно корені на вказаному проміжку, з'ясувати кількість коренів, відшукати значення всіх виявлених коренів із заданою точністю (корені мають знаходитися у ε - околі точного розв'язку).

Задача чисельного знаходження коренів рівняння зазвичай складається з двох етапів:

1) **відокремлення коренів** – знаходження достатньо малих околів у заданій області, в кожному з яких знаходиться тільки один корінь;

2) **уточнення коренів** – обчислення коренів із заданим ступенем точності ε в деякому околі (ε - околі).

Для знаходження коренів рівнянь (1.1) та (1.2) застосовується ряд методів, серед яких найчастіше використовують такі чисельні методи:

- метод половинного ділення (метод бісекції);
- метод хорд (метод пропорційних частин);
- метод дотичних (метод Ньютона);
- комбінований метод (метод хорд та дотичних);
- метод ітерацій (метод послідовних наближень).

Розглянемо особливості етапу відокремлення коренів.

1.2. Відокремлення коренів

Відокремлення коренів можна здійснити двома способами – графічним та аналітичним.

Графічний метод. Будують графік функції $y = f(x)$ для рівняння виду (1.2) або представляють рівняння у вигляді (1.1) та будують графіки функцій $y_1 = \varphi(x)$ та $y_2 = g(x)$. Значення дійсних коренів рівняння є абсцисами точок перетину графіка функції $y = f(x)$ з віссю Ox або абсцисами точок перетину графіків функцій $y_1 = \varphi(x)$ та $y_2 = g(x)$. Відрізки, в яких знаходиться тільки по одному кореню, легко знаходяться наближено.

Приклад 1.1. Знайти графічним способом проміжки, що містять корені рівняння $\lg x - 3x + 5 = 0$.

Розв'язання. Перепишемо рівняння наступним чином:

$$\lg x = 3x - 5.$$

Функції в лівій і правій частині рівняння мають спільну область визначення: інтервал $0 < x < +\infty$. Тому будемо шукати корені саме на цьому інтервалі.

Графіки функцій $y_1 = \lg x$ та $y_2 = 3x - 5$ представлені на рис. 2, з якого видно, що вихідне рівняння має два кореня.

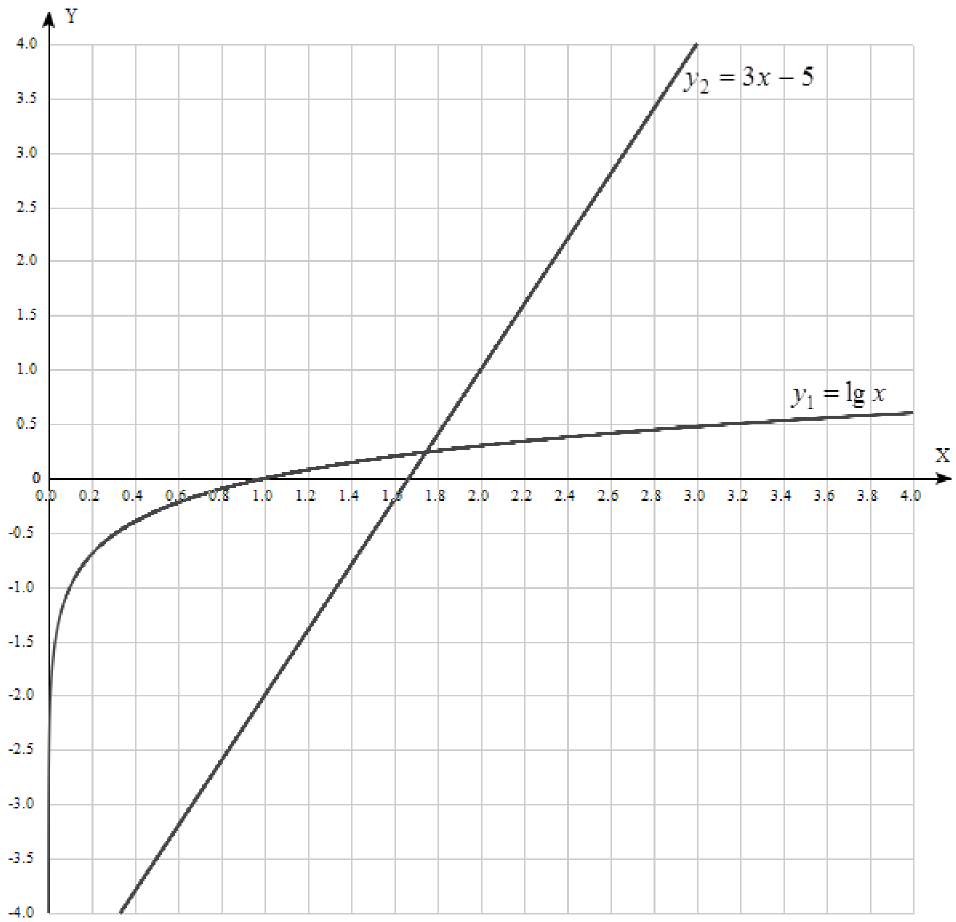

Рис. 2. **Графічна інтерпретація прикладу 1.1**

Отже, відповідь: $x_1^* \in [0{,}0;\ 0{,}2]$, $x_2^* \in [1{,}6;\ 1{,}8]$.

Приклад 1.2. Розв'язати графічно рівняння $x^3-2x^2+2x-1=0$.

Розв'язання. Побудуємо графік функції $y=x^3-2x^2+2x-1$ і визначимо абсциси точок перетину цього графіка з віссю Ox (рис. 3). Крива перетинає Ox в точці $x=1$, звідси витікає, що рівняння має один корінь (Відмітимо, що алгебраїчне рівняння третього степеня має один або три дійсних кореня. Так як крива перетинає вісь абсцис тільки в одній точці, то дане рівняння має тільки один дійсний корінь. Інші два кореня – комплексні.).

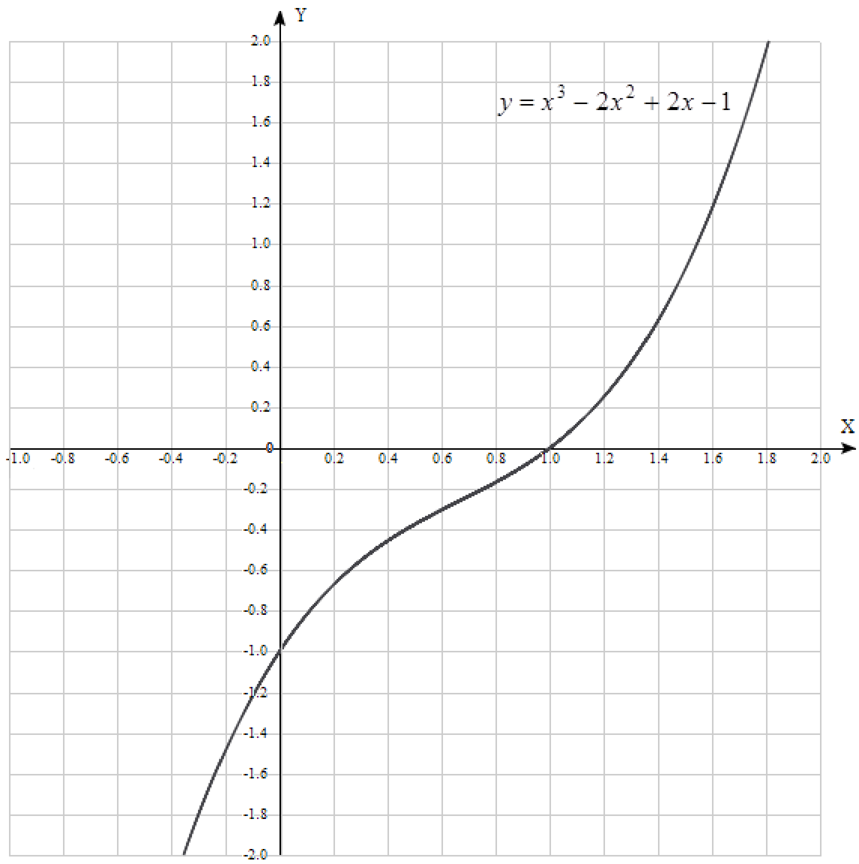

Рис. 3. **Графічна інтерпретація прикладу 1.2**

Аналітичний метод. Аналітично корні рівняння $f(x)=0$ можна відокремити, використовуючи деякі властивості функцій та користуючись однією з розглянутих нижче теорем.

Теорема 1.1. Якщо функція $f(x)$ неперервна на відрізку $[a,b]$ і приймає на кінцях цього відрізку значення різних знаків, то всередині відрізка $[a,b]$ існує хоча б один корінь рівняння $f(x)=0$ (рис. 4).

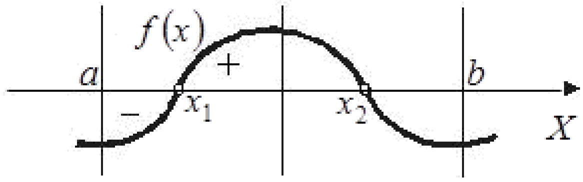

Рис. 4. **Графічна інтерпретація теореми 1**

Теорема 1.2. Якщо функція $f(x)$ неперервна та монотонна на відрізку $[a, b]$ і приймає на кінцях відрізка значення різних знаків, то всередині відрізка $[a, b]$ існує корінь рівняння $f(x)=0$, і цей корінь єдиний (рис. 5).

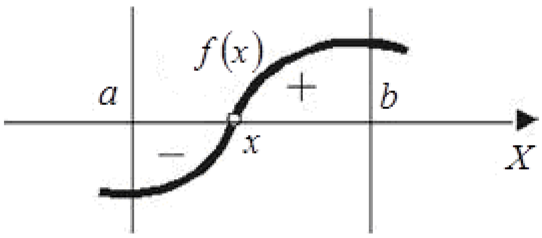

Рис. 5. **Графічна інтерпретація теореми 2**

Теорема 1.3. Якщо функція $f(x)$ неперервна на відрізку $[a, b]$ і приймає на кінцях цього відрізку значення різних знаків, а похідна $f'(x)$ зберігає постійний знак всередині відрізка, то всередині відрізка існує єдиний корінь рівняння $f(x)=0$ (див. рис. 5).

Для відокремлення коренів аналітичним методом можна рекомендувати наступний алгоритм:

1. Дослідити дане рівняння на монотонність і неперервність, визначити область допустимих та граничних значень.

2. Знайти $f'(x)$ – першу похідну, прирівняти її до нуля та знайти критичні точки.

3. Скласти таблицю знаків функції $f(x)$, використовуючи для x значення критичних точок, граничних значень з ОДЗ і точок, отриманих на першому кроці під час аналізу цього рівняння.

4. Визначити інтервали, на кінцях яких функція приймає значення протилежних знаків. Всередині цих інтервалів існує один і тільки один корінь.

Приклад 1.3. Відокремити корені рівняння $x^3+3x^2-24x+1=0$.

Розв'язання. Скористаємося пропонованим алгоритмом відокремлення коренів.

1. ОДЗ рівняння $(-\infty,+\infty)$.

2. Визначимо першу похідну функції $f(x)$: $f'(x)=3x^2+6x-24$ та критичні точки, для чого прирівняємо похідну до нуля: $3x^2+6x-24=0$ $\Rightarrow$ $x_1=-4, x_2=2$.

3. Складемо таблицю знаків виду:

x	$-\infty$	-4	2	$+\infty$
Sign $f(x)$	−	+	−	+

У результаті аналізу таблиці отримаємо три відрізка на яких функція змінює знак: $(-\infty,-4]$, $[-4,2]$, $[2,+\infty)$.

Розширимо таблицю знаків, щоб отримати точні значення кінців відрізків:

x	$-\infty$	−7	−6	−5	−4	−3	−2	−1	0	1	2	3	4	$+\infty$
Sign $f(x)$	−	−	+	+	+	+	+	+	+	−	−	−	+	+

Аналіз таблиці дозволяє обрати три відрізка, на яких функція $f(x)$ змінює знак: $[-7,-6]$, $[0,1]$, $[3,4]$.

Наступним етапом дослідження рівняння є етап уточнення значення кореня, який полягає у обчисленні коренів у заданих границях $[a,b]$ із заданим ступенем точності ε на кожному відокремленому проміжку, який вміщує один корінь (такі проміжки отримуємо на попередньому етапі). Методи уточнення коренів мають алгоритм наближення кореня із заданою точністю та умову виходу з ітераційного процесу.

1.3. Чисельні методи уточнення коренів

Для уточнення коренів нелінійного рівняння із заданою похибкою ε на деякому відрізку $[a,b]$ в інженерній практиці найбільш широко використовують методи, наведені в п. 1.1 методичних рекомендацій. Усі ці методи є ітераційними, тобто побудовані на алгоритмах, в яких одна з їх частин повторюється багаторазово, водночас кількість повторень залежить від початкових даних (від заданої користувачем похибки, від відрізка дослідження та інше).

Розглянемо особливості цих методів та алгоритмів, на яких вони базуються.

1.3.1. Метод половинного ділення

Постановка задачі

Нехай маємо рівняння $f(x)=0$, де $f(x)$ – неперервна, монотонна нелінійна функція, яка має на відрізку $[a,b]$ єдиний корінь x, тобто добуток $f(a)\cdot f(b)<0$, причому $b-a>\varepsilon$, де ε – задана похибка обчислень. Потрібно знайти значення кореня x із заданою похибкою ε (рис. 6).

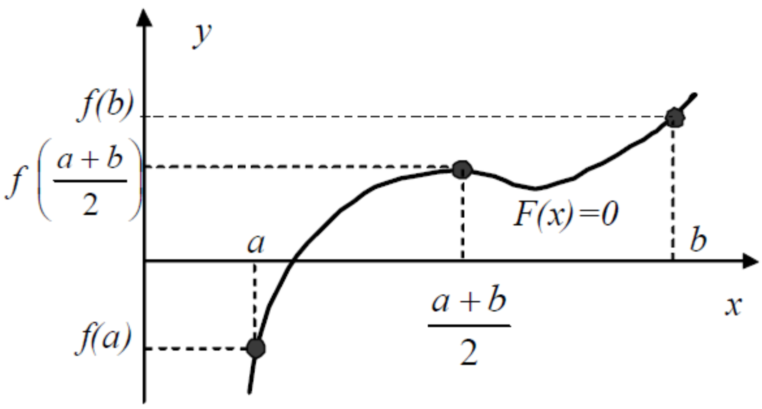

Рис. 6. **Графічна інтерпретація методу половинного ділення**

Алгоритм методу (див. рис. 6) оснований на багатократному ділені навпіл і звужуванні досліджуваного відрізка $[a,b]$, який отримали в результаті попереднього дослідження функції $f(x)$ (відокремлення коренів).

Метод половинного ділення – це найпростіший метод уточнення кореня рівняння. Він сходиться для будь-яких неперервних функцій $f(x)$, в тому числі недиференційованих. Швидкість сходження невелика:

$$N \approx \log_2 \frac{b-a}{\varepsilon}. \tag{1.3}$$

Алгоритм методу

1. На відрізку $[a, b]$ вибираємо точку x_0, яка розділяє його на два рівних відрізки $[a, x_0]$ і $[x_0, b]$, довжина яких рівна і знаходиться за формулою $x_0 = \frac{a+b}{2}$.

2. Перевіряємо чи $f(x_0) = 0$, якщо так, то x_0 – точний корінь початкового рівняння і переходимо до пункту 6.

3. У випадку, коли $f(x_0) \neq 0$, з двох отриманих відрізків $[a, x_0]$ і $[x_0, b]$ вибираємо той, на кінцях якого функція $f(x)$ приймає значення протилежних знаків, тобто, якщо $f(x_0) \cdot f(a) < 0$, тоді залишаємо відрізок $[a, x_0]$ і точку b переносимо в точку x $(b = x_0)$; якщо $f(x_0) \cdot f(a) > 0$, то залишаємо відрізок $[x_0, b]$ і переносимо точку a в точку x $(a = x_0)$ і переходимо до пункту 1.

