УДК 313.42

Тематический раздел: Математические методы, модели и информационные технологии в экономике

Воронин А. В.

кандидат технических наук, доцент,

Харьковский национальный экономический университете имени С. Кузнеца

Железнякова Э. Ю.

кандидат физико-математических наук, доцент,

Харьковский национальный экономический университете имени С. Кузнеца

УСТОЙЧИВОСТЬ ОЛИГОПОЛИСТИЧЕСКОГО РЫНКА

Исследована модель олигополистического рынка с произвольным количеством фирм-участников рыночного взаимодействия. Выполнен анализ структурной устойчивости модели. Приведены примеры с одношаговым сосредоточенным отставанием и распределенным в геометрической прогрессии запаздыванием. Соответствующие результаты проиллюстрированы графиками переходных процессов объемов выпуска продукции для различного числа фирм на рынке.

Ключевые слова: олигополия, распределенное запаздывание, устойчивость, экономическая динамика, положение равновесия

Постановка проблемы. По своей природе олигополия является достаточно распространенной формой рыночной организации. Олигополистическими отраслями можно считать металлургию, нефтехимию, автомобильную промышленность, производство компьютерной техники и средств связи и т.д. Функционирование олигополистической фирмы подразумевает процедуры принятия решений об объеме производства, ценовой политике и стратегии инвестирования в условиях конкуренции. Соответствующие экономические расчеты имеют комплексный характер. Это означает, что управленческие действия каждой фирмы ориентированы на поведение своих конкурентов. Все это, в свою очередь, определяет сложную структуру взаимодействия всех участников олигополистического рынка как динамический процесс, протекающий во времени.

Анализ последних исследований и публикаций. В работах [1-5] рассмотрены традиционные подходы, ориентированные на максимизацию прибыли каждой из фирм – участников рынка с учетом одношагового запаздывания во времени. Необходимо отметить ограниченность указанной методологии, существенно влияющей на устойчивость переходных процессов в исследуемых системах экономической динамики.

Цель статьи. Выполнить анализ устойчивости математической модели олигополистического рынка с учетом эффекта последействия, обусловленным наличием распределенных запаздываний различного типа.

Изложение основного материала. Базовый принцип построения математической модели состоит в нахождении такого объема выпуска продукции для каждой фирмы, который обеспечивал бы максимальную прибыль. Допустим, что на олигополистическом рынке присутствуют m фирм с соответствующими объемами $q_1, q_2, ..., q_i, ..., q_m$. При этом доход каждой фирмы R_i равен цене товара P_i умноженной на объем реализованной продукции: $R_i = P_i \cdot q_i$. Существующие издержки производства у каждой из фирм C_i также являются функциями от объема выпуска q_i, то есть $C_i = C_i\left(q_i\right)$, $i = \overline{1,m}$. Прибыль фирмы π_i есть разница между доходом и издержками: $\pi_i = R_i - C_i$, $i = \overline{1,m}$.

Предположим, что цена $P_i = A - \sum_{i=1}^{m} q_i$, где $A = const$ и затраты $C_i = B \cdot q_i$ для всех фирм одинаковы. Здесь $B = const$ – постоянная величина предельных издержек. Такие допущения могут иметь место в положении равновесия (статика) олигополистического рынка.

Выражение для прибыли π_i имеет вид:

$$\pi_i = \left(A - \sum_{i=1}^{m} q_i \right) \cdot q_i - B \cdot q_i, \; i = \overline{1,m}. \tag{1}$$

Максимизация прибыли π_i дает условие равенства предельного дохода предельным издержкам, то есть

$$\frac{\partial \pi_i}{\partial q_i} = 0 \text{ или } A - 2q_i - \sum_{\substack{j=1 \\ i \neq j}}^{m} q_j = B, \; i = \overline{1,m}. \tag{2}$$

Данная система m линейных алгебраических уравнений с m неизвестными $q_1, q_2, ..., q_i, ..., q_m$ имеет очевидное решение:

$$q_i^* = \frac{A - B}{m + 1}, \; i = \overline{1,m}. \tag{3}$$

Так как все q_i^* положительны, то необходимо выполение условия $A > B$.

В последующем изложении при построении различных версий динамической модели олигополистического рынка будет выполнен анализ устойчивости рассмотренного выше равновесного ЗекучийЗя.

