ЦІЛОЧИСЛОВІ СІТКИ НА ПЛОЩИНІ В ЗАДАЧАХ ДИСКРЕТНОЇ ОПТИМІЗАЦІЇ

УДК 330.46:53

Сенчуков В. Ф.

Розглянуто оригінальний підхід до розв'язання задач дискретної (цілочислової) оптимізації, який базується на нумерації точок площини з цілими координатами – цілих точок. Знайдено за допомогою функції антьє аналітичний опис (у замкненій формі) залежності координат цілої точки від її номера і номера цілої точки від її координат.

На цих засадах запропоновано уникнути попереднього розв'язування задачі математичного програмування з послабленими обмеженнями, тобто без урахування вимог цілочисловості змінних, як це робиться в методах відтинання і комбінаторних методах. Знаходження оптимуму функції цілі відразу здійснено на множині цілих точок – підмножині області допустимих значень змінних.

Ключові слова: послідовність, нумерація, ціле число, формула, параметричні рівняння, серія нулів (одиниць), вузол сітки, номер квадрата, цільова функція, оптимум (мінімум, максимум), методи відтинання, комбінаторні методи, задачі економіки.

ЦЕЛОЧИСЛЕННЫЕ РЕШЕТКИ НА ПЛОСКОСТИ В ЗАДАЧАХ ДИСКРЕТНОЙ ОПТИМИЗАЦИИ

УДК 330.46:53

Сенчуков В. Ф.

Рассмотрен оригинальный подход к решению задач дискретной (целочисленной) оптимизации, основанный на нумерации точек плоскости с целыми координатами – целых точек. Найдено с помощью функции антье аналитическое описание (в замкнутой форме) зависимости координат целой точки от ее номера и номера целой точки от ее координат.

На этой основе предложено избежать предварительного решения задачи математического программирования с ослабленными ограничениями, то есть без учета требований целочисленности переменных, как это делается в методах отсечения и комбинаторных методах. Нахождение оптимума функции цели сразу осуществляется на множестве целых точек – подмножестве области допустимых значений переменных.

Ключевые слова: последовательность, нумерация, целое число, формула, параметрические уравнения, серия нулей (единиц), узел сетки, номер квадрата, целевая функция, оптимум (минимум, максимум), методы отсечения, комбинаторные методы, задачи экономики.

INTEGRAL LATTICES ON A PLANE IN DISCRETE OPTIMIZATION PROBLEMS

JEL Classification: C25; C35

V. Senchukov

A novel approach to solving the problems of discrete (integer) optimization based on the numbering of points in the plane with integer coordinates, i. e. lattice points, is considered. An analytical description (in the closed form) of the whole point coordinates dependence on its number and the whole point number on its coordinates was found using the function antje.

On this basis, it is proposed to avoid a preliminary solution of the problem of mathematical programming with weak constraints, i. e. excluding the requirements of integer variables, as in the methods of pruning and combinatorial methods. Finding the optimum of the objective function is carried out directly on the set of lattice points i. e. a subset of the domain of admissible values of variables.

Keywords: sequence, numbering, integer, formula, parametric equations, a series of zeros (ones), a network node, the number of a square, the objective function, the optimum (minimum, maximum), clipping methods, combinatorial methods, economics objectives.

Аналітичний опис цілочислових сіток у Z^2. Більш як півтора століття цілочислові сітки є предметом досліджень різних видатних математиків на чолі з К. Гауссом. Стосовно цієї теми поставлено різні питання, на багато з яких відповіді давно відомі, але є питання, відповіді на які невідомі досі. Задачами на сітках займався і творець теорії множин Г. Кантор; він перший здійснив нумерацію множини точок першого квадранта площини з цілими координатами [1]. (Ця нумерація застосовувалася ним у процесі доведення зліченності множини раціональних чисел.) У даній роботі пропонується опис на аналітичному рівні цілочислових сіток з довільними цілими координатами її точок. Про таку нумерацію згадується в роботі [2] В. Серпінського, але її аналітичне зображення не наведене. Інші наукові роботи з цього питання авторові невідомі.