4. Процес ділення відрізка навпіл виконується доти, поки на якомусь етапі, або середина відрізка буде коренем, або буде виконана умова закінчення ітераційного процесу: $|b - a| < \varepsilon$.

5. Виведення результатів. Кінець алгоритму.

Відомо, що при цьому похибка не перевищує $\frac{b-a}{2^{k+1}}$, де k – число ітерацій.

Приклад 1.4. Обчислити з наближенням 0,01 методом половинного ділення корінь нелінійного рівняння $6^x - x^2 - 3 = 0$.

Розв'язання. Згідно з рис. 1 рівняння є трансцендентним. Чисельне розв'язання таких рівнянь передбачає два етапи: відокремлення коренів та їх уточнення методом половинного ділення.

Перший етап. Відокремимо корені трансцендентного рівняння графічним методом. Для цього перепишемо рівняння наступним чином:

$$6^x = x^2 + 3.$$

Графіки функцій $y_1 = 6^x$ та $y_2 = x^2 + 3$ представлені на рис. 7, з якого видно, що вихідне рівняння має один корінь, який належить проміжку $[0, 1]$.

Отже на відрізку $[0, 1]$ маємо єдиний корінь x, добуток $f(0)\cdot f(1)<0$:

$$f(0)=6^0-0^2-3=-2<0$$
$$f(1)=6^1-1^2-3=2>0 \quad ,$$

причому $1-0>\varepsilon$, де ε – задана похибка обчислень.

Потрібно знайти значення кореня $x^*\in[0,1]$ із заданою похибкою $\varepsilon=0{,}01$ методом половинного ділення.

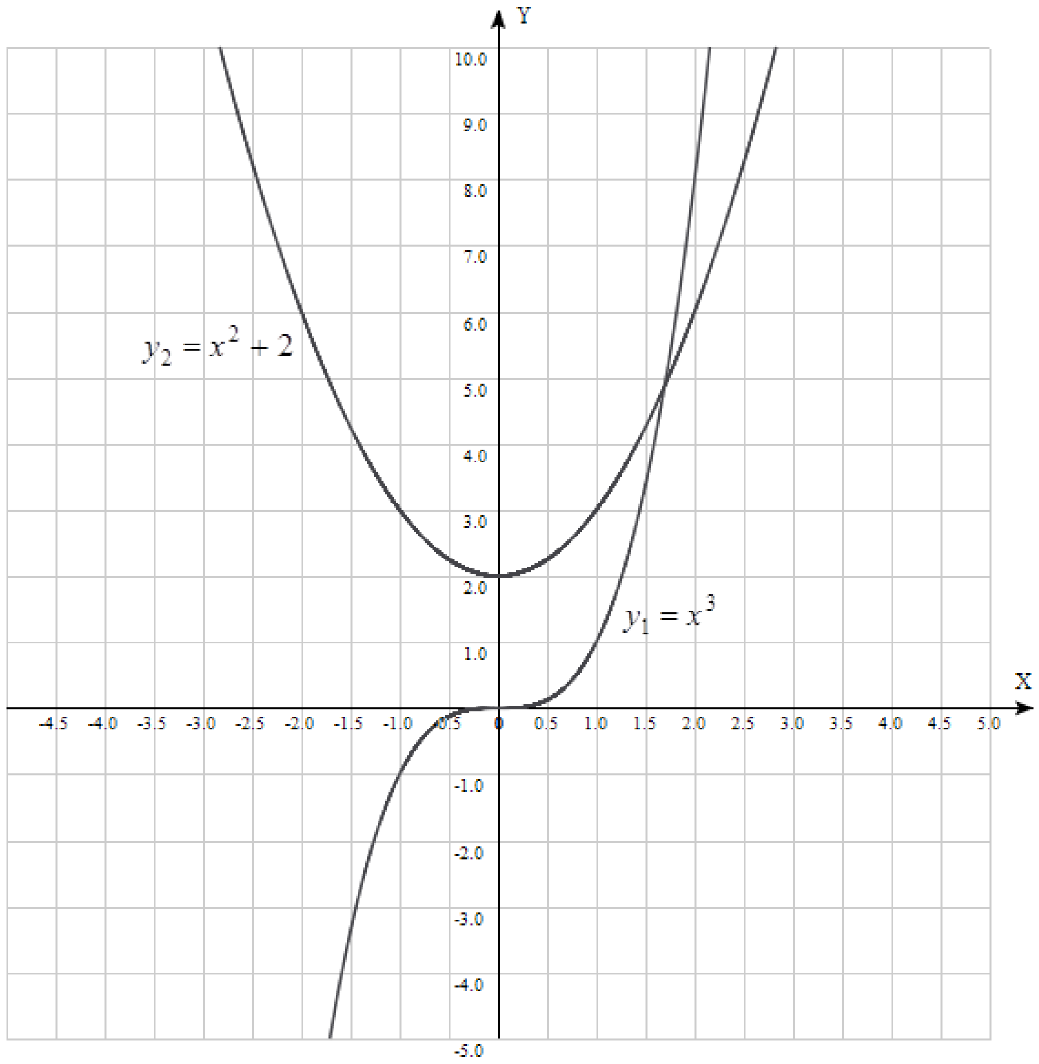

Рис. 7. **Графічна інтерпретація прикладу 1.4**

Другий етап. Уточнимо корінь рівняння методом половинного ділення. Алгоритм методу зведений у табл. 1, де кожний рядок позначає одну ітерацію.

Таблиця 1

Алгоритм методу половинного ділення

k	$x=\frac{a+b}{2}$	$f(x)$	a $(f(a)<0)$	b $(f(b)>0)$	$\varepsilon=0{,}01$ $(\|b-a\|<\varepsilon)$
0	–	–	0	1	$\|1-0\|=1>\varepsilon$
1	0,5000	−0,80	0,5	1	$\|1-0{,}5\|=0{,}5>\varepsilon$
2	0,7500	0,27	0,5	0,75	$\|0{,}75-0{,}5\|=0{,}25>\varepsilon$
3	0,6250	−0,33	0,625	0,75	$\|0{,}75-0{,}625\|=0{,}125>\varepsilon$
4	0,6875	−0,05	0,6875	0,75	$\|0{,}75-0{,}6875\|=0{,}0625>\varepsilon$
5	0,7188	0,11	0,6875	0,7188	$\|0{,}7188-0{,}6875\|=0{,}0313>\varepsilon$
6	0,7031	0,03	0,6875	0,7031	$\|0{,}7031-0{,}6875\|=0{,}0156>\varepsilon$
7	0,6953	−0,01	0,6953	0,7031	$\|0{,}7031-0{,}6953\|=0{,}0078<\varepsilon$

Відповідь: корінь заданого рівняння $x^* \approx 0{,}6953$ отримано за $k=7$ ітерацій.

1.3.2. Метод хорд

Метод хорд є одним з найбільш поширених методів розв'язання алгебраїчних і трансцендентних рівнянь. У літературі він також зустрічається під назвою "метод лінійного інтерполювання" і "метод пропорційних частин".

Постановка задачі

Розглянемо рівняння $f(x)=0$, де $f(x)$ неперервна нелінійна функція, яка на відрізку $[a,b]$ монотонна, диференційована і має єдиний корінь x (тобто $f(a)\cdot f(b)<0$). Потрібно знайти наближене значення кореня x із заданою похибкою ε.

Сутність методу хорд полягає в тому, що на достатньо малому відрізку $[a,b]$ дуга функції $f(x)$ замінюється хордою AB, яка її стягує.

За наближене значення кореня приймається точка x_1 перетину хорди з віссю Ox (рис. 8а).

Рівняння хорди, яка проходить через точки AB має вигляд:

$$\frac{y-f(x)}{f(b)-f(a)}=\frac{x-a}{b-a}. \qquad (1.4)$$

Знайдемо значення x_1, для якого $y=0$, тобто для нерухомого кінця:

$$x_1=a-\frac{f(a)\cdot(b-a)}{f(b)-f(a)}. \qquad (1.5)$$

Ця формула називається **формулою методу хорд**. Тепер корінь x знаходиться всередині відрізка $[x_1, b]$. Значення кореня x_1 можна уточнити за допомогою метода хорд на відрізку $[x_1, b]$, тоді нове наближене значення кореня x_2 знаходиться за формулою $x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)\cdot(b-x_1)}{f(b)-f(x_1)}$.

Аналогічна для всякого $(i+1)$-го наближення до точного значення кореня x даного рівняння використовується формула:

$$x_{i+1}=x_i-\frac{f(x_i)\cdot(b-x_i)}{f(b)-f(x_i)}. \qquad (1.6)$$

Процес стягування хордою продовжується багаторазово доти, поки не одержано наближений корінь із заданим степенем точності

$$|x_{i+1}-x_i|<\varepsilon. \qquad (1.7)$$

де x_{i+1}, x_i – наближені значення коренів рівняння $f(x)=0$, відповідно на $(i+1)$ та i-му ітераційному кроці; ε – задана точність обчислень.

Слід відмітити, що розглянутий випадок (рис. 8а) перетину функції $f(x)$ відрізку $[a, b]$ не є єдиним. Існує ще три варіанти перетину функції, кожний з яких відрізняється напрямком побудови хорд і відповідно рухомими кінцями відрізку.

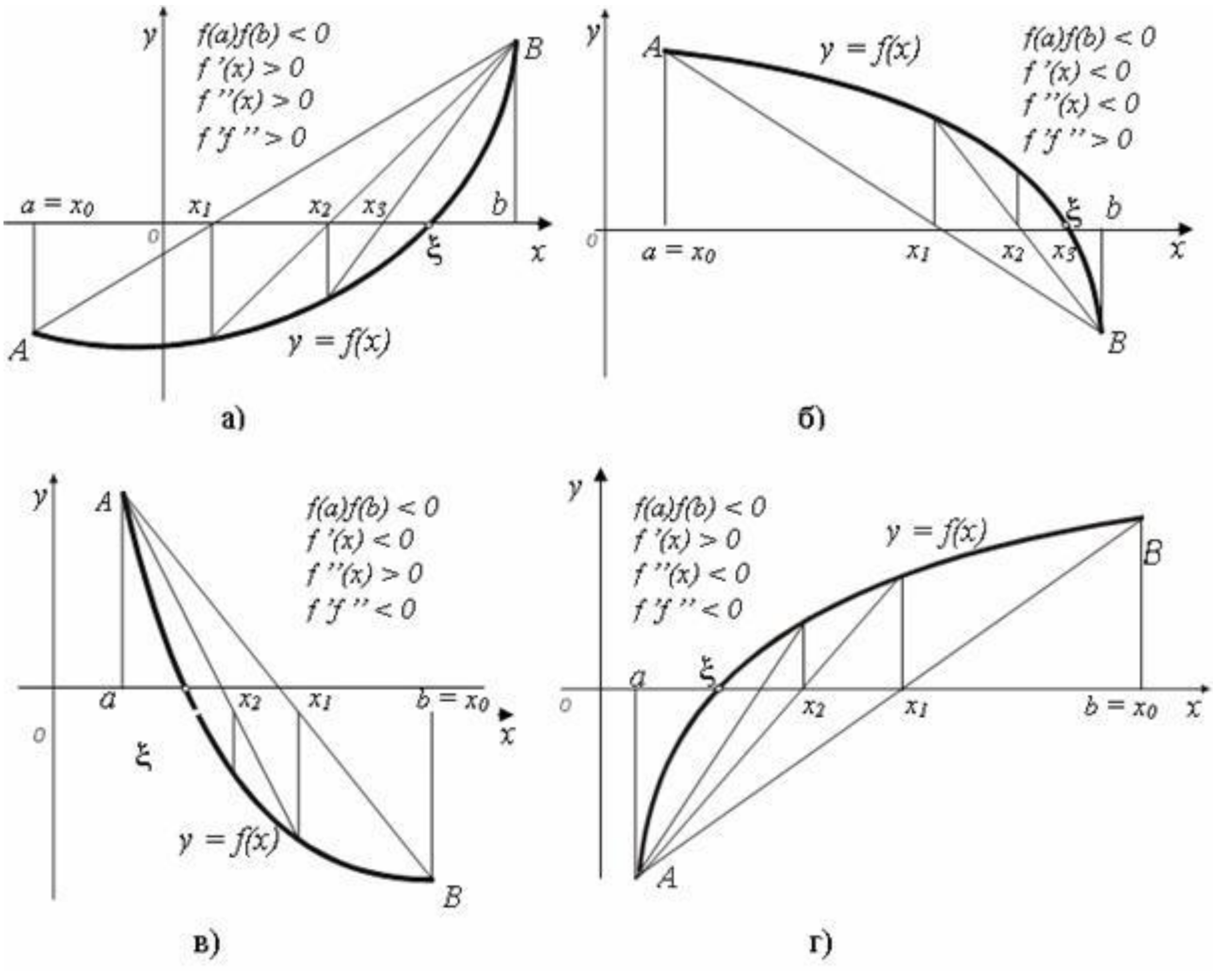

Рис. 8. **Графічна інтерпретація методу хорд і процедури визначення рухомого кінця хорди**

Наприклад, на рис. 8а, б рухомий кінець відрізку *А*, а на рис. 8в, г рухомий кінець – *В* і відповідно формула (1.5) для нього має вигляд: $x_1 = b - \dfrac{f(b)\cdot(b-a)}{f(b)-f(a)}$.

Для автоматизації цього алгоритму необхідно розробити правило для автоматичного вибору рухомого кінця хорди і відповідно формули для обчислення наближеного значення кореня. Існує два правила визначення рухомого кінця хорди.

Правило 1. Нерухомим кінцем відрізка є той, для якого знак функції співпадає із знаком другої похідної. Якщо $f(b)\cdot f''(x) > 0$, то нерухомим є кінець *В*, а всі наближення до кореня x лежать зі сторони кінця *А*. Якщо $f(a)\cdot f''(x) > 0$, то нерухомим є кінець *А*, а всі наближення до кореня x лежать зі сторони кінця *В* (див. рис. 8а, б, в, г).

Правило 2. Якщо добуток першої на другу похідну функції $f(x)$ більший за нуль: $f'(x)f''(x) > 0$, то рухомий кінець *A*; якщо добуток першої на другу похідну менший за нуль: $f'(x)f''(x) < 0$, то рухомий кінець *B*.

Приклад 1.5. Обчислити з наближенням 0,01 методом хорд корінь нелінійного рівняння $\frac{1}{x} - \ln x = 0$.

Розв'язання. Згідно з рис. 1 рівняння є трансцендентним. Чисельне розв'язання таких рівнянь передбачає два етапи: відокремлення коренів та їх уточнення методом половинного ділення.

Перший етап. Відокремимо корені трансцендентного рівняння графічним методом. Для цього перепишемо рівняння наступним чином:

$$\frac{1}{x} = \ln x.$$

Графіки функцій $y_1 = \frac{1}{x}$ та $y_2 = \ln x$ представлені на рис. 9, з якого видно, що вихідне рівняння має один корінь, який належить проміжку $[1, 2]$.

Отже на відрізку $[1, 2]$ маємо єдиний корінь x, добуток $f(1)\cdot f(2) < 0$:

$$f(1) = \frac{1}{1} - \ln 1 = 1 > 0$$

$$f(2) = \frac{1}{2} - \ln 2 = -0{,}2 < 0,$$

причому $2 - 1 > \varepsilon$, де ε – задана похибка обчислень.

Потрібно знайти значення кореня $x^* \in [1, 2]$ із заданою похибкою $\varepsilon = 0{,}01$ методом хорд.

