МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ, МОЛОДІ ТА СПОРТУ
УКРАЇНИ

ХАРКІВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ ЕКОНОМІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ

ВИЩА МАТЕМАТИКА. ЗАГАЛЬНІ РОЗДІЛИ

Частина друга

Навчальний посібник для студентів напряму підготовки 6.050101 „Комп'ютерні науки"

Харків. Вид. ХНЕУ, 2013

УДК 51(075.8)
ББК 22.1я73
С 31

Рецензенти: докт. фіз.-мат. наук, професор, завідувач кафедри вищої та прикладної математики Української інженерно-педагогічної академії *Литвин О. М.*; докт. фіз.-мат. наук, професор кафедри вищої математики Національного аерокосмічного університету ім. М. Є. Жуковського „ХАІ” *Проценко В. С.*

Затверджено на засіданні вченої ради Харківського національного економічного університету

Протокол № 2 від 19.09.2012 р.

Сенчуков В. Ф.

С 31 Вища математика. Загальні розділи : навчальний посібник для студентів напряму підготовки 6.050101 „Комп’ютерні науки”. Ч. 2 / В. Ф. Сенчуков, Т. В. Денисова. – Х. : Вид. ХНЕУ, 2013. – 296 с. (Укр. мов.)

Подано теоретичний і практичний матеріал за розділами: „Інтегральне числення функції однієї змінної” та „Функції кількох змінних. Числові і функціональні ряди”. До кожної теми наведено: перелік питань, що висвітлюються; компетентності, що формуються після вивчення теми; контрольні запитання для самодіагностики засвоєння матеріалу; задачі та вправи з відповідями; ключові терміни; резюме; використану літературу.

Рекомендовано для студентів напряму підготовки 6.050101 „Комп’ютерні науки” всіх форм навчання.

УДК 51(075.8)
ББК 22.1я73

Вступ

Ті, хто народився математиком, володіючи комбінованим розумом, мають хороші здібності до всіх інших знань.

Сократ

„Справжня" математика „справжніх" математиків відрізняється тим, що вона майже завжди марна, з точки зору практичного використання. І тільки час тут справедливий суддя.

Годфрі Харольд Харді

Друга частина пропонованого посібника з загального курсу навчальної дисципліни „Вища математика" для студентів напряму підготовки 6.050101 „Комп'ютерні науки" включає два розділи: „Інтегральне числення функції однієї змінної" (розділ 3), „Функції кількох змінних. Числові і функціональні ряди" (розділ 4). Відповідний матеріал охоплює два змістовні модулі підсумкового контролю знань, викладений відповідно до чинної робочої програми, складеної згідно з Галузевими стандартами навчальної дисципліни.

Названі розділи містять п'ять тем: „Первісна, невизначений інтеграл"; „Визначений інтеграл"; „Функції кількох змінних"; „Екстремуми функції кількох змінних, необхідні й достатні умови"; „Числові, функціональні, степеневі ряди, ряди Фур'є".

Структура даного посібника така ж, як і в першій частині.

За кожною темою наводяться: *мета,* яку треба досягти в результаті вивчення теми; *питання теми*, які підлягають засвоєнню; *компетентності* (за Галузевими стандартами), що формуються після вивчення теми (*загальнонаукова*, *загальнопрофесійна*, *спеціалізовано-професійна*); *висвітлення* питань теми; *контрольні запитання* для самодіагностики засвоєння матеріалу; *задачі та вправи* і відповіді до них; *ключові терміни*; *резюме*; *література*. У кінці посібника поміщені: список усієї використаної *літератури*, покажчик *позначень*, *предметний* покажчик.

Тема „Первісна, невизначений інтеграл" охоплює відомості про: множину первісних, властивості невизначеного інтеграла; методи інтегрування; невизначене інтегрування різних класів функцій. У темі „Визначений інтеграл" викладено: властивості визначеного інтеграла і його зв'язок із невизначеним інтегралом; методи визначеного інтегрування; застосування в різних галузях знань. Тема „Функції кількох змінних" при-

свячена функціональним залежностям між числом змінних, більшим двох; розглядаються: границя і неперервність функцій, частинні похідні і диференціали; похідна за напрямом і градієнт функції кількох змінних. Екстремуми функцій багатьох змінних – локальні, тотальні, умовні – вивчаються в окремій – четвертій – темі.

Матеріал п'ятої теми – „Числові, функціональні, степеневі ряди, ряди Фур'є" – викладається в усталеній послідовності: властивості й ознаки збіжності числових рядів; розвинення функцій в ряди, указані в назві теми, і їхні застосування.

Певна частина роботи з опанування дисципліни залишається студенту, хоча всі принципові положення викладені. У посібнику систематично використовуються елементи сучасної математичної символіки. Для її засвоєння означення понять, формулювання теорем тощо у виключній більшості випадків подаються і словесно, і в символічному вигляді.

З метою кращого осмислення теоретичних основ навчальної дисципліни загальні викладки супроводжуються конкретними прикладами (в тому числі і застосовного характеру) з детальним коментарем.

Для кращого засвоєння теоретичних положень і більш глибокого розуміння їх суті введено своєрідні рубрики – „*пропонуємо*", „*наголошуємо*" та інші (*прослідкуйте, обміркуйте, зіставте, порівняйте* тощо).

Опанування матеріалу в запропонованому обсязі є запорукою успішного оволодіння ідеями і методами математичного аналізу, які використовуються в інших дисциплінах математичного циклу: „Математичне програмування", „Теорія ймовірностей і математична статистика", „Чисельні методи", і в спеціальних дисциплінах.

Для того щоб посібник можна було студіювати незалежно від інших джерел інформації, він не містить (за текстом) посилань на них. Формули, рисунки, теореми тощо нумеруються трьома числами, перше з яких є номером теми, друге (після крапки) указує на номер питання теми, третє (після крапки) є власне порядковим номером тієї чи іншої смислової складової тексту.

Розділ 3. Інтегральне числення функції однієї змінної

11. Первісна, невизначений інтеграл

Багато з математики не залишається в пам'яті, але коли зрозумієш її, тоді легко при нагоді згадати забуте.
М. В. Остроградський

Мета: навчити майбутніх фахівців умінню за швидкісними (граничними) величинами, що описують економічні процеси або складові інформаційних систем, відтворювати їхні загальні характеристики (загальні витрати, загальний дохід, енергію сигналу тощо).

Питання теми:

11.1. Первісна функція. Невизначений інтеграл (НІ).

11.2. Методи невизначеного інтегрування.

11.3. Інтегрування деяких класів елементарних функцій: раціональних, ірраціональних, тригонометричних.

Компетентності, що формуються після вивчення теми:

Загальнонаукова: володіння засобами відновлення функцій за відомою похідною (чи її диференціалом).

Загальнопрофесійна: підготовленість до аналізу швидкісних (граничних) характеристик функціональних залежностей з метою обробки інформації, яку несуть часові (сигнальні) функції.

Спеціалізовано-професійна: уміння впроваджувати методи інтегрального числення в моделювання процесів управління інформаційними системами.

11.1. Первісна функція. Невизначений інтеграл (НІ)

Первісна функція: означення, теорема про множину первісних

Нехай функції $f(x)$, $F(x)$ визначені на проміжку $\langle a,b\rangle$, де a, b – дійсні числа або один із символів: $-\infty$, $+\infty$, тобто невластиві дійсні числа. Функція $F(x)$ називається **первісною**, або **примітивною**, для $f(x)$ на заданому проміжку $\langle a,b\rangle$, якщо в кожній точці цього проміжку $f(x)$ є

похідною від $F(x)$ або, що те ж саме, добуток $f(x)dx$ є диференціалом функції $F(x)$:

$$F(x) \text{ – первісна на } \langle a,b\rangle \ \rightleftarrows\ \forall x\in\langle a,b\rangle : \left[\begin{array}{ll} F'(x)= f(x), & (11.1.1)\\ dF(x)= f(x)dx. & (11.1.2)\end{array}\right.$$

Наприклад, первісною для $f(x)=\cos x$ на $\mathbf{R}$ є функція $F(x)=\sin x$, бо $F'(x)=(\sin x)'=\cos x= f(x)$.

Установлення для $f(x)$ усіх її первісних називають **інтегруванням** функції $f(x)$, а відповідний розділ математики, в якому розв'язується задача відшукання функції за її похідною (диференціалом), називається **інтегральним численням** (від лат. *integratio* – відновлення).

Теорема 11.1.1 *(про множину первісних)*. Якщо для функції $f(x)$ на $\langle a,b\rangle$ існують первісні, то: 1) їх нескінченно багато; 2) всі вони відрізняються одна від одної на сталу величину.

Д о в е д е н н я 1) базується на означенні первісної і властивостях похідної. Нехай $F(x)$ – первісна для $f(x)$ на $\langle a,b\rangle$, тоді за означенням $F'(x)= f(x)$. Оскільки похідна сталої дорівнює нулю, то функція $\Phi(x)=F(x)+C$, де $\forall C\in\mathbf{R}$, також є первісною для $f(x)$:

$$\Phi'(x)=(F(x)+C)'= f(x).$$

Отже, існування однієї первісної тягне за собою незлíченну множину інших первісних.

Д о в е д е н н я 2) потребує залучення необхідної і достатньої умови сталості функції (див. (10.1.8) частини 1). Нехай $F(x)$ і $\Phi(x)$ деякі первісні, тобто $F'(x)= f(x)$ і $\Phi'(x)= f(x)$. Розглянемо допоміжну функцію $\Psi(x)=\Phi(x)-F(x)$. Для будь-якого $x\in\langle a,b\rangle$ маємо:

$$\Psi'(x)=(\Phi(x)-F(x))'=\Phi'(x)-F'(x)\equiv 0.$$

Оскільки у кожній точці із $\langle a,b\rangle$ $\Psi'(x)=0$, то $\Psi(x)=C-const$. Таким чином, $\Phi(x)-F(x)=C$, або $\Phi(x)=F(x)+C$.

Наприклад, для функції $f(x)=\sin 2x$ на усій числовій осі $\mathbf{R}$ первісними є функції $F(x)=\sin^2 x$, $\Phi(x)=-\frac{1}{2}\cos 2x$ (*переконайтеся!*). За виглядом вони різні, проте відрізняються лише сталим доданком:

$$\Phi(x)-F(x)=-\frac{1}{2}\left(1-2\sin^2 x\right)-\sin^2 x=-\frac{1}{2}.$$

Висновок. Для відшукання будь-якої первісної для заданої функції достатньо знати тільки одну: кожна інша є сумою знайденої первісної і деякої дійсної сталої.

Множину усіх первісних для $f(x)$ на $\langle a,b\rangle$ називають **однопараметричною сім'єю первісних** і описують виразом $F(x)+C$, де $F(x)$ – одна з первісних – **породжуюча сім'ю функція**, C – числовий параметр, який називають **довільною сталою** (адже областю його значень є вся числова вісь).

Невизначений інтеграл: означення, властивості, таблиця основних інтегралів

Однопараметрична сім'я первісних для функції $f(x)$ на $\langle a,b\rangle$ називається **невизначеним інтегралом** (від) функції $f(x)$ і позначається:

$$\int f(x)dx=F(x)+C, \tag{11.1.3}$$

де $\int$ – символ (знак) НІ;

$f(x)$ – підінтегральна функція;

dx – диференціал **змінної інтегрування** x;

$f(x)dx$ – підінтегральний вираз.

Ліва частина (11.1.3) читається так: „інтеграл еф від ікс де ікс".

Теорема 11.1.2 (*теорема існування НІ*). Якщо функція $y=f(x)$ неперервна на проміжку $\langle a,b\rangle$, то для неї існує невизначений інтеграл як однопараметрична сім'я функцій, похідна кожної з яких дорівнює $f(x)$.

Теорему приймаємо без доведення.

(*Обміркуйте*, яку множину точок площини xOy визначає НІ, тобто сім'я первісних для заданої функції на проміжку її неперервності.)

Основні властивості НІ випливають з означення первісної, співвідношення (11.1.3) із залученням властивостей похідної.

1^0 (*про похідну НІ*). Похідна НІ за змінною інтегрування дорівнює підінтегральній функції:

$$\left(\int f(x)dx\right)'_x = f(x). \tag{11.1.4}$$

Дійсно, згідно з (11.1.3), (11.1.2) маємо:

$$\left(\int f(x)dx\right)'_x = \left(F(x)+C\right)'_x = f(x).$$

2^0 (*про диференціал НІ*). Диференціал НІ за змінною інтегрування дорівнює підінтегральному виразу:

$$d\left(\int f(x)dx\right) = f(x)dx \tag{11.1.5}$$

(бо диференціал функції – це добуток похідної функції з диференціалом аргументу).

3^0 (*про НІ від диференціала*). НІ від диференціала будь-якої функції, що має похідну, є однопараметричною сім'єю цієї функції:

$$\int d\varphi(x) = \varphi(x) + C. \tag{11.1.6}$$

Обґрунтування таке ж саме (*покажіть це!*), як і властивості (11.1.5).

4^0 (*про НІ від похідної*). НІ від похідної будь-якої диференційовної функції є однопараметричною сім'єю цієї функції:

$$\int \varphi'(x)dx = \varphi(x) + C. \tag{11.1.7}$$

(*Пропонуємо* довести цю властивість самостійно.)

Нижче наведені властивості, які називають також **правилами інтегрування**, доводяться за допомогою зіставлення множин, які відповідають лівій і правій частинам рівностей, або диференціюванням лівої і правої частин рівностей, які треба довести.

5^0 (*про сталий множник*). Сталий множник можна виносити за знак НІ:

$$\int a f(x)dx = a\int f(x)dx, \tag{11.1.8}$$

де a – не рівна нулеві стала.

Нехай $F(x)$ – первісна для $f(x)$ на $\langle a,b\rangle$. Легко переконатися, що $aF(x)$ є первісною для добутку $a\,f(x)$. Однопараметричні сім'ї функцій лівої і правої частин (11.1.8) виглядають відповідно так:

$$aF(x)+C_1,\quad \text{де } \forall C_1\in\mathbf{R};$$
$$a(F(x)+C_2)=aF(x)+aC_2,\quad \text{де } \forall C_2\in\mathbf{R}.$$

Але якщо параметр C_2 набуває вартостей з усієї числової осі, то областю значень параметра aC_2, як і C_1, теж є множина $\mathbf{R}$ (*чому?*). Отже, множини, які описуються лівою і правою частинами (11.1.8), рівні між собою. (*Обміркуйте* випадок $a=0$.)

6^0 (*про НІ від суми функцій*). НІ від алгебраїчної суми двох функцій дорівнює сумі НІ від доданків цієї суми:

$$\int(f_1(x)\pm f_2(x))dx=\int f_1(x)dx\pm\int f_2(x)dx. \tag{11.1.9}$$

Нехай $F_1(x)$, $F_2(x)$ – первісні функції для $f_1(x)$, $f_2(x)$ на $\langle a,b\rangle$, тоді ліва і права частини (11.1.9) описують такі множини функцій:

$$F_1(x)\pm F_2(x)+C,\quad \text{де } \forall C\in\mathbf{R};$$
$$(F_1(x)+C_1)\pm(F_2(x)+C_2),\quad \text{де } \forall C_1\in\mathbf{R},\ \forall C_2\in\mathbf{R}, \text{ або}$$
$$F_1(x)\pm F_2(x)+(C_1\pm C_2).$$

Сума і різниця довільних сталих C_1, C_2, як і самі сталі, разом з параметром C, набувають усіх дійсних значень (*чому?*). Отже, ліва і права частини в (11.1.9) описують одну і ту ж множину функцій.

Зауваження. Властивість 6^0 узагальнюється на будь-яке скінченне число доданків.

Вправа (на осмислення властивості 6^0). Чи однакові сім'ї первісних описують інтеграли:

$$\int f(x)dx,\ \int(f(x)+0)dx,\ \int(f(x)-0)dx\,?$$

„Так" чи „ні" і *чому*?

7^0 (*про НІ від функції складеного лінійного аргументу*). Якщо відомий НІ функції $f(x)$, то НІ від цієї функції зі складеним аргументом

$kx+b$, де k, $b-const$, породжується тією ж первісною, але від лінійного аргументу, і з коефіцієнтом $1/k$:

$$\int f(x)dx = F(x)+C \Rightarrow \int f(kx+b)dx = \frac{1}{k}F(kx+b)+C. \qquad (11.1.10)$$

Для встановлення справедливості 7^0 застосуємо властивість 1^0 (про похідну НІ):

$$\left(\frac{1}{k}F(\underbrace{kx+b}_{t})+C\right)'_x = \frac{1}{k}\cdot F'_t(t)\cdot t'_x = \frac{1}{k}\cdot f(kx+b)\cdot k = f(kx+b),$$

де t – проміжний аргумент.

Цю властивість можна довести інакше, впровадивши іншу змінну інтегрування $t=kx+b$ і відшукавши зв'язок між диференціалами dx і dt:

$$t = kx+b \;\Rightarrow\; dt = (kx+b)'_x\cdot dx = k\cdot dx \;\Rightarrow\; dx = \frac{1}{k}dt.$$

Тоді

$$\int f(kx+b)dx = \int f(t)\cdot\frac{1}{k}dt = \frac{1}{k}\int f(t)dt = \frac{1}{k}F(t)+C =$$

$$= \left| t = kx+b \right| = \frac{1}{k}F(kx+b)+C. \qquad (11.1.11)$$

Приклад. Безпосереднє застосування формули (11.1.10) дає:

$$\int\cos(3x-5)dx = \frac{1}{3}\sin(3x-5)+C, \text{ бо } \int\cos x dx = \sin x + C.$$

І згідно з (11.1.11) маємо:

$$\int\cos(3x-5)dx = \left|\begin{array}{c} t=3x-5 \;\Rightarrow \\ \Rightarrow\; dt = t'_x dx = 3dx \end{array}\right| = \int\cos t\cdot\frac{1}{3}dt = \frac{1}{3}\int\cos t dt =$$

$$= \frac{1}{3}\sin t + C = \frac{1}{3}\sin(3x-5)+C.$$

Оцініть, який підхід до відшукання НІ (або кажуть „взяття НІ") більше раціональний.

8^0 (*про інваріантність (незмінність) формули НІ*). Вигляд формули інтегрування не залежить від того, є змінна інтегрування незалежною змінною чи функцією від неї:

$$\int f(x)dx = F(x)+C \;\Rightarrow\; t=\varphi(x):\; \int f(t)dt = F(t)+C. \qquad (11.1.12)$$

Покажемо, що формула інтегрування за змінною $t=\varphi(x)$ справедлива. Для цього здиференціюємо ліву і праву частини формули (після символу $\Rightarrow$) за змінною x:

$$\left.\begin{array}{l} \left(\int f(\varphi(x))\cdot\varphi'(x)dx\right)'_x = f(\varphi(x))\cdot\varphi'(x) = f(t)\cdot t'_x \\ (F(t)+C)'_x = F'_t(t)\cdot t'_x = f(t)\cdot t'_x \end{array}\right] \Rightarrow \int f(t)dt = F(t)+C.$$

Приклад. $\int \frac{1}{x}dx = \ln|x|+C$, бо $(\ln|x|)'_x = \frac{1}{x}$. Тоді

$$\int \frac{1}{\sin x} d\sin x = \ln|\sin x|+C, \text{ де } \varphi(x)=t=\sin x.$$

Властивість 8^0 є узагальненням властивості 7^0. Вона часто використовується при взятті НІ. При цьому для впровадження нової змінної інтегрування застосовують **операцію введення (функції) під знак диференціала** – це коли добуток деякої функції $\varphi(x)$ на диференціал аргументу подають у вигляді диференціала функції $\Phi(x)$, яка є первісною для $\varphi(x)$: $\varphi(x)dx = d\Phi(x)$.

Приклад. Візьмемо НІ $I=\int \cos x\cdot\sin x\,dx$, залучаючи операцію введення під знак диференціала, з урахуванням, що $(\sin x)' = \cos x$:

$$I=\int \sin x\cdot(\cos x\,dx) = |\cos x\,dx = d\sin x| = \int \underbrace{\sin x}_{t}\, d\underbrace{\sin x}_{t} = \frac{\sin^2 x}{2}+C,$$

адже $\int x\,dx = \frac{x^2}{2}+C$.

Пропонуємо знайти цей НІ ще двома способами: за допомогою введення під знак диференціала другого множника, тобто функції $\sin x$; за допомогою тригонометричної формули: $\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha$.

Оволодіння технікою інтегрування потребує, перш за все, знання НІ основних елементарних функцій, які наведені в табл. 11.1.1.

Таблиця 11.1.1

Таблиця основних інтегралів

1. $\int dx = x + C$	14. $\int \frac{dx}{\mathrm{ch}^2 x} = \mathrm{th}\, x + C$
2. $\int x^{\alpha} dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C$, $\alpha \neq -1$	15. $\int \frac{dx}{\mathrm{sh}^2 x} = -\mathrm{cth}\, x + C$
3. $\int \frac{dx}{x} = \ln\lvert x \rvert + C$	16. $\int \frac{\varphi'(x)}{\varphi(x)} dx = \ln\lvert\varphi(x)\rvert + C$
4. $\int \frac{dx}{1+x^2} = \left[\begin{array}{l} arctg\, x + C, \\ -arcctg\, x + C \end{array}\right.$	17. $\int \frac{\varphi'(x)}{\sqrt{\varphi(x)}} dx = 2\sqrt{\varphi(x)} + C$
5. $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \left[\begin{array}{l} \arcsin x + C, \\ -\arccos x + C \end{array}\right.$	18. $\int \frac{dx}{x^2+a^2} = \frac{1}{a} arctg \frac{x}{a} + C$
6. $\int e^x dx = e^x + C$	19. $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \arcsin \frac{x}{a} + C$
7. $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$	20. $\int \frac{dx}{x^2-a^2} = \frac{1}{2a} \ln\left\lvert\frac{x-a}{x+a}\right\rvert + C$
8. $\int \sin x\, dx = -\cos x + C$	21. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \ln\left\lvert x + \sqrt{x^2 \pm a^2} \right\rvert + C$
9. $\int \cos x\, dx = \sin x + C$	22. $\int \frac{dx}{\sin x} = \ln\left\lvert tg \frac{x}{2} \right\rvert + C$
10. $\int \frac{1}{\cos^2 x} dx = tg\, x + C$	23. $\int \frac{dx}{\cos x} = \ln\left\lvert tg\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right)\right\rvert + C$
11. $\int \frac{1}{\sin^2 x} dx = -ctg\, x + C$	24. $\int tg\, x\, dx = -\ln\lvert \cos x \rvert + C$
12. $\int \mathrm{sh}\, x\, dx = \mathrm{ch}\, x + C$	25. $\int ctg\, x\, dx = \ln\lvert \sin x \rvert + C$
13. $\int \mathrm{ch}\, x\, dx = \mathrm{sh}\, x + C$	26. $\int \ln x\, dx = x(\ln x - 1) + C$

Справедливість кожної формули таблиці, як і загалом результату інтегрування, перевіряється диференціюванням згідно зі властивістю 1^0 (про похідну НІ); формулу 20 (21) називають *логарифмом високим (довгим).*

Інтегрування функцій – обернена операція відносно диференціювання – є більш складною, як будь-яка із обернених математичних дій: віднімання (ділення, добування кореня) складніше порівняно з додаванням (множенням, піднесенням до степеня) тощо. Тому взяття НІ потребує більшої гнучкості розуму, ніж техніка диференціювання.

11.2. Методи невизначеного інтегрування

Безпосереднє інтегрування

Відшукання НІ за допомогою таблиці основних інтегралів у поєднанні з властивостями НІ і тотожними перетвореннями підінтегрального виразу називають **методом безпосереднього інтегрування**.

Цей підхід до взяття НІ охоплює досить вузький клас (множину) функцій, зате, як правило, не викликає утруднень.

Загальний порядок безпосереднього інтегрування полягає у такому:

1) *аналізуємо* підінтегральний вираз з метою встановлення того, які властивості НІ і алгебраїчні перетворення слід здійснити, щоб дійти до взяття табличного НІ;

2) *виконуємо* належні дії;

3) *застосовуємо* відповідні табличні формули.

Запис процесу взяття НІ здійснюється ланцюжком, можливо, з наведенням довідкових відомостей.

Приклади:

$$I_1 = \int tg^2 x\, dx = \left| 1 + tg^2 \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha} \right| = \int \left(\frac{1}{\cos^2 x} - 1 \right) dx =$$

$$= \int \frac{1}{\cos^2 x} dx - \int dx = tgx + C_1 - \left(x + C_2 \right) = tgx - x + C,$$

де різницю двох параметрів C_1 і C_2 замінили одним – C, бо різниця двох довільних сталих із $\mathbf{R}$ дає довільну сталу із $\mathbf{R}$.

Перевіряємо правильність інтегрування за допомогою диференціювання отриманої первісної:

$$F'(x) = (tgx - x)'_x = \frac{1}{\cos^2 x} - 1 = \frac{1 - \cos^2 x}{\cos^2 x} = \left| \begin{array}{c} \sin^2 x + \cos^2 x = 1 \\ tgx = \dfrac{\sin x}{\cos x} \end{array} \right| = tg^2 x = f(x).$$

$$I_2=\int\left(4\sqrt[3]{x}+(1-2x)^5+x\,e^{x^2}\right)dx=\int 4x^{1/3}dx+\int(-2x+1)^5dx+\int x\,e^{x^2}dx\;=$$

$$=\left|\begin{array}{c}\text{використовуємо}\\ \text{властивості } 6^0,\ 7^0,\ 8^0\end{array}\right|=4\cdot\frac{x^{\frac{1}{3}+1}}{4/3}-\frac{1}{2}\cdot\frac{(-2x+1)^6}{6}+\int e^{x^2}d\left(\frac{1}{2}x^2\right)=$$

$$=3\cdot\sqrt[3]{x^4}-\frac{1}{12}(2x-1)^6+\frac{1}{2}e^{x^2}+C\,.$$

(*Пропонуємо* перевірити, чи правильний отриманий результат.)

Інтегрування заміною змінної

Відшукання НІ $I=\int f(x)dx$ за допомогою переходу від змінної інтегрування x до нової змінної t, з метою зведення його до простішого або навіть табличного, називають **методом заміни змінної**, або **методом підстановки**. Основою цього, найбільш потужного, методу є властивість про інваріантність формули НІ (див. (11.1.12)).

Зв'язок між змінними інтегрування – вихідною x і новою t – залежно від вигляду підінтегральної функції описується співвідношенням, розв'язуваним відносно t або x. Тому розрізнюють два типи підстановки: $t=\varphi(x)$ або $x=\psi(t)$.

1. **Підстановка $\boldsymbol{t=\varphi(x)}$** виконується у випадках, коли підінтегральна функція є добутком складеної функції $f(\varphi(x))$ з похідною проміжного аргументу $\varphi(x)$ або виразом, що відрізняється від похідної сталим множником:

$$\int f(\varphi(x))\cdot\varphi'(x)dx=\left|\begin{array}{l}t=\varphi(x)\\ dt=\varphi'(x)dx\end{array}\right|=\int f(t)dt\,. \qquad (11.2.1)$$

Після взяття інтеграла за змінною t повертаються до вихідної змінної:

$$\int f(t)dt=F(t)+C=\left|\,t=\varphi(x)\,\right|=F(\varphi(x))+C\,. \qquad (11.2.2)$$

Приклади. $I_1=\int x^2\cdot\sin x^3\,dx$.

Візуальний аналіз показує, що підінтегральна функція містить зложену функцію $\sin x^3$ (а не просто $\sin x$!) і множник x^2, який відрізняється

від похідної $\left(x^3\right)'_x = 3x^2$ сталим множником 3. Це говорить про доцільність використання підстановки $t = x^3$:

$$I_1 = \int \sin x^3 \cdot x^2 dx = \left| \begin{array}{c} t = x^3 \\ dt = 3x^2 dx \end{array} \right| = \frac{1}{3}\int \sin t\, dt = \frac{1}{3}(-\cos t) + C = -\frac{1}{3}\cos x^3 + C.$$

(*Пропонуємо* зробити перевірку.)