Розглянемо деякі попередні відомості. Нехай елементами числової послідовності $\{a_n\}$, де $a_n = \varphi(n)$, є нулі й одиниці. Стаціонарну скінченну послідовність (кортеж), складену з нулів (одиниць), яка в $\{a_n\}$ передує одиниці (нулю) або розташована між одиницями (нулями), назвемо **серією нулів (одиниць)**. (Поняття "серія" узагальнюється на будь-які цілі числа a – елементи кортежу.)

Одним із джерел побудови нескінченних послідовностей (далі – послідовностей), що містять серії нулів і одиниць, є співвідношення:

$$\left[\frac{n+1}{2}\right]-\left[\frac{n}{2}\right]=\begin{cases}1, & n-\text{непарне } (n=2m-1)\\ 0, & n-\text{парне } (n=2m)\end{cases} \quad \forall m\in\mathbf{N} \qquad (1)$$

і його узагальнення:

$$\left[\frac{\varphi(n)+a}{c}\right]-\left[\frac{\varphi(n)+b}{c}\right]=\begin{cases}0, & \alpha_1-\alpha_2=(a-b)/c\\ 1, & \alpha_1-\alpha_2=(a-b)/c-1\end{cases}, \qquad (2)$$

де символ $[\cdot]$ означає взяття цілої частини числа (функцію антьє);

$\varphi(n)$ – деяка функція натурального аргументу;

a, b, c – сталі із N або Z;

$\alpha_1(\alpha_2)$ – дробова частина числа, яке визначається для кожного n виразом, що стоїть під знаком функції антьє у зменшуваному (від'ємнику) лівої частини співвідношення (2).

Залежно від закону φ і вибору параметрів a, b, c отримуємо ті чи інші серії нулів і одиниць. Наприклад, якщо взяти: $\varphi(n) = n, a = , b = , c =$,то отримаємо послідовність, у якої перша серія нулів двоелементна, інші – чотириелементні, а серії одиниць одноелементні:

$$a_n=\left[\frac{3n+1}{5}\right]-\left[\frac{3n}{5}\right]=\begin{cases}1, & n=5m-2\\ 0, & n=m+[(m+1)/4]\end{cases}:0,0,1,\ 0,0,\ 0,0,\ 1,\ldots\ \forall m\in\mathbf{N}.$$

Умова-послідовність $n=m+[(m+\ )/4]$, яка визначає номери n для серій нулів, є інверсією послідовності $n = \overline{5m-2} = m+[(m+\ )/4]$, тобто $\{5m-\ \}\sqcup\{m+[(m+1)/4]\}=\{m\}$, де $\sqcup$ – символ логічної суми (диз'юнкції) послідовностей [3]. На відміну від умови $n\neq \ m-$, яка не є конструктивною, умова $n = \overline{m-}$

дозволяє відразу встановити номери n для серій нулів.

Запропонований підхід до аналітичного опису послідовностей із серіями нулів і одиниць дає змогу здійснити нумерацію всіх точок прямокутної декартової площини, які мають цілі координати (**нумерація** точок – це взаємно однозначна відповідність – бієкція – між множиною точок площини з цілими координатами і множиною натуральних чисел).

Далі перейдемо до встановлення залежності координат цілої точки від її номера. Під **цілочисловими сітками** розуміють сукупність точок площини (або простору), координати яких у деякій (прямолінійній) системі координат є цілими числами. Такі сітки відіграють важливу роль у різних питаннях кристалографії, теорії функцій, теорії чисел, у задачах оптимізації. Нумерацію точок – **вузлів сітки** – можна здійснити різними способами (залежно від зручності її використання для розв'язання поставленої задачі). Розглянемо один із них зі схемою, зображеною на рис. 1, а фрагмент таблиці відповідної нумерації точок наведено в таблиці.

