Тематический раздел:

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ, МОДЕЛИ И ИНФОРМАЦИОННЫЕ ТЕХНОЛОГИИ В ЭКОНОМИКЕ

УДК 313.42

Воронин А.В., канд техн. наук, доцент каф. высшей математики и экономико-математических методов
Харьковский национальный экономический университет имени Семена Кузнеца
Гунько О.В., канд. ф-м. наук, доцент каф. высшей математики и экономико-математических методов
Харьковский национальный экономический университет имени Семена Кузнеца

Хаос на рынке труда
Chaos in the labor market

В настоящей работе предложена математическая модель рынка труда с учетом специальных свойств функций спроса и предложения на рынке труда. Актуальность данного исследования обусловлена проблематикой предсказания динамической эволюции в нелинейных дискретных моделях. Данные математические модели описывают функционирование рыночного взаимодействия в разнородных системах экономической природы, сопряжённые с многообразием поведения траекторий исследуемых объектов, включая различные бифуркации и хаос. В отличие от известных методов в эконометрики, в данной работе получили дальнейшее развитие подходы, ориентированные на качественный анализ временных изменений в подобного рода средах и структурах. С позиций парадигмы равновесия использованы методы сравнительной статики и динамики, определяющие условия достижения равновесия с установлением характера устойчивости.
Ключевые слова: цена, рынок труда, заработная плата, дискретная динамика, нелинейная система, эффект последействия, бифуркации удвоения периода, хаос.

У даній роботі запропонована математична модель ринку праці з урахуванням спеціальних властивостей функцій попиту і пропозиції на ринку праці. Актуальність даного дослідження обумовлена проблематикою передбачення динамічної еволюції в нелінійних дискретних моделях. Дані математичні моделі описують функціонування ринкової взаємодії в різнорідних системах економічної природи, зв'язані з різноманіттям поведінки траєкторій досліджуваних об'єктів, включаючи різні біфуркації і хаос. На відміну від відомих методів в економетріці, в даній роботі отримали подальший розвиток підходи, орієнтовані на якісний аналіз тимчасових змін в подібного роду середовищах і структурах. З позицій парадигми рівноваги використані методи порівняльної статики і динаміки, що визначають умови досягнення рівноваги з встановленням характеру стійкості.

Ключові слова: ціна, ринок праці, заробітна плата, дискретна динаміка, нелінійна система, ефект післядії, біфуркації подвоєння періоду, хаос.

In this paper, we propose a mathematical model of the labor market, taking into account the special properties of the supply and demand functions in the labor market. The relevance of this study is due to the problems of predicting dynamic evolution in nonlinear discrete models. These mathematical models describe the functioning of market interaction in heterogeneous systems of economic nature, coupled with a variety of behavior of the trajectories of the studied objects, including various bifurcations and chaos. Unlike well-known methods in eco-metrics, in this work the approaches oriented on qualitative analysis of temporal changes in such environments and structures have been further developed. From the standpoint of the paradigm of equilibrium, the methods of comparative statics and dynamics that determine the conditions for achieving equilibrium with the establishment of a character of stability are used.
Key words: price, labor market, wages, discrete dynamics, nonlinear system, aftereffect effect, period doubling bifurcations,

Постановка проблемы. Проблема прогнозирования динамической эволюции в дискретных моделях, описывающих механизмы рыночного взаимодействия в различных экономических системах, сопряжена со сложным поведением траекторий исследуемых объектов, включая такие явления как разного рода бифуркации и хаос. Вышеуказанные явления характерны для существенно нелинейных динамических систем, что, соответственно, делает невозможным применение традиционной методологии эконометрики и требует иных подходов для качественного прогнозирования временных изменений в подобного рода структурах.

Анализ последних исследований и публикаций. В настоящее время достижение экономической теории базируется на парадигме равновесия, то есть на изучении состояний равновесия рыночных объектов в предположении их существования. При этом предметно разработаны методы, устанавливающие условия достижения равновесий с соответствующим анализом их устойчивости. [1,2]

Постановка задачи. В качестве примера [1] рассмотрим достаточно общую характерную ситуацию на рынке труда, проиллюстрированную с помощью рис. 1.