Відзначимо, що без належних попередніх тотожних перетворень підінтегральної функції не завжди відразу вдається здійснити вибір підхожої підстановки і відповідного табличного інтеграла:

$$I_2 = \int \sqrt{\frac{\arccos 2x}{1-4x^2}}dx = \int \frac{(\arccos 2x)^{1/2}}{\sqrt{1-(2x)^2}}dx = \int (\arccos 2x)^{1/2} \cdot \frac{1}{\sqrt{1-(2x)^2}}\, dx =$$

$$= \left| \, t = \arccos 2x \;\Rightarrow\; dt = -\frac{2\,dx}{\sqrt{1-(2x)^2}} \, \right| = \int t^{1/2} \cdot \left(-\frac{1}{2}dt\right) = -\frac{1}{2} \cdot \frac{t^{3/2}}{3/2} + C =$$

$$= -\frac{1}{3}(\arccos 2x)^{3/2} + C.$$

2. **Підстановка** $\boldsymbol{x = \psi(t)}$ виконується переважно для здійснення переходу від одного класу функцій до іншого: від ірраціональних функцій до раціональних, від степеневих до тригонометричних, від показникових до степеневих тощо; при цьому для вертання до вихідної змінної функція $x = \psi(t)$ повинна мати обернену функцію $t = \psi^{-1}(x)$:

$$I = \int f(x) dx = \left| \begin{array}{c} x = \psi(t) \\ dx = \psi'(t) dt \end{array} \right| = \int f(\psi(t)) \cdot \psi'(t) dt = F(t) + C =$$

$$= \left| \, t = \psi^{-1}(x) \, \right| = F\left(\psi^{-1}(x)\right) + C. \qquad (11.2.3)$$

Приклад. $I = \int \frac{x}{\sqrt{25-x^2}} dx$.

Щоб позбавитися від ірраціональності покладемо $x = 5\sin t$, де $t \neq \pi k \pm \frac{\pi}{2}$, $k \in \mathbf{Z}$. Тоді маємо: $\sqrt{25-x^2} = 5\cos t$, $dx = 5\cos t\, dt$.

Отже,

$$I=\int\frac{5\sin t\cdot 5\cos t\,dt}{5\cos t}=5\int\sin t\,dt=-5\cos t+C=\left|t=\arcsin\frac{x}{5}\right|=$$

$$=-5\cos\left(\arcsin\frac{x}{5}\right)+C\,. \qquad (11.2.4)$$

(*Обґрунтуйте* законність скорочення на $\cos t$).

Підстановка, за допомогою якої спрощується заданий НІ, може бути не єдиною:

$$I=\int\frac{x}{\sqrt{25-x^2}}dx=\left|\begin{matrix}t=25-x^2\\ dt=-2xdx\end{matrix}\right|=-\frac{1}{2}\int\frac{dt}{\sqrt{t}}=-\sqrt{t}+C=-\sqrt{25-x^2}+C\,. \qquad (11.2.5)$$

(*Зіставте* первісні в (11.2.4), (11.2.5) і *зробіть* відповідний висновок.)

Підсумовуючи розглянуте, наведемо ***загальний порядок*** інтегрування методом підстановки:

1) *вибираємо* підхожу заміну змінної $(t=\varphi(x)$ або $x=\psi(t))$ і *знаходимо* зв'язок між диференціалами нової і вихідної змінних $(dt=\varphi'_x dx$, $dx=\psi'_t dt)$;

2) *переходимо* у підінтегральному виразі до нової змінної t;

3) *знаходимо* (беремо) НІ за новою змінною інтегрування;

4) *вертаємось* до вихідної змінної x $(t=\varphi(x),\ t=\psi^{-1}(x))$.

Наведемо ілюстративний *приклад*, указуючи (у дужках) номер кожного кроку:

$$\int\frac{\varphi'(x)}{\varphi(x)}dx=\underset{(1)}{\left|\begin{matrix}t=\varphi(x)\\ dt=\varphi'(x)dx\end{matrix}\right|}=\underset{(2)}{\int\frac{dt}{t}}=\underset{(3)}{\ln|t|+C}=\underset{(4)}{\ln|\varphi(x)|+C}. \qquad (11.2.6)$$

Висновок: якщо підінтегральною функцією є дріб, чисельник якого – похідна знаменника, то одна з первісних НІ являє собою натуральний логарифм модуля знаменника. (Цей НІ часто використовується, як готова формула.)

На рис. 11.2.1 зображено структурну схему інтегрування методом заміни змінної.

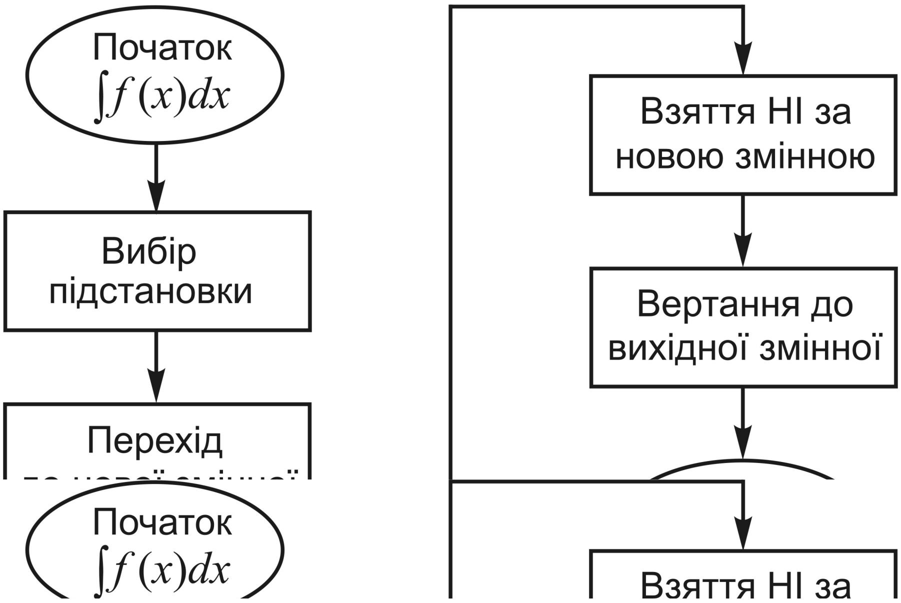


Рис. 11.2.1. **Структурна схема інтегрування методом підстановки**

Наголошуємо, що зв'язки між вихідною і новою змінною й їхніми диференціалами дозволяють завжди здійснити в НІ перехід до нової змінної.

Інтегрування частинами

Теорема 11.2.1 (*формула інтегрування частинами*). Якщо в НІ $I=\int f(x)dx$ підінтегральний вираз подано у вигляді добутку $u\cdot dv$, де $u=u(x)$ і $v=v(x)$ – диференційовні на деякому проміжку $\langle a,b\rangle$ функції, то справедливе співвідношення:

$$\int u\,dv = uv-\int v\,du. \tag{11.2.7}$$

Д о в е д е н н я проведемо за допомогою властивостей 4^0 (*про НІ від похідної*) і 6^0 (*про НІ від суми функцій*):

$$\int\varphi'(x)dx=\varphi(x)+C,\quad \int\left(f_1(x)\pm f_2(x)\right)dx=\int f_1(x)dx\pm\int f_2(x)dx,$$

та формули похідної добутку двох функцій: $(u\cdot v)'=u'\cdot v+v'\cdot u$. А саме:

$$\int u\,dv=\int u\,v'dx=\left|\,u\,v'=(u\,v)'-v\,u'\,\right|=\int\left[(u\,v)'-v\,u'\right]dx=$$

$$=\int(u\,v)'\,dx-\int v\,u'\,dx=u\,v+C-\int v\,du.$$

У формулі (11.2.7) довільну сталу C не пишуть, бо вона „поглинається” сусіднім інтегралом:

$$C=\int 0du \;\Rightarrow\; C-\int vdu=-\int (v-0)du=-\int vdu. \qquad (11.2.8)$$

(*Проведіть* дослідження формули (11.2.7) за умови, що $u\cdot v\equiv 1$.)

Відшукання НІ $I=\int f(x)dx$ за формулою (11.2.7) називають методом **інтегрування частинами**.

Наголошуємо, що подання підінтегрального виразу $f(x)dx$ у вигляді $u\cdot dv$, яке називають **розбиттям** його **на частини**, треба здійснювати таким чином: за u приймаємо ту частину підінтегрального виразу, яка при диференціюванні спрощується, а за dv – ту, яка легко інтегрується. Якщо частини розбиття визначені правильно, то НІ у правій частині формули буде не складніше вихідного або навіть табличним.

Загальний порядок інтегрування частинами такий:

1) *розбиваємо* підінтегральний вираз належним чином на частини u, dv (тобто якийсь фрагмент підінтегральної функції приймаємо за u, а те, що залишилося в підінтегральному виразі, – за dv);

2) *знаходимо* диференціал функції $u=u(x)$, а за відомим диференціалом $dv(x)$ інтегруванням *відновлюємо* одну із первісних $v(x)$;

3) *застосовуємо* формулу інтегрування частинами, себто підставляємо у праву частину формули відомості з 1), 2);

4) *беремо* НІ $\int vdu$ і *записуємо* остаточну відповідь.

Приклад (інтегрування частинами і зразок оформлення символічних записів):

$$I=\int \underbrace{(2x-1)}_{u}\cdot \underbrace{e^{x}dx}_{dv}=\left|\begin{array}{l} u=2x-1 \;\Rightarrow\; du=u'_x dx=2dx \\ dv=e^{x}dx \;\Rightarrow\; v=\int dv=\int e^{x}dx=e^{x} \\ \qquad\qquad (1) \qquad\qquad\qquad\qquad (2) \end{array}\right|=$$

$$=uv-\int vdu=(2x-1)e^{x}-\underset{(3)}{\int} e^{x}\cdot 2dx=(2x-1)e^{x}\underset{(4)}{-}2e^{x}+C=(2x-3)e^{x}+C.$$

Якщо інтеграли $\int dv$ і $\int vdu$ громіздкі, то їх беруть окремо від ланцюжка записів. (*Пропонуємо* самостійно зобразити структурну схему інтегрування частинами.)

Область застосовності формули (11.2.7) значно вужча, ніж методу підстановки. Проте існують класи функцій, які інтегруються *тільки* частинами (табл. 11.2.1).

Таблиця 11.2.1

Типи інтегралів, які беруться частинами

<table>
<tr><th>I</th><th>II</th><th>III</th></tr>
<tr><td>1. $\int P_n(x)\cdot e^x dx$</td><td>4. $\int P_n(x)\cdot \ln^m x\, dx$, $m\in \mathbf{N}$</td><td rowspan="3">7. $\int e^{\alpha x}\cdot \left[\begin{array}{l}\sin(\beta x)dx \\ \cos(\beta x)dx\end{array}\right.$
Покладають
$u = e^{\alpha x}$ або $dv = e^{\alpha x}dx$</td></tr>
<tr><td>2. $\int P_n(x)\cdot \sin x\, dx$</td><td>5. $\int P_n(x)\cdot \left[\begin{array}{l}\arcsin x\, dx \\ \arccos x\, dx\end{array}\right.$</td></tr>
<tr><td>3. $\int P_n(x)\cdot \cos x\, dx$</td><td>6. $\int P_n(x)\cdot \left[\begin{array}{l}arctg\, x\, dx \\ arcctg\, x\, dx\end{array}\right.$</td></tr>
<tr><td>Покладають
$u = P_n(x)$</td><td>Покладають
$dv = P_n(x)dx$</td><td>8. $\int \left[\begin{array}{l}\sin(\ln \beta x)dx \\ \cos(\ln \beta x)dx\end{array}\right.$
Покладають
$dv = dx$</td></tr>
</table>

До **першого типу** віднесемо НІ, підінтегральні функції яких є добутком многочлена n-го степеня $P_n(x)$ з показниковою функцією e^x або з тригонометричними функціями $\sin x$, $\cos x$. Для таких функцій покладають $u = P_n(x)$, а dv міститиме другий множник (див. 1, 2, 3 табл. 11.2.1). Так само поступають, якщо у другому множнику аргументом є лінійна функція від x: e^{kx+b}, $\sin(kx+b)$, $\cos(kx+b)$ де k, b – сталі із $\mathbf{R}$.

Другий тип охоплює НІ, підінтегральні функції яких являють собою добуток многочлена $P_n(x)$ з натуральним степенем логарифмічної функції $\ln^m x$ $(m\in \mathbf{N})$ або з оберненими тригонометричними функціями (див. 4, 5, 6 табл. 11.2.1). У цьому випадку покладають $dv = P_n(x)dx$, а u визначається другим співмножником. Принципових змін не буде, якщо в якості аргументу x виступатиме лінійна функція від нього.

До **третього типу** належать НІ, при двократному інтегруванні яких за формулою (11.2.7) отримуємо лінійне рівняння відносно вихідного інтеграла. Його розв'язання і дає шуканий інтеграл. Для добутків показникової функції $e^{\alpha x}$ з тригонометричними $\sin \beta x$, $\cos \beta x$ де α, $\beta - const$

(див. 7 табл. 11.2.1) покладають $u = e^{\alpha x}$ або $dv = e^{\alpha x} dx$ (за уподобанням); для НІ 8 (див. табл. 11.2.1) за dv приймають dx (*чому?*). У більш загальному випадку замість αx, βx може бути лінійна функція виду $kx + b$.

Наведемо *приклади* відшукання НІ кожного типу:

$$I_1 = \int \left(1 - 3x + x^2\right) \cdot \cos 2x\, dx = \left| \begin{array}{l} u = 1 - 3x + x^2 \;\Rightarrow\; du = (2x - 3)dx \\ dv = \cos 2x dx \;\;\Rightarrow\;\; v = \frac{1}{2}\sin 2x \end{array} \right| =$$

$$= uv - \int v du = \frac{1}{2}\left(1 - 3x + x^2\right) \cdot \sin 2x - \frac{1}{2}\underbrace{\int (2x - 3) \cdot \sin 2x\, dx}_{I_0} =$$

$$= \frac{1}{2}\left[\left(1 - 3x + x^2\right) \cdot \sin 2x - I_0\right].$$

Здійснюємо повторне інтегрування частинами:

$$I_0 = \left| \begin{array}{l} \;\; u = 2x - 3 \quad\;\; \Rightarrow \; du = 2dx \\ dv = \sin 2x dx \;\;\Rightarrow\;\; v = -\frac{1}{2}\cos 2x \end{array} \right| = uv - \int v du =$$

$$= -\frac{1}{2}(2x - 3)\cos 2x + \int \cos 2x dx = -\frac{1}{2}\left[(2x - 3)\cos 2x - \sin 2x\right] + C.$$

У підсумку: $I_1 = \frac{1}{2}\left[\left(x^2 - 3x + 0{,}5\right)\sin 2x + (x - 1{,}5)\cos 2x\right] + C.$

Узагальнюючий висновок: НІ першого типу потребують n-кратного застосування формули інтегрування частинами, де n – степінь многочлена $P_n(x)$.

$$I_2 = \int (2x - 3) \cdot arctg(4 - 3x)dx = \left| \begin{array}{l} t = 4 - 3x \;\Rightarrow\; dt = -3dx \\ x = \frac{4 - t}{3} \quad \Rightarrow \; 2x - 3 = -\frac{1}{3}(2t + 1) \end{array} \right|$$

– заміною змінної спрощуємо вигляд підінтегральної функції.

$$I_2 = \frac{1}{9}\int (2t + 1) \cdot arctgt\, dt = \left| \begin{array}{l} u = arctg\, t \qquad \Rightarrow \; du = \dfrac{dt}{1 + t^2} \\ dv = (2t + 1)dt \;\Rightarrow\; v = t^2 + t \end{array} \right| =$$

$$=\frac{1}{9}\left(uv-\int vdu\right)=\frac{1}{9}\left[\left(t^2+t\right)\cdot arctg\,t-\int\frac{t^2+t}{t^2+1}dt\right].$$

Беремо окремо отриманий НІ:

$$\int vdu=\int\frac{t^2+t}{t^2+1}dt=\int\frac{\left(t^2+1\right)-1+t}{t^2+1}dt=\int\left(1-\frac{1}{t^2+1}+\frac{t}{t^2+1}\right)dt=$$

$$=t-arctg\,t+\frac{1}{2}\ln\left(1+t^2\right)+C.$$

Таким чином,

$I_2=\frac{1}{9}\left[\left(t^2+t+1\right)\cdot arctg\,t-t-\frac{\ln\left(1+t^2\right)}{2}\right]+C$, де $t=4-3x$.

Узагальнюючий висновок: при взятті НІ можна застосовувати у поєднанні різні методи інтегрування і – неодноразово.

$$I_3=\int e^x\cos x\,dx=\left|\begin{array}{c}u=e^x\quad\Rightarrow\ du=e^x dx\\ dv=\cos x\,dx\ \Rightarrow\ v=\sin x\end{array}\right|=$$

$$=e^x\sin x-\int e^x\sin x\,dx=\left|\begin{array}{c}u=e^x\quad\Rightarrow\ du=e^x dx\\ dv=\sin x\,dx\ \Rightarrow\ v=-\cos x\end{array}\right|=$$

$$=e^x\sin x-\left(-e^x\cos x+\int e^x\cos x\,dx\right)=e^x\left(\sin x+\cos x\right)-I_3.$$

Отже, двократне інтегрування частинами привело до рівняння відносно шуканого інтеграла:

$$I_3=e^x\left(\sin x+\cos x\right)-I_3\ \Rightarrow\ I_3=\frac{1}{2}e^x\left(\sin x+\cos x\right)+C.$$

(На підставі (11.2.8) *обґрунтуйте* появу параметра C.)

Існують і інші (раціональні та ірраціональні) функції, інтегрування частинами яких приводить до рівняння відносно вихідного інтеграла.

Наприклад: $I=\int\sqrt{a^2-x^2}dx=a^2\int\frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}}-\int\frac{x^2}{\sqrt{a^2-x^2}}dx$. Якщо у другому інтегралі покласти $u=x$, то знову прийдемо до I.

11.3. Інтегрування деяких класів елементарних функцій: раціональних, ірраціональних, тригонометричних

Інтегрування елементарних раціональних алгебраїчних дробів (РАД)

Елементарними (**найпростішими**) **РАД** називаються раціональні алгебраїчні дроби таких чотирьох типів:

$$\text{I. } \frac{A}{x-a}; \quad \text{II. } \frac{B}{(x-b)^k}, \quad \text{III. } \frac{Ax+B}{x^2+px+q}, \quad \text{IV. } \frac{Ax+B}{(x^2+rx+s)^l},$$

де A, B, a, b, p, q, r, s – дійсні числа; k, l – більші одиниці натуральні числа; квадратні тричлени не мають дійсних коренів, тобто $p^2-4q<0$ $\left(q-p^2/4>0\right)$ і $r^2-4s<0$ $\left(s-r^2/4>0\right)$.

Відшукання НІ від дробів першого і другого типів не викликають труднощів, вони легко беруться методом безпосереднього інтегрування:

$$\text{I. } \int \frac{A}{x-a}dx = A\int \frac{d(x-a)}{x-a} = A\ln|x-a|+C. \tag{11.3.1}$$

$$\text{II. } \int \frac{B}{(x-b)^n}dx = B\int (x-b)^{-n}d(x-b) = -\frac{B}{n-1}\cdot\frac{1}{(x-b)^{n-1}}+C. \tag{11.3.2}$$

(*Прокоментуйте* подумки кожний крок інтегрування.)

На практиці такі НІ, як правило, беруться усно: умова – відповідь.

Наприклад:

$$I_1 = \int \frac{5}{x-3}dx = 5\ln|x-3|+C,$$

$$I_2 = \int \frac{10}{(x+7)^6}dx = -\frac{2}{(x+7)^5}+C.$$

У другому НІ функцію, яка породжує сім'ю первісних, знаходимо за ***правилом***: чисельник дробу залишаємо без зміни; показник степеня знаменника зменшуємо на одиницю і помножаємо отриманий степінь зліва на новий показник зі знаком „мінус" (див. (11.3.2)); виконуємо можливі скорочення. (*Запропонуйте* свій варіант правила.)

Аналогічно поступають, коли знаменники дробів є лінійними функціями від x загального вигляду: $kx+b$, де k і b – сталі:

$$\int \frac{A}{kx+b}\,dx = \frac{A}{k}\ln\left| kx+b \right| + C. \tag{11.3.3}$$

$$\int \frac{B}{(kx+b)^n}\,dx = -\frac{B}{k(n-1)} \cdot \frac{1}{(kx+b)^{n-1}} + C. \tag{11.3.4}$$

При інтегруванні найпростішого дробу третього типу можна вводити нову змінну, а можна обійтись і без неї. Розглянемо обидва підходи.

III. $I = \int \frac{Ax+B}{x^2+px+q}\,dx$ *інтегруємо методом підстановки.*

Виконуємо підготовчу роботу для переходу до нової змінної:

$$\underline{x = t - p/2} \;\Rightarrow\; \left(dx = dt,\; t = x + p/2\right);$$

$$Ax + B = A\left(t - p/2\right) + B = At + \left(B - A\,p/2\right) = At + B_1;$$

$$x^2 + px + q = \left(t - p/2\right)^2 + p\left(t - p/2\right) + q = t^2 + \left(q - p^2/4\right) = t^2 + a^2.$$

Виконуємо підстановку і подаємо I у вигляді суми двох НІ:

$$I = \int \frac{At + B_1}{t^2 + a^2}\,dt = \int \frac{At}{t^2 + a^2}\,dt + \int \frac{B_1}{t^2 + a^2}\,dt =$$

$$= \frac{A}{2}\int \frac{2t}{t^2 + a^2}\,dt + B_1\int \frac{dt}{t^2 + a^2}.$$

Первісною першого з них є добуток $A/2$ з натуральним логарифмом знаменника (див. (11.2.6)), другого – табличний арктангенс у добутку з B_1:

$$I = \frac{A}{2}\ln\left|t^2 + a^2\right| + B_1 \cdot \frac{1}{a}\, arctg\,\frac{t}{a} + C.$$

Повертаючись до вихідної змінної, отримуємо:

$$I = \frac{A}{2}\ln\left| x^2 + px + q \right| + \frac{2B - Ap}{\sqrt{4q - p^2}} \cdot arctg\,\frac{2x + p}{\sqrt{4q - p^2}} + C. \tag{11.3.5}$$

На практиці (11.3.5) звичайно не використовують як готову формулу.

III. $I=\int\frac{Ax+B}{x^2+px+q}dx$ *беремо безпосереднім інтегруванням.*

Тотожними перетвореннями *виділяємо*: у знаменнику дробу квадрат двочлена $(x+p/2)$; у чисельнику – похідну знаменника $(2x+p)$, для чого за знак НІ виносимо $A/2$, а в чисельнику додаємо і віднімаємо p:

$$I=\int\frac{Ax+B}{x^2+px+q}dx=\frac{A}{2}\int\frac{2x+2B/A}{(x+p/2)^2+\left(q-p^2/4\right)}dx=$$

$$=\frac{A}{2}\int\frac{(2x+p)+\left(2B/A-p\right)}{(x+p/2)^2+\left(q-p^2/4\right)}dx=\left|\ \text{розбиваємо НІ на два інтеграли}\ \right|=$$

$$=\frac{A}{2}\int\frac{2x+p}{x^2+px+q}dx+\frac{2B-Ap}{2}\int\frac{dx}{(x+p/2)^2+\underbrace{\left(q-p^2/4\right)}_{a^2}}.$$

Первісною першого з них є добуток $A/2$ з натуральним логарифмом знаменника (див. (11.2.6)), другого – табличний арктангенс у добутку з $\left(B-Ap/2\right)$:

$$I=\frac{A}{2}\ln\left|x^2+px+q\right|+\frac{2B-Ap}{\sqrt{4q-p^2}}\cdot arctg\frac{2x+p}{\sqrt{4q-p^2}}+C. \qquad (11.3.6)$$

(*Зіставте* обидва підходи: чи можна віддати перевагу одному з них?)

Наведемо *приклад* взяття НІ безпосереднім інтегруванням:

$$\int\frac{3x-1}{x^2-4x+8}dx=\frac{3}{2}\int\frac{(2x-2/3)-4+4}{(x-2)^2-4+8}dx=\frac{3}{2}\int\frac{2x-4}{x^2-4x+8}dx+$$

$$+\frac{3}{2}\cdot\left(4-\frac{2}{3}\right)\cdot\int\frac{dx}{(x-2)^2+4}=\frac{3}{2}\ln\left(x^2-4x+8\right)+\frac{5}{2}arctg\frac{x-2}{2}+C.$$

Зауваження. Розглянуті підходи до інтегрування простіших РАД третього типу без принципових змін переносяться на деякі неелементарні РАД, а саме:

1) $\int\frac{Ax+B}{x^2+px+q}dx$ – НІ, у яких квадратний тричлен має додатний дискримінант $\left(p^2-4q>0\right)$, і тоді другий доданок у відповіді буде не

арктангенсом, а логарифмом високим (*переконайтеся* на конкретному прикладі);

2) $\int \frac{Ax+B}{ax^2+bx+c}dx$ – НІ, у яких знаменником є квадратний тричлен загального виду, і тоді спочатку у ньому виносять за дужки коефіцієнт a (а за знак інтеграла $1/a$), а потім діють так само, як і при взятті НІ III типу;

3) $\int \frac{Ax+B}{\sqrt{ax^2+bx+c}}dx$ – НІ, у яких квадратний тричлен стоїть під знаком квадратного кореня, і тоді другий доданок у відповіді буде не арктангенсом, а логарифмом довгим.

IV. $I_n = \int \frac{Ax+B}{(x^2+px+q)^n}dx$.

Інтегрування дробу IV типу загалом вельми громіздке: шляхом n-кратного інтегрування частинами його зводять до інтеграла від дробу III типу. Рекурентна формула для випадку $I_n = \int \frac{dx}{\left(x^2+a^2\right)^n}$ така:

$$I_{n+1} = \frac{1}{2an^2} \cdot \frac{x}{\left(x^2+a^2\right)^n} + \frac{2n-1}{2na^2} I_n. \qquad (11.3.7)$$

За відомим $I_1 = \int \frac{dx}{x^2+a^2} = \frac{1}{a} arctg \frac{x}{a} + C$ можна знайти інтеграл I_n для будь-якого натурального показника n (*запишіть* самостійно, як виглядатиме I_2).

Інтегрування довільних – правильних і неправильних – РАД

Раціональним алгебраїчним дробом $R(x)$ називається дробово-раціональна функція від x (або відношення двох многочленів відносно змінної x):

$$R(x) = \frac{P_n(x)}{Q_m(x)} = \frac{a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0}{b_m x^m + b_{m-1}x^{m-1} + \ldots + b_1 x + b_0}, \qquad (11.3.8)$$

де a_i $\left(b_j\right)$ – коефіцієнти при степенях x – для всіх i (j) від 0 до n (m) є дійсними числами; $n \in \mathbf{N} \cup \{0\}$, $m \in \mathbf{N}$.

Якщо всі коефіцієнти при степенях x, нижчих степеня старшого члена, рівні нулеві, то многочлен перетворюється в одночлен; сталу можна стлумачити як одночлен нульового степеня. (*Обґрунтуйте* слушність обмежень стосовно n і m.)