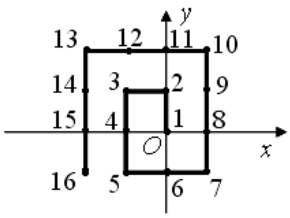


Рис. 1. **Схема нумерації**

Таблиця

Фрагмент таблиці нумерації точок

n	(x, y)	x+y	S⁺	x−y	S⁻
1	2	3	4	5	6
1	0 0	0	1	0	1
2	0 1	1	1	-1	3
3	-1 1	0	3	-2	5
4	-1 0	-1	5	-1	5
5	-1 -1	-2	7	0	5
6	0 -1	-1	7	1	5
7	1 -1	0	7	2	5
8	1 0	1	7	1	7
9	1 1	2	7	0	9
10	1 2	3	7	-1	11

Закінчення таблиці

1	2	3	4	5	6
11	0 2	2	9	-2	13
12	-1 2	1	11	-3	15
13	-2 2	0	13	-4	17
14	-2 1	-1	15	-3	17
15	-2 0	-2	17	-2	17
16	-2 -1	-3	19	-1	17

Точки площини, координатами яких є цілі числа, коротко називають **цілими точками**. За В. Серпінським, нумерацію цілих точок будемо проводити по спіралі, кожний звій якої складений із відрізків прямої, починаючи з точки O і рухаючись послідовно вгору, вліво, вниз, вправо і т. д. (див. рис. 1).

У таблицю занесені перші шістнадцять точок. Для встановлення зв'язку між номерами цілих точок n і їхніми координатами – $x = x(n)$, $y = y(n)$ – введемо в розгляд суму $(x+y)$ і різницю $(x-y)$ координат, і відповідно доданки $S^{+} = S^{+}(n)$ і $S^{-} = S^{-}(n)$, які доповнюють суму і різницю координат до номера n:

$$x + y + S^{+} = n, \quad x - y + S^{-} = n. \tag{3}$$

Відзначимо деякі властивості $S^{+}(n)$ і $S^{-}(n)$:

1) якщо точка точка (x, y) належить бісектрисі $y = -x$ ($y = x$), то S^{+} (S^{-}) співпадає з номером точки: $S^{+} = n$ ($S^{-} = n$);

2) номери точок бісектрис є квадратичними функціями параметра m – номера точки ($m \in Z^2$), починаючи рахунок від початку координат (скінченні різниці цієї послідовності складають арифметичну прогресію зі сталою різницею, що дорівнює восьми):

$$\begin{aligned} y = -x \ (x \geq 0) &\Rightarrow S^{+} = 2(2m- \ )(m- \ )+ \ ; \\ y = -x \ (x \leq 0) &\Rightarrow S^{+} = 2(2m- \ )(m- \ )+ \ ; \end{aligned} \tag{4}$$

$$\begin{aligned} y = x \ (x \geq 0) &\Rightarrow S^{-} = (2m- \ )^2; \\ y = x \ (x \leq 0) &\Rightarrow S^{-} = 4(m- \ )^2 + \ . \end{aligned} \tag{5}$$

Із (3) отримуємо:

$$x = n - \frac{1}{2}(S^{+} + S^{-}), \quad y = \frac{1}{2}(S^{-} - S^{+}) - \tag{6}$$

формули визначення координат точки (x, y) за її номером n, які можна тлумачити як **параметричні рівняння** $x = x(n)$, $y = y(n)$ цілочислової площини, де роль параметра відіграє номер точки.

Аналіз схеми і таблиці нумерації показує, що різниці $d^{+}(n), d^{-}(n)$ між наступним і попереднім членами послідовностей $S^{+} = S^{+}(n)$ і $S^{-} = S^{-}(n)$: $d^{\pm}(n) = S^{\pm}(n+1) - S^{\pm}(n)$ дорівнюють нулеві (0) або двом (2).

Загальні члени послідовностей $0{,}5 \cdot d^{+}(n)$, $0{,}5 \cdot d^{-}(n)$

3

(і разом з тим послідовностей $S^+(n)$ і $S^-(n)$) удалося встановити за допомогою функції антьє (див. (1), (2)) у вигляді:

$$\frac{1}{2}d^+(n)=\left[\frac{\sqrt{n-1}+1}{2}\right]-\left[\frac{\sqrt{n-1}}{2}\right];$$
$$\frac{1}{2}d^-(n)=\left[\frac{\sqrt{4n-3}+3}{4}\right]-\left[\frac{\sqrt{4n-3}+1}{4}\right]. \qquad (7)$$