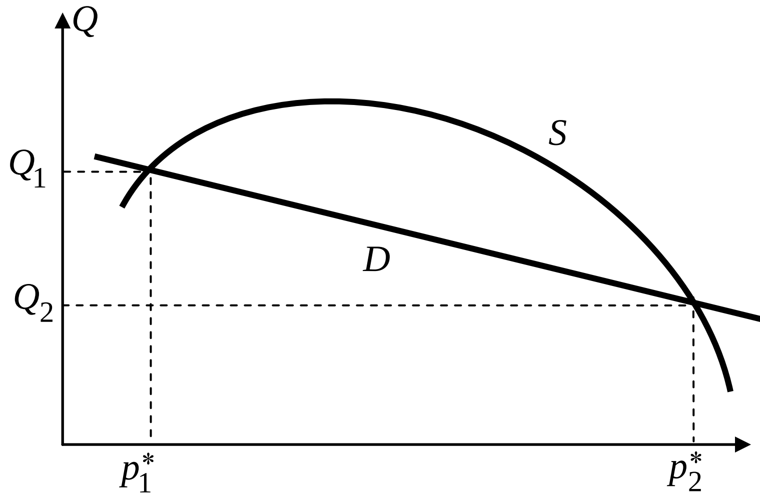

Рис. 1. **Спрос и предложение на рынке труда**

Из геометрических представлений, очевидно, что график функции предложения $S = S(p)$ непрерывно меняет свой наклон в зависимости от цены p (в нашем случае уровня заработной платы). На первом этапе рост заработной платы p инициирует увеличение объема предложения труда (возрастает количество желающих работать, нарастает интенсивность труда). Имеет место демонстрация так называемого «эффекта замещения», объясняющая логику поведения работников на рынке труда: чем выше цена труда, тем выгоднее его продавать, уменьшая зависимость от иных источников дохода. Линия предложения S, после перехода через свой максимум, меняет свой наклон в другую сторону. Наблюдается плавное снижение объема предложения труда при неуклонном росте его цены, что можно пояснить с помощью «эффекта дохода». Суть этого явления состоит в том, что доход, получаемый работником, превышает сумму, необходимую для первичных жизненных потребностей. По поводу линий спроса $D = D(p)$ следует заметить, что она имеет «естественный» отрицательный наклон, что, в свою очередь, дает две точки пересечения кривой S и прямой D. В результате получим две равновесные цены p_1, p_2, и два равновесных количества $Q_1 = D(p_1) = S(p_1)$ и $Q_2 = D(p_2) = S(p_2)$.

Изложение основного материала исследования. Исходя из описания взаимного расположения линий спроса и предложения согласно рис. 1 имеет смысл представить явные аналитические выражения для $D(p)$ и $S(p)$ в следующем виде

$$D(p) = d_0 - d_1 p,\ \ S(p) = -S_0 + S_1 p - S_2 p^2,$$

где постоянные d_0, d_1, S_0, S_1, S_2 – положительные числа.

Факт существования положений равновесия обусловлен выполнением условия равновесия спроса и предложения. Иначе говоря, из $D(p) = S(p)$ следует, что точки равновесия по переменной p определяются квадратным уравнением

$$S_2 p^2 - (S_1 + d_1)p + S_0 + d_0 = 0$$

с очевидным решением:

$$p_{1,2} = \frac{(S_1 + d_1) \pm \sqrt{(d_1 + S_1)^2 - 4S_2(S_0 + d_0)}}{2S_2}$$

при условии положительности подкоренного выражения. Для определенности положим $p_2 > p_1$. Случай нулевого и отрицательного дискриминантов в настоящей работе не будут рассматриваться [2].

