JEL Classification: C61 УДК 330.4

ПРОСТОРОВІ ЦІЛОЧИСЛОВІ СІТКИ В ЗАДАЧАХ ДИСКРЕТНОЇ ОПТИМІЗАЦІЇ

Сенчуков В. Ф.

Анотація. *Розглядається оригінальний підхід до розв'язання задач дискретної (цілочислової) оптимізації, який базується на нумерації точок простору з цілими координатами – цілих точок. Знайдено за допомогою функції антьє аналітичний опис залежності координат цілої точки від її номера. На цих засадах пропонується уникнути попередньо- го розв'язування задачі математичного програмування з послабленими обмеженнями, тобто без урахування вимог цілочисловості змінних, як це робиться в методах відтинання і комбінаторних методах. Віднайдення оптимуму функ- ції цілі відразу здійснюється на множині цілих точок – підмножині області допустимих значень змінних.*

Ключові слова: *послідовність, нумерація, цільова функція, оптимум (мінімум, максимум), методи відтинання, комбінаторні методи, задачі економіки.*

ПРОСТРАНСТВЕННЫЕ ЦЕЛОЧИСЛЕННЫЕ РЕШЕТКИВ ЗАДАЧАХ ДИСКРЕТНОЙ ОПТИМИЗАЦИИ

Сенчуков В. Ф.

Аннотация. *Рассматривается оригинальный подход к решению задач дискретной (целочисленной) оптимиза- ции, основанный на нумерации точек пространства с целыми координатами – целых точек. Найдено с помощью функ- ции антье аналитическое описание зависимости координат целой точки от её номера. На этой основе предлагается избежать предварительного решения задачи математического программирования с ослабленными ограничениями, то есть без учета требований целочисленности переменных, как это делается в методах отсечения и комбинатор- ных методах. Отыскание оптимума функции цели сразу осуществляется на множестве целых точек – подмноже- стве области допустимых значений переменных.*

Ключевые слова: *последовательность, нумерация, целевая функция, оптимум (минимум, максимум), методы отсечения, комбинаторные методы, задачи экономики.*

SPATIAL INTEGRAL LATTICE IN THE TASKS OF DISCRETE OPTIMIZATION

V. Senchukov

Abstract. *An original approach to solving the tasks of discrete (integer) optimization, based on numbering points in space with integer coordinates – integral points, is considered. Using the entier function, analytical description of dependence of coordinates of integral point from its number has been found. On this basis, is suggested to avoid the preliminary solving the task of mathematical programming with weak restrictions, that is, without taking into account requirements of variables integrality, as is done in the clipping and combinatorial methods. Finding the optimum of purpose function is accomplished at once on a set of integral points – subaggregate of the tolerance region of variables.*

Keywords: *sequence, numbering, objective function, optimum (minimum, maximum), clipping methods, combinatorial methods, economy tasks.*

Дискретні оптимізаційні задачі знаходять широке застосування в різних областях, зокрема, в економіці. Впровадження цілочислових сіток у задачі дискретного програмування вперше показано у попередніх дослі- дженнях автора статті [1].
Застосування лінійних моделей опису економічних процесів, апарат яких добре розроблений, для по- становки і розв'язання багатьох важливих задач є неефективним [2]. Однією із сучасних проблем управління

