

**МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ**

**ХАРКІВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ ЕКОНОМІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ  
ІМЕНІ СЕМЕНА КУЗНЕЦЯ**

*Г. С. Ястребова*

# **ІМІТАЦІЙНЕ МОДЕЛЮВАННЯ**

**Конспект лекцій**

**Харків. ХНЕУ ім. С. Кузнеця, 2015**

УДК 519.3  
ББК 22.18  
Я 85

Рецензент – завідувач кафедри вищої математики та економіко-математичних методів Харківського національного економічного університету імені Семена Кузнеця, д-р екон. наук, професор *Л. М. Малярець*.

Затверджено на засіданні кафедри економічної кібернетики.  
Протокол № 1 від 26.08.2014 р.

*Самостійне електронне текстове мережне видання*

**Ястребова Г. С.**

Я 85 Імітаційне моделювання : конспект лекцій для студентів напряму підготовки 6.030502 "Економічна кібернетика" : [Електронне видання] / Г. С. Ястребова. – Х. : ХНЕУ ім. С. Кузнеця, 2015. – 93 с. (Укр. мов.)

Подано теоретичний лекційний матеріал за темами, який доповнено описом мети лекції, компетентностями, що формуються у процесі вивчення дисципліни, контрольними запитаннями, а також наведено необхідну літературу.

Рекомендовано для студентів напряму підготовки 6.030502 "Економічна кібернетика".

**УДК 519.3**  
**ББК 22.18**

© Г. С. Ястребова, 2015  
© Харківський національний економічний  
університет імені Семена Кузнеця, 2015

## Вступ

Реальні складні системи й об'єкти можна досліджувати, використовуючи два основних типи моделей: аналітичні й імітаційні. В аналітичних моделях поведінка системи записується у вигляді деяких функціональних співвідношень або логічних умов, до аналітичних моделей також належать і моделі оптимізаційного типу.

Коли явища в системі занадто складні й різноманітні, аналітична модель стає лише грубим наближенням. У таких умовах дослідник змушений застосовувати імітаційне моделювання. В імітаційній моделі поведінка системи описується за допомогою набору алгоритмів із застосуванням певної мови програмування, які реалізують ситуації, що виникають у реальній системі. Імітаційні моделі характеризуються точним відображенням економічного процесу або явища. Тому математичні моделі, які входять до їх складу, виявляються досить складними, у них присутні нелінійні й стохастичні залежності та змінні.

Навчальна дисципліна "Імітаційне моделювання" є складовою вибіркової частини циклу професійно-орієнтованих дисциплін за напрямом підготовки "Економічна кібернетика".

**Метою даної дисципліни** є розширення та поглиблення знань про принципи та методи побудови імітаційних моделей під час дослідження економічних та виробничих об'єктів та систем.

**Предмет дисципліни** – методи побудови та аналізу імітаційних моделей економічних систем.

Вивчення навчальної дисципліни надасть студенту можливість сформулювати такі групи **компетентностей**:

формалізувати причинно-наслідкові зв'язки у системі у вигляді концептуальних імітаційних моделей;

розробляти імітаційні моделі економічних та виробничих систем, процесів та явищ; розробляти генератори псевдовипадкових чисел, що необхідні для моделювання економічних систем, процесів та явищ;

тестувати, оцінювати та аналізувати імітаційні моделі з метою отримати нові знання про об'єкт дослідження;

експериментувати з імітаційними моделями з метою оптимізації реальної системи або її дослідження.

## **Змістовий модуль 1**

### **Принципи побудови та експлуатації імітаційних моделей**

#### **Тема 1. Сутність, розвиток і застосування імітаційного моделювання**

**Основний зміст і мета лекції.** Метою лекції є ознайомлення студентів із сутністю імітаційного моделювання та способами його використання. В лекції розглянуто роль, місце імітаційного моделювання та його сутність, напрями використання.

Інформація, викладена в лекції, надає студенту можливість сформувати такі групи компетентностей:

здатність класифікувати комп'ютерні математичні моделі, усвідомлювати поняття комп'ютерної імітації;

здатність до відбору типів моделей, що потрібні для моделювання тієї чи іншої динамічної ситуації, здатність до аналізу недоліків та переваги імітаційного моделювання щодо конкретних економічних проблем.

#### **Основні питання, що висвітлюються в лекції:**

1. Зміст імітаційного моделювання. Об'єкт дослідження.
2. Аналітичні та імітаційні моделі.
3. Умови застосування імітаційних моделей. Характеристика та принципи використання імітаційного моделювання.
4. Принцип "чорного ящика". Механізм зворотного зв'язку.
5. Структура імітаційного дослідження.

#### **1. Зміст імітаційного моделювання. Об'єкт дослідження**

Машинна імітація (імітаційне моделювання) як метод дослідження складних проблем виник дещо пізніше, ніж були створені перші електронно-обчислювальні машини. Становлення машинної імітації як наукової дисципліни припало на кінець 50-х – початок 60-х рр. минулого століття. Перші публікації з цієї проблематики належать вченим США. У цій країні вперше був і практично застосований метод машинної імітації у військовій справі. У колишньому Радянському Союзі дослідження в галузі імітації здійснювалися з початку 60-х років. Значний внесок у розвиток цього напрямку був зроблений відомим ученим Бусленко Г. П. Йому належать і перші публікації з відповідних проблем. Розвитку машинної імітації сприяли праці українських вчених, зокрема Глушкова В. Г., Коваленко Г. І., Яровіцького М. В. та ін.

Із знаменитих у міжнародній практиці вчених теоретизували імітаційне моделювання та зробили великий внесок у його розвиток із метою вивчення економічних систем такі вчені, як Шеннон Р. Ю., Т. Нейлор, Дж. Клейнер, Дж. Форрестер.

Слід дати визначення імітації. Під **імітацією** будемо розуміти *чисельний метод проведення на ЕОМ експериментів із математичними моделями, що описують поведінку складних систем протягом тривалих періодів часу*. Основою будь-якого імітаційного експерименту на ЕОМ служить модель імітованої системи.

**Імітаційна модель** становить сукупність програмних елементів. Припустимо, що модель вже сформульована і її параметри задані. Принципова відмінність імітаційного експерименту від експерименту в "реальному світі" полягає в тому, що в процесі імітації експеримент проводиться з моделлю реальної системи, а не з самою системою.

Із визначення імітації випливає, що:

*по-перше, імітація – це чисельний метод, який означає, що вона використовується в крайньому випадку, коли немає аналітичних інструментів;*

*по-друге, імітація на ЕОМ – це експеримент*. Із появою потужних обчислювальних машин економісти та фахівці з управління отримали можливість здійснювати керовані експерименти лабораторного типу, схожі на експерименти у фізиці та інших природничих науках. При цьому замість природного процесу начебто ядерного розпаду використовується математична модель, що є програмою на ЕОМ. Єдина відмінність імітаційного експерименту від експерименту в "реальному світі" полягає в тому, що імітаційний експеримент проводиться з моделлю реальної системи, а не з самою системою. Оскільки імітація – це експеримент, особливу увагу слід звернути **на планування експерименту та обробку його результатів**;

*По-третьє, машинна імітація дозволяє дослідити поведінку моделі як у певний момент часу, так і протягом тривалих періодів часу. У першому випадку імітацію називають статичною, у другому – динамічною;*

*По-четверте, більшість імітаційних експериментів із моделями економічних систем є стохастичною імітацією на противагу суто детермінованій імітації. Моделі економічних систем часто містять випадкові величини, поведінкою яких ЛПР може керувати в малому ступені або не*

може керувати взагалі. Якщо ці випадкові, або стохастичні, величини включити в модель, то за допомогою імітаційного експерименту можна зробити висновки щодо поведінки даної системи в цілому, засновані на ймовірному розподілі цих випадкових величин. Іноді метод стохастичної імітації називають методом *Монте-Карло*. За детермінованої імітації випадкові збурення відсутні, тобто їх вплив не враховується.

## 2. Аналітичні та імітаційні моделі

Особи, відповідальні за вироблення економічного рішення, можуть оцінювати його ефективність одним із наступних трьох способів. По-перше, є можливість, принаймні, теоретична, проводити керовані експерименти з економічною системою (фірмою, галуззю чи економікою країни). Однак на практиці така можливість звичайно виявляється нездійсненною: бюрократичні, соціальні, політичні та інші обмеження не дають провести експеримент економікою в цілому.

По-друге, якщо є дані про розвиток економічної системи за деякий період часу в минулому, можна спробувати провести експеримент на цих даних. Але навіть якщо дані є (що не завжди спостерігається), ми не можемо з упевненістю переносити минулий досвід. Це пов'язано з тим, що досліджувані ряди були отримані не в керованому експерименті, внаслідок чого головною причиною відмінностей між ендогенними змінними може виявитися випадкове збурення, або "шум". У такому разі не можна надто довіряти оцінкам економічних рішень, що отримані на основі інформації про розвиток системи в минулому.

Коли ж не можна провести керований експеримент і немає даних про розвиток системи в минулому (або в цих даних занадто великі випадкові збурення), залишається єдина можливість: побудувати модель розглянутої економічної системи, зв'язати ендогенні змінні системи з екзогенними (незалежними) змінними, тобто економічною стратегією, і оцінити параметри цієї моделі. Як правило, **реальні** складні системи можна досліджувати за допомогою двох видів математичних моделей: аналітичних та імітаційних.

Якщо, наприклад, модель описується системою порівняно невеликого числа лінійних диференціальних або різницевих рівнянь першого або другого порядку, то для оцінки впливів різних економічних рішень можна застосувати аналітичні методи. Коли явища в системі складні і різноманітні, аналітична модель стає занадто грубим наближенням

дійсності, вона може містити велику кількість нелінійних диференціальних або різницевих рівнянь, що мають високий порядок і містять випадкові збурення. У такій ситуації аналітичні методи можуть виявитися практично марними. У цьому випадку для оцінки різних економічних рішень доводиться звернутися до імітації.

Метод імітаційного моделювання пов'язаний з алгоритмічним описом об'єктів і процесів і дозволяє відтворювати особливості їх функціонування із збереженням логічної структури без її перетворення, характерного для аналітичних і чисельних методів.

### **3. Умови застосування імітаційних моделей. Характеристика та принципи використання імітаційного моделювання**

Основні напрямки використання та поширення методу імітаційного моделювання:

- прогнозування розвитку національних економік;

- розробка та впровадження інформаційних систем різного рівня (створення окремих модулів автоматизованих робочих місць (АРМ) на базі імітаційної моделі для швидкого пошуку рішень шляхом імітації виробничих ситуацій; розробка автоматизованих інформаційно-пошукових систем; моделювання структур управління в умовах АСУ; рішення оптимізаційних функціональних завдань в інформаційній системі, наприклад, задач календарного планування, створення оптимальних запасів тощо; моделювання автоматизованих систем обробки даних; використання машинної імітації для вирішення складних завдань в інтелектуальних інформаційних системах; автоматизація проектування інформаційних систем у менеджменті);

- створення важливих народногосподарських проектів, планів;

- створення системи оборони країни і планування військових операцій;

- охорони навколишнього середовища;

- навчання та підготовка кадрів;

- внутрішньофірмове планування;

- управління запасами.

Формально вибір методу дослідження на користь імітаційного моделювання здійснюється в таких ситуаціях:

1. Якщо не існує закінченої постановки завдання дослідження та йде процес пізнання об'єкта моделювання, то в такому випадку імітаційна модель служить засобом вивчення явища.

2. Якщо аналітичні моделі є, але математичні процедури настільки складні і трудомісткі, що імітаційне моделювання дає більш простий спосіб вирішення задачі.

3. Якщо, крім оцінки параметрів системи, бажано здійснити спостереження за поведінкою компонент системи протягом певного періоду часу.

4. Якщо імітаційне моделювання виявляється єдино можливим способом дослідження складної системи через неможливість спостереження явища в реальних умовах.

5. Якщо необхідно контролювати перебіг процесів шляхом уповільнення або прискорення явища в ході імітації.

6. У процесі підготовки фахівців і освоєнні нової техніки, коли на імітаційній моделі забезпечується можливість придбання навичок.

7. Якщо вивчаються нові ситуації в системах, про які мало відомо, чи невідомо нічого. У цьому випадку імітація служить для попередньої перевірки нових стратегій і правил прийняття рішень перед проведенням експериментів на реальній системі.

8. Якщо особливе значення має послідовність подій у проектованій (або досліджуваній) системі та модель використовується для передбачення вузьких місць у функціонуванні системи та інших труднощів, що з'являються в поведінці системи у ході введення в неї нових компонент.

9. У ході перевірки гіпотез щодо поведінки реальної системи.

10. Для проведення параметричного аналізу та аналізу чутливості системи до зміни параметрів, визначення найбільш істотних параметрів.

Імітаційні моделі мають ряд переваг, які й роблять їх одними з найбільш використовуваних:

можливість опису поведінки компонент на високому рівні деталізації;  
відсутність обмежень на залежності між параметрами моделі і станом зовнішнього середовища;

можливість дослідження динаміки взаємодії компонент системи в часі і просторі.

Однак є цілий ряд складнощів, які дозволяють засумніватися в необхідності імітаційного моделювання, наприклад:

1. Розробка гарної імітаційної моделі потребує великих коштів, вимагає багато часу та наявності високоякісних фахівців. Наприклад, на думку Форрестера, для створення моделі внутрішньофірмового планування може знадобитися від 3 до 11 років.



2. Може здатися, що імітаційна модель відображає реальний стан речей, хоча насправді це не так. Якщо цього не враховувати, то деякі властиві імітації особливості можуть призвести до неправильного рішення.

3. Імітаційна модель у принципі не точна, і ми не в змозі виміряти ступінь цієї неточності. Це утруднення можна подолати лише частково шляхом аналізу чутливості моделі до зміни певних параметрів, а частково шляхом проведення процедур обґрунтування її адекватності за допомогою методів, які будуть розглянуті далі.

4. Результати, які дає імітаційна модель, звичайно є чисельними, а їх точність визначається кількістю знаків після коми, що вибираються експериментатором. У зв'язку з цим виникає небезпека "обожнювання чисел", приписання їм більшої значущості, ніж вони насправді мають.

Імітаційне моделювання має такі цілі:

описати поведінку системи;

побудувати теорії і гіпотези, які можуть пояснити існуючу поведінку;

використовувати ці теорії для передбачення майбутнього поведінки системи, тобто тих впливів, які можуть бути викликані змінами в системі або змінами способів її функціонування.

Замість жорсткої схеми формалізації в імітаційному моделюванні використовується певна концепція розгляду або опису, що задає спосіб декомпозиції системи і виявлення найбільш істотних властивостей, які характеризують її поведінкові особливості.

Алгоритмічний опис функціонування окремих елементів може бути заданий явно або реалізовано як процедуру, характерну для аналітичних і чисельних методів, якщо властивості елементів досить добре описуються відповідними математичними процедурами.

#### **4. Принцип "чорного ящика". Механізм зворотного зв'язку**

Імітаційна модель становить приклад використання принципу "**чорного ящика**". Особливе значення також тут мають так звані причинно-наслідкові зв'язки.

Отже, під час імітації досліджувана система є для нас чорним ящиком, що означає таке: ми подаємо сигнал на вхід нашої моделі, далі проводиться її запуск, прогін, експеримент, тобто сам процес імітації – і ми отримуємо вихід системи. Те, що відбувається всередині, для нас "зашито", ми не можемо побудувати прямої аналітичної залежності між

входом і виходом, але на те й потрібна модель – як правило, в реальних системах такі залежності побудувати не вдається. Саме в таких випадках і використовується імітаційне моделювання. Якщо є можливість відразу визначити залежності між входом і виходом, необхідність в імітації відпадає. Тобто імітація, як було сказано раніше, передбачає дію або функціонування згідно з певним алгоритмом.

Для відображення характеру зв'язку між елементами вводиться поняття позитивного і негативного впливу.

*Змінна А робить позитивний (негативний) вплив на змінну Б, якщо за інших рівних умов збільшення змінної А веде до збільшення (зменшення) змінної Б.*

**Зворотний зв'язок** – це опосередкована або безпосередня взаємодія між виходом якого-небудь елемента і його входом. Контури (петлі) зворотних зв'язків можуть бути позитивними і негативними.

Позитивний контур зворотного зв'язку означає, що початкова зміна будь-якої змінної (в контурі), в кінцевому рахунку стимулює далі самозміну в первісному напрямку. Такий контур можна назвати "порочним колом". Позитивний зворотний зв'язок часто веде до розбалансування системи і навіть до її руйнування, викликаючи зміни за типом ланцюгової реакції.

Якщо відгук контуру зворотного зв'язку на змінну виступає проти первісного збурювання, то контур є негативним або цілеспрямованим. Таким чином, зміна одного елемента поширюється по контуру, поки не повернеться, щоб змінити той же елемент у напрямку, протилежному початковій зміні. Негативний зворотний зв'язок часто називають "доброзичливим", оскільки він не дозволяє системі зруйнуватися в результаті зовнішніх впливів.

Із визначень випливає, що в позитивному контурі зворотного зв'язку повинно бути парне число негативних причинно-наслідкових зв'язків, а в негативному – непарне.

Зворотні зв'язки бувають: зовнішні – жорсткі – лінійні або внутрішні – нежорсткі – нелінійні.

Позитивні і негативні зворотні зв'язки визначають характер стійкості системи. У процесі вивчення систем за допомогою імітаційного моделювання ОПР стикається з деякими особливостями їх поведінки, які він не завжди може пояснити. Серед цих особливостей і ті, що обумовлюються особливим впливом контурів зворотних зв'язків на

досліджувані об'єкти, процеси, системи всередині "чорного ящика". Вихід може бути непередбачуваним.

## **5. Структура імітаційного дослідження**

Імітаційне дослідження характеризується внутрішньою логікою, що виражається в певній послідовності стадій і етапів і дозволяє поєднувати особливості експериментального підходу і специфічні умови використання засобів обчислювальної техніки:

### **Визначення мети дослідження і постановка задачі.**

1. Визначення мети (ідентифікація проблемної ситуації; формування списку питань, які пізніше повинні вирішуватися за допомогою моделей або гіпотез, і опису дій, наслідків, які потрібно оцінити).

2. Постановка задачі (задавання відомих умов вирішення досліджуваної проблеми, тобто доступних ресурсів, термінів рішення, періодичності використання моделі, вимог до точності результатів).

### **Аналіз і формалізація опису об'єкта дослідження.**

1. Аналіз і словесний опис системи (опис природною мовою таких елементів майбутньої концептуальної моделі: системного кордону, системного оточення, об'єктів або елементів системи, ознак об'єктів або змінних стану системи, внутрішніх механізмів зворотного зв'язку; дій системи, властивих поведінці системи подій).

2. Побудова концептуальної моделі (вибір концепції формалізованого опису, найбільш відповідної сформульованому опису, формування опису досліджуваної концепції).

### **Створення імітаційної моделі.**

1. Побудова моделі у вигляді машинної програми (перехід від концептуальної схеми до машинної програми шляхом використання універсальної алгоритмічної або спеціалізованої мови).

2. Верифікація моделі (проведення попереджувальних і налагоджувальних процедур).

3. Оцінка придатності (адекватності) моделі (оцінка відповідності функціонування моделі системи характеристикам реальної системи з використанням таких методів перевірки: поточкового збігу, вибіркового середніх, властивостей траєкторій і т. д.).

### **Проведення експериментів на імітаційній моделі.**

1. Планування експерименту (визначення стратегії і тактики експериментів із моделлю, які забезпечують мінімізацію їх кількості та отримання необхідної точності результатів).

2. Експериментування (прогони моделі відповідно до плану експерименту з можливим використанням методів пошуку екстремумів функції відгуку, побудови рівнянь регресії і т. д.).

3. Обробка результатів експерименту (агрегування і статистичний аналіз кількісної інформації, накопиченої в результаті сукупності прогонів моделі).

4. Аналіз результатів дослідження.

5. Аналіз результатів експериментування (оцінка та інтерпретація досліджуваних властивостей реальної системи з точки зору поставленої мети, оцінка можливості використання результатів для конструювання остаточних висновків).

6. Формування та документування висновків і пропозицій (формулювання підсумкових висновків, розробка документального супроводу моделі та конкретних рекомендацій для досягнення поставлених цілей).

### **Контрольні запитання**

1. Поняття про імітаційне моделювання, імітаційну модель.
2. Области використання, переваги й недоліки імітаційних моделей.
3. Принцип "чорного ящика".
4. Механізм зворотного зв'язку в імітаційній моделі.
5. Етапи імітаційного моделювання, їхній взаємозв'язок.

Література: основна [1; 3]; додаткова [4; 11; 16; 17; 21].

## **Тема 2. Засоби та системи імітаційного моделювання**

**Основний зміст і мета лекції.** Метою лекції є ознайомлення студентів із засобами та системами імітаційного моделювання. В лекції розглянуто концептуальні, мовні, інформаційні, програмні, технічні, організаційні засоби імітаційного моделювання, представлено системи імітаційного моделювання.

Інформація, викладена в лекції, надає студенту можливість сформулювати такі групи компетентностей:

здатність до класифікації засобів та систем імітаційного моделювання;

уміння обирати концепції моделювання щодо конкретного об'єкта дослідження;

уміння проводити формалізацію об'єкта або процесу.

### **Основні питання, що висвітлюються в лекції:**

1. Концепції імітаційного моделювання.

2. Мовні, програмні, інформаційні та організаційні засоби імітаційного моделювання.
3. Використання мов програмування високого рівня для імітації.
4. Системи імітаційного моделювання.

### **1. Концепції імітаційного моделювання**

Різноманіття завдань, що вирішуються в ході багатоетапного імітаційного дослідження, вимагає залучення різних засобів. Вони поділяються на 6 груп: концептуальні, мовні, програмні, інформаційні, технічні та організаційні.

**Концептуальні засоби.** Будь-яка проблема, для вирішення якої використовується метод імітаційного моделювання, належить до певної предметної області, що має свою теоретичну та методологічну базу, систему понять і категорій. Область знання визначає формулювання проблеми та інтерпретацію отриманих результатів; вона утворює ту компоненту концептуальних засобів, яка називається концепцією предметної області. Концепція предметної області включає теоретичний апарат, у рамках якого формулюється проблема і більшою мірою використовується на початкових і завершальних етапах імітаційного дослідження. Крім того, концепція проблемної області залучається на етап оцінки придатності моделі. Концепція предметної області доповнюється системним підходом до розгляду й опису складних об'єктів і процесів. Це особливо важливо у процесі складання словесного опису досліджуваної системи.

Опис складної системи (4 етап імітаційного дослідження) не однозначний і залежить від *концепції опису складної системи*, під якою розуміється система уявлень про характер функціонування окремих елементів і способи їх взаємодії.

*Приклади концепцій:*

#### *1. Концепція елементів функціонування.*

В її основі лежить поняття роботи (або дії) – найменшого елемента функціонування, що відображає тривалий час переходу якого-небудь елемента системи з одного стану в інший. Логічно пов'язана послідовність робіт утворює процес. У системі одночасно можуть виконуватися кілька робіт, і, отже, відбуватися кілька процесів. Кожна робота характеризується подією (закінченням), тому всю сукупність пов'язаних робіт можна представити у вигляді впорядкованих у часі і логічно пов'язаних

подій. Приклад використання концепції елементів функціонування – мережеві графіки.

### *II. Концепція кусково-лінійних агрегатів. (Н. П. Бусленко)*

Складна система розглядається як сукупність взаємодіючих кусково-лінійних агрегатів, що імітують поведінку реальних підсистем. Під кусково-лінійним агрегатом розуміється динамічна система (що сприймає вхідні сигнали і виробляє вихідні), поведінка якої описується в термінах простору станів (замкнутий обмежений багатогранник у скінченномірному евклідовому просторі). У початковий момент стан кусково-лінійного агрегату описується деякою внутрішньою точкою простору станів. Під впливом внутрішніх причин агрегат здійснює в просторі станів лінійний рух до тих пір, поки не досягне межі простору станів або поки на його вхід вступить вхідний сигнал. У тому й іншому випадку агрегат здійснює миттєвий випадковий стрибок у внутрішню точку простору станів, звідки знову робить лінійний рух. У момент стрибка кусково-лінійний агрегат видає вихідний сигнал. Взаємодія кусково-лінійних агрегатів здійснюється за рахунок механізму обміну сигналами.

### *III. Концепція мереж масового обслуговування.*

Складна система представляється як сукупність приладів обслуговування, що виконують певні операції над заявками. Кілька різних видів заявок можуть одночасно проходити обслуговування на приладах різних типів і утворювати черги на обслуговування. Заявки проходять по приладах відповідно до визначеного для кожної з них маршруту.

### *IV. Концепція потоків.*

Складна система представляється як сукупність керованих за часом безперервних потоків, що з'єднують елементи типу накопичувачів.

Крім етапу 4 концепція опису складних систем використовується на 6 етапі (верифікація). Концепція опису складної системи служить основою для формалізації цього опису з метою подальшого створення машинної програми.

