МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ

ХАРКІВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ ЕКОНОМІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ
ІМЕНІ СЕМЕНА КУЗНЕЦЯ

Методичні рекомендації
до виконання контрольної роботи
з навчальної дисципліни
"ВИЩА ТА ПРИКЛАДНА МАТЕМАТИКА"
(розділи вищої математики)

для студентів галузі знань
0306 "Менеджмент і адміністрування"
заочної форми навчання

Харків. ХНЕУ ім. С. Кузнеця, 2015

Затверджено на засіданні кафедри вищої математики та економіко-математичних методів.

Протокол № 3 від 22.10.2014 р.

Укладачі: Ігначкова А. В.
Широкорад Л. Д.

М 54 Методичні рекомендації до виконання контрольної роботи з навчальної дисципліни "Вища та прикладна математика" (розділи вищої математики) для студентів галузі знань 0306 "Менеджмент і адміністрування" заочної форми навчання / уклад. А. В. Ігначкова, Л. Д. Широкорад. – Х. : ХНЕУ ім. С. Кузнеця, 2015. – 52 с. (Укр. мов.)

Наведено завдання до контрольної роботи з вищої математики, а також зразок їх виконання. Розв'язання прикладів супроводжується стислим викладом теоретичних положень та поясненнями.

Рекомендовано для студентів галузі знань 0306 "Менеджмент і адміністрування" заочної форми навчання.

Вступ

Основною формою роботи студента-заочника є самостійний розгляд навчального матеріалу й виконання контрольних робіт.

Навчальним планом з вищої математики передбачається виконання однієї контрольної роботи, яка складається з 9 завдань, кожне з яких містить 20 варіантів. Студент обирає номер варіанта за двома останніми цифрами його залікової книжки, користуючись приведеною нижче таблицею.

Контрольну роботу треба виконувати в окремому зошиті. Всі завдання розташовуються в порядку зростання їх номерів.

До кожного завдання є зразок його виконання. Іспит можуть складати ті студенти, які виконали контрольну роботу в повному обсязі.

Таблиця для визначення номера варіанта контрольної роботи:

Дві останні цифри залікової книжки	Номер варіанта
01, 21, 41, 61, 81	1
02, 22, 42, 62, 82	2
…………………………..	………..
09, 29, 49, 69, 89	9
10, 30, 50, 70, 90	10
11, 31, 51, 71, 91	11
12, 32, 52, 72, 92	12
………………………………	……….
19, 39, 59, 79, 99	19
00, 20, 40, 60, 80	20

Завдання контрольної роботи

Завдання 1.

Розв'язати систему рівнянь:
1) за формулами Крамера;
2) методом Жордана – Гаусса.

1. $\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 3x_3 = -3; \\ 2x_1 - x_2 + 4x_3 = 9; \\ 3x_1 + x_2 + 5x_3 = 14. \end{cases}$

2. $\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 = 4; \\ 3x_1 - 2x_2 + 5x_3 = 4; \\ 2x_1 - x_2 + x_3 = 1. \end{cases}$

3. $\begin{cases} 2x_1 + x_2 - 4x_3 = -1; \\ x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 5; \\ 3x_1 - x_2 + x_3 = 3. \end{cases}$

4. $\begin{cases} x_1 + x_2 - 4x_3 = -6; \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 9; \\ 3x_1 - x_2 + 4x_3 = 10. \end{cases}$

5. $\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 = 1; \\ 2x_1 - 3x_2 + x_3 = 1; \\ 3x_1 + x_2 + x_3 = 6. \end{cases}$

6. $\begin{cases} x_1 - x_2 - 3x_3 = -6; \\ 3x_1 + 2x_2 + 5x_3 = 15; \\ 2x_1 - x_2 + x_3 = 3. \end{cases}$

7. $\begin{cases} 2x_1 + 4x_2 - x_3 = 4; \\ x_1 + x_2 + 2x_3 = 4; \\ 3x_1 - x_2 + x_3 = 4. \end{cases}$

8. $\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 = 1; \\ x_1 + 3x_2 + 3x_3 = 10; \\ 3x_1 - x_2 + x_3 = 4. \end{cases}$

9. $\begin{cases} x_1 - 4x_2 - 3x_3 = 5; \\ 2x_1 - x_2 + 4x_3 = 3; \\ 3x_1 + x_2 + x_3 = 2. \end{cases}$

10. $\begin{cases} x_1 - 4x_2 - x_3 = 5; \\ 3x_1 + 2x_2 + 5x_3 = 1; \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 = 3. \end{cases}$

11. $\begin{cases} 2x_1 + x_2 - 4x_3 = -4; \\ x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 5; \\ 3x_1 - x_2 + x_3 = -4. \end{cases}$

12. $\begin{cases} x_1 + 4x_2 - 4x_3 = 3; \\ x_1 - 2x_2 + 3x_3 = -2; \\ 2x_1 - x_2 + 4x_3 = 0. \end{cases}$

13. $\begin{cases} x_1 + 4x_2 - x_3 = 10; \\ 2x_1 - 3x_2 + x_3 = -5; \\ x_1 + x_2 + 3x_3 = 0. \end{cases}$

14. $\begin{cases} x_1 - 4x_2 + 3x_3 = -10; \\ 3x_1 + x_2 + 2x_3 = 3; \\ 2x_1 - x_2 - x_3 = 1. \end{cases}$

15. $\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - x_3 = 1; \\ x_1 + 2x_2 + x_3 = 4; \\ 3x_1 - x_2 + 2x_3 = 3. \end{cases}$ 16. $\begin{cases} x_1 + 5x_2 - x_3 = 6; \\ x_1 + 3x_2 + x_3 = 6; \\ 3x_1 - x_2 + \quad = 5. \end{cases}$

17. $\begin{cases} 3x_1 + x_2 - 5x_3 = 2; \\ x_1 - 2x_2 + x_3 = 1; \\ 2x_1 - x_2 + x_3 = 4. \end{cases}$ 18. $\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 = 5; \\ x_1 + 3x_2 + 3x_3 = -2; \\ 2x_1 - x_2 + 4x_3 = -7. \end{cases}$

19. $\begin{cases} x_1 + 3x_2 + x_3 = 2; \\ 2x_1 - 3x_2 + x_3 = -3; \\ x_1 + 4x_2 + 3x_3 = -1. \end{cases}$ 20. $\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 = 5; \\ 2x_1 - x_2 + x_3 = 2; \\ x_1 + 4x_2 + 3x_3 = 3. \end{cases}$

Завдання 2.

Задані координати вершин $A\ \ x_1; y_1$, $B\ \ x_2; y_2$, $C\ \ x_2; y_2$.

Знайти:

1) рівняння сторони AB;

2) рівняння медіани AM;

3) рівняння висоти CD;

4) довжини сторони AB, медіани AM, висоти CD;

5) внутрішній кут A;

6) площу трикутника.

1. $A\ \ 1;-1$, $B\ \ 7;2$, $C\ \ 4;3$. 2. $A\ \ 3;0$, $B\ \ 9;3$, $C\ \ 6;4$

3. $A\ \ 3;-2$, $B\ \ 9;1$, $C\ \ 6;2$. 4. $A\ \ -3;1$, $B\ \ 3;4$, $C\ \ 0;5$.

5. $A\ \ -1;0$, $B\ \ 5;3$, $C\ \ 2;4$. 6. $A\ \ 2;2$, $B\ \ 8;5$, $C\ \ 5;6$.

7. $A\ \ -3;0$, $B\ \ 3;3$, $C\ \ 0;4$. 8. $A\ \ 2;1$, $B\ \ 8;4$, $C\ \ 5;5$.

9. $A\ \ -2;-2$, $B\ \ 4;1$, $C\ \ 1;2$. 10. $A\ \ 1;3$, $B\ \ 7;6$, $C\ \ 4;7$.

11. $A\ \ -4;-1$, $B\ \ 2;2$, $C\ \ -1;3$. 12. $A\ \ 3;3$, $B\ \ 9;6$, $C\ \ 6;7$.

13. $A\ \ -2;1$, $B\ \ 4;4$, $C\ \ 1;5$. 14. $A\ \ 3;-2$, $B\ \ 0;4$, $C\ \ -1;1$.

15. $A\;\;2;1\;\;,\;B\;\;8;4\;\;,\;C\;\;5;5\;\;.$ 16. $A\;\;-2;2\;\;,\;B\;\;4;5\;\;,\;C\;\;1;6\;\;.$

17. $A\;\;2;-1\;\;,\;B\;\;8;2\;\;,\;C\;\;5;3\;\;.$ 18. $A\;\;0;2\;\;,\;B\;\;6;5\;\;,\;C\;\;3;6\;\;.$

19. $A\;\;2;-2\;\;,\;B\;\;8;1\;\;,\;C\;\;5;2\;\;.$ 20. $A\;\;-1;-2\;\;,\;B\;\;5;1\;\;,\;C\;\;2;2\;\;.$

Завдання 3.

Знайти границі функцій:

1. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{5x^2+2x-2}{2x^2-3x+1}$; б) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2+4x-5}{x^2-1}$; в) $\lim\limits_{x\to 10}\dfrac{\sqrt{x-1}-3}{x-10}$;

г) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 8x}{1-\cos 4x}$; д) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{5}{x}\right)^{2x-1}$.

2. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^2+2x+2}{2x^2-5x+1}$; б) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2+7x-8}{x^2+3x-4}$; в) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sqrt{5x-1}-3}{x-2}$;

г) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 6x}{1-\cos 4x}$; д) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{3}{x}\right)^{4x-1}$.

3. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{7x^2+3x-1}{2x^2+5x+1}$; б) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-7x+10}{x^2+3x-10}$; в) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sqrt{2x-1}-\sqrt{3}}{x-2}$;

г) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 6x}{2x^2}$; д) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1-\dfrac{3}{x}\right)^{4x-1}$.

4. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{17x^2+3x-1}{2x^2-5x+1}$; б) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-7x+10}{2x^2+3x-14}$; в) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{\sqrt{2x+1}-\sqrt{7}}{x-3}$;

г) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x\sin 2x}{2x^2}$; д) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{3}{2x}\right)^{4x+1}$.

5. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{10x^2+13x-1}{2x^2-6x+1}$; б) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{2x^2-3x-2}{x^2+2x-8}$; в) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x-2}{\sqrt{3x-2}-2}$;

г) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x\cdot tg 2x}{4x^2}$; д) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+1}{x}\right)^{3x-1}$.

6. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{15x^2+3x-2}{3x^2-5x+1}$; б) $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{3x^2+4x-7}{x^2-1}$; в) $\lim\limits_{x\to5}\dfrac{x-5}{\sqrt{2x+6}-4}$;

г) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1-\cos16x}{1-\cos4x}$; д) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{8}{x}\right)^{5x-1}$.

7. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^2-13x+6}{4x^2-6x+1}$; б) $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{x^2+3x-10}{2x^2-3x-2}$; в) $\lim\limits_{x\to3}\dfrac{x-3}{\sqrt{3x+7}-4}$;

г) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin 2x\cdot tgx}{4x^2}$; д) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+2}{x}\right)^{3x-1}$.

8. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{8x^2+2x-7}{4x^2-x+1}$; б) $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^2+6x-7}{x^2-1}$; в) $\lim\limits_{x\to4}\dfrac{\sqrt{2x+1}-3}{x-4}$;

г) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1-\cos8x}{8x^2}$; д) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1-\dfrac{5}{x}\right)^{3x+1}$.

9. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{12x^2-2x+2}{2x^2-15x+1}$; б) $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^2+9x-10}{x^2-3x+2}$; в) $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{\sqrt{6x+4}-4}{x-2}$;

г) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{4x^2}{1-\cos4x}$; д) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{6}{x}\right)^{5x-1}$.

10. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2+3x+1}{2x^2-5x+1}$; б) $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{2x^2-x-6}{x^2+3x-10}$; в) $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\sqrt{2x+1}-\sqrt{3}}{x-1}$;

г) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1-\cos16x}{8x^2}$; д) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1-\dfrac{10}{x}\right)^{4x-1}$.

11. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{16x^2-2x+13}{2x^2+3x+4}$; б) $\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{x^2+4x+3}{x^2-3x-4}$; в) $\lim\limits_{x\to3}\dfrac{2x-6}{\sqrt{3x}-3}$;

г) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin 2x-\sin x}{6x}$; д) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+1}{x+3}\right)^{4x-1}$.

12. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{9x^2+2x-2}{2x^2-3x+1}$; б) $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{2x^2+7x-9}{x^2+3x-4}$; в) $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{\sqrt{6x-1}-\sqrt{11}}{x-2}$;

г) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{3x^2}{1-\cos4x}$; д) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{3}{4x}\right)^{4x+1}$.

13. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2+3x-11}{2x^2-5x+1}$; б) $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{x^2+7x-18}{2x^2+3x-14}$; в) $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{x-2}{\sqrt{4x+1}-3}$;

г) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1-\cos6x}{\sin^2x}$; д) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1-\dfrac{3}{2x}\right)^{2x+5}$.

14. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{7x^2+3x-1}{14x^2-5x+1}$; б) $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{x^2-3x+2}{2x^2+3x-14}$; в) $\lim\limits_{x\to-3}\dfrac{\sqrt{2x+10}-2}{x+3}$;

г) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x\cdot tgx}{4x^2}$; д) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x-2}{x+3}\right)^{4x+1}$.

15. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{10x^2+3x-7}{5x^2-6x-1}$; б) $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{x^2+8x-20}{2x^2+2x-12}$; в) $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{x-2}{\sqrt{5x-1}-3}$;

г) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin x\cdot tg3x}{4x^2}$; д) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x-1}{x}\right)^{4x-1}$.

16. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{5x^2+3x-12}{10x^2-5x+1}$; б) $\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{3x^2-4x-7}{x^2-1}$; в) $\lim\limits_{x\to5}\dfrac{x-5}{\sqrt{2x-6}-2}$;

г) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1-\cos10x}{1-\cos14x}$; д) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1-\dfrac{8}{x}\right)^{3x-1}$.

17. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^2-16x-5}{4x^2+6x+1}$; б) $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{x^2+5x-14}{2x^2-3x-2}$; в) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{2x}{\sqrt{5x+9}-3}$;

г) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin2x}{3tgx}$; д) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x-2}{x}\right)^{7x-1}$.

18. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{18x^2+2x-7}{9x^2-3x+1}$; б) $\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{x^2+5x+4}{x^2-1}$; в) $\lim\limits_{x\to4}\dfrac{\sqrt{x+12}-4}{x-4}$;

г) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1-\cos18x}{8x^2}$; д) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+5}{x-2}\right)^{3x+1}$.

19. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{12x^2+2x-3}{2x^2-5x+1}$; б) $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^2-9x+8}{x^2-3x+2}$; в) $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{\sqrt{2x+5}-3}{x-2}$;

г) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{4x^2}{\sin x\cdot tg4x}$; д) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{6}{x}\right)^{6x-1}$.

20. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{12x^2+3x+8}{2x^2-5x+11}$; б) $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{2x^2+x-10}{x^2+3x-10}$; в) $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\sqrt{5x+4}-3}{2x-2}$;

г) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1-\cos16x}{10x^2}$; д) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1-\dfrac{10}{x}\right)^{2x+1}$.

Завдання 4.

Знайти похідні заданих функцій.

1. а) $y=\sqrt{x}+\cos x$; б) $y=\ln x\cdot tgx$;

в) $y=\dfrac{\sin x}{e^x}$; г) $y=\left(6x^3-\cos\ln x\right)^3$.

2. а) $y=ctgx-2x^5$; б) $y=\cos x\cdot tgx$;

в) $y=\dfrac{\cos x}{e^x}$; г) $y=\left(2x^4-\ln\sin x\right)^5$.

3. а) $y=e^x+ctgx$; б) $y=\sqrt{x}\cdot tgx$;

в) $y=\dfrac{\ln x}{e^x}$; г) $y=\left(\sin5x-\cos\ln x\right)^4$.

4. а) $y=tgx-3x^5$; б) $y=\cos x\cdot e^x$;

в) $y=\dfrac{\ln x}{ctgx}$; г) $y=\left(e^{-2x}+\ln\sin x\right)^5$.

5. а) $y = arctgx + \cos x$; б) $y = \ln x \cdot e^x$;

в) $y = \dfrac{\ln x}{\sin x}$; г) $y = \left(\sqrt{2x} + \ln\cos x\right)^3$.

6. а) $y = tgx - \sqrt[3]{x}$; б) $y = \cos x \cdot \ln x$;

в) $y = \dfrac{\arcsin x}{e^x}$; г) $y = \left(ctgx^4 - \ln\sin x\right)^4$.

7. а) $y = \sin x - \arcsin x$; б) $y = x^4 \cdot artgx$;

в) $y = \dfrac{x^5}{e^x}$; г) $y = \left(5x^3 - \cos\ln x\right)^3$.

8. а) $y = ctgx - 2x^5$; б) $y = \cos x \cdot tgx$;

в) $y = \dfrac{\arcsin x}{e^x}$; г) $y = \left(e^{3x} - \ln\sin x\right)^5$.

9. а) $y = \dfrac{1}{x^2} - arctgx$; б) $y = \sqrt{x} \cdot \ln x$;

в) $y = \dfrac{\ln x}{\sin x}$; г) $y = \left(\sin 3x + \cos\ln x\right)^3$.

10. а) $y = tgx + 3^x$; б) $y = \cos x \cdot \arcsin x$;

в) $y = \dfrac{e^x}{ctgx}$; г) $y = \left(\sin^2 x - \ln\ln x\right)^5$.

11. а) $y = arctgx - \sin x$; б) $y = \ln x \cdot \sqrt{x}$;

в) $y = \dfrac{4^x}{ctgx}$; г) $y = \left(\arcsin\dfrac{1}{x} + \ln\cos x\right)^3$.

12. а) $y = arctgx + \sqrt[3]{x}$; б) $y = \left(1 + \cos x\right)\ln x$;

в) $y = \dfrac{\arcsin x}{e^x}$; г) $y = \left(ctgx^3 - \ln\sin x\right)^2$.

13. а) $y = \sin x - \arcsin x$; б) $y = \sqrt[3]{x} \cdot artgx$;

в) $y = \dfrac{ctgx}{e^x}$; г) $y = \left(tgx^3 + \cos\ln x\right)^5$.

14. а) $y = arctgx - 4x^6$; б) $y = 3^x \cdot tgx$;

в) $y = \dfrac{\arcsin x}{e^x}$; г) $y = \left(e^{7x} + \ln^2 \sin x\right)^3$.

15. а) $y = ctgx + \sqrt[4]{x}$; б) $y = \cos x \cdot arctgx$;

в) $y = \dfrac{\arcsin x}{\sqrt{x}}$; г) $y = \left(e^{3x} - \ln \sin x^2\right)^5$.

16. а) $y = \dfrac{1}{x^2} - \arcsin x$; б) $y = ctgx \cdot \ln x$;

в) $y = \dfrac{4^x}{\sin x}$; г) $y = \left(\sin^2 4x + \cos \ln x\right)^3$.

17. а) $y = \arcsin x - \cos x$; б) $y = \ln x \cdot \sqrt{x}$;

в) $y = \dfrac{ctgx}{3^x}$; г) $y = \left(arctg\dfrac{1}{x} + \cos^2 x\right)^3$.

18. а) $y = ctgx - \sqrt[3]{x}$; б) $y = \left(1 - \sin x\right) \cdot \ln x$;

в) $y = \dfrac{\arcsin x}{e^x}$; г) $y = \left(tgx^2 - \ln \cos x\right)^2$.

19. а) $y = 2ctgx - e^x$; б) $y = \cos x \cdot 2^x$;

в) $y = \dfrac{\arcsin x}{\sin x}$; г) $y = \left(tg^3 x - \ln \sin x\right)^4$.

20. а) $y = \dfrac{1}{x^3} + arctgx$; б) $y = \sqrt{x} \cdot ctgx$;

в) $y = \dfrac{\ln x}{\cos x}$; г) $y = \left(\sin^2 3x + tg \ln x\right)^4$.

Завдання 5.

Дослідити функцію і побудувати її графік.

1. $y = -x^3 + 3x + 2$.

2. $y = x^3 + 2x^2 - 7x + 4$.

3. $y = x^3 + 3x^2 + 3x$.

4. $y = x^3 - x^2 - 8x + 12$.

5. $y = x^3 - 4x^2 + 4x$.

6. $y = x^3 - x^2 + 6x - 4$.

7. $y = 2x^3 - 3x^2 + 1$.

8. $y = x^3 - 6x^2 + 9x - 4$.

9. $y = x^3 - 12x^2 + 36x$.

10. $y = x^3 + 3x^2 + 3x + 1$.

11. $y = x^3 - 12x$.

12. $y = 2x^3 + 3x^2 - 5$.

13. $y = \frac{1}{3}x^3 + x^2$.

14. $y = -\frac{1}{9}x^3 + x^2$.

15. $y = \frac{2}{3}x^3 + \frac{1}{3}x^2 - 1$.

16. $y = 2x^3 + 9x^2 + 12x$.

17. $y = \frac{1}{3}x^3 - x^2$.

18. $y = -\frac{1}{3}x^3 + 2x^2 - 4x$.

19. $y = x^3 - 5x^2 + 8x$.

20. $y = -\frac{1}{3}x^3 + x^2$.

Завдання 6.

Знайти невизначені інтеграли.

1. а) $\int\left(x^3 + \frac{1}{\sin^2 x}\right)dx$; б) $\int\cos(3x - 1)dx$;

в) $\int\frac{arctg^3 x}{1 + x^2}dx$; г) $\int x \cdot e^{-2x}dx$.