підприємствами є моделювання нелінійних процесів в економіці, як і взагалі нелінійних динамічних процесів, і розробка методів розв'язання відповідних математичних задач.
Основними методами розв'язання задач дискретного програмування є такі: методи відсікання [3–5]; комбінаторні методи [3–5]; наближені методи [6]. Для ряду стандартних задач створені пакети прикладних програм, наприклад, MatLab [7].
Вадою усіх модифікацій названих методів є відсутність універсального правила формування відсікань і гілкування процесу наближення до цілочислового розв'язку задачі. Саме непередбачуваність у поведінці різних модифікацій викликає значні труднощі обчислювальної реалізації методів.
Принципова відмінність пропонованого підходу від названих методів полягає у тому, що він не містить елементів невизначеності: оптимум цільової функції відразу відшукується на множині цілих чисел прямим («наївним») перебором. Звичайно, для багатовимірних просторів залишається «прокляття вимірності» – проблема, пов'язана з експоненціальним зростанням кількості даних через збільшення вимірності простору.
Метою даної роботи є подальше розвинення досліджень, пов'язаних із застосуванням цілочислової нумерації [8] до розв'язання економічних задач дискретної оптимізації. У попередніх дослідженнях автора статті [1] розглянуто за схемою В. Серпінського [9] нумерацію всієї площини. Проте числові характеристики в задачах економічного змісту, як правило, невід'ємні, тому доцільно здійснити відповідну цілочислову нумерацію: на площині – нумерацію точок першого квадранта, у просторі – першого октанта. Відома нумерація Г. Кантора [8] для цього малопридатна, оскільки накладання цілочислової сітки, яку назвемо трикутною, на плоску область допустимих значень є «незручною» для опуклих областей (більш прийнятна нумерація за квадратами, а не за трикутниками). Суперпозиція канторової нумерації для нумерації трійок простору описує цілі точки деякої поверхні, а не просторового тіла, яким є область допустимих значень змінних задачі.
Ставиться задача: занумерувати цілі точки першого октанта тривимірного простору. Розв'язання цієї задачі потребує уміння **підсумовувати кусково-стаціонарні числові послідовності,** до розгляду чого й перейдемо.

Числову послідовність $\{a_n\}$ називають **стаціонарною**, якщо всі її елементи рівні між собою, тобто $a_n = a - const \quad \forall n \in \mathbf{N}$. Послідовність $\{a_n\}$ називається **кусково-стаціонарною** (**к.-с.п.**), якщо вона складена із скінченних стаціонарних послідовностей (стаціонарних кортежів).
Стаціонарні кортежі назвемо **серіями** елементів к.-с.п. Серії, які складають деяку підпослідовність к.-с.п. і підкоряються одному і тому самому законові залежно від номера серії, називаються **однотипними**. Кусково-стаціонарні послідовності будемо називати також **серійними** послідовностями.
Серії (кортежі) позначатимемо трійками $K = (m, l_m, a_m)$, де m – **номер** серії, l_m – **довжина** серії (кількість елементів у ній), a_m – **закон** залежності елементів серії від її номера m.
Розглядаючи елементи серійної послідовності як скінченні різниці $d_n = S_{n+1} - S_n$, $n = 1, 2, 3, \ldots$, іншої послідовності $S_n = S(n)$ із заданим першим членом $S_1 = S(1)$, можна (за відомими законами утворення серій) знайти загальний член $S(n)$ у замкненому вигляді, тобто у вигляді формули, за співвідношенням:

$$S_n = S_1 + \sum_{i=1}^{n-1} d_i = S_1 + (S_2 - S_1) + (S_3 - S_2) + \ldots + (S_n - S_{n-1}) \tag{1}$$

Відшукання загального члена $S(n)$ згідно з (1) назвемо **відновленням** послідовності за її скінченними різницями.
При довільно обраному n проміжок $[1, n]$ цілих чисел може включати деякі серії (у певній кількості) повністю, а деякі частково. Тому вводиться відповідно поняття **повних** і **неповних серій.** Для одноелементних кортежів неповні серії відсутні.
Підсумовування серійних послідовностей здійснюється у такому порядку:

– *описуємо* m-серії $K = (m, l_m, a_m)$, залучаючи подвійні нерівності, які визначаються межами змінювання номерів n для кожного типу серії: $\varphi_1(m) \le n \le \varphi_2(m)$;

– *знаходимо* за заданим номером n число повних серій (u) на відрізку $[1, n]$ і кількість елементів у них ($|u|$), а також число елементів неповної серії (| u]);

– *підраховуємо* суми елементів повних серій $\left(S_u^{\text{п}}\right)$ і неповної серії $\left(S_u^{\text{н}}\right)$;

– *записуємо* загальний член послідовності n-х часткових сум $S(n)$.