РАД називається **правильним**, якщо степінь чисельника $P_n(x)$ менше степеня знаменника $Q_m(x)$; у противному випадку дріб називається **неправильним**:

$$\begin{gathered} R(x) \text{ – правильний РАД } \rightleftharpoons \ n<m \\ \left(R(x) \text{ – неправильний РАД } \rightleftharpoons \ n \geq m\right). \end{gathered} \tag{11.3.9}$$

Якщо дріб неправильний, то його завжди можна подати у вигляді суми многочлена $T_{n-m}(x)$ і правильного дробу:

$$R(x)=\frac{P_n(x)}{Q_m(x)}=T_{n-m}(x)+\frac{P_{n_1}(x)}{Q_m(x)}, \tag{11.3.10}$$

де $T_{n-m}(x)$ називають **цілою частиною дробу** $R(x)$; $0 \leq n_1 \leq m-1$.

Подання РАД у вигляді (11.3.10) називають **виділенням цілої частини** дробу. Таке перетворення дробу є невід'ємним кроком при інтегруванні неправильних дробів.

Щоб здійснити виділення цілої частини, треба виконати ділення чисельника дробу на його знаменник „сходинками", при цьому чисельник і знаменник дробу записують за спадними степенями змінної x.

Приклад. Для $R(x)=\dfrac{2x^3+1}{x^2-x+2}$ ділення „сходинками" дає:

$$\begin{array}{l|l} -\ 2x^3+1 - \text{ділене} & x^2-x+2 - \text{дільник} \\ \quad 2x^3-2x^2+4x & \overline{2x+2 - \text{неповна частка}} \\ \hline \qquad -\ 2x^2-4x+1 & \\ \qquad\quad 2x^2-2x+4 & \\ \hline \qquad\qquad -2x-3 - \text{остача} & \end{array}$$

Отже, $R(x)=\dfrac{2x^3+1}{x^2-x+2}=2x+2+\dfrac{-2x-3}{x^2-x+2}$.

Висновок: оскільки інтегрування многочлена як суми степеневих функцій не викликає труднощів, то для інтегрування довільних РАД – правильних і неправильних – треба уміти інтегрувати правильні дроби.

Приймемо без доведення теорему вищої алгебри, яка дозволяє звести інтегрування будь-якого дробу до інтегрування розглянутих вище найпростіших дробів.

Теорема 11.3.1 (*про розклад правильного РАД на суму елементарних дробів*). Будь-який правильний РАД зображується у вигляді суми елементарних дробів – **розкладається** на суму елементарних дробів.

Розклад $R(x)$ на суму елементарних дробів (надалі просто **розклад** $R(x)$) здійснюється таким чином:

1) *розкладаємо* на прості множники знаменник дробу – многочлен $Q_m(x)$, тобто подаємо його у вигляді добутку лінійних множників і квадратичних множників з від'ємними дискримінантами:

$$Q_m(x) = (x-a)\cdot(x-b)^k \cdot \left(x^2 + px + q\right)\cdot\left(x^2 + rx + s\right)^l,$$

де однотипні множники можуть повторюватись;

2) *ставимо* у відповідність (усно!) кожному множнику елементарний РАД або суму елементарних дробів (табл. 11.3.1) і *записуємо* $R(x)$ як суму всіх отриманих дробів.

Таблиця 11.3.1

Відповідність між множниками знаменника і елементарними РАД

Множник знаменника	Відповідні елементарні РАД
$x-a$	$\dfrac{A}{x-a}$
$(x-b)^k$	$\dfrac{B_1}{x-b} + \dfrac{B_2}{(x-b)^2} + \ldots + \dfrac{B_k}{(x-b)^k}$
$x^2 + px + q$	$\dfrac{Ax+B}{x^2+px+q}$
$\left(x^2+rx+s\right)^l$	$\dfrac{A_1x+B_1}{x^2+rx+s} + \dfrac{A_2x+B_2}{\left(x^2+rx+s\right)^2} + \ldots + \dfrac{A_lx+B_l}{\left(x^2+rx+s\right)^l}$;

3) *визначаємо* вартості числових параметрів розкладу (вони позначені через A, B з індексами і без них); їх називають **коефіцієнтами розкладу** РАД.

Реалізацію цього кроку здійснюють за допомогою так званого **методу невизначених коефіцієнтів**, згідно з яким установлення коефіцієнтів розкладу зводиться до розв'язання квадратних СЛАР.

В основі методу лежать властивості рівностей і рівних многочленів:

а) рівність не порушиться, якщо обидві її частини помножити на один і той самий вираз, визначений на множині дійсних чисел;

б) у рівних многочленів коефіцієнти при однакових степенях змінної рівні між собою.

Розглянемо конкретний *приклад* розкладу правильного РАД.

$R(x)=\dfrac{2x-1}{x^5+x^2}$ – правильний РАД (*чому?*), тому до нього можна застосувати теорему 11.3.1:

1) *розкладаємо* многочлен $\left(x^5+x^2\right)$ на прості множники:

$$x^5+x^2=x^2\left(x^3+1\right)=x^2(x+1)\left(x^2-x+1\right);$$

2) *ставимо* у відповідність ($\leftrightarrow$) згідно з табл. 11.3.1 кожному множнику елементарні РАД, а саме:

$$(x+1)\leftrightarrow\frac{A}{x+1};\quad (x-0)^2\leftrightarrow\frac{B}{x}+\frac{C}{x^2};\quad x^2-x+1\leftrightarrow\frac{Dx+E}{x^2-x+1},$$

де A, B, C, D, E – числові параметри, які підлягають визначенню, і *записуємо* $R(x)$ як суму всіх отриманих дробів:

$$\frac{2x-1}{x^5+x^2}=\frac{A}{x+1}+\frac{B}{x}+\frac{C}{x^2}+\frac{Dx+E}{x^2-x+1}.$$

Неважко збагнути, що найменший спільний знаменник дробів у правій частині рівності дорівнює знаменнику лівої частини (*обґрунтуйте*);

3) *визначаємо* вартості числових параметрів, для чого:

а) *помножаємо* обидві частини рівності на знаменник $\left(x^5+x^2\right)$:

$$2x-1=Ax^2\left(x^2-x+1\right)+Bx\left(x^3+1\right)+C\left(x^3+1\right)+(Dx+E)x^2(x+1),$$

і записуємо многочлен правої частини за степенями змінної x або групуємо члени многочлена відносно коефіцієнтів розкладу:

$$A\left(x^4-x^3+x^2\right)+B\left(x^4+x\right)+C\left(x^3+1\right)+D\left(x^4+x^3\right)+E\left(x^3+x^2\right)=2x-1;$$

б) *прирівнюємо* коефіцієнти при однакових степенях x в лівій і правій частинах, *складаємо* систему лінійних рівнянь і *розв'язуємо* її:

$$\begin{array}{c|} x^4 \\ x^3 \\ x^2 \\ x^1 \\ x^0 \end{array}\begin{cases} A+B+D=0, \\ -A+C+D+E=0, \\ A+E=0, \\ B=2, \\ C=-1 \end{cases}\Rightarrow\begin{cases} A+D=-2. \\ -A+D+E=-1. \\ A+E=0 \end{cases}\Rightarrow\begin{cases} A=C=D=-1, \\ B=2, \\ E=1. \end{cases}$$

Таким чином,

$$R(x)=\frac{2x-1}{x^5+x^2}=\frac{-1}{x+1}+\frac{2}{x}+\frac{-1}{x^2}+\frac{-x+1}{x^2-x+1}.$$

(*Переконайтеся* в правильності отриманого результату.)

***Зауваження*.** Коефіцієнти розкладу $R(x)$ можна визначити інакше, спираючись на те, що за умови рівності многочленів їхні значення при фіксованих (конкретних) вартостях x рівні між собою:

$$\begin{array}{l|} x=0 \\ x=-1 \\ x=1 \\ x=-2 \\ x=2 \end{array}\begin{cases} C=-1 \\ 3A=-3 \\ A+2B+2C+2D+2E=1 \\ 28A+14B-7C+8D-4E=-5 \\ 12A+18B+9C+24D+12E=3 \end{cases}\Rightarrow\left[\begin{array}{l} A=C=D=-1, \\ B=2,\ E=1. \end{array}\right.$$

Найзручніше цей підхід застосовувати у випадках, коли всі множники знаменника лінійні, а вартості x брати рівними кореням відповідних двочленів (у ілюстративному прикладі таких значень лише два: -1 і 0); вони відразу визначають коефіцієнти розкладу.

Структурна схема інтегрування довільного РАД наведена на рис. 11.3.1.

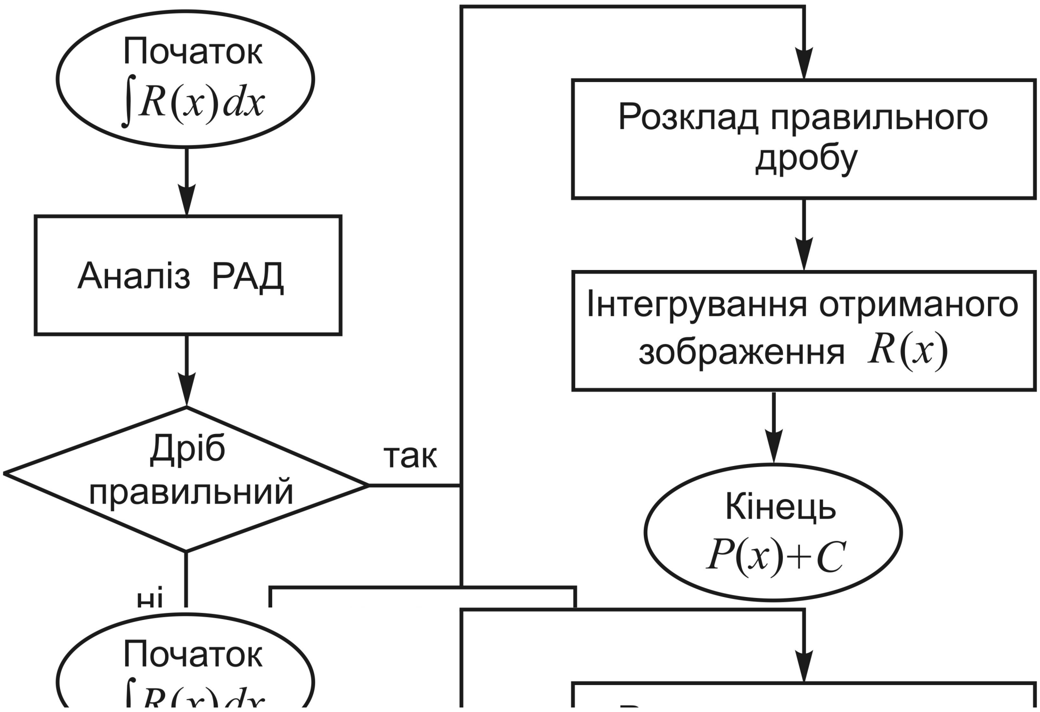


Рис. 11.3.1. **Структурна схема інтегрування РАД**

Опишіть самостійно по крокам за структурною схемою ***загальний порядок*** інтегрування РАД:

1) *аналізуємо* дріб з метою … *інтегруємо* зображення $R(x)$.

Висновок. Успішне інтегрування РАД потребує вміння:

інтегрувати найпростіші дроби;

розкладати правильні дроби на елементарні;

виділяти цілу частину неправильного дробу.

Уміння інтегрувати РАД є базою для успішного інтегрування ірраціональностей і функцій, раціонально залежних від тригонометричних.

Інтегрування функцій, раціонально залежних від тригонометричних функцій

Нехай $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x)$, …, $\varphi_n(x)$– довільні функції від змінної x. Функція $y = f(x)$ називається **раціонально залежною** від функцій $\varphi_i(x)$ $i=\overline{1,n}$, якщо в її аналітичному виразі над ними виконуються тільки арифметичні операції: додавання, віднімання, множення (у тому числі піднесення до цілочислового степеня), ділення, і пишуть:

$$y = R(x, \varphi_1(x),\ \varphi_2(x), ..., \varphi_n(x)).$$

I. Інтегрування довільних раціонально залежних функцій від $\sin x$, $\cos x$:

$$I = \int R(\sin x, \cos x)dx. \qquad (11.3.11)$$

(*Чому* серед аргументів зложеної функції $R(\sin x, \cos x)$ немає інших тригонометричних функцій: $tg\, x$ і $ctg\, x$?)

Загальний підхід до інтегрування таких функцій полягає у застосуванні підстановки $t = tg(x/2)$, яку називають **універсальною тригонометричною підстановкою**. За допомогою неї підінтегральна функція стає раціональним алгебраїчним дробом $r(t)$.

Дійсно:

$$t = tg\frac{x}{2} \;\Rightarrow\; \frac{x}{2} = arctg\, t \;\Rightarrow\; \left(x = 2arctg\, t,\;\; dx = \frac{2dt}{1+t^2} \right)$$

(як бачимо, dx є раціональною функцією від змінної t).

Залучимо тригонометричні формули подання функцій $\sin x$, $\cos x$ через тангенс половинного кута, тоді:

$$\sin x = \frac{2tg(x/2)}{1+tg^2(x/2)} = \frac{2t}{1+t^2}, \quad \cos x = \frac{1-tg(x/2)}{1+tg^2(x/2)} = \frac{1-t^2}{1+t^2}.$$

Заданий НІ набуває вигляду:

$$I = \int R(\sin x, \cos x)dx = \int R\left(\frac{2t}{1+t^2}, \frac{1-t^2}{1+t^2} \right) \cdot \frac{2dt}{1+t^2} = \int r(t)dt,$$

оскільки результатами арифметичних операції над дробами є дроби.

Приклад.

$$I = \int \frac{\cos x}{1+\sin x}dx = \left| \begin{array}{ll} t = tg\dfrac{x}{2}, & dx = \dfrac{2dt}{1+t^2}, \\ \sin x = \dfrac{2t}{1+t^2}, & \cos x = \dfrac{1-t^2}{1+t^2} \end{array} \right| = \int \frac{1-t^2}{1+t^2} : \left(1 + \frac{2t}{1+t^2} \right) \cdot \frac{2dt}{1+t^2} =$$

$$2\int \frac{1-t^2}{(t+1)^2(t^2+1)}dt = 2\int \left(\frac{A}{t+1} + \frac{B}{(t+1)^2} + \frac{Ct+D}{t^2+1} \right)dt = 2\int r(t)\,dt.$$

Відшукання НІ звелося до інтегрування трьох елементарних РАД. Проте цей інтеграл береться усно, бо чисельник дробу є похідною знаменника:

$$I = \int \frac{\cos x}{1+\sin x} dx = \ln\left|1+\sin x\right| + C.$$

Універсальна підстановка часто тягне за собою громіздкі вирази, тому доцільно розглянути окремі випадки $I = \int R(\sin x, \cos x) dx$.

II. Інтегрування функцій непарних (парних) відносно синуса або (і) косинуса.

Функція $R(\sin x, \cos x)$ називається **непарною** відносно функції $\sin x$ $(\cos x)$, якщо виконується умова:

$$R(-\sin x, \cos x) = -R(\sin x, \cos x)$$
$$(R(\sin x, -\cos x) = -R(\sin x, \cos x)),$$

тобто знак функції змінюється на протилежний, якщо в ній замінити $\sin x$ $(\cos x)$ на $-\sin x$ $(-\cos x)$.

Функція $R(\sin x, \cos x)$ називається **парною** відносно функцій $\sin x$ і $\cos x$, якщо виконується умова:

$$R(-\sin x, -\cos x) = R(\sin x, \cos x),$$

тобто функція не змінюється, якщо в ній замінити $\sin x$ і $\cos x$ на $-\sin x$ і $-\cos x$ відповідно.

Правило. Якщо функція $R(\sin x, \cos x)$:

1) **непарна** відносно функції $\sin x$ $(\cos x)$, то виконується підстановка $t = \cos x$ $(t = \sin x)$ і залучається тотожність $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$;

2) **парна** відносно функцій $\sin x$ і $\cos x$, то виконується підстановка $t = tg\, x$ або $t = ctg\, x$ і залучаються тотожності:

$$\cos^2 x = \frac{1}{1+tg^2 x}, \quad \sin^2 x = \frac{tg^2 x}{1+tg^2 x}; \tag{11.3.12}$$

$$\sin^2 x = \frac{1}{1+ctg^2 x}, \quad \cos^2 x = \frac{ctg^2 x}{1+ctg^2 x}. \tag{11.3.13}$$

Приклади. $I_1 = \int \frac{dx}{\cos x \left(1+\sin^2 x\right)}$.

Візуальний аналіз показує, що підінтегральна функція непарна відносно функції $\cos x$, тому виконуємо підстановку $t = \sin x$:

$$I_1 = \int \frac{dx}{\cos x \left(1+\sin^2 x\right)} = \left| \begin{array}{c} t = \sin x,\ dt = \cos x\, dx \\ 1+\sin^2 x = 1+t^2 \end{array} \right| = -\int \frac{dt}{\left(t^2-1\right)\left(t^2+1\right)} =$$

$$= -\int \left(\frac{A}{t-1} + \frac{B}{t+1} + \frac{Ct+D}{t^2+1} \right) dt = -\int r(t)\, dt .$$

Якщо в підінтегральній функції I_1 показник степеня косинуса збільшити на одиницю, то вона стане парною відносно $\cos x$ і $\sin x$, і тоді покладаємо $t = tg\, x$:

$$I_2 = \int \frac{dx}{\cos^2 x\left(1+\sin^2 x\right)} = \left| \begin{array}{c} t = tg\, x,\ dt = \dfrac{dx}{\cos^2 x} \\ 1+\sin^2 x = \left(2t^2+1\right) \big/ \left(t^2+1\right) \end{array} \right| =$$

$$= \int \frac{t^2+1}{2t^2+1} dt = \frac{1}{2} \int \left(1 + \frac{1}{\left(\sqrt{2}t\right)^2+1} \right) dt = \frac{1}{2} \left(t + \frac{1}{\sqrt{2}} arctg\left(\sqrt{2}t\right) \right) + C =$$

$$= \frac{1}{2} \left(tg\, x + \frac{1}{\sqrt{2}} arctg(\sqrt{2}\, tg\, x) \right) + C .$$

(*Переконайтеся* в правильності знайденої первісної.)

III. Інтегрування добутку цілих степенів синуса і косинуса:

$I = \int \sin^m x \cdot \cos^n x\, dx,\ m \in \mathbf{Z},\ n \in \mathbf{Z}$, крім $m = n = 0$. (11.3.14)

Такі НІ є окремим випадком розглянутих вище (див. **II**), тому:

1) m – непарне $\Rightarrow$ покладаємо $t = \cos x$;

2) n – непарне $\Rightarrow$ покладаємо $t = \sin x$;

3) m і n – парні $\Rightarrow$ покладаємо $t = tg\, x$ або $t = ctg\, x$.

(*Як слід поступати*, якщо обидва показники – m і n – непарні?)

У третьому випадку часто замість запропонованих підстановок використовують формули зниження степеня (тригонометричних функцій):

$$\sin^2 x = \frac{1}{2}(1-\cos 2x), \quad \cos^2 x = \frac{1}{2}(1+\cos 2x),$$
$$\sin x \cdot \cos x = \frac{1}{2}\sin 2x, \quad \sin^2 x \cdot \cos^2 x = \frac{1}{8}(1-\cos 4x). \tag{11.3.15}$$

Вони дозволяють у ряді випадків уникнути введення нової змінної.

Приклади. $I_1 = \int \sin^{-4} x \cos^5 x \, dx$. У непарному степені $\cos x$, тому виконуємо підстановку $t = \sin x$. Для більш оперативного переходу до нової змінної „відщепляємо” від п’ятого степеня один косинус і зразу застосовуємо тотожність $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$:

$$I_1 = \int \sin^{-4} x \cos^5 x \, dx = \left| \begin{array}{c} t = \sin x, \; dt = \cos x dx \\ \cos^2 x = 1 - \sin^2 x = 1 - t^2 \end{array} \right| =$$
$$= \int \frac{\cos^4 x \cos x}{\sin^4 x} \, dx = \int \frac{(1-t^2)^2}{t^4} dt = \int \frac{1-2t^2+t^4}{t^4} dt =$$
$$= \int (t^{-4} - 2t^{-2} + 1)\, dt = \frac{t^{-3}}{-3} - \frac{2t^{-1}}{-1} + t + C = \frac{-1}{3\sin^3 x} + \frac{2}{\sin x} + \sin x + C.$$

$$I_2 = \int \sin^2 x \cos^4 x \, dx = \left| \begin{array}{c} \sin^2 x \cos^2 x = \dfrac{1-\cos 4x}{8} \\ \cos^2 x = \dfrac{1+\cos 2x}{2} \end{array} \right| =$$
$$= \frac{1}{16}\int (1-\cos 4x)(1+\cos 2x) dx = \frac{1}{16}\int (1+\cos 2x - \cos 4x - \cos 4x \cos 2x) dx.$$

Застосовуючи формулу $\cos\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}[\cos(\alpha-\beta) + \cos(\alpha+\beta)]$, при $\alpha = 4x$, $\beta = 2x$, отримаємо можливість безпосереднього інтегрування:

$$I_2 = \frac{1}{16}\int \left(1 + \frac{1}{2}\cos 2x - \cos 4x - \frac{1}{2}\cos 6x\right) dx =$$
$$= \frac{1}{16}\left(x + \frac{1}{4}\sin 2x - \frac{1}{4}\sin 4x - \frac{1}{12}\sin 6x \right) + C.$$

НІ, для взяття яких використовуються формули перетворення добутку тригонометричних функцій в суму, виділяються в окремий вид.

IV. Інтегрування добутку перших степенів синусів і косинусів.

Так називають взяття НІ виду:

$$\int \sin mx \cdot \cos nx\, dx,\ \int \cos mx \cdot \cos nx\, dx,\ \int \sin mx \cdot \sin nx\, dx, \qquad (11.3.16)$$

де m і n – дійсні числа.

За допомогою тригонометричних формул

$$\sin\alpha \cdot \cos\beta = 1/2 \cdot [\sin(\alpha+\beta) + \sin(\alpha-\beta)],$$
$$\cos\alpha \cdot \cos\beta = 1/2 \cdot [\cos(\alpha-\beta) + \cos(\alpha+\beta)],$$
$$\sin\alpha \cdot \sin\beta = 1/2 \cdot [\cos(\alpha-\beta) - \cos(\alpha+\beta)]$$

відшукання НІ (11.3.16) зводиться до безпосереднього інтегрування.

Приклади.

$$I_1 = \int \sin 5x \cdot \sin 8x\, dx = \left| \alpha = 5x,\ \beta = 8x \right| = \frac{1}{2}\int (\cos 3x - \cos 13x)\, dx =$$

$$= \frac{1}{2}\left(\int (\cos 3x\, dx - \int \cos 13x\, dx\right) = \frac{1}{78}(13\sin 3x - 3\sin 13x) + C.$$

$$I_2 = \int \sin 5x \cdot \cos 7x dx = \left| \alpha = 5x,\ \beta = 7x \right| = \frac{1}{2}\int (\sin 12x - \sin 2x)\, dx =$$

$$= \frac{1}{2}\left(\int (\sin 12x\, dx - \int \sin 2x\, dx\right) = \frac{1}{24}(6\cos 2x - \cos 12x) + C.$$

За формулою для добутку $\sin\alpha \cdot \cos\beta$ повинна бути сума синусів, а в НІ I_2 записана різниця $(\sin 12x - \sin 2x)$ (*чому*?).

V. Інтегрування натуральних степенів тангенса і котангенса:

$$I_n^t = \int tg^n x\, dx, \quad I_n^c = \int ctg^n x dx, \text{ де } 2 \le n \in \mathbf{N}. \qquad (11.3.17)$$

Відшукання таких інтегралів можна здійснювати двома способами:

1. *Введення нової змінної* $t = tg\ x$, $t = ctg\ x$ відповідно:

$$I_n^c = \int ctg^n x\, dx = \left| \begin{array}{c} t = ctg\ x,\ x = arcctg\ t \\ dx = -1/(1+t^2)\, dt \end{array} \right| = -\int \frac{t^n}{t^2+1} dt = -\int r(t)\, dt.$$

Інтегрування РАД $r(t)$ потребує виділення цілої частини дробу. (*Наведіть* аналогічний символічний запис для I_n^t самостійно.)

2. *Зниження* (послідовне) *показника степеня* підінтегральної функції із залученням тотожностей

$$1+tg^2x=\frac{1}{\cos^2 x},\quad 1+ctg^2x=\frac{1}{\sin^2 x}: \tag{11.3.18}$$

$$I_n^t=\int tg^n x\,dx=\left|\ tg^2x=\frac{1}{\cos^2 x}-1\right|=\int tg^{n-2}x\left(\frac{1}{\cos^2 x}-1\right)dx=$$

$$=\int tg^{n-2}x\cdot\frac{1}{\cos^2 x}dx-\int tg^{n-2}x\,dx=\int tg^{n-2}x\cdot d(tgx)-\int tg^{n-2}x\,dx=$$

$$=\frac{tg^{n-1}x}{n-1}-\int tg^{n-2}x\,dx\ \Rightarrow I_n^t=\frac{tg^{n-1}x}{n-1}-I_{n-2}^t. \tag{11.3.19}$$

Зниження показника степеня виконується до тих пір, поки не дійдемо до табличного інтеграла

$$I_1^t=\int tg\,xdx=-\ln\left|\cos x\right|+C.$$

(*Отримайте* аналогічним чином рекурентну формулу для I_n^c.)

Приклади.

$$I_7^t=\int tg^7x\ dx=\int tg^5x\left(\frac{1}{\cos^2 x}-1\right)dx=\int tg^5x\ d(tg\ x)-\int tg^5x\ dx=$$

$$=\frac{tg^6x}{6}-\int tg^3x\left(\frac{1}{\cos^2 x}-1\right)dx=\frac{tg^6x}{6}-\frac{tg^4x}{4}+\int tg\ \ x\left(\frac{1}{\cos^2 x}-1\right)dx=$$

$$=\frac{tg^6x}{6}-\frac{tg^4x}{4}+\frac{tg^2x}{2}+\ln\left|\cos x\right|+C.$$

(*Розв’яжіть* цей приклад заміною змінної.)

$$I_6^c=\int ctg^6x\,dx=\int ctg^4x\left(\frac{1}{\sin^2 x}-1\right)dx=-\int ctg^4x\,d(ctg\,x)-\int ctg^4x\,dx=$$

$$=-\frac{ctg^5x}{5}-\int ctg^2x\left(\frac{1}{\sin^2 x}-1\right)dx=-\frac{ctg^5x}{5}+\frac{ctg^3x}{3}+\int\left(\frac{1}{\sin^2 x}-1\right)dx=$$

$$=-\frac{ctg^5x}{5}+\frac{ctg^3x}{3}-ctg\ x-x+C.$$

Якщо вводити нову змінну, то отримаємо:

$$I_6^c = \int ctg^6 x\, dx = \left| \begin{array}{c} t = ctgx,\ x = arcctg\, t \\ dx = -\dfrac{dt}{1+t^2} \end{array} \right| = -\int \frac{t^6}{t^2+1} dt =$$

$$-\int \left(t^4 - t^2 + 1 - \frac{1}{t^2+1} \right) dt = -\left(\frac{t^5}{5} - \frac{t^3}{3} + t + arcctg\, t \right) + C.$$

Звичайно, вертання до вихідної змінної дає той самий результат. (*Подумайте*, якому підходові слід віддати перевагу і *чому*?)

Зауваження. До взяття розглянутих інтегралів зводяться НІ виду:

$$I = \int \frac{1}{\sin^{2n} x} dx,\quad I = \int \frac{1}{\cos^{2n} x} dx, \text{ де } 2 \le n \in \mathbf{N}. \qquad (11.3.20)$$

Дійсно, якщо використати співвідношення (11.3.18), то отримаємо:

$$I = \int \frac{1}{\sin^{2n} x} dx = \int \left(\frac{1}{\sin^2 x} \right)^n dx = \int \left(1 + ctg^2 x\right)^n dx;$$

$$I = \int \frac{1}{\cos^{2n} x} dx = \int \left(\frac{1}{\cos^2 x} \right)^n dx = \int \left(1 + tg^2 x\right)^n dx.$$

Після розкриття дужок одержимо невизначений інтеграл від суми степенів $ctg\, x$ чи $tg\, x$.