2. а) $\int\left(\sqrt{x} + \frac{1}{\cos^2 x}\right)dx$; б) $\int e^{-3x}dx$;

в) $\int\frac{\ln^2 x}{x}dx$; г) $\int x \cdot \sin 2x dx$.

3. а) $\int\left(e^x + \frac{1}{1 + x^2}\right)dx$; б) $\int\frac{1}{\cos^2 5x}dx$;

в) $\int\frac{\arcsin^3 x}{\sqrt{1 - x^2}}dx$; г) $\int x^2 \cdot \ln x dx$.

4. а) $\int\left(2^x+\frac{1}{x}\right)dx$; б) $\int\frac{1}{\sin^2 4x}dx$;

в) $\int e^{\cos 2x}\sin 2x dx$; г) $\int x\cdot\cos 3x dx$.

5. а) $\int\left(x^4+\frac{1}{\cos^2 x}\right)dx$; б) $\int\cos(2+3x)dx$;

в) $\int\frac{\sin 2x}{1-4\cos 2x}dx$; г) $\int(2x+3)\cdot e^{-2x}dx$.

6. а) $\int\left(\sqrt{x}+\frac{1}{4+x^2}\right)dx$; б) $\int\frac{1}{\cos^2 5x}dx$;

в) $\int\frac{\ln^4 x}{x}dx$; г) $\int(1-3x)\cdot\sin 2x dx$.

7. а) $\int\left(4^x+\frac{1}{\sqrt{16-4x^2}}\right)dx$; б) $\int\frac{1}{\sin^2 6x}dx$;

в) $\int e^{\sin 3x}\cos 3x dx$; г) $\int\frac{\ln x}{x^2}dx$.

8. а) $\int\left(x^4+\frac{1}{27+3x^2}\right)dx$; б) $\int\frac{1}{\cos^2 5x}dx$;

в) $\int\frac{\cos 3x}{1-4\sin 3x}dx$; г) $\int\ln x dx$.

9. а) $\int\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{\cos^2 x}\right)dx$; б) $\int\sin(2x+3)dx$;

в) $\int\frac{tg 2x}{\cos^2 2x}dx$; г) $\int(6x+3)\cdot e^{-5x}dx$.

10. а) $\int\left(\sqrt{x}+\frac{1}{\sqrt{16-4x^2}}\right)dx$; б) $\int\frac{1}{\sin^2(2x+1)}dx$;

в) $\int\frac{1}{x(1+\ln^2 x)}dx$; г) $\int x^3\ln x dx$.

11. а) $\int\left(e^x+\frac{1}{16+x^2}\right)dx$;   б) $\int\frac{1}{\sin^2 6x}dx$;

в) $\int\frac{e^{2tgx}}{\cos^2 x}dx$;   г) $\int x\cdot\ln(x-1)dx$.

12. а) $\int\left(2^x+\frac{1}{x^2-4}\right)dx$;   б) $\int\frac{1}{\sin^2 2x}dx$;

в) $\int\sqrt[3]{(1+e^{3x})^2}\,e^{3x}dx$;   г) $\int(4x-1)\cdot\cos 3x\,dx$.

13. а) $\int\left(3^x+\frac{1}{x^2-4}\right)dx$;   б) $\int\cos(2x+3)dx$;

в) $\int\frac{x}{(1+x^2)^2}dx$;   г) $\int(2x-3)\cdot e^{-2x}dx$.

14. а) $\int\left(\sqrt{x}+\frac{1}{16+4x^2}\right)dx$;   б) $\int\frac{1}{\cos^2(2x-1)}dx$;

в) $\int\frac{e^x}{\sqrt{1-e^{2x}}}dx$;   г) $\int\arcsin x\,dx$.

15. а) $\int\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{\sqrt{x^2-4}}\right)dx$;   б) $\int\sin(3x+3)dx$;

в) $\int\frac{1}{x\sqrt{9-\ln^2 x}}dx$;   г) $\int\frac{x}{\cos^2 x}dx$.

16. а) $\int\left(\sqrt{x}-\frac{1}{\sqrt{16-x^2}}\right)dx$;   б) $\int e^{-3x+2}dx$;

в) $\int\frac{1}{x(\ln^2 x-4)}dx$;   г) $\int\ln(x^2+1)dx$.

17. а) $\int\left(e^x+\frac{1}{16+4x^2}\right)dx$;   б) $\int\frac{1}{\cos^2 6x}dx$;

в) $\int\frac{e^{2ctgx}}{\sin^2 x}dx$;   г) $\int(x-1)\cdot\ln x\,dx$.

18. а) $\int\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2-9}\right)dx$;

б) $\int\frac{1}{\sqrt{1-4x^2}}dx$;

в) $\int\frac{\sqrt{\ln x+4}}{x}\,dx$;

г) $\int(2x+1)\cdot\cos 4x\,dx$.

19. а) $\int\left(5^x+\frac{1}{x^2+25}\right)dx$;

б) $\int e^{-5x+1}dx$;

в) $\int\frac{4}{x\ln^2 x}\,dx$;

г) $\int\sqrt{x}\ln x\,dx$.

20. а) $\int\left(\sqrt{x^3}-\frac{1}{x}\right)dx$;

б) $\int\frac{1}{\cos^2(4x-1)}dx$;

в) $\int\frac{e^x}{\sqrt{1+e^{2x}}}\,dx$;

г) $\int arctgx\,dx$.

Завдання 7.

Обчислити площу фігури, що обмежена лініями.

1. $y=x^2-8x+5$, $y=-x+5$.
2. $y=x^2-4x+4$, $y=-x+4$.
3. $y=x^2+6x+7$, $y=x+7$.
4. $y=x^2+2x-8$, $y=x+12$.
5. $y=-x^2+6x+5$, $y=x+5$.
6. $y=x^2-6x+7$, $y=-x+7$.
7. $y=-x^2-4x+5$, $y=2x+5$.
8. $y=x^2+6x$, $y=x+6$.
9. $y=-x^2+6x$, $y=x+4$.
10. $y=x^2-6x$, $y=x+8$.
11. $y=-x^2+3x$, $y=x-3$.
12. $y=x^2+4x$, $y=x+4$.

13. $y=-x^2+2x$, $y=x-2$.

14. $y=-x^2+8x+5$, $y=x+5$.

15. $y=-x^2+6x-5$, $y=-x+1$.

16. $y=x^2-8x$, $y=-x+8$.

17. $y=x^2+4x-5$, $y=-2x-5$.

18. $y=x^2-4x+6$, $y=-4x+7$.

19. $y=x^2+4x+4$, $y=x+4$.

20. $y=-x^2+4x+5$, $y=x+1$.

Завдання 8.

Знайти загальний розв'язок диференціальних рівнянь.

1. а) $y'+3x^2y=2xe^{-x^3}$; б) $3y''+5y'-8y=0.$

2. а) $y'-\dfrac{y}{x}=x\,sin\,x$; б) $5y''+7y'-12y=0.$

3. а) $y'+\dfrac{y}{x+1}=2x$; б) $y''-8y'-9y=0.$

4. а) $y'-4x^3y=4x^3$; б) $y''+6y'-7y=0.$

5. а) $y'\ \ x+2\ \ -y=\ \ x+2\ \ ^3x$; б) $y''-2y'+5y=0.$

6. а) $y'-2xy=2x^3$; б) $y''+2y'-3y=0.$

7. а) $y'+2y\,sin\,x=sin\,x$; б) $y''-9y'+20y=0.$

8. а) $y'+\dfrac{2y}{x}=\dfrac{1}{x^2}$; б) $y''-12y'+35y=0.$

9. а) $y'+2xy=x\cdot e^{-x^2}$; б) $y''-8y'+16y=0.$

10. а) $y'-4xy=x$; б) $y''+y'-6y=0.$

11. а) $y'\,cos\,x+y\,sin\,x=1$; б) $y''-2y'+10y=0.$

12. а) $y'-\dfrac{y}{x}=2x^2$; б) $y''-6y'+5y=0.$

13. а) $y'-6x^2y=6x^2$; б) $y''-2y'+y=0.$

14. а) $y' + \dfrac{2y}{x-2} = x;$ б) $y'' - 4y' + 13y = 0.$

15. а) $y' + \dfrac{y}{x+1} = x^2;$ б) $y'' + 2y' - 24y = 0.$

16. а) $y' - \dfrac{y}{x} = 3x;$ б) $4y'' + y' = 0.$

17. а) $xy' - 2y + -x^2 = 0;$ б) $y'' - 7y' + 12y = 0.$

18. а) $y' + 2y\sin x = \sin x;$ б) $y'' - 6y' + 13y = 0.$

19. а) $y' + y\cos x = \cos x;$ б) $y'' - 2y' = 0.$

20. а) $y' - \dfrac{2y}{x+2} = 1;$ б) $y'' + 8y' + 16y = 0.$

Завдання 9.

Дослідити збіжність числового ряду (а).
Знайти область збіжності ряду (б).

1. а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{5n-1}{3^n};$ б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(n+1)\cdot x^n}{3^n \cdot (2n-1)}.$

2. а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{2^n}{n!};$ б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(n+1)\cdot x^n}{(2n-1)}.$

3. а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{n-1}{(n+1)(n+2)};$ б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(2n+1)\cdot x^n}{3^n (2n-1)}.$

4. а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(n-1)^2}{n!};$ б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{x^n}{n^2 \cdot 4^n}.$

5. а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{2n}{(n+1)(n+2)};$ б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{x^n}{n \cdot 3^{n-1}}.$

6. а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{2n-1}{n \cdot 3^n};$ б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{n \cdot x^n}{2^n \cdot (n^2+1)}.$

7. а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{n^2}{2^n};$ б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(2n+1)\cdot x^n}{3^n}.$

8. а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n}{2n^2-1}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n\cdot 2^n\cdot x^n}{n!}$.

9. а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{n^2\cdot n!}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(n+1)\cdot x^n}{3^n\cdot(2n-1)}$.

10. а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)\cdot 2^n}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2^n\cdot x^n}{\sqrt{n}}$.

11. а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{5^n}{2^n\cdot n!}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n^2+n}$.

12. а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2n^2+3n-4}{3n^4+5n^2-2}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{(2n-1)\cdot 4^{n+1}}$.

13. а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{2^n\cdot(n+1)}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(3n-1)\cdot x^n}{(2n-1)}$.

14. а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n+1}{2^n\cdot(3n-1)}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n\cdot x^n}{2^n\cdot(3n-1)}$.

15. а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{4^n\cdot n!}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{4^n\cdot x^n}{\sqrt{2n-1}}$.

16. а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{5^n\cdot(n+1)!}{3^n\cdot}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2^n\cdot x^n}{3^n(2n-1)}$.

17. а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n+1}{(2n-1)^2\cdot\sqrt{n}}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2^n\cdot x^n}{\sqrt[3]{n}}$.

18. а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{3n-1}{n^2\cdot(n+1)}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n!}$.