Допустим, что каждая фирма при формировании цены единицы продукции ориентируется на свой объем выпуска в Зекучий момент времени n и на объем выпуска продукции конкурирующими фирмами в предшествующий момент времени $(n-1)$, то есть

$$P_i = A - q_i(n) - \sum_{\substack{j=1 \\ i \neq j}}^{m} q_j(n-1), \; i = \overline{1,m}. \tag{4}$$

В таком случае прибыль π_i может быть вычислена по формуле:

$$\pi_i(n) = \left(A - q_i(n) - \sum_{\substack{j=1 \\ i \neq j}}^{m} q_j(n-1) \right) \cdot q_i(n) - B \cdot q_i(n). \tag{5}$$

Используя необходимое условие экстремума $\frac{\partial \pi_i}{\partial q_i}$ будем иметь:

$$q_i(n) + \frac{1}{2} \sum_{\substack{j=1 \\ i \neq j}}^{m} q_j(n-1) = \frac{A - B}{2}, \; i = \overline{1,m}. \tag{6}$$

Если выражения (6) дополнить начальными условиями $q_i(0)$, то получим систему линейных разностных уравнений для неизвестных $q_i(n)$. Для получения решения системы уравнений (6) с соответствующими начальными условиями применим дискретное преобразование Лапласа (Z – преобразование), то есть $q_i(z)=\sum\limits_{k=0}^{\infty}\frac{q_i(n)}{z^k}$.

С учетом свойств Z – преобразования уравнения (6) преобразуются к виду:

$$z\cdot q_i(z)-z\cdot q_i(0)+\frac{1}{2}\sum_{\substack{j=1\\ i\neq j}}^{m}q_j(z)=\frac{A-B}{2}\cdot\frac{z}{z-1}\ . \tag{7}$$

Представим уравнения (7) в матричной форме:

$$\begin{pmatrix} z & \frac{1}{2} & \dots & \frac{1}{2}\\ \frac{1}{2} & z & \dots & \frac{1}{2}\\ \dots & \dots & \dots & \dots\\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \dots & z \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} q_1(z)\\ q_2(z)\\ \dots\\ q_m(z)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \frac{A-B}{2}\cdot\frac{z}{z-1}+z\cdot q_1(0)\\ \frac{A-B}{2}\cdot\frac{z}{z-1}+z\cdot q_2(0)\\ \dots\\ \frac{A-B}{2}\cdot\frac{z}{z-1}+z\cdot q_m(0)\end{pmatrix}. \tag{8}$$

С формальной точки зрения, решение (8) запишется в виде:

$$\begin{pmatrix} q_1(z)\\ q_2(z)\\ \dots\\ q_m(z)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} z & \frac{1}{2} & \dots & \frac{1}{2}\\ \frac{1}{2} & z & \dots & \frac{1}{2}\\ \dots & \dots & \dots & \dots\\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \dots & z \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} \frac{A-B}{2}\cdot\frac{z}{z-1}+z\cdot q_1(0)\\ \frac{A-B}{2}\cdot\frac{z}{z-1}+z\cdot q_2(0)\\ \dots\\ \frac{A-B}{2}\cdot\frac{z}{z-1}+z\cdot q_m(0)\end{pmatrix}. \tag{9}$$

Иначе говоря, проблема поиска решения (9) сводится к нахождению обратной матрицы размера $m\times n$.

Для достижения данной цели воспользуемся результатом для квадратной матрицы более общего вида (10), где b, c – заданные действительные числа, m – размерность квадратной матрицы.

$$\begin{pmatrix} b & c & \dots & c \\ c & b & \dots & c \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ c & c & \dots & b \end{pmatrix} = \frac{1}{\left(b+(m-1)c\right)(b-c)} \begin{pmatrix} b+(m-2)c & -c & \dots & -c \\ -c & b+(m-2)c & \dots & -c \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ -c & -c & \dots & b+(m-2)c \end{pmatrix}, \quad (10)$$