Інтегрування деяких видів ірраціональних функцій

Нагадаємо, що алгебраїчний вираз, який містить операцію добування кореня, або, що те ж саме, дробові показники степеня, називається **ірраціональним**.

І. Інтегрування найпростіших ірраціональностей. Так називають взяття НІ (від) функцій, раціонально залежних від дробових степенів змінної x, лінійної і дробово-лінійної функцій від x.

1. НІ функції, раціонально залежної від *дробових степенів змінної* x:

$$I = \int R\left(x,\ x^{m_i/n_i};\ i = \overline{1,s}\right) dx, \quad \text{де } m_i,\ n_i \text{ – цілі числа.} \qquad (11.3.21)$$

Такі НІ зводяться до інтеграла від раціональної функції відносно нової змінної t – **раціоналізуються** – за допомогою підстановки $x = t^k$, де k – найменший спільний знаменник усіх дробових показників степеня, або, що те ж саме, найменше спільне кратне (НСК) знаменників дробових показників $k =$НСК$(n_1, n_2, ..., n_s)$. Дійсно, при заміні вихідної змінної x на t показник степеня нової змінної у підінтегральній функції стає цілим числом, бо число k ділиться націло на всі числа n_i, $i = \overline{1, s}$:

$$I = \left| \begin{array}{c} x = t^k,\ t = \sqrt[k]{x} \\ dx = kt^{k-1}dt \end{array} \right| = k\int R\left(t^k, t^{km_i/n_i};\ i = \overline{1, s}\right) t^{k-1}\, dt = \int r(t)dt,$$

де $r(t)$ – раціональна функція від t, тобто многочлен або РАД.

Приклад. $I = \int \frac{dx}{x^{2/3} - x^{1/2}} = \int \frac{dx}{\sqrt[3]{x^2} - \sqrt{x}}$.

Аналіз степенів змінної x із дробовими показниками степеня дає: $n_1 = 3$, $n_2 = 2$, тому $k =$НСК$(3, 2) = 6$. Застосуємо підстановку $x = t^6$:

$$I = \left| \begin{array}{c} x = t^6,\ t = \sqrt[6]{x} \\ dx = 6t^5 dt \end{array} \right| = 6\int \frac{t^5 dt}{t^4 - t^3} = 6\int \frac{t^2 dt}{t-1} = 6\int \frac{(t^2 - 1) + 1}{t - 1} dt =$$

$$= 6\int\left(t + 1 + \frac{1}{t-1}\right)dt = 6\left(\frac{t^2}{2} + t + \ln|\,t - 1\,|\right) + C = \left|\ t = \sqrt[6]{x}\ \right| =$$

$$= 3\left(\sqrt[3]{x} + 2\sqrt[6]{x} + 2\ln\left|\sqrt[6]{x} - 1\right|\right) + C.$$

Зверніть увагу, виділення цілої частини неправильного дробу здійснювалося не діленням „сходинками”, а тотожними перетвореннями.

2. НІ функції, раціонально залежної від *дробових степенів лінійної функції* змінної x:

$$I = \int R\left(x, (ax+b)^{m_i/n_i};\ i = \overline{1, s}\right) dx. \qquad (11.3.22)$$

Такі НІ раціоналізуються за допомогою підстановки $ax + b = t^k$, де, як і вище, $k =$НСК$(n_1, n_2, ..., n_s)$:

$$I=\left|\begin{matrix} ax+b=t^k, & t=\sqrt[k]{ax+b} \\ x=\dfrac{t^k-b}{a}, & dx=\dfrac{k}{a}t^{k-1}dt \end{matrix}\right|=\frac{k}{a}\int R\left(\frac{t^k-b}{a},\, t^{km_i/n_i};\, i=\overline{1,s}\right)t^{k-1}dt.$$

Відшукання НІ (11.3.22) принципово нічим не відрізняється від взяття НІ (11.3.21), але відповідні виклади – символічні записи – більш громіздкі, особливо при вертанні до вихідної змінної.

Якщо у попередньому *прикладі* замість x виступатиме лінійна функція від x, нехай це буде $5x-1$, то матимемо:

$$I=\left|\begin{matrix} 5x-1=t^6, & t=\sqrt[6]{5x-1} \\ x=\dfrac{t^6+1}{5}, & dx=\dfrac{6}{5}t^5dt \end{matrix}\right|=\frac{6}{5}\int\frac{t^2}{t-1}dt,$$

і первісна під знаком радикала міститиме не просто x, а $5x-1$.

3. НІ функції, раціонально залежної *від дробових степенів дробово-лінійної функції* від змінної x:

$$I=\int R\left(x,\left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{m_i/n_i};\ i=\overline{1,s}\right)dx,\quad \text{де } \frac{a}{c}\neq\frac{b}{d} \text{ (}\textit{чому?}\text{)}, \qquad (11.3.23)$$

раціоналізується підстановкою: $\dfrac{ax+b}{cx+d}=t^k$, де $k=$НСК$(n_1,n_2,\ldots,n_s)$.

Інформація для переходу до нової змінної виглядає (*переконайтеся*!) так:

$$I=\left|\begin{matrix} \dfrac{ax+b}{cx+d}=t^k, \quad t=\sqrt[k]{\dfrac{ax+b}{cx+d}} \\ x=\dfrac{d\cdot t^k-b}{a-c\cdot t^k}, \quad dx=\dfrac{ad-bc}{(a-ct^k)^2}kt^{k-1}dt \end{matrix}\right|=\int r(t)\,dt,$$

де $r(t)$ – раціональна функція від змінної t.

Приклад.

$$I=\int x\sqrt{\frac{x+1}{x}}dx=\left|\begin{matrix} \dfrac{x+1}{x}=t^2 \Rightarrow t=\sqrt{\dfrac{x+1}{x}}, \\ x+1=xt^2 \Rightarrow x=\dfrac{1}{t^2-1} \Rightarrow dx=-\dfrac{2tdt}{(t^2-1)^2} \end{matrix}\right|=$$

$$= \int \frac{1}{t^2-1} \cdot t \cdot \frac{-2t}{(t^2-1)^2} dt = -2\int \frac{t^2}{(t^2-1)^3} dt = -2\int r(t) dt ,$$

де $r(t)$ – правильний РАД. (*Укажіть* розклад $r(t)$ на суму елементарних РАД.)

Зауваження. Замість трьох НІ (11.3.21) – (11.3.23) від найпростіших ірраціональностей можна було б розглядати тільки останній: інші є його окремими випадками. *Укажіть*, яких значень набувають при цьому деякі з параметрів a, b, c, d.

ІІ. Інтегрування біноміальних диференціалів (***диференціальних біномів***). Так називають взяття НІ (від) функцій, раціонально залежних від добутку дробових степенів змінної x і нелінійного двочлена від x:

$$I = \int x^m \left(a + bx^n\right)^p dx , \qquad (11.3.24)$$

де показники m, n, p – раціональні числа, a, b – дійсні числа.

НІ (11.3.24) зводиться до інтеграла від раціональної функції $r(t)$ за допомогою так званих **підстановок Чебишева** (Пафнутій Львович Чебишев (1821 – 1894) – видатний російський математик).

Теорема 11.3.2 (*підстановки Чебишева*). Інтеграли від диференціальних біномів виражаються через елементарні функції тільки в трьох випадках:

1) p – ціле число $\Rightarrow$ підстановка $x = t^s$, де s – найменше спільне кратне знаменників дробів m і n;

2) $(m+1)/n$ – ціле число $\Rightarrow$ підстановка $a + bx^n = t^s$, де s – знаменник дробу p;

3) $(m+1)/n + p$ – ціле число $\Rightarrow$ $ax^{-n} + b = t^s$, де s – знаменник дробу p.

Д о в е д е н н я цього чудового факту не просте, зате легко можемо переконатися у підхожості підстановок безпосередньою перевіркою. Покажемо, наприклад, справедливість 1):

$$I = \left| \begin{array}{c} x = t^s \\ dx = s\,t^{s-1} dt \end{array} \right| = \int t^{ms} \left(a + bt^{ns}\right)^p s\,t^{s-1} dt .$$

За умовою p – ціле число, і якщо s – НСК знаменників дробів m і n, то інші показники степеня: ms, ns, $s-1$ теж будуть цілими.

Випадки 2), 3) підтверджуються аналогічно.

Приклади.

$$I_1=\int\frac{x}{\sqrt{2+x^2}}dx=\int x\left(2+x^2\right)^{-1/2}dx=\left|\begin{array}{c} m=1,\ p=-1/2\ -\ \text{не ціле} \\ \dfrac{m+1}{n}=1\ -\ \text{ціле число}\end{array}\right|=$$

$$=\left|\begin{array}{c} 2+x^2=t^2,\ t=\sqrt{2+x^2} \\ x=\sqrt{t^2-2},\ dx=\dfrac{t}{\sqrt{t^2-2}}dt\end{array}\right|=\int dt=\sqrt{2+x^2}+C.$$

(*Запропонуйте* інші, більш ефективні, підходи до взяття цього НІ.)

$$I_2=\int\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{2+x^2}}dx=\int x^{1/2}\left(2+x^2\right)^{-1/2}dx=\left|\begin{array}{c} m=1/2,\ n=2,\ p=-1/2 \\ \dfrac{m+1}{n}=\dfrac{3}{4},\ \dfrac{m+1}{n}+1=\dfrac{7}{4}\end{array}\right|=?$$

Отже, заданий НІ не раціоналізує жодна з підстановок 1), 2), 3).

НІ, первісні яких не виражаються через скінченне число елементарних функцій, називають **інтегралами, що не беруться у скінченному вигляді**.

До таких інтегралів відносяться, наприклад,

$$\int e^{-x^2}dx,\ \int\sin x^2dx,\ \int\cos x^2dx,\ \int\frac{\sin x}{x}dx,\ \int\frac{\cos x}{x}dx,\ \int\frac{dx}{\ln x}.$$

III. Інтегрування функцій, раціонально залежних від квадратних коренів із квадратного тричлена:

$$I=\int R\left(x,\sqrt{ax^2+bx+c}\right)dx. \quad (11.3.25)$$

Нагадаємо, що у разі додатного дискримінанта корені тричлена x_1, x_2 дійсні і різні, і він подається у вигляді $a\left(x-x_1\right)\left(x-x_2\right)$; тричлен з від'ємним дискримінантом дійсних коренів не має і при $a>0$ $(a<0)$ для будь-яких x додатний (від'ємний).

Такі НІ раціоналізуються за допомогою так званих **підстановок Ейлера**:

1) $D = b^2 - 4ac > 0 \;\Rightarrow$ підстановка $\sqrt{ax^2 + bx + c} = (x - x_1)\cdot t$;

2) $\underset{(a>0)}{D = b^2} - 4ac < 0 \;\Rightarrow$ підстановка $\sqrt{ax^2 + bx + c} = \sqrt{a}\cdot(x - t)$.

Дійсно, якщо піднести до квадрата ліві і праві частини рівностей в 1) і 2), то отримаємо лінійні відносно x вирази, з яких вихідна змінна раціонально виражається через нову змінну t (при цьому в 1) ураховується розклад тричлена на множники). Це означає, що і dx раціонально залежний від t, і весь підінтегральний вираз.

(*Подумайте*, чи можна у першій підстановці замість різниці $(x - x_1)$ взяти різницю $(x - x_2)$.)

Приклад. Раціоналізувати НІ $I = \int \frac{dx}{x - \sqrt{x^2 - x + 1}} dx$ і знайти його.

Вибір підхожої підстановки визначається дискримінантом тричлена $x^2 - x + 1$: $D = 1 - 4 = -3 < 0$; отже, вибираємо другу підстановку $(a = 1)$: $\sqrt{x^2 - x + 1} = x - t$, і діємо за структурною схемою методу заміни змінної (див. рис. 11.2.1):

$$\left|\begin{array}{c} t = x - \sqrt{x^2 - x + 1} \\ x = \dfrac{t^2 - 1}{2t - 1} \Rightarrow dx = 2\dfrac{t^2 - t + 1}{(2t-1)^2}dt \end{array}\right| \Rightarrow I = \int \frac{2t^2 - 2t + 2}{t(2t-1)^2}dt =$$

$$= \int\left(\frac{2}{t} - \frac{3}{2t-1} + \frac{3}{(2t-1)^2}\right)dt = 2\ln|t| - \frac{3}{2}\ln|2t-1| - \frac{3}{2}\cdot\frac{1}{2t-1} + C,$$

де $t = x - \sqrt{x^2 - x + 1}$.

Зауваження. Підстановки Ейлера звичайно приводять до громіздких викладів. Інші заміни змінної, після зведення квадратного тричлена $ax^2 + bx + c$ до квадратного двочлена підстановкою $x = t - \frac{b}{2a}$, виконуються за допомогою так званих тригонометричних підстановок.

IV. Інтегрування квадратичних ірраціональностей (**тригонометричні підстановки**). Загальний підхід до раціоналізації відповідних НІ

$$I = \int R(x, \sqrt{\pm a^2 \pm x^2}\,)\,dx\,, \tag{11.3.26}$$

де розглядаються всі пари знаків, крім (–,–), полягає у застосуванні підстановок виду $x = \psi(t)$ (див. (11.2.2)), за допомогою яких підінтегральна функція стає раціонально залежною від тригонометричних функцій. Нижче наведені (табл. 11.3.2) відповідні заміни змінної.

Таблиця 11.3.2

Тригонометричні підстановки для раціоналізації НІ

№	Вид НІ	Підхожі підстановки	
		перша	друга
1	$\int R\left(x, \sqrt{a^2 - x^2}\right) dx$	$x = a \cdot \sin t \;\Rightarrow\; dx = a \cdot \cos t\, dt$, $\sqrt{a^2 - x^2} = a\sqrt{1 - \sin^2 t} = a \cdot \cos t$	$x = a \cdot \cos t$
2	$\int R\left(x, \sqrt{a^2 + x^2}\right) dx$	$x = a \cdot tgt \;\Rightarrow\; dx = \dfrac{a}{\cos^2 t} \cdot dt$, $\sqrt{a^2 + x^2} = a\sqrt{1 + tg^2 t} = \dfrac{a}{\cos t}$	$x = a \cdot ctg\, t$
3	$\int R\left(x, \sqrt{x^2 - a^2}\right) dx$	$x = \dfrac{a}{\sin t} \;\Rightarrow\; dx = -\dfrac{a \cos t}{\sin^2 t} \cdot dt$, $\sqrt{x^2 - a^2} = a\sqrt{\dfrac{1}{\sin^2 t} - 1} = a \cdot ctg\, t$	$x = \dfrac{a}{\cos t}$

(*Пропонуємо* навести інформацію стосовно переходу до нової змінної при використанні других підстановок.)

Аналізуючи підстановки, переконуємось, що x, dx і квадратні корені з двочленів раціонально залежні від функцій $\sin x$, $\cos x$; *наприклад*:

$$\int R\left(x, \sqrt{a^2 - x^2}\right) dx = \int R(a \sin t, a \cos t)\, a \cos t\, dt = \int r(\sin t, \cos t)\, dt\,.$$

Для позбавлення від радикалу в інтегралах 1, 2, 3 використовуються (*прослідкуйте*!) відповідно тригонометричні формули:

1) $\left[\begin{array}{l}1-\sin^2\alpha=\cos^2\alpha\\ 1-\cos^2\alpha=\sin^2\alpha\end{array}\right.$; 2) $\left[\begin{array}{l}1+tg^2\alpha=\dfrac{1}{\cos^2\alpha}\\ 1+ctg^2\alpha=\dfrac{1}{\sin^2\alpha}\end{array}\right.$; 3) $\left[\begin{array}{l}\dfrac{1}{\sin^2\alpha}-1=ctg^2\alpha\\ \dfrac{1}{\cos^2\alpha}-1=tg^2\alpha\end{array}\right.$.

Відзначимо, що при взятті таких НІ вертання до вихідної змінної має передумовою вправне оперування тригонометричними формулами.

Приклад. $I=\int\dfrac{dx}{x\sqrt{x^2+9}}$.

Під знаком радикала сума квадратів, тому покладаємо $x=3\cdot tgt$:

$$\left|\begin{array}{l}x=3\cdot tgt\Rightarrow dx=\dfrac{3}{\cos^2 t}dt,\\ \sqrt{9+x^2}=3\sqrt{1+tg^2 t}=\dfrac{3}{\cos t}\end{array}\right|\Rightarrow I=\int\frac{1}{3tgt}\cdot\frac{\cos t}{3}\cdot\frac{3}{\cos^2 t}dt=$$

$$=\frac{1}{3}\int\frac{1}{\sin t}dt=\frac{1}{3}\ln\left|tg\frac{t}{2}\right|+C=\left|t=arctg\frac{x}{3}\right|=\frac{1}{3}\ln\left|tg\frac{arctg(x/3)}{2}\right|+C.$$

Відповідь записується у менш „екзотичному” вигляді, якщо задіяти формулу тангенса половинного кута і деякі інші співвідношення:

$$tg\frac{t}{2}=\frac{1-\cos t}{\sin t}=\frac{1}{\sin t}-ctgt=\sqrt{1+ctg^2 t}-ctgt=$$

$$=\left|tg\,t=\frac{x}{3}\Rightarrow ctgt=\frac{3}{x}\right|=\sqrt{1+\frac{9}{x^2}}-\frac{3}{x}=\frac{\sqrt{9+x^2}-3}{x}.$$

Таким чином,

$$I=\frac{1}{3}\ln\left|\frac{\sqrt{9+x^2}-3}{x}\right|+C.$$

Розглянуті підстановки не охоплюють усю їх розмаїтість, і порівняно з відшуканням похідної інтегрування функцій потребує не тільки техніки виконання, а й деякого мистецтва.

Застосування невизначених інтегралів в економіці

Означимо деякі поняття економічної теорії.

Витрати виробництва – витрати різних видів економічних ресурсів (сировини, праці, основних засобів, послуг, грошей), які безпосередньо пов'язані з виробництвом економічних благ.

Економічна теорія вирізняє декілька основних видів витрат виробництва.

Постійні витрати – грошові витрати, величина яких не змінюється залежно від зміни обсягу випуску продукції і які підприємство повинно зазнавати навіть тоді, коли воно нічого не виготовляє (витрати на експлуатацію будівель, споруд і обладнання, орендна плата та ін.).

Змінні витрати – витрати, величина яких змінюється залежно від зміни обсягу виробництва; змінні витрати зростають повільніше, ніж збільшується обсяг продукції.

Валові витрати (**загальні витрати**) є сумою постійних і змінних витрат за кожного конкретного обсягу виробництва.

Середні валові витрати – це витрати на одиницю продукції, які дорівнюють загальним витратам, поділеним на обсяг виробництва.

Під **граничними витратами** – в короткостроковому періоді – розуміють відношення зміни повних (загальних) витрат до зміни обсягу продукції; визначаються вони похідною від функції загальних виробничих витрат.

Задача 11.3.1 (*про загальні та середні валові витрати*). Визначити функціональне співвідношення між кількістю випущеної продукції x та загальними виробничими витратами $Z = F(x)$, якщо відомі постійні виробничі витрати (4000 гр. од.) і граничні витрати $z = f(x)$ (у гр. од.), що описуються функцією: $z = 0{,}006x^2 - 0{,}04x$.

Р о з в' я з а н н я. Відновлюємо невизначеним інтегруванням функцію загальних витрат як суму постійних і змінних витрат:

$$Z = \int f(x)dx = \int \left(0{,}006x^2 - 0{,}04x\right) dx = 0{,}002x^3 - 0{,}02x^2 + C.$$

Сталу C знаходимо з умови, що загальні витрати зводяться до постійних, якщо підприємство не виробляє продукцію $(x = 0)$:

$$Z\big|_{x=0} = 4000 \;\Rightarrow\; C = 4000.$$

Таким чином, загальні витрати описуються функцією

$$F(x)=0{,}002x^3-0{,}02x^2+4000.$$

Зокрема, при $x=200$ маємо:

$$Z\big|_{x=200}=0{,}002\cdot 200^3-0{,}02\cdot 200^2+4000=19200$$ – валові витрати;

$$z\big|_{x=200}=0{,}006\cdot 200^2-0{,}04\cdot 200=232$$ – граничні витрати.

Середні валові витрати визначаються відношенням

$$\frac{F(x)}{x}=\frac{0{,}002x^3-0{,}02x^2+4000}{x}=0{,}002x^2-0{,}02x+\frac{4000}{x};$$

при обраному обсязі виробництва $(x=200)$ маємо:

$$\left.\frac{F(x)}{x}\right|_{x=200}=\frac{1920}{200}=96.$$

Таким чином, при виробництві 200 одиниць продукції загальні витрати складають 19200 гр. од., а середні валові витрати – витрати на одиницю продукції – дорівнюють 96 гр. од.

Далі торкнемося питання протилежного змісту: не про витрати, а про прибуток.

Прибуток від реалізації продукції (товарів, робіт, послуг) є основним його видом на підприємстві, безпосередньо пов'язаним з галузевою специфікою діяльності. Аналогом цього терміна виступає термін **„валовий** (**загальний**) **прибуток"**. В обох випадках під цим прибутком розуміється результат господарювання з основної виробничо-збутової діяльності підприємства.

Граничний прибуток – це відношення зміни валового прибутку до зміни кількості товару, що продається.

Середній прибуток визначається як частина загального доходу на одиницю продукції.

Задача 11.3.2 (*про валовий та середній валовий прибуток*). Знайти функціональну залежність валового прибутку $R=R(x)$ (і середнього

валового прибутку $R(x)/x$) від об'єму реалізованої продукції x, якщо відома функція граничного прибутку $r = r(x) = 200 - 0{,}2x - \frac{1}{300}x^2$.

Р о з в' я з а н н я даної задачі за структурою не відрізняється від розв'язання попередньої.

За допомогою невизначеного інтегрування функції граничного прибутку відновлюємо валовий прибуток:

$$R(x) = \int r(x)dx = \int\left(200 - 0{,}2x - \frac{x^2}{300}\right)dx = 200x - 0{,}1x^2 - \frac{x^3}{900} + C\,.$$

Сталу C знаходимо з умови: якщо підприємство не виробляє продукцію $(x = 0)$, то загальний прибуток дорівнює нулю: $R\big|_{x=0} = 0 \Rightarrow C = 0$.

Таким чином, валовий прибуток описується функцією

$$R(x) = 200x - 0{,}1x^2 - \frac{x^3}{900}\,.$$

Для середнього прибутку маємо:

$$\frac{R(x)}{x} = 200 - 0{,}1x - \frac{x^2}{900}\,.$$

Знаючи ці три функціональні залежності, легко знайти граничний, загальний і середній прибутки для певного рівня виробництва.

Так, при $x = 30$ маємо:

$$R(30) = 200 \cdot 30 - 0{,}1 \cdot 30^2 - \frac{30^3}{900} = 5880\,;$$

$$r(30) = 200 - 0{,}2 \cdot 30 - \frac{30^2}{300} = 191;$$

$$\left.\frac{R(x)}{x}\right|_{x=30} = \frac{5880}{30} = 196\,.$$

Таким чином, для рівня 30 одиниць продукції виробник матиме 191 гр. од. прибутку за додаткову одиницю продукції, 5880 гр. од. загального прибутку, що приносить середній прибуток у 196 гр. од.

Запитання для самодіагностики засвоєння матеріалу

Відповіді на всі запитання сформулюйте словесно, запишіть в символічній формі, обґрунтуйте (на підставі означень, теорем, правил, формул тощо), наведіть відповідні конкретні приклади.

1. Що називається первісною даної функції?

2. Сформулюйте і доведіть теорему про множину первісних даної функції.

3. Що називається невизначеним інтегралом від даної функції?

4. Сформулюйте теорему про існування первісної.

5. Сформулюйте і доведіть основні властивості невизначеного інтеграла.

6. Запишіть і перевірте диференціюванням таблицю інтегралів.

7. У чому полягають методи безпосереднього інтегрування, частинами і заміни змінної?

8. Які раціональні алгебраїчні дроби називаються правильними, неправильними?

9. Опишіть, як здійснюється розклад правильного раціонального дробу на елементарні дроби.

10. Як інтегруються елементарні дроби?

11. У чому полягає метод інтегрування раціонального дробу?

12. Як раціоналізується інтеграл $\int R(\sin x, \cos x)dx$? Яка підстановка називається універсальною тригонометричною?

13. Які підстановки застосовуються для взяття інтеграла, якщо підінтегральна функція: непарна відносно синуса або косинуса; парна відносно синуса і косинуса?

14. Як беруться інтеграли виду $\int \sin^m x \cos^n x\, dx$ $(m \in \mathbf{Z},\ n \in \mathbf{Z})$?

15. Як інтегруються функції виду $y = \sin ax \cos bx$, $y = \cos ax \cos bx$, $y = \sin ax \sin bx$?

16. Опишіть, як беруться інтеграли від натуральних степенів тангенса і котангенса.

17. Якими підстановками раціоналізуються найпростіші алгебраїчні ірраціональності?

18. Для інтегрування яких функцій застосовуються підстановки: а) Чебишева; б) Ейлера?

19. Якими тригонометричними підстановками інтегруються квадратичні ірраціональності: $\sqrt{a^2 - x^2}$; $\sqrt{a^2 + x^2}$; $\sqrt{x^2 + a^2}$?

20. Про які інтеграли кажуть, що вони „не беруться у скінченному вигляді”?

Задачі та вправи

1. Знайти вказані інтеграли методом безпосереднього інтегрування:

1) $\int\left(3x^2 + 8\cdot\sqrt[3]{x^2} - \frac{5}{x\cdot\sqrt[7]{x}} - \frac{6}{x}\right)dx$; 2) $\int\frac{(x-3)^2}{\sqrt{x}}dx$;

3) $\int\left(\cos\frac{x}{2} + \sin\frac{x}{2}\right)^2 dx$; 4) $\int ctg^2 x\,dx$;

5) $\int\frac{dx}{\sin^2 x\cdot\cos^2 x}$; 6) $\int\frac{x+2}{x-7}dx$;

7) $\int\frac{x^2}{x^2-5}dx$; 8) $\int e^x\left(1 - \frac{e^{-x}}{\sqrt{x^2-16}}\right)dx$;

9) $\int\frac{3 - 2^x\cdot\sqrt{4-x^2}}{\sqrt{4-x^2}}dx$; 10) $\int\frac{dx}{x^2\left(x^2+9\right)}$.

2. Знайти сім’ю первісних, застосовуючи властивість невизначеного інтеграла від функції складеного лінійного аргументу:

1) $\int\cos(3x-5)dx$; 2) $\int\frac{dx}{(8x-11)^9}$;

3) $\int\sqrt[5]{2-7x}\,dx$; 4) $\int e^{x/2-4}dx$;

5) $\int(5+9x)^{99}dx$; 6) $\int tg(7-4x)dx$;

7) $\int\frac{6}{\sin^2(6x-1)}dx$; 8) $\int 5^{2x+3}dx$;

9) $\int\frac{dx}{\sqrt{4x^2+17}}$; 10) $\int\frac{dx}{9x^2+16}$.

3. Знайти вказані інтеграли методом заміни змінної (підстановки):

1) $\int \frac{(2\ln x+3)^4}{x}dx$;

2) $\int \frac{\sqrt[3]{3+5ctgx}}{\sin^2 x}dx$;

3) $\int \frac{e^{x/2}}{e^x-9}dx$;

4) $\int \sin 4x(8-\cos 4x)^7\,dx$;

5) $\int \frac{dx}{\cos^2 x\sqrt{16-tg^2 x}}$;

6) $\int \frac{1}{5e^{-x}+1}dx$;

7) $\int \frac{x-4}{\sqrt{x^2-8x+5}}dx$;

8) $\int \frac{3^x}{3^{2x}+49}dx$;

9) $\int \frac{\cos 2x}{\sqrt{\sin^2 2x-81}}dx$;

10) $\int \frac{dx}{(\arccos(x/2)-7)^2\sqrt{4-x^2}}$.