19. а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{5^n\cdot n}{2n-1}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{4^n\cdot x^n}{3^n\cdot\sqrt{n}}$.

20. а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2n}{(2n-1)(3n-1)}$. б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n^2\cdot 3^n}$.

Методичні рекомендації до виконання завдання 1 за темою: "Розв'язання систем трьох лінійних рівнянь з трьома невідомими за формулами Крамера та методом Жордана – Гаусса"

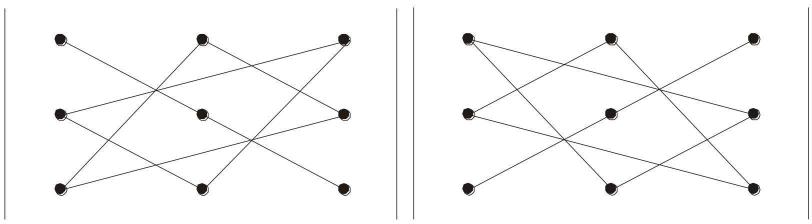
Основні формули до теми

Визначник третього порядку:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{21}a_{32}a_{13} -$$

$$- a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32}.$$

Схема обчислення визначника третього порядку (правило трикутників):



$+$ $\qquad\qquad$ $-$

Система трьох рівнянь з трьома невідомими:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x + a_{23}x_3 = b_2, \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3. \end{cases}$$

Її можна розв'язати за формулами Крамера:

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta}, \; x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta}, \; x_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta}, \text{ якщо } \Delta \neq 0,$$

де Δ – визначник системи, Δ_{x_j} – визначник, утворений з визначника системи Δ заміною *j*-го стовпця стовпцем вільних членів.

Суть методу Жордана – Гаусса полягає в перетворенні матриці системи до одиничної матриці:

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Зразок виконання завдання 1

Розв'язати систему рівнянь:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 8, \\ 2x_1 - x_2 + 4x_3 = -4, \\ x_1 + 3x_2 - x_3 = 8, \end{cases}$$

а) за формулами Крамера;
б) методом Жордана – Гаусса.

Розв'язання.

а) за формулами Крамера:

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta},\ x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta},\ \ x_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta}.$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & -1 & 4 \\ 1 & 3 & -1 \end{vmatrix} = 1 + 8 - 18 - 3 + 4 - 12 = -20.$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 8 & 2 & -3 \\ -4 & -1 & 4 \\ 8 & 3 & -1 \end{vmatrix} = 4 \begin{vmatrix} 2 & 2 & -3 \\ -1 & -1 & 4 \\ 2 & 3 & -1 \end{vmatrix} =$$

$$= 4\ \ 2 + 16 + 9 - 6 - 2 - 24\ \ = -20.$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 8 & -3 \\ 2 & -4 & 4 \\ 1 & 8 & -1 \end{vmatrix} = 4 \begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & -1 & 4 \\ 1 & 2 & -1 \end{vmatrix} =$$

$$= 4\ \ 1 + 8 - 12 - 3 + 4 - 8\ \ = -40.$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 8 \\ 2 & -1 & -4 \\ 1 & 3 & 8 \end{vmatrix} = 4\begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & -1 & -1 \\ 1 & 3 & 2 \end{vmatrix} =$$

$$= 4(-2-2+12+2-8+3) = 20.$$

Тоді

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{-20}{-20} = 1,\ x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{-40}{-20} = 2,$$

$$x_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta} = \frac{20}{-20} = -1.$$

б) методом Жордана – Гаусса:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -3 & 8 \\ 2 & -1 & 4 & -4 \\ 1 & 3 & -1 & 8 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -3 & 8 \\ 0 & -5 & 10 & -20 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -7 & 8 \\ 0 & 0 & 20 & -20 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -7 & 8 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \end{array}\right).$$

Відповідь знаходимо в стовпці вільних членів проти одиниць в останній матриці, тобто $x_1 = 1$, $x_2 = 2$, $x_3 = -1$.

Методичні рекомендації до виконання завдання 2 за темою "Пряма на площині"

Основні формули до теми

1. Загальне рівняння прямої:

$$Ax + By + C = 0.$$

2. Рівняння прямої, що проходить через задану точку перпендикулярно до заданого вектора:

$$A(x - x_1) + B(y - y_1) = 0,$$

де $\vec{n} = (A; B)$ – нормальний вектор прямої, $(x_1; y_1)$ – задана точка.

3. Рівняння прямої з кутовим коефіцієнтом:

$$y = kx + b,$$

де k – кутовий коефіцієнт, b – відрізок, який відтинає пряма на осі Oy.

4. Рівняння прямої, яка проходить через задану точку в заданому напрямі:

$$y - y_1 = k(x - x_1),$$

де $(x_1; y_1)$ – задана точка, k – відомий кутовий коефіцієнт.

5. Рівняння прямої, що проходить через дві задані точки:

$$\frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{x - x_1}{x_2 - y_1},$$

де $(x_1; y_1)$ і $(x_2; y_2)$ – задані точки.

6. Рівняння прямої у відрізках:

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1,$$

де a і b – відрізки, що відтинає пряма відповідно на осях Ox і Oy.

7. Канонічне рівняння прямої:

$$\frac{x - x_1}{m} = \frac{y - y_1}{n},$$

де $(x_1; y_1)$ – точка, через яку проходить пряма, m, n – координати напрямного вектора.

8. Параметричні рівняння прямої:

$$\begin{cases} x = x_1 + mt, \\ y = y_1 + nt, \end{cases}$$

де $(x_1; y_1)$ – точка, через яку проходить пряма, m, n – координати напрямного вектора, t – параметр.

9. Нормальне рівняння прямої:

$$x\cos\alpha + y\sin\alpha - p = 0$$

або

$$\frac{Ax + By + C}{\pm\sqrt{A^2 + B^2}} = 0,$$

де α – кут нахилу нормалі до осі Ox, p – відстань прямої від початку координат.

Корінь беремо зі знаком, протилежним знаку вільного члена *C*.

10. Відстань точки $(x_1; y_1)$ до прямої:

$$d = \left| x_1\cos\alpha + y_1\sin\alpha - p \right|$$

або

$$d = \frac{\left| Ax_1 + By_1 + C \right|}{\sqrt{A^2 + B^2}}.$$

11. Формула для обчислення кута між двома прямими:

$$tg\varphi = \frac{k_2 - k_1}{1 + k_1 k_2}.$$

12. Умова паралельності двох прямих:

$$k_1 = k_2.$$

13. Умова перпендикулярності двох прямих:

$$k_1 \cdot k_2 = -1.$$

14. Кутовий коефіцієнт прямої:

$$k = -\frac{A}{B} \quad \text{або} \quad k = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}.$$

Зразок виконання завдання 2

Задані координати вершин $A(-3;1)$, $B(7;5)$, $C(3;-2)$.

Знайти:

1) рівняння сторони ABта AC;
2) рівняння медіани AM;
3) рівняння висоти CD;
4) довжини сторони AB, медіани AM, висоти CD;
5) внутрішній кут A;
6) площу трикутника.

Розв'язання.

Побудуємо трикутник ABC в прямокутній системі координат (рис. 1), медіану AM (точка *M* ділить *BC* навпіл), висоту CD.

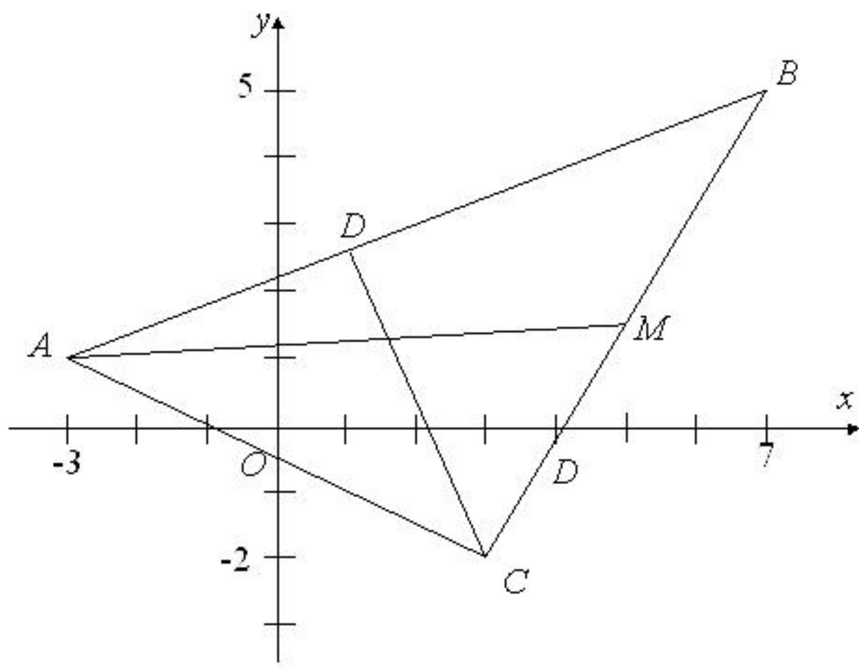


Рис. 1

1. Щоб скласти рівняння сторони AB, використовуємо рівняння прямої, що проходить через дві точки:

$$\frac{x-x_1}{x_2-y_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}.$$

Маємо:

$$\frac{x-\ \ -3}{7-\ \ -3}=\frac{y-1}{5-1},\ \text{або}$$

$$\frac{x+3}{10}=\frac{y-1}{4}\text{, звідки}$$

$$2x-5y+11=0.$$

Аналогічно знаходимо рівняння сторони AC:

$$\frac{x-(-3)}{3-(-3)}=\frac{y-1}{-2-1}\text{, або}$$

$$\frac{x+3}{6}=\frac{y-1}{-3},$$

звідки маємо $x+2y+1=0$.

2. Спочатку знайдемо координати точки *M*, яка є серединою відрізка BC, за формулами:

$$x_M=\frac{x_B+x_C}{2},\quad y_M=\frac{y_B+y_C}{2}.$$

$$x_M=\frac{7+3}{2}=5,\quad y_M=\frac{5-2}{2}=\frac{3}{2}=1{,}5.$$

Щоб скласти рівняння AM використовуємо рівняння прямої, що проходить через дві точки $A(-3;1)$ і $M(5;1{,}5)$.

$$\frac{x+3}{5+3}=\frac{y-1}{1{,}5-1}\Rightarrow\frac{x+3}{8}=\frac{y-1}{0{,}5}\Rightarrow$$

$$x-16y+19=0.$$

3. Для знаходження рівняння висоти CD використовуємо рівняння прямої, що проходить через задану точку у заданому напрямі:

$$y-y_0=k(x-x_0).$$

Висота CD проходить через точку $C(3;-2)$ перпендикулярно до прямої AB. З рівняння прямої AB $2x-5y+11=0$ кутовий коефіцієнт $k_1=\dfrac{2}{5}$.

За умовою перпендикулярності:

$$k_2=-\frac{1}{k_1}.$$

Тоді кутовий коефіцієнт прямої CD $k_2=-\frac{5}{2}$.