Розробка машинної програми заснована на теорії алгоритмів і основі програмування, що створює концептуальну базу відповідного (5 – побудова моделі у вигляді машинної програми) етапу імітаційного дослідження.

Концептуальні засоби, що використовуються на стадії проведення експериментів:

теорія планування експериментів (8 етап);  
методи математичної статистики (10 етап);  
концепції банку даних (9 етап) – під час проведення експериментів, пов'язаних із необхідністю збереження та використання значних обсягів даних, що розміщуються на різних носіях.

## **2. Мовні, програмні, інформаційні та організаційні засоби імітаційного моделювання**

**Мовні засоби.** Мовними називаються засоби, що забезпечують комунікацію і зв'язок між різними елементами імітаційного дослідження (стадіями, етапами, виконавцями, засобами тощо). Мовні засоби виконують дві основні функції: опис та спілкування => звідси дві групи мовних засобів:

**Мовні засоби опису** – природна мова предметної області, концептуальна мова опису, мови програмування і моделювання, мова опису даних.

Природною мовою предметної області формуються цілі дослідження (1 етап), ставиться завдання (2 етап), проводиться аналіз і складається словесний опис (3 етап), аналізуються результати дослідження (11-й етап) і дається їх інтерпретація для формування висновків і пропозицій (12 етап).

Концептуальна мова опису – засіб формалізованого опису складних систем (4 етап) у термінах певної концепції. Залежно від концепції така мова може включати математичні символи, діаграми, таблиці, блок-схеми.

Мови програмування та моделювання використовуються для опису систем у формі рівнозначної імітаційної моделі (5 етап) в тому сенсі, що ЕОМ, сприймаючи цей опис, породжує програму, відтворюючу функціонування реальної системи.

Мовні засоби опису моделей у рамках потокової концепції включають мови DYNAMO, DYNAMO II, Stella (IThink), IMITAK.

Мова опису даних є частиною коштів банку даних і служить для опису структури і властивостей даних, що зберігаються в базі даних, яка обслуговує експерименти з імітаційною моделлю (8 – 10 етапи).

**Мовні засоби спілкування** включають мови спілкування з виконуючою системою ЕОМ. Вони включають команди різних системних програм, що входять до складу виконуючої або сервісної систем, і повідомлення видані ними (етапи 5 – 10).

**Програмні засоби.** Програмні засоби включають програми для ЕОМ, що використовуються на етапах 5 – 10. При цьому залучаються різні програмні засоби: інтерпретатори і транслятори з мов програмування та моделювання (5, 6 етапи), прикладні програми планування експериментів (8 етап), прикладні програми математичної статистики (10 етап), СУБД (6, 10 етапи), сама імітаційна модель (6, 7, 9 етапи), виконуюча система (на всіх перерахованих етапах).

Особливе місце в системі програмних засобів імітаційного дослідження займає власне імітаційна модель. Будучи продуктом стадії створення моделі, вона перетворюється на інструмент (засіб) на наступній стадії. Таким чином, імітаційна модель – програмний засіб, що створюється у процесі дослідження.

**Інформаційні засоби.** Під ними розуміється сукупність даних, що використовуються на різних етапах. До них належать: інформація про проблему (1 етап), інформація про цілі дослідження і ресурси (2 етап), про властивості досліджуваної системи (3, 7 етапи), словесний опис системи (4 етап), повідомлення трансляторів про синтаксичні помилки (5 етап), інформація для тестування і повідомлення про семантичні помилки (6 етап), інформація про цілі експерименту і ресурси (8 етап), база даних (9, 10 етап), результати експериментування (11 етап), результати аналізу експериментів (12 етап).

**Технічні засоби.** Це, насамперед, засоби обчислювальної техніки (5 – 10 етапи), що доповнюються різними засобами оргтехніки.

**Організаційні засоби.** Під ними розуміють різні інструктивно-методичні матеріали і документи, відповідно до яких планується і здійснюється робота різних виконавців і засобів на різних етапах: методика побудови концептуальної моделі (4 етап), методи написання програм та їх налагодження (5 етап), методика оцінки адекватності моделі (7 етап), методика планування експериментів (8 етап), план і методика проведення експериментів (9 етап), методика обробки результатів експериментів та їх аналізу (10 етап).

### **3. Використання мов програмування високого рівня для імітації**

Мови програмування та моделювання поділяються на дві множини – універсальні мови програмування і спеціалізовані мови моделювання.



*Універсальні мови* програмування високого рівня використовуються незалежно від концепції імітаційного моделювання, серед них найбільш популярними є Delphi та C++.

*Спеціалізовані мови* орієнтовані на певну концепцію опису складної системи. У них основна увага приділяється опису функціональних блоків, тобто опису функціонування елементів системи та умов їх взаємодії.

Для концепції елементів функціонування можна виокремити 3 групи спеціалізованих мов: мови робіт (CSL та його розширення), мови подій (SIMSCRIPT II, GASP II і GASP IV), мови процесів (SIMULA, SIMPL / 1, SOL (базова мова програмування майже скрізь – ФОРТРАН).

Концепція кусково-лінійних агрегатів реалізується в описі алгоритму імітації функціонування агрегату. Алгоритм можна представити у вигляді дерева, вершинами якого служать оператори (процедури) різних рівнів. Кожен із макрооператорів (лінійний рух, стрибок, видача вихідного сигналу) може бути розшифрований через проміжні оператори (визначення моменту виходу на кордон, визначення моменту надходження вхідного сигналу, стрибок під час виходу на кордон і т. д.), а ті – через мікрооператори (лінійне перетворення, випадковий жереб і т. д.) Моделювання взаємодії здійснюється за допомогою схеми сполучення елементів, що задається таблично.

Концепція мереж масового обслуговування лежить в основі мовних засобів моделювання систем збору і обробки даних, а також мови GPSS/PC (так званої мови транзактів). Мова, що стала згодом основою системи імітаційного моделювання, розроблена співробітником фірми IBM Джефрі Гордоном у 1961 р. Гордоном були створені 5 перших версій мови: GPSS (1961), GPSS II (1963), GPSS III (1965), GPSS/360 (1967) і GPSS V (1971). В основі мови GPSS лежить структурно-блоковий принцип, тобто використовується набір блоків різного типу, кожен з яких по суті є макроінструкцією, що описує деяку дію системи. Останні версії для персональних комп'ютерів GPSS/PC, GPSS World; OPENGPSS (побудована на основі серверів СУБД Oracle з використанням оптимістичного алгоритму Джефферсона синхронізації модельного часу).

#### **4. Системи імітаційного моделювання**

Ефективне використання розглянутих засобів імітаційного моделювання можливо тільки за умови їх інтеграції в єдину систему, що забезпечує виконання імітаційного дослідження в повному обсязі.

Виникнення таких систем, що називаються системами імітаційного моделювання, пов'язано, насамперед, із розробкою зазначених вище спеціалізованих мов. Слід зауважити, що всі програмні засоби можна використовувати тільки в сукупності з виконуючою системою – програмним комплексом, що забезпечує завантаження і виконання програмних модулів із залученням інших загальносистемних програм.

Системи імітаційного моделювання включають:

концепцію опису складної системи;

вхідну мову;

транслятор або інтерпретатор з вхідної мови;

виконуючу систему з відповідними інформаційними та організаційними засобами;

прикладне програмне забезпечення.

Системи імітаційного моделювання, які створюються останнім часом, включають засоби автоматизації проведення експерименту і статистичної обробки його результатів. Досить популярні системи імітаційного моделювання, які реалізують змішані концепції опису (дискретно-безперервні – Слами II, GASP IV).

*Серед популярних систем імітаційного моделювання також: AnyLogic; Vensim; Aimsun; Arena; PTV Vision VISSIM; eM-Plant; Powersim; GPSS; NS-2; Transyt.*

Однією з останніх розробок у галузі створення систем імітаційного моделювання є сімейство продуктів компанії Ventana Systems Inc., що забезпечують на різних рівнях (навчальному, стандартному, професійному, підтримки систем прийняття рішень) можливості створення, верифікації і прогонів імітаційних моделей потокового типу. Система може інстальватися на комп'ютерах PC і Macintosh і працює в середовищі Windows.

### **Контрольні запитання**

1. Концепції імітаційного моделювання. Концептуальні засоби.
  2. Мови імітаційного моделювання, їхній зв'язок з концепціями імітаційного моделювання.
  3. Мовні, програмні, інформаційні та організаційні засоби імітаційного моделювання.
  4. Системи імітаційного моделювання: склад і призначення.
- Література: основна [1; 3]; додаткова [4; 11; 16; 17].

### **Тема 3. Концепція методу системної динаміки**

**Основний зміст і мета лекції.** Метою лекції є ознайомлення студентів із концепцією методу системної динаміки Дж. Форрестера. В лекції розглянуто принципи, концептуальні особливості, основні моделі системної динаміки, поняття "динамічна складність" та затримки в петлях зворотних зв'язків.

Інформація, викладена в лекції, надає студенту можливість сформувати такі групи компетентностей:

уміння конструювати концептуальні моделі об'єктів та процесів потокового типу;

здатність до побудови імітаційних моделей конкретної економічної, соціально-економічної або виробничо-економічної системи спеціальною мовою програмування потокового типу на базі концепції системної динаміки.

#### **Основні питання, що висвітлюються в лекції:**

1. Принципи методу системної динаміки Дж. Форрестера.
2. Концептуальні особливості методу системної динаміки Дж. Форрестера.
3. Моделі системної динаміки.
4. Динамічна складність. Затримки в петлях зворотних зв'язків.

#### **1. Принципи методу системної динаміки Дж. Форрестера**

Метод системної динаміки був запропонований Дж. Форрестером у кінці 50-х рр. На сьогодні міжнародне суспільство системної динаміки включає представників понад 30 країн світу. На основі даного методу створено велику кількість моделей для вирішення соціальних, економічних та екологічних проблем.

У процесі використання *методу системної динаміки* модельований об'єкт відображається у вигляді динамічної системи, що складається з резервуарів (накопичувачів), пов'язаних між собою керованими потоками. Кількісно кожен резервуар описується рівнем його вмісту, а кожен потік – темпом (швидкістю) переміщення. Темпи переміщення обчислюються на основі інформації про рівні вмісту резервуарів. Таким чином, модельований об'єкт представляється у вигляді інформаційної системи зі зворотним зв'язком (у методі системної динаміки постулюється, що причиною змін є сам об'єкт і спосіб його функціонування, а не зовнішні впливи).

Відносно об'єкта моделювання рівні становлять аналоги різного роду накопичувачів у вартісному вираженні, які, з точки зору бухгалтерського обліку, є залишком рахунків – сальдо. Це можуть бути накопичені суми грошових коштів, готової продукції, замовлень, дебіторської заборгованості і т. д. Рівні, що виражають накопичені результати за період (місяць, квартал), наприклад, валові витрати, валові доходи за аналогією з тим, як закриваються відповідні рахунки бухгалтерського обліку, обнуляються по закінченні звітного періоду.

Рівні, як правило, описують величини, безперервні по діапазону своїх значень і дискретні в часі – їх можна визначити як змінні стану системи, значення яких формуються за рахунок накопичення різниць між вхідними та вихідними потоками. Потоки – аналоги процесів перетворення накопичень у системі – переміщують вміст рівнів і відображають потоки економічної системи (народжуваність, смертність, викиди шкідливих речовин, рух фінансових коштів і т. д.). Їх інтенсивність (темп) визначається управлінськими рішеннями, які формуються на підставі інформації про стан рівнів. Значення всіх рівнів моделі в кожен момент часу  $t$ , таким чином, розраховується за формулою:

$$S_t^1 = \int_{t_0}^t (F_t^{1+} - F_t^{1-}) dt + S_0^1,$$

де:  $t_0$  – початковий момент часу;

$S^1$  – 1-й рівень;

$S_0^1$  – 1-й рівень в початковий момент часу;

$F_t^{1+}$  – входить до 1-го рівня темпу;

$F_t^{1-}$  – що виходить з 1-го рівня темпу.

Приклади темпів:

сума вкладу;

чисельність населення;

кількість води у ванні.

Приклади рівнів:

обсяг нарахованих відсотків;

швидкість зростання (падіння) населення;

пропускна здатність крана і стоку в ванній.

*Допоміжні змінні (Auxiliary)* необхідні для визначення змінних темпів і вводяться для більш простого представлення системи. Беруть участь

під час формування допоміжних рівнянь, необхідних для вирішення рівнянь темпів.

Наприклад:

відсоток за вкладками;

коефіцієнти народжуваності (смертності);

ступінь зносу крана.

*Додаткові змінні (Supplementary)* не є частиною структури системи і, як правило, не використовуються ні в рівняннях рівня, ні в рівняннях темпів. Вони відображають результати функціонування системи у вигляді графіків, діаграм.

Наприклад:

час утворення суми в 1 млн грн на рахунку;

середня кількість населення пенсійного віку;

час появи розгніваних сусідів з нижнього поверху.

*Константи (Constants)* відносять до екзогенних змінних системи і необхідні для визначення екзогенних параметрів моделі.

Наприклад:

ставка прибуткового податку;

вік виходу на пенсію;

вартість 1 дня роботи сантехніка.

*Табличні функції (Lookup)* використовуються для зв'язку між змінними, встановлюються не аналітично. Як правило, використовуються для непрямого зв'язку ендогенних змінних моделі. Іноді можуть бути використані для завдання динамічних рядів, що описують екзогенні параметри моделі.

Наприклад:

відсотки за різними типами вкладів;

таблиці смертності;

вартість різних сантехнічних деталей.

*Початкові умови (Initial)* задають початкові значення змінних рівня. Найчастіше не відображаються на діаграмах.

Наприклад:

початкова сума вкладу;

початкова кількість населення (за віковими групами);

початкова кількість води у ванній.

У кожній моделі системної динаміки присутня особлива дискретна змінна – час, вибір одиниці виміру якої (тимчасового кроку моделювання),

як і інтервалу моделювання, здійснюється розробником моделі. Часові межі і крок моделювання (Time Bounds ...) визначаються за допомогою завдання початкового часу (INITIAL TIME), кінцевого часу (FINAL TIME), кроку моделювання (TIME STEP) і періоду збереження результатів обчислень на EOM (SAVE PER). Ці величини необхідні для проведення імітаційних експериментів. Вони не відображаються на діаграмах моделі, а задаються в якості параметрів моделювання.

Наприклад:

з 1 січня 2003 р. по 31 грудня 2003 р. з кроком в 1 тиждень і збереженням результатів по закінченні кожного місяця;

з 1 січня 2003 р. по 31 грудня 2013 р. з кроком в півроку і збереженням результатів кожні півроку;

з 9<sup>00</sup> до 21<sup>00</sup> із кроком 10 хв і збереженням результатів щопівгодини.

*Функції рішень (або рівняння темпів)* становлять формалізацію правил, що визначають, яким чином інформація про рівні призводить до вибору поточних значень темпів потоків. У зв'язку з цим моделі потокового типу відносять до динамічних моделей із зворотними зв'язками. Так як реальні системи мають інерційність, в їх структурі є елементи, що визначають запізнювання передачі зміни по контуру зворотного зв'язку.

## **2. Концептуальні особливості методу системної динаміки Дж. Форрестера**

Системно-динамічне моделювання підпорядковується внутрішній логіці методу імітаційного моделювання, будучи його частиною. Ця логіка виражається в послідовності ряду етапів, наведених у темі 1 і дозволяє поєднувати особливості експериментального підходу і специфіку використання засобів комп'ютерної підтримки. Однак є певна специфічність методу системної динаміки, що проявляється на головному етапі імітаційного моделювання – етапі концептуалізації (етап 4).

Отже, концепція опису складної системи повністю визначає набір засобів, за допомогою яких проводиться побудова концептуальної моделі.

На етапі концептуалізації можуть використовуватися різні інструменти, що дозволяють структурувати опис системного кордону, структури і взаємозв'язки змінних – таблиці кордонів системи, діаграми підсистем, діаграми причинно-наслідкових зв'язків, діаграми (карти) потоків і т. д.

Таблиця границь системи включає перелік ключових змінних – ендогенних, екзогенних і тих, що виключаються з моделі.

Діаграми підсистем відображають загальну архітектуру моделі. Кожна з основних підсистем зображується разом з потоками матеріалу, грошей, товарів, інформації, що зв'язують її з іншими підсистемами. Підсистемами можуть бути організації або підрозділи організації – операції маркетингу, розвитку виробництва.

Для відображення причинно-наслідкових зв'язків будується *діаграма причинно-наслідкових зв'язків* (ДПНЗ), яка становить орієнтований граф, у якому вершинами є елементи моделі, а дугами – зв'язки, при цьому дуги розмічені знаками "+" і "-", що відображають характер впливу.

Наприклад:

Схема нарахування складних відсотків (рис. 1).

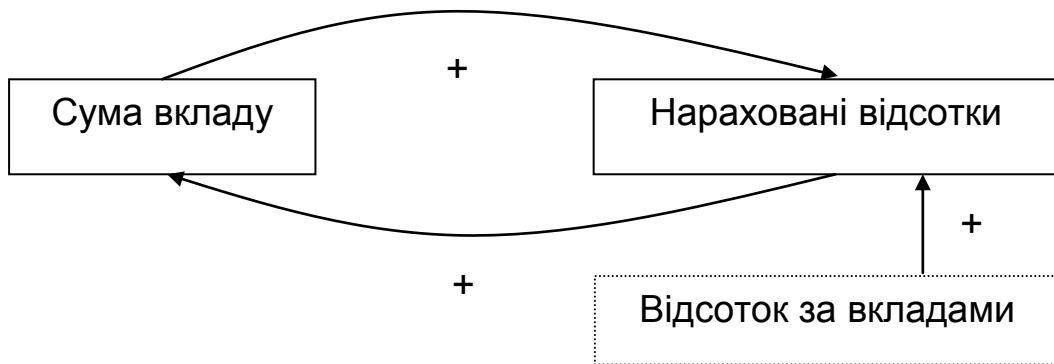


Рис. 1. Нарахування складних відсотків

Елементарна модель динаміки населення (рис. 2).

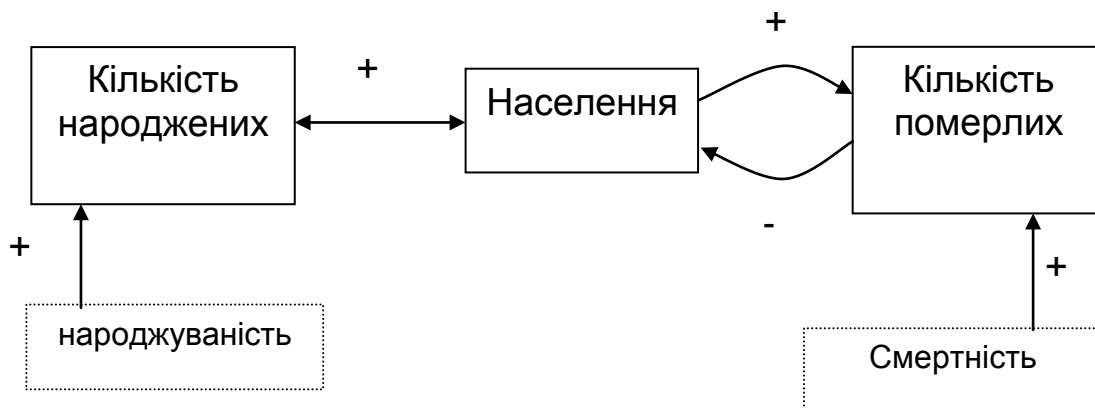


Рис. 2. Динаміка населення

Модель "розсіяної купальні" (рис. 3).



Рис. 3. Розсіяна купальня

Оскільки діаграма є орієнтованим графом, то в ньому можна виокремити шляхи і замкнуті шляхи – контури. Контур називають контуром зворотного зв'язку, а зв'язок між вихідними параметрами системи (кінцем шляху) і вхідними параметрами (початком шляху) – зворотним зв'язком.

Позитивним контуром зворотного зв'язку, очевидно, є схема нарахування складних відсотків.

У процесі використання поняття негативного контуру слід мати на увазі відмінності між елементами системи з точки зору методу системної динаміки. Зміни в темпах зовсім не завжди ведуть до протилежної зміни рівнів і навпаки. Тому дані визначення скоріше підходять до випадку, коли всі змінні одного типу.

У моделі поряд з основним циклом причинно-наслідкових зв'язків можуть знаходитися приховані, які можуть призводити до зміни характеру поведінки системи.

Класифікація змінних за типами проводиться для поділу їх на рівні, темпи, додаткові вираження.

При цьому враховується:

1. Наявність між змінними відносин типу "рівень-темп". Рівні і темпи розрізняються не на основі одиниць вимірювань. У реальному житті компоненти системи можуть бути або рівнем або темпом, залежно від ситуації (наприклад, швидкість). Рівні є акумулюючим (інтегруючим) компонентом.

2. Усі рівні існують і зберігаються в підсистемах і містять дані, що зберігаються. Кількість, що зберігається, має таку властивість, що вона ні



створюється, ні руйнується (усередині системи), вона тільки переміщається (рухається навколо себе).

3. Необхідність задавання початкових значень (тільки для рівнів).

4. Необхідність обліку запізнювання (в парі "рівень-темп" рівень завжди запізнюється на один крок від темпу).

5. Обмеження вхідної мови у процесі використання різних змінних у ході обчислення змінних іншого типу: на рівень можуть впливати тільки темпи; на темп – рівні і додаткові вираження; на додаткові вираження – рівні і раніше обчислені додаткові змінні. У ході обчислення не повинно бути замкнутих циклів.

6. Рішення завжди знаходяться всередині петель зворотного зв'язку.

7. Кожне рівняння повинно мати кількісну розмірність.

*Побудова діаграми потоків* здійснюється відповідно до діаграми причинно-наслідкових зв'язків і класифікації змінних. На відміну від ДПСС на діаграмі потоків відображаються константи, і задається порядок обчислення незалежних змінних. На діаграмі потоків з'являються нові змінні, пов'язані з реалізацією зазначених вище умов: облік запізнювань, ліквідація замкнутих циклів і т. д.

*Діаграми стратегій.* Це причинні діаграми, що показують інформаційні входи для конкретних правил прийняття рішень. Вони фокусують увагу на інформаційних сигналах, які, як здається розробнику моделі, особи, які приймають рішення, використовують для регулювання потоків у системі. Вони показують причинну структуру і тимчасові затримки, пов'язані з конкретними рішеннями.

### **3. Моделі системної динаміки**

Модель системної динаміки в математичному сенсі становить систему кінцево-різницевого рівнянь, що розв'язується на основі чисельного алгоритму інтегрування (як правило, за схемою Ейлера) з постійним кроком і заданими початковими значеннями.

Основними *принципами системної динаміки* є такі:

поведінка системи – це наслідок прояву її структури та взаємодії елементів;

структура системи і характер взаємозв'язків між елементами системи, що визначають її поведінку, більш важливі для розуміння поведінки системи, ніж кількісні оцінки;

стан системи та її структура є причиною змін, а не їх результатом;  
проблеми виникають всередині системи, а не поза нею;  
вивчити систему означає визначити її структуру і встановити відносини між її елементами;  
визначальне значення в поведінці системи має взаємодія контурів зворотного зв'язку в її структурі;  
рівні і темпи є необхідними і достатніми змінними для опису будь-якої динамічної системи;  
у ході побудови системно-динамічних моделей слід спиратися на принцип "безпосередньої верифікації" або валідності (придатності);  
у процесі вивчення системи важливо концентрувати увагу на аналізі дієвості політик, а не на отриманні точних кількісних оцінок.

#### **4. Динамічна складність. Затримки в петлях зворотних зв'язків**

Системно-динамічне моделювання відображає динамічну поведінку систем – тобто їх поведінку в часі. У системній динаміці розробник моделі намагається ідентифікувати зразки поведінки, демонстровані ключовими змінними, і потім будує модель, яка може відтворити задані зразки. Якщо модель має цю здатність, вона може використовуватися як лабораторний інструмент для тестування політик, націлених на зміну системної поведінки бажаним чином.

Хоча реальні системи можуть демонструвати різноманітні тимчасові траєкторії (часто одночасно), тобто їхня динамічна складність дуже висока, число виокремлених "сімейств" тимчасових траєкторій порівняно невелике. Крім лінійних, можна виокремити три "чистих" типи траєкторій – експоненційні, телеологічні і коливальні.

Їх комбінації породжують велику кількість змішаних типів (архетипів). У ході цього важливий зв'язок виокремлених типів динамічної поведінки з відповідними фрагментами структурних діаграм системно-динамічних моделей, а також наявність затримок у петлях зворотних зв'язків.

**Лінійне сімейство.** Перше сімейство часових траєкторій – *це лінійне сімейство*, наведене на рис. 4. Лінійне сімейство включає лінійне зростання, рівновагу і лінійний занепад. У разі відомої простоти та інтуїтивної привабливості цих траєкторій важливо відзначити ряд факторів, важливих із точки зору системно-динамічного контексту.