Далее следует совершить переход от статической модели к динамической путем введения соответствующих запаздываний, либо на стороне спроса, либо на стороне предложения. Вначале мы предположим, как более простую, гипотезу о наличии одношагового запаздывания на стороне предложения. Будем полагать время дискретной величиной $n = 0,1,2,\ldots$. Величину запаздывания, не нарушая общности, считаем равной единице. Формализация выше приведенных рассуждений даёт:

$$D(p_n) = S(p_{n-1})$$

Подставляя сюда явные выражения для функций спроса и предложения и выполнив элементарные преобразования, получим:

$$p_{n+1} = \frac{S_2}{d_1} p_n^2 - \left(\frac{S_1}{d_1}\right) p_n + \left(S_0 + d_0\right) \tag{1}$$

Очевидно, что уравнение (1) имеет два положения равновесия p_1 и p_2, вычисленные нами ранее.

В разностном уравнении (1) содержится избыточное число параметров, что существенно затрудняет анализ его поведенческих свойств. Замена переменной $x_n = \dfrac{2S_2 p_n - S_1}{2d_1}$ трансформирует (1) к виду:

$$x_{n+1} = x_n^2 + \frac{1-R^2}{4}, \tag{2}$$

где $R = \sqrt{\left(\dfrac{S_1}{d_1} + 1\right)^2 - \dfrac{4S_2\left(S_0 + d_0\right)}{d_1^2}} > 0$.

Разностное уравнение (2) обладает двумя неподвижными точками (положениями равновесия):

$$x_1^* = \frac{1-R}{2}, \quad x_2^* = \frac{1+R}{2}$$

При этом, очевидно, что $-x_2^* < x_1^* < x_2^*$.

Для дискретной динамической системы, описываемой уравнением (2), существует достаточно простой способ определения, является ли неподвижная точка устойчивой (притягивающей) или неустойчивой (отталкивающей), состоящий в проверке условия $\left|2x_{1,2}^*\right| < 1$. Так для неподвижной точки x_1^* условие устойчивости состоит в выполнении условия $\left|x_1^*\right| < \dfrac{1}{2}$, что имеет место при $0 < R < 2$. Очевидно, что другое положение равновесия x_2^* всегда неустойчиво при любом допустимом значении $R = x_2^* - x_1^*$. Отсюда следует геометрический смысл величины R как расстояние между двумя неподвижными точками.

По мере того, как R возрастает и становится больше 2, положение равновесия x_1^* становится отталкивающим. В то же время, функция $f^{(2)} = f\left(f\left(x\right)\right)$ доставляет пару притягивающих неподвижных точек, которые приводят к появлению цикла с периодом 2 для $f\left(x\right)$. В подобной ситуации принято утверждать, что уравнение (2) претерпевает бифуркацию удвоения периода, когда R проходит через значение 2. Следующая бифуркация удвоения периода возникает при $R=\sqrt{6}$. Когда R становится больше этого значения, траектории начинают притягиваться циклом периода 4. По мере того, как значение R далее увеличивается, будут последовательно встречаться притягивающие периодические орбиты длины $8, 16$ и т. д. Данное явление в динамике отображений называется получением хаоса с помощью удвоения периода [3].

Если обозначить через $R_0 = 2, R_1 = \sqrt{6},\ldots,R_n$ точки бифуркации удвоения периода, то есть те точки R_n, в которых итерирование $f\left(x\right)$ сменяет притягивающую орбиту периода 2^{n+1}, то в результате последовательных вычислений будет найдено некоторое предельное значение $R_\infty \approx 2{,}57$, называемое точкой Фейгенбаума [3]. В промежутке между $R=0$ и R_∞ удвоение периода происходит по мере того, как R стремится к R_∞. Другой участок, где R больше R_∞, называется областью хаоса.

Здесь следует отметить, что траектории для начальных условий $x_0 > x_2^*$ и $x_0 < -x_2^*$ не представляют интереса, так как для этих случаев они неограниченно возрастают. Поэтому путем элементарных рассуждений нетрудно получить, что величина R должна находиться в пределах $0 \le R \le 3$.

Крайний случай $R=3$ заслуживает отдельного рассмотрения. Уравнение (2) в этом случае примет вид

$$x_{n+1} = x_n^2 - 2 \tag{3}$$

Попытаемся для разностного уравнения (3) найти аналитическое решение в зависимости от значения n и начального условия x_0.