Пропонований спосіб відновлення послідовності за її скінченними різницями названо **методом повних і неповних сум** (ПНС).

Задача. Відновити методом ПНС за скінченними різницями d_p підпослідовність натуральних чисел $S_p = S(p)$, $p \in \mathbf{N}$, якщо її перший член дорівнює одиниці:

p	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	…
d_p	3	9	5	16	7	7	25	9	9	9	36	…

Аналізуємо стаціонарні кортежі та визначаємо два типи серій, логічна сума яких дає послідовність d_p:

$U = \{3, 5, 77, 999, 11111111, \ldots\}$; $V = \{9, 16, 25, 36, \ldots\}$,

і діємо згідно з порядком підсумовування к.-с.п. (деталі викладу пропускаємо).

Описуємо m-серії:

$$K_u = (m, l_m, a_m) = \left(m, \begin{cases} 1, & m = 1 \\ m-1, & m > 1 \end{cases}, 2m+1\right);$$

а межам кортежів U-серії відповідають подвійні нерівності:

$$\begin{cases} 1, & \text{якщо } m = 1 \\ m(m-1)/2 + 2, & \text{якщо } m > 1 \end{cases} \le p \le m(m+1)/2;$$

для серій V маємо:

$$K_v = (m, l_m, a_m) = (m, 1, (m+2)^2),$$

номери p, що відповідають елементам V-серії залежно від m, такі: $p = m(m+1)/2 + 1$.

Знаходимо величини u, $|u|$, $|\bar{u}|$ і v, $|v|$, $|\bar{v}|$:

$$u = \left\lceil \frac{\sqrt{8p+1} - 1}{2} \right\rceil, \quad |u| = \sum_{m=1}^{u} l_m = 1 + \frac{u(u+1)}{2}, \quad |\bar{u}| = p - \frac{u(u+1)}{2}; \tag{2}$$

$$v = \left\lfloor \frac{\sqrt{8p-7} - 1}{2} \right\rfloor, \quad |v| = v, \quad |\bar{v}| = p - v. \tag{3}$$

Підраховуємо суми елементів повних серій і неповної U-серії:

$$S_u^{\Sigma} = 3 + \frac{u}{6}(4u^2 + 3u - 7), \quad S_v^{\Sigma} = \frac{v}{6}(2v^2 + 15v + 37), \quad S_{\bar{u}}^{\Sigma} = (2u+3)(p - v - 1 - u(u-1)/2). \tag{4}$$

Записуємо загальний член послідовності p-х часткових сум:

$$S(p) = 4 + \frac{1}{6}\left(u(4u^2 + 3u - 7) + v(2v^2 + 15v + 37)\right) + (2u+3)(p - 2 - v - u(u-1)/2) \tag{5}$$

або

$$S(p) = 4 - (u^3 + 11u + 18)/3 + v(2v^2 + 15v + 37)/6 + (2u+3)(p - v) \tag{6}$$

де $u = \left\lfloor \dfrac{\sqrt{8p-7} - 1}{2} \right\rfloor$, $v = \left\lfloor \dfrac{\sqrt{|8p-15|} - 1}{2} \right\rfloor$.

Нижче наведено кілька перших членів відновленої послідовності.

p	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	…
S_p	1	4	13	18	34	41	48	73	82	91	100	136	…

Отримана послідовність використовується для опису аплікат при нумерації цілочислового простору $\mathbf{Z}_+^3$. Аналогічно можна встановити логічне доповнення [10] отриманої послідовності до послідовності натуральних чисел, скінченні різниці якого міститимуть серії одиниць і двійок.

Квадратна нумерація на площині (в $\mathbf{Z}^2$). Нумерація цілих точок першого квадранта декартової площини здійснюється за схемою (рис. 1) згідно з табл. 1.