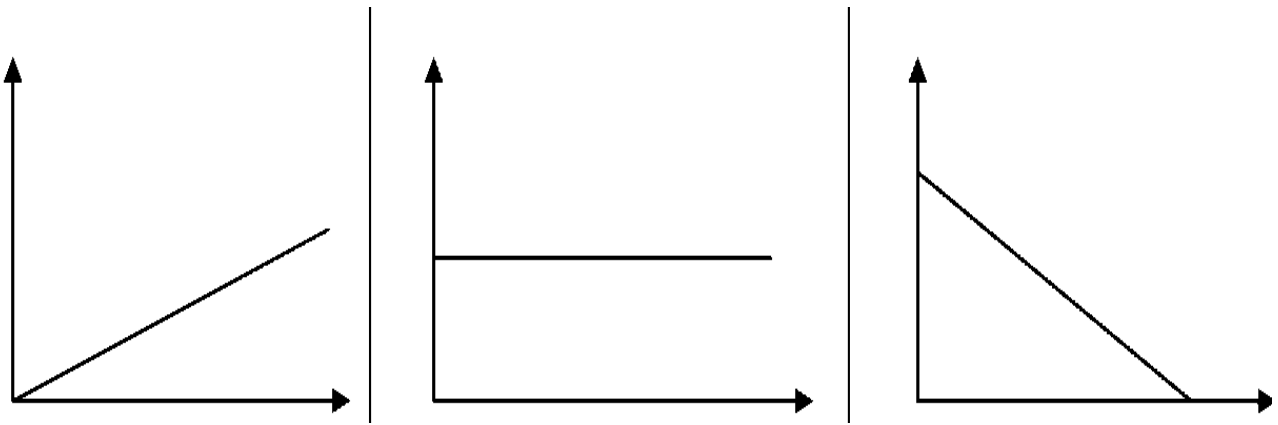


Рис. 4. Лінійне зростання, рівновага та занепад

Перше, що необхідно відзначити, це те, що звичайна людина не володіє методом системної динаміки, схильна думати, що реальні системи ростуть або занепадають за лінійним законом – тобто так, як показано на першій і третій траєкторіях. Правда, однак, полягає в тому, що більшість систем зростають і занепадають нелінійно, а, скоріше, за експоненційними траєкторіями. Чисті лінійні траєкторії зазвичай генеруються системами, в яких немає зворотного зв'язку між змінною стану системи і її чистим приростом. Те, що приймають за лінійне зростання, часто виявляється зростанням, але розглядається на занадто короткому відрізку часу, щоб можна було помітити прискорення.

Друге, що потрібно відзначити, це те, що *рівноважна* траєкторія, подана на рис. 4 – це тип динамічної поведінки, який рідко демонструють реальні системи. Це стан ідеальної рівноваги. Фактично, з системно-динамічної точки зору рівновага припускає, що всі змінні стану системи досягають своїх бажаних значень одночасно – це дуже штучна ситуація. Третій момент пов'язаний із розрізненням статичної і динамічної рівноваги. У системно-динамічній моделі рівень (змінна стану) знаходиться в рівновазі, якщо різниця вхідного і вихідного потоків дорівнює нулю. Це ситуація *динамічної рівноваги*, оскільки вміст накопичувача весь час змінюється. *Статична рівновага* має місце, коли вхідний і вихідний потоки дорівнюють нулю: в накопичувач нічого не надходить і з нього нічого не витікає.

**Сімейство експоненційних траєкторій.** Дане сімейство включає експоненційне зростання і експоненційний занепад (рис. 5).

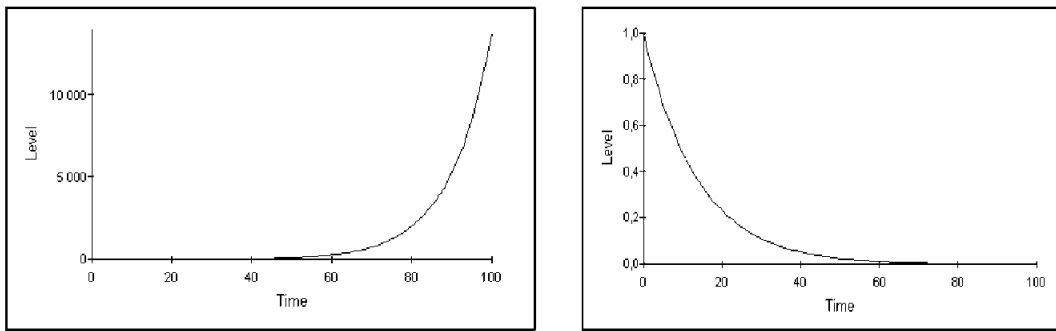


Рис. 5. Експоненційне зростання та занепад

Експоненційне зростання викликається позитивним (самопосилюється) зворотним зв'язком: чим більша кількість, тим більший чистий приріст, тим ще більша кількість і т. д. Приклади реальних процесів – динаміка накопичувального внеску з нарахуваннями за формулою складних відсотків, зростання популяції (у разі перевищення народжуваності над смертністю) або накопичення державного боргу за умови зростаючого дефіциту бюджету.

Чисте експоненційне зростання має важливу властивість – *сталості часу* подвоєння: стан системи подвоюється протягом фіксованого періоду часу. Потрібний однаковий час, щоб змінна стану збільшилася з одиниці до двох і від одного мільйона до двох мільйонів. Позитивний зворотний зв'язок не завжди генерує зростання. Він може відображати і посилювати занепад (рис. 4). Так, падіння цін на біржі призводить до недовіри інвесторів, що призводить до зростання продажів (скиду) акцій, ще більшого зниження цін і ще більшої втрати довіри.

**Сімейство телеологічних траєкторій.** Третє окреме сімейство траєкторій – це сімейство телеологічних траєкторій, представлене на рис. 6. Усі живі системи (і багато неживих) виявляють телеологічну поведінку. Цей тип поведінки пов'язаний із експоненційним занепадом.

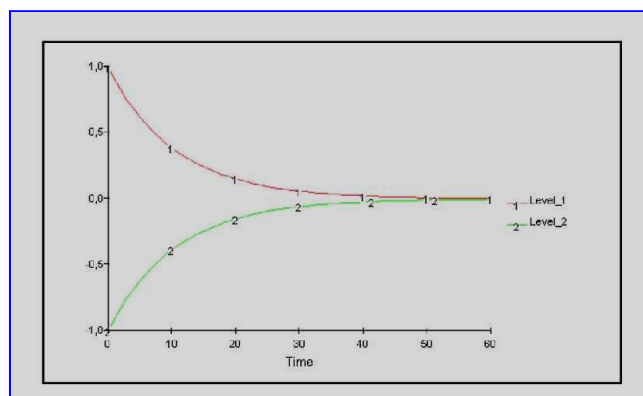


Рис. 6. Телеологічна крива

Це видно, якщо порівняти тимчасову траєкторію на рис. 5 із верхньою траєкторією на рис. 6, де цільовим рівнем є нульовий. Така поведінка виникає за наявності негативної петлі зворотного зв'язку: стан системи порівнюється з метою; якщо є розбіжності між бажаним і актуальним станом, робиться коригуючий вплив, щоб вирівняти систему, наблизивши її до цільового стану.

**Сімейство коливальних траєкторій.** Четверте окреме сімейство – це сімейство коливальних траєкторій. Коливання – одне з найпоширеніших типів динамічної поведінки у світі і характеризується різними прототипами. Два з них показані на рис. 7: стійке та загасаюче; на рис. 8: вибухове та хаотичне. Кожен з них обумовлений відповідною структурою зворотного зв'язку і набором параметрів, що визначають силу ланцюгів зворотних зв'язків і тривалість затримок у них. Але в основі будь-якого з коливальних типів траєкторій – негативна петля зворотного зв'язку із затримками. Як показано на рис. 8, осциляції виникають у разі істотної затримки в будь-якій частині інформаційного зворотного зв'язку: розуміння стану обумовлено часом, необхідним для вимірювань і документування звіту; можуть бути затримки в ініціації коригуючої дії, тому потрібен час на прийняття рішення; і саме коригувальна дія із запізненням впливає на зміну стану системи.

Обмежені коливання можуть мати частоту (кількість піків у рамках повторюваного циклу) будь-якого порядку. Періодичність стійких осциляцій дорівнює одиниці. Затухаючі осциляції демонструють системи, в яких протікають дисипативні і релаксаційні процеси. Приклади таких процесів включають тертя у фізичних системах та інформаційне згладжування в соціальних системах.

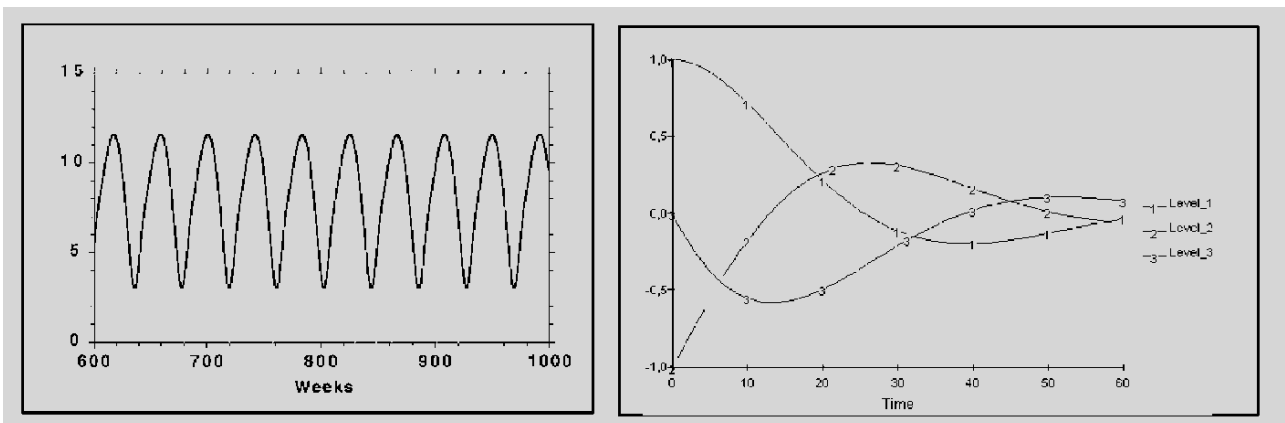
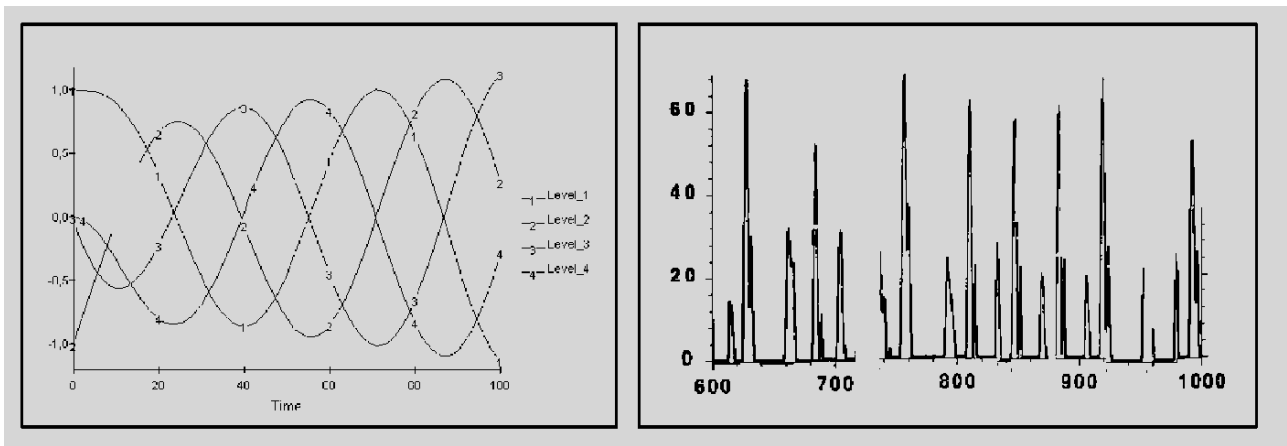


Рис. 7. Стійкі та затухаючі коливання



**Рис. 8. Вибухові та хаотичні коливання**

Вибухові осциляції або зростають до переходу в стійкий режим коливань або зростають, поки це не призведе до розриву системи (колапсу). У результаті, вибухові осциляції зазвичай не дуже часто зустрічаються в реальному світі, а якщо і трапляються, то не тривають занадто довго.

Хаотична поведінка – це осцилююча тимчасова траєкторія, яка розгортається нерегулярно і ніколи не повторюється (тобто її період по суті нескінченний). Хаос – унікальний тип тимчасової траєкторії, тому це по суті випадкове поводження, що генерується системою, вільною від випадковості.

Найбільш яскравим прикладом реальних коливальних процесів є цикли ділової активності.

### **Контрольні запитання**

1. Концепція системної динаміки Дж. Форрестера: особливості, властивості.
2. Поняття про параметри, змінні, критерії імітаційної моделі і статистики моделювання.
3. Засоби побудови концептуальної системно-динамічної моделі.
4. Динамічна складність. Затримки в петлях зворотних зв'язків.
5. Типові структури в системній динаміці: лінійне сімейство, експоненційні, телеологічні, коливальні траєкторії.

Література: основна [1]; додаткова [9; 13; 17; 19; 22; 24].

### **Тема 4. Моделювання випадкових подій і випадкових величин засобами імітаційного моделювання. Метод Монте-Карло**

**Основний зміст і мета лекції.** Метою лекції є ознайомлення студентів із моделюванням випадкових подій і випадкових величин засобами

імітаційного моделювання та методом Монте-Карло. В лекції розглянуто способи моделювання випадкових подій і випадкових величин, сутність та використання методу Монте-Карло.

Інформація, викладена в лекції, надає студенту можливість сформувати такі групи компетентностей:

здатність усвідомлювати поняття "псевдовипадкових чисел" та їх ролі у сучасних комп'ютерних та побутових системах;

можливість побудови випадкових чисел шляхом детермінованих перетворень;

уміння розробляти генератори псевдовипадкових чисел та моделі випадкових процесів на основі спостережень за системами.

### **Основні питання, що висвітлюються в лекції:**

1. Сутність методу Монте-Карло.

2. Галузі застосування методу Монте-Карло. Переваги, проблеми та недоліки.

3. Генерування випадкових величин під час машинної імітації. Методи побудови псевдовипадкових чисел. Аналітичні формули генерування псевдовипадкових чисел.

### **1. Сутність методу Монте-Карло**

Основним принципом моделювання систем, що містять імовірнісні елементи, є розігрування вибірок за методом Монте-Карло. Цей метод пов'язують із роботами фон Неймана і Улана в Лос-Аламосі над проектом під кодовою назвою "Монте-Карло" в 1940-х роках. Хоча найбільшу користь цей метод приносить під час роботи з вибірковими статистиками, він також може застосовуватися і до детермінованого завдання.

Під методом Монте-Карло в широкому сенсі розуміється будь-який метод розв'язання моделі, що використовує випадкові або псевдовипадкові числа.

У методі Монте-Карло дані попереднього досвіду виробляються штучно шляхом використання генератора випадкових чисел у поєднанні з інтегральною функцією розподілу ймовірностей для досліджуваного процесу. Таким генератором може бути таблиця, підпрограма, колесо рулетки, гральні кістки або інше джерело рівномірного розподілу. Розподіл ймовірностей, що підлягає розігруванню, може бути заснований на емпіричних даних, результатах останнього експерименту або представляти собою відомий теоретичний розподіл. Випадкові числа

використовуються для отримання дискретного ряду випадкових змінних, що імітує результати, яких можна було б очікувати відповідно до розподілу, що розігрується.

Нехай  $F(x)$  – інтегральна функція розподілу випадкової величини  $\xi$ , тобто:

$$P(\xi < x) = F(x).$$

Якщо  $F(x)$  – безперервно зростаюча функція, то існує зворотна функція  $F^{-1}(x)$ . Слід показати, що значення  $\xi$  можна вибрати з його розподілу  $F(x)$  за допомогою зворотної функції  $F^{-1}$  і випадкового числа  $r$ , а саме:

$$\xi = F^{-1}(r). \quad (1)$$

З рівності (1) випливає, що:

$$P(\xi < x) = P(F^{-1}(r) < x) = P(r < F(x)) = F(x), \quad (2)$$

останнє рівняння випливає з визначення інтегральної функції розподілу. З (2) випливає бажаний результат.

Варто розглянути експоненційний розподіл. Змінна  $\xi$  розподілена за експоненційним законом, якщо її щільність розподілу  $f(x)$  задана виразом  $f(x) = \lambda e^{-\lambda x}$ ,  $x \geq 0$ ,  $f(x) = 0$ ,  $x < 0$ , де  $\lambda > 0$ . Отже, інтегральна функція

розподілу має вигляд  $F(x) = \int_0^x \lambda e^{-\lambda t} dt = 1 - e^{-\lambda x}$ ,  $x \geq 0$ .

Використання (1) означає, що слід прийняти  $F(x)$  рівним випадковому числу  $r$  і вирішити щодо  $\xi$ , тобто:  $1 - e^{-\lambda x} = r$   
або

$$\xi = -\frac{1}{\lambda} \ln(1 - r). \quad (3)$$

Рівняння (3) можна використовувати для генерації експоненційно розподілених випадкових величин.

**Зауваження.** Зазвичай застосовується інша формула:  $\xi = -\ln(r)/\lambda$ , її використання ґрунтується на тому, що розподіл для  $r$  і  $(1-r)$  однаковий.

Аналогічно можна вчинити і для моделювання випадкової вибірки з невідомою (принаймні, в аналітичному вигляді) інтегральною функцією розподілу. Для цього слід:



1. Побудувати графік або таблицю інтегральної функції розподілу на основі ряду чисел, що відображає досліджуваний процес (а не на основі ряду випадкових чисел), причому значення випадкової змінної процесу відкладаються по осі абсцис, а значення ймовірності (від 0 до 1) – по осі ординат.

2. За допомогою генератора випадкових чисел вибрати випадкове число (СЧ) у межах від 0 до 1.

3. Провести горизонтальну пряму від точки на осі ординат, що відповідає обраному СЧ, до перетину з кривою розподілу ймовірностей.

4. Опустити з цієї точки перетину перпендикуляр на вісь абсцис.

5. Отримане значення  $x$  приймається як вибіркоче значення випадкової величини  $\xi$ .

6. Кроки 2 – 5 повторюються для всіх необхідних випадкових чисел, слідуючи тому порядку, в якому вони були записані.

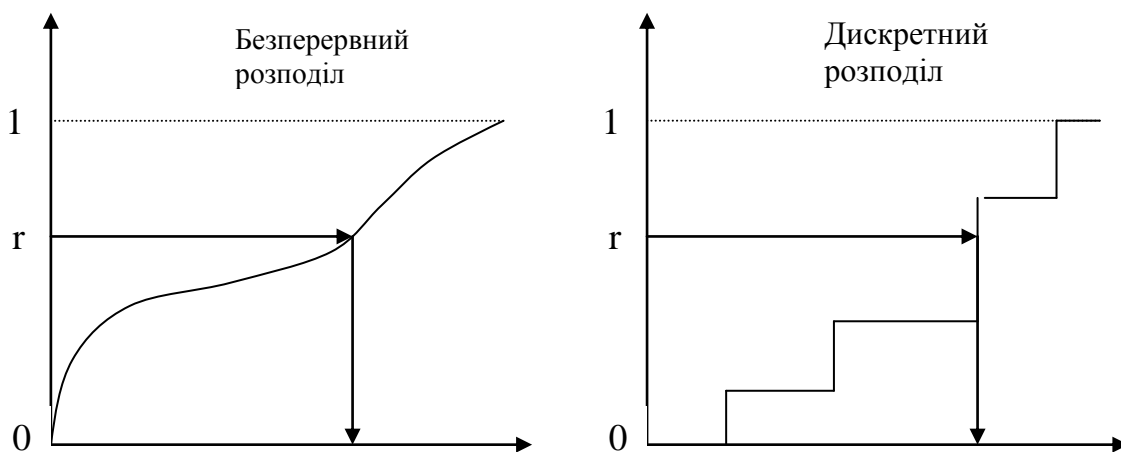


Рис. 9. Схеми методу Монте-Карло

**Приклад.** Нехай є система, в якій за кожен 10-хвилинний інтервал число клієнтів, яких потрібно обслуговувати, відповідає розподілу, наведеному в табл.1.

Таблиця 1

### Умови задачі

Число клієнтів	Ймовірність	Інтегральна функція розподілу ймовірності
0	0,40	0,40
1	0,25	0,65
2	0,20	0,85
3	0,15	1,00

Нехай слід провести експеримент для п'яти періодів часу. Для цього необхідно побудувати графік розподілу ймовірностей (рис. 10).

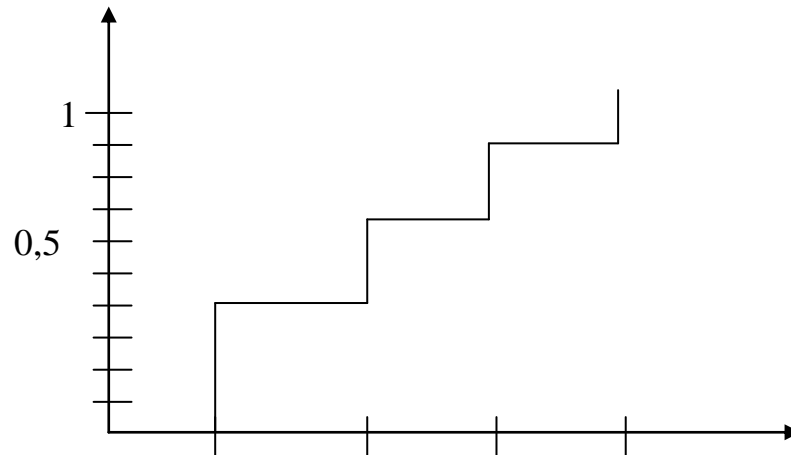


Рис. 10. Інтегральна функція розподілу для прикладу

Далі взяти п'ять випадкових чисел, рівномірно розподілених в інтервалі  $[0, 1]$ , кожне з цих п'яти чисел використовується для визначення числа клієнтів, що з'являються в даному періоді часу. Результати моделювання наведені в табл. 2.

Таблиця 2

### Результати моделювання

Період часу	Випадкове число	Число клієнтів
1	0,09	0
2	0,54	1
3	0,42	1
4	0,80	2
5	0,20	0

## 2. Галузі застосування методу Монте-Карло. Переваги, проблеми та недоліки

Метод Монте-Карло застосовується у різних галузях, в яких необхідно згенерувати псевдовипадкові числа спеціальних розподілів. Просте використання методу – це випадковий генератор для мобільних пристроїв, що дозволяє відтворювати музику у випадковому порядку в мобільних додатках.

Сенс описуваного методу в такому: якщо випадкові числа дійсно розподілені рівномірно (тобто кожне з них має однакову ймовірність появи), то кожне зі значень досліджуваної величини буде в процесі уявного експерименту з'являтися з такою ж частотою, як і в "реальному світі". Таким чином, буде отримано результати, типові для фактичної попередньої поведінки досліджуваної системи.

У процесі розробки імітаційної моделі, що містить імовірнісні елементи, завжди виникає питання, чи слід за методом Монте-Карло застосовувати безпосередньо емпіричні дані або ж потрібно скористатися одним із теоретичних розподілів. Використання теоретичного розподілу переважає в тих випадках, коли необхідно дослідити чутливість моделі або програти на ній різні можливі ситуації, тому вони дозволяють змінювати параметри генератора випадкових чисел.

Опис методу Монте-Карло будується на тому, що послідовність рівномірно розподілених випадкових величин (випадкових чисел) на інтервалі  $[0, 1]$  вже побудована. Однак побудова саме такої послідовності може становити складну задачу.

Крім використання методу Монте-Карло (методу прямої інверсії) можливі й інші підходи до генерації випадкових величин із заданими властивостями.

### **3. Генерування випадкових величин під час машинної імітації. Методи побудови псевдовипадкових чисел. Аналітичні формули генерування псевдовипадкових чисел**

Псевдовипадкові числа генеруються за допомогою детермінованої алгебраїчної формули, породжувані числа для практичних цілей можна вважати випадковими, рівномірно розподіленими в інтервалі  $[0, 1]$  і незалежними.

*Довжиною циклу* слід назвати число псевдовипадкових чисел, отриманих до того, як згенеровані числа почнуть повторюватися. Передбачається, що довжина циклу достатньо велика, тоді псевдовипадкові числа можна вважати незалежними.

Для генерації часто застосовується *мультиплікативно-конгруентний метод*:

$$\begin{aligned}x_i &= ax_{i-1} \pmod{m}, i = 1, 2, \dots \\x_0 &= b,\end{aligned}\tag{4}$$

де  $a, m$  – невід'ємні цілі числа.