Аналізуючи формули (7), отримуємо межі серій нулів і одиниць (залежно від значень параметра m):

$$\forall m\in\mathbf{N}:\ \frac{1}{2}d^+=\begin{cases}0,\ 4(m-1)^2+1\le n\le(2m-1)^2\\ 1,\ (2m-1)^2+1\le n\le 4m^2\end{cases};$$
$$\frac{1}{2}d^-(n)=\begin{cases}1,\ (2m-1)(2m-2)+1\le n\le 2m(2m-1)\\ 0,\ 2m(2m-1)+1\le n\le 2m(2m+1)\end{cases}. \qquad (8)$$

На основі (6), (7) загальні члени послідовностей $S^+(n)$ і $S^-(n)$ подаються у вигляді:

$$S^+=S^+(n)=\sum_{i=}^{n-} d^+(i)+\ =\ \sum_{i=}^{n-}\left(\left[\frac{\sqrt{i-}\ +\ }{2}\right]-\left[\frac{\sqrt{i-}}{2}\right]\right)+\ ;$$
$$S^-=S^-(n)=\sum_{i=}^{n-} d^-(i)+\ =\ \sum_{i=}^{n-}\left(\left[\frac{\sqrt{4i-}\ +\ }{4}\right]-\left[\frac{\sqrt{4i-}\ +\ }{4}\right]\right)+\ . \qquad (9)$$

Кожну суму вдалося "згорнути" в одну формулу, тобто подати у замкненому вигляді декількома способами. За одним із них отримуємо:

$$\Rightarrow\quad S^+(n)=n+(u(u+1)-n+1)\cos u\pi, \qquad (10)$$

де $u=\sqrt{n}-\ ]$.

$$S^-=S^-(n)=n+\ /2+\ n-\ /2-\ (v+\ ))\cos v\pi, \qquad (11)$$

де $v=\left[\frac{\sqrt{4n-3}-1}{2}\right]$.

Для розв'язання задачі обертання – вказати номер точки за її координатами – введемо деякі допоміжні поняття. Усю сукупність цілих точок площини можна розглядати як об'єднання множин точок з цілими координатами, які лежать на сторонах квадратів з центром симетрії у початку координат зі сторонами (див. рис. 1): 2, 4, 6, … $2k$, … , $k\in N$. Число k, що дорівнює половині сторони квадрата, назвемо **номером квадрата**. Точці (0, 0). – виродженому квадрату – припишемо **номер нуль** (0). Між номерами квадрата і координатами точок, які належать його межі, існує тісний зв'язок: $k=\max\{|x|,|y|\}$. Залежно від n номер квадрата $k=[\sqrt{n}-\ +\ ]2$.

Формулу, що виражає залежність номера точки сітки від координат: $n=n(x, y)$, виведемо, спираючись на результат розв'язку системи двох рівнянь (для сітки, що на рис. 1):

$$\begin{cases}n(x, y)+n(y, x)=8k^2+2\\ n(x, y)-n(y, x)=4k+2(x+y)\end{cases}, \qquad (12)$$

де $n(x, y)$, $n(y, x)$ – номери точок, симетричних відносно бісектриси першого і третього координатних кутів: $y=x$; $n(x, y)$ відповідає $x\ge y$;

k – номер квадрата.

Праві частини рівнянь – закони, яким підкоряються відповідно сума і різниця номерів симетричних точок; вони встановлюються детальним аналізом схеми нумерації.

Із (12) маємо:

$$n(x, y)=\ k^2+\ +\ 2k+\ +\ ),$$
$$n(y, x)=\ k^2+\ -\ 2k+\ +\ ). \qquad (13)$$

Об'єднуючи дві формули в одну, остаточно отримуємо:

$$n(x, y)=\ k^2+\ +\ ign(x-\ )(2k+\ +\ ), \qquad (14)$$

де $sign(t)$ – так звана **сігнум-функція**: $sign(t)=\begin{cases}1,\ t\ge 0\\ -1,\ t<0\end{cases}$;

$k=\max\{|x|,|y|\}$ – номер квадрата, $k=\ ,1,2,\ldots$.