Тепер складаємо рівняння CD:

$$y+2=-\frac{5}{2}\ \ x-3\ \ ,\ \text{або}\ \ 5x+2y-11=0.$$

4. Для знаходження довжини AB, AM використовуємо формулу:

$$d=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}.$$

$$d_{AB}=\sqrt{(7-\ \ -3\ )^2+(5-1)^2}=\sqrt{100+16}=\sqrt{116}=2\sqrt{29}.$$

$$d_{AM}=\sqrt{(5-\ \ -3\ )^2+(1{,}5-1)^2}=\sqrt{64+0{,}25}=\sqrt{64{,}25}.$$

Для знаходження довжини CD використовуємо формулу

$$d=\left|\frac{Ax_0+By_0+C}{\pm\sqrt{A^2+B^2}}\right|.$$

Рівняння прямої AB

$$2x-5y+11=0,$$

координати точки $C\ \ 3;-2\ $.

Тоді

$$d_{CD}=\frac{\left|2\cdot 3-5\cdot\ \ -2\ \ +11\right|}{\sqrt{2^2+\ \ -5\ ^2}}=\frac{27}{\sqrt{29}}.$$

5. Тангенс кута між двома прямими знаходиться за формулою:

$$tg\varphi=\frac{k_2-k_1}{1+k_1k_2}.$$

Кутовий коефіцієнт прямої AB

$$k_2 = \frac{2}{5}.$$

Кутовий коефіцієнт прямої AC

$$k_1 = -\frac{1}{2}.$$

Тоді

$$tg\varphi = \frac{\frac{2}{5} - \left(-\frac{1}{2}\right)}{1 + \left(-\frac{1}{2}\right) \cdot \frac{2}{5}} = \frac{9}{8} = 1{,}125.$$

Звідки $\varphi = arctg\ 1{,}125 = 48{,}37$.

6. Площу трикутника визначимо за формулою

$$S_\Delta = \frac{1}{2} a \cdot h,$$

де a – довжина основи трикутника,

h – довжина висоти, що проведена до цієї основи.

Отже,

$$S_\Delta = \frac{1}{2} \cdot |AB| \cdot |CD| = \frac{1}{2} \cdot 2\sqrt{29} \cdot \frac{27}{\sqrt{29}} = 27 \text{ (кв. од).}$$

Методичні рекомендації до виконання завдання 3 за темою "Границя функції"

Теореми до теми

Якщо існують $\lim\limits_{x \to x_0} f \quad x$ і $\lim\limits_{x \to x_0} g \quad x$, то

1) $\lim\limits_{x\to x_0}\left(f(x)+g(x)\right)=\lim\limits_{x\to x_0}f(x)+\lim\limits_{x\to x_0}g(x)$;

2) $\lim\limits_{x\to x_0}\left(f(x)\cdot g(x)\right)=\lim\limits_{x\to x_0}f(x)\cdot\lim\limits_{x\to x_0}g(x)$;

$\lim\limits_{x\to x_0}\left(a\cdot f(x)\right)=a\cdot\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$, $a=const$.

3) $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\dfrac{\lim\limits_{x\to x_0}f(x)}{\lim\limits_{x\to x_0}g(x)}$, якщо $\lim\limits_{x\to x_0}g(x)\neq 0$.

Використовуються також такі границі:

якщо $c>0$, то –

$\lim\limits_{x\to\infty}cx=\infty$; $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x}{c}=\infty$;

$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{c}{x}=0$; $\lim\limits_{x\to+0}\dfrac{c}{x}=+\infty$;

$\lim\limits_{x\to-0}\dfrac{c}{x}=-\infty$.

$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=f\left(\lim\limits_{x\to x_0}x\right)=f(x_0)$.

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$ – перша чудова границя;

$\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x=e$, $\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=e$ – друга чудова границя.

Зразок виконання завдання 3

Знайти границі функцій:

1) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^2+7x-2}{8x^2-4x+5}$; 2) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2+7x-18}{x^2-4}$; 3) $\lim\limits_{x\to 6}\dfrac{\sqrt{2x+4}-4}{x-6}$;

4) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 10x}{x\sin 2x}$; 5) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{6x-7}{6x+5}\right)^{2x-1}$.

Розв'язання.

1. При $x \to \infty$ маємо невизначеність вигляду $\left|\frac{\infty}{\infty}\right|$. Для розкриття цієї невизначеності в чисельнику і знаменнику виносимо за дужки x^2 і скорочуємо:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{3x^2+7x-2}{8x^2-4x+5}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2\left(3+\frac{7}{x}-\frac{2}{x^2}\right)}{x^2\left(8-\frac{4}{x}+\frac{5}{x^2}\right)}=\lim_{x\to\infty}\frac{3+\frac{7}{x}-\frac{2}{x^2}}{8-\frac{4}{x}+\frac{5}{x^2}}=\frac{3}{8}.$$

2. При $x \to 2$ маємо невизначеність вигляду $\left|\frac{0}{0}\right|$. Для розкриття цієї невизначеності розкладаємо чисельник і знаменник на множники, одним із яких буде $x-2$ і скорочуємо:

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^2+7x-18}{x^2-4}=\lim_{x\to 2}\frac{x-2 \quad x+9}{x-2 \quad x+2}=\lim_{x\to 2}\frac{x+9}{x+2}=\frac{11}{4}.$$

3. При $x \to 6$ маємо невизначеність вигляду $\left|\frac{0}{0}\right|$. Для розкриття цієї невизначеності помножимо чисельник і знаменник на вираз, спряжений чисельнику:

$$\lim_{x\to 6}\frac{\sqrt{2x+4}-4}{x-6}=\lim_{x\to 6}\frac{\sqrt{2x+4}-4 \quad \sqrt{2x+4}+4}{x-6 \quad \sqrt{2x+4}+4}=$$

$$=\lim_{x\to 6}\frac{2x+4-16}{x-6 \quad \sqrt{2x+4}+4}=\lim_{x\to 6}\frac{2 \ \ x-6}{x-6 \quad \sqrt{2x+4}+4}=$$

$$=\lim_{x\to 6}\frac{2}{\sqrt{2x+4}+4}=\frac{2}{8}=\frac{1}{4}.$$

4. При $x \to 0$ маємо невизначеність вигляду $\left|\frac{0}{0}\right|$. Для розкриття цієї невизначеності в чисельнику різницю замінюємо добутком, а далі використовуємо еквівалентність нескінченно малих:

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-cos10x}{x\,sin2x}=\lim_{x\to 0}\frac{2\,sin^2 5x}{x\,sin2x}=\lim_{x\to 0}\frac{2\cdot\ 5x\ ^2}{x\cdot 2x}=25.$$

5. При $x\to\infty$ маємо невизначеність вигляду $\left|1^{\infty}\right|$. Для розкриття цієї невизначеності використовуємо другу визначну границю:

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=e.$$

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{6x-7}{6x+5}\right)^{2x-1}=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{6x+5-12}{6x+5}\right)^{2x-1}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\left(1-\frac{12}{6x+5}\right)^{2x-1}=\lim_{x\to\infty}\left(1-\frac{12}{6x+5}\right)^{-\frac{6x+5}{12}\cdot\frac{-12\ 2x-1}{6x+5}}=$$

$$=e^{\lim\limits_{x\to\infty}-\frac{12\ 2x-1}{6x+5}}=e^{-4}.$$

Методичні рекомендації до виконання завдання 4 за темою "Похідна функції"

Основні теореми до теми

Таблиця похідних

1. $x^n\ {}' = nx^{n-1}$.
2. $a^x\ {}' = a^x\cdot ln\,a$.
3. $e^x\ {}' = e^x$.
4. $ln\,x\ {}' = \frac{1}{x}$.
5. $log_a x\ {}' = \frac{1}{x\,ln\,a}$.
6. $sin\,x\ {}' = cos\,x$.
7. $cos\,x\ {}' = -sin\,x$.
8. $tgx\ {}' = \frac{1}{cos^2 x}$.
9. $ctgx\ {}' = -\frac{1}{sin^2 x}$.
10. $arcsin\,x\ {}' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.
11. $arccos\,x\ {}' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.
12. $arctgx\ {}' = \frac{1}{1+x^2}$.
13. $arcctgx\ {}' = -\frac{1}{1+x^2}$.

Основні правила диференціювання функції

Нехай $c = const$, $u(x)$, $v(x)$ – диференційовані функції.

Тоді

1. $c' = 0$.
2. $(cu)' = cu'$.
3. $(u \pm v)' = u' \pm v'$.
4. $(uv)' = u'v + v'u$.
5. $\left(\dfrac{u}{v}\right)' = \dfrac{u'v - v'u}{v^2}$.

Якщо функції $y = f(u)$ і $u = \varphi(x)$ диференційовані, то і складена функція $y = f(\varphi(x))$ диференційована, причому:

$$y'_x = f'(u) \cdot u'(x).$$

Зразок виконання завдання 4

Знайти похідні заданих функцій:

1) $y = x^4 + arctgx$; 2) $y = e^x \cdot sin\,x$;

3) $y = \dfrac{ctgx}{ln\,x}$; 4) $y = \left(cos\,3x + arc\,sin^2\sqrt{x}\right)^3$.

Розв'язання.

1. Шукаємо похідну від суми:

$$y' = \left(x^4\right)' + \left(arctgx\right)' = 4x^3 + \frac{1}{1+x^2}.$$

2. Шукаємо похідну від добутку:

$$y' = \left(e^x\right)' \cdot sin\,x + e^x\left(sin\,x\right)' = e^x\,sin\,x + e^x\,cos\,x.$$

3. Знайдемо похідну від частки:

$$y' = \frac{\left(ctgx\right)' ln\,x - ctgx\left(ln\,x\right)'}{ln^2 x} = \frac{-\dfrac{1}{sin^2 x} ln\,x - ctgx \cdot \dfrac{1}{x}}{ln^2 x}.$$

4. У цьому прикладі треба знайти похідну від складеної функції:

$$y' = 3\left(cos3x + arcsin^2\sqrt{x}\right)^2 \cdot \left(cos3x + arcsin^2\sqrt{x}\right)' =$$

$$= 3\left(cos3x + arcsin^2\sqrt{x}\right)^2 \cdot \left(-sin3x \cdot 3 + 2arcsin\sqrt{x} \cdot \frac{1}{\sqrt{1-\left(\sqrt{x}\right)^2}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}}\right).$$

Методичні рекомендації до виконання завдання 5 за темою "Дослідження функції"

Основні теореми до теми

Необхідна умова зростання і спадання функції.

Нехай функція $y = f(x)$ диференційована на відрізку $[a,b]$.

Якщо:

1) $f(x)$ зростає на відрізку $[a,b]$, то $f'(x) \geq 0$, $\forall x \in [a,b]$;

2) $f(x)$ спадає на відрізку $[a,b]$, то $f'(x) \leq 0$, $\forall x \in [a,b]$.