Згідно з (4) необхідно взяти останнє випадкове число, помножити його на  $a$  і взяти модуль отриманого числа за  $m$  (тобто розділити на  $m$  і взяти залишок в якості наступного  $x_j$ ). **Послідовність рівномірно розподілених на відрізку  $[0, 1]$  псевдовипадкових чисел виходить у разі розподілу залишку на  $m$ .**

Перевага псевдовипадкових чисел, по-перше, полягає в тому, що вони генеруються самою ЕОМ і немає необхідності зберігати великі таблиці випадкових чисел, по-друге, можна повторити послідовність псевдовипадкових чисел (використовуючи ті ж параметри генератора).

Будь-який генератор псевдовипадкових чисел дає лише кінцеве число різних чисел. Довжина циклу залежить від обраного модуля, множника і початкового значення. В якості модуля зазвичай вибирають  $2^b$ .

На основі конгруентної формули було створено безліч генераторів.

*Змішані генератори* Томпсона ґрунтуються на такій формулі:

$$x_{i+1} = (a x_i + C) \pmod{m}.$$

*Адитивний конгруентний метод* (Грін, Сміт, Клем) використовує рекурентну формулу:

$$x_{i+1} = (x_i + x_{i-1}) \pmod{m}.$$

При  $x_0 = 0$ ,  $x_1 = 1$  і модулі 1 цей алгоритм призводить до добре відомої послідовності чисел Фібоначчі.

У якості випадкових чисел також беруться результати від ділення шуканого  $x_{i+1}$  на  $m$ .

У ході моделювання відразу декількох випадкових впливів або для наближених розрахунків у реальному часі, а також для задач розпізнавання образів використовуються рівномірні послідовності. Теорія рівномірних послідовностей вивчає асимптотичні властивості послідовностей, але в даному випадку цікаві послідовності, у яких досить гарні і початкові відрізки, щоб їх можна було використовувати.

## **Контрольні запитання**

1. Метод Монте-Карло: сутність умови застосування.

2. Галузі застосування методу Монте-Карло.
3. Переваги, проблеми та недоліки методу Монте-Карло.
4. Методи генерації нормально розподілених випадкових величин.
5. Методи генерації псевдовипадкових рівномірно розподілених випадкових чисел.

Література: основна [1; 2]; додаткова [6; 7; 15].

## **Тема 5. Модельний час**

**Основний зміст і мета лекції.** Метою лекції є ознайомлення студентів із поняттям, сутністю та принципами зміни модельного часу. У лекції розглянуто поняття про модельний час та активність імітаційної моделі; принципи зміни модельного часу, управління часом у системах імітаційного моделювання.

Інформація, викладена в лекції, надає студенту можливість сформулювати такі групи компетентностей:

- здатність усвідомлювати поняття "модельний час";
- навички щодо управління часом в імітаційних моделях.

### **Основні питання, що висвітлюються в лекції:**

1. Поняття про модельний час.
2. Активність імітаційної моделі.
3. Принципи зміни модельного часу.
4. Управління часом у системах імітаційного моделювання.

### **1. Поняття про модельний час**

Як відомо, у процесі побудови імітаційної моделі практично немає обмежень на кількість включених у модель компонент. Звичайно, залежно від потужності використовуваних для імітації обчислювальних засобів ефективність роботи імітаційної моделі може бути різною. У загальному ж випадку обмежень немає, і це є однією з переваг імітаційного моделювання перед аналітичним дослідженням. Однак збереження цієї переваги породжує додаткові проблеми.

У реальній системі завжди відбувається одночасно безліч подій, при цьому деякі одночасні події не роблять впливу одна на одну (наприклад, поява двох машин на різних кінцях вулиці), а деякі можуть мати катастрофічні наслідки (зіткнення автомобілів на перехресті). У імітаційній ж моделі моделювання одночасних подій, які дійсно відбулися одночасно, можливе лише за наявності багатопроцесорної імітаційної

системи, причому кількість процесорів повинна бути не менше, ніж кількість паралельних процесів у реальній системі. Ясно, що така імітаційна модель була б занадто дорогою і виникали б проблеми узгодження дій окремих компонент, модельованих різними процесорами. Тому до такого способу вдаються дуже рідко.

Альтернативою побудови багатопроцесорних імітаційних систем є особлива організація обчислень в імітаційній моделі, яка б дозволила з більшою чи меншою точністю імітувати паралельні процеси й одночасні події. Прикладом такої організації може слугувати добре відома операційна система Windows, багатозадачність якої забезпечується розподілом часу роботи процесора між усіма активними на даний момент завданнями. У ході побудови систем імітаційного моделювання використовується той же принцип.

Припустимо, що імітаційна модель складається з безлічі компонент  $K_i$ , функціонування кожної компоненти становить виконання певних функціональних дій  $\Phi D_{ij}$ . У результаті виконання  $\Phi D_{ij}$  відбувається подія  $S_{ij}$ . Кожна з подій у реальній системі пов'язана, як правило, з відповідною компонентою системи. У ході цього будь-яка функціональна дія виконується на деякому часовому інтервалі  $\tau_i$ . Для кожної компоненти  $K_i$  слід ввести поняття локального часу  $t_i$ . У системі всі  $t_i$  змінюються одночасно, проте характер цих змін різний і визначається послідовністю часових інтервалів  $\{\tau_{ij}\}$ .

У ході побудови імітаційної моделі кожне  $\Phi D_{ij}$  апроксимується деякими спрощеними функціональними діями  $\Phi D'_{ij}$ . Ступінь цього спрощення визначається необхідним рівнем деталізації імітаційної моделі. Відмінності між  $\Phi D_{ij}$  і  $\Phi D'_{ij}$  породжують помилки імітації реальної системи. Однак ці помилки не завжди істотні. Дійсно, у ході побудови імітаційної моделі системи масового обслуговування з метою визначення ефективності роботи модельованої системи (наприклад, середньої довжини черги, середнього часу простою і т. д.) немає сенсу розглядати дії, що реально відбуваються в системі, що моделюється. З точки зору теорії масового обслуговування, істотним є тільки інтенсивність надходження вимог у систему й інтенсивність обслуговування, але сутність вимог (телефонні дзвінки, черга до каси або надходження деталей на склад) абсолютно не важлива. Тому одна і та ж імітаційна модель може відображати діяльність різних систем за відповідного налаштування параметрів. Таким чином, апроксимуюча функціональна дія буде

становити, наприклад, перемикач "виконано – не виконано" або збільшення лічильника виконаних вимог і відповідну затримку за часом.

Таким чином, в імітаційній моделі  $\Phi_{ij}$  подається парою  $(\Phi_{ij}', \tau_{ij})$ , яка виконується таким чином. Спочатку реалізується  $\Phi_{ij}'$  при незмінному значенні  $t_i$ , а потім вже відображається зміна на величину  $\tau_{ij}$ , ініціюючи таким чином появу події  $C_{ij}$ .

На рис. 11 наведено графічне зображення послідовності дій компоненти  $K_i$  в системі координат  $(\Phi_{ij}', t_i)$ .

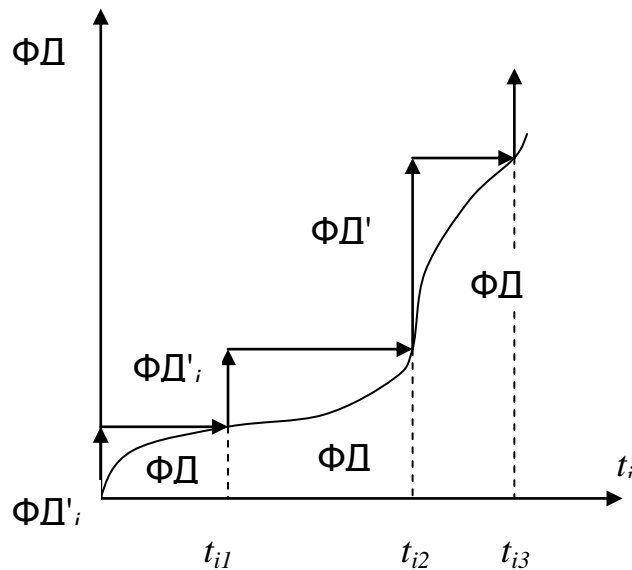


Рис. 11. Приклад апроксимації функціональних дій  $i$ -ї компоненти системи в імітаційній моделі

Слід зауважити, що порядок появи події може бути і зворотним: спочатку змінюється локальний час, а потім виконується  $\Phi_{ij}'$ .

В імітаційній моделі кожне функціональне описується в загальному випадку деяким алгоритмом  $A$ . У ході імітації відбувається реалізація функціональної дії за відповідними алгоритмами  $A$  і подальша зміна  $t_i$  на величину  $\tau_{ij}$ . Таким чином, будь-яка імітаційна модель описується набором деяких "молекул", кожна з яких містить у собі опис алгоритму виконання  $A_{ij}$  відповідного  $\Phi_{ij}'$  і оператора  $Mt_{ij}$ , здійснює зміну тимчасової координати.

## 2. Активність імітаційної моделі

Пару  $(A_{ij}, \tau_{ij})$  варто назвати **активністю** імітаційної моделі і позначати  $AK_{ij}$ . Будь-яка  $(i,j)$ -а активність є записом поведінки компоненти  $K_i$  імітаційної моделі системи. Реалізація цієї активності в імітаційній моделі призводить до появи в моделі події  $C_{ij}$ .

Щоб забезпечити імітацію паралельних подій реальної системи, вводять деяку глобальну змінну  $t_0$  – **модельний (системний) час**. За допомогою цієї змінної організовується синхронізація всіх подій у моделі і виконання алгоритмів компонент моделі.

У процесі реалізації імітаційної моделі використовуються зазвичай три подання часу:  $t_R$  – реальний час системи, робота якої імітується даною моделлю;  $t_0$  – модельний час, за яким організовується синхронізація подій у системі;  $t_e$  – машинний час імітації, що відбиває витрати ресурсу часу ЕОМ на організацію імітації.

За допомогою модельного часу реалізується квазіпаралельна робота компонент імітаційної моделі. "Квазі" означає, що події, які виникають у різних компонентах реальної системи одночасно, обслуговуються в рамках імітаційної моделі послідовно.

Коригування тимчасових координат  $t_i$  декількох компонент  $K_i$  імітаційної моделі здійснюється за допомогою модельного часу таким чином.

Якщо значення  $t_i$  у ході виконання  $A_{ij}$  декількох  $K_i$  збігаються (тобто в реальній системі відбувається кілька одночасних подій), то послідовно обслуговуються  $A_{ij}$ , збігаються за часом виконання, тобто мають однакові значення  $t_{ij}$ , де  $t_{ij}$  – конкретне значення  $t_i$ , за яким відбувається подія  $S_{ij}$ . У ході цього модельний час не змінюється до закінчення виконання всіх співпадаючих за часом реалізації алгоритмів. Таким способом послідовно виконуються відповідні ФД'  $_{ij}$  за незмінного значення  $t_0$ . Після кожної реалізації  $A_{ij}$ , забезпечує виконання в імітаційній моделі ФД'  $_{ij}$ , виконується коректування тимчасової координати  $Mt_{ij}$ :

$$t_{ij}=t_0+\tau_{ij}.$$

Це значення тимчасової координати  $t_i$  запам'ятовується і використовується в подальшому для визначення моменту нової активізації в імітаційній моделі компоненти  $K_i$ , тобто до початку виконання наступної активності цієї компоненти.

Коли імітацію подій  $S_{ij}$ , що відбуваються одночасно, завершено, виконані відповідні активності  $A_{ij}$  і проведені коригування тимчасових координат  $t_i$ , змінюється значення глобальної змінної  $t_0$ .

### 3. Принципи зміни модельного часу

Зміна  $t_0$  може бути виконана двома способами: способом фіксованого кроку і кроку до наступної події.



Метод фіксованого кроку полягає в тому, що модельний час  $t_0$  змінюється щоразу на одну і ту ж величину  $\Delta t$ . Подія, що відбувається в імітаційній моделі, означає перехід на обслуговування моделювання тих  $S_{ij}$ , які потрапили всередину чергового інтервалу довжиною  $\Delta t$ . Усі події, що потрапили в цей інтервал, вважаються такими, що відбулися одночасно, і виконуються відповідні їм активності. Таким чином, точність моделювання подій пов'язана з величиною інтервалу дискретизації часу  $\Delta t$ .

У ході імітації за способом кроків до наступної події модельний час  $t_0$  змінюється в моменти часу, які відповідають моментам  $t_{ij}$  появи події в реальній системі. Обробка подій  $S_{ij}$ , що одночасно з'явилися в реальній системі, здійснюється послідовно за умови незмінного модельного часу. Таким чином  $t_0$  кожен раз зсувається на величину, рівну мінімальному приросту  $\tau_{ij}$ , який отримає локальний час  $t_i$ .

Зміна модельного часу відбувається таким чином:

- 1) вибір подій у моделі, які необхідно обслужити при одному і тому ж модельному часі  $t_0$ ;
- 2) обслуговування подій (виконання активностей);
- 3) коригування тимчасової координати  $t_0$ ;
- 4) перевірка умов закінчення моделювання.

На рис. 12 проведено порівняння двох способів.

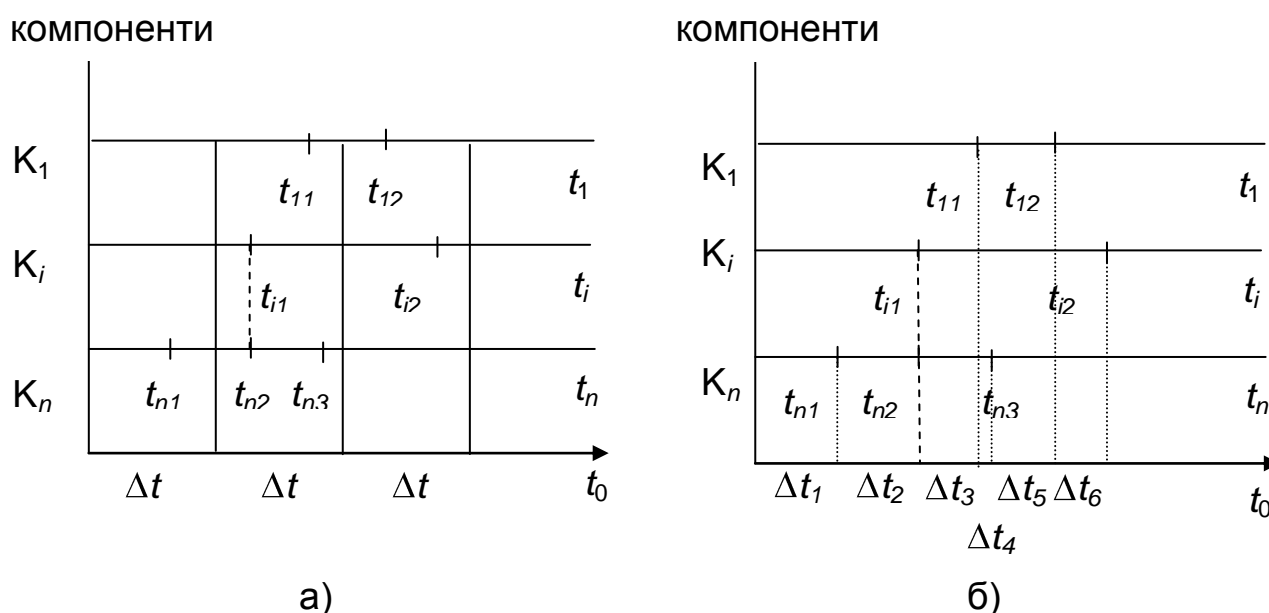


Рис. 12. Порівняння способів зміни модельного часу:  
а) метод фіксованого кроку, б) метод кроку до наступної події

На практиці перший спосіб більш кращий у випадках, якщо події розподілені рівномірно і можна підібрати  $\Delta t$ , і забезпечує мінімальну похибку, або якщо подій дуже багато і вони з'являються групами. Спосіб фіксованого кроку застосовується також у системах імітаційного моделювання потокового типу, основою яких служать звичайно-різницеві рівняння, що включають крок часу в самі рівняння.

#### **4. Управління часом у системах імітаційного моделювання**

Різні системи імітаційного моделювання надають користувачам можливість керувати зміною модельного часу, його масштабом і швидкістю імітації. Варто розглянути такі можливості в системах Taylor 2000 і Vensim.

Система імітаційного моделювання Taylor 2000 націлена в основному на побудову моделей реальних систем, які можуть бути представлені у вигляді систем масового обслуговування. Таким чином, у цій системі моделюються дискретні події: поява вимоги, початок і кінець обслуговування, перехід до іншого обслуговуючого апарата і т. д.

Часові параметри роботи елементів моделі (інтенсивність потоку вимог, середній час обслуговування, частота відмов і час на ремонт обслуговуючих апаратів) задаються під час їх функціонування в секундах.

Залежно від цілей імітації, характеру імітованої системи і вимог до відображення результатів, імітація може здійснюватися з різною швидкістю. З цією метою на панелі управління імітацією Run Control поміщений список, що розкривається, містить різні варіанти. Варіанти управління швидкістю і їх характеристика наведені в табл. 1. Швидкість імітації залежить від складності моделі і числа подій, які трапляються в цій моделі. Для того щоб забезпечити більш реалістичну картину імітації, наприклад, якщо необхідно простежити шлях руху вимоги (під час моделювання виробничих систем), слід вибрати більш низьку швидкість. Якщо важливі тільки середні результати імітації (середня довжина черги, середній час простою і т. д.), то слід вибрати більш високу швидкість. Таким чином, керуючи швидкістю імітації, можна управляти масштабом модельного часу відповідно до реального.

Система Vensim призначена для моделювання систем потокового типу. Модельний час у таких системах змінюється з фіксованим кроком.

Оснoву моделей такого типу складають кінцево-різницеві рівняння, що є дискретним аналогом диференціальних рівнянь. Наприклад, диференціальне рівняння:

$$\frac{d\text{Capacity}}{dt} = \text{investment} - \text{reductions} ,$$
$$\text{Capacity}(0) = \text{desired capacity} ,$$

у різницевій формі виглядає таким чином:

$$\Delta \text{Capacity} = (\text{investment} - \text{reductions}) \Delta t,$$

$$\text{Capacity}_0 = \text{desired capacity},$$

а в системі Vensim подається у вигляді:

$$\text{Capacity} = \text{INTEG}(\text{investment} - \text{reductions}, \text{desired capacity}),$$

де INTEG – функція інтегрування.

У системі Vensim інтегрування диференціальних рівнянь (систем рівнянь) здійснюється чисельно за допомогою методів Ейлера або Рунге-Кутта. Тому обраний крок інтегрування за часом суттєво впливає на результати.

Крок часу вибирається під час установки параметрів моделі в меню *Model* → *Setting* на вкладці *Time Bounds*. Під час вибору найкращого значення параметра *TIME STEP* слід дотримуватися таких правил:

значення *TIME STEP* повинно бути не більше, ніж значення параметра *SEVEPER*, що визначає, як часто будуть зберігатися дані обчислень;

значення параметра повинне дозволяти регулярно обчислювати значення вхідних параметрів всіх складових моделі;

значення *TIME STEP* повинно бути менше, ніж найкоротша тимчасова константа в моделі (ця вимога не застосовується до обчислень методом Рунге-Кутта, де крок коригується автоматично);

значення параметра повинно бути менше, ніж найкоротший період, в який відбуваються істотні зміни в поведінці моделі.

Останні два правила дозволяють уникнути (але не завжди) того, що поведінка моделі буде істотно відрізнятися від такого, яким би воно було при малому кроці за часом. Невиправдано великий крок за часом може призвести до спотворення поведінки системи і появи коливань, яких насправді в системі немає. Взагалі, якщо в поведінці системи спостерігаються коливання з частотою приблизно в один часовий період

(*TIME STEP*), то слід переглянути значення параметра і підібрати більш відповідне значення. У разі використання методу Рунге-Кутта відповідний часовий крок визначається автоматично, *Vensim* автоматично визначає, наскільки малим повинен бути крок, щоб досягти потрібного рівня точності.

### **Контрольні запитання**

1. Визначення модельного часу.
  2. Поняття про активність імітаційної моделі.
  3. Принципи зміни модельного часу.
  4. Управління часом у системах імітаційного моделювання *Taylor 2000* та *Vensim*.
  5. Порівняння способів зміни модельного часу: метод фіксованого кроку та метод кроку до наступної події.
- Література: основна [3]; додаткова [13; 22].

## **Змістовий модуль 2**

### **Прикладні аспекти імітаційного моделювання**

#### **Тема 6. Оцінка та аналіз адекватності імітаційних моделей**

**Основний зміст і мета лекції.** Метою лекції є ознайомлення студентів із методами оцінки та забезпечення адекватності імітаційних моделей. В лекції розглянуто поняття верифікації та валідації моделі, аналіз адекватності на базі поточкового збігу, неформальні процедури оцінки придатності імітаційних моделей.

Інформація, викладена в лекції, надає студенту можливість сформулювати такі групи компетентностей:

- здатність до оцінки та аналізу придатності імітаційної моделі конкретної економічної, соціально-економічної або виробничо-економічної;
- уміння класифікувати та відбирати найбільш інформативні показники придатності імітаційної моделі для дослідження реальної ситуації;
- здатність до складної оцінки можливості застосування імітаційної моделі в реальних прикладних ситуаціях.

#### **Основні питання, що висвітлюються в лекції:**

1. Методи оцінки та забезпечення адекватності імітаційних моделей.
2. Верифікація та валідація моделі.
3. Оцінка адекватності на базі перевірки поточкового збігу.
4. Неформальні процедури оцінки придатності імітаційних моделей.

## **1. Методи оцінки та забезпечення адекватності імітаційних моделей**

У ході використання імітаційного моделювання неминуча проблема обґрунтування можливості перенесення на реальну систему висновків, отриманих на основі використання цих моделей, тобто *оцінки довіри* до отриманих за допомогою *модельного експерименту результатів*.

Загальна проблема у ході використання статистичних методів перевірки гіпотез полягає в обґрунтуванні використовуваних рівнів значимості, за якими порівнюються дані. Відомі тести більш оберігають від можливості відкинути придатну модель (тобто зробити помилку першого роду), ніж від прийняття непридатної (помилка другого роду). Але в імітаційному моделюванні набагато більшу заклопотаність викликає можливість дати рекомендації щодо прийняття рішень на основі результатів, отриманих у ході експериментування з непридатною моделлю (ціною помилки першого роду є витрати на розробку й оцінку імітаційної моделі, ціна помилки другого роду – ті втрати в реальній системі, які можуть бути пов'язані з прийняттям рішень на основі експериментів із непридатною моделлю).

Узагальнена міра придатності може бути встановлена на основі ранжирування критеріїв оцінки адекватності моделей. Сума добутків значень критеріїв оцінки на їх ваги дасть чисельне значення оцінки придатності конкретної імітаційної моделі. Такий підхід дозволяє ОПР встановити величину відсікання, тобто таке значення оцінки, нижче якої результати імітації будуть відкинуті як непридатні.

## **2. Верифікація та валідація моделі**

Процедура оцінки адекватності моделі включає два взаємопов'язані процеси:

1. Верифікацію. Під верифікацією розуміється перевірка того, чи відображає імітаційна модель і її частини досліджувану систему так, як задумано розробником, і того, наскільки точно машинна програма відтворює концептуальну модель.

2. Оцінку придатності (валідацію). Оцінка придатності моделі пов'язана з визначенням ступеня відповідності моделі реальній системі з урахуванням цілей її розробки.

Складність оцінки моделі полягає в тому, що *немає методології верифікації та оцінки придатності*, яка гарантувала б довіру до

машинних результатів. Багато методів залежать від особливостей вирішуваної проблеми. Крім того, процес оцінки, як правило, багатокри-теріальний, а єдиної системи критеріїв для неї також не існує.

Методи, що використовуються для верифікації та оцінки придатності імітаційних моделей, можна розділити на формальні (статистичні) і неформальні (із залученням користувачів і ОПР). Неформальні методи більшою мірою пов'язані з поняттям *достовірності моделі*, під якою розуміється *ступінь довіри користувача* до результатів імітації та їх *бажання використовувати* ці результати в практичній діяльності.

**Верифікація** імітаційної моделі полягає в доведенні тверджень відповідності алгоритму її функціонування задумом моделювання шляхом формальних і неформальних досліджень реалізованої програми-моделі.

Мета неформальних досліджень моделі – переконати дослідника і замовника імітаційної моделі відповідно до побудованої моделі задумом, закладеним під час її розроблення. Вони становлять ряд процедур перевірки правильності алгоритму функціонування моделі об'єкта дослідження. Проведення цих процедур уходить до складу комплексного налагодження імітаційної моделі, спрямованої на створення у розробника впевненості в тому, що поведінка реалізованої моделі відповідає задуму і своєму призначенню. Важливо у ході цього ретельно налагодити і перевірити поведінку тієї частини моделі, яка прогнозує роботу системи, тобто імітує режими роботи, в яких дослідник не міг спостерігати поведінку реальної системи.