Другий етап. Уточнимо корінь рівняння методом хорд. Для того, щоб скористуватися правилом вибору нерухомого кінця хорди, необхідно знайти першу та другу похідні функції $f(x) = \frac{1}{x} - \ln x$:

$$f'(x) = -\frac{1}{x^2} - \frac{1}{x},\ f''(x) = \frac{2}{x^3} + \frac{1}{x^2}$$

та розв'язати питання щодо їх знаку на знайденому на першому етапі відрізку:

$$f'(x)\underset{[1,\,2]}{<}0, \quad f''(x)\underset{[1,\,2]}{>}0.$$

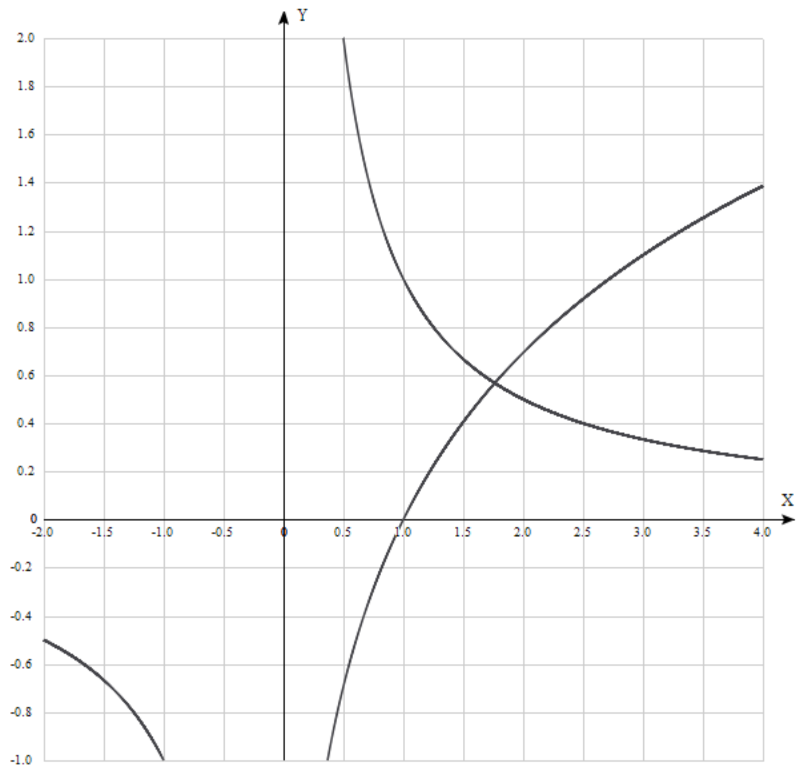

Рис. 9. **Графічна інтерпретація прикладу 1.5**

Згідно з рис. 8, в рухомий кінець – *B* і відповідно ітераційна формула для нього має вигляд: $x_{i+1} = x_i - \dfrac{f(x_i)\cdot(x_i - a)}{f(x_i) - f(a)}$.

Алгоритм методу хорд зведений у табл. 2, де кожний стовпець позначає одну ітерацію.

Таблиця 2

Алгоритм методу хорд

i	0	1	2	3	4
$x_{i+1} = x_i - \dfrac{f(x_i)\cdot(x_i - a)}{f(x_i) - f(a)}$	2	1,8381	1,7872	1,7709	1,7657
$\lvert x_{i+1} - x_i \rvert < \varepsilon$	–	0,1619	0,0509	0,0163	0,0052

Відповідь: корінь заданого рівняння $x^* \approx 1{,}7657$ отримано за $i = 4$ ітерації, значення функції $f\left(x^*\right) \approx -0{,}0022$.

1.3.3. Метод Ньютона (метод дотичних)

Метод послідовних наближень, розроблений Ньютоном, дуже широко використовується при побудові ітераційних алгоритмів. Його популярність обумовлена тим, що на відміну від двох попередніх методів замість інтерполяції за двома значеннями функції в методі Ньютона здійснюється екстраполяція за допомогою дотичної до кривої в одній точці.

Постановка задачі

Нехай корінь рівняння $f(x) = 0$ відокремлений на відрізку $[a, b]$, на якому нелінійна функція $f(x)$ монотонна і має різні знаки на кінцях відрізку, причому похідні $f'(x)$ та $f''(x)$ неперервні та зберігають постійні знаки на всьому відрізку $[a, b]$. Потрібно знайти наближене значення кореня x із заданою похибкою ε.

Геометричний зміст метода Ньютона полягає в тому, що дуга кривої $y = f(x)$ на відрізку $[a, b]$ замінюється дотичною до цієї кривої, а наближене значення кореня визначається як точка перетину дотичної з віссю Ox, проведеної з одного з кінців досліджуваного відрізку. Рівняння дотичної має вигляд: $x_{i+1} = x_i - \dfrac{f(x_i)}{f'(x_i)}$.

Перший випадок. Нехай $f(a) < 0,\ f(b) > 0,\ f'(x) > 0,\ f''(x) > 0$ (рис. 10а) або $f(a) > 0,\ f(b) < 0,\ f'(x) < 0,\ f''(x) < 0$ (рис. 10б). Проведемо дотичну до кривої $y = f(x)$ в точці $B_0(b,\ f(b))$ і знайдемо абсцису точки перетину дотичної з віссю Ox. Відомо, що рівняння дотичної в точці $B_0(b,\ f(b))$ має вид: $y - f(b) = f'(b)(x - b)$.

Припускаючи $y = 0,\ x = x_1$, отримаємо:

$$x_1 = b - \frac{f(b)}{f'(b)}. \tag{1.8}$$

Тепер корінь рівняння знаходиться на відрізку $[a, x_1]$. Застосовуючи знову метод Ньютона, проведемо дотичну до кривої в точці $B_0(x_1, f(x_1))$ і згідно з (1.8) отримаємо $x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)}$, і так далі (рис. 10).

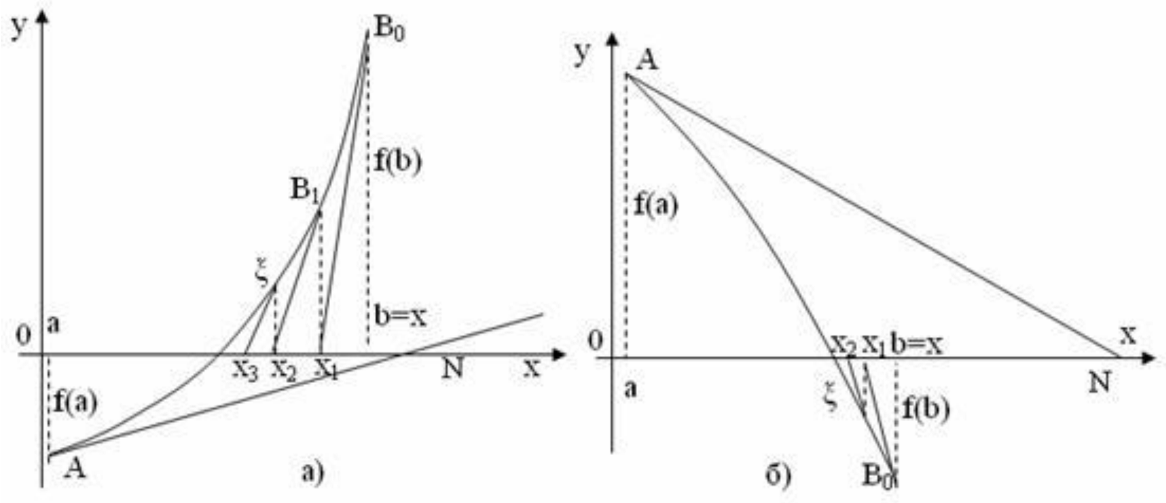

Рис. 10. **Геометричний зміст методу Ньютона для випадків, коли:**
а – функція, яка досліджується, ввігнута ($f'(x)>0$, $f''(x)>0$);
б – функція, яка досліджується, опукла ($f'(x)<0$, $f''(x)<0$)

Даний процес ітераційний, тому формула для будь-якого n-го кроку ітерації має вигляд:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}. \tag{1.9}$$

У результаті отримана послідовність наближених значень x_1, x_2, ..., x_n, ..., кожний наступний член якої ближчій до кореня x, ніж попередній. Однак всі x_n залишаються більше істинного кореня x, тобто x_n – наближене значення кореня x з надлишком. Процес визначення кореня продовжується багаторазово доти, поки не одержано наближений корінь із заданим степенем точності ε.

Другий випадок. Нехай $f(a)<0,\ f(b)>0,\ f'(x)>0,\ f''(x)<0$ (рис. 11а) або $f(a)>0,\ f(b)<0,\ f'(x)<0,\ f''(x)>0$ (рис. 11б).

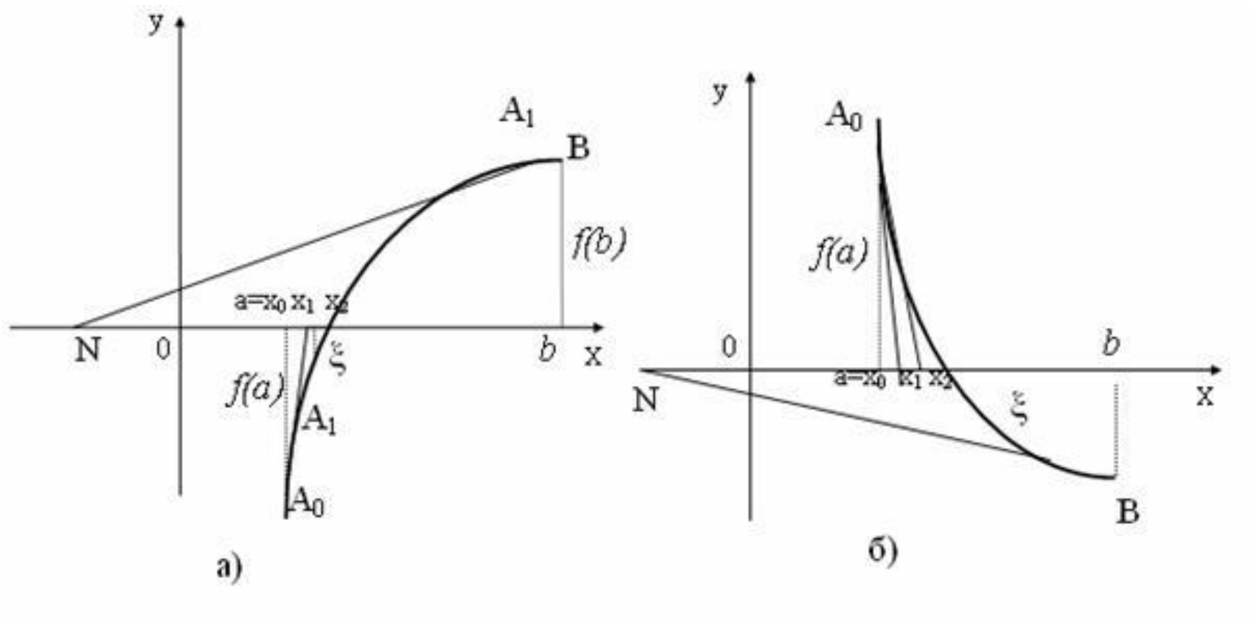

Рис. 11. **Геометричний зміст методу Ньютона для випадків, коли:**
а) функція, яка досліджується, опукла ($f'(x)>0$, $f''(x)<0$);
б) функція, яка досліджується, ввігнута ($f'(x)<0$, $f''(x)>0$)

Якщо провести дотичну до кривої $y = f(x)$ в точці *B*, то вона перетне вісь абсцис в точці, яка не належить відрізку $[a, b]$. Тому проведемо дотичну в точці $A_0(a;\ f(a))$ і запишемо її рівняння для даного випадку: $y - f(a) = f'(a)(x - a)$.

Припускаючи, що $y = 0,\ x = x_1$, отримаємо

$$x_1 = a - \frac{f(a)}{f'(a)}. \tag{1.10}$$

Корінь x знаходиться тепер на відрізку $[x_1,\ b]$. Застосовуючи знову метод Ньютона, проведемо дотичну до кривої в точці $A_1(x_1;\ f(x_1))$ і отримаємо $x_2 = x_1 - \dfrac{f(x_1)}{f'(x_1)}$, і загалом

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}. \tag{1.11}$$

У результаті отримаємо послідовність наближених значень $x_1, x_2, ..., x_n, ...,$ кожний наступний член якої ближчій до істинного кореня x, ніж попередній, тобто x_n – наближене значення кореня x з недостачею.

Порівнюючи формули (1.10), (1.11) з раніше виведеними, (а також враховуючи випадки, які розглядаються на рис. 11а, б помічаємо, що вони відрізняються одна від одної тільки вибором початкового наближення: в першому випадку за x_0 приймався кінець b відрізка, в другому – кінець a.

Під час вибору початкового наближення кореня необхідно використовувати наступне правило: *за початкову точку слід вибирати той кінець відрізка* $[a, b]$, *в якому знак функції співпадає зі знаком другої похідної. В першому випадку* $f(b) > 0,\ f''(x) > 0$ *і початкова точка* $b = x_0$, *в другому* $f(a) > 0,\ f''(x) > 0$ *і в якості початкового наближення беремо* $a = x_0$.

Для оцінювання похибки можна користуватися загальною формулою:

$$\left|x^* - x_n\right| \le \frac{|f(x_n)|}{m}, \tag{1.12}$$

де $m = \min\limits_{[a,b]}\left|f'(x)\right|$ (ця формула підходить і до метода хорд).

У тому випадку, коли відрізок $[a, b]$ настільки малий, що на ньому виконується умова $M_2 < 2m_1$, де $M_2 = \min\limits_{[a,b]}\left|f''(x)\right|$, а $m_1 = \min\limits_{[a,b]}\left|f'(x)\right|$, точність наближення на n-му кроці інтерполяційного процесу оцінюється наступним чином: якщо $\left|x_n - x_{n-1}\right| < \varepsilon, \left|x^* - x_n\right| < \varepsilon^2$.

Якщо похідна $f'(x)$ мало змінюється на відрізку $[a, b]$, то для спрощення обчислень можна користуватися формулою

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_0)}, \tag{1.13}$$

тобто значення похідної в початковій точці достатньо обчислити тільки один раз.

Процес побудови дотичної продовжується багаторазово доти, поки

$$|x_{i+1} - x_i| < \varepsilon, \tag{1.14}$$

де ε – задана точність обчислень; x_{i+1}, x_i – наближені значення кореня рівняння $f(x) = 0$, відповідно на $(i+1)$ та i-му ітераційному кроці.

Правила визначення рухомого кінця для метода Ньютона.

Правило 1. Якщо добуток першої на другу похідну функції $f(x)$ більший за нуль: $f' \cdot f'' > 0$, то рухомий кінець b; якщо добуток першої на другу похідну менший за нуль: $f' \cdot f'' < 0$, то рухомий кінець a, тобто дотична будується в кінці a.

Правило 2. Якщо знак функції на кінці відрізку співпадає зі знаком другої похідної, то цей кінець відрізка є рухомим, і в цій точці будується дотична.

Приклад 1.6. Обчислити з наближенням 0,01 методом Ньютона корінь нелінійного рівняння $x^3 - x^2 - 2 = 0$.

Розв'язання. Згідно рис. 1 рівняння є алгебраїчним. Чисельне розв'язання таких рівнянь передбачає два етапи: відокремлення коренів та їх уточнення методом Ньютона.

Перший етап. Відокремимо корені алгебраїчного рівняння графічним методом. Для цього перепишемо рівняння наступним чином:

$$x^3 = x^2 + 2.$$

Графіки функцій $y_1 = x^3$ та $y_2 = x^2 + 2$ представлені на рис. 12, з якого видно, що вихідне рівняння має один корінь, який належить проміжку $[1, 2]$.

Отже на відрізку $[1, 2]$ маємо єдиний корінь x, добуток $f(1) \cdot f(2) < 0$:

$$f(1) = 1 - 1 - 2 = -2 < 0$$
$$f(2) = 8 - 4 - 2 = 2 > 0,$$

причому $2 - 1 > \varepsilon$, де ε – задана похибка обчислень.