Достатня умова зростання і спадання функції.

Нехай функція $y = f(x)$ неперервна на відрізку $[a,b]$ і диференційована в кожній його внутрішній точці.

Якщо:

1) $f'(x) > 0$ $\forall x \in (a,b)$, то $f(x)$ зростає на відрізку $[a,b]$;

2) $f'(x) < 0$ $\forall x \in (a,b)$, то $f(x)$ спадає на відрізку $[a,b]$.

Необхідна умова екстремуму.

Якщо функція $y = f(x)$ має в точці $x = x_0$ максимум чи мінімум, то її похідна в цій точці дорівнює нулю або не існує.

Достатня умова існування екстремуму.

Якщо при $x = x_0$ похідна $f'(x_0)$ дорівнює нулю і при переході через значення зліва направо змінює знак з "+" на "–", то $f(x)$ має максимум.

Якщо ж знак похідної змінюється з "–" на "+", то функція має мінімум.

Якщо на проміжку (a,b) друга похідна функції від'ємна, то крива $y = f(x)$ опукла на цьому проміжку, якщо ж $f''(x)$ додатна, то крива угнута.

Вертикальна асимптота має рівняння $x = a$.

Нахилена асимптота має рівняння $y = kx + b$, де

$$k = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x}, \quad b = \lim_{x\to\pm\infty} \left(f(x) - kx\right).$$

Загальна схема дослідження функції

1. Знайти область визначення функції.
2. Перевірити парна чи непарна функція.
3. Знайти точки перетину графіка функції з осями координат.
4. Знайти інтервали монотонності та точки екстремуму функції.
5. Знайти інтервали опуклості та угнутості графіка функції, точки перегину.
6. Знайти асимптоти графіка функції.
7. Побудувати графік функції.

Зразок виконання завдання 5

Дослідити функцію $y = x^3 - 27x$ і побудувати її графік.

Розв'язання.

1. Область визначення даної функції: $x \in R$.

2. Функція є непарною, бо

$$y(-x) = (-x)^3 - 27(-x) = -(x^3 - 27x) = -y(x),$$

тому графік симетричний відносно початку координат.

3. Знайдемо точки перетину з осями координат:

$x = 0$, $y = 0$.

$y = 0$, $x^3 - 27x = 0$, звідки $x(x^2 - 27) = 0$,

тоді $x_1 = -\sqrt{27} = -3\sqrt{3}$, $x_2 = 0$, $x_3 = 3\sqrt{3}$.

4. Далі шукаємо інтервали монотонності й екстремуми функції. Для цього треба знайти критичні точки.

$$y' = (x^3 - 27x)' = 3x^2 - 27 = 3(x^2 - 9),$$

далі $y' = 0$, $3x^2 - 27 = 0$, $x = \pm 3$,

тобто маємо дві критичні точки з абсцисами $x_1 = -3$, $x_2 = 3$.

Розглядаємо інтервали $(-\infty; -3)$, $(-3; 3)$, $(3; \infty)$ і перевіряємо знак першої похідної.

x	$(-\infty; -3)$	-3	$(-3; 3)$	3	$(3; \infty)$
y'	$+$	0	$-$	0	$+$
y	$\nearrow$	max	$\searrow$	min	$\nearrow$

Обчислимо максимум і мінімум:

$$y_{max}(-3) = (-3)^3 - 27 \cdot (-3) = 54,$$

$$y_{min}(3) = 3^3 - 27 \cdot 3 = -54.$$

5. Знайдемо інтервали опуклості та угнутості графіка функції, а також точки перегину. Для цього шукаємо похідну другого порядку:

$$y'' = \left(3x^2 - 27\right)' = 6x,$$

а далі знаходимо абсцису точки перегину:

$$y'' = 0, \; 6x = 0, \; x = 0.$$

Розглядаємо інтервали $(-\infty; 0)$, $(0; +\infty)$ і перевіряємо знак другої похідної.

x	$(-\infty; 0)$	0	$(0; +\infty)$
y''	$-$	0	$+$
y	$\cap$	перегин	$\cup$

Обчислимо $y_{пер}(0) = 0$.

6. Шукаємо похилі асимптоти:

$$y = kx + b, \text{ де } k = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{f(x)}{x}, \; b = \lim_{x \to \pm\infty} (y - kx).$$

$$k = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{x^3 - 27x}{x} = \infty.$$

Звідки випливає, що похилих асимптот немає.

Враховуючи дослідження, будуємо графік функції (рис. 2).

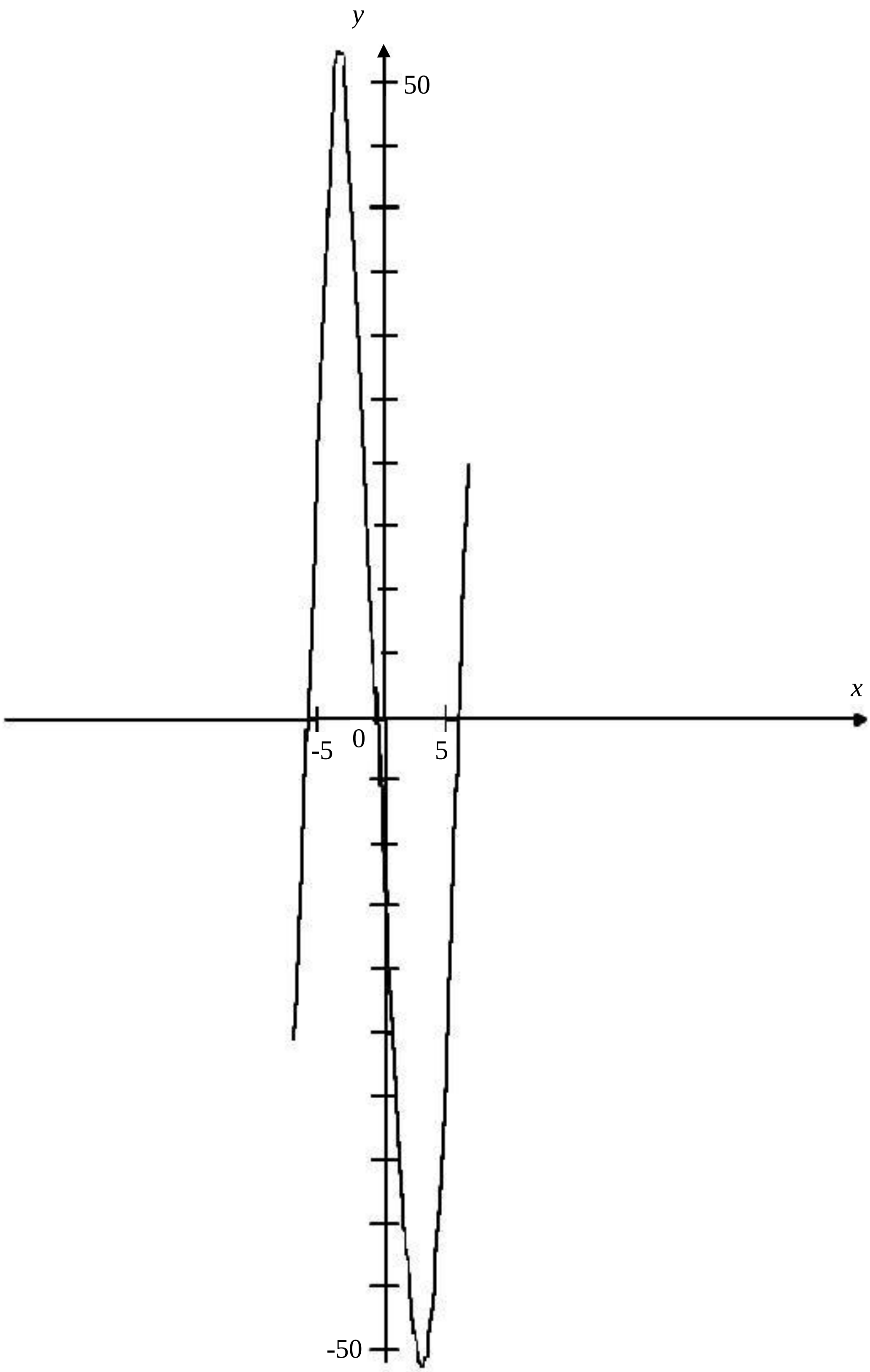


Рис. 2

Методичні рекомендації до виконання завдання 6 за темою "Невизначений інтеграл"

Основні формули до теми

Властивості невизначеного інтеграла

1. $\left(\int f(x)\,dx\right)' = f(x).$

2. $d\left(\int f(x)\,dx\right) = f(x)\,dx.$

3. $\int dF(x) = F(x) + C.$

4. $\int a\,f(x)\,dx = a\int f(x)\,dx.$

5. $\int \left(f_1(x) \pm f_2(x)\right)dx = \int f_1(x)\,dx \pm \int f_2(x)\,dx.$

6. $\int f(ax+b)\,dx = \frac{1}{a}F(ax+b) + C.$

Таблиця основних інтегралів

1. $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C, n \neq -1.$

2. $\int \frac{dx}{x} = ln|x| + C.$

3. $\int a^x dx = \frac{a^x}{ln\, a} + C\ \ (a > 0, a \neq 1).$

4. $\int e^x dx = e^x + C.$

5. $\int sin\ xdx = -cos\ x + C.$

6. $\int cos\ xdx = sin\ x + C.$

7. $\int tgxdx = -ln|cos\,x| + C.$

8. $\int ctgxdx = ln|sin\,x| + C.$

9. $\int \frac{dx}{sin^2\ x} = -ctg\ x + C.$

10. $\int \frac{dx}{\cos^2 x} = tgx + C.$

11. $\int \frac{dx}{1+x^2} = arctg\ x + C.$

12. $\int \frac{dx}{a^2+x^2} = \frac{1}{a} arctg \frac{x}{a} + C,\ \ (a \neq 0).$

13. $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = arcsin\ x + C.$

14. $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = arcsin \frac{x}{a} + C.$

15. $\int \frac{dx}{x^2-a^2} = \frac{1}{2a} ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right| + C,\ \ (a \neq 0).$

16. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a}} = ln\left|x + \sqrt{x^2 \pm a}\right| + C,\ \ (a \neq 0).$

Формула інтегрування частинами:

$$\int u dv = uv - \int v du .$$

Зразок виконання завдання 6

Знайти невизначені інтеграли

1) $\int \left(e^{x} + \dfrac{1}{\sqrt{1-x^{2}}} \right) dx$; 2) $\int sin\ \ 1-2x\ \ dx$;

3) $\int e^{-6x^{5}} x^{4} dx$; 4) $\int x ln\ \ 5x-4\ \ dx$.

Розв'язання.