Полагая $b = z, c = \frac{1}{2}$ с учетом (10) получим решение (9) в матричной форме:

$$\begin{pmatrix} q_1(z) \\ q_2(z) \\ \dots \\ q_m(z) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z+\frac{m-2}{2} & -\frac{1}{2} & \dots & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & z+\frac{m-2}{2} & \dots & -\frac{1}{2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \dots & z+\frac{m-2}{2} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \frac{A-B}{2}\cdot\frac{z}{z-1}+z\cdot q_1(0) \\ \frac{A-B}{2}\cdot\frac{z}{z-1}+z\cdot q_2(0) \\ \dots \\ \frac{A-B}{2}\cdot\frac{z}{z-1}+z\cdot q_m(0) \end{pmatrix} \times$$

$$\times \frac{1}{\left(z+\frac{m-1}{2}\right)\left(z-\frac{1}{2}\right)}. \quad (11)$$

Учитывая специфику матричной структуры решения (11) можно представить явное выражение для каждой из величин $q_i(z)$, $i = \overline{1,m}$:

$$q_i(z) = \frac{A-B}{2}\cdot\frac{z}{\left(z-\frac{1-m}{2}\right)(z-1)} - \frac{1}{2}\frac{\left(\sum_{\substack{j=1 \\ i\neq j}}^{m} q_j(0)\right)\cdot z}{\left(z-\frac{1-m}{2}\right)\left(z-\frac{1}{2}\right)} + \frac{z}{z-\frac{1}{2}}q_i(0). \quad (12)$$

Обозначим суммарный объем выпуска продукции всеми фирмами в начальный момент времени как $Q_0 = \sum_{j=1}^{m} q_j(0)$ и выполнив тождественные преобразования, получим:

$$q_i(z) = \frac{A-B}{m+1}\cdot\frac{z}{z-1} + \left(\frac{Q_0}{m} - \frac{A-B}{m+1}\right)\cdot\frac{z}{z-\frac{1-m}{2}} + \left(q_i(0) - \frac{Q}{m}\right)\cdot\frac{z}{z-\frac{1}{2}}, i = \overline{1,m}. \quad (13)$$

Назовем величину $q_0 = \dfrac{Q_0}{m}$ средним значением начальных объемов выпуска для всех фирм и вспомним с учетом (3), что $q^* = q_i^* = \dfrac{A-B}{m+1}$ есть равновесный объем выпуска для каждой фирмы. Тогда (13) запишется в виде:

$$q_i(z) = q^* \cdot \frac{z}{z-1} + \left(q_0 - q^*\right) \cdot \frac{z}{z - \dfrac{1-m}{2}} + \left(q_i(0) - q_0\right) \cdot \frac{z}{z - \dfrac{1}{2}},\ i = \overline{1,m}. \quad (14)$$

С помощью обратного Z – преобразования нетрудно найти явную формулу для оригинала $q_i(n)$:

$$q_i(n) = q^* + \left(q_0 - q^*\right) \cdot \left(\frac{1-m}{2}\right)^n + \left(q_i(0) - q_0\right) \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^n,\ i = \overline{1,m}. \quad (15)$$

Выражение (15) допускает достаточно простую трактовку динамического процесса объема выпуска продукции для каждого участника олигополистического рынка. Первое слагаемое представления (15) есть равновесное значение объема выпуска продукции, одинаковое для всех фирм. Второе слагаемое характеризует динамику отклонения среднего для всех участников рынка начального объема выпуска от равновесного значения. Третье слагаемое иллюстрирует индивидуальное отличие начального объема выпуска каждой фирмы от среднего начального объема, которое с течением времени затухает в геометрической прогрессии со знаменателем ${}^1\!/\!_2$.

Устойчивость равновесного объема выпуска q^* однозначно определяется поведенческими свойствами второго слагаемого, а именно последовательностью $\left(\dfrac{1-m}{2}\right)^n$.

Очевидно, что при $m = 2$ данная последовательность имеет вид $\left(-{}^1\!/\!_2\right)^n$ и демонстрирует затухающие осцилляции. При этом q^* есть устойчивое положение равновесия. При $m = 3$ можем наблюдать незатухающие колебания с постоянной амплитудой, генерируемые последовательностью $(-1)^n$. Если же

$m \geq 4$, то будут иметь место колебания с растущей в геометрической прогрессии амплитудой и q^* есть неустойчивое положение равновесного объема выпуска продукции каждой фирмой. Таким образом, в динамической модели олигополии с произвольным числом фирм-участниц рынка при наличии одношагового запаздывания, асимптотическую устойчивость равновесного объема выпуска продукции демонстрирует только дуополистическая структура рынка ($m = 2$).