Формальні методи верифікації моделі включають в себе:

- використання спеціальних пре- і постпроцесорів для доказу логічних тверджень і виявлення логічних помилок моделювання;
- заміну стохастичних елементів моделі детермінованими і перевірку "очікуваності" результатів моделювання;
- використання тестів безперервності моделювання, перевіряючих відповідність вихідних характеристик впливів на вході моделі за всім спектром значень параметрів моделі.

Верифікація включає попереджувальні і налагоджувальні процедури, які застосовуються для коригування синтаксичних і діагностування семантичних помилок (які відбуваються в ході інтерпретації машинної програми), а також методи тестування моделі для ідентифікації недіагностованих помилок, при яких модель-програма проходить без переривань, але одержувані результати не відповідають задумом розробника.

Попереджувальні процедури:

- побудова діаграми потоків і діаграми причинно-наслідкових зв'язків;
- побудова машинної програми у вигляді розділів із чіткою послідовністю операторів;
- автоматичний контроль помилок, контроль формату даних;
- перевірка роботи датчиків випадкових чисел і вбудованих функцій.

Налагоджувальні процедури:

- повторна побудова діаграми потоків за машинною програмою;
- ідентифікація та коригування синтаксичних і семантичних помилок, що діагностуються, особливо тих, які призводять до програмного переривання.

Для виявлення недіагностованих автоматичних помилок використовуються три основні підходи:

- повне виключення випадковості;
- вибіркове обмеження випадковості;
- необмежена випадковість.

**Оцінка придатності (валідація) моделі.** Три основних види придатності включають: технічну, операційну і динамічну придатність (табл. 3).

Таблиця 3

### Валідація імітаційної моделі

Види придатності	Оцінки придатності		Область аналізу
Технічна	Теоретична		Облік математичних, змістовних, причинних припущень
	Придатність даних	необроблених	Точність, неупередженість, репрезентативність даних
		структурованих	Точність операцій, порівнянність позицій
	Структурна		Правильність відображення внутрішніх взаємозв'язків системи
	Прогнозна		Здатність передбачати майбутнє
Операційна	Репликативна	Точність відтворення характеристик реальної системи	
	Робастність	Чутливість моделі, помилки при екстремальних значеннях параметрів	
	Реалізаційна	Імовірність практичного впровадження результатів	
Динамічна		Актуалізація, практика успішного використання моделі	

Найбільш важливою є оцінка *операційної придатності*, бо вона дозволяє з'ясувати, наскільки важливі розбіжності, виявлені під час визначення технічної придатності, з точки зору відповідності результатів імітації характеристикам функціонування реальної системи. В рамках операційної придатності найбільш важлива *реплікативна* придатність, що встановлює рівень точності, з якою модель відтворює реальні процеси.

Формальні (статистичні) методи оцінки реплікативної придатності використовують дві вибірки: реальних даних і отриманих у ході імітації. У ході цього перевіряються гіпотези про те, що реальні дані і результати моделювання за своїми розподілами або моментами однакові. Методи оцінки реплікативної придатності умовно діляться на три групи, наведені в табл. 4.

Таблиця 4

### Методи оцінки реплікативної придатності моделі

Характеристика	Метод оцінки
1. Перевірка поточкового збігу	Коефіцієнт Тейла, регресійний та факторний аналіз, $\chi^2$
2. Перевірка вибірових характеристик розподілів (середніх, дисперсій)	Непараметричні тести, F-критерій, методи множинних порівнянь середніх і дисперсій
3. Перевірка властивостей траєкторій	Спектральний аналіз, тести Тюрінга

Застосування даних методів для оцінки динамічних потокових моделей, реалізованих на базі методу системної динаміки, через ряд причин обмежено.

### 3. Оцінка адекватності на базі перевірки поточкового збігу

Стандартні статистики, які використовуються для оцінки відповідності модельних і реальних даних, включають:

*Лінійний коефіцієнт кореляції* показує ступінь і напрямок лінійного зв'язку між реальними і модельними даними.

*Коефіцієнт детермінації* дозволяє оцінити частку варіації реальних даних, "що пояснюється" моделлю.

Дані коефіцієнти розраховуються за формулами:

$$D = R^2 = r^2$$



$$r = \frac{1}{n} \sum_{t=1}^T \frac{(X_d(t) - \overline{X_d})(X_m(t) - \overline{X_m})}{S_d S_m},$$

причому:  $\overline{X} = \frac{1}{n} \sum_{t=1}^T X(t)$ ,  $S = \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{t=1}^T (X(t) - \overline{X})^2}$ ,

де  $\overline{X_m}$ ,  $\overline{X_d}$  – математичне очікування даних,

$S$  – стандартне відхилення даних;

$r$  – коефіцієнт кореляції рядів модельних і реальних даних;

$D = R^2$  – коефіцієнт детермінації;

$m$ ,  $d$  – індекси модельних і реальних даних.

Чим вище значення  $R^2$ , тим краще модель відтворює динаміку реального процесу.

*Середні помилки* обчислюються за формулами:

*середня абсолютна помилка:*

$$MAE = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T |X_m(t) - X_d(t)|;$$

*середня відносна помилка* (безрозмірна величина), може виражатися у %:

$$MAPE = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T \frac{|X_m(t) - X_d(t)|}{X_d(t)};$$

*середня абсолютна помилка* як частка середньої (безрозмірна величина) може виражатися у %:

$$MAE / MEAN = \frac{MAE}{\overline{X_d(t)}};$$

*середньоквадратична помилка* обчислюється стандартно:

$$MSE = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T (X_m(t) - X_d(t))^2, \text{ а також } RMSE = \sqrt{MSE}.$$

Очевидно, що значення середніх помилок, близькі до нуля, свідчать про хорошу відповідність результатів розрахунків за моделлю реальних даних.

*Коефіцієнт Тейла* також показує ступінь невідповідності модельних і реальних даних:

$$v = \frac{\sqrt{\sum_{t=1}^T (X_m(t) - X_d(t))^2}}{\sqrt{\sum_{t=1}^T X_m(t)^2} + \sqrt{\sum_{t=1}^T X_d(t)^2}}$$

Критичним значенням для коефіцієнта Тейла прийнято вважати 0,1, якщо розрахункове значення перевищує порогове, модель вважається непридатною.

Статистики Тейла поділяють *середньоквадратичну* помилку на три частини –  $U^M$ ;  $U^S$ ;  $U^C$ . Причому  $U^M + U^S + U^C = 1$ :

$$\text{частка зміщення: } U^m = \frac{(\overline{X_m} - \overline{X_d})^2}{\text{MSE}};$$

$$\text{частка дисперсії: } U^s = \frac{(S_m - S_d)^2}{\text{MSE}};$$

$$\text{частка коваріації: } U^c = \frac{2(1-r)S_m S_d}{\text{MSE}};$$

Можливі різні ситуації:

1. Великий зсув, на який вказують більші значення MSE і  $U^M$  – ознака систематичної помилки, яка повинна бути усунена за рахунок підгонки параметрів (див. рис. 13):

$$U^M=1, X_m=X_d+\text{const}$$

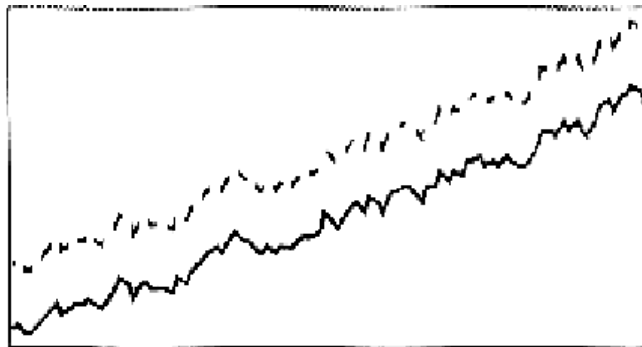


Рис. 13. Зміщення модельних і реальних даних

2. Коли  $(S_m - S_d)^2 = \text{MSE}$ , що означає  $U^S=1$ ; модельні й реальні дані мають спільну середню й сильно корельовані, але мають різні тренди (див. рис. 14):

$$X_m = \bar{X}_d + k(X_d - \bar{X}_d).$$

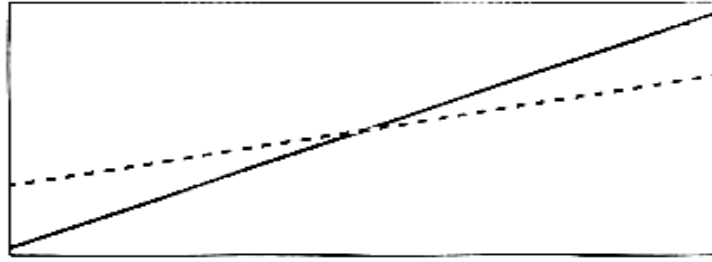


Рис. 14. Різниця трендів модельних і реальних даних

3. Ще один випадок систематичної помилки: модельні і реальні дані мають однакову фазу, але різні амплітуди, отже:  $U^S=1$ . Дану ситуації зображено на рис. 15.

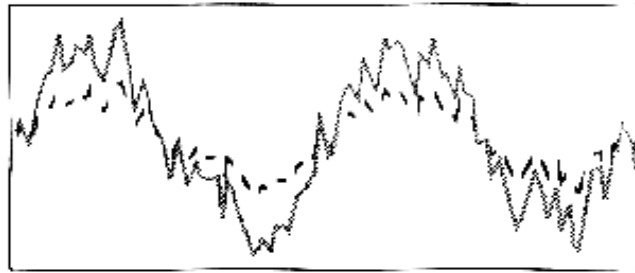


Рис. 15. Різниця амплітуд модельних і реальних даних

4. Значення модельної змінної дорівнюють середній реальних даних; реальні дані включають шум або цикли (рис. 16). Модельні і реальні дані некорельовані, оскільки дисперсія модельної змінної  $S_m = 0$ :

$$U^M=0, U^S=1, U^C=0, X_m = \bar{X}_d; X_d = \bar{X}_d + f(t).$$

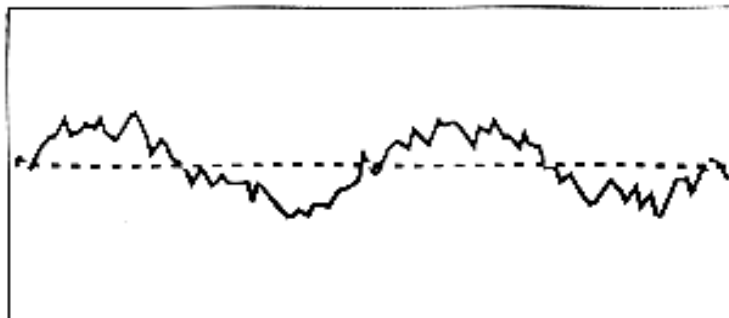


Рис. 16. Зашумленість, циклічність реальних даних

5. Модельна змінна коливається з тією ж середньою амплітудою (A) і частотою ( $\omega$ ), що й у реальних даних (середні та дисперсії рівні), але з фазовим зрушенням ( $\rho$ ) (рис. 17):

$$U^M=0; U^S=0; U^C=1;$$

$$X_d = \bar{X}_d + A \sin(\omega t);$$

$$X_m = X_d + A \sin(\omega t - \rho).$$

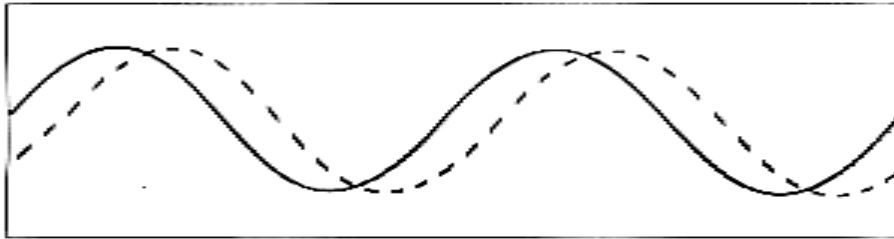


Рис. 17. Фазовий зсув модельних даних

6. Модельні і реальні дані мають однакові середні і тренди, але не збігаються по точках (див. рис. 18):

$$U^M=0; U^S=a; U^C=1-a;$$

$$X_m = f(t); X_d = f(t) + e(t).$$

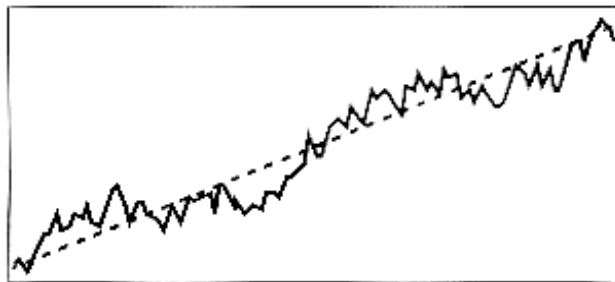


Рис. 18. Зашумленість реальних даних

Статистики Тейла допомагають охарактеризувати джерело помилки. В ідеалі помилка (відображена MAPE, RMSE та ін.) повинна бути малою і несистематичною (концентруватися в  $U^C$ ). Великі помилки і великі частки зміщення в нерівній варіації вказують на систематичні помилки і ставлять під питання припущення моделі.

#### **4. Неформальні процедури оцінки придатності імітаційних моделей**

Графічний аналіз загальних властивостей траєкторій на основі тестів Тюрінга та інших неформальних процедур заснований на ідеї залучення користувачів або експертів у даній галузі до аналізу інформації, одержуваної в результаті функціонування імітаційної моделі.

Якщо експерт має інформацію про реальну систему, тести Тюрінга можуть проводитися на основі: а) прямого порівняння або б) використання форм та звітів.

У першому випадку (а) експерт на основі інформації про реальну систему, виходи моделі, параметри управління і зовнішні умови повинен встановити, чи можна виявити розбіжності між модельним і реальним виходом системи.

У другому випадку (б) встановлюється (прогнозується) вихід реальної системи при тих значеннях екзогенних вхідних величин, на основі яких був отриманий модельний вихід. Ті й інші вихідні дані поміщаються в реальні звітні форми, які потім перемішуються. Експерту або ОПР пропонується відокремити форми, що містять реальну інформацію від тих, які заповнені даними, отриманими в ході імітації.

Під час використання подібних процедур розробник моделі повинен вирішувати, чи буде в оцінці брати участь один експерт, їх група або послідовно кілька експертів. Такі тести можуть повторюватися через певні періоди і проводитися на різних стадіях підготовки моделі.

Аналіз результатів тестування. Існує кілька способів порівняльної оцінки результатів імітації. Якщо використовується класична перевірка гіпотез, то передбачається, що експерт не може відрізнити справжні документи від отриманих у результаті імітації. У ході цього вибір справжніх форм аналогічний випадковій вибірці з кінцевого набору чисел без перестановок. Можна також припустити, що документ піддається випробуванню Бернуллі з імовірністю правильної ідентифікації, рівної 0,5. У цих випадках справедливо зауваження про те, що перевірка гіпотез надає дуже велике значення помилці відкинути придатну модель.

Альтернативним є підхід, що використовує принцип двостороннього розташування (табл. 5):

## Принцип двостороннього розташування

Документи	Документи, визначені експертом		
	як справжні	як імітовані	
Справжні	$N_{Gg}$	$N_{Gs\ s}$	$N_G$
Імітовані	$N_{Sg}$	$N_{Ss}$	$N_S$
	$N_g$	$N_s$	

де  $N_S$  – число імітованих документів;

$N_G$  – число справжніх документів;

$N_{ij}$  – число документів типу  $i$ , які експерт ідентифікував як тип  $j$ ,  $j = (S, G), (s, g)$ .

(Термін "імітовані" має на увазі реальні форми документів, заповнені даними, отриманими в результаті прогонів імітаційної моделі).

Гіпотеза про те, що імітовані і справжні документи (дані) невиразні, означає перевірку на незалежність рядків і стовпців наведеної матриці. Якщо експерту невідомо число справжніх документів, він може вважати всі документи справжніми, що призведе до відкидання гіпотези навіть за бездоганно виконаної імітації.

Для оцінки результатів тестування можуть використовуватися міра ентропії, статистичні методи розпізнавання і непараметричні підходи.

У разі використання концепції ентропії експеримент розглядається як передача інформації через подвійний симетричний канал:  $p$  – ймовірність правильної класифікації документів;  $q = 1 - p$  – ймовірність помилки.

Міра невизначеності (ентропії)  $H = -p \log_2 p - q \log_2 q$  може бути розрахована підстановкою:

$$p = \frac{N_{Ss} + N_{Gg}}{N_S + N_G};$$

$$q = \frac{N_{Sg} + N_{Gs}}{N_S + N_G}.$$

Значення  $H$ , близьке до одиниці, вказувало б на те, що експерт насилу відрізняв справжні документи від отриманих на основі імітації.

Можуть використовуватися і більш складні інформаційно-теоретичні моделі. Наприклад, можна припустити, що експерт-користувач

дійсно зможе виявити деякі з документів, отриманих на базі імітації, а решта класифікуються випадковим чином.

Нехай  $S_0$  – число імітованих документів, які експерт може з упевненістю виявити.  $S_0$  невідомо і має бути розраховане на основі даних експертизи (в ідеальному випадку  $S_0 = 0$ ).  $S_0$  входить в  $N_{Sg}$ . Число імітованих документів, які експерт не зміг відрізнити від справжніх, має гіпергеометричний розподіл:

$$P\{N_{Sg} = k | S_0 = S\} = \frac{C_{N_S - S_0}^k \cdot C_{N_G}^{N_{Sg} - k}}{C_{N_S + N_G - S_0}^{N_{Sg}}},$$

де  $k$  – значення  $N_{Sg}$  у тесті.

Слід припустити, що експерт знає число справжніх документів  $N_G$  і, отже, число імітованих документів  $N_S$ . Допускаючи, що  $S_0$  рівномірно розподілено між 0 і  $N_S$ , за теоремою Байєса буде отримано:

$$P\{S_0 = S | N_{Sg} = k\} = \frac{\binom{N_S - S_0}{k}}{\sum_{S_0} \binom{N_S - S_0}{k}} \cdot \frac{\binom{N_G + N_S - S_0}{N_{Sg}}}{\binom{N_G + N_S - S_0}{N_{Sg}}},$$

де  $(m)_t = m(m-1) \dots (m-t)$ .

При заданому вихідному значенні експертизи, тобто  $N_{Sg} = k$ , апостеріорний розподіл  $S_0$  може бути легко побудовано. Розподілу  $S_0$  відповідні різні значенням  $N_{Sg}$ , зводяться в таблицю, елементи якої відповідають ймовірності того, що експерт може визначити (без вгадування) певне число імітованих документів  $S_0$ , за умови, що  $N_{Sg}$  імітованих документів були пораховані справжніми. На підставі такої таблиці можна визначити середнє число  $E[S_0 / N_{Sg}]$  ідентифікованих з упевненістю документів, якщо результатом експерименту є конкретне число  $N_{Sg}$ , а також оцінку максимальної правдоподібності (найбільш ймовірного значення)  $S_0$  для конкретних значень  $N_{Sg}$ . Умовний розподіл  $S_0$  має різкий максимум для малих і великих значень  $N_{Sg}$ . Це дає можливість використовувати "природні" точки для розмежування гарних і поганих результатів. Чим ближче до нуля оцінка максимальної

правдоподібності, тим вища ймовірність того, що жоден з імітованих документів не був з упевненістю ідентифікований.

### **Контрольні запитання**

1. Методи верифікації моделі.
2. Валідація імітаційних моделей: види придатності, методи оцінки.
3. Реплікативна та операційна придатність.
4. Методи поточкового збігу даних.
5. Неформальні методи оцінки придатності імітаційних моделей.

Література: основна [1; 2]; додаткова [18; 20; 23].

### **Тема 7. Тестування імітаційних моделей та оцінка чутливості**

**Основний зміст і мета лекції.** Метою лекції є ознайомлення студентів із сутністю аналізу чутливості імітаційних моделей. У лекції розглянуто процедури тестування моделей та аналізу чутливості відгуків.

Інформація, викладена в лекції, надає студенту можливість сформулювати такі групи компетентностей:

здатність визначати основні фактори, обмеження та можливості, що впливають на кінцевий результат моделювання, формувати цілі та задачі імітації, ключові якісні та кількісні відгуки соціально-економічної системи;

навички щодо тестування імітаційних моделей із великою кількістю факторів, що впливають на результати моделювання;

вміння оцінювати чутливість моделей до тих чи інших змін.

#### **Основні питання, що висвітлюються в лекції:**

1. Особливості тестування системно-динамічних моделей.
2. Аналіз чутливості імітаційної моделі.
3. Показники оцінки чутливості імітаційної моделі.

#### **1. Особливості тестування системно-динамічних моделей**

Основною метою тестування моделей є стимулювання рефлексивної роботи: заохочення вивчення моделі; виявлення прихованих припущень; мотивація різних емпіричних тестів; підтримка множинних точок зору і залучення до обговорення широкої громадськості, що забезпечує зростання довіри користувачів (клієнтів) до результатів моделювання.



У системній динаміці розроблено велику кількість тестів для виявлення недоліків і упущень в моделях і подальшого їх поліпшення. Слід перелічити основні цілі тестування, принципові інструменти і методи, що використовуються в кожному з відповідних тестів.

1. *Перевірка адекватності кордону.* Метою перевірки є оцінка: відображені в моделі ідеї, пов'язані з вирішуваною проблемою, ендогенно; наскільки істотно змінюється поведінка моделі під час ослаблення припущень з приводу системного кордону; чи змінюються варіанти рекомендованої політики впливу з розширенням системного кордону.

2. *Оцінка структури:* чи узгоджується структура моделі і відповідне описово представлене знання про систему; чи правильно обраний рівень агрегування; чи не порушуються в моделі основні фізичні закони, наприклад, закон збереження енергії; чи відображають рівняння реальну поведінку агентів системи.

3. *Перевірка відповідності одиниць виміру:* чи сходяться розмірності у всіх рівняннях, без використання параметрів, які не мають реальної життєвої інтерпретації.

4. *Оцінка параметрів:* оцінка статистичної значущості параметрів з урахуванням відповідних словесно описаних і числових даних і знаннях про систему, а також перевірка того, чи всі параметри мають реальні еквіваленти.

5. *Перевірка екстремальних умов:* оцінка того, чи є кожне рівняння осмисленим у ситуації, коли його вхідні змінні приймають екстремальні значення; і чи демонструє модель правдоподібну поведінку при екстремальних політиках впливу, шоківих збурюваннях та граничних змінах параметрів.

6. *Оцінка помилки інтегрування:* з'ясування, чи чутливі результати моделювання до вибору кроку або методу чисельного інтегрування. У якості прийому тут можна використовувати скорочення тимчасового кроку, вибір різних методів інтегрування і перевірку змін у поведінці моделі.

7. *Оцінка точності відтворення поведінки:* чи відтворює модель реальну поведінку системи (якісно і кількісно)?; чи генерує вона ендогенні труднощі, що послужили мотивом для проведення дослідження?; чи генерує модель різні моделі поведінки, які спостерігаються в реальній системі?; чи відповідають частотні і фазові відносини між змінними реальним даним?

8. *Перевірка аномалій поведінки*: чи з'являється аномальна поведінка в результаті зміни або виключення припущень. Прийоми, які можуть при цьому використовуватися, включають занулення ключових причинних змінних (розмикання петель зворотного зв'язку) і заміну рівноважних припущень нерівноважними структурами.

9. *Оцінка "члена родини"*: перевірка того, чи генерує модель поведінку, характерну для подібних систем.

10. *Оцінка несподіваної поведінки*: чи генерує модель поведінку, що раніше не спостерігалася; чи успішно модель передбачає відгук системи на нові умови.

11. *Аналіз чутливості* – оцінка: *чисельної чутливості* (чи істотно змінюються числові значення); *поведінкової чутливості* (чи істотно змінюються типи поведінки, що генеруються моделлю); *чутливості політики* (чи істотно змінюються наслідки політики втручання) – коли допущення про параметри, кордони і ступені агрегування змінюються в правдоподібному діапазоні.

12. *Оцінка поліпшення функціонування системи*. Оцінюється, чи допомогла модель змінити поведінку системи на краще. При цьому *заздалегідь* повинні бути розроблені інструменти оцінки впливу моделювання на розумові моделі, поведінка і виходи системи.

## **2. Аналіз чутливості імітаційної моделі**

Аналіз чутливості імітаційної моделі розуміється як аналіз чутливості її поведінки до зміни її **параметрів, структури або стратегії** (політики втручання). Якщо поведінка моделі сильно змінюється під час зміни деякого параметра, то кажуть, що модель має високу чутливість, а даний параметр називається критичним.

З іншого боку, оскільки всі моделі в принципі неправильні, необхідно протестувати робастність (нечутливість до різних відхилень) отриманих з їх допомогою висновків стосовно невизначеності в припущеннях. У цьому випадку при аналізі чутливості ставлять питання, чи змінюються висновки, зроблені за моделлю, в істотній для поставленої мети мірою, коли допущення змінюються в правдоподібному діапазоні невизначеності.