4. Знайти вказані інтеграли методом інтегрування частинами:

1) $\int (2x+1)\sin 3x\,dx$;

2) $\int (x^2-3)\cos 5x\,dx$;

3) $\int x\cdot e^{-3x+2}\,dx$;

4) $\int (9x+4)\cdot 7^{2x}\,dx$;

5) $\int \left(x^7-3x^2\right)\cdot \ln x\;dx$;

6) $\int \ln\left(x^2+4\right)dx$;

7) $\int \arcsin 4x\,dx$;

8) $\int (x+5)\cdot arcctgx\,dx$;

9) $\int \frac{5+4x}{\sin^2 x}dx$;

10) $\int e^x\cdot \sin 2x\,dx$;

11) $\int arctg\sqrt{9x-1}\,dx$;

12) $\int x\cdot \ln(x-1)dx$;

13) $\int e^{\sqrt{x}}dx$;

14) $\int \sin(\ln x)dx$.

5. Здійснити інтегрування раціональних алгебраїчних дробів:

1) $\int \frac{2dx}{x-5}$;

2) $\int \frac{9dx}{7x-2}$;

3) $\int \frac{4dx}{(x-11)^3}$;

4) $\int \frac{5dx}{(3x+2)^7}$;

5) $\int \frac{7x+3}{x^2-8x+25}dx$;

6) $\int \frac{2-5x}{4x^2-3x+1}dx$;

7) $\int \frac{3x-7}{x^2-x-6}dx$;

8) $\int \frac{4x+3}{2x^2+9x-5}dx$;

9) $\int \frac{x^4}{(x^2-1)(x+2)}dx$;

10) $\int \frac{2x^2-1}{x^3-5x^2+6x}dx$;

11) $\int \frac{dx}{(x^2-2x)^2}$;

12) $\int \frac{x^5+1}{x^4-8x^2+16}dx$;

13) $\int \frac{x^2-8x+3}{x^3-x^2+x-1}dx$;

14) $\int \frac{x^5+2}{x^3-1}dx$.

6. Здійснити інтегрування найпростіших ірраціональностей:

1) $\int \frac{dx}{\sqrt[3]{x}+\sqrt{x}}$;

2) $\int \frac{\sqrt{x^3}-\sqrt[3]{x}}{6\sqrt[4]{x}}dx$;

3) $\int \frac{dx}{\sqrt[3]{(2x+1)^2}-\sqrt{2x+1}}$;

4) $\int \frac{dx}{\sqrt[4]{3x-2}-1}$;

5) $\int \frac{\sqrt{x+2}}{x}dx$;

6) $\int \frac{\sqrt{1+x}+1}{\sqrt{1+x}-1}dx$;

7) $\int \frac{dx}{\sqrt{1-2x}-\sqrt[4]{1-2x}}$;

8) $\int x\cdot\sqrt[5]{x-2}\,dx$;

9) $\int \frac{1}{(x-1)^2}\cdot\sqrt[3]{\frac{x+1}{x-1}}\,dx$;

10) $\int \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\cdot\frac{dx}{x}$.

7. Зінтегрувати диференціальні біноми:

1) $\int \frac{dx}{x(1+\sqrt[3]{x})^2}$;

2) $\int x^5\cdot\sqrt[3]{(1+x^3)^2}\,dx$;

3) $\int \frac{\sqrt[3]{1+\sqrt[4]{x}}}{\sqrt{x}}dx$;

4) $\int \sqrt[3]{x}\cdot\sqrt[3]{1+3\cdot\sqrt[3]{x^2}}\,dx$;

5) $\int \frac{dx}{x^3\cdot\sqrt[3]{2-x^3}}$;

6) $\int x\cdot\sqrt{x^4+1}\,dx$;

7) $\int \frac{dx}{\sqrt[4]{1+x^4}}$;

8) $\int \frac{dx}{x\cdot\sqrt[3]{1+x^5}}$.

8. Здійснити інтегрування функцій, раціонально залежних від квадратних коренів із квадратного тричлена:

1) $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+x+1}}$; 2) $\int \frac{5x-1}{\sqrt{x^2-10x+24}}dx$;

3) $\int \frac{3x-5}{\sqrt{2x^2-4x+10}}dx$; 4) $\int \frac{dx}{\sqrt{3-2x-x^2}}$;

5) $\int \frac{x+1}{\sqrt{16x-x^2}}dx$; 6) $\int \frac{2x+5}{\sqrt{8x-4x^2+4}}dx$;

7) $\int \frac{7x-4}{\sqrt{9x^2+6x+2}}dx$; 8) $\int \frac{3-5x}{\sqrt{2{,}5+9x-4x^2}}dx$;

9) $\int \frac{dx}{(1+x)\cdot\sqrt{1-x-x^2}}$; 10) $\int \frac{dx}{1+\sqrt{x^2+2x+2}}$.

(*Вказівка:* у задачах 9) та 10) застосувати підстановки Ейлера.)

9. Знайти інтеграли від функцій, раціонально залежних від тригонометричних функцій:

1) $\int \frac{dx}{1+\sin x+\cos x}$; 2) $\int \frac{dx}{8-4\sin x+7\cos x}$;

3) $\int \frac{dx}{\cos x+2\sin x+3}$; 4) $\int \frac{1-\sin x+\cos x}{1+\sin x-\cos x}dx$;

5) $\int \frac{dx}{1+3\cos^2 x}$; 6) $\int \frac{dx}{\sin^2 x+3\sin x\cos x-\cos^2 x}$;

7) $\int \sin^{10} x\cdot\cos^5 x\,dx$; 8) $\int \cos^2 3x\cdot\sin^4 3x\,dx$;

9) $\int \cos^3 7x\cdot\sin^3 7x\,dx$; 10) $\int \cos^4(x/2)dx$;

11) $\int \frac{dx}{\sin 2x\cdot\cos^2 2x}$; 12) $\int \frac{\cos^2 x}{\sin^6 x}dx$;

13) $\int tg^4 5x\,dx$; 14) $\int ctg^5 4x\,dx$;

15) $\int \frac{dx}{\cos^4 2x}$; 16) $\int \frac{dx}{\sin^3 x}$;

17) $\cos 2x\cdot\sin 4x\,dx$; 18) $\cos\frac{x}{2}\cdot\cos\frac{x}{3}dx$.

10. Знайти інтеграли за допомогою тригонометричних підстановок:

1) $\int \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)^3}}$;

2) $\int \frac{\sqrt{4-x^2}}{x^2}dx$;

3) $\int \frac{dx}{x^2 \cdot \sqrt{16+x^2}}$;

4) $\int \frac{\sqrt{9+x^2}}{x^4}dx$;

5) $\int \frac{\sqrt{x^2-25}}{x}dx$;

6) $\int \frac{dx}{x \cdot \sqrt{x^2-49}}$;

7) $\int \frac{dx}{(1+x^2) \cdot \sqrt{1-x^2}}$;

8) $\int \frac{dx}{(1-x^2) \cdot \sqrt{1+x^2}}$;

9) $\int \frac{dx}{(x+1)^2 \cdot \sqrt{x^2+2x+2}}$;

10) $\int \sqrt{x^2-6x-7}\,dx$;

11) $\int \frac{dx}{\sqrt{(x^2-a^2)^3}}$;

12) $\int \frac{x^2dx}{\sqrt{a^2-x^2}}$;

13) $\int x^2\sqrt{(4-x^2)}\,dx$;

14) $\int \frac{\sqrt{(9-x^2)^3}}{x^6}dx$;

15) $\int \frac{dx}{(x^2+1)(x+\sqrt{x^2+1})}$;

16) $\int \sqrt{4x-x^2}\,dx$.

Відповіді

1. 1) $x^3+\frac{24}{5}x\cdot\sqrt[3]{x^2}+\frac{35}{\sqrt[7]{x}}-6\ln|x|+C$; 2) $\frac{2}{5}x^2\cdot\sqrt{x}-4x\cdot\sqrt{x}+18\sqrt{x}+C$;

3) $x-\cos x+C$; 4) $-ctgx-x+C$; 5) $tgx-ctgx+C$; 6) $x+9\ln|x-7|+C$;

7) $x+\frac{\sqrt{5}}{2}\ln\left|\frac{x-\sqrt{5}}{x+\sqrt{5}}\right|+C$; 8) $e^x-\ln\left|x+\sqrt{x^2-16}\right|+C$; 9) $3\arcsin\frac{x}{2}-\frac{2^x}{\ln 2}+C$;

10) $-\frac{1}{9x}-\frac{1}{27}arctg\frac{x}{3}+C$.

2. 1) $\frac{1}{3}\sin(3x-5)+C$; 2) $-\frac{1}{64(8x-11)^8}+C$; 3) $-\frac{5}{42}\sqrt[5]{(2-7x)^6}+C$;

4) $2e^{x/2-4}+C$; 5) $\frac{(5+9x)^{100}}{900}+C$; 6) $\frac{1}{4}\ln|\cos(7-4x)|+C$; 7) $-ctg(6x-1)+C$;

8) $\frac{5^{2x+3}}{2\ln 5}+C$; 9) $\frac{1}{2}\ln\left|2x+\sqrt{4x^2+17}\right|+C$; 10) $\frac{1}{12}arctg\frac{3x}{4}+C$.

3. 1) $\frac{1}{10}(2\ln x+3)^5+C$; 2) $-\frac{3}{20}\sqrt[3]{(3+5ctgx)^4}+C$; 3) $\frac{1}{3}\ln\left|\frac{e^{x/2}-3}{e^{x/2}+3}\right|+C$;

4) $\frac{(8-\cos 4x)^8}{32}+C$; 5) $\arcsin\frac{tgx}{4}+C$; 6) $\ln\left(e^x+5\right)+C$; 7) $\sqrt{x^2-8x+5}+C$;

8) $\frac{1}{7\ln 3}arctg\frac{3^x}{7}+C$; 9) $\frac{1}{2}\ln\left|\sin 2x+\sqrt{\sin^2 2x-81}\right|+C$; 10) $\frac{1}{\arccos(x/2)-7}+C$.

4. 1) $-\frac{2x+1}{3}\cos 3x+\frac{2}{9}\sin 3x+C$; 2) $\frac{25x^2-77}{125}\sin 5x+\frac{2}{25}x\cos 5x+C$;

3) $-\frac{3x+1}{9}\cdot e^{-3x+2}+C$; 4) $\frac{7^{2x}}{2\ln 7}\left(9x+\frac{8\ln 7-9}{2\ln 7}\right)+C$; 5) $\left(\frac{x^8}{8}-x^3\right)\cdot\ln x-\frac{x^8}{64}+$

$+\frac{x^3}{3}+C$; 6) $x\cdot\ln\left(x^2+4\right)-2x+4arctg\frac{x}{2}+C$; 7) $x\cdot\arcsin 4x+\frac{\sqrt{1-16x^2}}{4}+C$;

8) $\frac{x^2+10x+1}{2}\cdot arcctgx+\frac{1}{2}x+\frac{5}{2}\ln\left(x^2+1\right)+C$; 9) $-(5+4x)\cdot ctgx+4\ln|\sin x|+C$;

10) $\frac{1}{5}e^x(\sin 2x-2\cos 2x)+C$; 11) $x\cdot arctg\sqrt{9x-1}-\frac{\sqrt{9x-1}}{9}+C$; 12) $\frac{x^2-1}{2}\times$

$\times\ln(x-1)-\frac{x^2+2x}{4}+C$; 13) $2e^{\sqrt{x}}\left(\sqrt{x}-1\right)+C$; 14) $\frac{x}{2}(\sin(\ln|x|)-\cos(\ln|x|))+C$.

5. 1) $2\ln|x-5|+C$; 2) $\frac{9}{7}\ln|7x-2|+C$; 3) $\frac{-2}{(x-11)^2}+C$; 4) $\frac{-5}{18(3x+2)^6}+$

$+C$; 5) $\frac{7}{2}\ln\left|x^2-8x+25\right|+\frac{31}{3}arctg\frac{x-4}{3}+C$; 6) $-\frac{5}{8}\ln\left|x^2-\frac{3}{4}x+\frac{1}{4}\right|+$

$+\frac{\sqrt{7}}{28}arctg\frac{8x-3}{\sqrt{7}}+C$; 7) $\frac{1}{5}(13\ln|x+2|+2\ln|x-3|)+C$; 8) $\frac{5}{11}\ln|x-1/2|+$

$+\frac{17}{11}\ln|x+5|+C$; 9) $\frac{x^2}{2}-2x+\frac{1}{6}\ln|x-1|-\frac{1}{2}\ln|x+1|+\frac{16}{3}\ln|x+2|+C$;

10) $\frac{17}{3}\ln|x-3|-\frac{1}{6}\ln|x|-\frac{7}{2}\ln|x-2|+C$; 11) $\frac{1}{4}\ln\left|\frac{x}{x-2}\right|-\frac{x-1}{2x\cdot(x-2)}+C$;

12) $\frac{x^2}{2}-\frac{33}{16(x-2)}+\frac{127}{32}\ln|x-2|+\frac{31}{16(x+2)}+\frac{129}{32}\ln|x+2|+C$; 13) $C-2\ln|x-1|+$ $+\frac{3}{2}\ln\left(x^2+1\right)-5arctg\,x$; 14) $\frac{x^3}{3}+\ln|x-1|-\frac{2}{\sqrt{3}}arctg\,\frac{2x+1}{\sqrt{3}}+C$.

6. 1) $2\sqrt{x}-3\sqrt[3]{x}+6\sqrt[6]{x}-6\ln\left(\sqrt[6]{x}+1\right)+C$; 2) $\frac{2}{27}\sqrt[4]{x^9}-\frac{2}{13}\sqrt[12]{x^{13}}+C$;

3) $\frac{3}{2}\sqrt[3]{2x+1}+3\sqrt[6]{2x+1}+3\ln\left|\sqrt[6]{2x+1}-1\right|+C$; 4) $\frac{4}{9}\sqrt[4]{(3x-2)^3}+\frac{2}{3}\sqrt{3x-2}+$ $+\frac{4}{3}\sqrt[4]{3x-2}+\frac{4}{3}\ln\left|\sqrt[4]{3x-2}-1\right|+C$; 5) $2\sqrt{x+2}+\sqrt{2}\ln\left|\frac{\sqrt{x+2}-\sqrt{2}}{\sqrt{x+2}+\sqrt{2}}\right|+C$;

6) $x+4\sqrt{1+x}+4\ln\left(\sqrt{1+x}-1\right)+C$; 7) $C-\sqrt{1-2x}-2\sqrt[4]{1-2x}-2\ln\left|\sqrt[4]{1-2x}-1\right|$;

8) $\frac{5}{11}\sqrt[5]{(x-2)^{11}}+\frac{5}{3}\sqrt[5]{(x-2)^6}+C$; 9) $-\frac{3}{8}\cdot\sqrt[3]{\left(\frac{x+1}{x-1}\right)^4}+C$; 10) $2arctg\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}+$ $+\ln\left|\frac{\sqrt{1-x}-\sqrt{1+x}}{\sqrt{1-x}+\sqrt{1+x}}\right|+C$.

7. 1) $3\cdot\ln\left|\frac{\sqrt[3]{x}}{\sqrt[3]{x}+1}\right|+\frac{3}{\sqrt[3]{x}+1}+C$; 2) $\frac{\sqrt[3]{(1+x^3)^8}}{8}-\frac{\sqrt[3]{(1+x^3)^5}}{5}+C$;

3) $\frac{12}{7}\sqrt[3]{\left(1+\sqrt[4]{x}\right)^7}-3\sqrt[3]{\left(1+\sqrt[4]{x}\right)^4}+C$; 4) $\frac{1}{14}\sqrt[3]{\left(1+3\sqrt[3]{x^2}\right)^7}-\frac{1}{8}\sqrt[3]{\left(1+3\sqrt[3]{x^2}\right)^4}+C$;

5) $C-\frac{\sqrt[3]{(2-x^3)^2}}{4x^2}$; 6) $\frac{1}{4}x^2\sqrt{x^4+1}+\frac{1}{4}\ln\left(x^2+\sqrt{x^4+1}\right)+C$; 7) $\frac{1}{4}\ln\frac{\sqrt[4]{1+x^4}+x}{\sqrt[4]{1+x^4}-x}-$ $-\frac{1}{2}arctg\,\frac{\sqrt[4]{1+x^4}}{x}+C$; 8) $\frac{1}{10}\ln\frac{(t-1)^2}{t^2+t+1}+\frac{\sqrt{3}}{5}arctg\,\frac{2t+1}{\sqrt{3}}$, де $t=\sqrt[3]{1+x^5}$.

8. 1) $\ln\left|x+1/2+\sqrt{x^2+x+1}\right|+C$; 2) $24\ln\left|x-5+\sqrt{x^2-10x+24}\right|+$ $+5\sqrt{x^2-10x+24}+C$; 3) $\frac{3}{\sqrt{2}}\sqrt{x^2-2x+5}-\sqrt{2}\ln\left|x-1+\sqrt{x^2-2x+5}\right|+C$;

4) $\arcsin\frac{x+1}{2}+C$; 5) $-\sqrt{16x-x^2}+9\arcsin\frac{x-8}{8}+C$; 6) $-\sqrt{1+2x-x^2}+$ $+\frac{7}{2}\arcsin\frac{x-1}{\sqrt{2}}+C$; 7) $\frac{7}{9}\sqrt{9x^2+6x+2}-\frac{19}{9}\ln\left|\frac{3x+1+\sqrt{9x^2+6x+2}}{3}\right|+C$;

8) $\frac{5}{2}\sqrt{\frac{5}{8}+\frac{9}{4}x-x^2}-\frac{21}{16}\arcsin\frac{8x-9}{11}+C$; 9) $-2arctg\frac{\sqrt{1-x-x^2}+x+1}{x}+C$;

10) $\frac{2}{x-\sqrt{x^2+2x+2}}-\ln\left|\sqrt{x^2+2x+2}-x-1\right|+C$.

9. 1) $\ln\left|1+tg\frac{x}{2}\right|+C$; 2) $\ln\left|\frac{tg(x/2)-5}{tg(x/2)-3}\right|+C$; 3) $arctg\left(1+tg\frac{x}{2}\right)+C$;

4) $C-x+2\ln\left|\frac{tg(x/2)}{1+tg(x/2)}\right|$; 5) $\frac{1}{2}arctg\left(\frac{tgx}{2}\right)+C$; 6) $\frac{1}{\sqrt{13}}\ln\left|\frac{2tgx+3-\sqrt{13}}{2tgx+3+\sqrt{13}}\right|+C$;

7) $\frac{\sin^{11}x}{11}-\frac{2\sin^{13}x}{13}+\frac{\sin^{15}x}{15}+C$; 8) $\frac{1}{8}\left(\frac{x}{2}-\frac{\sin 12x}{24}-\frac{\sin^3 6x}{18}\right)+C$; 9) $\frac{\sin^4 7x}{28}-$ $-\frac{\sin^6 7x}{42}+C$; 10) $\frac{3x}{8}+\frac{\sin 2x}{16}+\frac{\sin x}{2}+C$; 11) $\frac{1}{2\cos 2x}+\frac{1}{2}\ln|tgx|+C$;

12) $-\frac{ctg^3x}{3}-\frac{ctg^5x}{5}+C$; 13) $\frac{tg^3 5x}{15}-\frac{tg5x}{5}+x+C$; 14) $-\frac{ctg^4 4x}{16}+\frac{ctg^2 4x}{8}+$ $+\frac{\ln|\sin 4x|}{4}+C$; 15) $\frac{tg2x}{2}+\frac{tg^3 2x}{6}+C$; 16) $\frac{1}{2}\left(\ln|tg(x/2)|-\frac{\cos x}{\sin^2 x}\right)+C$;

17) $-\frac{1}{12}\cos 6x-\frac{1}{4}\cos 2x+C$; 18) $\frac{3}{5}\sin\frac{5x}{6}+3\sin\frac{x}{6}+C$.

10. 1) $\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}+C$; 2) $-\frac{\sqrt{4-x^2}}{x}-\arcsin\frac{x}{2}+C$; 3) $C-\frac{1}{\sin(arctg(x/4))}$;

4) $-\frac{1}{27arctg(x/3)}+C$; 5) $\sqrt{x^2-25}-5\arccos\frac{5}{x}+C$; 6) $\frac{1}{7}\arccos\frac{7}{x}+C$;

7) $\frac{1}{\sqrt{2}}arctg\frac{x\sqrt{2}}{\sqrt{1-x^2}}+C$; 8) $\frac{1}{\sqrt{8}}\ln\left|\frac{\sqrt{1+x^2}+x\sqrt{2}}{\sqrt{1+x^2}-x\sqrt{2}}\right|+C$; 9) $-\frac{\sqrt{x^2+2x+2}}{x+1}+C$;

10) $\frac{(x-3)\sqrt{x^2-6x-7}}{4}-8\ln\left|tg\left(\frac{\pi}{4}+\frac{1}{2}\arccos\frac{4}{x-3}\right)\right|+C$; 11) $C-\frac{x}{2\sqrt{x^2-2}}$;

12) $\frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{a}-\frac{x}{2}\sqrt{a^2-x^2}+C$; 13) $2\arcsin\frac{x}{2}+\frac{x}{4}\left(x^2-2\right)\sqrt{4-x^2}+C$;

14) $-\frac{\sqrt{\left(9-x^2\right)^5}}{45x^5}+C$; 15) $\ln\frac{x+\sqrt{1+x^2}}{\sqrt{1+x^2}}+C$; 16) $\frac{x-2}{2}\cdot\sqrt{4x-x^2}+$

$+2\arcsin\frac{x-2}{2}+C$.

Ключові терміни

Первісна функція; теорема про множину первісних; інтегрування; інтегральне числення; однопараметрична сім'я первісних; невизначений інтеграл; підінтегральна функція; підінтегральний вираз; диференціал змінної інтегрування; правила інтегрування; безпосереднє інтегрування; заміна змінної; інтегрування частинами; раціональні алгебраїчні дроби; елементарні (найпростіші) дроби; правильні і неправильні дроби; коефіцієнти розкладу; метод невизначених коефіцієнтів; структурна схема; універсальна тригонометрична підстановка; найпростіші ірраціональності; біноміальні диференціали; підстановки Чебишева; підстановки Ейлера; тригонометричні підстановки.

Резюме

Викладено основні відомості стосовно невизначеного інтеграла, а саме: означення; властивості (у тому числі правила невизначеного інтегрування); методи інтегрування (безпосереднє інтегрування, заміна змінної, або метод підстановки, інтегрування частинами).

Розглянуто невизначене інтегрування: елементарних раціональних алгебраїчних дробів; правильних і неправильних раціональних алгебраїчних дробів; найпростіших і квадратичних ірраціональностей; функцій, раціонально залежних від тригонометричних функцій.

Література: [2 – 4; 7; 9 – 12; 16; 19; 21; 24].

12. Визначений інтеграл

Математика – це мистецтво називати різні речі одним і тим же ім'ям.

Анрі Пуанкаре

Мета: навчити студентів умінню за швидкісними характеристиками, що описують різні за природою явища і процеси (в аналітичному вигляді, табличній чи графічній формах), відтворювати чисельне значення їхніх загальних характеристик (об'єм виробництва, спожиті енергетичні ресурси).

Питання теми:

12.1. Визначений інтеграл (ВІ). Формула Ньютона – Лейбніца.

12.2. Методи визначеного інтегрування.

12.3. Невластиві інтеграли. Інтеграл Ейлера – Пуассона.

12.4. Застосування ВІ: геометричні, фізичні, економічні.

Компетентності, що формуються після вивчення теми:

Загальнонаукова: володіння засобами визначеного інтегрування для підрахунку числових характеристик функціональних залежностей в різних галузях знань.

Загальнопрофесійна: підготовленість до визначення величин, які характеризують складові економічних інформаційних систем: режим роботи, розподіл ресурсів тощо.

Спеціалізовано-професійна: уміння проводити в підсистемах ІНС економічний аналіз виробництва продукції (за заданою виробничою функцією), дослідження попиту і пропозиції та ін.

12.1. Визначений інтеграл (ВІ). Формула Ньютона – Лейбніца

Поняття ВІ, його геометричний смисл. Теорема існування

Нехай функція $y = f(x)$ визначена і неперервна на відрізку (сегменті) $[a, b]$. Виконаємо таку (надалі стандартну) процедуру:

розіб'ємо сегмент $[a, b]$ довільним чином на n часткових відрізків точками $a = x_0$, x_1, x_2, …, x_{n-1}, $x_n = b$, де $x_{i-1} < x_i$, $i = \overline{1, n}$ (рис. 12.1.1), і найбільшу з довжин відрізків ділення назвемо **діаметром розбиття** λ;

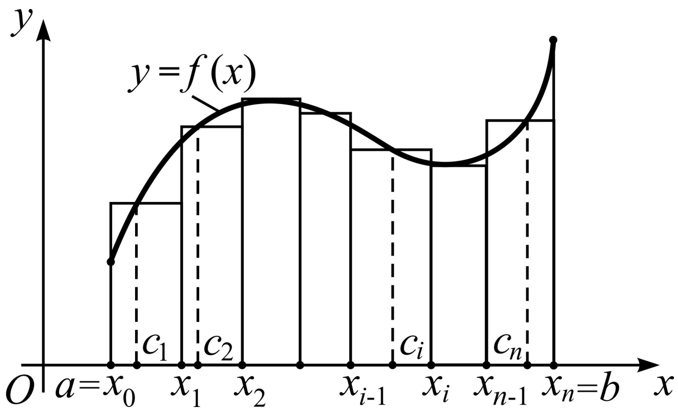


Рис. 12.1.1. **Розбиття сегмента на частини**

виберемо всередині кожної частки $[x_{i-1}, x_i]$, $i=\overline{1,n}$, довільним чином точку c_i, обчислимо $f(c_i)$ і *знайдемо* добутки $f(c_i)\cdot \Delta x_i$, де $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$;

складемо суму всіх таких добутків

$$I_n = \sum_{i=1}^{n} f(c_i)\cdot \Delta x_i \quad (12.1.1)$$

і назвемо її **інтегральною сумою** для функції $f(x)$ на відрізку $[a,b]$;

обчислимо границю (якщо вона існує) інтегральної суми I_n при $\lambda \to 0$ разом з $n \to \infty$.

Скінченна границя I інтегральної суми I_n, знайдена за умови, що діаметр розбиття прямує до нуля ($\lambda \to 0$) при необмеженому зростанні числа точок розбиття ($n \to \infty$), називається **визначеним інтегралом** (від) функції $f(x)$ на відрізку $[a,b]$ і позначається через

$$\int_a^b f(x)dx,$$

де $\int$ – знак (символ) ВІ;

a, b – межі інтегрування (a – нижня, b – верхня);

$[a,b]$ – відрізок (шлях, область) інтегрування;

$f(x)$ – підінтегральна функція;

dx – диференціал **змінної інтегрування** x;

$f(x)dx$ – підінтегральний вираз;

а читається так: „інтеграл від a до b еф від ікс де ікс”.

Отже, за означенням

$$I = \lim_{\substack{\lambda\to 0\\ (n\to\infty)}} I_n = \lim_{\substack{\lambda\to 0\\ (n\to\infty)}} \sum_{i=1}^{n} f(c_i)\Delta x_i = \int_a^b f(x)dx. \quad (12.1.2)$$

Геометричний смисл ВІ. Аналізуючи з геометричної точки зору процедуру, яка передувала означенню ВІ, для невід'ємної на $[a,b]$ функції ($f(x)\geq 0\ \forall x\in[a,b]$), приходимо до висновку: кожний доданок $f(c_i)\cdot\Delta x_i$ інтегральної суми чисельно дорівнює площі прямокутника з основою Δx_i і висотою $f(c_i)$ (див. рис. 12.1.1), а інтегральна сума чисельно дає наближене значення S_n площі S фігури, обмеженої зверху дугою кривої $y=f(x)$, знизу – віссю Ox ($y=0$), з боків – вертикальними прямими ($x=a$, $x=b$). Описану фігуру називають **криволінійною трапецією** (**к/т**) для $f(x)$ на $[a,b]$ (рис. 12.1.2).