Точки площини, координатами яких є цілі числа, коротко називають цілими точками. Нумерацію цілих точок будемо проводити по ламаній, починаючи з точки, якій належать точки сторін квадратів довжини 1, 2, 3,... (див. рис. 1)..

Координати точки як функції її номера. Для установлення зв'язку між номерами цілих точок n і їхніми координатами – $x = x(n)$, $y = y(n)$, вводимо в розгляд суму ($x + y$) і різницю ($x - y$) координат, і відповідно доданки $S^+ = S^+(n)$ і $S^- = S^-(n)$, які доповнюють суму і різницю координат до номера n (див. табл. 1):

$$x + y + S^+ = n\ ,\ x - y + S^- = n\ . \tag{7}$$

Вирази для S^+, S^- знайдемо за їхніми скінченними різницями d^+, d^-, які складають кортежі (серії) нулів і двійок.

Підсумовування послідовностей, що містять стаціонарні кортежі – серії, здійснюємо запропонованим методом повних і неповних сум (ПНС).

Аналізуємо у світлі методу ПНС послідовності $d^+ = d^+(n)$, $d^- = d^-(n)$ (табл. 2):

Таблиця 1

Фрагмент таблиці нумерації точок

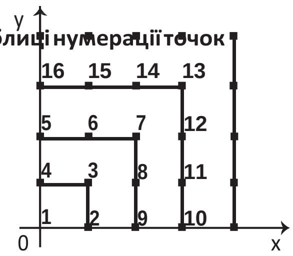

Рис. 1. Схема нумерації

n	(x, y)	$x+y$	S^+	$x-y$	S^-
1	0 0	0	1	0	1
2	1 0	1	1	1	1
3	1 1	2	1	0	3
4	0 1	1	3	-1	5
5	0 2	2	3	-2	7
6	1 2	3	3	-1	7
7	2 2	4	3	0	7
8	2 1	3	5	1	7
9	2 0	2	7	2	7
10	3 0	3	7	3	7
11	3 1	4	7	2	9
12	3 2	5	7	1	11
13	3 3	6	7	0	13
14	2 3	5	9	-1	15
15	1 3	4	11	-2	17
16	0 3	3	13	-3	19

Для $d^+(n)\ /\ 2$ маємо:

- початок серій нулів (0-серій): 1, 4, 9, ... , m^2,… (m – номер серії);
- кінець серій нулів: 2, 6, 12, … $m(m+1)$, … .

Отже, для 0-серій $m^2 \le n \le m(m+1)$, звідки знаходимо довжину кожної серії l_m , число повних серій u і кількість елементів у них $|u|$,а також число елементів неповної серії $|\bar{u}|$:

Таблиця 2

Таблиця скінченних різниць послідовностей S^+, S^-

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17
$d^+(n)/2$	0	0	1	0	0	0	1	1	0	0	0	0	1	1	1	0	0
$d^-(n)/2$	0	1	1	1	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	0

$$l_m = m+1,\ u = [(\sqrt{4n+1}-1)/2]\ ,\ |u| = \sum_{m=1}^{u} l_m = u(u+3)/2\ ,\ |\bar{u}| = n - u(u+3)/2 \tag{8}$$

Зрозуміло, що суми елементів повних 0-серій і неповної серії дорівнюють нулю:

$$S_u^{\text{п}} = \sum_{m=1}^{u} a_m l_m = 0\ ,\ S_{\bar{u}}^{\text{і}} = 0 \cdot |\bar{u}| = 0\ . \tag{9}$$

Аналогічно для серій одиниць маємо (див. табл. 2):

– початок 1-серій: 3, 7, 13, 21, … , $m(m+1)+1$, …;

– кінець серій одиниць: 3, 8, 15, ... $m(m+2)$, … .