1. Виконуємо безпосереднє інтегрування для суми двох інтегралів:

$$\int \left(e^{x} + \frac{1}{\sqrt{1-x^{2}}} \right) dx = \int e^{x} dx + \int \frac{dx}{\sqrt{1-x^{2}}} = e^{x} + arcsin\, x + C .$$

2. Використовуємо заміну $1-2x=t$, звідки $-2dx=dt$, тоді

$$\int sin\ \ 1-2x\ \ dx = \int sin\, t \frac{dt}{-2} = -\frac{1}{2} \int sin\, t dt = \frac{1}{2} cos\, t + C =$$

$$= \frac{1}{2} cos\ \ 1-2x\ \ + C.$$

3. Використовуємо заміну $-6x^{5}=t$, звідки $-30x^{4}dx=dt$, тоді

$$\int e^{-6x^{5}} x^{4} dx = \int e^{t} \frac{dt}{-30} = -\frac{1}{30} \int e^{t} dt = -\frac{1}{30} e^{t} + C = -\frac{e^{-6x^{5}}}{30} + C .$$

4. Застосовуємо метод інтегрування частинами

$$\int u dv = uv - \int v du .$$

Покладаємо

$$u = ln\ \ 5x-4\ \ ,\quad dv = x dx .$$

Тоді

$$du = \frac{1}{5x-4} \cdot 5dx ,\quad v = \int x dx = \frac{x^{2}}{2} .$$

Отже, маємо:

$$\int x\,ln\;\;5x-4\;\;dx=\frac{x^2}{2}ln\;\;5x-4\;\;-\int\frac{x^2}{2}\cdot\frac{5dx}{5x-4}=$$

$$=\frac{x^2}{2}ln\;\;5x-4\;\;-\frac{1}{2}\int\frac{x^2dx}{x-\frac{4}{5}}.$$

В останньому інтегралі треба виділити цілу частину, бо маємо інтеграл від неправильного раціонального дробу. Для цього треба поділити чисельник на знаменник:

$$\begin{array}{r|l}
x^2 & x-\frac{4}{5} \\ \cline{2-2}
-\;\underline{x^2-\frac{4}{5}x} & x+\frac{4}{5} \\
\frac{4}{5}x & \\
-\;\underline{\frac{4}{5}x-\frac{16}{25}} & \\
\frac{16}{25} &
\end{array}$$

Тепер маємо:

$$\int x\,ln\;\;5x-4\;\;dx=\frac{x^2}{2}ln\;\;5x-4\;\;-\frac{1}{2}\int\left(x+\frac{4}{5}+\frac{\frac{16}{25}}{x-\frac{4}{5}}\right)dx=$$

$$=\frac{x^2}{2}ln\;\;5x-4\;\;-\frac{1}{2}\left(\frac{x^2}{2}+\frac{4}{5}x+\frac{16}{25}ln\left|x-\frac{4}{5}\right|\right)+C.$$

Методичні рекомендації до виконання завдання 7
за темою "Обчислення площі криволінійної трапеції"

Основні формули до теми

$\int_a^b f(x)\,dx = F(x)\Big|_a^b = F(в) - F(a)$ – формула Ньютона – Лейбніца.

Площа криволінійної трапеції, що обмежена кривою $y = f(x)$ і прямими $x = a$, $x = b$, $y = 0$ обчислюється за формулою:

$$S = \int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b y\,dx.$$

Якщо $f_2(x) \geq f_1(x)$ на відрізку $[a,b]$, то площа фігури, що обмежена кривими $y = f_2(x)$ і $y = f_1(x)$ на цьому відрізку обчислюється за формулою:

$$S = \int_a^b \left(f_2(x) - f_1(x) \right) dx.$$

Зразок виконання завдання 7

Обчислити площу фігури, що обмежена лініями:

$$y = x^2 - 5x + 9,\ \ 2x + y - 9 = 0.$$

Розв'язання.

Побудуємо площу, що обмежена лініями

$$y = x^2 - 5x + 9 \text{ і } 2x + y - 9 = 0.$$

Перша лінія – це парабола, вітки якої напрямлені вгору. Вершина має координати $\left(\frac{5}{2}, \frac{11}{4} \right)$.

Для побудови прямої беремо дві точки.

Нехай $x = 0$, тоді $y = 9$, нехай $y = 0$, тоді $x = \frac{9}{2}$ (рис. 3).

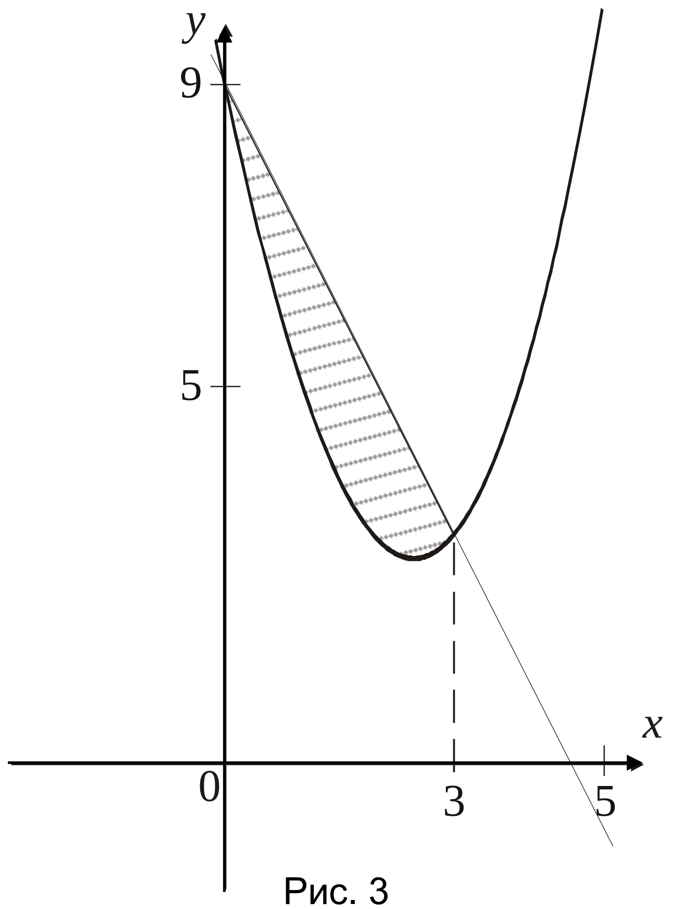


Рис. 3

Площу обчислюємо за формулою:

$$S = \int_a^b \left(y_2 - y_1 \right) dx.$$

Знайдемо границі інтегрування. Для цього розв'язуємо систему:

$$\begin{cases} y = x^2 - 5x + 9, \\ 2x + y - 9 = 0. \end{cases}$$

З другого рівняння $y = -2x + 9$. Підставляємо в перше рівняння $-2x+9$ замість y:

$$-2x + 9 = x^2 - 5x + 9, \text{ або } x^2 - 3x = 0.$$

Звідки $x_1 = 0$, $x_2 = 3$. Це і є границі інтегрування. Отже,

$$S=\int_0^3\left(-2x+9-\left(x^2-5x+9\right)\right)dx=\int_0^3\left(-x^2+3x\right)dx=$$

$$=\left(-\frac{x^3}{3}+\frac{3x^2}{2}\right)\Bigg|_0^3=-9+\frac{27}{2}=\frac{9}{2}.$$

Методичні рекомендації до виконання завдання 8 за темою "Диференціальні рівняння"

Основні формули до теми

Загальний вигляд диференціального рівняння першого порядку:

$$F\left(x, y, y'\right)=0.$$

$f_1(x)\cdot f_2(y)\,dx+\varphi_1(x)\cdot\varphi_2(y)\,dy=0$ – диференціальне рівняння з відокремлюваними змінними.

Диференціальне рівняння, яке зводиться до вигляду $y'=f\left(\frac{y}{x}\right)$, називається однорідним диференціальним рівнянням першого порядку.

Рівняння вигляду:

$$y'+P(x)\,y=Q(x),$$

де $P(x)$ і $Q(x)$ деякі функції від x, лінійні відносно функції y і її похідної y' називається лінійним диференціальним рівнянням.

Лінійним однорідним диференціальним рівнянням другого порядку зі сталими коефіцієнтами називається рівняння:

$$y''+py'+qy=0,$$

де p, q – дійсні числа.

Рівняння $k^2+pk+q=0$

називається характеристичним рівнянням.

Загальний розв'язок рівняння

$$y''+py'+qy=0$$

записується в одному із трьох видів:

1) $y = C_1 e^{k_1 x} + C_2 e^{k_2 x}$,якщо k_1 і k_2 дійсні та $k_1 \neq k_2$;

2) $y = e^{k_1 x}\left(C_1 + C_2 x\right)$, якщо k_1 і k_2 дійсні та $k_1 = k_2$;

3) $y = e^{\alpha x}\left(C_1 \cos\beta x + C_2 \sin\beta x\right)$, якщо k_1 і k_2 уявні $k_{1,2} = \alpha \pm \beta i$,

де k_1 і k_2 – корені характеристичного рівняння $k^2 + pk + q = 0$.

Зразок виконання завдання 8

Знайти загальний розв'язок диференціальних рівнянь.

1) $y' - \dfrac{3y}{x+3} = \left(x+3\right)^2$; 2) $y'' + 7y' - 30y = 0$.

Розв'язання.

1. Маємо лінійне рівняння, розв'язок якого шукаємо у вигляді $y = uv$, звідки $y' = u'v + uv'$, тоді маємо:

$$u'v + uv' - \frac{3uv}{x+3} = \left(x+3\right)^2,$$

або

$$u'v + u\left(v' - \frac{3v}{x+3}\right) = \left(x+3\right)^2.$$

З цього рівняння маємо:

$$\begin{cases} v' - \dfrac{3v}{x+3} = 0, \\ u'v = \left(x+3\right)^2. \end{cases}$$

З першого рівняння знайдемо його частинний розв'язок.

$$\frac{dv}{dx} = \frac{3v}{x+3}, \quad \frac{dv}{v} = \frac{3dx}{x+3},$$

$$\int\frac{dv}{v} = \int\frac{3dx}{x+3}.$$

Після інтегрування маємо:

$$ln\left|v\right| = 3ln\left|x+3\right|,\ v=(x+3)^3.$$

Підставляємо в друге рівняння знайдене v.

$$u'(x+3)^3=(x+3)^2,$$

$$\text{або}\ u'(x+3)=1,$$

звідки

$$\frac{du}{dx}=\frac{1}{x+3},\ \text{або}\ du=\frac{dx}{x+3}.$$

Після інтегрування маємо:

$$u=ln\left|x+3\right|+C.$$

Тепер можна записати розв'язок рівняння:

$$y=uv,\ y=(ln\left|x+3\right|+C)(x+3)^3.$$

2. Друге рівняння є однорідним диференціальним рівнянням другого порядку зі сталими коефіцієнтами.