Виділяють три типи чутливості: чисельну; моделі (типу) поведінки; політики.

- **Чисельна чутливість** має місце, коли зміни в припущеннях змінюють чисельні значення результуючих величин. Наприклад, зміна

сили зворотного зв'язку, що відображає усний обмін інформацією в моделі дифузії інновацій, змінить темп зростання випуску нового продукту. Всі моделі демонструють чисельну чутливість.

- **Чутливість моделі поведінки** має місце, коли зміна припущень змінює зразок поведінки, генерований моделлю. Наприклад, якщо правдоподібні альтернативні допущення змінюють поведінку моделі від стійкої рівноваги до осцилюючого зростання, або від телеологічної траєкторії до експоненційного зростання, кажуть, що модель демонструє чутливість типів поведінки (тимчасових траєкторій).

- **Чутливість політики.** Має місце, коли зміна припущень змінює бажаність пропонованої стратегії (політики втручання). Якщо зниження цін призводить до зростання частки ринку та прибутковості при одному наборі припущень, але веде до руйнівних цінових війн і банкрутства при іншому наборі припущень, модель буде демонструвати чутливість політики.

В економічних і соціальних моделях систем людської діяльності чисельна чутливість може мати вкрай мале значення або взагалі його не мати. Одним із принципів системної динаміки є те, що структура системи та характер взаємозв'язків між елементами системи, що визначають її поведінку, більш важливі для розуміння поведінки системи, ніж кількісні оцінки. Так, метою більшості моделей ділової активності є не прогноз, коли настане чергова різка криза продажів, а перепроєктування ланцюга поставки з тим, щоб стабілізувати продаж; НЕ передбачити, який прибуток буде в наступному кварталі, а спроектувати політику, що допомагає фірмі стати прибутковою. Для більшості цілей моделювання значущою є чутливість типу поведінки й, особливо, чутливість політики. Однак визначення чисельної чутливості є основним етапом оцінки чутливості взагалі, а тому має бути проведено в рамках будь-якого дослідження. Необхідно також відзначити, що воно є важливим етапом експериментування взагалі і використовується на попередніх етапах побудови регресійних залежностей функцій відгуку від факторів або використовується з метою оптимізації функції відгуку.

Види аналізу чутливості:

- I. Одним із стандартних методів аналізу чисельної чутливості є завдання сценаріїв кращого і гіршого випадків. У найкращому (найгіршому) варіанті сценарію значення всіх параметрів і співвідношень встановлюються на рівні найбільш (найменш) сприятливому для оцінюваної вихідної змінної (відгуку) або стратегії.

Аналіз чутливості – це, перш за все, експеримент із зміною факторів по одному, який полягає в тому, що послідовно змінюється на всьому проміжку значень лише один з факторів, а інші залишаються незмінними. Такий план експерименту забезпечує дослідження чисельного впливу окремо кожного фактора на відгук. Він потребує  $N = l_1 + l_2 + \dots + l_k$  одиночних експериментів, де  $l_j$  – кількість рівнів  $j$ -го фактора. Цей спосіб варто використовувати, якщо відомо, що в модельному експерименті є особливості, які можна виявити в регулярній послідовності. Вибір інтервалів між сусідніми значеннями здійснюється з урахуванням вимог балансу точності.

Такого роду експерименти використовуються для визначення чутливості відгуку за окремими факторами, визначення тих з них, вплив яких найбільший, і наступного ранжирування факторів.

Крім завдання сценаріїв кращого і гіршого випадків, є ряд інших підходів до аналізу чутливості.

II. Так, імітація за методом Монте-Карло дозволяє генерувати динамічні довірчі інтервали для траєкторій змінних моделі. Якщо є допущення про розподіл варійованих параметрів, можна встановити ймовірність, із якою відгук буде перебувати в межах визначених інтервалів.

III. Інший метод – автоматизований нелінійний тест. АНТ націлений на пошук значень параметрів, які генерують аномальні результати. Він схожий на оптимізацію стратегії, коли розробник моделі задає цільову функцію, наприклад, максимізує поточний прибуток фірми, і вибирає набір інструментів стратегії, таких як правила вироблення цінових рішень, витрати на маркетинг і планування потужності, після чого програмне забезпечення дозволяє знайти набір параметрів, що оптимізують значення цільової функції. Але в АНТ-аналізі розробник задає таку цільову функцію, яка б дозволила виявити нереалістичну поведінку.

### **3. Показники оцінки чутливості імітаційної моделі**

Одна з найбільш поширених процедур оцінки чутливості моделі полягає в наступному.

1. Обчислюється величина відносного приросту за фактором  $x_k$ :

$$\delta x_k = \frac{x_k^{\max} - x_k^{\min}}{x_k^{\max} + x_k^{\min}} \cdot 100\% .$$

2. Проводиться пара модельних експериментів при максимальному і мінімальному значенні обраного чинника і середніх фіксованих значеннях інших факторів (параметрів моделі). Отримують значення відгуків моделі:  $y_k^* = f(x_k^{\max})$ ,  $y_{*k} = f(x_k^{\min})$ .

3. Обчислюється відносний приріст спостережаної змінної відгуку моделі:

$$\delta y_k = \frac{2 \cdot |y_k^* - y_{*k}|}{y_k^* + y_{*k}} \cdot 100\% .$$

Пара значень  $(\delta x_k, \delta y)$  характеризує чутливість моделі по k-му параметру. Якщо  $\delta x_k$  рівні для всіх факторів, то здійснюється просте порівняння. Модель є більш чутливою до тих факторів, для яких вище значення  $\delta y$ . В іншому випадку для порівняння беруть співвідношення  $\frac{\delta y_k}{\delta x_k}$ . Чим більше це співвідношення для відповідного фактора, тим більш чутлива до нього модель.

Під час аналізу чутливості моделей, які є стохастичними і задаються за допомогою своїх законів розподілення у програмі імітаційної моделі, аналізують залежність відгуку від параметрів закону розподілу. У ході цього обов'язковим є усереднення відгуку за результатами декількох прогонів із різним набором випадкових значень.

Аналіз чутливості відгуку щодо випадково розподіленої величини здійснюється таким чином. Встановлюється верхня/нижня межа для середнього значення, проводиться серія експериментів із різною комбінацією псевдовипадкових чисел для мінімального значення середнього (рекомендоване число – 10). Результат експериментування (тобто значення змінної відгуку) становить математичне очікування змінної відгуку за всіма експериментами. Потім проводиться експериментування для верхньої межі математичного очікування. Для деяких законів також перевіряється чутливість моделі стосовно дисперсії за тим же принципом.

Потім розраховуються відносні прирости факторів і відгуків, фактори ранжуються за силою впливу на відгук.

### **Контрольні запитання**

1. Поняття про аналіз чутливості.
2. Основні цілі тестування, принципові інструменти і методи.
3. Чисельна чутливість імітаційної моделі.

4. Чутливість моделі (типу) поведінки та політики.
  5. Основні показники аналізу чутливості імітаційної моделі.
  6. Відгуки імітаційної моделі.
  7. Процедура аналізу чутливості імітаційної моделі.
- Література: основна [1; 2]; додаткова [18; 20; 23].

## **Тема 8. Планування імітаційних експериментів у процесі дослідження та оптимізації систем**

**Основний зміст і мета лекції.** Метою лекції є ознайомлення студентів із плануванням імітаційних експериментів у процесі дослідження та оптимізації систем. У лекції розглянуто основні проблеми планування машинних експериментів, повні та неповні плани факторних експериментів, побудови оцінки зв'язку відгуку та факторів, вивчення поверхні реакції; методи пошуку екстремуму функції відгуку.

Інформація, викладена в лекції, надає студенту можливість сформулювати такі групи компетентностей:

уміння формувати цілі та задачі імітаційних експериментів із моделями систем;

здатність до розробки планів імітаційних експериментів за умови зниження трудових та фінансових витрат;

здатність до узагальнення результатів імітаційних експериментів; розробки пропозицій щодо удосконалення об'єкта імітаційного моделювання, що розглядається.

### **Основні питання, що висвітлюються в лекції:**

1. Принципи та проблеми планування експерименту.
2. Схеми планування експерименту. Повний та неповний факторний експеримент.
3. Планування імітаційних експериментів у процесі дослідження та оптимізації систем.
4. Оцінка моделі зв'язку відгуку та факторів. Вивчення поверхні реакції.
5. Пошук екстремуму функції відгуку.
6. Метод Бокса – Уілсона пошуку екстремуму функції відгуку.

### **1. Принципи та проблеми планування експерименту**

Як вже було відмічено раніше, з визначення імітації випливає, що імітація – це експеримент. У імітаційному експерименті особливе значення приділяється плануванню експерименту.

Під плануванням експерименту розуміється проектування процесу використання моделі з метою отримання необхідної інформації за мінімальне число її випробувань (прогонів).

Таким чином, планування переслідує дві основні мети:

- 1) скорочення загального обсягу прогонів (дослідів, випробувань) при збереженні вимог до достовірності і точності оцінок;
- 2) підвищення інформативності кожного з експериментів.

Експериментом називається серія цілеспрямованих дослідів, яка дозволяє отримати оцінку досліджуваної характеристики.

З точки зору планування експерименту важливий поділ змінних на *екзогенні* (керовані і некеровані) й *ендогенні* (змінні стану і модельний відгук або реакція).

Екзогенні змінні називаються керованими, якщо рівні цілеспрямовано вибираються експериментатором (у його якості в економічних дослідженнях часто виступає ОПР). Приклад керованих екзогенних змінних із точки зору моделювання діяльності фірми: стратегія управління запасами, план випуску тощо; некерованих: війни, катастрофи, політика.

Також важливий поділ екзогенних змінних на кількісні, якщо його рівні є числами, що впливають на реакцію; і якісними – в іншому випадку.

Пошук плану експерименту проводиться в так званому *факторному просторі*.

*Факторний простір* – це безліч зовнішніх і внутрішніх параметрів моделі, значення яких дослідник може контролювати або задавати під час підготовки та проведення модельного експерименту. Саме екзогенні керовані змінні виступають в експерименті в якості кількісних факторів. Поділ змінних на фактори і відгуки варто обговорити. Все залежить від того, вплив чого на що необхідно встановити, що варто досліджувати. Тут необхідно чітко визначитися, де фактори, а де реакція (відгук моделі). До того ж, факторів і реакцій може бути багато.

*Рівень фактора* – це чисельне значення величини фактора в експерименті. Якщо під час проведення експерименту дослідник може змінювати рівні факторів, такий експеримент називається *активним*, а інакше – *пасивним*.

Кількісні рівні факторів можуть бути:

- фіксованими (жорстка модель експерименту);
- випадковими (імовірнісна модель);
- змішаними.

Комп'ютерний імітаційний експеримент може проводитися і з *якісними* факторами – гіпотезами, які передбачають якісну *модифікацію* моделі. Якісні фактори зазвичай мають на увазі зміну структури досліджуваної системи, а, отже, і моделі. Це може бути система нарахування відсотків, стратегія управління запасами і т. д. Однак якісні фактори також іноді можуть виражатися кількісними дискретними змінними, наприклад, булевими (підприємство платить або не платить певний податок – 1 або 0; планує або не планує певний вид продукції по номенклатурі).

Фактори володіють *ефектом взаємодії*, тобто комбінованого впливу на відгук.

*Мета експерименту включає :*

- побудову регресійної моделі (рівняння зв'язку відгуку і факторів). Форма зв'язку (порядок взаємодій, ступінь нелінійності) визначає мінімально необхідну кількість експериментів для отримання некорельованих оцінок параметрів рівняння регресії;
- оптимізацію функції відгуку – визначення поєднання значень факторів, що забезпечує екстремальне (max, min) значення відгуку.

Слід розібрати поняття функції відгуку. Якщо  $X = (X_1, X_2, \dots, X_K)$  – екзогенні керовані змінні, а  $Z = (Z_1, Z_2, \dots, Z_M)$  – екзогенні неконтрольовані змінні, які є випадковими величинами в загальному випадку, то вихід моделі є функція  $y = f(X, Z)$ , причому  $y$  – також випадкова величина.

У більшості випадків вихідна змінна  $y$  є *одномірною випадковою величиною*. Однак існують ситуації, коли модель виражена декількома відгуками або реакціями, як, наприклад, у лабораторній роботі з аналізу чутливості.

*Одновимірною функцією відгуку* або просто *функцією відгуку* називають умовне математичне очікування  $\mu = M(y/X)$ . Як уже зазначалося, застосовується спосіб усереднення значення відгуків за всіма запусками при певних значеннях факторів для різних неконтрольованих змінних  $Z = (Z_1, Z_2, \dots, Z_M)$ . Зазвичай для отримання різних рядів  $Z$  застосовуються різні джерела випадковості.

Безліч точок  $(X_1, X_2, \dots, X_K, \mu)$  називають *поверхнею відгуку*.

Для моделей системної динаміки ефективні всі розроблені методи планування та обробки результатів експериментів: *факторний і неповний факторний аналіз* (із подальшим *регресійним і дисперсійним аналізом* результатів) – для стохастичних і детермінованих моделей,



генеруючих точку; і *спектральний аналіз* – для моделей, генеруючих часовий ряд.

Проблеми планування експерименту:

- *Проблема великої кількості факторів*

Як правило, в економічних дослідженнях кількість керованих факторів у загальному випадку є значним (хоча і варіюється залежно від конкретної проблеми). *Обхід труднощів* – у зменшенні факторів або модельному агрегуванні факторів (наприклад, випуск по цехах об'єднується в загальний, а потім вже розбивається). Дана проблема автоматично породжує наступну проблему.

- *Проблема обсягу вибірки*

Полягає в тому, що для отримання даних за всіма чинниками необхідний великий обсяг повторень машинного експерименту в діалоговому режимі, тобто за участю людини. Так, якщо чинників всього 4, і кожний може приймати тільки 3 значення – це вже  $3^4$  прогонів імітаційної моделі, тобто 81 експеримент у діалоговому режимі. Обхід труднощів у використанні неповних факторних експериментів.

- *Проблема багатокомпонентної функції відгуку*

Виникає досить часто саме з моделями економічних систем. Полягає в необхідності експериментального вивчення відразу кількох різних змінних реакцій. Уникнути труднощів можна, розглядаючи експеримент із кількома відгуками як багато експериментів, у кожному з яких досліджується тільки одна реакція.

- *Проблема нелінійності*

Полягає в тому, що зв'язки між факторами і відгуком, тобто поверхня реакції, характеризується сильною нелінійністю. Нелінійність оточує нас усюди. У тому числі і в економіці. Особливо важливим є те, що нелінійність буває більш високих, наприклад, ніж 2, порядків. Встановити такі залежності дуже складно. Особливо проблемними є такі залежності, які описуються поліномами – показують хорошу апроксимацію ретроспективних даних, але в майбутньому поводитья дуже нестабільно – мають погані прогностичні властивості (приклад траєкторії, яка ідеально описана поліномом, але не має тенденції).

- *Проблема збіжності*

Чисельні методи не завжди сходяться до екстремуму, до того ж досить складно це перевірити. Ця проблема має суто математичний сенс: досить часто не існує аналітичних способів довести збіжність

методів до певної точки-екстремуму (метод може призвести експериментатора до локального екстремуму, а не до глобального). Приклад з областю реакції.

- *Проблема оптимізації при нелінійних обмеженнях*

Оптимізація при обмеженнях (умовна) в принципі є досить великою проблемою чисельних методів, виключаючи випадок лінійності і обмежень, і цільової функції. Зазвичай знімається за допомогою прямої перевірки умов, перетворення Лагранжа і т. д. Однак у загальному сенсі досить слабо вивчена. У кожному конкретному методі застосовуються свої підходи.

- *Проблема стохастичності*

Наявність випадкових чинників значно ускладнює процес і значно підвищує число експериментів з метою усереднення значення відгуку за всіма експериментами, як було відмічено раніше. Також погіршує збіжність методів оптимізації.

## **2. Схеми планування експерименту. Повний та неповний факторний експеримент**

*Схема планування експерименту* включає:

1. Визначення числа і складу факторів (кількісних і якісних).
2. Визначення числа рівнів факторів: для якісних факторів вибирають всі рівні, для кількісних – мінімальне число точок, здатних повторити вигляд кривої відгуку).
3. Число повторних прогонів у кожній точці і тривалість кожного прогону моделі – зазвичай у випадку, якщо модель є стохастичною (з урахуванням наявності критичної події).

Для дослідження впливу факторів імітаційної моделі на відгук можна використовувати кілька типів планів проведення імітаційних експериментів, що дозволяють вивчити внутрішній механізми системи.

### *1. Повний факторний експеримент*

Нехай є функція відгуку  $\mu = f(x_1, \dots, X_K)$ , і план експерименту, заданий у вигляді матриці  $D = \{X_{ij}\}, (i=1, \dots, N; j=1, \dots, K)$ ,  $X_{ij}$  – рівень  $j$ -го фактора в  $i$ -му досвіді (експерименті). Число рівнів фактора  $X_j$  позначити  $S_j$ .

Експеримент, у якому рівні кожного фактора комбінуються з усіма рівнями інших факторів, тобто реалізуються всі можливі поєднання, називають *повним факторним експериментом (ПФЕ)*. Число різних

точок або дослідів у такому експерименті одне  $N = S_1 \times S_2 \times \dots \times S_k$  (декартовий добуток числа рівнів факторів).

План називається *симетричним*, якщо всі фактори мають однакове число рівнів, тобто  $S_1 = S_2 = \dots = S_k$ .

Будь-який повний факторний симетричний експеримент позначається таким чином: ПФЕ  $S^k$ , де  $S$  – кількість рівнів, а  $k$  – число факторів.

Недоліком ПФЕ є те, що із зростанням кількості факторів або рівнів, кількість експериментів зростає дуже швидко. Так для двох чинників із двома рівнями потрібно лише 4 одиночних експерименти, а для трьох факторів з чотирма рівнями – вже  $4^3 = 64$ . Якщо у ході цього кожен із них триває хоча б одну хвилину (з урахуванням часу, необхідного на зміну значень параметрів), то одноразова реалізація ПФЕ потребує більше часу, ніж годину.

Отже, використання ПФЕ доцільно лише в тому випадку, коли кількість факторів і рівнів невелика, й необхідно досліджувати їх взаємний вплив.

## 2. Неповний факторний експеримент

Якщо проведення повного факторного експерименту неможливо, застосовують дробовий факторний експеримент (ДФЕ). План (а також експеримент) називається *неповним*, якщо число різних точок плану (дослідів)  $N < S_1 \times S_2 \times \dots \times S_k$ .

Існує досить багато методів формування неповних планів:

а) *рендомізований план* передбачає вибір поєднань рівнів для кожного прогону випадковим чином. У ході використання цього методу відправною точкою у формуванні плану є кількість експериментів, які дослідник вважає за необхідне провести;

б) *латинський план (або латинський квадрат)* використовується в тому випадку, коли проводиться експеримент з одним первинним чинником і декількома вторинними. Сутність такого планування полягає в такому. Якщо первинний фактор  $A$  має  $S$  рівнів, то для кожного вторинного фактора також обирається  $S$  рівнів. Вибір комбінації рівнів факторів виконується на основі спеціальної процедури.

Нехай у експерименті використовується первинний фактор  $A$  і два вторинних фактори  $B$  і  $C$ , кількість рівнів фактора  $A$  дорівнює 4. Відповідний латинський план можна представити таблицею розміром  $S \cdot S(4 \cdot 4)$ , складеною з рівнів фактора  $A$ . При цьому матриця будується так, щоб у кожному рядку і в кожному стовпці всі рівні фактора

А зустрічалися один раз. Приклад такого квадрата показано в табл. 6. У такому випадку експеримент вимагає лише  $4 - 4 = 16$  одиночних експериментів на відміну від повного факторного експерименту, який вимагав би  $4^3 = 64$  прогони.

Таблиця 6

**Приклад латинського плану**

Значення фактора В	Значення фактора С			
	З 1	З 2	С3	З 4
В 1	А 1	А 2	А3	А 4
У 2	А 2	А3	А 4	А 1
В3	А3	А 4	А 1	А 2
В 4	А 4	А 1	А 2	А 3

в) експеримент зі зміною факторів по одному полягає в тому, що послідовно змінюється по всьому проміжку значень лише один із факторів, а інші залишаються незмінними. Такий план забезпечує дослідження впливу окремо кожного фактора. Він потребує  $N = S_1 + S_2 + \dots + S_k$  одиночних експериментів. Так, для розглянутого прикладу їх кількість становить  $4 + 4 + 4 = 12$ . Цей спосіб варто використовувати, якщо відомо, що в модельному експерименті є особливості, які можна виявити в регулярній послідовності або для *аналізу чутливості*;

г) *дрібний факторний експеримент*. Поняття дрібного факторного експерименту (напіврепліки) пов'язане не просто зі скороченням числа експерименту, а нівелюванням тих ефектів, які є нульовими або передбачаються такими. Що це означає? Що поєднання одночасної зміни декількох факторів само по собі не має впливу на відгук, а лише кожен фактор має такий вплив. Ця ситуація виникає саме у ході побудови регресійної моделі відгуку від факторів.

Якщо допустити, що деякі ефекти в плані ПФЕ є нульовими, то для побудови регресійної моделі знадобиться значно менше дослідів, отже, ПФЕ є надлишковим. Щоб зробити вибір прогонів, необхідно знати, до яких наслідків призведе відкидання деяких із них, використовуючи так звані напіврепліки. Кожна напіврепліка відрізняється від ПФЕ тим, що по одному фактору з плану ПФЕ відкидаються ті сполуки, в яких цей фактор приймає одне значення (наприклад, 0). Потім формується друга напіврепліка, в якій відкидаються з'єднання, де за тим же фактором береться інше значення.

Інакше кажучи, дробовий план формується з, наприклад,  $k-1$  чинників, а потім необхідно з'ясувати, чи потрібні ефекти  $k$ -ї взаємодії, якщо ні, просто перебираються всі значення  $k$ -го фактора для побудованого числа експериментів. Відкидається ще по одному набору даних ( $k$  планів) для різних значень  $k$ -го фактора, щоб подивитися взаємодії типу "всі з усіма". Це називається напіврепліки (ступінь  $k-1$  замість  $k$ );

д) *інші варіанти планів*. Наприклад, план Боксу, що виключає вплив основних значень усіх рівнів. Також у плануванні експериментів використовуються роторабельні плани (для оцінки параметрів регресійної моделі більш високих ступенів), аналіз поверхні відгуку системи, плани групового відсіювання.

### **3. Планування імітаційних експериментів у процесі дослідження та оптимізації систем**

Існує два основних варіанти постановки задачі планування імітаційного експерименту:

1) стратегічне планування – з усіх допустимих вибрати такий план, який дозволив би отримати найбільш достовірні значення функції відгуку за умови фіксованої кількості випробувань;

2) тактичне планування – знайти такий допустимий план, за якого статистична оцінка функції відгуку може бути отримана із заданою точністю за мінімальної кількості випробувань (прогонів).

У процесі стратегічного планування експериментів необхідно вирішити 2 завдання:

- 1) ідентифікацію факторів;
- 2) вибір рівнів факторів.

1. Під ідентифікацією факторів слід розуміти їх ранжування за ступенем впливу на значення змінної спостереження. За результатами ідентифікації всі фактори доцільно розділити на первинні і вторинні. Первинні – це ті чинники, в дослідженні впливу яких експериментатор зацікавлений безпосередньо. Вторинні фактори – це фактори, які мають вплив, але не є предметом дослідження.

У принципі, ідентифікація факторів проводиться на підставі *аналізу чутливості* моделі. Однак аналіз чутливості – це форма тестування самої моделі, тому вона дає лише первинні фактори безвідносно до їх важливості для модельєра. Тому безліч проранжованих факторів часто зменшують до безлічі вторинних факторів, які і є предметом дослідження.

2. Вибір рівнів факторів проводиться з урахуванням двох протилежних вимог: рівні повинні заповнювати весь можливий діапазон його зміни; загальна кількість рівнів за всіма факторами не повинна призводити до надлишкового числа повторень машинних експериментів. Пошук компромісного рішення, яке задовольнить цим вимогам, є завданням стратегічного планування.

Одним із зручних способів вибору експериментальних точок є такий. Рівні факторів в експерименті беруть симетрично щодо основного рівня. Дослідник може мати різну апріорну інформацію про область можливих значень факторів. Якщо у дослідника є інформація лише про одну точку і немає інформації про межі зміни факторів, то слід взяти цю точку в якості основного рівня. Якщо межі зміни факторів відомі досліднику, то в якості основного рівня можна обрати якусь точку факторного простору. Досить часто використовується 2 рівня (максимум або мінімум) або 3 (основний, максимум і мінімум), але буває і більше. Для встановлення крайніх значень вибирають інтервал варіювання. Інтервал варіювання не може бути менше похибки фіксації рівнів, але не може бути і занадто великим, щоб рівні факторів не опинилися за межами області їх існування. Одним із основних факторів, що впливають на вибір інтервалу варіювання є результати аналізу чутливості відгуку моделі до зміни її вихідних параметрів.