Отже, для 1-серій $m(m+1)+1 \le n \le m(m+2)$, звідки знаходимо довжину кожної серії l_m, число повних се- рій v і кількість елементів у них $|v|$, а також число елементів неповної серії $|\bar{v}|$:

$$L_m = m,\ v = [\sqrt{n+1}] - 1,\quad |v| = \sum_{m=1}^{v} m = v(v+1)/2,\quad |\bar{v}| = n - v(v+1)/2 \tag{10}$$

Підраховуємо суми елементів повних і неповних 1-серій:

$$S_v^{і} = \sum_{m=1}^{v} a_m l_m = \sum_{m=1}^{v} m = \frac{v(v+1)}{2};\quad \forall(u=v):\ S_v^{н}=0;\ \forall(u=v+1):\ S_v^{н} = n - \frac{v(v+1)}{2} - \frac{u(u+3)}{2} \tag{11}$$

Отже, загальний член послідовності $d^+(n)$ має вигляд:

$$d^+(n) = v(v+1) + (u-v)(2n - u(u+3) - v(v+1)),$$

або

$$d^+(n) = (2n - u(u+3))(u-v) - v(v+1)(u-v-1),$$

а загальний член послідовності $S^+(n)$ описується формулою:

$$S^+(n) = 1 + (2(n-1) - u(u+3))(u-v) + v(v+1)(1+v-u), \tag{12}$$

де u і v підраховуються для $n-1$: $u = [(\sqrt{4n-3}-1)/2]$, $v = [\sqrt{n}]-1$.

Аналогічні міркування (деталі наводити не будемо) приводять до формули загального елемента послі- довності $S^- = S^-(n)$:

Для $d^-(n)/2$ маємо:

– початок 0-серій: 1, 5, 17, … , $4(m-1)^2+1$, … ;

– кінець серій нулів: 1, 9, 25, … $(2m+1)^2$, … .

Отже, для 0-серій $4(m-1)^2+1 \le n \le (2m+1)^2$, звідки знаходимо довжину кожної серії l_m, число повних серій u і кількість елементів у них $|u|$, а також число елементів неповної серії $|\bar{u}|$:

$$l_m = 4m-3,\quad u = [(\sqrt{n}+1)/2],\quad |u| = \sum_{m=1}^{u} l_m = u(2u-1),\ |\bar{u}| = n - u(2u-1),\ S^{і}_u = S^{і}_{\bar{u}} = 0 \tag{13}$$

Аналогічним чином для серій одиниць маємо (див. табл. 2):

– початок 1-серій: 2, 10, 26, ... , $(2m-1)^2+1$, …;

– кінець серій одиниць: 4, 16, 36, ... $4m^2$, … .

Отже, для 1-серій $(2m-1)^2+1 \le n \le 4m^2$, звідки знаходимо довжину кожної серії l_m, число повних серій v і кількість елементів у них $|v|$, а також число елементів неповної серії $|\bar{v}|$:

$$l_m = 4m-1,\ v = [\sqrt{n}/2],\ |v| = v(2v+1),\quad |\bar{v}| = n - v(2v+1). \tag{14}$$

Підраховуємо суми елементів повних і неповних 1-серій:

$$S^{п} = \sum_{m=1}^{v} a_m l_m = \sum_{m=1}^{v} (4m-1) = v(2v+1);\quad \forall(u=v):\ S_v^{н}=0;\ \forall(u=v+1):\ \forall(u=v+1):\ S_v^{н} = n - u(2u-1) - v(2v+1) \tag{15}$$

Отже, загальний член послідовності $d^-(n)$ має вигляд:

$$d^-(n) = 2\big(v(2v+1) + (u-v)(n - u(2u-1) - v(2v+1))\big),$$

або

$$d^{-}(n) = 2\big((n - u(2u-1))(u-v) - v(2v+1)(u-v-1)\big),$$

а загальний член послідовності $S^{+}(n)$ описується формулою:

$$S^{-}(n) = 1 + 2\big((n-1-u(2u-1))(v-u) + v(2v+1)(1+v-u)\big) \qquad (16)$$

де u і v підраховуються для $n-1$: $u = [(\sqrt{n-1}+1)/2]$, $v = [\sqrt{n-1}/2]$.