Рассмотрим несколько иную процедуру ценообразования на дуополистическом рынке с учетом распределенного запаздывания, то есть каждый из участников будет фиксировать объем выпуска продукции своего конкурента за все предшествующие моменты времени.

В таком случае выражения для цен P_1 и P_2 примут вид:

$$\begin{aligned} P_1 &= A - q_1(n) - \sum_{k=0}^{n-1} K_2(n-k-1) q_2(k), \\ P_2 &= A - q_2(n) - \sum_{k=0}^{n-1} K_1(n-k-1) q_1(k), \end{aligned} \qquad (16)$$

где $K_1(l)$, $K_2(l)$ – заданные функции.

Соответственно, формулы для вычисления прибылей π_1 и π_2 приобретают вид:

$$\begin{aligned} \pi_1(n) &= \left(A - q_1(n) - \sum_{k=0}^{n-1} K_2(n-k-1) q_2(k) \right) \cdot q_1(n) - B \cdot q_1(n), \\ \pi_2(n) &= \left(A - q_2(n) - \sum_{k=0}^{n-1} K_1(n-k-1) q_1(k) \right) \cdot q_2(n) - B \cdot q_2(n). \end{aligned} \qquad (17)$$

Применяя необходимое условие существования экстремума получаем:

$$\begin{aligned} 2q_1(n) + \sum_{k=0}^{n-1} K_2(n-k-1) q_2(k) &= A - B, \\ 2q_2(n) + \sum_{k=0}^{n-1} K_1(n-k-1) q_1(k) &= A - B. \end{aligned} \qquad (18)$$

Система (18), которая является системой разностных уравнений вольтерровского типа для неизвестных $q_1(n)$ и $q_2(n)$, также может быть решена при помощи Z – преобразования. Не нарушая общности, предположим, что начальные условия отсутствуют, т есть $q_1(0)=q_2(0)=0$.

Непосредственное применение к (18) дискретного преобразования Лапласа дает следующий результат:

$$\begin{aligned} 2z\cdot q_1(z)+K_2(z)\cdot q_2(z)&=(A-B)\cdot\frac{z^2}{z-1},\\ K_1(z)\cdot q_1(z)+2z\cdot q_2(z)&=(A-B)\cdot\frac{z^2}{z-1}. \end{aligned}\tag{19}$$

В матричной форме решение системы (19) запишется в виде:

$$\begin{pmatrix} q_1(z)\\ q_2(z)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2z & K_2(z)\\ K_1(z) & 2z\end{pmatrix}^{-1}\cdot\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}\cdot(A-B)\cdot\frac{z^2}{z-1}.\tag{20}$$

Так как

$$\begin{pmatrix} 2z & K_2(z)\\ K_1(z) & 2z\end{pmatrix}^{-1}=\frac{1}{4z^2-K_1(z)\cdot K_2(z)}\begin{pmatrix} 2z & -K_2(z)\\ -K_1(z) & 2z\end{pmatrix},$$

то

$$\begin{aligned} q_1(z)&=(A-B)\cdot\frac{z^2}{z-1}\cdot\frac{2z-K_2(z)}{4z^2-K_1(z)\cdot K_2(z)},\\ q_2(z)&=(A-B)\cdot\frac{z^2}{z-1}\cdot\frac{2z-K_1(z)}{4z^2-K_1(z)\cdot K_2(z)}. \end{aligned}\tag{21}$$

Выражения для $q_1(z)$ и $q_2(z)$ в (21) являются достаточно общими, так как не конкретизирован явный вид $K_1(z)$ и $K_2(z)$.

В качестве примера выберем $K_1(z)$ и $K_2(z)$ в следующей форме:

$$K_1(z)=\frac{(1-a_1)z}{z-a_1}\ \text{и}\ K_2(z)=\frac{(1-a_2)z}{z-a_2},\tag{22}$$

где $a_1>0,\ a_2<1$.