Потрібно знайти значення кореня $x^* \in [1, 2]$ із заданою похибкою $\varepsilon = 0{,}01$ методом Ньютона.

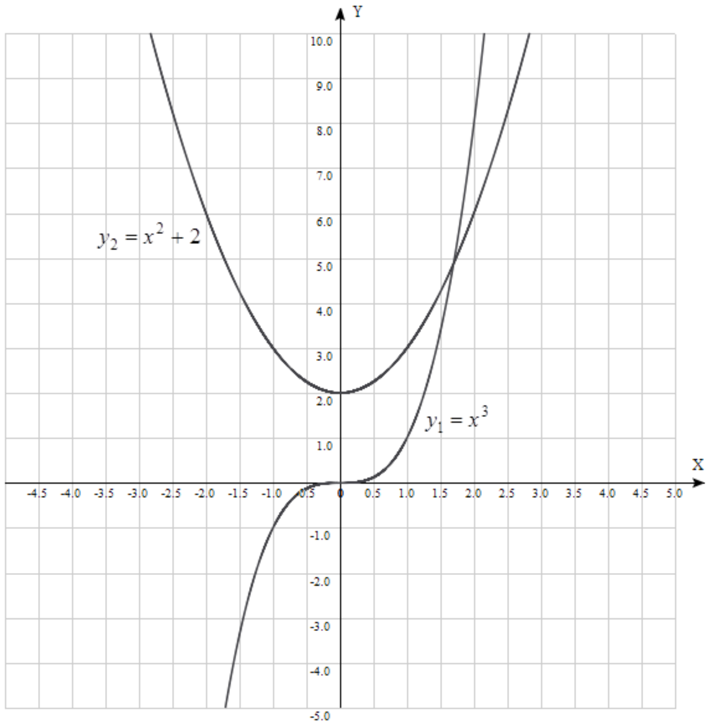

Рис. 12. **Графічна інтерпретація прикладу 1.6**

Другий етап. Уточнимо корінь рівняння методом Ньютона. Для того, щоб скористуватися правилом визначення рухомого кінця для метода Ньютона, необхідно знайти першу та другу похідні функції $f(x) = x^3 - x^2 - 2$:

$$f'(x) = 3x^2 - 2x,\ f''(x) = 6x - 2$$

та розв'язати питання щодо вибору початкового значення x_0.

$$x_0 - ?$$

$x_0 = a = 1$

$f(1) = 1 - 1 - 2 = -2 < 0$

$f''(1) = 6 - 2 = 4 > 0$

знак функції на кінці відрізку не співпадає зі знаком другої похідної

$x_0 = b = 2$

$f(2) = 8 - 4 - 2 = 2 > 0$

$f''(2) = 12 - 2 = 10 > 0$

знак функції на кінці відрізку співпадає зі знаком другої похідної

$$x_0 = b = 2$$

Відповідна ітераційна формула для метода Ньютона має вигляд:

$$x_{i+1} = x_i - \frac{x_i^3 - x_i^2 - 2}{3x_i^2 - 2x_i}.$$

Алгоритм методу Ньютона зведений у табл. 3, де кожний стовпець позначає одну ітерацію.

Таблиця 3

Алгоритм методу Ньютона

i	0	1	2	3
x_{i+1}	2,0000	1,7500	1,6978	1,6956
$\lvert x_{i+1} - x_i \rvert < \varepsilon$	–	0,2500	0,0522	0,0022

Відповідь: корінь заданого рівняння $x^* \approx 1{,}6956$ отримано за $i = 3$ ітерації, значення функції $f\left(x^*\right) \approx -0{,}00010871$.

1.3.4. Комбінований метод

Методи хорд і дотичних дають наближення кореня з різних сторін відрізку $[a, b]$. Тому їх часто використовують в поєднанні один з одним, і процес уточнення кореня x нелінійного рівняння (1.1) проходить скоріше.

Постановка задачі

Нехай дано рівняння (1.1) $f(x) = 0$, де $f(x)$ неперервна нелінійна функція, яка на відрізку $[a, b]$ монотонна, диференційована і має єдиний корінь x (тобто $f(a) \cdot f(b) < 0$). Потрібно знайти наближене значення кореня x із заданою похибкою ε.

Використаємо комбінований метод хорд і дотичних з урахуванням поведінки функції на відрізку $[a, b]$. Якщо $f'(x) > 0,\ f''(x) > 0$, то метод хорд дає наближення кореня з недостачею, а метод дотичних – із залишком (рис. 13а, б). Якщо ж $f'(x) < 0,\ f''(x) < 0$, то методом хорд отримуємо значення із залишком, а методом дотичних – з недостачею (рис. 13в, г). Однак в усіх випадках справжній корінь x знаходиться між наближеними коренями, які отримані за методом хорд і методом дотичних, тобто виконується нерівність $a < \overline{x_n} < x < \overline{\overline{x_n}} < b$, де $\overline{x_n}$ – наближене значення кореня з недоліком, $\overline{\overline{x_n}}$ – з надлишком.

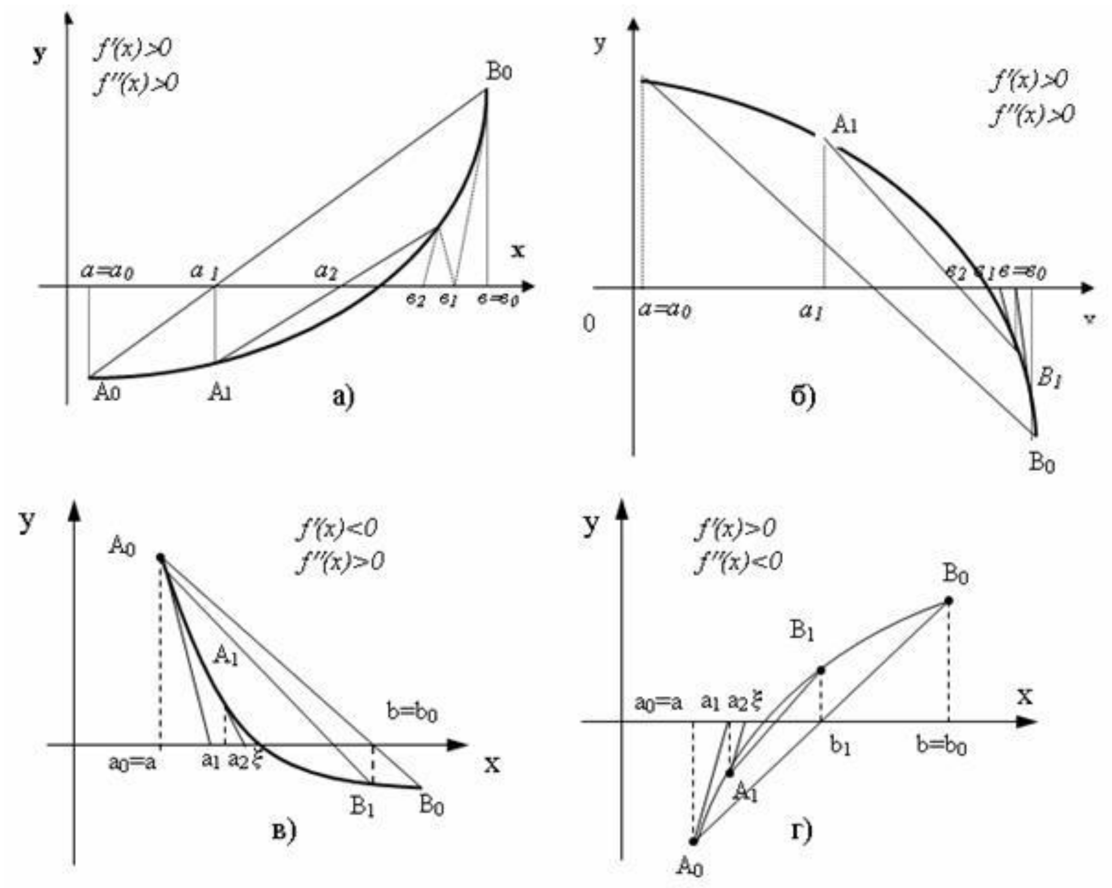

Рис. 13. **Геометричний зміст комбінованого методу**

Сутність методу полягає в тому, що на досить малому відрізку $[a, b]$ (отриманому під час відокремлення коренів) дуга функції $f(x)$ з одного кінця відрізка стягується хордою, а з другого – дотичною. Тобто, якщо сумістити обидва методи, то після знаходження коренів відрізок $[a, b]$ на кожному кроці ітерації звужується шляхом переносу кінців відрізка $[a, b]$ в точки перетину хорди та дотичної з віссю Ox.

Наближене значення кореня нелінійного рівняння визначається відповідно до таких правил:

Правило 1. Якщо добуток першої на другу похідну функції $f(x)$ більший за нуль: $f'(x)\cdot f''(x) > 0$ (рис. 13а, б), то рухомим для методу хорд є кінець a, і наближене значення кореня з боку кінця a обчислюється за формулою хорд:

$$\overline{x_{n+1}} = a_n - \frac{f(a_n)(b_n - a_n)}{f(b_n) - f(a_n)}. \qquad (1.15)$$

Для методу дотичних рухомим є кінець b, і наближене значення кореня обчислюється за формулою дотичних:

$$\overline{\overline{x_{n+1}}} = b_n - \frac{f(b_n)}{f'(b_n)}. \tag{1.16}$$

Правило 2. Якщо добуток першої на другу похідну функції $f(x)$ менший за нуль: $f'(x)\cdot f''(x)<0$ (рис. 13в, г), то рухомим для методу хорд є кінець b, і наближене значення кореня з боку кінця b обчислюється за формулою хорд:

$$\overline{\overline{x_{n+1}}} = b_n - \frac{f(b_n)(b_n - a_n)}{f(b_n) - f(a_n)}. \tag{1.17}$$

Для методу дотичних рухомим є кінець a, і наближене значення кореня обчислюється за формулою дотичних:

$$\overline{x_{n+1}} = a_n - \frac{f(a_n)}{f'(a_n)}. \tag{1.18}$$

Комбінований метод дуже зручний при оцінці похибки обчислень. Ітераційний процес продовжується доти, поки не стане виконуватися нерівність $\left|\overline{\overline{x_n}} - \overline{x_n}\right| < \varepsilon$. За наближене значення кореня приймають $x^* = \frac{1}{2}\left(\overline{\overline{x_n}} + \overline{x_n}\right)$, де $\overline{x_n}$ і $\overline{\overline{x_n}}$ – наближені значення кореня згідно з недостачею та з надлишком.

Приклад 1.7. Обчислити з наближенням 0,01 комбінованим методом додатний корінь нелінійного рівняння $x^3 - 3x^2 + 1 = 0$.

Розв'язання. Згідно рис. 1 рівняння є алгебраїчним. Чисельне розв'язання таких рівнянь передбачає два етапи: відокремлення коренів та їх уточнення комбінованим методом.

Перший етап. Відокремимо корені алгебраїчного рівняння графічним методом. Для цього перепишемо рівняння наступним чином:

$$x^3 = 3x^2 - 1.$$

Графіки функцій $y_1 = x^3$ та $y_2 = 3x^2 - 1$ подані на рис. 14, з якого видно, що вихідне рівняння має два корені, які належать проміжкам $[-1, 0]$ та $[0, 1]$.

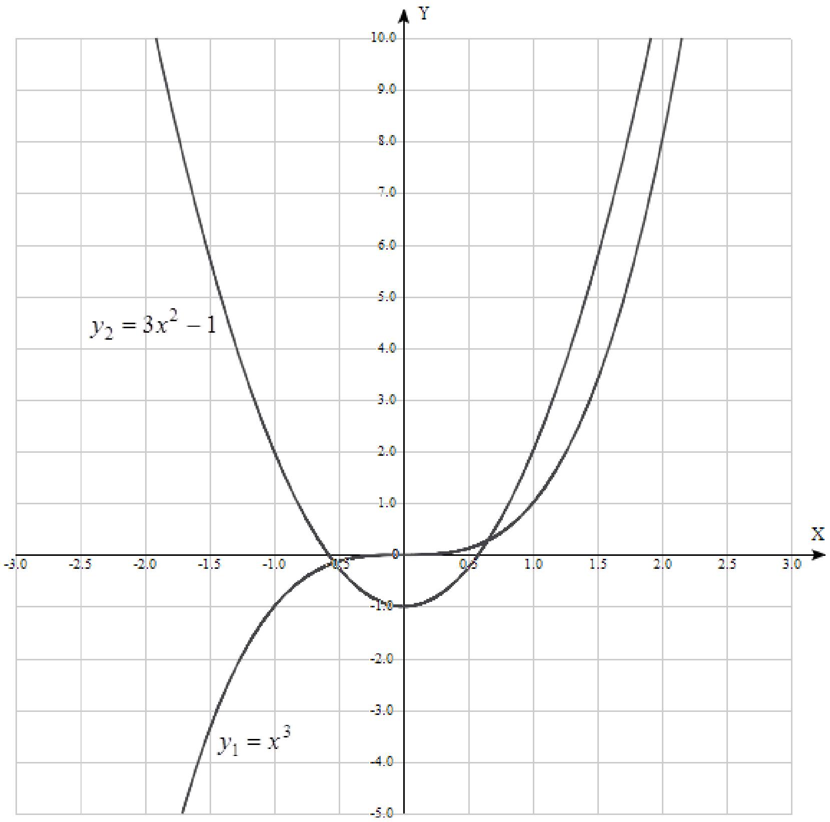

Рис. 14. **Графічна інтерпретація прикладу 1.7**

Розглянемо другий відрізок, так як за умовою прикладу необхідно знайти додатний корінь рівняння. Отже, на відрізку $[0, 1]$ маємо єдиний корінь x, добуток $f(0)\cdot f(1)<0$:

$$f(0)=0-0+1=1>0$$
$$f(1)=1-3+1=-1<0,$$

причому $1-0>\varepsilon$, де ε – задана похибка обчислень.

Потрібно знайти значення кореня $x^* \in [0, 1]$ із заданою похибкою $\varepsilon = 0{,}01$ комбінованим методом.

Другий етап. Уточнимо корінь рівняння комбінованим методом. Для того, щоб скористуватися правилом визначення $\overline{x_{n+1}}$ та $\overline{\overline{x_{n+1}}}$ необхідно знайти першу та другу похідні функції $f(x)=x^3-3x^2+1$, а також визначити їх знак на відрізку $[0, 1]$:

$$f'(x)=3x^2-6x \underset{[0,1]}{<} 0,\ \ f''(x)=6x-6 \underset{[0,1]}{<} 0.$$

Добуток першої на другу похідну функції $f(x)$ більший за нуль: $f'(x)\cdot f''(x)>0$ (рис. 13а, б), отже рухомим для методу хорд є кінець a, і наближене значення кореня з боку кінця a обчислюється за формулою (1.15). Для методу дотичних рухомим є кінець b, і наближене значення кореня обчислюється за формулою (1.16).

Алгоритм методу зведений в табл. 4, де кожний рядок позначає одну ітерацію.

Таблиця 4

Алгоритм комбінованого методу

k	$\overline{x_{n+1}}=a_n-\dfrac{f(a_n)(b_n-a_n)}{f(b_n)-f(a_n)}$	$\overline{\overline{x_{n+1}}}=b_n-\dfrac{f(b_n)}{f'(b_n)}$	$x^*=\dfrac{1}{2}\left(\overline{\overline{x_n}}+\overline{x_n}\right)$	$\left\lvert\overline{\overline{x_n}}-\overline{x_n}\right\rvert<\varepsilon$
0	0,0000	1,0000	0,5000	1,0000
1	0,5000	0,6667	0,5833	0,1667
2	0,6364	0,6528	0,6446	0,0164
3	0,6513	0,6527	0,6520	0,0014

Відповідь: корінь заданого рівняння $x^*\approx 0{,}652$ отримано за $k=3$ ітерації, значення функції $f\left(x^*\right)\approx 0{,}0019$.