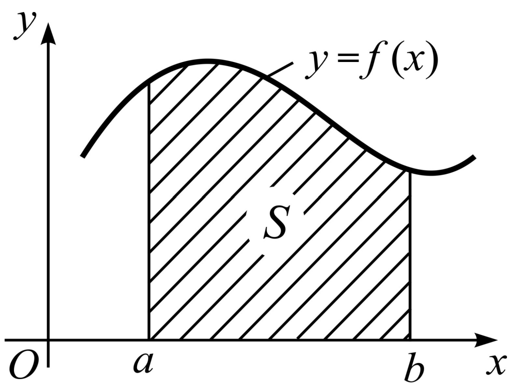


Рис. 12.1.2. **Геометричний смисл ВІ**

Указане наближення тим краще, чим менше будуть Δx_i, тому при $n\to\infty$ природно покласти, що $S=\lim\limits_{\lambda\to 0} S_n$, і кажуть: у **геометричному смислі** ВІ функції $f(x)\geq 0$ на $[a,b]$ чисельно дорівнює площі відповідної криволінійної трапеції:

$$S=\int_a^b f(x)\,dx. \qquad (12.1.3)$$

(*Обміркуйте*, який смисл має ВІ, якщо $f(x)\leq 0$ на $[a,b]$.)

Окремими (частинними) випадками к/т є: прямолінійна прямокутна трапеція; прямокутний трикутник; прямокутник (квадрат); криволінійний трикутник (це коли $f(a)=0$ або $f(b)=0$). (*Наведіть* самостійно відповідні зображення.)

Розглянемо ілюстративний *приклад* на обчислення за означенням ВІ на $[a,b]$ від функції $f(x)=h$, де $h-const$.

З геометричної точки зору йдеться про відшукання площі виродженої к/т – прямокутника з основою $(b-a)$ і висотою h. Згідно з (12.1.1) *складемо* інтегральну суму і *знайдемо* відповідну границю:

$$S_n=\sum_{i=1}^{n} h\cdot\Delta x_i = h\sum_{i=1}^{n}\Delta x_i = h(b-a) \Rightarrow S=h(b-a). \qquad (12.1.4)$$

Як і годиться, отримали площу прямокутника.

Теорему існування ВІ приймемо без доведення.

Теорема 12.1.1 (*теорема існування ВІ*). Якщо функція $y = f(x)$ неперервна на відрізку $[a, b]$ або обмежена на ньому і має скінченну множину точок розриву, то існує скінченна границя інтегральної суми I_n (тобто ВІ), і вона не залежить ні від способу розбиття сегмента на частини, ні від вибору точок всередині них для складання інтегральної суми.

Функція $y = f(x)$, для якої на відрізку $[a, b]$ існує ВІ, називається **інтегровною** на цьому відрізку.

До розглянутого обчислювального процесу – складання інтегральних сум і граничного переходу в них (тобто до обчислення ВІ) – зводиться не тільки обчислення площі к/т, а й чимало задач фізики, техніки, економіки тощо. Наведемо деякі з них.

Задача про обчислення:

шляху s, пройденого матеріальною точкою за проміжок часу $[t_1, t_2]$, якщо відома її швидкість як функція часу $v = f(t)$;

маси m тонкого лінійного стрижня довжини l за відомою густиною $\rho = f(x)$ як функцією відстані від одного з кінців стрижня;

роботи A змінної сили $F = F(x)$ на певному проміжку шляху;

об'єму V виробленої продукції за відомою продуктивністю праці $p = p(t)$ як функцією часу на деякому відрізку часу;

витрат виробництва z за собівартістю $s = s(V)$ як функцією об'єму виробництва.

Звичайно, в усіх задачах відповідні функції повинні бути інтегровними. Розв'язання деяких задач застосовного характеру розглянемо пізніше.

Основні властивості визначеного інтеграла

Доведення всіх властивостей ВІ базується на властивостях границь (у застосуванні до інтегральних сум), залучаючи, для наочності і кращого розуміння, геометричний смисл ВІ (хоча доведеться в деякій мірі офірувати строгістю викладу).

1^0 (*про ВІ з рівними межами інтегрування*). Для будь-якої інтегровної функції $f(x)$ ВІ з рівними межами інтегрування дорівнює нулю:

$$\int_a^a f(x)dx = 0, \tag{12.1.5}$$

адже ж к/т вироджується у вертикальний відрізок.

2^0 (*про зміну знака*). Якщо поміняти місцями межі інтегрування, то визначений інтеграл змінить свій знак на протилежний:

$$\int_b^a f(x)\,dx = -\int_a^b f(x)\,dx, \tag{12.1.6}$$

тому що в інтегральній сумі прирости $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$, $i = \overline{1,n}$, змінять знак на протилежний.

3^0 (*про сталий множник*). Сталий множник можна виносити за знак визначеного інтеграла:

$$\int_a^b k \cdot f(x)dx = k \cdot \int_a^b f(x)dx, \text{ де } k \text{ – стала,} \tag{12.1.7}$$

бо k як спільний множник доданків інтегральної суми можна винести за символ суми Σ, а потім – за знак границі $\lim$.

4^0 (*про ВІ від суми функцій*). Інтеграл від алгебраїчної суми двох функцій дорівнює сумі інтегралів від цих функцій:

$$\int_a^b [f(x) \pm \varphi(x)]\,dx = \int_a^b f(x)\,dx \pm \int_a^b \varphi(x)\,dx. \tag{12.1.8}$$

Справедливість (12.1.8) випливає з того, що інтегральну суму лівої частини рівності можна подати у вигляді алгебраїчної суми двох інтегральних сум:

$$I_n = \sum_{i=1}^{n} [f(x_i) \pm \varphi(x_i)] \cdot \Delta x_i = \sum_{i=1}^{n} f(x_i) \cdot \Delta x_i \pm \sum_{i=1}^{n} \varphi(x_i) \cdot \Delta x_i,$$

а за властивістю границі суми функцій і отримуємо (12.1.8).

Властивість 4^0 поширюється на будь-яке скінченне число доданків.

5^0 (*про адитивність*). Якщо сегмент $[a, b]$ розбито на два відрізки, які не мають спільних внутрішніх точок, то ВІ на $[a, b]$ дорівнює сумі інтегралів на частинах розбиття:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx, \quad a < c < b, \tag{12.1.9}$$

бо в геометричному смислі такому розбиттю відповідає дві трапеції, сума площ яких дорівнює площі вихідної трапеції (властивість поширюється на будь-яке скінченне число відрізків розбиття).

6^0 (*про перехід до ВІ у нерівностях*). Якщо на сегменті $[a, b]$ значення функцій $f(x)$ і $\varphi(x)$ пов'язані нерівністю $f(x) \le (\ge)\, \varphi(x)$, то такою ж, за знаком, нерівністю пов'язані ВІ від цих функцій:

$$f(x) \le (\ge)\, \varphi(x) \;\Rightarrow\; \int_a^b f(x)dx \le (\ge) \int_a^b \varphi(x)dx. \tag{12.1.10}$$

Дійсно, на одному і тому ж розбитті $[a, b]$ на частини доданки інтегральної суми для $f(x)$ і $\varphi(x)$ будуть пов'язані тим же знаком нерівності, що і самі функції, і граничний перехід не змінить знака нерівності на підставі теореми 7.3.5 (*про перехід до границі в нерівностях*).

7^0 (*про межі вартостей ВІ*). Вартості ВІ від неперервної $f(x)$ на $[a, b]$ не виходять за межі відрізка $[m(b-a), M(b-a)]$, де m (M) – найменше (найбільше) значення функції на сегменті $[a, b]$, тобто:

$$m \le f(x) \le M \;\Rightarrow\; m(b-a) \le \int_a^b f(x)\,dx \le M(b-a). \tag{12.1.11}$$

За теоремою 8.4.5 (*про найменше і найбільше значення*): якщо функція $f(x)$ визначена і неперервна на сегменті $[a, b]$, то серед її значень на цьому відрізку існує найменше і найбільше (рис. 12.1.3). На цій підставі площа к/т як ВІ для $f(x)$ на $[a, b]$ (див. рис. 12.1.3) не може бути менше (більше) площі прямокутника з основою $(b-a)$, висота якого є найменшим m (найбільшим M) значенням функції на $[a, b]$, звідки і випливає справедливість теореми.

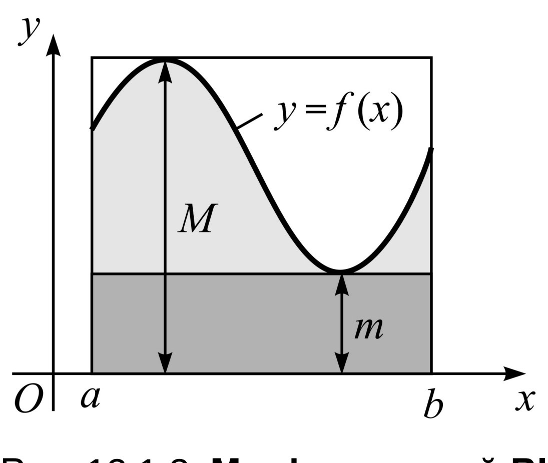


Рис. 12.1.3. **Межі вартостей ВІ**

Відношення ВІ від $f(x)$ на $[a, b]$ до довжини відрізка інтегрування називається **середнім значенням** інтеграла: $\overline{I} = \frac{1}{b-a} \cdot \int_a^b f(x)\, dx$.

8^0 (*про середнє значення ВІ*). Якщо функція $f(x)$ неперервна на відрізку $[a, b]$, то на ньому існує точка ξ така, що середнє значення ВІ від $f(x)$ на $[a, b]$ рівне вартості підінтегральної функції у цій точці (рис. 12.1.4):

$$f(x) \in \mathbf{C}([a, b]) \Rightarrow \exists \xi \in [a, b]: \frac{1}{b-a} \cdot \int_a^b f(x)\, dx = f(\xi). \qquad (12.1.12)$$

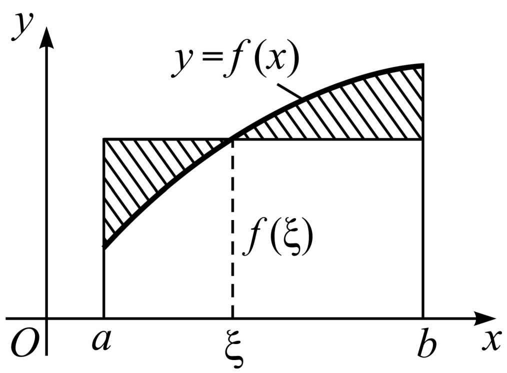


Рис. 12.1.4. **Середнє значення ВІ**

Дійсно, із формули (12.1.11) випливає, що середнє значення ВІ належить проміжку $[m, M]$, а функція $f(x)$ за теоремою 8.4.2 (*про проміжне значення функції*) приймає усі значення із цього відрізка. Це і означає існування точки ξ, у якій $\overline{I} = f(\xi)$.

Таких точок може бути декілька.

Звичайно властивість 8^0 називають *теоремою про середнє* і формулу (12.1.12) записують у вигляді:

$$\int_a^b f(x) dx = f(\xi)(b-a). \qquad (12.1.13)$$

Геометрично це означає, що площа к/т дорівнює площі прямокутника з основою $(b-a)$ і висотою $f(\xi)$.

Зв'язок між ВІ і НІ. Формула Ньютона – Лейбніца

Важко не помітити, що позначення НІ і ВІ дуже схожі між собою, і відрізняються тільки наявністю у ВІ меж інтегрування. І це не випадково: не дивлячись на те, що **НІ** – **сім'я функцій**, а **ВІ** – **число**, між ними існує не *просто тісний*, а *дуже тісний*, зв'язок! Переконаємось у цьому за умови, що $f(x)$ на $[a, b]$ є неперервною функцією.

Залучимо геометричне тлумачення ВІ і введемо в розгляд допоміжну функцію $S(x)$, яка описує змінну площу к/т для $f(x)$ на відрізку $[a,x]$ (рис. 12.1.5), тобто

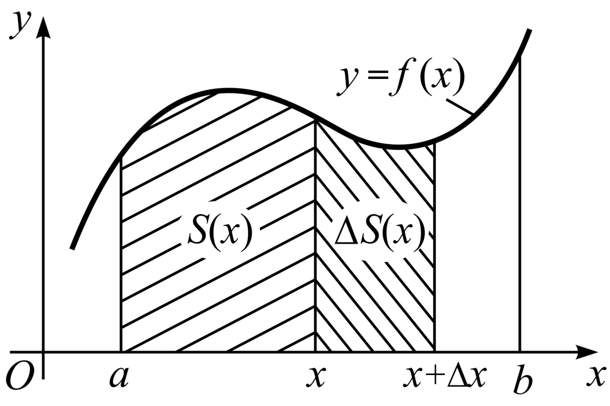


Рис. 12.1.5. **Змінна площа к/т**

$$S(x)=\int_a^x f(t)\,dt\,, \qquad (12.1.14)$$

де через t позначено змінну інтегрування, щоб не плутати її з аргументом функції $S(x)$. (ВІ як число не залежить від того, якою буквою позначити змінну інтегрування, *чому*?)

Зрозуміло, що $S(a)=0$, а $S(b)=\int_a^b f(x)dx$ – площа к/т на $[a,b]$.

Інтеграли виду (12.1.14) називають **ВІ зі змінною верхньою межею** (інтегрування).

Лема 12.1.1 (*про похідну ВІ зі змінною верхньою межею*). Функція $S(x)$ диференційовна на $[a,b]$ і її похідною є функція $f(x)$.

Д о в е д е н н я базується на означенні похідної (див. (9.1.1) частини 1), властивостях 8^0 (*теоремі про середнє*) і 5^0 (*про адитивність*) ВІ.

Надамо аргументові x приріст Δx, тоді функція $S(x)$ отримає приріст $\Delta S(x)$ (див. рис. 12.1.5):

$$\Delta S(x)=S(x+\Delta x)-S(x)=\int_a^{x+\Delta x} f(t)dt-\int_a^x f(t)dt=$$

$$=\int_a^x f(t)dt+\int_x^{x+\Delta x} f(t)dt-\int_a^x f(t)dt=\int_x^{x+\Delta x} f(t)dt.$$

Застосуємо до $\Delta S(x)$ теорему про середнє на відрізку $[x,x+\Delta x]$ і складемо його відношення до приросту Δx:

$$\Delta S(x)=\int_x^{x+\Delta x} f(t)dt=f(\xi)[(x+\Delta x)-x]=f(\xi)\Delta x \;\Rightarrow\; \frac{\Delta S(x)}{\Delta x}=f(\xi),$$

де $\xi\in[x,x+\Delta x]$.

При довільному прямуванні Δx до нуля існує границя правої частини отриманої рівності: $\lim\limits_{\Delta x \to 0} f(\xi) = f(x)$, бо умова $\Delta x \to 0$ тягне за собою умову $\xi \to x$. Це означає, що існує границя і лівої частини, тобто похідна функції $S(x)$:

$$\exists \lim_{\Delta x \to 0} f(\xi) = f(x) \Rightarrow \exists \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta S(x)}{\Delta x} = S'(x) = f(x). \qquad (12.1.15)$$

Отриманий результат можна сформулювати інакше: похідна ВІ зі змінною верхньою межею за цією змінною дорівнює підінтегральній функції, у якій змінна інтегрування t замінена верхньою межею інтегрування x:

$$S'(x) = \left(\int_a^x f(t)\,dt \right)'_x = f(x). \qquad (12.1.16)$$

Рівність $S'(x) = f(x)$ означає, функція $S(x)$ є однією з первісних для $f(x)$ на $[a, b]$, тому згідно з означенням НІ як однопараметричної сім'ї первісних маємо:

$$\int f(x)\,dx = F(x) + C \;\Rightarrow\; \int f(x)\,dx = \int_a^x f(t)\,dt + C. \qquad (12.1.17)$$

Формула (12.1.17) описує **зв'язок між ВІ і НІ**: НІ є сумою ВІ зі змінною верхньою межею і довільної дійсної сталої, або ВІ зі змінною верхньою межею є функцією, що породжує НІ.

Теорема 12.1.2 (*основна формула інтегрального числення*). Визначений інтеграл від $f(x)$ на $[a, b]$ є різницею вартостей однієї з первісних $F(x)$ у точках b і a:

$$I_a^b = \int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a), \text{ або } I_a^b = \int_a^b f(x)\,dx = F(x)\Big|_a^b, \qquad (12.1.18)$$

де $\Big|_a^b$ – **символ подвійної підстановки**: $F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a)$.

Д о в е д е н н я ґрунтується на співвідношенні (12.1.17). Воно дозволяє будь-яку первісну для функції $f(x)$ на $[a, b]$ записати у вигляді:

$$F(x)=\int_a^x f(t)dt+C\,.$$

Підставляючи замість x по черзі a і b, отримуємо (12.1.18):

$$\left[\begin{array}{l} x=a:\ F(a)=C, \\ x=b:\ F(b)=\int_a^b f(t)dt+C \end{array}\right. \Rightarrow \int_a^b f(t)dt=F(b)-F(a),$$

бо змінну інтегрування можна позначати будь-якою буквою.

Основна формула інтегрального числення носить назву **формули Ньютона – Лейбніца**: Ісаак Ньютон (1642 – 1727) – видатний англійський математик, механік, астроном і фізик; Готфрід Вільгельм Лейбніц (1646 – 1716) – знаний німецький математик, фізик і логік, які незалежно один від одного є творцями диференціального й інтегрального числення. Саме формула Ньютона – Лейбніца відображує *дуже тісний зв'язок* між НІ і ВІ. Обчислення ВІ за цією формулою зводиться до двох кроків:

1) *відшукання* однієї з первісних $F(x)$ для $f(x)$ на $[a, b]$ (по суті, це взяття НІ!);

2) *виконання* подвійної підстановки ($F(x)\Big|_a^b$ читається: еф від ікс з підстановкою від a до b).

Приклад. Обчислимо ВІ $I_0^{\pi/2}=\int_0^{\pi/2}\cos^2 x\,dx$:

1) $I=\int\cos^2 x\,dx=\frac{1}{2}\int(1+\cos 2x)dx=\frac{1}{2}\left(x+\frac{1}{2}\sin 2x\right)+C$;

2) $I_0^{\pi/2}=\frac{1}{2}\left(x+\frac{1}{2}\sin 2x\right)\Big|_0^{\pi/2}=\frac{1}{2}\left[\left(\frac{\pi}{2}+\frac{1}{2}\sin\pi\right)-\left(0+\frac{1}{2}\sin 0\right)\right]=\frac{\pi}{4}$.

Звичайно кроки 1), 2) здійснюють одним ланцюжком:

$$I_0^{\pi/2}=\int_0^{\pi/2}\cos^2 x\,dx=\frac{1}{2}\int_0^{\pi/2}(1+\cos 2x)dx=\frac{1}{2}\left(x+\frac{1}{2}\sin 2x\right)\Big|_0^{\pi/2}=\frac{\pi}{4}.$$

Відзначимо не мудровані *властивості подвійної підстановки*:

1) сталий множник можна виносити за знак подвійної підстановки:

$$(k\cdot\varphi(x))\Big|_a^b = k\cdot\varphi(x)\Big|_a^b, \text{ де } k-const,\ \varphi(x) \text{ – деяка функція;}$$

2) алгебраїчна сума функцій з подвійною підстановкою дорівнює сумі доданків з подвійною підстановкою:

$$(\varphi(x)\pm\psi(x))\Big|_a^b = \varphi(x)\Big|_a^b \pm \psi(x)\Big|_a^b.$$

(*Пропонуємо* відповідні обґрунтування навести самостійно.)

12.2. Методи визначеного інтегрування

Безпосереднє визначене інтегрування

Під **визначеним інтегруванням** будемо розуміти процес обчислення (взяття) ВІ. Аналізуючи порядок відшукання ВІ за формулою Ньютона – Лейбніца, узагалі образно можна висловитись так:

„визначене інтегрування = невизначене інтегрування + арифметика”.

Це означає, що принципових відмінностей у методах взяття НІ і ВІ немає, отож **безпосереднє визначене інтегрування** передбачає безпосереднє невизначене інтегрування (для відшукання однієї з первісних).

Приклад. Обчислимо ВІ $I_1^8 = \int\limits_1^8 \left(\sqrt{x}+\frac{1}{\sqrt[3]{x}}\right)^2 dx$:

$$I_1^8 = \int\limits_1^8 \left(x + 2\cdot\frac{x^{1/2}}{x^{1/3}} + \frac{1}{x^{2/3}}\right)dx = \int\limits_1^8 x\,dx + 2\int\limits_1^8 x^{1/6}\,dx + \int\limits_1^8 x^{-2/3}dx =$$

$$= \left(\frac{x^2}{2} + 2\cdot\frac{x^{7/6}}{7/6} + 3\cdot x^{1/3}\right)\Bigg|_1^8 = \frac{x^2}{2}\Bigg|_1^8 + \frac{12}{7}\cdot\left(x\cdot\sqrt[6]{x}\right)\Big|_1^8 + 3\cdot\sqrt[3]{x}\,\Big|_1^8 =$$

$$= \frac{1}{2}(64-1) + \frac{12}{7}\left(8\sqrt{2}-1\right) + 3(2-1) = \frac{1}{14}(459+192\sqrt{2}) \approx 52{,}2.$$

(*Скажіть*, яку з наведених ланок взяття ВІ можна вважати зайвою.)

Визначене інтегрування методом підстановки

Нагадаємо, що існує два види підстановки: $t=\varphi(x)$ і $x=\psi(t)$; нехай у ВІ $I_a^b=\int\limits_a^b f(x)dx$ проведена підстановка $x=\psi(t)$.

Теорема 12.2.1 (*про заміну змінної у ВІ*). Якщо:

1) функція $\psi(t)$ і її похідна $\psi'(t)$ неперервні на відрізку $[\alpha,\beta]$;

2) вартості $\psi(t)$ у точках α і β такі, що $\psi(\alpha)=a$ і $\psi(\beta)=b$;

3) зложена функція $f(\psi(t))$ неперервна на $[\alpha,\beta]$, то

$$\int\limits_a^b f(x)dx=\int\limits_\alpha^\beta f(\psi(t))d\psi(t). \tag{12.2.1}$$

Д о в е д е н н я ґрунтується на зв'язку між НІ і ВІ:

$$\int f(x)dx=F(x)+C \;\Rightarrow \int\limits_a^b f(x)dx=F(b)-F(a); \tag{12.2.2}$$

$$\int f(\psi(t))d\psi(t)=F(\psi(t))+C \;\Rightarrow \int\limits_\alpha^\beta f(\psi(t))d\psi(t)=$$

$$=F(\psi(t))\Big|_\alpha^\beta=F(\psi(\beta))-F(\psi(\alpha))=F(b)-F(a). \tag{12.2.3}$$

Зіставляючи (12.2.2) і (12.2.3), отримуємо справедливість (12.2.1).

Підстановка $t=\varphi(x)$ у разі існування оберненої до $\varphi(x)$ функції зводиться до розглянутої: $t=\varphi(x)\Rightarrow x=\varphi^{-1}(t)=\psi(t)$ (*подумайте*, як поступити коли обернена до $\varphi(x)$ на $[a,b]$ функція не існує).

У світлі теореми 12.2.1 *наголошуємо: при взятті ВІ методом підстановки немає потреби вертання до вихідної змінної, замість цього треба не забувати знаходити межі інтегрування за новою змінною*.

Приклади:

1) $I_0^a=\int\limits_0^a\sqrt{a^2-x^2}\,dx=\left|\begin{array}{l} x=a\cos t \;\Rightarrow\; dx=-a\sin t\,dt \\ \underbrace{\sqrt{a^2-x^2}=a\sin t,\quad \begin{array}{c|c|c} x & 0 & a \\ \hline t & \pi/2 & 0 \end{array}}_{\text{нова змінна і межі її змінювання}} \end{array}\right|=$

$$= \underbrace{-a^2\int\limits_{\pi/2}^{0}\sin^2 t\,dt}_{\text{здійснення переходу до нової змінної}} = \frac{a^2}{2}\int\limits_0^{\pi/2}(1-\cos 2t)\,dt = \underbrace{\frac{a^2}{2}\left(t-\frac{1}{2}\sin 2t\right)\Bigg|_0^{\pi/2}}_{\text{первісна із підстановкою від 0 до }\pi/2} = \frac{\pi a^2}{4};$$

2) $$I_0^1 = \int\limits_0^1 x^2 e^{x^3}dx = \left|\begin{array}{ll} t = x^3, & \begin{array}{c|c|c} x & 0 & 1 \\ \hline t & 0 & 1 \end{array} \\ dt = 3x^2dx, & \end{array}\right| = \frac{1}{3}\cdot\int\limits_0^1 e^t dt =$$

$$= \frac{1}{3}\cdot e^t\Big|_0^1 = \frac{1}{3}\cdot(e-1) \approx 0{,}57.$$

Чи можна було при взятті I_0^1 *обійтися* без заміни змінної? За якою з підстановок, $t=\varphi(x)$ чи $x=\psi(t)$, *легше знаходити* межі інтегрування за новою змінною?

Визначене інтегрування частинами

Теорема 12.2.2 (*формула інтегрування частинами для ВІ*). Якщо у ВІ $I_a^b = \int\limits_a^b f(x)dx$ підінтегральний вираз подано у вигляді добутку $u\cdot dv$, де $u=u(x)$ і $v=v(x)$ – диференційовні на відрізку $[a,b]$ функції, то справедливе співвідношення:

$$\int\limits_a^b u\,dv = uv\Big|_a^b - \int\limits_a^b v\,du. \tag{12.2.4}$$

Д о в е д е н н я ґрунтується на формулі інтегрування частинами для НІ (див. (11.2.7)) і зв'язку між НІ і ВІ зі змінною верхньою межею (12.1.17): $\int u\,dv = \int d(uv) - \int v\,du$, $\int f(x)dx = \int\limits_a^x f(t)dt + C$.

Дійсно, із (11.2.7) з урахуванням (12.1.17) отримуємо:

$$\int\limits_a^x u\,dv = \int\limits_a^x d(uv) - \int\limits_a^x v\,du,$$

і поклавши $x=b$, приходимо до (12.2.4).

Зауваження. Якщо межі інтегрування симетричні відносно нуля, то для спрощення обчислювальної роботи при взятті ВІ доцільно враховувати парність і непарність підінтегральної функції, бо:

$$f(x) \text{ – парна функція } \Rightarrow \int_{-a}^{a} f(x)dx = 2\cdot\int_{0}^{a} f(x)dx,$$

$$f(x) \text{ – непарна функція } \Rightarrow \int_{-a}^{a} f(x)dx = 0.$$

(*Обґрунтуйте*, спираючись на формулу Ньютона – Лейбніца.)

Приклад. Обчислити $I_{-\pi/3}^{\pi/3} = \int\limits_{-\pi/3}^{\pi/3} \frac{x\sin x}{\cos^2 x}dx$.

Підінтегральна функція є парною, тобто $f(-x) = f(x)$, тому

$$\frac{I}{2} = I_0^{\pi/3} = \int_0^{\pi/3} \frac{x\sin x}{\cos^2 x}dx = \left| \begin{array}{ccc} u = x & \Rightarrow & du = dx \\ dv = \dfrac{\sin x}{\cos^2 x}dx & \Rightarrow & v = \dfrac{1}{\cos x} \end{array} \right| =$$

$$= uv\Big|_0^{\pi/3} - \int_0^{\pi/3} vdu = \frac{x}{\cos x}\Bigg|_0^{\pi/3} - \int_0^{\pi/3} \frac{dx}{\cos x} = \frac{\pi}{3\cos(\pi/3)} - \ln tg\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\Bigg|_0^{\pi/3} =$$

$$= \frac{2\pi}{3} - \ln tg\left(\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{4}\right) + \ln tg\frac{\pi}{4} = \frac{2\pi}{3} - \ln\, tg\frac{5\pi}{12} \approx 1{,}56 \;\Rightarrow\; I \approx 3{,}12.$$

12.3. Невластиві інтеграли. Інтеграл Ейлера – Пуассона

Поняття „невластиві інтеграли” (НВІ) пов’язане з порушенням умов теореми 12.1.1 (*існування ВІ*).