На підставі (7), (12), (16) отримуємо:

$$x = x(n) = n - \frac{1}{2}(S^{+}(n) + S^{-}(n)), \qquad y = y(n) = \frac{1}{2}(S^{-}(n) - S^{+}(n)) \qquad (17)$$

формули визначення координат точки (x, y) за її номером n.

Співвідношення (17): $x = x(n)$, $y = y(n)$, є параметричними рівняннями координат точки, де роль параме- тра відіграє її номер.

Нумерація цілих точок простору $\mathbf{Z}^3_+$ здійснюється методом, який називається **методом обведення-підйому-спуску (ОПС).**

За аналогією з нумерацією в $\mathbf{Z}^2_+$ множинам цілих точок із $\mathbf{Z}^3_+$ поставимо у відповідність куби з довжиною ребра k і назвемо їх ***k*-кубами.**

Кожен k-куб визначається $(k+1)$-м перерізом: $z = 0, 1, 2, \ldots, k$, і містить у собі всі попередні (за номером) куби.

На рис. 2 наведено зображення точок 2-куба і ламану, якій належать усі його цілі точки.

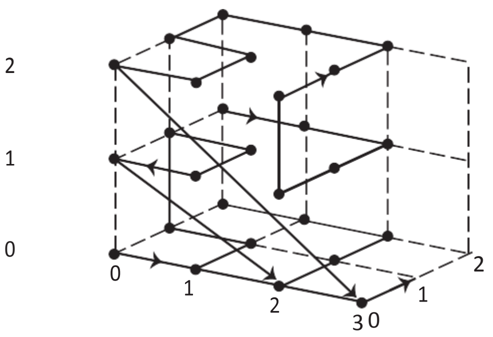

Рис. 2. **Порядок нумерації точок 2-куба**

Стрілочками, починаючи з точки (0, 0, 0), показано на- прям просування ламаною, а за похилими ланками ламаної здійснюється перехід до точок наступного куба.

У процесі нумерації чітко прослідковуються чотири етапи:

1) обведення точок першого перерізу куба, що не належать $(k–1)$-кубу;

2) підйом на одиницю (до другого перерізу);

3) обведення точок другого перерізу куба, що не належать $(k–1)$-кубу;

Названі етапи повторюються до обведення точок $(k+1)$-го перерізу, останньою з яких є точка .

4) спуск похилою на k одиниць (у точку $(k+1, 0, 0)$) для обведення точок першого перерізу $(k+1)$-куба, що не належать k-кубу.

Апліката z відновлюється за різницями.

Постановка задачі:

$$U = x^2 + y^2 + z^3 - xy - 5x + 6z \to \max(\min);$$

$$\begin{cases} z - 2.25 + \sqrt{0.5625 - (x-1.5)^2 - (y-1.5)^2} \le 0 \\ z - (x-1.5)^2 - (y-1.5)^2 \ge 0 \\ z - 2.25 \le 0 \end{cases};$$

$x \ge 0,\ y \ge 0,\ z \ge 0$; $x \in \mathbf{Z}$, $y \in \mathbf{Z}$, $z \in \mathbf{Z}$.

Розв’язання задачі здійснювалося в середовищі ППП MatLab [7].

Областю D є тіло, обмежене нижньою півсферою радіуса 0,75 з центром у точці (1,5; 1,5; , 2,25), круговим параболоїдом з віссю симетрії $x = 1{,}5$; $y = 1{,}5$; $z = t$, $t \in (-\infty, +\infty)$, і площиною $z = 2{,}25$.

На рис. 3 зображено: цілі точки 3-куба (*), цілі точки ( ) в області обмежень (кружки накладені на зірочки), квадратиками – точки max: (1, 2, 2) і min: (2, 1, 1). Відповідні значення функції цілі: $U_{\max} = 18, U_{\min} = 0$.