Представления (22) есть ничто иное, как дискретное преобразование последовательностей типа убывающих геометрических прогрессий со знаменателями a_1 и a_2 соответственно. Такое предположение означает, что, так называемая, «динамическая память» о предшествующих значениях объемов выпуска продукции конкурирующими фирмами ослабевает с постоянным типом, вообще говоря, различным для каждого из участников рынка.

Подставив (22) в (21), после очевидных алгебраических преобразований будем иметь:

$$
\begin{aligned}
q_1(z) &= \frac{A-B}{4}\cdot\frac{z}{z-1}\cdot\frac{(2z-1-a_2)(z-a_1)}{\left(z^2-(a_1+a_2)z+\frac{1}{4}(3a_1a_2+a_1+a_2-1)\right)},\\
q_2(z) &= \frac{A-B}{4}\cdot\frac{z}{z-1}\cdot\frac{(2z-1-a_1)(z-a_2)}{\left(z^2-(a_1+a_2)z+\frac{1}{4}(3a_1a_2+a_1+a_2-1)\right)}.
\end{aligned}
\tag{23}
$$

Устойчивость равновесных объемов выпуска продукции каждой из фирм определяется корнями уравнения

$$
z^2-(a_1+a_2)z+\frac{1}{4}(3a_1a_2+a_1+a_2-1)=0. \tag{24}
$$

Для того, чтобы $\left|z_{1,2}^*\right|<1$ необходимо и достаточно выполнение условий на коэффициенты (24):

$$
\begin{cases}
1+a_1+a_2+\dfrac{3a_1a_2+a_1+a_2-1}{4}>0,\\
1-a_1-a_2+\dfrac{3a_1a_2+a_1+a_2-1}{4}>0,
\end{cases}
$$

что равносильно

$$
\begin{cases}
3+5a_1+5a_2+3a_1a_2>0,\\
3(1-a_1-a_2+a_1a_2)>0.
\end{cases}
\tag{25}
$$

Очевидно, что (25) будет выполнено при условии $a_1>0,\ a_2<1$, что и было оговорено заранее.

Рассмотрим более общую модель олигополистического рынка с произвольным числом участников. Положим, что, по аналогии с дуополией, каждая из фирм в данный момент ориентируется на весь объем выпуска продукции остальными конкурирующими предприятиями за все более ранние временные периоды. В таком случае прибыль i-ой фирмы представима в виде:

$$\pi_i(n)=\left(A-q_i(n)+\sum_{\substack{j=1\\ i\neq j}}^{m}\sum_{k=0}^{n-1}K_j(n-k-1)q_j(k)\right)q_i(n)-B\cdot q_i(n),\ i=\overline{1,m}. \quad (26)$$

где m – число фирм на рынке.

Необходимое условие для оптимума (26) дает следующее выражение:

$$2q_i(n)+\sum_{\substack{j=1\\ i\neq j}}^{m}\sum_{k=0}^{n-1}K_j(n-k-1)q_j(k)=A-B,\ i=\overline{1,m}. \quad (27)$$

Система m уравнений (27) является системой разностных уравнений вольтерровского типа относительно неизвестных $q_i(n)$, $i=\overline{1,m}$. Поэтому здесь, как и в случае дуополистического рынка, представляется уместным использование Z – преобразования. Не нарушая общности будем полагать , что начальные условия имеют вид: $q_i(0)=\dfrac{A-B}{2}$. Тогда, (27) преобразуется к виду:

$$2zq_i(z)+\sum_{\substack{j=1\\ i\neq j}}^{m}\sum_{k=0}^{n-1}K_j(z)q_j(z)=\frac{(A-B)z^2}{z-1},\ i=\overline{1,m}. \quad (28)$$

Систему (28) можно представить в матричной форме:

$$\begin{pmatrix} 2z & K_2(z) & \dots & K_m(z) \\ K_1(z) & 2z & \dots & K_m(z) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ K_1(z) & K_2(z) & \dots & 2z \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} q_1(z) \\ q_2(z) \\ \dots \\ q_m(z) \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \dots \\ 1 \end{pmatrix}\cdot\frac{(A-B)z^2}{z-1} \quad (29)$$

и получить решение с учетом явного вида обратной матрицы.