Будемо розглядати:

1) замість відрізка $[a, b]$ нескінченні півінтервал $(-\infty, b]$, півсегмент $[a, +\infty)$, інтервал $(-\infty, +\infty) = \mathbf{R}$; або

2) замість неперервної чи обмеженої, зі скінченним числом розривів підінтегральної функції, функцію з нескінченними розривами – розривами 2-го роду.

НВІ на нескінченних проміжках – першого типу (***НВІ-1***)

Нехай функція $y = f(x)$ неперервна на півсегменті $[a, +\infty)$. Тоді вона інтегровна на будь-якому відрізку $[a, \beta] \subset [a, +\infty)$, тобто існує ВІ від $f(x)$ на $[a, \beta]$: $I_a^\beta = \int\limits_a^\beta f(x)\,dx = F(x)\Big|_a^\beta$, де $F'(x) = f(x)$.

НВІ-1 функції $f(x)$ на проміжку $[a, +\infty)$ називається границя ВІ I_a^β за умови, що верхня межа інтегрування необмежено зростає, тобто

$$\int\limits_a^{+\infty} f(x)\,dx = \lim_{\beta \to +\infty} \int\limits_a^\beta f(x)\,dx \quad \text{(коротко: } I_a^{+\infty} = \lim_{\beta \to +\infty} I_a^\beta\text{).} \qquad (12.3.1)$$

Якщо границя $\lim\limits_{\beta \to +\infty} I_a^\beta$ скінченна (нескінченна або зовсім не існує), то НВІ-1 називається **збіжним** (**розбіжним**), або кажуть: НВІ-1 **збігається** (**розбігається**), і позначають: $I_a^{+\infty} \rightarrowtail$ ($I_a^{+\infty} \leftarrowtail$).

Співвідношення (12.3.1) з урахуванням формули Ньютона – Лейбніца запишеться так:

$$\int\limits_a^{+\infty} f(x)\,dx = \lim_{\beta \to +\infty} F(x)\Big|_a^\beta = \lim_{\beta \to +\infty} F(\beta) - F(a) = F(+\infty) - F(a). \qquad (12.3.2)$$

Отже, **загальний порядок** відшукання НВІ-1 $I_a^{+\infty}$ складається з двох кроків:

1) *обчислюємо* ВІ від $f(x)$ на $[a, \beta]$, де β – змінна верхня межа інтегрування;

2) знаходимо границю ВІ I_a^β при прямуванні β до плюс нескінченності (будемо писати ∞, пропускаючи знак $+$).

Якщо реалізація кроків 1), 2) відносно проста, то їх здійснюють ланцюжком.

У разі, коли досліджувана функція на $[a, +\infty)$ приймає невід'ємні значення, спираючись на геометричний смисл визначеного інтеграла, отримуємо відповідне тлумачення поняттям „збіжність”, „розбіжність”.

Приклад. Знайти НВІ-1 $I_1^{\infty} = \int\limits_1^{\infty} x^k dx$, де $k = -1,\ -2$.

$$k = -1:\ I_1^{\infty} = \lim_{\beta\to\infty} \int\limits_1^{\beta} \frac{1}{x} dx = \lim_{\beta\to\infty} \ln|x|\,\Big|_1^{\beta} = \lim_{\beta\to\infty} (\ln\beta - \ln 1) = \infty \Rightarrow I_1^{\infty} \lessdot;$$

$$k = -2:\ I_1^{\infty} = \lim_{\beta\to\infty} \int\limits_1^{\beta} \frac{1}{x^2} dx = -\lim_{\beta\to\infty} \frac{1}{x}\Big|_1^{\beta} = -\lim_{\beta\to\infty}\left(\frac{1}{\beta} - 1\right) = 1 \Rightarrow I_1^{\infty} \gtrdot.$$

Геометричне тлумачення отриманих результатів: якщо $k = -1$ $(k = -2)$, то площа к/т для $f(x) = 1/x$ ($f(x) = 1/x^2$) на півсегменті $[a, \infty)$ є нескінченно великою (обмеженою, і збігається до одиниці).

Аналогічним чином дають означення НВІ-1 на проміжках $(-\infty, b]$, $(-\infty, +\infty)$, а саме:

$$\int\limits_{-\infty}^{b} f(x)dx = \lim_{\alpha\to-\infty} \int\limits_{\alpha}^{b} f(x)dx \quad \left(I_{-\infty}^{b} = \lim_{\alpha\to-\infty} I_{\alpha}^{b}\right), \tag{12.3.3}$$

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \lim_{\substack{\alpha\to-\infty \\ \beta\to+\infty}} \int\limits_{\alpha}^{\beta} f(x)dx \quad \left(I_{-\infty}^{+\infty} = \lim_{\substack{\alpha\to-\infty \\ \beta\to+\infty}} I_{\alpha}^{\beta}\right). \tag{12.3.4}$$

(*Пропонуємо* словесне формулювання навести самостійно.)

Взяття НВІ-1 $I_{-\infty}^{+\infty}$ звичайно зводять до обчислення НВІ-1 $I_{-\infty}^{c}$ і $I_{c}^{+\infty}$, де c – якась дійсна стала (найчастіше беруть $c = 0$):

$$I_{-\infty}^{+\infty} = I_{-\infty}^{c} + I_{c}^{+\infty} \quad (I_{-\infty}^{+\infty} = I_{-\infty}^{0} + I_{0}^{+\infty}). \tag{12.3.5}$$

Інтеграл $I_{-\infty}^{+\infty}$ називається **збіжним**, якщо обидва інтеграли: $I_{-\infty}^{c}$, $I_{c}^{+\infty}$, збігаються, і **розбіжним**, якщо хоча б один із них розбігається.

Якщо відшукання первісної для обчислення ВІ громіздке (викликає утруднення) або відповідний НІ не береться у скінченному вигляді (див. п. 11.3), то для установлення збіжності чи розбіжності НВІ-1 застосовують так звані **ознаки порівняння**, які є наслідками властивості 6^0 (*про перехід до ВІ у нерівностях*) (див. (12.1.10)).

Ознака порівняння для НВІ-1 (*у формі нерівностей*):

1) якщо невід'ємні функції $f(x)$, $g(x)$ інтегровні на будь-якому сегменті $[a,\beta]$ і виконується умова: $f(x)\le g(x)$, то на півсегменті $[a,\infty)$ із збіжності НВІ-1 від $g(x)$ випливає збіжність НВІ-1 від $f(x)$:

$$\left.\begin{matrix} 0\le f(x)\le g(x) \\ \forall x\in[a,\beta] \end{matrix}\right]:\ \int_{\alpha}^{\infty} g(x)dx \succ\ \Rightarrow\ \int_{\alpha}^{\infty} f(x)dx \succ; \tag{12.3.6}$$

функцію $g(x)$ називають **мажорантою** для $f(x)$ (від лат. major – більший);

2) $$\left.\begin{matrix} f(x)\ge g(x)\ge 0 \\ \forall x\in[a,\beta] \end{matrix}\right]:\ \int_{\alpha}^{\infty} g(x)dx \prec\ \Rightarrow\ \int_{\alpha}^{\infty} f(x)dx \prec; \tag{12.3.7}$$

функцію $g(x)$ називають **мінорантою** для $f(x)$. (Словесне формулювання *пропонуємо* навести самостійно.)

У якості міноранти чи мажоранти часто беруть степеневу функцію $g(x)=x^{-k}$, де $k\in\mathbf{R}$, $x\in(0,+\infty)$ (рис.12.3.1); відповідні НВІ-1 $\int_1^{\infty} g(x)dx$ називають **еталонними**:

$$\int_1^{\infty} x^{-k}dx=\left.\frac{x^{-k+1}}{-k+1}\right|_1^{\infty}=\left[\begin{matrix} \frac{1}{k-1}, & k>1 & \Rightarrow & I_1^{\infty}\succ, \\ \infty, & k<1 & \Rightarrow & I_1^{\infty}\prec; \end{matrix}\right. \tag{12.3.8}$$

$$k=1:\ \int_1^{\infty} x^{-1}dx=\ln|x|\Big|_1^{\infty}=\ln\infty-\ln 1=\infty\ \Rightarrow\ I_1^{\infty}\prec.$$

Приклад. Для функції $f(x)=2x+\cos^{10}x\ \ \forall x\in[1,\infty)$ мінорантою є функція $g(x)=x^0=1$. Оскільки НВІ $\int_1^{\infty} dx\prec$, тому і $\int_1^{\infty}\left(2x+\cos^{10}x\right)dx\prec$.

(*Обміркуйте*, чи існує мажоранта для функції $f(x)$ на $[1,\infty)$; *зобразіть* схематично кілька графіків для $k<0$.)

Буває таке, що при обчисленні ВІ методом підстановки нескінченний проміжок інтегрування за змінною x відображується у скінченний відрізок інтегрування за новою змінною t, тобто НВІ-1 зводиться до ВІ.

Наприклад, обчислимо НВІ-1

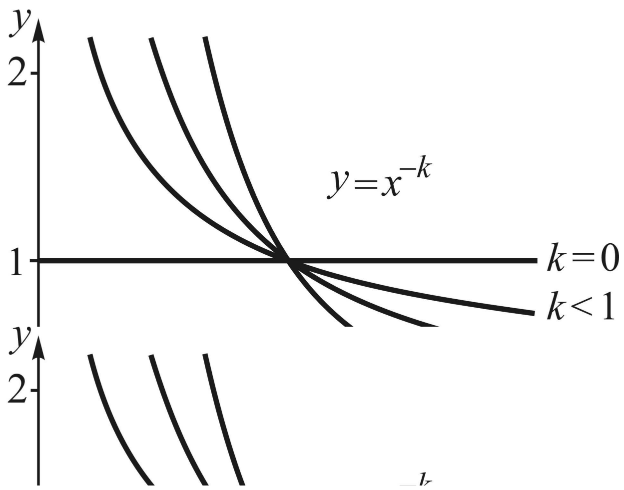


Рис. 12.3.1. **Графіки функції $y = x^{-k}$ для різних k**

$$I_{-\infty}^{\pi/4} = \int\limits_{-\infty}^{\pi/4} \frac{arctg^2 x}{1+x^2}dx =$$

$$= \left| \begin{array}{l} t = arctgx \\ dt = \dfrac{dx}{1+x^2} \end{array} \quad \frac{x}{t}\bigg|\frac{-\infty}{-\pi/2}\bigg|\frac{\pi/4}{1} \right| = \int\limits_{-\pi/2}^{1} t^2 dt = \frac{1}{3}t^3\Big|_{-\pi/2}^{1} = \frac{1}{3}\left(1+\frac{\pi^3}{8}\right) \approx 1{,}63.$$

Ознака порівняння для НВІ-1 (*у граничній формі*): якщо невід'ємні функції $f(x)$, $g(x)$ інтегровні на будь-якому проміжку $[a,\beta]$ і існує відмінна від нуля скінченна границя їх відношення, то інтеграли для $f(x)$ і $g(x)$ на $[a,\infty)$ збігаються або розбігаються одночасно:

$$\left[\begin{array}{c} \exists \lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f(x)}{g(x)} = p - const \\ (p \neq 0,\ p \neq \infty) \end{array}\right] \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \int\limits_{a}^{\infty} g(x)dx \rightrightarrows \ \Leftrightarrow \ \int\limits_{\alpha}^{\infty} f(x)dx \rightrightarrows; \\ \int\limits_{a}^{\infty} g(x)dx \leftleftarrows \ \Leftrightarrow \ \int\limits_{a}^{\infty} f(x)dx \leftleftarrows. \end{array}\right. \qquad (12.3.9)$$

Приклад. Дослідимо на збіжність невластивий інтеграл $\int\limits_{1}^{\infty}\dfrac{dx}{x^5+5x}$.

Еталонний інтеграл (12.3.8) при $k>1$ збігається, отже, збіжним є інтеграл $\int\limits_{1}^{\infty} x^{-5}dx$. Порівняємо функції $f(x)=\dfrac{1}{x^5+5x}$ і $g(x)=\dfrac{1}{x^5}$ за ознакою (12.3.9):

$$p = \lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to\infty}\frac{x^5}{x^5+5x} = \left(\frac{\infty}{\infty}\right) = 1 \neq 0 \ \Rightarrow \int\limits_{1}^{\infty}\frac{dx}{x^5+5x} \rightrightarrows.$$

Одним із прикладів збіжного НВІ-1, який відіграє важливу роль у теорії ймовірностей і математичній статистиці, є **інтеграл Ейлера – Пуассона** від функції $f(x)=e^{-x^2/2}$ на $\mathbf{R}$ (рис. 12.3.2):

$$I_{-\infty}^{+\infty}=\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2/2}dx=\sqrt{2\pi}. \qquad (12.3.10)$$

(Сімеон Пуассон (1781 – 1830) – відомий французький механік і математик.)

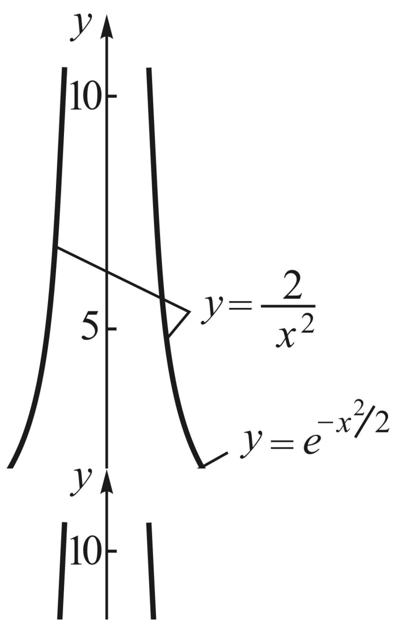


Рис. 12.3.2. **Графіки функції $y=e^{-x^2/2}$ і $y=2/x^2$**

При необмеженому збільшенні проміжку інтегрування площа відповідної к/т залишається величиною обмеженою, прямуючою до $\sqrt{2\pi}$.

Числове значення цього інтеграла підтвердимо пізніше, при вивченні функцій кількох змінних, а зараз за допомогою ознаки порівняння покажемо, що НВІ-1 (12.3.10) збігається.

В силу парності підінтегральної функції маємо:

$$I_{-\infty}^{+\infty}=2\int\limits_{0}^{+\infty} e^{-x^2/2}dx.$$

У якості мажоранти виберемо $g(x)=2/x^2$ (див. рис. 12.3.2). На проміжку $[1,\infty)$ виконується нерівність: $0<\dfrac{1}{e^{x^2/2}}<\dfrac{2}{x^2}$, тому на ньому можна використати ознаку (12.3.6) і еталони (12.3.8):

$$\int\limits_{1}^{+\infty}\frac{2}{x^2}dx=-\frac{2}{x}\Big|_{1}^{+\infty}=-2\left(\frac{1}{\infty}-1\right)=2 \;\Rightarrow\; \int\limits_{1}^{+\infty}\frac{2}{x^2}dx \succ \;\Rightarrow\; \int\limits_{1}^{+\infty}e^{-\frac{x^2}{2}}dx \succ.$$

На не врахованому відрізку $[0,1]$ $\left([0,\infty)=[0,1]\cup[1,\infty)\right)$ значення інтеграла від $f(x)=e^{-x^2/2}$ є скінченним (*обміркуйте*, *чому?*).

У попередніх теоремах розглядалися невластиві інтеграли від невід'ємних функцій. Для знакозмінної функції $f(x)$ на нескінченному проміжку справедлива наступна теорема.

Теорема 12.3.1 (*про абсолютну збіжність НВІ-1*). Якщо невластивий інтеграл від модуля знакозмінної функції збігається, то збігається і інтеграл від самої функції:

$$\int_a^{\infty} |f(x)|\,dx \succ \;\Rightarrow\; \int_a^{\infty} f(x)\,dx \succ \left(\int_{-\infty}^{b} |f(x)|\,dx \succ \;\Rightarrow\; \int_{-\infty}^{b} f(x)\,dx \succ \right).$$

У цьому випадку невластивий інтеграл від $f(x)$ на $[a,\infty)$ чи на $(-\infty, b]$ називається **абсолютно збіжним**.

Приклад. Дослідимо на збіжність невластивий інтеграл $\int_1^{\infty} \frac{\sin x^3}{x^3}dx$.

Функція $\sin x^3 / x^3$ знакозмінна, бо знакозмінним при додатних x є чисельник $\sin x^3$. Розглянемо НВІ-1 від модуля заданої функції: $y = \left|\sin x^3\right| / x^3$ (рис. 12.3.3), яку образно назвемо **„безліченогою"**.

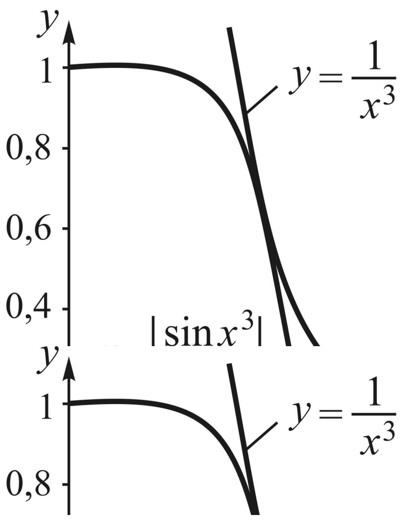


Рис. 12.3.3. **Графіки „безліченогої" та її мажоранти**

Порівняємо модуль заданої функції з функцією $y = 1/x^3$:

$$\frac{\left|\sin x^3\right|}{x^3} \le \frac{1}{x^3}, \text{ бо } \left|\sin x^3\right| \le 1.$$

Таким чином, функція $y = 1/x^3$ є мажорантою „безліченогої" (див. рис. 12.3.5)). Оскільки за ознакою (12.3.8) інтеграл $\int_1^{\infty} \frac{1}{x^3}dx$ збігається, то збіжним, і до того ж абсолютно, є заданий інтеграл.

Невластиві інтеграли застосовуються при математичному описуванні інформаційних сигналів.

Одинична імпульсна функція (δ-функція Дірака):

$$y = \delta(t) = \begin{bmatrix} +\infty, & t = 0, \\ 0, & t \neq 0 \end{bmatrix}$$ (див. рис. 8.3.4 частини 1),

подається через НВІ-1 у вигляді:

$$\delta(t-\tau) = 0,\ t \neq \tau; \quad \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t-\tau)\, dt = 1,$$

де τ – довільний дійсний параметр.

Якщо $f(t)$ – деяка сигнальна функція, то $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \cdot \delta(t-\tau) dt = f(\tau)$.

Дельта-функція є корисною математичною абстракцією. На практиці такі функції не можуть бути реалізовані з абсолютною точністю, оскільки неможливо реалізувати значення, рівне нескінченності, у точці $t = \tau$ на аналоговій тимчасовій шкалі, тобто визначеної за часом також з нескінченною точністю. Але у всіх випадках, коли площа прямокутного імпульсу дорівнює 1 (див. рис. 8.3.5 частини 1), а реакція системи на імпульс у багато разів більше тривалості самого імпульсу, вхідний сигнал можна вважати одиничною імпульсною функцією із властивостями дельта-функції.

НВІ від необмежених функцій – другого типу (***НВІ-2***)

Нехай $f(x)$ на $[a,b]$ має скінченне число розривів 2-го роду – нескінченних розривів (див. п. 8.3 частини 1). Це означає, що односторонніми границями $f(x)$ у точках розриву є невластиві числа: $-\infty$, $+\infty$, тобто при наближенні до точок розриву $f(x)$ необмежено спадає або зростає. Назвемо такі точки **особливими точками**.

На сегменті $[a,b]$ особливою точкою (позначимо її через c^0) може бути (рис. 12.3.4): а) лівий кінець відрізка ($c^0 = a$); б) правий кінець відрізка ($c^0 = b$); в) внутрішня точка сегмента $\left(c^0 = c \in (a,b)\right)$.

В *геометричному смислі* пряма $x = c^0$ є вертикальною асимптотою графіка функції $f(x)$.

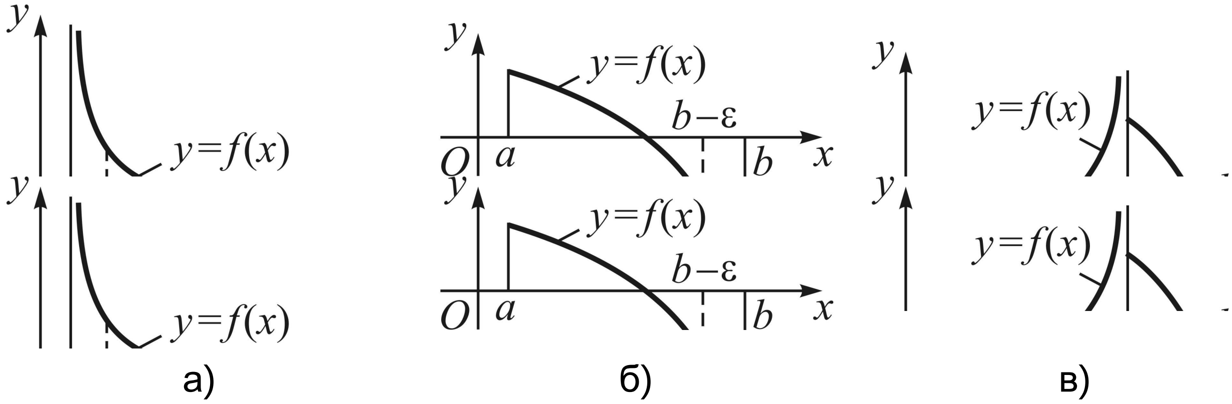


Рис. 12.3.4. **Особливі точки: а) $\boldsymbol{c^0 = a}$; б) $\boldsymbol{c^0 = b}$; в) $\boldsymbol{c^0 \in (a,b)}$**

Щоб уникнути „непорозумінь", пов'язаних з необмеженістю функції при наближенні до особливої точки, поступають так: вибирають деяке $\varepsilon > 0$, відступають вправо чи вліво від c^0 на величину ε, і розглядають відповідно відрізки $[a+\varepsilon, b]$, $[a, b-\varepsilon]$, $[a,\ c-\varepsilon]$ (див. рис. 12.3.4-а, б, в). На цих відрізках підінтегральна функція обмежена і неперервна, а значить, існують ВІ $I_{a+\varepsilon}^{b}$, $I_a^{b-\varepsilon}$, $I_a^{b-\varepsilon}$.

НВІ-2 функції $\boldsymbol{f(x)}$ на проміжку $\boldsymbol{[a,b]}$, де a – особлива точка, називається границя ВІ $I_{a+\varepsilon}^{b}$ за умови, що ε прямує до нуля:

$$\int_a^b f(x)dx = \left| a = c^0 \right| = \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{a+\varepsilon}^{b} f(x)dx \quad \left(I_a^b = \lim_{\varepsilon \to 0} I_{a+\varepsilon}^{b} \right). \qquad (12.3.11)$$

Аналогічно (формулювання *наведіть* самостійно):

$$\int_a^b f(x)dx = \left| b = c^0 \right| = \lim_{\varepsilon \to 0} \int_a^{b-\varepsilon} f(x)dx \quad \left(I_a^b = \lim_{\varepsilon \to 0} I_a^{b-\varepsilon} \right). \qquad (12.3.12)$$

$$\int_a^b f(x)dx = \left| c^0 \in (a,b) \right| = \lim_{\varepsilon \to 0} \int_a^{c^0-\varepsilon} f(x)dx + \int_{c^0}^{b} f(x)dx, \qquad (12.3.13)$$

тобто якщо $c^0 \in (a,b)$, то інтеграл на всьому проміжку $[a,b]$ визначається як сума НВІ і ВІ:

$$I_a^b = I_a^{c^0} + I_{c^0}^{b}.$$

У випадках, коли пряма $x = c^0$ є асимптотою для $f(x)$ при наближенні до c^0 зліва і справа, ВІ розглядають відповідно на відрізках $[a,\, c^0 - \varepsilon_1]$, $[c^0 + \varepsilon_2,\, b]$.

Наприклад, у $I_0^2 = \int\limits_0^2 2x \ln|x-1|\, dx$ аналіз підінтегральної функції (рис. 12.3.5) показує: $c^0 = 1$, бо $\lim\limits_{x \to 1 \pm 0} \ln|x-1| = -\infty$; $f(0) = f(2) = 0$. Отже, $I_0^2 = I_0^1 + I_1^2 = \lim\limits_{\varepsilon_1 \to 0} I_0^{1-\varepsilon_1} + \lim\limits_{\varepsilon_2 \to 0} I_{1+\varepsilon_2}^2$. (*Переконайтеся*, що $I_0^2 = -2.$)

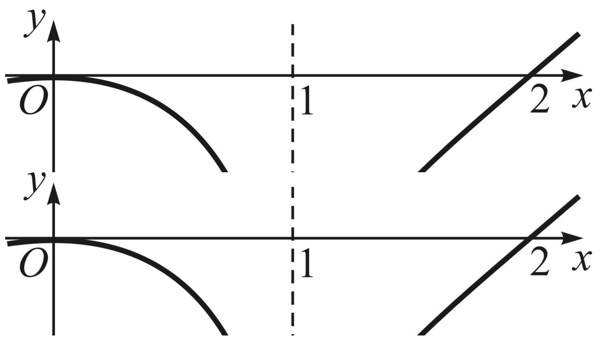


Рис. 12.3.5. **Графік підінтегральної функції**

Порядок обчислення НВІ-2 принципово нічим не відрізняється від порядку взяття НВІ-1: „обчислення ВІ + відшукання границі”.

У загальному випадку проміжок інтегрування може бути нескінченним і таким, що міститиме точки розриву $f(x)$ 1-го і 2-го роду, проте наведених відомостей достатньо для взяття відповідного інтеграла.

Для спрощення взяття НВІ-2, як і для НВІ-1, використовують *ознаки порівняння*.

Ознака порівняння для НВІ-2 (*у формі нерівностей*):

1) якщо інтегровні на проміжку $(a, b]$ невід'ємні функції $f(x)$, $g(x)$ мають особливість у точці $x = a$, і виконується умова: $f(x) \le g(x)$, то на сегменті $[a, b]$ із збіжності інтеграла від $g(x)$ випливає збіжність інтеграла від $f(x)$:

$$\left.\begin{matrix} 0 \le f(x) \le g(x) \\ \forall x \in (a,b];\ a = c^0 \end{matrix}\right]: \ \int\limits_a^b g(x)dx \succ \ \Rightarrow \ \int\limits_a^b f(x)dx \succ; \qquad (12.3.14)$$

2) $$\left.\begin{matrix} f(x) \ge g(x) \ge 0 \\ \forall x \in (a,b];\ a = c^0 \end{matrix}\right]: \ \int\limits_a^b g(x)dx \prec \ \Rightarrow \ \int\limits_a^b f(x)dx \prec. \qquad (12.3.15)$$

(Словесне формулювання *пропонуємо* навести самостійно.)

Аналогічне твердження має місце у випадку, коли $b = c^0$ – особлива точка.

В якості еталонних часто беруть невластиві інтеграли від степеневих функцій:

$$\int_0^1 x^{-k} dx \text{ і його узагальнення: } \int_a^b \frac{dx}{(x-a)^k}; \quad \int_a^b \frac{dx}{(b-x)^k}, \; k \in \mathbf{R} \setminus \{1\}. \qquad (12.3.16)$$

Для першого і другого еталонних інтегралів особливою точкою є нижня межа інтегрування, а для третього – верхня межа.