1.3.5. Метод ітерацій (метод послідовних наближень)

Сутність методу полягає у заміні початкового рівняння (1.1) або (1.2) еквівалентним йому рівнянням

$$x=\varphi(x). \tag{1.19}$$

Постановка задачі

Нехай задано рівняння $f(x)=0$, де $f(x)$ – неперервна нелінійна функція. Потрібно визначити корінь x цього рівняння, який знаходиться на відрізку $[a,b]$ з заданою похибкою ε.

Виберемо довільним способом $x_0\in[a,b]$ і підставимо його в праву частину рівняння (1.1); тоді отримаємо $x_1=\varphi(x_0)$. Потім це значення x_1 підставимо знову в праву частину рівняння (1.19) і отримаємо $x_2=\varphi(x_1)$

(рис. 15 а, б). Повторюючи цей процес, отримаємо послідовність чисел $x_n = \varphi(x_{n-1})$. Водночас можливі два випадки:

послідовність $x_0, x_1, ..., x_n, ...$ збігається, тобто має границю, і тоді ця границя буде коренем рівняння (1.1);

послідовність $x_0, x_1, ..., x_n, ...$ розбігається, тобто не має границі.

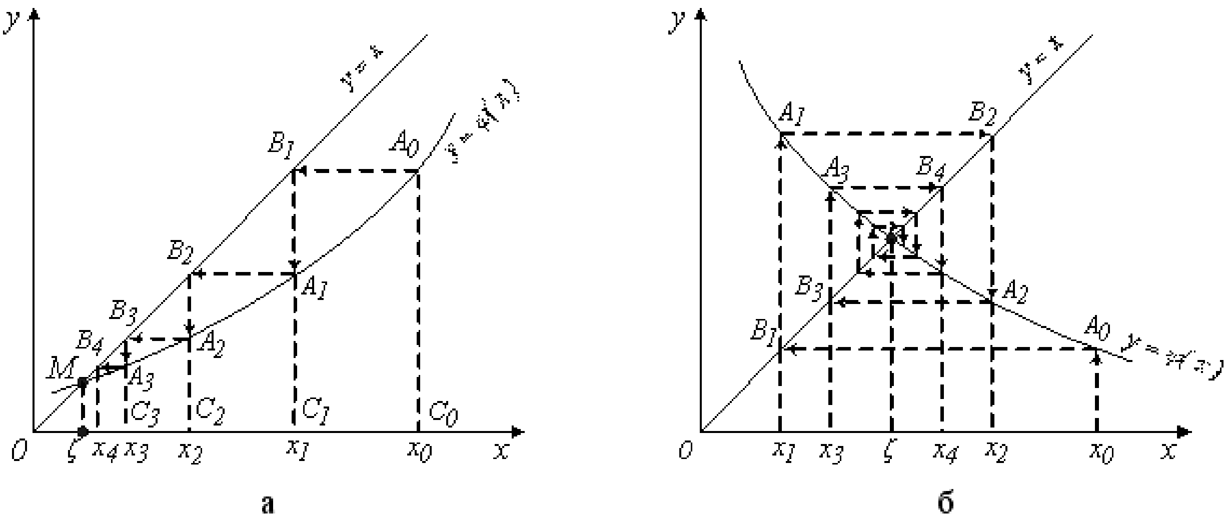

Рис. 15. **Геометрична інтерпретація методу ітерацій**

Наведемо без доказу теорему, яка виражає умову, за якою ітераційний процес розв'язку нелінійного рівняння методом ітерацій збігається.

Теорема 1.4. Нехай на відрізку $[a, b]$ знаходиться єдиний корінь рівняння $x = \varphi(x)$ та у всіх точках цього відрізку похідна $\varphi'(x)$ задовольняє нерівності $|\varphi'(x)| \le q < 1$. Якщо при цьому виконується і умова $a \le \varphi(x) \le b$, то ітераційний процес збігається, а за нульове наближення x_0 можна взяти число з відрізку $[a, b]$.

Розв'яжемо один етап ітерацій. Виходячи із заданого на попередньому кроці значення x_{n-1}, обчислюємо $y = \varphi(x_{n-1})$. Якщо $|y - x_{n-1}| > \varepsilon$, покладемо $x_n = y$ і виконаємо наступну ітерацію. Якщо ж $|y - x_{n-1}| < \varepsilon$, то обчислення закінчують, за наближене значення кореня приймають величину $x_n = y$.

Під час використання методу простих ітерацій основною операцією є вибір функції $\varphi(x)$ в рівнянні (1.19), яку слід підібрати так, щоб

$|\varphi'(x)| \le q < 1$ і швидкість сходження послідовності $\{x_n\}$ до кореня x тим вища, чим менше число q.

Приклад 1.8. Обчислити з наближенням 0,01 методом простих ітерацій корінь нелінійного рівняння $x^2 - 7x + 3 = 0$.

Розв'язання. Згідно з рис. 1 рівняння є алгебраїчним. Чисельне розв'язання таких рівнянь передбачає два етапи: відокремлення коренів та їх уточнення методом простих ітерацій.

Перший етап. Відокремимо корені алгебраїчного рівняння графічним методом. Для цього перепишемо рівняння наступним чином:

$$x^2 = 7x - 3.$$

Графіки функцій $y_1 = x^2$ та $y_2 = 7x - 3$ представлені на рис. 16, з якого видно, що вихідне рівняння має один корінь, який належить проміжку $[0, 1]$.

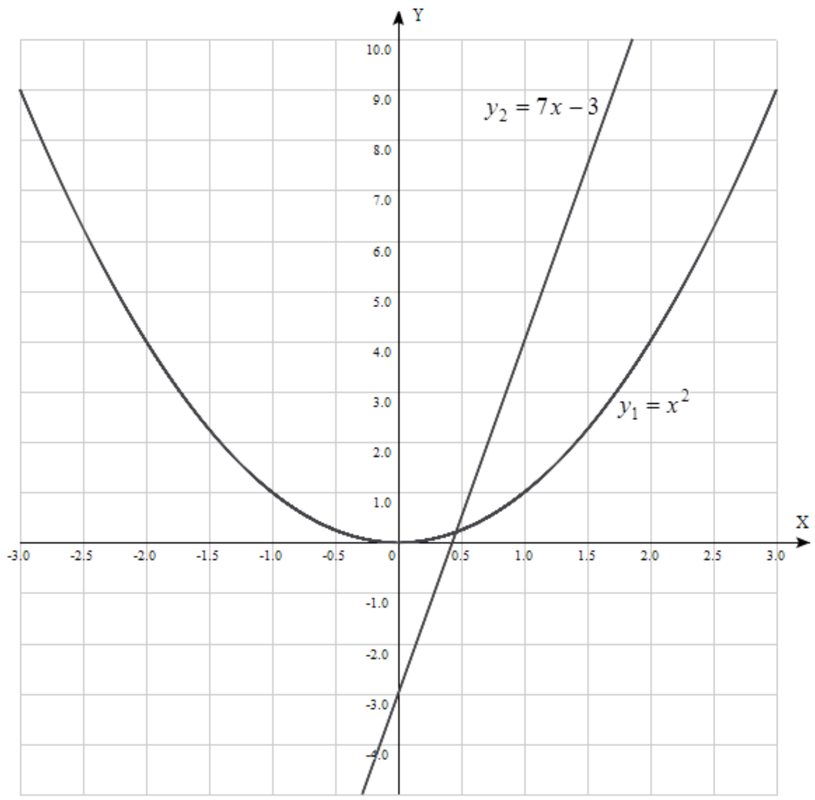

Рис. 16. **Графічна інтерпретація прикладу 1.8**

Отже, на відрізку $[0, 1]$ маємо єдиний корінь x, добуток $f(0) \cdot f(1) < 0$:

$$f(0) = 0 - 0 + 3 = 3 > 0$$

$$f(1) = 1 - 7 + 3 = -1 < 0,$$

причому $1 - 0 > \varepsilon$, де ε – задана похибка обчислень.

Потрібно знайти значення кореня $x^* \in [0, 1]$ із заданою похибкою $\varepsilon = 0{,}01$ методом простих ітерацій.

Другий етап. Уточнимо корінь рівняння методом простих ітерацій. Перетворимо вихідне рівняння до виду (1.9):

$$x = \frac{x^2}{7} + \frac{3}{7}.$$

Отже, $\varphi(x) = \frac{x^2}{7} + \frac{3}{7}$. Згідно з теореми 1.4 необхідно перевірити умову $|\varphi'(x)| \le q < 1$, для чого знайдемо першу похідну функції $\varphi(x)$:

$$\varphi'(x) = \left(\frac{x^2}{7} + \frac{3}{7}\right)' = \frac{2x}{7}.$$

Перевіркою можна переконатися, що $\left|\frac{2x}{7}\right| < 1$ за $x \in [0, 1]$. Отже, умова теореми 1.4 виконується, ітераційний процес збігається, а за нульове наближення x_0 можна взяти число з відрізку $[a, b]$. В якості початкового наближення x_0 виберемо, наприклад, середину відрізка $[0, 1]$: $x_0 = \frac{0+1}{2} = 0{,}5$. Алгоритм методу простих ітерацій зведений у табл. 5, де кожний стовпець позначає одну ітерацію.

Таблиця 5

Алгоритм методу простих ітерацій

i	0	1	2
$x_{i+1} = \frac{x_i^2}{7} + \frac{3}{7}$	0,5000	0,4643	0,4594
$\lvert x_{i+1} - x_i \rvert < \varepsilon$	–	0,0357	0,0049

Відповідь: корінь заданого рівняння $x^* \approx 0{,}4594$ отримано за $i = 2$ ітерації, значення функції $f(x^*) \approx -0{,}0048$.

Запитання для самоперевірки

1. Сформулюйте постановку задачі чисельного розв'язання нелінійного рівняння.

2. Які рівняння відносяться до нелінійних?

3. Класифікація рівнянь, трансцендентні та алгебраїчні рівняння.

4. Поясніть сутність відокремлення коренів нелінійних рівнянь.

5. Які умови повинен задовольняти відрізок, на якому ведеться пошук розв'язку рівняння? У який спосіб можна знайти відрізок, на якому ведеться пошук розв'язку рівняння?

6. Поясніть сутність методів уточнення коренів.

7. У чому полягає метод половинного ділення? Яку він має швидкість збіжності? Дайте геометричну інтерпретацію цього методу.

8. У чому полягає метод хорд? Яку він має швидкість збіжності? Дайте геометричну інтерпретацію цього методу.

9. У чому полягає метод Ньютона розв'язання нелінійних рівнянь? Яку він має швидкість збіжності? Дайте геометричну інтерпретацію цього методу.

10. У чому полягає комбінований метод? Яку він має швидкість збіжності? Дайте геометричну інтерпретацію цього методу.

11. У чому полягає метод ітерацій розв'язання нелінійних рівнянь? Яку він має швидкість збіжності? Дайте геометричну інтерпретацію цього методу.

Варіанти завдань для самостійної роботи

1. Обчислити з наближенням 0,01 методом половинного ділення корінь нелінійного рівняння.

№ варіанта	**Нелінійне рівняння**	**№ варіанта**	**Нелінійне рівняння**
1	$x^3+x^2-6=0$	16	$\ln x+2x^2-1=0$
2	$e^{-x}-x^2+2=0$	17	$e^x+4x-2=0$
3	$x^3-x^2+4=0$	18	$x^2-3-2^x=0$
4	$x^2+1-\frac{1}{x}=0$	19	$x^3-x^2+8=0$

№ варіанта	Нелінійне рівняння	№ варіанта	Нелінійне рівняння
5	$\ln x + x^2 - 3 = 0$	20	$x^3 + x - 5 = 0$
6	$\sin x + 7 - x = 0$	21	$x^2 + 7 - 6^x = 0$
7	$\ln x + 3 - \cos x = 0$	22	$3^x + x - 5 = 0$
8	$x^3 + 2x^2 + 12 = 0$	23	$x^3 + 4x - 2 = 0$
9	$\ln x - \frac{1}{x} = 0$	24	$x^2 + \frac{1}{x} + 5 = 0$
10	$e^x + e^{-x} + 1 = 0$	25	$x^3 - 2x^2 + 7 = 0$
11	$x^2 + 2 - \frac{3}{x} = 0$	26	$x^3 - 4 - \sin x = 0$
12	$\cos x - x^3 - 5 = 0$	27	$\ln(-x) + 11^x = 0$
13	$x^2 + 5^x = 0$	28	$x - 2 - \sqrt{x} = 0$
14	$\sqrt{x} - x^2 + 3 = 0$	29	$x^2 - 3 - x^3 = 0$
15	$x^3 - x^2 - 1 = 0$	30	$e^x + e^{-x} + 2 = 0$

2. Обчислити з наближенням 0,01 методом хорд корінь нелінійного рівняння.

№ варіанта	Нелінійне рівняння	№ варіанта	Нелінійне рівняння
1	$x^2 - 3 - 2^x = 0$	16	$\cos x - x^3 - 5 = 0$
2	$x^2 + 1 - \frac{1}{x} = 0$	17	$x^2 + 5^x = 0$
3	$\ln x + x^2 - 3 = 0$	18	$\sqrt{x} - x^2 + 3 = 0$
4	$\sin x + 7 - x = 0$	19	$x^3 - x^2 - 1 = 0$
5	$\ln x + 3 - \cos x = 0$	20	$x^3 - x^2 + 8 = 0$
6	$x^3 + 2x^2 + 12 = 0$	21	$x^3 + x - 5 = 0$
7	$\ln x - \frac{1}{x} = 0$	22	$x^2 + 7 - 6^x = 0$
8	$e^x + e^{-x} + 1 = 0$	23	$3^x + x - 5 = 0$
9	$x^2 + 2 - 3x^{-1} = 0$	24	$x^3 + 4x - 2 = 0$
10	$x^2 + \frac{1}{x} + 5 = 0$	25	$e^x + e^{-x} + 2 = 0$

№ варіанта	Нелінійне рівняння	№ варіанта	Нелінійне рівняння
11	$x^3-2x^2+7=0$	26	$x^2-3-2^x=0$
12	$x^3-4-\sin x=0$	27	$x^2+1-\frac{1}{x}=0$
13	$\ln(-x)+11^x=0$	28	$\ln x+x^2-3=0$
14	$x-2-\sqrt{x}=0$	29	$\sin x+7-x=0$
15	$x^2-3-x^3=0$	30	$\ln x+3-\cos x=0$

3. Обчислити з наближенням 0,01 методом Ньютона корінь нелінійного рівняння.

№ варіанта	Нелінійне рівняння	№ варіанта	Нелінійне рівняння
1	$x^3+2x^2+12=0$	16	$x^3-4-\sin x=0$
2	$\ln x-\frac{1}{x}=0$	17	$\ln(-x)+11^x=0$
3	$e^x+e^{-x}+1=0$	18	$x-2-\sqrt{x}=0$
4	$x^2+2-\frac{3}{x}=0$	19	$x^2-3-x^3=0$
5	$\cos x-x^3-5=0$	20	$e^x+e^{-x}+2=0$
6	$x^2+5^x=0$	21	$x^3+x^2-6=0$
7	$\sqrt{x}-x^2+3=0$	22	$e^{-x}-x^2+2=0$
8	$x^3-x^2-1=0$	23	$x^3-x^2+4=0$
9	$x^3-x^2+8=0$	24	$\ln x+2x^2-1=0$
10	$x^3+x-5=0$	25	$e^x+4x-2=0$
11	$x^2+7-6^x=0$	26	$x^2-3-2^x=0$
12	$3^x+x-5=0$	27	$x^2+1-\frac{1}{x}=0$
13	$x^3+4x-2=0$	28	$\ln x+x^2-3=0$
14	$x^2+\frac{1}{x}+5=0$	29	$\sin x+7-x=0$
15	$x^3-2x^2+7=0$	30	$\ln x+3-\cos x=0$

4. Обчислити з наближенням 0,01 комбінованим методом корінь нелінійного рівняння.