Предположим, что все $K_i(z)$ равны между собой, т.е. $K_i(z)=K(z)$, $i=\overline{1,m}$. Данное упрощение с учетом (10) дает точное решение для (29):

$$\begin{pmatrix} q_1(z) \\ q_2(z) \\ \dots \\ q_m(z) \end{pmatrix}=\frac{1}{\big(2z+(m-1)K(z)\big)\big(2z-K(z)\big)}\times$$

$$\times\begin{pmatrix} 2z+(m-2)K(z) & -K(z) & \dots & -K(z) \\ -K(z) & 2z+(m-1)K(z) & \dots & K_m(z) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ -K(z) & -K(z) & \dots & 2z+(m-2)K(z) \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \dots \\ 1 \end{pmatrix}\cdot\frac{(A-B)z^2}{z-1}. \quad (30)$$

Из выражения (30) очевидно, что все $q_i(z)$, $i=\overline{1,m}$ будут равны между собой ($q_i(z)=q(z)$):

$$q(z)=\frac{A-B}{2z+(m-1)K(z)}\cdot\frac{z^2}{z-1}. \quad (31)$$

Располагая конкретным видом $K(z)$ с помощью обратного Z – преобразования нетрудно получить формулу для $q(n)$ и сделать выводы об устойчивости соответствующего положения равновесия.

Так, например, пусть $K(z)=\dfrac{(1-a)z}{z-a}$.

Это означает, что $K(z)$ есть Z – образ убывающей геометрической прогрессии со знаменателем a и при этом $0<a<1$.

Тогда с помощью (31) получим:

$$q(z)=\frac{A-B}{2}\cdot\frac{z(z-a)}{(z-1)\left(z-\left(1-\frac{(m+1)(1-a)}{2}\right)\right)}. \quad (32)$$

Выполнив Z – преобразование будем иметь решение $q(n)$ во временной области:

$$q(n)=\frac{A-B}{m+1}\cdot\left\{1+\frac{m-1}{2}\cdot\left(1-\frac{(m+1)(1-a)}{2}\right)^n\right\}. \quad (33)$$

Для того чтобы положение равновесия $q^*=\dfrac{A-B}{m+1}$ было асимптотически устойчивым необходимо, чтобы выполнилось условие

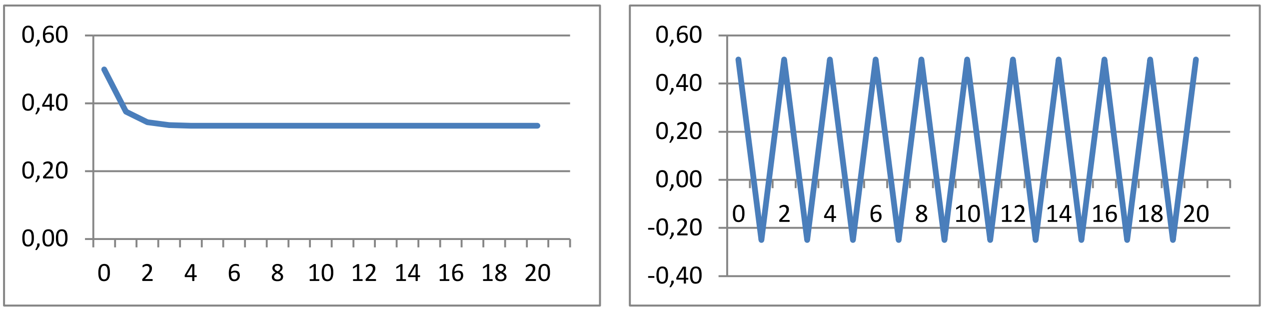
$$\left|1-\frac{(m+1)(1-a)}{2}\right|<1. \quad (34)$$

Из (34) следует неравенство:

$$\frac{m-3}{m+1} < a < 1. \tag{35}$$

Очевидно, что для $m=2$ и $m=3$ равновесие q^* будет устойчивым для любого a из интервала $(0,1)$. При $m=4$ имеем $\frac{1}{5} < a < 1$, $m=5$ соответствует неравенство $\frac{1}{3} < a < 1$ и т. Д. Однако, нетрудно заметить, что для любого значения m всегда существует значение a, удовлетворяющее неравенству (35). Это гарантирует устойчивость равновесного объема выпуска продукции q^*. Таким образом, распределенное запаздывание играет роль 4своеобразного регулятора с соответствующим запасом устойчивости. Если сравнить решение (33) с аналогичным результатом для модели олигополии с однократным запаздыванием (15), то следует вывод о том, что (15) есть частный случай (33) при $a=0$.