Формула (14) є **формулою визначення номера точки $n=n(x, y)$ за її координатами x, y.**

Нескладно переконатися, що її задовольняють і точки, які належать самій бісектрисі:

$$|x|=|y|=\ \Rightarrow\ \begin{cases}x=y>0\Rightarrow n(x, y)=4k^2+1+4k=(2k+1)^2\\ x=y<0\Rightarrow n(x, y)=4k^2+1\end{cases}. \qquad (15)$$

Справедливість (15) випливає із властивостей (див. (5)) послідовностей $S^+=S^+(n),\ S^-=S^-(n)$ за умови, що $y=x$.

Застосування нумерації до дискретної оптимізації. Задачі дискретної оптимізації мають скінченну множину допустимих розв'язків, які теоретично можна перебрати і вибрати найкращий, такий, що забезпечує мінімум або максимум цільової функції. Практично ж це часто викликає значні ускладнення навіть для задач невеликої вимірності.

Вимоги дискретності змінних величин – числових характеристик досліджуваного об'єкта (процесу) – притаманні таким практичним задачам економіки, як вибір послідовності виробничих процесів, календарне планування роботи підприємства, планування та забезпечення матеріально-технічного постачання, розміщення підприємств, розподіл капіталовкладень, планування використання обладнання тощо.

Для знаходження оптимальних планів задач цілочислового програмування застосовують дві групи методів – методи відтинання і комбінаторні методи [4].

Основою методів відтинання є ідея поступового "звуження" області допустимих розв'язків поставленої задачі. Пошук цілочислового оптимуму починається з розв'язування задачі з так званими послабленими обме-

Рис. 2. **Область допустимих значень і цілочислова сітка**

женнями, тобто без урахування вимог цілочисловості змінних. Далі введенням у модель спеціальних додаткових обмежень, що враховують цілочисловість змінних, многокутник допустимих розв'язків послабленої задачі поступово зменшуємо доти, доки змінні оптимального розв'язку не набудуть цілочислових значень. До цієї групи належать методи розв'язання повністю цілочислових задач (дробовий алгоритм Гомори); методи розв'язання частково цілочислових задач (другий алгоритм Гомори).

Комбінаторні методи зводяться до перебору всіх допустимих цілочислових розв'язків, однак згідно з їх процедурою здійснюється цілеспрямований перебір множини цілочислових розв'язків. Найпоширенішим у цій групі методів є метод гілок і меж.

Ідея запропонованого підходу до цілочислової оптимізації полягає в тому, щоб не здійснювати розв'язування послабленої задачі чи аналізу-перебору гілок. Його основою є аналітичний опис цілочислової площини Z^2, що дозволяє уникнути гілкування для переходу до наступної цілої точки і її діагностики на оптимальність. Відповідний спосіб оптимізації названо методом **накладання цілочислової сітки** (НЦС). Суть методу полягає в такому:

1) *описуємо* множину цілих точок D^c, яку включає вихідна область допустимих значень D (це здійснюється за допомогою формул (6), (10), (11) згідно із заданими обмеженнями);

2) *обчислюємо* значення цільової функції на множині D^c, і серед них – оптимальне, або просуваємось поступово від точки з найбільшим номером до точок з меншими номерами до визначення оптимуму;

3) *знаходимо* відповідний оптимальний план (або плани).

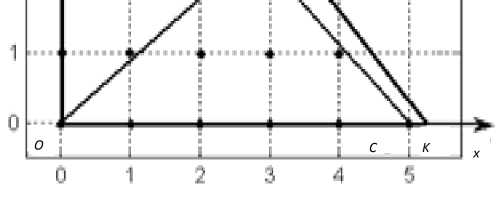
Покажемо реалізацію методу НЦС на ілюстративному прикладі:

$$z = \;x + \;y \to \;\mathrm{ax};$$

$$\begin{cases} 4x + 28y \leq 77 \\ 36x + 28y \leq 189 \end{cases};$$

$$x \geq \;,\; y \geq \;;\; x \in z,\; y \in z.$$

На рис. 2 наведено геометричне зображення областей D і D^c.



Розв'язання задачі здійснювалося в середовищі ППП MatLab.