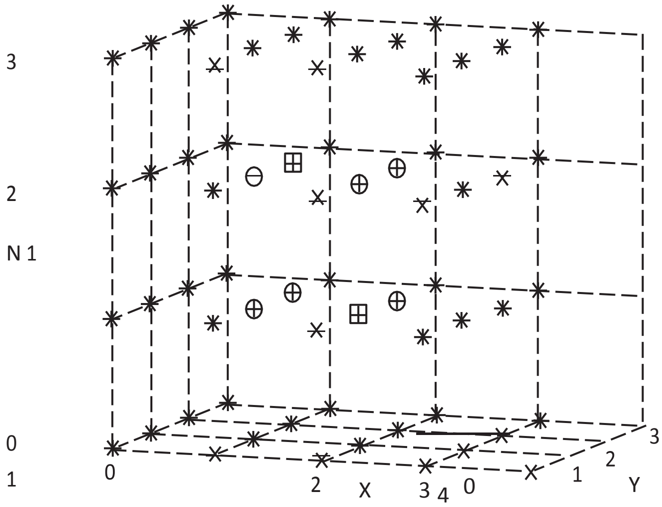

Рис. 3. **Накладання цілочислової сітки**

Зауважимо, що ця задача не піддається розв'язанню іншими точними методами математичного програмування.

Висновок:

1) метод НЦС застосовний до задач дискретного математичного програмування, функцією цілі якої може бути довільна обмежена в розглядуваній області функція;

2) область допустимих значень змінних – будь-яка замкнена область, у тому числі многозв'язна, з межею із кусків неперервних кривих чи поверхонь;

3) метод з успіхом можна застосовувати для моделювання нелінійних процесів в економіці (як і взагалі нелінійних динамічних процесів).

Напрям подальших досліджень полягає в розв'язанні задачі цілочислової нумерації точок у просторі $\mathbf{Z}^{\mathbf{n}}$, де $n > 3$, і використанні здобутків у математичному моделюванні за- дач кристалографії.

Недоліки методу НЦС пов'язані з експоненціальним зростанням кількості даних через збільшення вимірнос- ті простору. За таких обставин слід упровадити цілеспрямований перебір цілих точок.

Література: 1. Сенчуков В. Ф. Цілочислові сітки на площині в задачах дискретної оптимізації / В. Ф. Сенчуков // Економіка розвитку. – 2014. – № 3 (71). – С. 107–112. **2.** Татар М. С. Економіко-математичне моделювання системної діагностики конкурентоспроможності підприємств / М. С. Татар // Актуальні проблеми економіки. – 2012. – № 5 (131). – С. 305–313. **3.** Габасов Р. Методы оптимизации / Р. Габасов, Ф. М. Кириллова, В. В. Альсевич, А. И. Калинин, В. В. Крахотко, Н. С. Павленок. – Минск : Четыре четверти, 2011. – 474 с. **4.** Корбут А. А. Дискретное программирование / А. А. Корбут, Ю. Ю. Финкельштейн. – М. : Наука, 1969. – 368 с. (Серия «Экономико-математическая библиотека»). **5.** Финкельштейн Ю. Ю. Приближенные методы и прикладные задачи дискретного программирования / Ю. Ю. Финкельштейн. – М.: Наука, 1976. – 265 с. **6.** Сигал И. Х. Введение в прикладное дискретное программирование: модели и вычислительные алгоритмы / И. Х. Сигал, А. П. Иванова. – М. : Вильямс, 2007. – 304 с. **7.** Курбатова Е. А. MATLAB 7. Самоучитель / Е. А. Курбатова. – М. : Вильямс, 2006. – 256 с. **8.** Ершов Ю. Л. Теория нумераций / Ю. Л. Ершов. – М. : Наука, 1977. – 416 с. **9.** Серпинский В. Сто простых, но одновременно трудных вопросов арифметики / В. Серпинский. – М. : Учпедгиз, 1961. – 76 с. **10.** Сенчуков В. Ф. Логические операции над последовательностями и закон простых чисел / В. Ф. Сенчуков // Доклады АН УССР. Серия А. – 1988. – № 6. – С. 20–23.