№ варіанта	Нелінійне рівняння	№ варіанта	Нелінійне рівняння
1	$x^2+5^x=0$	16	$x^3+x^2-6=0$
2	$\sqrt{x}-x^2+3=0$	17	$e^{-x}-x^2+2=0$
3	$x^3-x^2-1=0$	18	$x^3-x^2+4=0$
4	$x^3-x^2+8=0$	19	$\ln x+2x^2-1=0$
5	$x^3+x-5=0$	20	$e^x+4x-2=0$
6	$x^2+7-6^x=0$	21	$x^2-3-2^x=0$
7	$3^x+x-5=0$	22	$x^2+1-\frac{1}{x}=0$
8	$x^3+4x-2=0$	23	$\ln x+x^2-3=0$
9	$x^2+\frac{1}{x}+5=0$	24	$\sin x+7-x=0$
10	$x^3-2x^2+7=0$	25	$\ln x+3-\cos x=0$
11	$x^3-4-\sin x=0$	26	$x^3+2x^2+12=0$
12	$\ln(-x)+11^x=0$	27	$\ln x-\frac{1}{x}=0$
13	$x-2-\sqrt{x}=0$	28	$e^x+e^{-x}+1=0$
14	$x^2-3-x^3=0$	29	$x^2+2-\frac{3}{x}=0$
15	$e^x+e^{-x}+2=0$	30	$\cos x-x^3-5=0$

5. Обчислити з наближенням 0,01 методом простих ітерацій корінь нелінійного рівняння.

№ варіанта	Нелінійне рівняння	№ варіанта	Нелінійне рівняння
1	$x^2+7-6^x=0$	16	$x^3-4-\sin x=0$
2	$3^x+x-5=0$	17	$\ln(-x)+11^x=0$
3	$x^3+4x-2=0$	8	$x-2-\sqrt{x}=0$
4	$x^2+x^{-1}+5=0$	19	$x^2-3-x^3=0$

№ варіанта	Нелінійне рівняння	№ варіанта	Нелінійне рівняння
5	$x^3 - 2x^2 + 7 = 0$	20	$e^x + e^{-x} + 2 = 0$
6	$x^3 + x^2 - 6 = 0$	21	$x^3 + 2x^2 + 12 = 0$
7	$e^{-x} - x^2 + 2 = 0$	22	$\ln x - \frac{1}{x} = 0$
8	$x^3 - x^2 + 4 = 0$	23	$e^x + e^{-x} + 1 = 0$
9	$\ln x + 2x^2 - 1 = 0$	24	$x^2 + 2 - \frac{3}{x} = 0$
10	$e^x + 4x - 2 = 0$	25	$\cos x - x^3 - 5 = 0$
11	$x^2 - 3 - 2^x = 0$	26	$x^2 + 5^x = 0$
12	$x^2 + 1 - \frac{1}{x} = 0$	27	$\sqrt{x} - x^2 + 3 = 0$
13	$\ln x + x^2 - 3 = 0$	28	$x^3 - x^2 - 1 = 0$
14	$x^2 + \frac{1}{x} + 5 = 0$	29	$x^3 - x^2 + 8 = 0$
15	$x^3 - 2x^2 + 7 = 0$	30	$x^3 + x - 5 = 0$

2. Чисельне розв'язання систем нелінійних рівнянь

2.1. Загальна постановка задачі

Дана система n нелінійних рівнянь з n невідомими:

$$\begin{cases} f_1(x_1, x_2, ..., x_n) = 0, \\ f_2(x_1, x_2, ..., x_n) = 0, \\ \quad\vdots \\ f_n(x_1, x_2, ..., x_n) = 0 \end{cases}, \qquad (2.1)$$

де $f_i(x_1, x_2, ..., x_n)$: $R^n \to R, i = 1,2,...,n$ – нелінійні функції, визначені і неперервні в деякій області $G \subset R^n$, або у векторному вигляді (де $X = (x_1, ..., x_n)^T$, $F(X) = [f_1(x), ..., f_n(x)]^T$:

$$F(X) = 0. \qquad (2.2)$$

Потрібно знайти такий вектор $x^* = \left(x_1^*, x_2^*, ..., x_n^*\right)^T$, який під час підстановки в систему (2.1) перетворює кожне рівняння у вірну числову рівність.

Більшість математичних моделей різних процесів і явищ у сучасних технологіях створення друкованих та мультимедійних видань записуються в загальному випадку у вигляді (2.2), тому дана задача має величезне практичне значення.

Згідно з робочою програмою дисципліни слід розглянути наступні методи розв'язання систем нелінійних рівнянь вигляду (2.1) або (2.2).

2.2. Метод простих ітерацій для розв'язання нелінійних систем

Для застосування методу потрібно привести систему (2.1) до рівнозначного вигляду:

$$\begin{cases} x_1 = \varphi_1(x_1, x_2, ..., x_n), \\ x_2 = \varphi_2(x_1, x_2, ..., x_n), \\ \quad\vdots \\ x_n = \varphi_n(x_1, x_2, ..., x_n) \end{cases}, \tag{2.3}$$

або у векторній формі

$$X = \Phi(X), \tag{2.4}$$

де $X = (x_1, ..., x_n)^T$, $\Phi(X) = [\varphi_1(x), \varphi_2(x), ..., \varphi_n(x)]^T$, функції $\varphi_i(x)$ визначені і неперервні в околу ізольованого розв'язку x^* системи (2.3).

Алгоритм методу простих ітерацій

1. Задати початкове наближення $x_0 = \left(x_{10}, ..., x_{n_0}\right)^T$ і мале додатне число ε (точність). Покласти $k = 0$.

2. Обчислити $x^{(k+1)}$ за формулою:

$$x^{(k+1)} = \Phi\left(x^{(k)}\right) \tag{2.5}$$

або

$$x_1^{(k+1)} = \varphi_1\left(x_1^{(k)}, x_2^{(k)}, ..., x_n^{(k)}\right). \tag{2.6}$$

3. Якщо $\Delta^{(k+1)} = \max_i \left| x_i^{k+1} - x_i^k \right| \le \varepsilon$ процес завершено і $x^* \cong x^{(k+1)}$.

Якщо $\Delta^{(k+1)} > \varepsilon$, то покласти $k = k+1$ і перейти до пункту 2.

Теорема 2.1. (про достатню умову збіжності методу простих ітерацій). Нехай функції $\varphi_i(x)$ і $\varphi_i'(x)$, $i = \overline{1,n}$, безперервні в області G, причому виконується нерівність (де q – деяка стала):

$$\max_{x \in G} \max_i \sum_{j=1}^{n} \left| \frac{\partial \varphi_i(x)}{\partial x_j} \right| \le q < 1. \tag{2.7}$$

Якщо послідовні наближення $x^{(k+1)} = \Phi\left(x^{(k)}\right)$, $k = 0,1,2,...$ не виходять з області G, то процес послідовних наближень збігається: $x^* = \lim_{k \to \infty} x^{(k)}$ і вектор x^* є єдиним розв'язком системи (2.2).

Приклад 2.1. Розв'язати нелінійну систему рівнянь методом простих ітерацій з точністю $\varepsilon = 0{,}001$:

$$\begin{cases} 2x_1^2 - x_1 x_2 - 5x_1 + 1 = 0, \\ x_1 + 3\lg x_1 - x_2^2 = 0. \end{cases}$$

Розв'язання. Перетворимо задану систему до вигляду (2.3) так, щоб виконувалася умова збіжності (2.7):

$$x_1 = \sqrt{\frac{x_1(x_2+5)-1}{2}} = \varphi_1(x);$$

$$x_2 = \sqrt{x_1 + 3\lg x_1} = \varphi_2(x).$$

Знайдемо частинні похідні:

$$\frac{\partial \varphi_1}{\partial x_1} = \frac{x_2+5}{4\sqrt{\frac{x_1(x_2+5)-1}{2}}}; \qquad \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_2} = \frac{x_1}{4\sqrt{\frac{x_1(x_2+5)-1}{2}}};$$

$$\frac{\partial \varphi_2}{\partial x_1} = \frac{1 + \frac{3\lg e}{x_1}}{2\sqrt{x_1 + 3\lg x_1}}; \qquad \frac{\partial \varphi_2}{\partial x_2} = 0.$$

Далі скористаємося алгоритмом методу простих ітерацій для розв'язання задачі.

1. Для вибору початкового наближення x_0 знайдемо координати точок перетину кривих $\varphi_1(x)$ та $\varphi_2(x)$ (рис. 17).

Знаходимо наближені значення координат точки перетину кривих $\varphi_1(x)$ та $\varphi_2(x)$ (див. рис. 17): $x_0 = \begin{pmatrix} 3{,}5 \\ 2{,}2 \end{pmatrix}$.

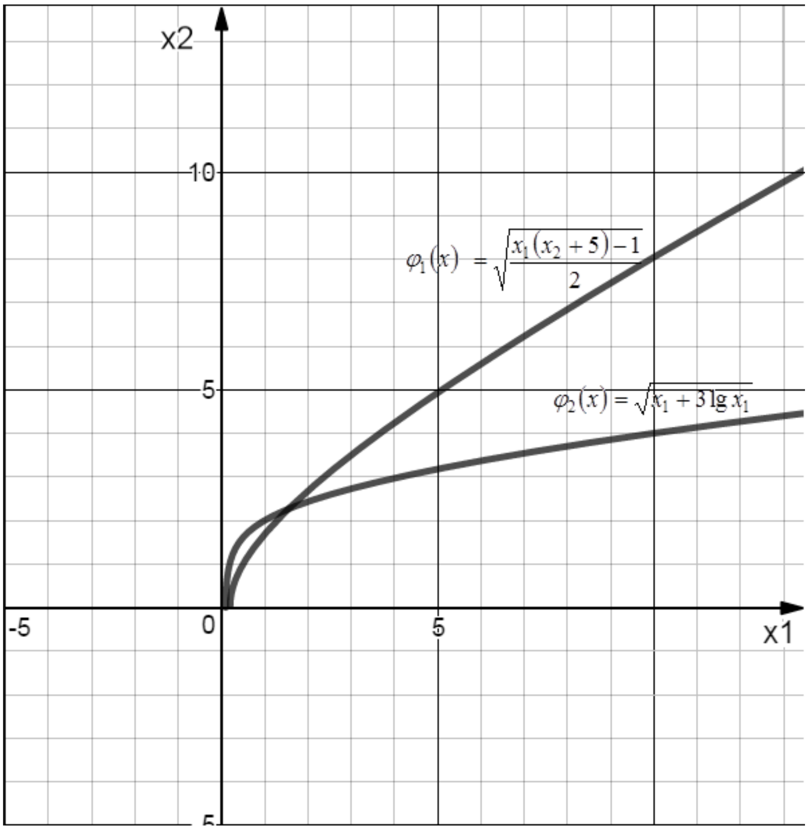

Рис. 17. **Геометрична інтерпретація прикладу 2.1**

Перевіримо виконання умов збіжності. Будемо розглядати околицю знайденої точки x_0: $G = \{|x_1 - 3{,}5| \le 0{,}1 \quad |x_2 - 2{,}2| \le 0{,}1\}$.

Тоді (з розрахунку, що в чисельнику використовуємо найбільші значення діапазону G, а у знаменнику – найменші):

$$\left|\frac{\partial \varphi_1}{\partial x_1}\right| \le \frac{2{,}3+5}{4\sqrt{\frac{3{,}4(2{,}1+5)-1}{2}}} = 0{,}536 < 0{,}54 \qquad \left|\frac{\partial \varphi_1}{\partial x_2}\right| = \frac{3{,}6}{4\sqrt{\frac{3{,}4(2{,}1+5)-1}{2}}} = 0{,}265 < 0{,}27$$

$$\left|\frac{\partial\varphi_2}{\partial x_1}\right| \le \frac{1+\dfrac{3\cdot 0{,}4343}{3{,}4}}{2\sqrt{3{,}4+3\lg 3{,}4}} = 0{,}309 < 0{,}31 \qquad \left|\frac{\partial\varphi_2}{\partial x_2}\right| = 0.$$

Отже, можна отримати оцінки:

$$\left|\frac{\partial\varphi_1}{\partial x_1}\right| + \left|\frac{\partial\varphi_2}{\partial x_1}\right| < 0{,}54 + 0{,}31 = 0{,}85 < 1;$$

$$\left|\frac{\partial\varphi_1}{\partial x_3}\right| + \left|\frac{\partial\varphi_2}{\partial x_2}\right| < 0{,}27 + 0 = 0{,}27 < 1.$$

Зрозуміло, умова (2.7) виконується. Якщо послідовні наближення не виходитимуть з області G, то відповідно до теореми 2.1 ітераційний процес буде збіжним.

2. Виконаємо розрахунки за формулами (2.6):

$$x_1^{(k+1)} = \sqrt{\frac{x_1^{(k)}\left(x_2^{(k)}+5\right)-1}{2}};$$

$$x_2^{(k+1)} = \sqrt{x_1^{(k)} + 3\lg x_1^{(k)}},\ k = 0, 1, 2, \dots .$$

Алгоритм методу простих ітерацій для розв'язання систем нелінійних рівнянь зведений у табл. 6, де кожний стовпець позначає одну ітерацію.

Таблиця 6

Алгоритм методу простих ітерацій

k	0	1	2	3	4
$x_1^{(k)}$	3,500	3,4785	3,4837	3,4848	3,4857
$x_2^{(k)}$	2,200	2,2654	2,2589	2,26049	2,26082
$\Delta^{(k+1)}$	–	0,0654	0,0065	0,00159	0,0009

Відповідь: корені нелінійної системи рівнянь $x_1^* \approx 3{,}4857$, $x_2^* \approx 2{,}2608$ отримано за $k = 4$ ітерації, значення функції $f_1\left(x^*\right) \approx -0{,}0083$, $f_2\left(x^*\right) \approx 0{,}00126$.

2.3. Метод Ньютона

Метод використовується для розв'язання систем вигляду (2.1) або (2.2). Формула для знаходження розв'язку є узагальненням формули (1.11):

$$x^{(k+1)} = x^{(k)} - J^{-1}\left(x^{(k)}\right)\cdot F\left(x^{(k)}\right),\ k = 0, 1, 2, \ldots \tag{2.8}$$

де $J(x) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial f_1(x)}{\partial x_1} & \cdots & \dfrac{\partial f_1(x)}{\partial x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \dfrac{\partial f_n(x)}{\partial x_1} & \cdots & \dfrac{\partial f_n(x)}{\partial x_n} \end{pmatrix}$ – матриця Якобі.

Так як процес обчислення зворотної матриці є трудомістким, перетворимо (2.8) наступним чином:

$$\Delta x^{(k)} = -J^{-1}\left(x^{(k)}\right)\cdot F\left(x^{(k)}\right),\ k = 0, 1, 2, \ldots \tag{2.9}$$

де $\Delta x^{(k)} = x^{(k+1)} - x^{(k)}$ – поправка до поточного наближення $x^{(k)}$.

Помножимо вираз (2.9) зліва на матрицю Якобі $J\left(x^{(k)}\right)$:

$$J\left(x^{(k)}\right)\Delta x^{(k)} = -F\left(x^{(k)}\right),\ k = 0, 1, 2, \ldots\ . \tag{2.10}$$

У результаті отримано систему лінійних алгебраїчних рівнянь щодо поправки $\Delta x^{(k)}$. Після її визначення обчислюється наступне наближення: $x^{(k+1)} = x^{(k)} + \Delta x^{(k)}$.

Алгоритм методу Ньютона

1. Задати початкове наближення $x^{(0)}$ і мале додатне число ε (точність). Покласти $k = 0$.