На рис. 1 представлены переходные процессы объемов выпуска продукции для различного количества фирм на олигополистическом рынке (параметр *m*) с разными знаменателями геометрической прогрессии (параметр a).



m=3, *a*=1/2 *m*=7, *a*=1/2

Рис. 1. Переходные процессы объема выпуска продукции для различного числа участников олигополистического рынка

Рассмотрим еще одну значимую разновидность олигополистического рынка с последовательной структурой взаимодействия между фирмами. Схематически данный объем представлен на рис.2.

Рис. 2. Последовательная структура олигополистического рынка

Функционирование такого рынка базируется на логике ценообразования зависимой от собственного выпуска продукции каждой из фирм, а также от объемов производства ближайших фирм-соседей с учетом эффекта последействия.

В данном случае выражения для прибыли имеют следующее представление:

$$\pi_1(n)=\left(A-q_1(n)+\sum_{k=0}^{n-1}K_2(n-k-1)q_2(k)\right)q_1(n)-B\cdot q_1(n),$$
$$\text{..},$$
$$\pi_l(n)=\left(A-\sum_{k=0}^{n-1}K_{l-1}(n-k-1)q_{l-1}(k)-q_l(n)-\sum_{k=0}^{n-1}K_{l+1}(n-k-1)q_{l+1}(k)\right)q_l(n)-B\cdot q_l(n),\quad l=\overline{2,m-1}$$
$$\text{..},$$
$$\pi_m(n)=\left(A-\sum_{k=0}^{n-1}K_{m-1}(n-k-1)q_{m-1}(k)-q_m(n)\right)q_m(n)-B\cdot q_m(n).$$

(36)

Условия оптимальности приводят к системе разностных уравнений:

$$2q_1(n)+\sum_{k=0}^{n-1}K_2(n-k-1)q_2(k)=A-B,$$
$$\text{..},$$
$$\sum_{k=0}^{n-1}K_{l-1}(n-k-1)q_{l-1}(k)+2q_l(n)+\sum_{k=0}^{n-1}K_{l+1}(n-k-1)q_{l+1}(k)=A-B,\quad l=\overline{2,m-1} \qquad (37)$$
$$\text{..},$$
$$\sum_{k=0}^{n-1}K_{m-1}(n-k-1)q_{m-1}(k)+2q_m(n)=A-B.$$

Аналогично системе (27) выполним Z – преобразование для (37):

$$2zq_1(z)+K_2(z)q_2(z)=(A-B)\frac{z^2}{z-1},$$
$$\text{..},$$
$$K_{l-1}(z)q_{l-1}(z)+2zq_l(z)+K_{l+1}(z)q_{l+1}(z)=(A-B)\frac{z^2}{z-1},\quad l=\overline{2,m-1} \qquad (38)$$
$$\text{..},$$
$$K_{m-1}(z)q_{m-1}(z)+2zq_m(z)=(A-B)\frac{z^2}{z-1}.$$

Полагая в (38) все $K_l(z)=zK(z),\ l=\overline{1,m}$, сформируем матричную структуру вида (39). Для выявления условий устойчивости положения равновесия системы (38) достаточно проанализировать свойства определителя матрицы в (39).

$$\begin{pmatrix} 2 & K(z) & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & K(z) & 2 & K(z) & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & \dots & \dots & K(z) & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q_1(z) \\ \dots \\ q_l(z) \\ \dots \\ q_m(z) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ \dots \\ 1 \\ \dots \\ 1 \end{pmatrix} \cdot (A-B)\frac{z}{z-1}. \qquad (39)$$

Пусть определитель Δ_m имеет форму:

$$\Delta_m(\lambda)=\begin{vmatrix} 2-\lambda & k & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & k & 2-\lambda & k & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & k & 2-\lambda \end{vmatrix}. \qquad (40)$$