Пусть $x_n = 2\cos(A_n)$. В результате подстановки в (3) имеем:

$$\cos(A_{n+1}) = 2\cos^2(A_n) - 1 \qquad (4)$$

Из (4) с помощью известного тригонометрического тождества получаем

$$A_{n+1} = 2A_n,$$

или $$A_n = 2^n A_0, \; A_0 = \arccos\left(\frac{x_0}{2}\right).$$

Отсюда следует, что

$$x_n = 2\cos\left(2^n \arccos\left(\frac{x_0}{2}\right)\right) \qquad (5)$$

Так как $-2 < x_0 < 2$, то формулу (5) можно представить в виде соответствующего полинома Чебышева

$$T_{2^n}\left(\frac{x_0}{2}\right) = \left(\frac{x_0 - \sqrt{x_0^2 - 4}}{2}\right)^{2^n} + \left(\frac{x_0 + \sqrt{x_0^2 - 4}}{2}\right)^{2^n} \qquad (6)$$

Уравнение (3) имеет неподвижные точки $x_1^* = -1, x_2^* = 2$. В табл. 1 представлены переходные процессы для нескольких первых значений n при различных начальных условиях x_0. Результаты получены при помощи формул (5).

Таблица 1

Динамика «перемешивающего слоя»

x_0 \ n	1	2	3	4	5	6	7	8
0	-2	2	2	2	2	2	2	2
1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1
$\sqrt{2}$	0	-2	2	2	2	2	2	2
$\sqrt{3}$	1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1

Как видно из таблицы 1, при разных начальных условиях x_0 за несколько итераций попеременно достигаются неподвижные точки x_1^* или x_2^*. Данное хаотическое поведение принято называть « перемешивающим слоем».

Известно, что в хаотическом режиме, то есть, когда $2{,}57 \le R \le 3$ могут наблюдаться также и нечетные циклы, например, периода 3. Для нас важным является то, что в данном интервале для R многообразие траекторий необычайно богато и, с формальной точки зрения, считается эргодическим.

Данные таблицы 1 убедительно показывают, что рассмотренный нами вид «хаоса» обладает свойством непредсказуемости. Эту особенность называют существенной зависимостью от начальных условий. Разумеется, она не тождественна традиционному случайному поведению в рамках парадигмы математической статистики (в силу того, что исходная система (2) является полностью детерминированной). Всё это означает, в свою очередь, что незначительные ошибки в начальных данных могут привести к существенным искажениям на выходе динамической системы непредсказуемым образом, если параметры исследуемого объекта соответствуют хаотическому режиму.

В качестве альтернативы гипотезе одношагового запаздывания предложения по отношению к спросу рассмотрим ситуацию, при которой функция спроса в текущий момент времени определяется с учетом предложения, распределённого по всем предыдущим временным шагам. Формализация данного предположения может быть представлена в следующем виде

$$D\left(p_n\right) = \sum_{k=0}^{n-1} F(n-1,k) S\left(p_k\right), \tag{6}$$

где $D(p)$ и $S(p)$ определены ранее, $F(n-1,k)$- весовые коэффициенты, определяющие вклад в суммарное предложение каждого предыдущего момента времени. Можно утверждать, что $F(n-1,k)$ являются своеобразной «динамической памятью» о прошлом и характеризуют так называемый «эффект последействия». Далее мы конкретизируем явный вид $F(n-1,k)$, например, как убывающую геометрическую прогрессию, то есть

$$F(n-1,k)=(1-a)a^{n-k-1}, \qquad 0<a<1.$$

В таком случае (6) получит представление

$$D(p_n)=\sum_{k=0}^{n-1}(1-a)a^{n-k-1}S(p_k), \tag{7}$$

Путем элементарных преобразований соотношение (7) преобразуется к виду

$$D(p_n)=aD(p_{n-1})+(1-a)S(p_{n-1}), \tag{8}$$

Очевидно, что при любом значении a уравнение для равновесных положений является таким же как и в предыдущей модели одношагового запаздывания. Подставим в (8) выражения для $D(p)$ и $S(p)$ и получим:

$$p_n=\frac{(1-a)S_2}{d_1}p_{n-1}^2+\left(a-\frac{(1-a)S_1}{d_1}\right)p_{n-1}+\frac{(1-a)(S_0+d_0)}{d_1} \tag{9}$$