Створений М-файл має вигляд:

```
function oxyz=Optima2(N)

n=1:N;
u=floor(sqrt(n-1)); v=floor((sqrt(4*n-3)-1)/2);
Sp=n+(u.*(u+1)-n+1).*cos(u.*pi);
Sm=n+1/2+(n-3/2-v.*(v+2)).*cos(v.*pi);
x=n-(Sp+Sm)/2; y=(Sm-Sp)/2; % залежність x і y від номера n
for i=1:N
if x(i)>=0 & y(i)>=0 & 4*x(i)+28*y(i)<=77 & 36*x(i)+28*y(i)<=189
xc(i)=x(i);yc(i)=y(i); % накладання цілочислової сітки
end
end
dl=length(xc);

zo=max(9.*xc+8.*yc); % відшукання оптимального значення z(x,y)
d=zo-(9*xc+8*yc);
for j=1:dl
if d(j)==0
xo=xc(j);yo=yc(j); % установлення оптимального плану (xo,yo)
end
end
oxyz=[xo,yo,zo];
```

Після звернення до процедури видається результат:

```
N=125;
>> oxyz=Optima2(N)
oxyz =
     5     0    45
```

Отже, не розв'язуючи послабленої задачі (з максимумом у точці B(3,5; 2,25)), відразу отримуємо цілочисловий оптимум у точці C(5,0).

Без принципових змін метод НЦС поширюється на нелінійні задачі математичного програмування.

Література: 1. Ершов Ю. Л. Теория нумераций / Ю. Л. Ершов. – М.: Наука, 1977. – 416 с. 2. Серпинский В. Сто простых, но одновременно трудных вопросов арифметики / В. Серпинский. – М.: Учпедгиз, 1961. – 76 с. 3. Сенчуков В. Ф. Логические операции над последовательностями и закон простых чисел / В. Ф. Сенчуков // Докл. АН УССР. Сер. А. – 1988. – № 6. – С. 20–23. 4. Кузнецов А. В. Высшая математика: Математическое программирование: учебник / А. В. Кузнецов, В. А. Сакович, И. И. Холод; под ред. А. В. Кузнецова. – Мн.: Вышейшая школа, 1994. – 286 с.

References: 1. Ershov Yu. L. Teoriya numertsiy [Theory of Enumerations] / Yu. L. Ershov. – M. : Nauka, 1977. – 416 p. 2. Serpinskiy V. Sto prostykh i odnovremenno trudnykh voprosov arifmetiki [Hundred Simple but at the Same Time Difficult Questions of Arithmetic] / V. Serpinskiy. – M. : Uchpedgiz, 1961. – 76 p. 3. Senchukov V. F. Logicheskie operatsii nad posledovatelnostyami i zakon prostykh chisel [Logical Operations on Sequences and the law of Prime Numbers] / V. F. Senchukov // Dokl. AN USSR. Ser. A. – 1988. – No. 6. – P. 20–23. 4. Kuznetsov A. V. Vysshaya matematika: matematicheskoe programmirovanie : uchebnik / A. V. Kuznetsov, V. A. Sakovich, I. I. Kholod ; pod. red. A. V. Kuznetsova. – Mn. : Vysheyshaya shkola, 1994. – 286 p.

Інформація про автора

Сенчуков Віктор Федорович – канд. фіз.-мат. наук, доцент кафедри вищої математики й економіко-математичних методів Харківського національного економічного університету імені Семена Кузнеця (61166, Україна, м. Харків, пр. Леніна, 9-А, e-mail: sevifed@gmail.com).

Информация об авторе

Сенчуков Виктор Федорович – канд. физ.-мат. наук, доцент кафедры высшей математики и экономико-математических методов Харьковского национального экономического университета имени Семена Кузнеца (61166, Украина, г. Харьков, пр. Ленина, 9-А, e-mail: sevifed@gmail.com).

Information about the author

V. Senchukov – PhD in Physics and Mathematics, Associate Professor of the Department of Higher Mathematics and Economic-Mathematical Methods of Simon Kuznets Kharkiv National University of Economics (9-A Lenin Ave., 61166, Kharkiv, Ukraine, e-mail: sevifed@gmail.com).

Рецензент
докт. екон. наук,
професор Раєвнєва О. В.

Стаття надійшла до ред.
11.06.2014 р.