Величина $\Delta_m(\lambda)$ удовлетворяет разностному уравнению:

$$\Delta_m(\lambda)=(2-\lambda)\Delta_{m-1}(\lambda)-K^2\Delta_{m-2}(\lambda).$$

Известно, что (40) – это классический определитель якобиевой матрицы и из условия $\Delta_m(\lambda)=0$ нетрудно получить:

$$\lambda_l=2(1-k\cdot\xi_l),\ \xi_l=\frac{\cos\pi l}{m+1},\ l=\overline{1,m}. \qquad (41)$$

Пусть $K(z)=\dfrac{1-a}{z-a}$, тогда $\lambda_l=2\left(1-\dfrac{\xi_l(1-a)}{z-a}\right)$,

или $\lambda_l=\dfrac{2\left(z-1+(1-\xi_l)(1-a)\right)}{z-a}$. (42)

Так как определитель $\Delta_m(\lambda)$ равен произведению собственных значений, то есть $\Delta_m(\lambda)=\prod_{l=1}^{m}\lambda_l$, то $\Delta_m(\lambda)=\dfrac{2^m}{(z-a)^m}\prod_{l=1}^{m}\left(z-1+(1-\xi_l)(1-a)\right)$.

Для устойчивости равновесия (38) требуется, чтобы величина $\gamma_l=1-(1-\xi_l)(1-a)$ удовлетворяла условию $|\gamma_l|<1$.

Условие (43) заведомо выполнено, так как $\xi_l = \dfrac{\cos \pi l}{m+1}$, $l = \overline{1,m}$ всегда по модулю меньше единицы.

Выводы: В настоящей работе выполнен анализ структурной устойчивости модели олигополистического рынка с произвольным числом фирм-участников рыночного взаимодействия. Дискретные динамические модели олигополии были созданы с учетом характера запаздывания в механизмах конкуренции. Рассмотренные примеры содержат модели с одношаговым сосредоточенным отставанием и запаздыванием, распределенным в геометрической прогрессии. Соответствующие результаты проиллюстрированы графиками переходных процессов объемов выпуска продукции для различного числа фирм на рынке.

Список использованных источников:

1. Пиндайк Р. Микроэкономика / Р. Пиндайк, Д. Рабинфельд; пер. с англ. – СПб.: Питер, 2002. – 608с.
2. Giancarlo Gandolfo. Economic Dynamics / Giancarlo Gandolfo. – Springer Science & Business Media, 1997. – 675 p.
3. Stachurski John. Economic dynamics: theory and computation / John Stachurski. – Cambridge, Mass.: MIT Press, 2009. – 367 p.
4. Structural modeling of oligopoly market under the nonlinear functions of demand and agents’ costs / M. I. Geras’kin, A. G. Chkhartishvili // Automation and Remote Control. – February 2017. – Volume 78. – PP. 332–348.
5. Game-theoretic models of an oligopoly market with nonlinear agent cost functions / M. I. Geras’kin, A. G. Chkhartishvili // Automation and Remote Control. – September 2017. – Volume 78. – PP. 1631–1650.

Воронін А. В.

Железнякова Е. Ю.

Харківський національний університет ім. С. Кузнеця

СТІЙКІСТЬ ОЛІГОПОЛІСТИЧНОГО РИНКА

Резюме

Досліджено модель олігополістичного ринку з будь-якою кількістю фірм-учасників ринкової взаємодії. Виконано аналіз структурної стійкості моделі. Наведені приклади з однокроковим зосередженим відставанням і розподіленим в геометричній прогресії запізненням. Відповідні результати проілюстровані графіками перехідних процесів обсягів випуску продукції для різного числа фірм на ринку.

Ключові слова: олігополія, розподілене запізнювання, стійкість, економічна динаміка, стан рівноваги

Voronin A. V.

Zhelezniakova E. U.

Kharkiv, S Kuznets Kharkiv nationale University

SUSTAINABILITY OF THE OLIGOPOLISTIC MARKET

Summary

The model of oligopolistic market with an random number of firms participating in market interaction is investigated. The structural stability of the model is analyzed.

Examples are given with a one-step concentrated lag and a delay distributed in a geometric progression. The corresponding results are illustrated by graphs of the transitional processes of output volumes for a different number of firms on the market.

Keywords: oligopoly, distributed delay, stability, economic dynamics, state of equilibrium