С помощью замены переменной $p_n=\dfrac{y_n-\dfrac{1}{2}\left(a-\dfrac{(1-a)S_1}{d_1}\right)}{\dfrac{(1-a)S_2}{d_1}}$ разностное

уравнение (9) примет следующую компактную форму

$$y_n=y_{n-1}^2+\frac{1-L^2}{4}, \tag{10}$$

где

$$L^2=(1-a)^2\left[\left(\frac{S_1}{d_1}+1\right)^2-\frac{4S_2(S_0+d_0)}{d_1^2}\right] \tag{11}$$

Из (11) очевидным образом вытекает, что $L^2=(1-a)^2R^2$ или $L=(1-a)R$. При $a=0$ достигается равенство $L=R$. Отсюда можно сделать вывод, что анализ поведенческих свойств нелинейного разностного уравнения (10) совпадает саналогичным исследованием для уравнения (2) с точностью до постоянного множителя.

Для интерпретации полученных результатов в терминах базовой математической модели (1) исследуемого экономического объекта (рынка труда) следует определить содержательную природу бифуркационного параметра R. Вычислим эластичности функций спроса и предложения по цене:

$$\eta_D(p) = D'(p) = -d_1, \qquad \eta_S(p) = S'(p) = S_1 - 2S_2 p$$

и введем понятие относительной эластичности предложения по спросу

$$\eta(p) = \frac{\eta_S(p)}{\eta_D}.$$

В точках равновесия имеем: $\eta_1 = \dfrac{\eta_S(p_1)}{\eta_D}$, $\eta_2 = \dfrac{\eta_S(p_2)}{\eta_D}$.

Так как $x = \dfrac{2S_2 p - S_1}{2d_1}$, то, очевидно, что $x = \dfrac{1}{2}\eta(p)$.

Из явного вида неподвижных точек x_1^*, x_2^* следует

$$x_2^* - x_1^* = R, \; x_2^* + x_1^* = 1.$$

Поэтому легко определить, что

$$\eta_2 - \eta_1 = 2R, \qquad \eta_2 + \eta_1 = 2,$$

или

$$\eta_2 = 1 + R, \qquad \eta_1 = 1 - R.$$

Отсюда вытекает, что всё динамическое разнообразие поведения модели (1) полностью определяется значениями эластичностей в точках равновесия. С другой стороны, параметр R есть расстояние между двумя неподвижными точками x_1^* и x_2^* (в случае $S_2 = d_1$ справедливо равенство $x_2^* - x_1^* = p_2^* - p_1^*$).

Выводы из данного исследования. В завершение нашего исследования необходимо отметить следующее. Положении равновесия p_1^* по терминологии [1] соответствует дискриминационному сегменту рынка труда с относительно низкой заработной платой, где достаточно сложно обеспечить общественно нормальные условия воспроизводства рабочей силы. При этом следует подчеркнуть, что дискриминационный рынок обладает высокой степенью профессиональной мобильности. Переход от данного сегмента рынка к так называемому общественно нормальному рынку характеризуется каскадом бифуркаций, ведущему к хаотическому изменению заработной платы. По-следующая эволюция общественно нормального рынка труда при росте заработной платы генерирует элитарный сегмент указанного рынка с низкой профессиональной мобильностью его участников. В любом случае необходимо отслеживать различия между p_2^* и p_1^*, чтобы избежать нежелательных бифуркаций и катастроф, ведущих к разного рода потрясениям и социальной напряжённости.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК:

1. Нижегородцев Р. Рынок труда: иллюзии равновесия и проблемы переходной экономики. // Проблемы теории и практики управления, №5, 2004. – С 89-95.

2. Кизим Н.А. Устойчивость нелинейной паутинообразной модели/ Кизим Н.А., Воронин А.В.// Бизнес Информ. – 2006. - №3.- С. 39-41.

3. Кроновер Р.М. Фракталы и хаос в динамических системах. Основы теории. – М.: Пост маркет, 2000.- 352 с.