***References*: 1.** Senchukov V. F. *Tsilochislovi sitky na ploshchyni v zadachakh dyskretnoi optymizatsii* [Integral lattices on a plane in discrete optimization problems] / V. F. Senchukov // Ekonomika rozvytku. – 2014. – No. 3 (71). – P. 107–112. **2.** Tatar M. S. *Ekonomiko-matematychne modelyuvannia systemnoi diahnostyky konkurentospromozhnosti pidpryemstv* [Economic mathematical modelling of system diagnostics of enterprises competitiveness] / M. S. Tatar // Aktualni problemy ekonomiky. – 2012. – No. 5 (131). – P. 305–313. **3.** Gabasov R. *Metody optimizatsii* [Optimization techniques] / R. Gabasov, F. M. Kirillova, V. V. Alsevich et al. – Minsk : Chetyre chetverti, 2011. – 474 p. **4.** Korbut A. A. *Diskretnoye programmirovaniye* [Discrete programming] / A. A. Korbut, Yu. Yu. Finkelshteyn. – M. : Nauka, 1969. – 368 p. (Seriya “Ekonomiko-matematicheskaya biblioteka”). **5.** Finkelshteyn Yu. Yu. *Priblizhennyye metody i prikladnyye zadachi diskretnogo programmirovaniya* [Approximate methods and applied tasks of discrete programming] / Yu. Yu. Finkelshteyn. – M. : Nauka, 1976. – 264 p. **6.** Sigal I. Kh. *Vvedeniye v prikladnoye diskretnoye programmirovaniye: modeli i vychislitelnyye algoritmy* [Introduction to applied discrete programming: models and computational algorithms] / I. Kh. Sigal, A. P. Ivanova. – M. : Vilyams, 2007. – 304 p. **7.** Kurbatova E. A. MATLAB 7. Samouchitel / E. A. Kurbatova. – M. : Vilyams, 2006. – 256 p. **8.** Ershov Yu. L. *Teoriya numeratsiy* [Theory of enumerations] / Yu. L. Ershov. – M. : Nauka, 1977. – 416 p. **9.** Serpinskiy V. *Sto prostykh i odnovremenno trudnykh voprosov arifmetiki* [Hundred simple but at the sometime difficult questions of arithmetic] / V. Serpinskiy. – M. : Uchpedgiz, 1961 – 76 p. **10.** Senchukov V. F. *Logicheskiye operatsii nad posledovatelnostyami i zakon prostykh chisel* [Logical operations on sequences and prime number theorem] / V. F. Senchukov // Doklady AN USSR. Seriya A. – 1988. – No. 6. – P. 20–23.

Інформація про автора

Сенчуков Віктор Федорович – канд. фіз.-мат. наук, доцент кафедри вищої математики й економіко-математичних методів Харківського національного економічного університету імені Семена Кузнеця (пр. Леніна, 9-А, м. Харків, Україна, 61116, e-mail: Viktor.Senchukov@m.hneu.edu.ua).

Информация об авторе

Сенчуков Виктор Федорович – канд. физ.-мат. наук, доцент кафедры высшей математики и экономико-математических методов Харьковского национального экономического университета имени Семена Кузнеца (пр. Ленина, 9-А, г. Харьков, Украина, 61116, e-mail:Viktor.Senchukov@m.hneu.edu.ua).

Information about the author

V. Senchukov – PhD in Physics and Mathematics, Senior Lecturer of the Department of Higher Mathematics and Economics and Mathematical Methods of Simon Kuznets Kharkiv National University of Economics (9-A Lenin Ave., Kharkiv, Ukraine, 61116, e-mail: Viktor.Senchukov@m.hneu.edu.ua).

Стаття надійшла до ред.
14.05.2015 р.