2. Розв'язати систему лінійних алгебраїчних рівнянь щодо поправки $\Delta x^{(k)} = x^{(k+1)} - x^{(k)}$: $J\left(x^{(k)}\right)\Delta x^{(k)} = -F\left(x^{(k)}\right)$.

3. Обчислити наступне наближення: $x^{(k+1)} = x^{(k)} + \Delta x^{(k)}$.

4. Якщо $\Delta^{(k+1)} = \max_i \left| x_i^{(k+1)} - x_i^{(k)} \right| \le \varepsilon$, процес закінчити і покласти $x^* \cong x^{(k+1)}$. Якщо $\Delta^{(k+1)} > \varepsilon$, то покласти $k = k + 1$ і перейти до пункту 2.

Достатня умова збіжності методу Ньютона для систем нелінійних рівнянь

Теорема 2.2. (про достатню умову збіжності методу Ньютона). Нехай функція $F(x)$ неперервна диференційована у відкритій опуклій множині $G \subset R^n$. Припустимо, що існують $x^* \in R^n$ та $r, \beta > 0$, такі, що $N(x^*, r) \subset G$, $F(x^*) = 0$, також існує $J^{-1}(x^*)$, причому $\left\| J^{-1}(x^*) \right\| \le \beta$ та $J(x) \in Lip_\gamma(N(x^*, r))$. Тоді існує $\varepsilon > 0$ таке, що для усіх $x^{(0)} \in N(x^*, \varepsilon)$ послідовність $x^{(1)}, x^{(2)}, \ldots$, яка виходить із співвідношення (2.8), збігається до x^* та задовольняє нерівність:

$$\left\| x^{(k+1)} - x^* \right\| \le \beta \cdot \gamma \cdot \left\| x^{(k)} - x^* \right\|^2, \ k = 0, 1, 2, \ldots$$

Тут використані наступні позначення: $N(x, r)$ – відкритий окіл радіуса r з центром в точці x: $N(x, r) = \left\{ \bar{x} \in R^n : \left| \bar{x} - x \right| < r \right\}$; запис $J(x) \in Lip_\gamma(N(x^*, r))$ позначає, що $J(x)$ неперервна по Липшицю, де γ – стала Липшиця, тобто: $\left\| J(y) - J(x) \right\| \le \gamma \cdot \left\| y - x \right\|$ для $\forall x, y \in N(x^*, r)$.

До *недоліків* методу Ньютона слід віднести:

необхідність задавати досить добре початкове наближення;

відсутність глобальної збіжності для багатьох задач;

необхідність обчислення матриці Якобі на кожній ітерації;

необхідність розв'язання на кожній ітерації системи лінійних рівнянь, яка може бути погано обумовленою.

Перевагою методу є квадратична збіжність за умови доброго початкового наближення за умови невиродженості матриці Якобі.

Приклад 2.2. Розв'язати нелінійну систему рівнянь методом Ньютона з точністю $\varepsilon = 0{,}001$:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - 3 = 0, \\ x_1^2 + x_2^2 - 9 = 0. \end{cases}$$

Розв'язання. Скористаємося алгоритмом метода Ньютона.

1. Задамо початкове наближення $x^{(0)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \end{pmatrix}$ (рис. 18). З умови задачі $\varepsilon = 0{,}001$. Покладемо $k = 0$.

2. Складемо систему (2.10). Так як $J(x) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2x_1 & 2x_2 \end{pmatrix}$, то система $J\left(x^{(0)}\right) \cdot \Delta x^{(0)} = -F\left(x^{(0)}\right)$ має наступний вигляд: $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 10 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} \Delta x_1^{(0)} \\ \Delta x_2^{(0)} \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} 3 \\ 17 \end{pmatrix}$.

Звідки $\Delta x^{(0)} = \begin{pmatrix} \Delta x_1^{(0)} \\ \Delta x_2^{(0)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -13/8 \\ -11/8 \end{pmatrix}$.

3. Обчислимо $x^{(1)} = x^{(0)} + \Delta x^{(0)}$ = $\begin{pmatrix} 1 \\ 5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -13/8 \\ -11/8 \end{pmatrix}$ = $\begin{pmatrix} -5/8 \\ 29/8 \end{pmatrix}$ = $= \begin{pmatrix} -0{,}625 \\ 3{,}625 \end{pmatrix}$.

4. Так як $\Delta^{(1)} = \max\left\{\left|-\frac{13}{8}\right|, \left|-\frac{11}{8}\right|\right\} = \frac{13}{8} > \varepsilon$, то покладемо $k = 1$ і перейдемо до пункту 2.

2 (1). Складемо систему $J\left(x^{(1)}\right) \cdot \Delta x^{(1)} = -F\left(x^{(1)}\right)$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -5/4 & 29/4 \end{pmatrix} \cdot \Delta x^{(1)} = -\begin{pmatrix} 0 \\ 145/32 \end{pmatrix}.$$

Звідки $\Delta x^{(1)} = \begin{pmatrix} 145/272 \\ -145/272 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}5333 \\ -0{,}5333 \end{pmatrix}$.

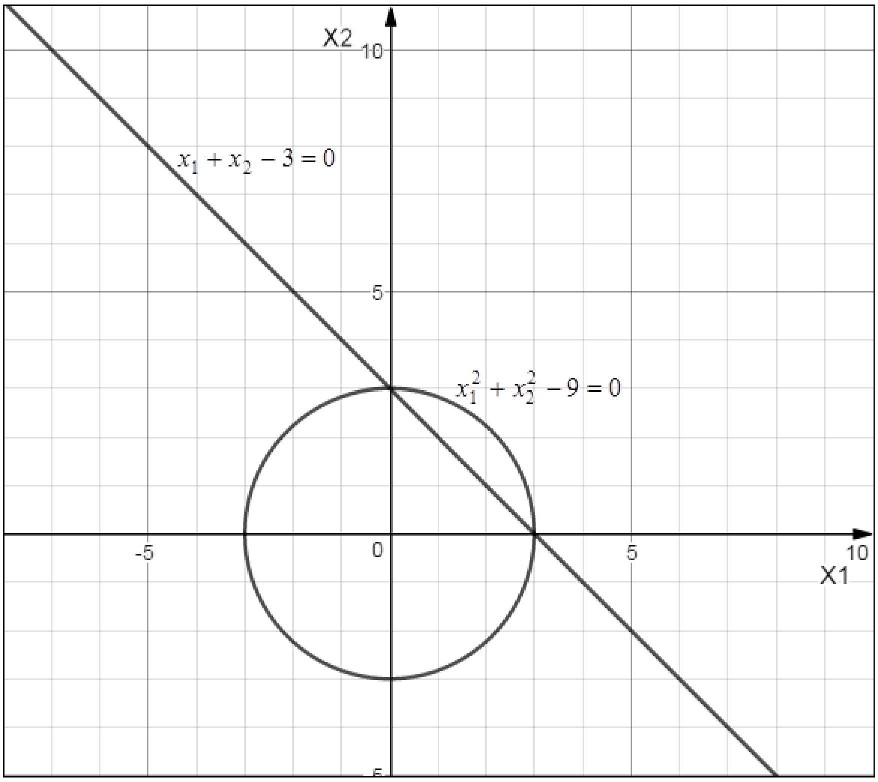

Рис. 18. **Геометрична інтерпретація прикладу 2.2**

3 (1). Обчислимо $x^{(2)} = x^{(1)} + \Delta x^{(1)} = \begin{pmatrix} -0,625 \\ 3,625 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0,5333 \\ -0,5333 \end{pmatrix} =$ $= \begin{pmatrix} -0,0919 \\ 3,0919 \end{pmatrix}$.

4 (1). Так як $\Delta^{(2)} = \max\{|0,5333|, |-0,5333|\} = 0,5333 > \varepsilon$, то покладемо $k = 2$ і перейдемо до пункту 2.

Результати подальших обчислень наведено в табл. 7, де кожний стовпець позначає одну ітерацію.

Таблиця 7

Алгоритм методу Ньютона

k	0	1	2	3	4	5
$x_1^{(k)}$	1	−0,625	−0,0919	−0,0027	−0,0000023	0,0000
$x_2^{(k)}$	5	3,625	3,0919	3,0027	3,0000023	3,0000
$\Delta^{(k+1)}$	–	1,625	0,5333	0,0893	0,0026507	0,0000023

Відповідь: корені нелінійної системи рівнянь $x_1^* = 0$, $x_2^* = 3$ отримано за $k = 5$ ітерацій.

Приклад 2.3. Розв'язати нелінійну систему рівнянь методом Ньютона з точністю $\varepsilon = 10^{-5}$:

$$\begin{cases} x_1 + 3\lg x_1 - x_2^2 = 0, \\ 2x_1^2 - x_1 x_2 - 5x_1 + 1 = 0. \end{cases}$$

Розв'язання. Скористаємося алгоритмом метода Ньютона.

1. Задамо початкове наближення $x^{(0)} = \begin{pmatrix} 3{,}5 \\ 2{,}2 \end{pmatrix}$ (рис. 19). З умови задачі $\varepsilon = 0{,}00001$. Покладемо $k = 0$.

2. Складемо систему (2.10). Так як $J(x) = \begin{pmatrix} 1 + \dfrac{3 \cdot 0{,}4343}{x_1} & -2x_2 \\ 4x_1 - x_2 - 5 & -x_1 \end{pmatrix} =$

$= \begin{pmatrix} 1{,}3722 & -4{,}4 \\ 6{,}8 & -3{,}5 \end{pmatrix}$, то система $J\left(x^{(0)}\right) \cdot \Delta x^{(0)} = -F\left(x^{(0)}\right)$ має наступний вигляд:

$$\begin{pmatrix} 1{,}3722 & -4{,}4 \\ 6{,}8 & -3{,}5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta x_1^{(0)} \\ \Delta x_2^{(0)} \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} 3{,}5 + 3 \cdot \lg 3{,}5 - 2{,}2^2 \\ 2 \cdot 3{,}5 - 3{,}5 \cdot 2{,}2 - 5 \cdot 3{,}5 + 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0{,}2922 \\ -0{,}3 \end{pmatrix}.$$

Звідки $\Delta x^{(0)} = \begin{pmatrix} \Delta x_1^{(0)} \\ \Delta x_2^{(0)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0{,}011835967 \\ 0{,}062718692 \end{pmatrix}$.

3. Обчислимо $x^{(1)} = x^{(0)} + \Delta x^{(0)} = \begin{pmatrix} 3{,}5 \\ 2{,}2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -0{,}011835967 \\ 0{,}062718692 \end{pmatrix} =$

$= \begin{pmatrix} 3{,}488164032 \\ 2{,}262718691 \end{pmatrix}$.

4. Так як

$\Delta^{(1)} = \max\{|-0{,}011835967|, |0{,}062718692|\} = 0{,}062718692 > \varepsilon$, то покладемо $k = 1$ і перейдемо до пункту 2.

2 (1). Складемо систему $J\left(x^{(1)}\right)\cdot \Delta x^{(1)} = -F\left(x^{(1)}\right)$:

$$\begin{pmatrix} 1{,}373511678 & -4{,}525437382 \\ 6{,}689937437 & -3{,}488164032 \end{pmatrix} \cdot \Delta x^{(1)} = \begin{pmatrix} 0{,}00394114 \\ -0{,}00102252 \end{pmatrix}.$$

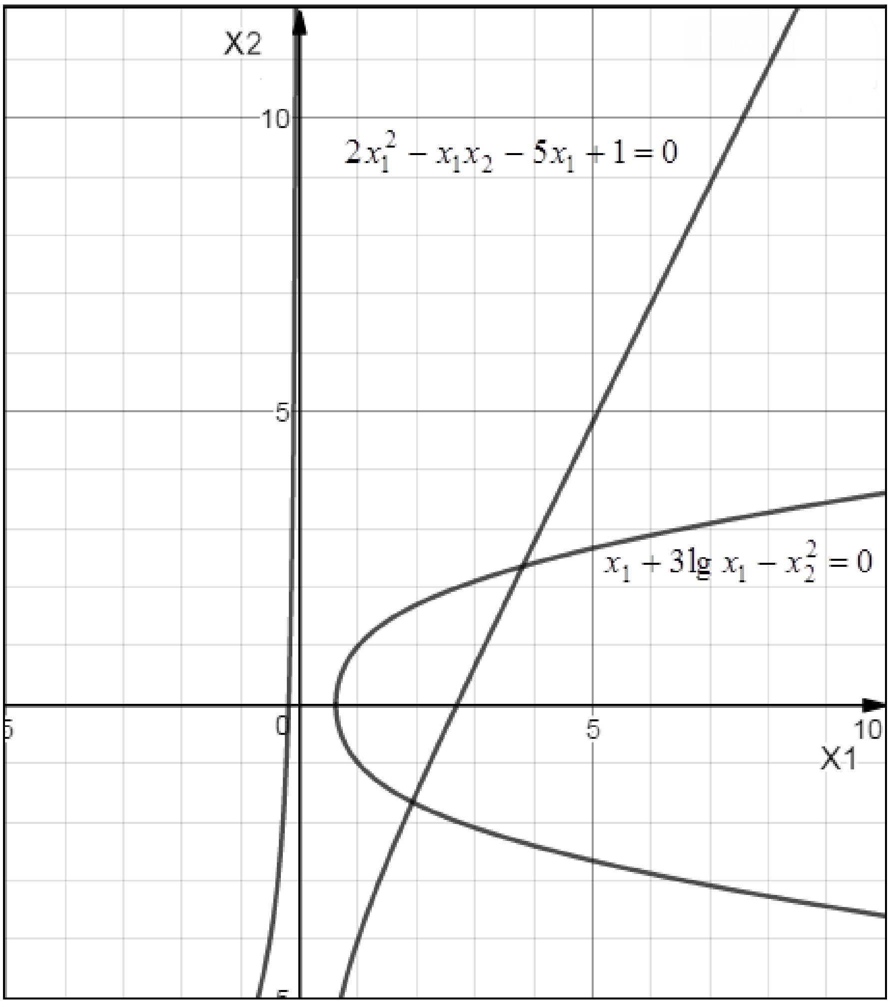

Рис. 19. **Геометрична інтерпретація прикладу 2.3**

Звідки $\Delta x^{(1)} = \begin{pmatrix} -7{,}21032383 \cdot 10^{-4} \\ -0{,}001089727 \end{pmatrix}$.

3 (1). Обчислимо $x^{(2)} = x^{(1)} + \Delta x^{(1)} = \begin{pmatrix} 3{,}487443 \\ 2{,}261628964 \end{pmatrix}$.

4 (1). Так як

$$\Delta^{(2)} = \max\left\{\left|-7{,}21032383 \cdot 10^{-4}\right|, \left|-0{,}001089727\right|\right\} = -0{,}001089727 > \varepsilon,$$

то покладемо $k = 2$ і перейдемо до пункту 2.

Результати подальших обчислень наведено в табл. 8, де кожний стовпець позначає одну ітерацію.

Таблиця 8

Алгоритм методу Ньютона

k	0	1	2	3
$x_1^{(k)}$	3,5	3,488164032	3,487443000	3,487442788
$x_2^{(k)}$	2,2	2,262718691	2,261628964	2,261628631
$\Delta^{(k+1)}$	–	0,062718692	0,001089727	$3{,}33446159–10^{-7}$

З порівняння отриманих результатів з табл. 8 випливає, що за методом простих ітерацій точність $\varepsilon = 0{,}001$ досягається за чотири ітерації, а методом Ньютона точність $\varepsilon = 10^{-5}$ досягнута всього за три ітерації.

Відповідь: корені нелінійної системи рівнянь $x_1^* \approx 3{,}487442788$, $x_2^* \approx 2{,}261628631$ отримано за $k = 3$ ітерації.

Запитання для самоперевірки

1. Сформулюйте постановку задачі чисельного розв'язання системи нелінійних рівнянь.