Складемо відповідне йому характеристичне рівняння:

$$k^2+7k-30=0.$$

Шукаємо корені цього рівняння:

$$k=\frac{-7\pm\sqrt{49+120}}{2}=\frac{-7\pm13}{2},$$

$$k_1=-10,\ k_2=3.$$

Корені дійсні і різні, тому загальний розв'язок однорідного рівняння:

$$y=C_1e^{-10x}+C_2e^{3x}.$$

Методичні рекомендації до виконання завдання 9 за темою "Ряди"

Основні формули до теми

Вираз

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n = u_1 + u_2 + \ldots + u_n + \ldots$$

називається рядом.

Необхідна ознака збіжності ряду

Якщо числовий ряд збігається, то його загальний член u_n прямує до нуля при необмеженому зростанні номера n:

$$\lim_{n\to\infty} u_n = 0.$$

Якщо $\lim_{n\to\infty} u_n \neq 0$, то ряд розбігається.

Достатні ознаки збіжності ряду

1. Ознака порівняння

а) Нехай маємо два ряди з додатними членами:

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n = u_1 + u_2 + \ldots + u_n + \ldots,$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} v_n = v_1 + v_2 + \ldots + v_n + \ldots.$$

Якщо $u_n \leq v_n$, починаючи з деякого $n = n_0$, і ряд $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ збігається, то збігається і ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$. Якщо ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ розбігається, то розбігається і ряд $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$.

Застосовують також граничну ознаку порівняння.

б) Якщо $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ і $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ ряди з додатними членами й існує кінцева границя відношення їх загальних членів

$$\lim_{n\to\infty} \frac{u_n}{v_n} = k \qquad 0 < k < \infty \quad ,$$

то обидва ряди збігаються або розбігаються одночасно.

Для порівняння найчастіше застосовують ряди:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}=1+\frac{1}{2^p}+\frac{1}{3^p}+\ldots+\frac{1}{n^p}+\ldots,$$

який збігається при $p>1$, а розбігається при $p\le 1$.

$$\sum_{n=1}^{\infty}aq^{n-1}=a+aq+aq^2+\cdots+aq^{n-1}+\cdots,$$

який збігається при $|q|<1$, а розбігається, при $|q|>1$.

2. Ознака Даламбера

Нехай для ряду $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ з додатними членами існує границя відношення $n+1$ -го члена до n-го члена:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=l.$$

Тоді:
1) якщо $l<1$, то ряд збігається;
2) якщо $l>1$, то ряд розбігається;
3) якщо $l=1$, то ознака відповіді не дає.

3. Радикальна ознака Коші

Нехай для ряду $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ з додатними членами існує границя:

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n}=l.$$

Тоді:
1) якщо $l<1$, то ряд збігається;
2) якщо $l>1$, то ряд розбігається;
3) якщо $l=1$, то ознака відповіді не дає.

4. Інтегральна ознака Коші

Нехай є ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$, члени якого додатні і не зростають, тобто

$$u_1 \geq u_2 \geq u_3 \geq \cdots \geq u_n \geq \cdots,$$

а функція $f(x)$, яка визначена при $x \geq 1$, неперервна, незростаюча і

$$f(1) = u_1,\ f(2) = u_2,\ ...,\ f(n) = u_n,\ ...$$

Тоді:

1) якщо невластивий інтеграл $\int_1^{\infty} f(x)\,dx$ збігається, то збігається і ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$;

2) якщо невластивий інтеграл $\int_1^{\infty} f(x)\,dx$ розбігається, то розбігається і ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$.

5. Ознака Лейбніца

Нехай для знакопочережного ряду $\sum_{n=1}^{n} (-1)^{n+1} u_n$ виконуються умови:

1) послідовність $\{u_n\}$ є не зростаюча:

$$u_1 \geq u_2 \geq u_3 \geq \ldots \geq u_n \geq \ldots > 0.$$

$\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 0$, тоді ряд $\sum_{n=1}^{n} (-1)^{n+1} u_n$ збігається і його залишок не перевершує першого з відкинутих членів.

Степеневим рядом називається ряд, який має вигляд:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n = a_0 + a_1(x-x_0) + a_2(x-x_0)^2 + \ldots + a_n(x-x_0)^n + \ldots,$$

де $a_0, a_1, \ldots, a_n, \ldots$, а також x_0 – сталі числа.

Якщо $x_0 = 0$, то степеневий ряд має вигляд:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n + \ldots$$

Областю збіжності степеневого ряду називається сукупність тих значень x, при яких степеневий ряд збігається.

Радіус збіжності

$$R = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right|.$$

Зразок виконання завдання 9

1. Дослідити збіжність числового ряду

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{9n+4}{7^n}.$$

Розв'язання.

Використовуємо достатню ознаку збіжності Даламбера:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = q,$$

якщо $q < 1$, то ряд збігається; якщо $q > 1$, то ряд розбігається.

Розглянемо:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{(9(n+1)+4)\cdot 7^n}{7^{n+1}(9n+4)} = \lim_{n\to\infty} \frac{9n+13}{7(9n+4)} =$$

$$= \frac{1}{7} \lim_{n\to\infty} \frac{9+\frac{13}{n}}{9+\frac{4}{n}} = \frac{1}{7}.$$

Даний ряд за ознакою Даламбера збігається, тому що границя менше одиниці.

2. Знайти область збіжності ряду:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n(x-3)^n}{7^n(2n-1)}.$$

Розв'язання.

Область збіжності цього ряду будемо знаходити за ознакою Даламбера для числового ряду:

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{(n+1)(x-3)^{n+1}\cdot 7^n(2n-1)}{7^{n+1}(2n+1)\cdot n(x-3)^n}\right| =$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left|\frac{(n+1)(2n-1)(x-3)}{7(2n+1)n}\right| = \frac{|x-3|}{7}\lim_{n\to\infty}\left|\frac{(n+1)(2n-1)}{n(2n+1)}\right| =$$

$$= \frac{|x-3|}{7}\lim_{n\to\infty}\left|\left(1+\frac{1}{n}\right)\frac{\left(2-\frac{1}{n}\right)}{\left(2+\frac{1}{n}\right)}\right| = \frac{|x-3|}{7}.$$

За ознакою Даламбера ряд збігається, якщо:

$$\frac{|x-3|}{7} < 1, \text{ або } |x-3| < 7, \text{ звідки}$$

$$-7 < x-3 < 7.$$

Тепер маємо:

$$-4 < x < 10.$$

Заданий ряд абсолютно збігається на інтервалі $(-4;10)$.

Перевіряємо кінці.

Якщо $x=-4$, то маємо такий ряд:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n(-4-3)^n}{7^n(2n-1)} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n n}{2n-1}.$$

Отримали знакопочережний ряд. Використовуємо ознаку Лейбніца. Знайдемо

$$\lim_{n\to\infty}|u_n| = \lim_{n\to\infty}\frac{n}{2n-1} = \frac{1}{2}.$$

За ознакою Лейбніца ряд розбігається, бо $\lim_{n\to\infty}|u_n| \neq 0$.

Якщо $x=10$, то маємо такий ряд:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n(10-3)^n}{7^n(2n-1)} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{2n-1}.$$

Ряд розбігається, бо не виконується необхідна умова збіжності.

$$\lim_{n\to\infty}u_n = \lim_{n\to\infty}\frac{n}{2n-1} = \frac{1}{2} \neq 0.$$

Таким чином, даний ряд збігається для $-4 < x < 10$.

Рекомендована література

Барковський В. В. Математика для економістів : навч. посіб. / В. В. Барковський, Н. В. Барковська. – К. : НАУ, 1999. – 448 с.

Валуєв К. Г. Вища математика: навч. посіб. / К. Г. Валуєв, І. А. Джалладова. – К. : КНЕУ, 2001. – 452 с.

Васильченко І. П. Вища математика для економістів : підручник / І. П. Васильченко. – К. : Знання-Прес, 2002. – 454 с.

Вища математика : навч. посіб. для самост. вивч. дисц. / під ред. К. Г. Валуєва. – К. : КНЕУ, 1999. – 453 с.

Вища математика : підручник / Л. М. Малярець, Л. М. Афанасьєва, Т. В. Денисова та ін. ; заг. ред. д. е. н., проф. Малярець Л. М. – Х. : Вид. ХНЕУ, 2012. –772 с.

Высшая математика для экономистов / под ред. Н. Ш. Кремера. – М. : ЮНИТИ, 2002. – 440 с.

Данко П. Е. Высшая математика в упражнениях и задачах / П. Е. Данко, А. Г. Попов, Т. Я. Кожевникова. – М. : ВШ, 2003. – 416 с.

Малярець Л. М. Вища математика для економістів у прикладах, вправах і задачах : навч. посіб. / Л. М. Малярець, А. В. Ігначкова. – Х. : Вид. Дім "ІНЖЕК", 2006. – 544 с.

Малярець Л. М. Математика для економістів : навч. посіб. : В 2-х ч. Ч. 1 / Л. М. Малярець, Л. М. Афанасьєва, А. В. Ігначкова. – Х. : Вид. ХНЕУ, 2011. – 348 с.

Малярець Л. М. Математика для економістів : навч. посіб. : В 2-х ч. Ч. 2 / Л. М. Малярець, Л. М. Афанасьєва, А. В. Ігначкова. – Х. : Вид. ХНЕУ, 2011. – 308 с.

Малярець Л. М. Математика для економістів : практ. посіб. до розв'язання задач У 2-х ч. Ч. 1. / Л. М. Малярець, Л. Д. Широкорад. – Х. : Вид. ХНЕУ, 2008. – 304 с.

Малярець Л. М. Математика для економістів : практ. посібн. до розв'язання задач У 2-х ч. Ч. 2. / Л. М. Малярець, Л. Д. Широкорад. – Х. : Вид. ХНЕУ, 2008. – 476 с.

Общий курс высшей математики для экономистов / под ред. В. И. Ермакова. – М., 2003. – 464 с.

Травкін Ю. І. Математика для економістів : підручник / Ю. І. Травкін, Л. М. Малярець. – Х. : Вид. Дім "ІНЖЕК", 2005. – 816 с.

Зміст

НАВЧАЛЬНЕ ВИДАННЯ

Методичні рекомендації до виконання контрольної роботи з навчальної дисципліни "ВИЩА ТА ПРИКЛАДНА МАТЕМАТИКА" (розділи вищої математики)

для студентів галузі знань
0306 "Менеджмент і адміністрування"
заочної форми навчання

Укладачі: **Ігначкова** Алла Вікторівна
Широкорад Ліна Данилівна

Відповідальний за випуск *Малярець Л. М.*

Редактор *Лященко О. Г.*

Коректор *Маркова Т. А.*

План 2015 р. Поз. № 141.
Підп. до друку 03.07.2015 р. Формат 60x90 1/16. Папір офсетний. Друк цифровий.
Ум. друк. арк. 3,25. Обл.-вид. арк. 4,06. Тираж 75 пр. Зам. № 80.

Видавець і виготівник – ХНЕУ ім. С. Кузнеця, 61166, м. Харків, просп. Леніна, 9-А

Свідоцтво про внесення суб'єкта видавничої справи до Державного реєстру
ДК № 4853 від 20.02.2015 р.