#### **4. Оцінка моделі зв'язку відгуку та факторів. Вивчення поверхні реакції**

Слід розглянути, як розраховуються параметри моделей зв'язку відгуку і факторів за ПФЕ і ДФЕ.

Для того, щоб зручніше було записати план експерименту в ситуації, коли він відрізняється від повного, використовують *кодування змінних*. Так досягається зручне представлення і порівняння планів різної модифікації.

Якщо  $S_j = 2$ , під час вимірюванні функції відгуку фактор  $X_j$  варіюється на двох рівнях, тобто приймає значення  $X_j^2$  (верхній рівень) і  $X_j^1$  (нижній рівень):  $X_j^2 > X_j^1$ . Для формального запису плану експерименту проводиться кодування змінних:

$x_j = (X_j - X_j^0) / d_j, j = 1, \dots, K$  (в якості  $X_j$  виступають крайні значення; вже кодовані змінні позначаються як  $X_j$ );

$X_j^0 = (X_j^1 + X_j^2) / 2, j = 1, \dots, K$  ( $X_j^0$  – основний рівень);

$d_j = (X_j^2 - X_j^1) / 2, j = 1, \dots, K$  ( $d_j$  – інтервал варіювання).

Кодовані змінні  $X_j$  приймають значення  $\pm 1$ .

Слід розглянути приклад **ПФЕ 2<sup>2</sup>**, побудований для встановлення зв'язку між відгуком і факторами, тобто побудови регресійної моделі.

Варто розглянути випадок, коли  $K = 2$  і:

$$\mu = f(x_1, x_2) = \beta_0 + \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + \beta_{12} x_1 x_2.$$

Якщо в кожному варіанті випробувань здійснюється по одному спостереженню, то ми маємо справу з ПФЕ 2<sup>2</sup>. Формально його можна задати:

- у вигляді матриці плану D;
- графічно;
- у вигляді коду плану: (1), a, b, ab.

Найбільш зручним у даному випадку і популярним у принципі є завдання плану у вигляді матриці.

Матриця плану експерименту:

$$D = \begin{array}{cc} -1 & -1 & \rightarrow y_1 \\ 1 & -1 & \rightarrow y_2 \\ -1 & 1 & \rightarrow y_3 \\ 1 & 1 & \rightarrow y_4 \end{array}$$

План належить до так званих ортогональних планів, оскільки виконується умова:

$$\sum_{i=1}^L x_{i1} x_{i2} = 0,$$

де  $L$  – число точок плану (число рядків матриці), що істотно спрощує розрахунки під час побудови регресійних залежностей.

Записати, який вид матимуть кодовані змінні  $x_j$  при відповідних коефіцієнтах:

$$X = \begin{array}{cccc} x_0 & x_1 & x_2 & x_1 x_2 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{array}$$

Некорельовані оцінки коефіцієнтів  $\hat{\beta}_j$  розраховуються за формулами:  $\hat{\beta}_j = 1/4 (\sum_{i=1}^4 x_{ij} y_i)$  (включаючи  $\beta_0$  і  $\beta_{12}$ ).

Після розрахунку відповідних оцінок записується початкова модель з вихідними змінними, таким чином, здійснюється побудова рівняння регресії.

Будь-який неповний факторний експеримент позначається таким чином:

$$\text{ДФЭ } S^{k-m},$$

де  $S$  – кількість рівнів;

$K$  – число факторів;

$m$  – порядок дроблень (напіврепліки).

Слід показати на прикладі. Нехай функція відгуку має вигляд:

$$\mu = \beta_0 + \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + \beta_3 x_3.$$

Тут ефекти парних і потрійної взаємодій відсутні, тобто:

$\beta_{12} = \beta_{13} = \beta_{23} = \beta_{123} = 0$  (враховується тільки вплив окремо кожної змінної і не враховується їхній спільний вплив, тобто вважається чи відомо з яких-небудь достовірних даних, що воно відсутнє).

Якщо для оцінювання використовувати ПФЕ  $2^3$ , число дослідів буде дорівнювати 8. Однак, через відсутність ефектів взаємодії число дослідів можна зменшити.

Слід розглянути, таким чином, план дрібного факторного експерименту: ДФЕ  $2^{3-1}$ .

Розглянути план із матрицею D:

$$D = \begin{matrix} & -1 & -1 & 1 \\ & 1 & -1 & -1 \\ & -1 & 1 & -1 \\ & 1 & 1 & 1 \end{matrix}$$

Властивості матриці D – такі ж, що й у матриці ПФЕ  $2^3$ :

$$\sum_{i=1}^4 x_{ij} = 0, j = 1, 2, 3;$$

$$\sum_{i=1}^4 x_{ij} x_{ik} = 0, j, k = 1, 2, 3; i \neq j;$$

$$\sum_{i=1}^4 x_{ij}^2 = N, j = 1, 2, 3.$$



Отриманий план ДФЕ становить *напіврепліки* або  $\frac{1}{2}$  репліки (частина) від ПФЕ  $2^3$ . Для її запису використовується позначення  $2^{3-1}$ , де 2 – число рівнів, 3 – число факторів (змінних),  $N = 2^{3-1}$  – число дослідів. Якщо пишеться мінус 1 – напіврепліки, мінус 2 – чверть репліки, мінус 3 – одна восьма репліки і т. д.

Варто розглянути поняття *генеруючого співвідношення*. Як видно з матриці D, змінна  $x_3$  в точках плану задовольняє умові  $x_3 = x_1 x_2$ . Це співвідношення називається генеруючим, тобто таким, що використовується для "добудування" матриці плану експерименту нижчого порядку (з меншим числом факторів) до напіврепліки з великим числом факторів).

Спосіб побудови напіврепліки  $2^{3-1}$ : формується матриця плану ПФЕ  $2^2$ , а потім за допомогою генеруючого співвідношення будується вектор-стовпець значень  $x_3$  у дослідях. Ще одна напіврепліка  $2^{3-1}$  може бути побудована за допомогою генеруючого співвідношення  $x_3 = -x_1 x_2$ . Інших напівреплік  $2^{3-1}$  не існує.

Оцінка параметрів напіврепліки. Після побудови розширеної матриці X МНК – оцінки параметрів знаходяться за формулами:

$$\hat{\beta}_j = \frac{1}{4} \left( \sum_{i=1}^4 x_{ij} y_i \right), \quad j = 0, \dots, 3$$

#### Чверть-репліки

Поряд із дробовим факторним планом  $2^{k-1}$  використовуються ДФП  $2^{kq}$ ,  $q > 1$ . ДФП  $2^{k-2}$  називається чверть-реплікою (1/4-реплікою) від ПФЕ  $2^k$ . Для її побудови використовуються два генеруючих співвідношення. Наприклад, генеруючими співвідношеннями для побудови дробової репліки  $2^{5-2}$  можуть бути:

- 1)  $x_4 = x_1 x_2 \quad x_5 = x_1 x_2 x_3$ ,
- 2)  $x_4 = x_1 x_2 \quad x_5 = -x_1 x_2 x_3$ ,
- 3)  $x_4 = -x_1 x_2 \quad x_5 = -x_1 x_2 x_3$ ,
- 4)  $x_4 = x_1 x_3 \quad x_5 = x_1 x_2 x_3$

тощо. Всього можна побудувати 24 дробові репліки  $2^{5-2}$ .

### 5. Пошук екстремуму функції відгуку

Одним із найбільш відомих методів пошуку екстремуму функції відгуку є метод Бокса – Уїлсона (1951), ідея якого полягає у використанні методу крутого сходження в поєднанні з послідовно планованим факторним експериментом для знаходження оцінки градієнта.

Ідея методу Бокса – Уїлсона полягає в такому.

1. Вважаючи, що функція відгуку  $\mu = f(X_1, \dots, X_k)$  унімодальна, в області  $G \subset E^K$  вибирають початкову точку пошуку максимуму –  $X^0 = (X_1^0, X_2^0, \dots, X_k^0)$ .

2. Задаючи інтервали варіювання, переходять до кодованих змінних  $x_j$ . Функція відгуку тоді може бути записана як  $\mu = f_1(x_1, \dots, x_k)$ . На перших кроках пошуку використовується лінійне наближення, тобто:

$$f_1(x_1, \dots, x_k) = \beta_0 + \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + \dots + \beta_k x_k.$$

3. В околиці точки  $x^0$  будується план факторного експерименту з матрицею  $D = \{x_{ij}\}$ , ( $i=1, \dots, N$  (число точок);  $j = 1, \dots, K$ ).

4. За результатами експерименту знаходяться оцінки параметрів функції  $f_1$ , обчислюють її значення.

5. На підставі отриманої функції виконується оцінка градієнта (приватні похідні за кожним фактором)  $(x_1^0, \dots, x_k^0)$ :  $\hat{\nabla} f_1(x_1^0, \dots, x_k^0)$ .

6. Для пошуку максимуму проводиться крок з точки  $x^0$  у напрямку оцінки градієнта:  $x_j^1 = x_j^0 + \alpha_j^1 \hat{\nabla} f_1(x^0)$  ( $J = 1, \dots, K$ ), де  $\alpha_j^1$  параметр кроку для кожного фактора (так виходить нова точка  $x^1 = (x_1^1, \dots, x_k^1)$ ).

7. У точці  $x^1$  (або  $X^1$ ) виконуються спостереження за функцією відгуку при різних значеннях стохастичних елементів  $y_1^1, \dots, y_N^1$  і обчислюється оцінка функції відгуку  $\hat{\mu}^1 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n y_j^1$ .

8. Якщо оцінка істотно більше оцінки в точці  $x^0$ , то збільшується параметр кроку і виробляється новий крок у напрямку оцінки градієнта.

9. Нехай  $x^t$  – перша точка, для якої має місце нерівність:  $\mu^t < \mu^{t-1}$ , причому  $\hat{\mu}_0^{t-1} > \hat{\mu}_0^{t-2} > \dots > \hat{\mu}_0^1$  (тобто всі інші були краще, а ця менше). Тоді  $\hat{\mu}^{t-1}$  приймають за оцінку максимуму функції відгуку  $f_1(x_1, \dots, x_k)$  при русі в напрямку градієнта і повертаються в точку  $x^{t-1}$ . Для цієї точки відновлюються натуральні координати  $X_j^{t-1}$ .

10. Точка  $X^{T-1}$  позначається через  $X^1$  і в її околиці будується факторний план і проводиться кодування змінних аналогічно тому, як це робилося для точки  $X^0$ .

11. Записується нова функція відгуку (раніше лінійна):

$$\mu = f_2(x_1, \dots, x_k) = \beta_0^1 + \sum_j \beta_j^1 x_j, j = 1, \dots, K.$$

12. Далі знаходиться нова оцінка градієнта і повторюється весь цикл пошуку максимуму функції відгуку  $f_2(x_1, \dots, x_k)$  у напрямку оцінки градієнта в новій системі координат і т. д. (рис. 18).

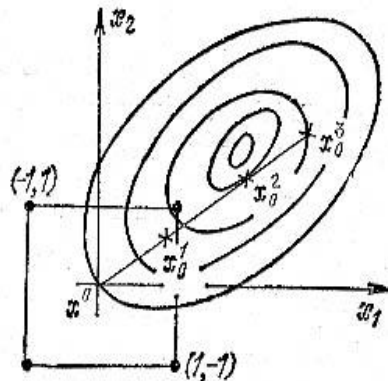


Рис. 18. Ідея методу Бокса – Уілсона

## 6. Метод Бокса – Уілсона пошуку екстремуму функції відгуку

Алгоритм пошуку екстремуму функції відгуку та попередньої побудови рівняння зв'язку відгуку і факторів за планом Боксу такий:

1. Слід припустити, що число факторів дорівнює 2, у ході пошуку екстремуму використовувалося лінійне наближення поверхні відгуку:

$\mu = \beta_0 + \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2$  і план експерименту під час оцінки градієнта в деякій точці становив ПФЕ  $3^2$ .

2. Слід припустити, що у ході перевірки гіпотези адекватності моделі лінійне наближення виявилось недостатнім, і пробний крок у напрямку оцінки градієнта з центру плану також не дав приросту функції відгуку. Вважаючи, що область екстремуму досягнута, варто припустити, що залежність функції відгуку від факторів можна задовільно апроксимувати поліномом виду:  $y = b_0 + b_1 X_1 + b_2 X_2 + b_{11} X_1^2 + b_{22} X_2^2 + b_{12} X_1 X_2$ .

3. Для оцінки параметрів використати план **Боксу  $B_2$** , у якому фактори варіюються на трьох рівнях, і використовуються 8 їх можливих поєднань (крім поєднання основних значень обох факторів – так би було дев'ять, тобто  $3^2$ ).

З кожним натуральним параметром моделі пов'язується кодована змінна. Перехід до кодovаних змінних здійснюється за формулами:

$$x_j = \frac{X_j - 0,5(X_j^{\max} + X_j^{\min})}{0,5(X_j^{\max} - X_j^{\min})},$$

де  $X_j$  – натуральні значення екзогенних змінних;

$x_j$  – значення кодованих змінних.

Значення кодованих змінних лежать у межах [-1, 1]. Максимальним натуральним значенням відповідають значення кодованих змінних 1, середнім – нульові, мінімальним – значення -1.

План експерименту включає 8 точок, кожна з яких задає варіант з'єднання максимальних, мінімальних і середніх значень двох екзогенних змінних, які беруть участь в експерименті (табл. 7).

Таблиця 7

### План імітаційного експерименту Бокса

Значення кодованих змінних		Значення натуральних змінних	
$x_1$	$x_2$	$X_1$	$X_2$
-1	-1	$X_{1min}$	$X_{2min}$
-1	0	$X_{1min}$	$X_{2mean}$
-1	1	$X_{1min}$	$X_{2max}$
0	-1	$X_{1mean}$	$X_{2min}$
0	1	$X_{1mean}$	$X_{2max}$
1	-1	$X_{1max}$	$X_{2min}$
1	0	$X_{1max}$	$X_{2mean}$
1	1	$X_{1max}$	$X_{2max}$

У табл. 7 діють такі позначення:  $X_{1min}$  – мінімальне значення,  $X_{1mean}$  – середнє значення,  $X_{1max}$  – максимальне значення.

План  $B_2$  відносять до ортогональних планів, що спрощує розрахунки.

Якщо модель містить стохастичні елементи, то в кожній точці плану експеримент необхідно повторити стільки разів, скільки необхідно для отримання необхідної точності у ході визначення середнього очікуваного значення змінної відгуку за даних умов прогонки (рекомендоване число 5 – 10).

За результатами експериментів проводяться розрахунки на підставі кодованих змінних, параметри рівняння регресії знаходяться за формулами:

$$b_0 = 1,25 \sum_{i=1}^8 y_i - 0,75 \left( \sum_{i=1}^8 x_{i1}^2 y_i + \sum_{i=1}^8 x_{i2}^2 y_i \right);$$

$$b_j = 0,1666 \sum_{i=1}^8 x_{ij} y_i, j = 1, 2;$$

$$b_{12} = 0,25 \sum_{i=1}^8 x_{i1} x_{i2} y_i ;$$

$$b_{jj} = 0,5 \sum_{i=1}^8 x_{ij}^2 y_i + 0,25 \left( \sum_{i=1}^8 x_{i1}^2 y_i + \sum_{i=1}^8 x_{i2}^2 y_i \right) - 0,75 \sum_{i=1}^8 y_i , j = 1,2 .$$

Інформаційну здатність отриманої моделі можна перевірити за критерієм Фішера, для чого роблять розрахунок квадратичних помилок:

$\Delta_i^2 = (y_i - \tilde{y}_i)^2$  – квадрат різниці даних, отриманих за регресійною моделлю ( $\tilde{y}_i$ ) і даних, отриманих у ході експерименту.

Потім визначають середнє значення  $\bar{y} = \frac{1}{8} \sum_{i=1}^8 y_i$  і знаходять відхилення від середнього:  $\delta_i^2 = (y_i - \bar{y})^2$ .

Тепер можна знайти значення F-критерію за формулою:

$$F = \frac{\frac{1}{K} \sum_{i=1}^8 \delta_i^2}{\frac{1}{N-K-1} \sum_{i=1}^8 \Delta_i^2} ,$$

де  $K = 2$  – число незалежних змінних;

$N$  – число спостережень;

$NK-1 = 8-2-1 = 5$ .

Отримане значення  $F$  порівнюється з табличним значенням  $F_{\text{tabl}}$  розподілу Фішера зі ступенями свободи  $f_1 = 2$  і  $f_2 = 5$  і заданим рівнем значимості. Якщо  $F > F_{\text{tabl}}$ , то побудована регресійна модель описує результати експерименту краще тривіальної моделі  $y = \bar{y}$ . Якщо  $F < F_{\text{tabl}}$ , то гірше, і використовувати її немає сенсу.

### Контрольні запитання

1. Метод Бокса – Уілсона пошуку екстремуму функції відгуку.
2. Основні задачі планування імітаційного експерименту.
3. Проблеми побудови планів.
4. Повний і неповний факторний експеримент.
5. Дробний факторний експеримент, напіврепліка. Генеруюче співвідношення.
6. Латинські плани та їх побудова.
7. Оцінка параметрів регресійних моделей за результатами експериментування з імітаційними моделями.

Література: основна [1; 2]; додаткова [4 – 6; 15; 18; 21].

## **Тема 9. Статистичні аспекти імітаційного моделювання**

**Основний зміст і мета лекції.** Метою лекції є ознайомлення студентів із статистичними аспектами дослідження та експлуатації імітаційних моделей. В лекції розглянуто стратегії запуску імітаційних моделей, оцінка довжини перехідного періоду, визначення тривалості та числа прогонів імітаційних моделей, методи зниження дисперсії.

Інформація, викладена в лекції, надає студенту можливість сформувати такі групи компетентностей:

здатність використовувати статистичні методи для того, щоб покращити ефективність імітаційного моделювання, а саме: зниження похибок, дисперсії, відсікання перехідного періоду, виявлення числа та довжини експериментів;

здатність обирати стратегії експериментування з імітаційними моделями.

### **Основні питання, що висвітлюються в лекції:**

1. Стратегії запуску імітаційних моделей.
2. Початковий стан та перехідний період імітаційної моделі.
3. Тривалість та число прогонів імітаційної моделі. Визначення обсягу вибірки з заданим рівнем надійності.
4. Методи зниження дисперсії.

### **1. Стратегії запуску імітаційних моделей**

Одна з головних переваг імітаційних експериментів на відміну від натурних у тому, що умови експерименту досить легко повторити, експеримент можна перервати або призупинити. Це дозволяє досліднику повністю контролювати модельний експеримент.

Однак у ході реалізації імітаційного експерименту істотними є такі процедури дослідження моделі:

- задавання початкових значень;
- особливості збору даних по імітаційній моделі;
- визначення тривалості і числа прогонів;
- оцінка похибки імітації, зумовленої наявністю в моделі неідеальних генераторів псевдовипадкових чисел;
- визначення тривалості перехідного режиму в роботі імітаційної моделі;
- оцінка стійкості результатів імітації досліджуваних процесів.

Одним із завдань імітаційного експерименту, незважаючи на його мету, є оцінка середнього значення модельованої системи, тобто математичне очікування її відгуку за запусками, які вирізняються випадковими впливами – час очікування вимоги в сталому режимі, загальний дохід протягом планованого періоду та ін. У деяких випадках імітаційне дослідження проводиться, щоб оцінити ймовірність того, що відгук системи перевершить деяку фіксовану величину. Однак оцінку такої ймовірності також можна сформулювати як оцінку середнього.

Природно, що під час оцінки середнього спостерігаються певні відхилення, які можуть бути охарактеризовані за допомогою дисперсії оцінки середнього. Дисперсія є найважливішою характеристикою результатів імітації, вона показує, наскільки сильними є відмінності в одержуваних даних, будучи, по суті, оцінкою варіації.

І середнє відгуку, і дисперсія залежать від умов експерименту, що задаються розробником: вихідного стану системи (початкових значень), моменту початку збору статистичних даних, тривалості прогону і числа повторних прогонів. Тому розробнику необхідно подбати про те, як задати початкові дані експерименту і коли почати збирати дані і т. д.

## **2. Початковий стан та перехідний період імітаційної моделі**

Існує 2 основних принципи збору статистичних даних: моделювання й аналіз стійкого стану або перехідного режиму. Все залежить від цілей і особливостей експерименту в цілому: наприклад, якщо необхідно досліджувати стійке функціонування фірми або проаналізувати перехідний період економіки України, використовуються різні підходи.

У процесі моделювання стійкого стану вважається, що система знаходиться в стійкому стані, якщо ймовірність її перебування в ньому визначається постійною функцією часу і не залежить від початкового стану. В цьому випадку зазвичай не розглядаються спостереження, зроблені в перехідному стані. На жаль, більшість стохастичних моделей потребує певного часу для досягнення моделлю необхідного стійкого стану. Тому досліднику потрібно зменшити вплив цього початкового періоду моделювання або виключити його з результатів моделювання.

Існує три способи зменшення впливу початкового періоду на динаміку моделювання складної системи:

- використання довгих прогонів моделі;
- виключення з розгляду початкового періоду;

вибір початкового стану, найбільш близького до стаціонарного режиму (щоб мінімізувати холостий час рахунку – час спостереження за перехідним процесом).

Постійний стан не означає, що змінна відгуку досягла якогось значення і взагалі більше не змінюється, вона може продовжувати коливатися відповідно до властивих їй параметрів. Постійний або стаціонарний режим функціонування моделі означає, що розподіл не змінюється в часі протягом експерименту.

Найбільш часто використовуються різноманітні процедури відсікання, для чого необхідно визначити початок і кінець перехідного процесу. Визначення довжини перехідного режиму відіграє важливу роль також із точки зору застосування різних методів збору даних, які забезпечують необхідну кількість спостережень.

Слід зауважити, що поняття перехідного та стаціонарного стану мають силу в ситуаціях так званої нескінченної імітації, тобто відносно систем, які функціонують досить довго. Якщо система функціонує лише певний час, то перехідний стан є елементом її нормального функціонування, і не може ігноруватися. У такому випадку єдиним виходом є збільшення наскільки можливо часу імітації.

У ситуаціях, коли часу спостереження достатньо, мають місце такі обмеження. Якщо взяти більшу тривалість перехідного процесу, ніж вона є насправді, то буде втрачено інформацію за стійким станом, що збільшить дисперсію оцінок відгуку моделі. Якщо взяти меншу тривалість перехідного процесу, ніж вона є в реальності, то спостереження над перехідним процесом будуть сприйняті як спостереження над стійким станом, що призведе до зміщення оцінки (математичного очікування) відгуку в стійкому стані. У процесі задавання початкових умов необхідно прагнути до такого запуску, при якому потрібне відсікання мінімального обсягу даних, необхідних для адекватної оцінки відгуку моделі.

Для виокремлення перехідного режиму у дослідника повинна бути можливість спостереження за моментом входу контрольованого параметра моделювання в стаціонарний режим. На жаль, не існує абсолютно надійних методів для вирішення питання, чи досягнутий постійний стан системи, чи ні, але можна рекомендувати застосування певних правил та критеріїв. Попередній аналіз для виокремлення перехідного режиму може бути здійснений на основі графіків зміни досліджуваної змінної.



Існує три правила задавання початкового стану у всіх типах імітаційного моделювання:

запустити модель зі стану "порожній і вільний" (для теорії масового обслуговування);

запустити модель із модальних значень усталеного режиму (найбільш часто зустрічаються);

запустити модель із середніх значень усталеного режиму (вони, як правило, відрізняються від модальних).

Часто використовуються нульові початкові умови, вкрай рідкісні, екстремальні. Надалі ці умови мають дуже малу ймовірність виникнення. Для порівняння альтернатив розвитку системи використовуються компромісні між найгіршими і найкращими умовами.

Досить зручним статистично обґрунтованим критерієм для відсікання перехідного періоду є критерій Вількоксона, який заснований на підрахунку числа інверсій у двох взятих послідовностях значень спостережуваної величини й аналізу того, чи підкоряються одному і тому ж закону розподілу взяті послідовності, звідки роблять висновок, чи можна вважати, що встановився стаціонарний режим. У протилежному випадку розглядають такі два підінтервали.

Замість визначення кількості інверсій можна використовувати ранги елементів 2-х наступних вибірок спостережень, поміщаючи всі їх елементи в одну послідовність. Потім відбираються лише ранги елементів однієї вибірки, наприклад,  $r_{xj}$ , і підраховують статистику Вількоксона:

$$W_x = \sum_{j=1}^m r_{xj} .$$

Якщо вона статистично значуща (потрапляє в заданий інтервал), то ряд стаціонарний.