2. Наведіть приклад прикладних задач, під час розв'язання яких виникає проблема вирішення системи виду (2.1) або (2.2).

3. Чи може задача знаходження комплексних коренів $f(z) = 0$ бути зведена до проблеми розв'язання двох рівнянь із двома невідомими.

4. Назвіть основні методи розв'язання задачі (2.1) або (2.2).

5. У чому полягає метод простих ітерацій для розв'язання систем нелінійних рівнянь?

6. Укажіть основні характеристики цього методу.

7. Наведіть алгоритм методу простих ітерацій.

8. У чому полягає метод Ньютона для розв'язання систем нелінійних рівнянь?

9. Укажіть основні характеристики цього методу.

10. Наведіть алгоритм методу Ньютона.

11. Порівняйте трудомісткість та швидкість збіжності методів простих ітерацій і Ньютона.

12. Назвіть переваги і недоліки методу простих ітерацій.

13. Назвіть переваги і недоліки методу Ньютона.

Варіанти завдань для самостійної роботи

1. Використовуючи метод ітерацій, розв'яжіть систему нелінійних рівнянь із точністю до $\varepsilon = 0{,}001$.

№ варіанта	Система рівнянь	№ варіанта	Система рівнянь
1	$\begin{cases} \sin(x_1+1)-x_2=1{,}2 \\ 2x_1+\cos x_2=2 \end{cases}$	16	$\begin{cases} \sin(x_2+1)-x_1=1{,}2 \\ 2x_2-\cos x_1=3 \end{cases}$
2	$\begin{cases} \cos(x_1-1)+x_2=0{,}5 \\ x_1-\cos x_2=3 \end{cases}$	17	$\begin{cases} \sin x_2+2x_1=2 \\ \cos(x_1-1)+x_2=0{,}7 \end{cases}$
3	$\begin{cases} \sin x_1+2x_2=2 \\ \cos(x_2-1)+x_1=0{,}7 \end{cases}$	18	$\begin{cases} \cos(x_2-1)+x_1=0{,}5 \\ x_2-\cos x_1=3 \end{cases}$
4	$\begin{cases} \cos(x_1+0{,}5)-x_2=1 \\ \cos(x_2-2)+x_1=0 \end{cases}$	19	$\begin{cases} \cos x_2+x_1=1{,}5 \\ 2x_2-\sin(x_1-0{,}5)=1 \end{cases}$
5	$\begin{cases} \cos x_1+x_2=1{,}5 \\ 2x_1-\sin(x_2-0{,}5)=1 \end{cases}$	20	$\begin{cases} \sin(x_2+0{,}5)-x_1=1 \\ \cos(x_1-2)+x_2=0 \end{cases}$
6	$\begin{cases} \sin(x_1+0{,}5)-x_2=1 \\ x_1+\cos(x_2-2)=0 \end{cases}$	21	$\begin{cases} \cos(x_2+0{,}5)+x_1=0{,}8 \\ \sin x_1-2x_2=1{,}6 \end{cases}$
7	$\begin{cases} \sin(x_1-1)=1{,}3-x_2 \\ x_1-\sin(x_2+1)=0{,}8 \end{cases}$	22	$\begin{cases} \sin(x_2-1)+x_1=1{,}3 \\ x_2-\sin(x_1+1)=0{,}8 \end{cases}$
8	$\begin{cases} 2x_2-\cos(x_1+1)=0 \\ x_1+\sin x_2=-0{,}4 \end{cases}$	23	$\begin{cases} 2x_1-\cos(x_2+1)=0 \\ \sin x_1+x_2=-0{,}4 \end{cases}$
9	$\begin{cases} \cos(x_1+0{,}5)-x_2=2 \\ \sin x_2-2x_1=1 \end{cases}$	24	$\begin{cases} \cos(x_2+0{,}5)-x_1=2 \\ \sin x_1-2x_2=1 \end{cases}$

№ варіанта	Система рівнянь	№ варіанта	Система рівнянь
10	$\begin{cases} \sin(x_1+2)-x_2=1{,}5 \\ x_1+\cos(x_2-2)=0{,}5 \end{cases}$	25	$\begin{cases} \sin(x_2+2)-x_1=1{,}5 \\ \cos(x_1-2)+x_2=0{,}5 \end{cases}$
11	$\begin{cases} \sin x_1-6x_2=0 \\ 5x_1+\cos(x_2-2)=4 \end{cases}$	26	$\begin{cases} \sin(x_1-1)+x_2=1 \\ \cos(x_2+1)+x_1=0 \end{cases}$
12	$\begin{cases} \cos x_1-x_2=0{,}5 \\ 2x_1-\sin(x_2+3)=1 \end{cases}$	27	$\begin{cases} x_2-\sin(x_1+1)=0 \\ x_1+\cos x_2=4 \end{cases}$
13	$\begin{cases} \sin(x_1+1)=1{,}2-x_2 \\ x_1-\cos(x_2-1)=1{,}8 \end{cases}$	28	$\begin{cases} \sin x_1-x_2=5 \\ x_1-\cos(x_2+1)=2 \end{cases}$
14	$\begin{cases} \cos x_1+x_2=2 \\ x_1-\sin(x_2-1)=1 \end{cases}$	29	$\begin{cases} \sin x_1-x_2=3 \\ x_1+\cos(x_2-0{,}5)=2 \end{cases}$
15	$\begin{cases} \sin(x_1-0{,}5)-x_2=1 \\ x_1+\cos(x_2-2)=2 \end{cases}$	30	$\begin{cases} \cos(x_1+1)-x_2=-1 \\ 2x_1-\sin(x_2+1)=1 \end{cases}$

2. Виходячи з початкового наближення $x_1^{(0)}$, $x_2^{(0)}$ знайти розв'язок нелінійної системи методом Ньютона з точністю $\varepsilon=0{,}01$.

№ варіанта	Система рівнянь, початкові умови
1	$\begin{cases} 4x_1^2+x_2^2+2x_1\cdot x_2-x_2-2=0 & x_1^{(0)}=0{,}4 \\ 2x_1^2+3x_1\cdot x_2+x_2^2-3=0 & x_2^{(0)}=0{,}9 \end{cases}$
2	$\begin{cases} x_1^2+x_2^2-1=0 & x_1^{(0)}=0{,}9 \\ \lg x_1+2x_2+1=0 & x_2^{(0)}=0{,}45 \end{cases}$
3	$\begin{cases} 9x_1^2-4x_2^2-36=0 & x_1^{(0)}=2{,}1 \\ x_2-\lg x_1-1=0 & x_2^{(0)}=1{,}7 \end{cases}$
4	$\begin{cases} x_2+x_1^2\cdot x_2-1=0 & x_1^{(0)}=0{,}9 \\ x_2^3-x_2=0 & x_2^{(0)}=0{,}6 \end{cases}$

№ варіанта	Система рівнянь, початкові умови
5	$\begin{cases} x_2^2 + x_1 \cdot x_2^2 - x_1^2 - x_1^3 = 0 & x_1^{(0)} = 0{,}6 \\ x_2 - e^{-x_1} - 1 = 0 & x_2^{(0)} = 0{,}7 \end{cases}$
6	$\begin{cases} x_2^2 + x_1^2 - 1 = 0 & x_1^{(0)} = 0{,}65 \\ tgx_1 - x_2 = 0 & x_2^{(0)} = 0{,}75 \end{cases}$
7	$\begin{cases} (x_1 - 1)^2 \left(x_1^2 + x_2^2\right) - x_1^2 = 0 & x_1^{(0)} = 1{,}6 \\ x_2 - \lg x_1 - 1 = 0 & x_2^{(0)} = 1{,}5 \end{cases}$
8	$\begin{cases} x_1^2 - x_2^2 - 1 = 0 & x_1^{(0)} = 1{,}2 \\ x_1 \cdot x_2 - x_1 - 1 = 0 & x_2^{(0)} = 0{,}5 \end{cases}$
9	$\begin{cases} x_1^2 + x_2^2 - 1 = 0 & x_1^{(0)} = 0{,}75 \\ x_2 - tgx_1 = 0 & x_2^{(0)} = 0{,}75 \end{cases}$
10	$\begin{cases} x_1^2 - 4x_2^2 - 4 = 0 & x_1^{(0)} = 2{,}1 \\ x_2^2 - e^{-x_1} = 0 & x_2^{(0)} = 0{,}4 \end{cases}$
11	$\begin{cases} x_2 - arctgx_1 - 1 = 0 & x_1^{(0)} = 1{,}3 \\ x_1^2 - 2x_1 - x_2 = 0 & x_2^{(0)} = 1{,}7 \end{cases}$
12	$\begin{cases} x_2 + x_1^2 \cdot x_2 - 1 = 0 & x_1^{(0)} = 1{,}4 \\ \ln x_1 - x_2 = 0 & x_2^{(0)} = 0{,}25 \end{cases}$
13	$\begin{cases} x_1 \cdot x_2 - x_1 - 1 = 0 & x_1^{(0)} = 1{,}3 \\ 2e^{-x_1} - 2x_2 = 0 & x_2^{(0)} = 1{,}7 \end{cases}$
14	$\begin{cases} x_1^2 - x_2^2 - 1 = 0 & x_1^{(0)} = 1{,}1 \\ x_2 + x_1^2 \cdot x^2 - 1 = 0 & x_2^{(0)} = 0{,}4 \end{cases}$
15	$\begin{cases} x_1^2 \cdot x_2 + x_2 - 2 = 0 & x_1^{(0)} = 0{,}8 \\ 2e^{-x_1} - 2x_2 = 0 & x_2^{(0)} = 0{,}8 \end{cases}$
16	$\begin{cases} x_2 + x_1^2 \cdot x_2 - 1 = 0 & x_1^{(0)} = 1{,}1 \\ x_1^2 - x_2^2 - 1 = 0 & x_2^{(0)} = 0{,}3 \end{cases}$

№ варіанта	Система рівнянь, початкові умови
17	$\begin{cases} x_2^2 - x_1 \cdot x_2^2 - x_1^3 = 0 & x_1^{(0)} = 1{,}2 \\ x_1^2 + x_2 - 2 = 0 & x_2^{(0)} = 0{,}9 \end{cases}$
18	$\begin{cases} x_1^2 + x_2^2 - 1 = 0 & x_1^{(0)} = 0{,}85 \\ x_2 - tgx_1 = 0 & x_2^{(0)} = -0{,}25 \end{cases}$
19	$\begin{cases} x_1^2 + x_2^2 - 400 = 0 & x_1^{(0)} = 0{,}6 \\ x_1^2 - x_2^2 - 4x_1 + 2x_2 + 7 = 0 & x_2^{(0)} = 0{,}9 \end{cases}$
20	$\begin{cases} x_2^2 - x_2^3 - 2x_2 + 1 = 0 & x_1^{(0)} = 1{,}2 \\ x_2 - \lg x_1 + 1 = 0 & x_2^{(0)} = -0{,}8 \end{cases}$
21	$\begin{cases} x_2 - x_1 + e^{-x_1} = 0 & x_1^{(0)} = 0{,}8 \\ \left(x_2 - x_1^2\right)^2 - x_1^5 = 0 & x_2^{(0)} = 0{,}1 \end{cases}$
22	$\begin{cases} \arccos x_1^2 - x_2 = 0 & x_1^{(0)} = 0{,}8 \\ x_2 - arctgx_1 = 0 & x_2^{(0)} = 0{,}4 \end{cases}$
23	$\begin{cases} x_2 - \arccos x_1 = 0 & x_1^{(0)} = 0{,}8 \\ 2 - (x_2 - x_1)^2 - x_1^2 = 0 & x_2^{(0)} = 0{,}1 \end{cases}$
24	$\begin{cases} x_1^2 + x_2^2 - 4 = 0 & x_1^{(0)} = 1{,}6 \\ x_2 - \lg x_1 - 1 = 0 & x_2^{(0)} = 1{,}5 \end{cases}$
25	$\begin{cases} 2x_1^3 - x_1 \cdot x_2 - 5x_1 + 5 = 0 & x_1^{(0)} = 0{,}8 \\ x_1 + x_2 \cdot \sin x_1 - 5x_2 + 3 = 0 & x_2^{(0)} = 2{,}2 \end{cases}$
26	$\begin{cases} x_1^2 + x_2^2 - 1 = 0 & x_1^{(0)} = 0{,}85 \\ x_1^3 - x_2 = 0 & x_2^{(0)} = 0{,}55 \end{cases}$
27	$\begin{cases} x_1 + 3\lg x_1^2 - x_2^2 = 0 & x_1^{(0)} = 3{,}4 \\ 2x_1 - x_1 \cdot x_2 - 5x_1 + 1 = 0 & x_2^{(0)} = 2{,}2 \end{cases}$
28	$\begin{cases} arctg(\lg x_1) - x_2 = 0 & x_1^{(0)} = 1{,}4 \\ 1 - \dfrac{1}{x_1} + x_2 = 0 & x_2^{(0)} = 0{,}3 \end{cases}$

№ варіанта	Система рівнянь, початкові умови
29	$\begin{cases} 2x_1^3 + 20x_1^2 - 4x_2^3 - 1 = 0 & x_1^{(0)} = 0{,}3 \\ 2x_1^2 - 3x_2^3 - 10x_2 + 5 = 0 & x_2^{(0)} = 0{,}5 \end{cases}$
30	$\begin{cases} x_2^3 - 6x_1^2 + x_1^3 = 0 & x_1^{(0)} = 0{,}8 \\ x_2 - \arccos x_1 = 0 & x_2^{(0)} = 1{,}5 \end{cases}$

Використана література

1. Бахвалов Н. С. Численные методы / Н. С. Бахвалов, Н. П. Жидков, Г. Н. Кобельков. – Москва : БИНОМ, Лаб. знаний, 2003. – 632 с.

2. Бахвалов Н. С. Численные методы в задачах и упражнениях / Н. С. Бахвалов А. В. Лапин, Е. В. Чижонков. – Москва : Высш. шк., 2000. – 192 с.

3. Вержбицкий В. М. Численные методы. Линейная алгебра и нелинейные уравнения / В. М. Вержбицкий. – Москва : Высш. шк., 2000. – 268 с.

4. Вержбицкий В. М. Численные методы. Математический анализ и обыкновенные дифференциальные уравнения / В. М. Вержбицкий. – Москва : Высш. шк., 2001. – 383 с.

5. Волков Е. А. Численные методы / Е. А. Волков. – Санкт-Петербург : Лань, 2004. – 248 с.

6. Демидович Б. П. Основы вычислительной математики / Б. П. Демидович. – Москва : Наука, 1994. – 664 с.

7. Дэннис Дж. Численные методы безусловной оптимизации и решения нелинейных уравнений / Дж. Дэннис, Р. Шнабель. – Москва : Мир, 1988. – 40 с.

8. Кваша О. П. Численные методы / Н. И. Данилина, Н. С. Дубровская, О. П. Кваша и др. – Москва : Висшая шк., 1976. – 368 с.

9. Турчак Л. И. Основы численных методов / Л. И. Турчак. – Москва : Наука, 1997. – 320 с.

Зміст

НАВЧАЛЬНЕ ВИДАННЯ

ПРИКЛАДНА МАТЕМАТИКА

Методичні рекомендації та завдання до самостійної роботи студентів спеціальності 186 "Видавництво та поліграфія" першого (бакалаврського) рівня

Самостійне електронне текстове мережеве видання

Укладач **Ковальова** Катерина Олександрівна

Відповідальний за видання *Л. М. Малярець*

Редактор *О. В. Анацька*

Коректор *О. В. Анацька*

План 2017 р. Поз. № 239 ЕВ. Обсяг 54 с.

Видавець і виготовлювач – ХНЕУ ім. С. Кузнеця, 61166, м. Харків, просп. Науки, 9-А

Свідоцтво про внесення суб'єкта видавничої справи до Державного реєстру
ДК № 4853 від 20.02.2015 р.