Згідно з критерієм, інтервал періоду моделювання розбивається на підінтервали, в кожному з яких здійснюється вимірювання деякої обраної статистики моделювання (найчастіше відгуку). Результати спостережень для двох сусідніх інтервалів формують дві вибірки  $x$  і  $v$ . Спостереження, отримані у двох вибірках, розташовуються в єдину послідовність у порядку зростання їх значень, наприклад,

$$x_1, y_1, x_2, x_3, y_2, x_4, y_3, y_4, y_5,$$

де  $x_1, x_2, x_3, x_4$  – спостереження з першого підінтервалу (першої вибірки об'ємом  $m$ );

$y_1, y_2, y_3, y_4$  – спостереження з другого підінтервалу (другої вибірки об'ємом  $n$ ).

Якщо деякому  $x$  передує  $y$ , то така пара утворює інверсію. Підраховується загальна кількість інверсій  $u$ . Критична область для кількості інверсій визначається рівнем довірчої ймовірності і нерівністю:

$$Mu - t_{\alpha, \infty} \sigma_u \leq u \leq Mu + t_{\alpha, \infty} \sigma_u ,$$

де  $Mu = \frac{mn}{2}$  – середнє очікуване значення числа інверсій за умов однакового розподілу обох вибірок;

$$Du = \frac{mn}{12}(m+n+1) - \text{дисперсія числа інверсій за тих же умов;}$$

$$\sigma_u = \sqrt{Du} - \text{середнє квадратичне відхилення;}$$

$t_{\alpha, \infty}$  – значення *t-статистики* Стьюдента для рівня довірчої ймовірності  $\alpha$  і нескінченного числа ступенів свободи.

Якщо нерівність виконується, вибірки вважаються такими, що підкорюються одному і тому ж закону розподілу, отже, можна вважати, що встановився стаціонарний режим. У протилежному випадку слід розглянути такі два підінтервали.

Замість визначення кількості інверсій можна використовувати ранги елементів однієї з вибірок. Нехай у кожній із вибірок однакова кількість спостережень  $m$ . Приписати кожному елементу із впорядкованої послідовності його ранг – номер у послідовності від 1 до  $2m$ . Далі обрати лише ранги елементів однієї вибірки, наприклад, і підрахувати статистику Вількоксона:

$$W_x = \sum_{j=1}^m r_{xj} .$$

Перевірка гіпотези про однорідність проводиться на основі нерівності:

$$w_1(\alpha) \leq W_x \leq w_2(\alpha) ,$$

де  $w_1(\alpha)$ ,  $w_2(\alpha)$  – нижня і верхня межі статистики Вількоксона з рівнем довірчої ймовірності, які визначаються співвідношеннями:

$$w_1(\alpha) = \frac{m(2m+1)-1}{2} - z_{\alpha/2} \sqrt{\frac{m^2(2m+1)}{12}};$$
$$w_2(\alpha) = m(2m-1) - w_1(\alpha),$$

де  $z_{\alpha/2}$  – значення стандартного нормального розподілу для рівня ймовірності  $(1-\alpha/2)$ .

Якщо нерівність виконується, то гіпотеза про однорідність двох вибірок приймається.

Іноді в дійсності багато завдань належать до нестационарних, і більша увага приділяється модельному відображенню саме перехідних процесів. Якщо метою є аналіз перехідного режиму, початкові умови повинні відображати вихідний реальний стан модельованої системи, щоб повторити реальний момент переходу.

### **3. Тривалість та число прогонів імітаційної моделі. Визначення обсягу вибірки з заданим рівнем надійності**

**Визначення тривалості періоду імітації та збір даних імітаційного експерименту.** Вибір тривалості прогонів залежить від цілей експериментування. Якщо мова йде про оцінки адекватності, як період вибирається тривалість прогону, відповідна довжині ретроспективних даних. У разі прогнозування діє той же принцип. У ході побудови імітаційних моделей економічних систем довжина прогону може визначатися концептуальною моделлю.

Також необхідно враховувати вплив початкових умов і перехідного режиму. У ході дослідження усталеного режиму використання декількох тривалих прогонів краще, ніж використання багатьох коротких, тому менше число разів вносяться спотворення перехідного режиму і відсікається менше даних. Чим більше перехідний період, тим важливіше використовувати більш тривалі прогони з метою зниження впливу початкових умов.

Методи задавання тривалості прогону моделі залежать від концепції імітаційного моделювання:

- задавання моменту завершення моделювання (найчастіше концепції потокова, СМО, елементів функціонування);

- задавання певного числа компонентів, що надходять на вхід моделі: імітація продовжується до тих пір, поки всі вони не будуть оброблені і система не прийде в стан "порожній і вільний";
- задавання числа компонентів, заявок, що обробляються в системі (прогін може завершитися, коли система знаходиться в будь-якому стані) (кусово-лінійні агрегати, ТМО);
- застосування правил автоматичної зупинки (результати моделювання відслідковуються через задані інтервали, й імітація припиняється, коли оцінка дисперсії середнього стає менше заданої величини);
- застосування правила настання критичної події: станом, за часом роботи. Критичним станом подія встановлюється, виходячи з фізики функціонування системи (поломка, перевищення максимальної довжини черги). Критична за часом подія встановлюється, якщо поведінка системи досліджується протягом деякого заданого інтервалу часу (черга в перукарню, закривається в 21<sup>00</sup>).

У випадку, коли необхідна група спостережень за системою (багато повторних прогонів), використовують такі способи збору даних імітаційного експерименту:

1. Метод підінтервалів (рис. 19):

- розглядається один дуже довгий прогін;
- перехідний період виключається з розгляду;
- всі інші спостереження діляться на однакові підінтервали;
- кожен такий інтервал розглядається як окреме спостереження.

Недоліки:

- можливе вичерпання генератора випадкових чисел;
- послідовні групи найчастіше корельовані;
- кореляція зростає зі збільшенням довжини групи.

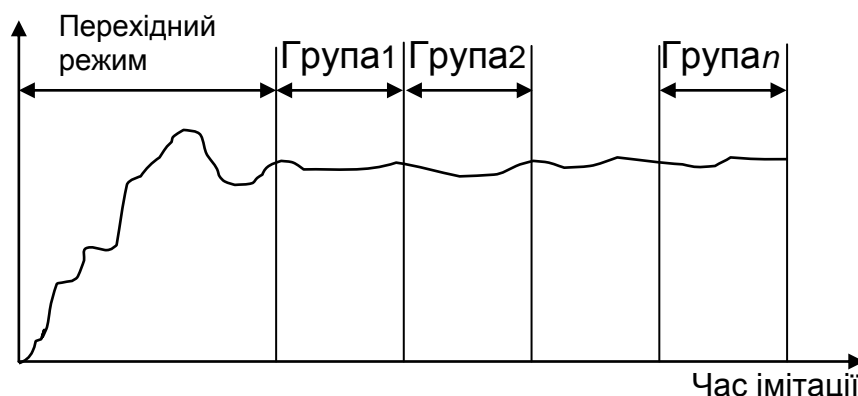


Рис. 19. Метод підінтервалів

## 2. Повтор прогонів (рис. 20):

- кожен окремий незалежний прогін є окремим спостереженням;
- перехідний режим відрізається.

Переваги:

- усі спостереження незалежні;
- використовується своя власна послідовність випадкових чисел.

Недолік:

- необхідно скорочення тривалості перехідного періоду (відрізати якомога менше).

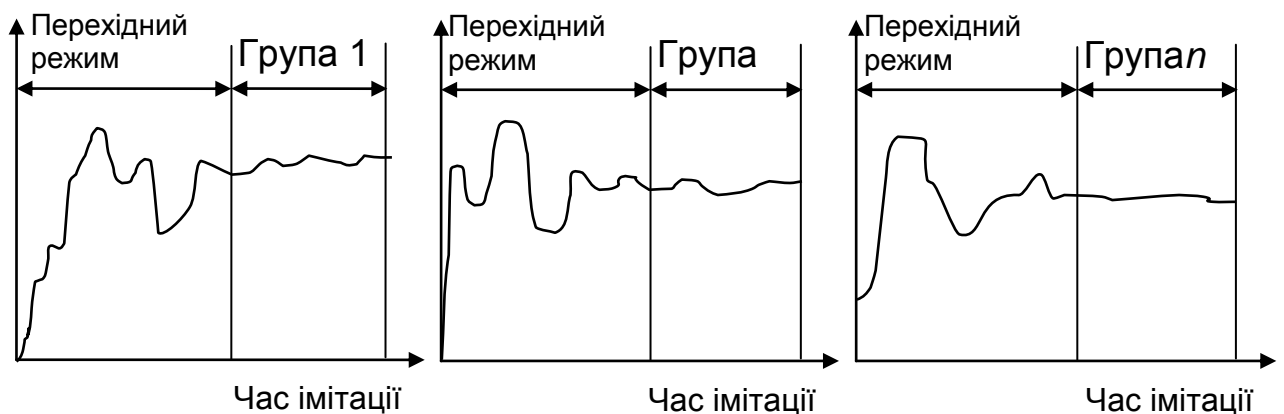


Рис. 20. Метод повторень

## 3. Метод циклів (рис. 21):

- відсікається перехідний період;
- кожен цикл у системі – окрема група.

Недолік:

- не можна сказати, скільки циклів у прогоні і яка його довжина.

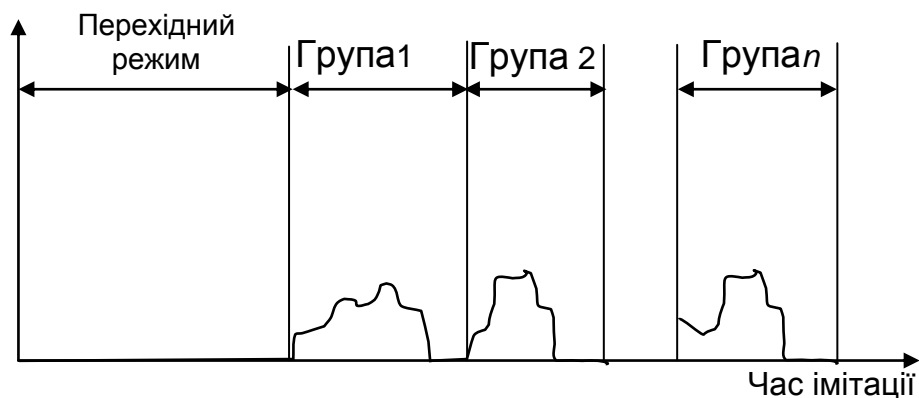


Рис. 21. Метод циклів

**Визначення числа повторних прогонів.** Дане завдання може виникнути тільки за наявності стохастичних елементів.

У деяких випадках число повторних прогонів визначається рекомендаціями фахівців.

Інший спосіб – статистичний (*правила автоматичної зупинки*). До нього належить група статистичних критеріїв оцінки кількості повторних експериментів на підставі поняття *надійності*.

Для їх подання слід увести кілька визначень.

Надійністю називається статистична точність вибірки, вона оцінюється величиною довірчого інтервалу і довірчою ймовірністю  $(1-\alpha)$ . Таким чином, число повторних прогонів має задовольняти критерію надійності:

*а) надійність однієї сукупності:*

для того, щоб отримати значення відгуку, який становить випадкову величину  $\mu$ , розподілену нормально, за результатами  $n$  незалежних прогонів треба отримати оцінку його вибіркового середнього  $\bar{x}$  з точністю не меншою, ніж задана, тобто:

$$P(|\bar{x} - \mu| \leq C) = 1 - \alpha.$$

У випадку, якщо дисперсія  $\sigma_x^2$  модельованої випадкової величини відома, для отримання довірчого інтервалу використовується таке співвідношення для нормально розподіленої випадкової величини:

$$P\left(|\bar{x} - \mu| \leq \frac{z_{\alpha/2} \sigma_x}{\sqrt{n}}\right) = 1 - \alpha,$$

отже, для виконання співвідношення (1) необхідно:

$$n = \left(\frac{z_{\alpha/2}}{C}\right)^2 \sigma_x^2,$$

де  $n$  – необхідний обсяг вибірки;

$z_{\alpha/2}$  – стандартна нормально розподілена випадкова величина  $N(0, 1)$ .

*Практичне застосування правила:*

- встановлюється значення  $n$ ;
- проводиться  $n$  повторних прогонів імітаційної моделі й обчислюються значення  $t$  і  $S_x$ ;
- застосовується наведена формула для перевірки достатності початкових припущень або для визначення необхідного числа додаткових прогонів.

Недоліком цього методу є те, що обсяг вибірки виявляється випадковою величиною, що залежить від оцінки дисперсії;

*б) надійність оцінки двох сукупностей:*

слід розглянути порівняння середніх двох сукупностей. Якщо дисперсії відомі, то для оцінки різниці маємо аналогічне співвідношення (3):

$$C = z_{\alpha/2} \sigma_{x_1 - x_2} = z_{\alpha/2} \left( \frac{\sigma_1^2}{n_1} - \frac{\sigma_2^2}{n_2} \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Дисперсія різниці оцінок середніх  $(\bar{x}_1 - \bar{x}_2)$ . мінімальна для фіксованого загального обсягу вибірки  $n = n_1 + n_2$  у процесі виконання співвідношення:

$$\frac{n_1}{n_2} = \frac{\sigma_1}{\sigma_2},$$

отже, оцінка різниці  $\mu_1 - \mu_2$  обмежується областю  $(\bar{x}_1 - \bar{x}_2) \pm C$  з імовірністю  $(1-\alpha)$  за:

$$n_1 = \left( \frac{z_{\alpha/2}}{C} \right)^2 \sigma_1 (\sigma_1 + \sigma_2),$$

$$n_2 = \left( \frac{z_{\alpha/2}}{C} \right)^2 \sigma_2 (\sigma_1 + \sigma_2).$$

Звідси загальний обсяг вибірки дорівнює:

$$n = n_1 + n_2 = \left( \frac{z_{\alpha/2}}{C} \right)^2 (\sigma_1 + \sigma_2)^2.$$

Якщо дисперсії не відомі, то необхідно зробити таке.

На кожному кроці обчислюються звичайні оцінки  $\sigma_1^2$ ,  $\sigma_2^2$  по всіх спостереженнях даного кроку, тобто, якщо було  $n_1$  і  $n_2$  спостережень, то:

$$\bar{x}_i = \frac{1}{n_i} \sum_{j=1}^{n_i} x_{ij},$$

$$S_{n_i}^2 = \frac{1}{n_i - 1} \sum_{j=1}^{n_i} (x_{ij} - \bar{x}_i)^2, \quad i = 1, 2.$$

Якщо  $\frac{n_1}{n_2} \leq \frac{S_{n_1}}{S_{n_2}}$ , то наступне спостереження береться з першої

сукупності, в іншому випадку – з другої.

Далі вибрати послідовність величин:

$$a_n \rightarrow z_{\alpha/2}, \quad n \rightarrow \infty,$$

$$a_n = z_{\alpha/2} \left( \frac{n+4}{n-4} \right)^{1/2}.$$

Правила зупинки експерименту такі. Замінити  $z_{\alpha/2}$  на  $a_n$  і  $\sigma_1, \sigma_2$  на  $S_1, S_2$  відповідно. Процес зупиняється в одному з таких випадків:

- 1) якщо виконано (10) зі знаком " $\geq$ ";
- 2) якщо виконано (7);
- 3) якщо виконано (9).

#### 4. Методи зниження дисперсії

Однією з цілей імітаційного експерименту є, як уже було сказано раніше, оцінка середнього значення модельованої системи, тобто математичне очікування її відгуку – час очікування вимоги в сталому режимі, загальний дохід протягом планованого періоду та ін. У деяких випадках імітаційне дослідження здійснюється, щоб оцінити ймовірність того, що відгук системи перевершить деяку фіксовану величину. Однак оцінку такої ймовірності також можна сформулювати як оцінку середнього.

Методи зниження дисперсії (МЗД) знижують дисперсію оцінки середнього за допомогою заміни вихідної вибірки новою, більш досконалою, з тим же середнім, але меншою дисперсією.

Ефективність МЗД зазвичай вимірюється зменшенням дисперсії оцінки середнього. Природно, зниження дисперсії тягне за собою і зниження стандартного відхилення, і навпаки. Зниження дисперсії визначається у відсотках як:

$$\frac{\sigma_0^2 - \sigma_1^2}{\sigma_0^2} 100\%,$$

де  $\sigma_0^2, \sigma_1^2$  – стара і нова дисперсії відповідно.

Під час складного імітаційного моделювання можна використовувати такі методи:

1. Стратифікована (розщеплена) вибірка: відгуки в повторних модельованих дослідах мають різні ваги. Ці ваги відомі і залежать від шару, до якого належать випадкові числа.

2. Селективна вибірка: вхідні змінні відбираються так, що їх частоти узгоджуються з теоретичними, очікуваними частотами.



3. Контрольні величини (регресійний вибір): середні значення вхідних змінних порівнюються з їх математичними очікуваннями і відгук коригується на відхилення між емпіричними даними і математичними очікуваннями.

4. Значна вибірка: вихідні розподілу вхідних змінних замінюються новими (так, що тим вхідним величинам, які призводять до найбільш важливих значень відгуку, присвоюються великі ймовірності), а відгук у зв'язку зі спотвореннями коректують.

5. Доповнюють величини: повторна реалізація генерується за допомогою доповнюючих випадкових чисел  $r$ ,  $(1-r)$ . У результаті негативна кореляція між двома дослідями зменшує дисперсію відгуку, усереднену за дослідями.

6. Загальні випадкові числа: два або більше різних варіанти системи моделюються з використанням одних і тих же випадкових чисел. Для цього методу зменшення дисперсії можна досягти за рахунок збільшення обсягу вибірки або ефективного вибору комбінацій рівнів факторів у експерименті.

### **Контрольні запитання**

1. Методи зниження дисперсії: призначення, загальна характеристика.

2. Метод стратифікованої вибірки: до експерименту й після проведення.

3. Визначення необхідного обсягу вибірки за відомою і невідомою дисперсією.

4. Визначення обсягу двох вибірок для порівняння середніх.

5. Початковий стан та перехідний період імітаційної моделі.

6. Тривалість та число прогонів імітаційної моделі.

7. Визначення обсягу вибірки з заданим рівнем надійності.

Література: основна [1; 2]; додаткова [4 – 6; 15; 18; 21].

## **Рекомендована література**

### **Основна**

1. Емельянов А. А. Имитационное моделирование экономических процессов : учеб. пособ. / А. А. Емельянов, Е. А. Власова, Р. В. Дума. – М. : Финансы и статистика, 2002. – 368 с.

2. Клейнер Дж. Статистические методы в имитационном моделировании / Дж. Клейнер. – М. : Статистика, 1978. – 256 с.

3. Максимей И. В. Имитационное моделирование на ЭВМ / И. В. Максимей. – М. : Радио и связь, 1988. – 232 с.

### **Додаткова**

4. Алексеев Я. Н. Имитационное моделирование социально-экономических систем : учеб. пособ. / Я. Н. Алексеев, Т. В. Биткова, В. В. Годин. – М. : МИУ, 1986. – 180 с.

5. Багриновский А. А. Имитационные системы в планировании экономических объектов / А. А. Багриновский, Н. Е. Егорова. – М. : Наука, 1980. – 124 с.

6. Багриновский А. А. Имитационные системы принятия экономических решений / А. А. Багриновский, Т. И. Конник, М. Р. Левинсон. – М. : Наука, 1989. – 168 с.

7. Бакаев А. А. Имитационные модели в экономике / А. А. Бакаев, Н. И. Костина, Н. В. Яровицкий. – К. : Наукова думка, 1978. – 304 с.

8. Задания и методические рекомендации к выполнению лабораторных работ по курсу "Имитационное моделирование" для студентов специальности 6.050100 "Экономическая кибернетика" дневной формы обучения / сост. О. Ю. Полякова, О. С. Олексенко. – Х. : Изд. ХНЭУ, 2005. – 36 с.

9. Имитационный анализ регионального воспроизводственного процесса / С. М. Лавлинский, В. А. Макаров, А. И. Певницкий и др. – Новосибирск : Наука, Сиб. отд-ние, 1987. – 176 с.

10. Конспект лекций по магистерской специальности "Прикладная экономика". Т. I. Базовые модули / под ред. д. э. н., профессора Т. С. Клебановой. – Донецк : Издательство Донецкого национального университета. – 418 с.

11. Максимей И. В. Математическое моделирование больших систем / И. В. Максимей. – Мн. : Высшая школа, 1985. – 120 с.

12. Методические рекомендации к выполнению практических заданий по курсу "Имитационное моделирование" для студентов специальности 7.050102 / сост. О. Ю. Полякова. – Х. : Изд. ХГЭУ, 2002. – 28 с.

13. Милов А. В. Задания и методические указания к лабораторным работам по курсу "Имитационное моделирование" / сост. А. В. Милов, О. Ю. Полякова, Т. В. Биткова. – Х. : ХГЭУ, 2000. – 48 с.

14. Полякова О. Ю. Модельное время. Текст лекции / О. Ю. Полякова. – Х. : ХГЭУ, 2003. – 24 с.
15. Полякова О. Ю. Основы статистического моделирования. Текст лекции / О. Ю. Полякова. – Х. : ХГЭУ, 1999. – 16 с.
16. Полякова О. Ю. Построение и эксплуатация имитационных моделей. Текст лекции / О. Ю. Полякова. – Х. : ХГЭУ, 1999. – 28 с.
17. Сидоренко В. Н. Системная динамика / В. Н. Сидоренко. – М. : Экономический факультет МГУ, ТЕИС, 1998. – 205 с.
18. Урезченко В. М. Построение имитационных моделей с использованием принципов системной динамики / В. М. Урезченко. – М. : МИФИ, 1989. – 88 с.
19. Форрестер Дж. Основы кибернетики предприятия (индустриальная динамика) / Дж. Форрестер. – М. : Прогресс, 1971. – 278 с.
20. Цвиркун А. Д. Имитационное моделирование в задачах синтеза структуры сложных систем / А. Д. Цвиркун. – М. : Наука, 1985. – 173 с.
21. Шеннон Р. Ю. Имитационное моделирование систем – искусство и наука / Р. Ю. Шеннон. – М. : Мир, 1978. – 418 с.
22. Forrester J. W. System Dynamics and Learner-Centered-Learning / J. W. Forrester // System Dynamic Group. – 1993. – 20 p.
23. Meredith D. Fundamentals of Management Science / D. Meredith, J. Turban. – Lakewood : Irwin, 1989. – 914 p.
24. Moresroft J.D.W. System Dynamics: Microworlds for Policy Makers / J.D.W. Moresroft // European Journal of Operational Research. – 1988. – V. 35 (5). – P. 301–320.

## **Інформаційні ресурси**

25. Міжнародний сайт проблем системної динаміки. – Режим доступу : [www.sysdyn.mit.edu](http://www.sysdyn.mit.edu).
26. Isee systems High Performance Systems in business (Розробка моделей управління у бізнесі на базі імітаційних моделей) [Електронний ресурс]. – Режим доступу : [www.hps-inc.com](http://www.hps-inc.com).
27. Компанія VENSIM – виробник програмного забезпечення для моделювання на базі концепції системної динаміки [Електронний ресурс]. – Режим доступу : [www.vensim.com](http://www.vensim.com).
28. Systems Thinking – міжнародна організація "системного мислення" [Електронний ресурс]. – Режим доступу : [www.pegasuscom.com](http://www.pegasuscom.com).

## Зміст

Вступ.....	3
Змістовий модуль 1. Принципи побудови та експлуатації імітаційних моделей.....	4
Тема 1. Сутність, розвиток і застосування імітаційного моделювання .....	4
Тема 2. Засоби та системи імітаційного моделювання.....	12
Тема 3. Концепція методу системної динаміки .....	19
Тема 4. Моделювання випадкових подій і випадкових величин засобами імітаційного моделювання. Метод Монте-Карло .....	30
Тема 5. Модельний час .....	37
Змістовий модуль 2.....	44
Прикладні аспекти імітаційного моделювання .....	44
Тема 6. Оцінка та аналіз адекватності імітаційних моделей .....	44
Тема 7. Тестування імітаційних моделей та оцінка чутливості .....	56
Тема 8. Планування імітаційних експериментів у процесі дослідження та оптимізації систем.....	62
Тема 9. Статистичні аспекти імітаційного моделювання .....	78
Рекомендована література.....	89
Основна .....	89
Додаткова .....	90
Інформаційні ресурси .....	91

НАВЧАЛЬНЕ ВИДАННЯ

Ястребова Ганна Сергіївна

# ІМІТАЦІЙНЕ МОДЕЛЮВАННЯ

**Конспект лекцій  
для студентів напряму підготовки  
6.030502 "Економічна кібернетика"**

*Самостійне електронне текстове мережне видання*

Відповідальний за випуск *Т. С. Клебанова*

Відповідальний редактор *М. М. Оленич*

Редактор *О. Г. Лященко*

Коректор *М. А. Ковальчук*

План 2015 р. Поз. № 26 ЕК. Обсяг 93 с.

---

Видавець і виготівник – ХНЕУ ім. С. Кузнеця, 61166, м. Харків, просп. Леніна, 9-А

*Свідоцтво про внесення суб'єкта видавничої справи до Державного реєстру  
ДК № 4853 від 20.02.2015 р.*