Проведемо дослідження на збіжність першого із (12.3.16) інтеграла:

$$\int_0^1 x^{-k} dx = \left. \frac{x^{-k+1}}{-k+1} \right|_0^1 = \left[\begin{array}{ll} \frac{1}{1-k}, & k<1 \;\Rightarrow\; I_0^1 \succ, \\ \infty, & k>1 \;\Rightarrow\; I_0^1 \prec; \end{array} \right.$$

$$k=1: \int_0^1 x^{-1} dx = \ln|x| \Big|_0^1 = \ln 1 - \ln 0 = \infty \;\Rightarrow\; I_0^1 \prec. \qquad (12.3.17)$$

Висновок. Невластивий інтеграл 2-го роду $\int_0^1 x^{-k} dx$ збігається при $k<1$ і розбігається при $k \geq 1$.

Аналогічно отримуємо:

$$a \text{ – особлива точка } \Rightarrow \int_a^b \frac{dx}{(x-a)^k}: \left[\begin{array}{l} k<1 \Rightarrow I_a^b \succ, \\ k \geq 1 \Rightarrow I_a^b \prec; \end{array} \right.$$

$$b \text{ – особлива точка } \Rightarrow \int_a^b \frac{dx}{(b-x)^k}: \left[\begin{array}{l} k<1 \Rightarrow I_a^b \succ, \\ k \geq 1 \Rightarrow I_a^b \prec. \end{array} \right. \qquad (12.3.18)$$

Приклад. Дослідимо на збіжність інтеграл $I_1^3 = \int_1^3 \frac{dx}{4-\sqrt{x^2+7}}$.

Функція $y = \frac{1}{4-\sqrt{x^2+7}}$ неперервна, додатна на проміжку $[1,3)$ (*переконайтеся!*), необмежено зростає при $x \to 3$. Для неї справедлива

нерівність: $\dfrac{1}{4-\sqrt{x^2+7}} > \dfrac{1}{3-x}$. НВІ-2 $\int\limits_1^3 \dfrac{dx}{3-x}$ є еталонним інтегралом 2-го типу, який при $k=1$ (див. (12.3.18)) розбігається, тому за ознакою порівняння (12.3.15) досліджуваний інтеграл є розбіжним.

Ознака порівняння для НВІ-2 (*у граничній формі*): якщо невід'ємні функції $f(x)$ і $g(x)$ інтегровні на проміжку $[a,b)$, мають особливість у точці $x=b$, і існує відмінна від нуля скінченна границя їх відношення, то інтеграли для $f(x)$ і $g(x)$ на $[a,b]$ збігаються або розбігаються одночасно:

$$\left.\begin{matrix} \exists \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{f(x)}{g(x)} = k - const \\ (k \neq 0,\ k \neq \infty),\ b = c^0 \end{matrix}\right] \Rightarrow \left[\begin{aligned} &\int\limits_a^b g(x)dx \gtrdot \ \Leftrightarrow \ \int\limits_a^b f(x)dx \gtrdot, \\ &\int\limits_a^b g(x)dx \lessdot \ \Leftrightarrow \ \int\limits_a^b f(x)dx \lessdot. \end{aligned}\right. \qquad (12.3.19)$$

Аналогічне твердження має місце у випадку, коли $a = c^0$.

Приклад. Дослідимо на збіжність інтеграл $I_0^1 = \int\limits_0^1 \dfrac{\sin x^2}{x^3} dx$.

Функція $f(x) = \dfrac{\sin x^2}{x^3}$ неперервна, додатна на проміжку $(0,1]$, необмежено зростає при $x \to 0$. Виберемо $g(x) = 1/x$ і знайдемо границю їх відношення:

$$k = \lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin x^2}{x^3} : \frac{1}{x}\right) = \lim_{x\to 0} \frac{\sin x^2}{x^2} = \left(\frac{0}{0}\right) = 1 \neq 0 \ \Rightarrow \ I_0^1 \lessdot.$$

12.4. Застосування ВІ: геометричні, фізичні, економічні

До розв'язання задач на застосування ВІ в різних галузях знань можливі два підходи:

1) *за означенням*, тобто виконують стандартну процедуру: розбиття відрізка інтегрування, …, складання інтегральної суми, здійснення граничного переходу;

2) *на основі зв'язку між НІ і ВІ*, тобто відштовхуються від первісної і залучають формулу Ньютона – Лейбніца. При такому підході установ-

люють диференціал досліджуваної величини (характеристики) як функції належного аргументу, і тоді шукана величина (нехай це буде H) виражатиметься інтегралом від цього диференціала на заданому проміжку інтегрування:

$$\left.\begin{matrix}\forall\, x\in[a,b]: \\ dH(x)=H'(x)dx\end{matrix}\right] \Rightarrow H=\int_a^b dH(x)=H(x)\Big|_a^b=H(b)-H(a). \qquad (12.4.1)$$

У плані реалізації цей підхід (надалі – схема (12.4.1)) є ефективнішим і простішим за викладом.

Нагадаємо, що для диференційовної на $[a,b]$ функції $f(x)$ її диференціал dy відрізняється від приросту Δy на н/м $\alpha(\Delta x)$ більш високого порядку, ніж приріст аргументу Δx, при $\Delta x\to 0$:

$$\Delta y=dy+\alpha(\Delta x)\ \Rightarrow\ \Delta y-dy=\alpha(\Delta x), \qquad (12.4.2)$$

де $\alpha(\Delta x)$ може бути і додатною, і від'ємною величиною.

Геометричні застосування ВІ

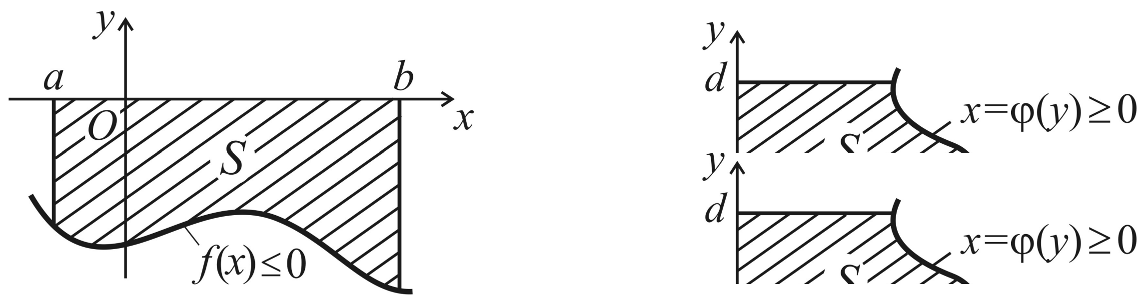
І. Обчислення площі плоскої фігури *в декартових координатах* спирається на геометричний смисл ВІ (див. (12.1.4)) і операції над множинами (див. п. 6.1 частини 1).

Відзначимо: а) якщо на $[a,b]$ $f(x)\le 0$ (рис. 12.4.1-а), то ВІ від $f(x)$ на $[a,b]$ матиме від'ємний знак, і тоді площа к/т – це ВІ з протилежним знаком:

$$S=-\int_a^b f(x)dx,\ \text{або}\ S=\left|\int_a^b f(x)dx\right|; \qquad (12.4.3)$$

б) якщо розглядається к/т з основою $[c,d]$ на Oy (рис. 12.4.1-б), то відповідна дуга кривої повинна описуватись функцією виду $x=\varphi(y)$, де в якості аргументу виступає змінна y, і тоді

$$S=\int_c^d x\,dy=\int_c^d \varphi(y)dy. \qquad (12.4.4)$$



а) б)

Рис. 12.4.1. **Криволінійні трапеції для:**
а) $f(x) \leq 0$ на $[a, b]$; б) $\varphi(y) \geq 0$ на $[c, d]$

(*Наведіть* самостійно геометричне зображення к/т $\varphi(y) \leq 0$ на $[c, d]$; *укажіть*, чому дорівнює її площа.)

З теоретико-множинної точки зору к/т і будь-яка інша плоска фігура є підмножинами множин точок координатної площини xOy; при цьому к/т являють собою своєрідні „цеглинки", з яких за допомогою операцій над множинами, $\bigcup$ і $\setminus$, будуються більш складні плоскі фігури Φ.

Розглянемо випадки, які найчастіше зустрічаються на практиці. Надалі у позначеннях функцій, фігур, їхніх площ індекси відповідно співпадають; наприклад: f_1, Φ_1, S_1.

1. Фігура Φ є **об'єднанням** двох (чи більшого числа) к/т (рис. 12.4.2). Площа такої фігури є сумою площ двох к/т:

$$\Phi = \Phi_1 \bigcup \Phi_2 \Rightarrow S = S_1 + S_2 = \int_a^c f_1(x)dx + \int_c^b f_2(x)dx, \qquad (12.4.5)$$

де точка c визначається розв'язком рівняння $f_1(x) = f_2(x)$.

2. Фігура Φ обмежена двома кривими і є **різницею** двох к/т (рис. 12.4.3). Площа такої фігури є різницею площ двох к/т:

$$\Phi = \Phi_2 \setminus \Phi_1 \Rightarrow S = S_2 - S_1 = \int_a^b f_2(x)dx - \int_a^b f_1(x)dx, \qquad (12.4.6)$$

де межі інтегрування a, b задані або є абсцисами точок перетину кривих, які визначаються розв'язком системи рівнянь $\begin{cases} y = f_1(x), \\ y = f_2(x). \end{cases}$

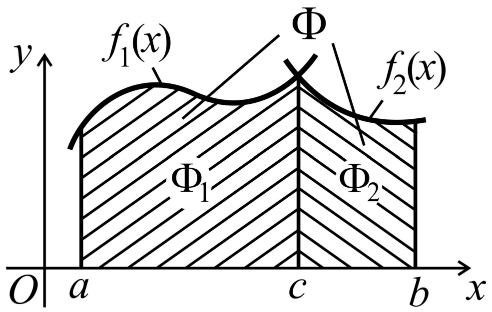


Рис. 12.4.2. **Φ – об'єднання к/т**

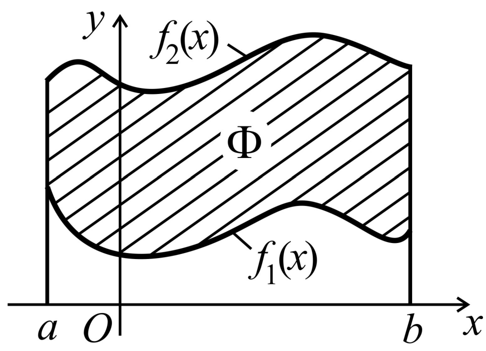


Рис. 12.4.3. **Φ – різниця к/т**

За властивістю 2^0 (*про ВІ від суми функцій*) формула (12.4.6) набуває вигляду:

$$S = \int_a^b \left(f_2(x) - f_1(x) \right) dx, \tag{12.4.7}$$

і є більше зручною для використання, якщо вирази для $f_1(x)$ і $f_2(x)$ мають подібні члени.

Формула (12.4.7) без змін застосовна і тоді, коли фігура Φ розташована нижче осі Ox або вісь Ox перетинає Φ, бо завжди паралельним перенесенням її можна розмістити вище осі абсцис.

Дійсно: $\left(f_2(x)+c\right)-\left(f_1(x)+c\right)=f_2(x)-f_1(x)$, де константа $c>0$ і така, що $f_2(x)+c \geq f_1(x)+c \geq 0$. Отже, площа фігури від такого геометричного перетворення не зміниться.

Приклад. Знайти площу фігури, обмеженої лініями: $y=x^2-4x+2$, $y=x-2$.

Знаходимо точки перетину ліній (для установлення меж інтегрування і щоб полегшити зображення фігури (рис. 12.4.4)):

$$\begin{cases} y = x^2 - 4x + 2 \\ y = x - 2 \end{cases} \Rightarrow x^2 - 5x + 4 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{l} x_1 = 1,\ y_1 = -1, \\ x_2 = 4,\ y_2 = 2. \end{array} \right.$$

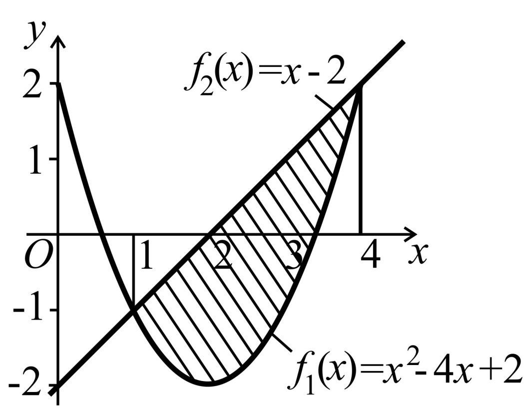


Рис. 12.4.4. **Зображення фігури**

Згідно з (12.4.7) маємо:

$$S=\int_1^4\left[(x-2)-\left(x^2-4x+2\right)\right]dx=\int_1^4\left(-x^2+5x-4\right)dx=$$

$$=\left(-\frac{x^3}{3}+\frac{5x^2}{2}-4x\right)\Bigg|_1^4=4{,}5 \text{ (кв. од.)}.$$

Наголошуємо, що в ролі $f_2(x)$ *завжди виступає функція, графік якої обмежує фігуру зверху.*

3. Фігура Φ обмежена графіком функції $f(x)$, яка скінченне число разів змінює знак на $[a,b]$, і віссю Ox, і є **об'єднанням** к/т (рис. 12.4.5).

З урахуванням розташування фігури Φ_2 отримуємо:

$$S=S_1+S_2+S_3=\int_a^{c_1}f(x)dx-\int_{c_1}^{c_2}f(x)dx+\int_{c_2}^{b}f(x)dx, \qquad (12.4.8)$$

де c_1, c_2 – абсциси точок перетину $f(x)$ з віссю Ox, для відшукання яких розв'язується рівняння $f(x)=0$.

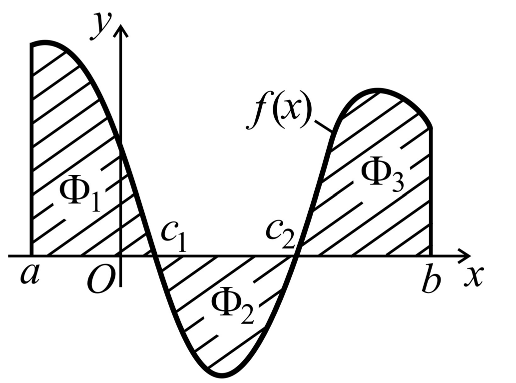


Рис. 12.4.5. **Фігура $\Phi=\Phi_1\cup\Phi_2\cup\Phi_3$**

Відзначимо: усі викладки стосовно фігур, площі яких обчислюються спираючись на площу к/т для $f(x)$ на $[a,b]$, без принципових змін переносяться на фігури, обчислення площ яких потребує розгляду к/т для $\varphi(y)$ на $[c,d]$. Головне – вдало подати фігуру як результат теоретико-множинних операцій над к/т.

Як підсумок викладеного (і для виразності) наводимо у вигляді структурної схеми (рис. 12.4.6) порядок дій при обчисленні S.

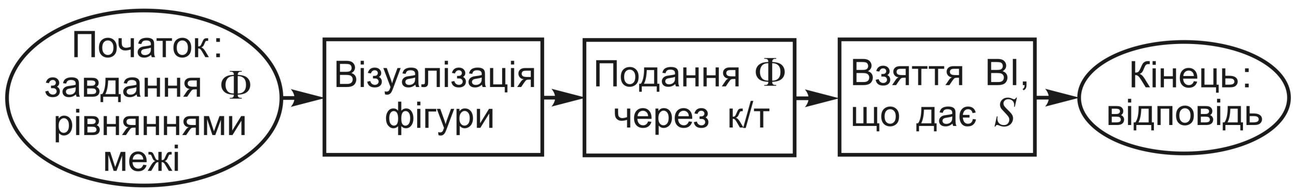


Рис. 12.4.6. **Структурна схема обчислення площі плоскої фігури**

Обчислення площі плоскої фігури у разі *параметричного завдання функції* $f(x)$ (див. п. 6.2 частини 1): $\begin{cases} x = \varphi(t), \\ y = \psi(t), \end{cases}$ $t \in \langle \alpha, \beta \rangle$.

Нехай Φ – к/т-„цеглинка” для $f(x)$ на $[a, b]$, тоді

$$S = \int_a^b y\,dx = \int_a^b f(x)dx\,. \tag{12.4.9}$$

При параметричному завданні функції змінні x і y є функціями аргументу t, тому природно взяти t в якості нової змінної інтегрування. Нові межі інтегрування t_a і t_b, відповідні a і b, знаходимо із співвідношення $x = \varphi(t)$, при цьому повинна існувати (*чому?*) функція $t = \varphi^{-1}(x)$, обернена до $\varphi(t)$, і $[t_a, t_b] \subset \langle \alpha, \beta \rangle$.

Перейдемо в (12.4.9) до змінної t і обчислимо ВІ за новою змінною:

$$\left| \begin{array}{ll} x = \varphi(t) \;\Rightarrow\; t = \varphi^{-1}(x) & \begin{array}{c|c|c} x & a & b \\ \hline t & t_a & t_b \end{array} \\ dx = \varphi'(t)dt,\; y = \psi(t) & \end{array} \right| \Rightarrow S = \int_{t_a}^{t_b} \psi(t)\varphi'(t)dt\,. \tag{12.4.10}$$

(Якщо $t = \varphi^{-1}(x)$ не існує на $[a, b]$, що тоді *робити*?)

У випадку більш складної фігури Φ поступають так само, як це робилося вище в **1**, **2**, **3**. Параметричними рівняннями часто описуються зімкнені криві (відомі – коло і еліпс) і лінії, які мають точки самоперетину (явні і неявні форми завдання таких кривих громіздкі). Прикладом лінії, що має точку самоперетину, є „петля”:

$$\begin{cases} x = t \cdot (\pm t^2 \mp p^2), \\ y = q \cdot (\pm t^2 \mp r^2), \end{cases} \tag{12.4.11}$$

де p, q, r – сталі із $\mathbf{R}$; $t \in (-\infty, +\infty)$ (*чому?)*.

Приклад. Знайти площу фігури, обмеженої лінією: $\begin{cases} x = t \cdot (4 - t^2), \\ y = t^2 - 1. \end{cases}$

1. *Будуємо* графік заданої лінії, для чого спочатку знаходимо точки перетину кривої з осями координат: покладаємо $x = 0$ ($y = 0$), установ-

люємо відповідні значення параметра t, і за ними – ординати (абсциси) точок перетину:

$$x=0:\ \left[\begin{array}{l} t_1=0 \\ t_{2,3}=\pm 2 \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} y_1=-1, \\ y_{2,3}=3\,; \end{array}\right. \quad y=0:\ t_{4,5}=\pm 1 \Rightarrow \ x_{4,5}=\pm 3;$$

далі наносимо знайдені точки на координатну площину (рис. 12.4.7), а поруч указуємо відповідні значення параметра t.

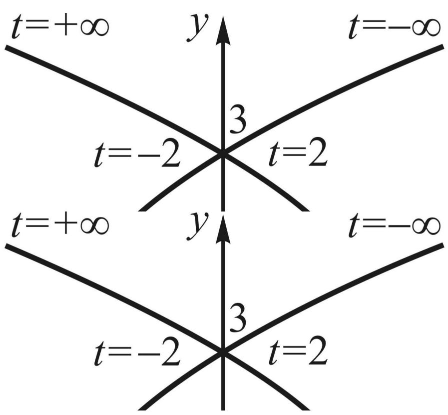


Рис. 12.4.7. **Графік „петлі”**

Для схематичного зображення кривої достатньо знайдених точок перетину з осями координат, звичайно з урахуванням поведінки кривої при $t \to \pm\infty$ $\left(t=8,\ t=-8\right)$:

$$\lim_{t\to\pm\infty} t\left(4-t^2\right)=\mp\infty;$$

$$\lim_{t\to\pm\infty}\left(t^2-1\right)=+\infty.$$

Як бачимо, лінія симетрична відносно осі Oy, адже $y=t^2-1$ парна відносно змінної t, тому фігура Φ є об’єднанням двох рівновеликих к/т для $x=f^{-1}(y)$ зі спільною основою на Oy: $[c,d]=[-1{,}3]$.

Помічаємо також, що точці $(0,3)$ відповідає два значення параметра t; вона і є точкою самоперетину (кривої).

2. *Обчислюємо* подвоєну площу правої половини фігури з урахуванням (12.4.4), (12.4.9) і отриманої інформації щодо побудови графіка:

$$S=2\int_{-1}^{3} x dy=\left|\begin{array}{ll} x=4t-t^3 & \begin{array}{c|c|c} y & -1 & 3 \\ \hline t & 0 & 2 \end{array} \\ y=t^2-1,\ dy=2t\,dt & \end{array}\right|=4\int_0^2\left(4t-t^3\right)\cdot t\,dt=$$

$$=4\int_0^2\left(4t^2-t^4\right)dt=4\left(\frac{4}{3}t^3\Big|_0^2-\frac{t^5}{5}\Big|_0^2\right)=\frac{256}{15}=17{,}0(6)\ \text{(кв. од.)}.$$

Щоб не отримати від’ємну площу, відповідність між межами інтегрування вихідної і нової змінної, y і t, установлюють таким чином: у думці проходять уздовж дуги кривої, що обмежує к/т, проти ходу годиннико-

вої стрілки (див. рис. 12.4.7), тобто так, щоб к/т залишалася ліворуч, тоді надписи біля початкової і кінцевої точок дуги укажуть нижні і верхні межі для y і t. Якщо розглядати к/т у лівій півплощині, то нижні межі: $y=3$, $t=-2$, верхні межі: $y=-1$, $t=0$. Аналогічно поступають у випадку симетрії „петлі" відносно осі Ox.

Полярні координати. Площа плоскої фігури у полярних координатах. Поряд з добре відомою декартовою (прямокутною) системою координат xOy, у якій кожній точці площини відповідає пара чисел (x,y) – проекцій точки на координатні осі, користуються так званою *полярною системою координат*. Зафіксуємо на площині деяку точку O – **полюс** і промінь OP – **полярну вісь**; виберемо довільним чином відмінну від полюса точку M (рис. 12.4.8).

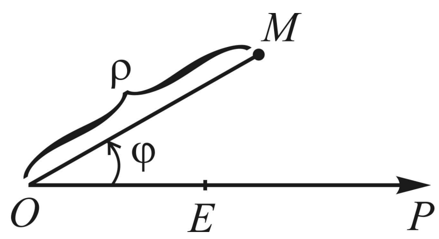


Рис. 12.4.8. **Полярні координати**

Відстань ρ від полюса O до точки M називається **полярним радіусом** точки M: $\rho=OM>0$. Кут нахилу φ полярного радіуса до полярної осі називається **полярним кутом** точки M. У точки O полярний кут невизначений (*чому?*)

Числа ρ і φ називаються **полярними координатами** точки M, і пишуть: (ρ,φ) або $M(\rho,\varphi)$. Полюс O і полярну вісь OP з масштабним відрізком OE називають **полярною системою координат $\rho O\varphi$**. Полярний кут визначається неоднозначно: при заданому $\rho\neq 0$ точки з координатами $(\rho,\varphi+2k\pi)$, де $k\in\mathbf{Z}=\{0,\ \pm1,\ \pm2,\ ...\}$, співпадають. Звичайно вартості φ беруть з проміжку $[0,2\pi)$ або $(-\pi,\pi]$ і називають їх **головними значеннями** полярного кута. Для першої координати припускаються і від'ємні значення: домовились, що точці (ρ,φ), де $\rho<0$, відповідає точка з координатами $(|\rho|,\varphi+\pi)$; тобто для побудови точки з від'ємним полярним радіусом треба провести промінь з полярним кутом φ і на його продовженні (від вершини O) нанести відрізок довжини $|\rho|$.

Полярна система координат $\rho O\varphi$, яка припускає від'ємні значення ρ, називається **узагальненою**; вона дозволяє кожній парі дійсних чисел поставити у відповідність одну певну точку площини.

Наводимо послідовність дій і *приклади* побудови точок (ρ,φ) у системі $\rho O\varphi$ (рис. 12.4.9):

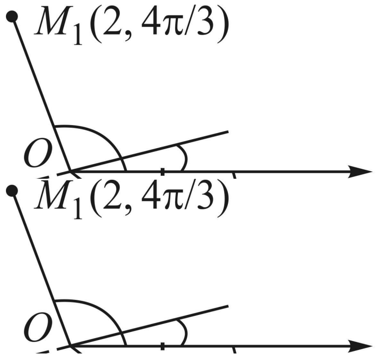


Рис. 12.4.9. **Точки у системі $\rho O\varphi$**

1) *проводять* через полюс O промінь під кутом φ;

2) *відкладають*: при $\rho > 0$ на промені відрізок довжини ρ (див. точки E, M_1, M_3); при $\rho < 0$ на продовженні променя (від полюса O) відрізок довжини $|\rho|$ (див. точку M_2).

Рівняння $F(\rho,\varphi)=0$ називається **рівнянням лінії** L у полярних координатах, якщо координати будь-якої точки $M(\rho,\varphi)$ на лінії задовольняють його і навпаки, якщо пара чисел (ρ,φ) задовольняє рівняння, то ρ і φ є координатами точки, яка належить лінії:

$$F(\rho,\varphi)=0 \text{ – рівняння } L \ \rightleftharpoons\ (\rho,\varphi)\in L \ \Leftrightarrow\ F(\rho,\varphi)=0, \qquad (12.4.12)$$

де F – закон, який відображує властивість точок лінії.

Змінні ρ і φ, які входять у рівняння лінії, називаються **поточними координатами** точок лінії: під ρ,φ маються на увазі координати будь-якої точки лінії. Надалі в $\rho O\varphi$ розглядатимемо тільки неперервні криві.

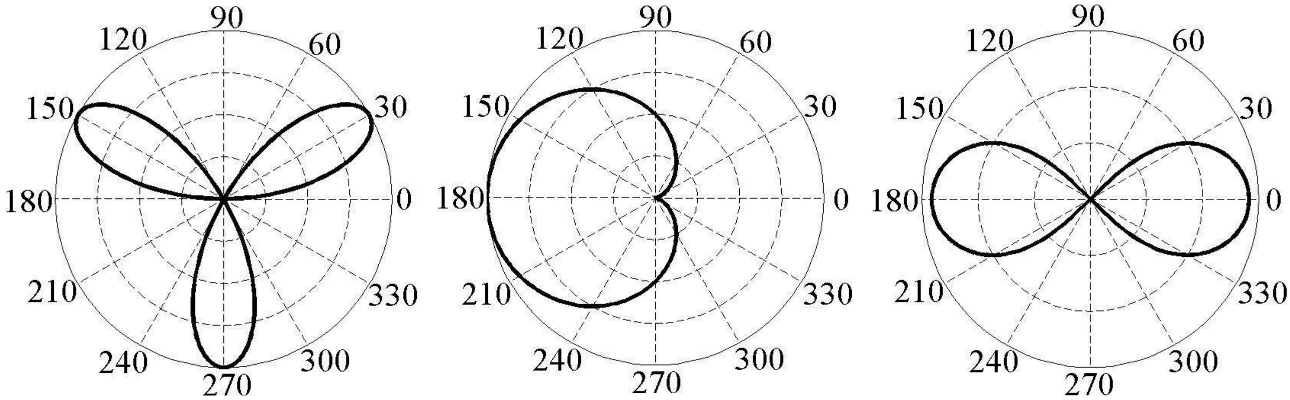
Якщо зуміємо відшукати (побудувати, знайти, скласти) рівняння лінії, тоді вивчення її властивостей зведеться до дослідження рівняння.

У випадку розв’язності рівняння $F(\rho,\varphi)=0$ відносно ρ або φ отримуємо завдання лінії рівнянням у явній формі: $\rho=\rho(\varphi)$ або $\varphi=\varphi(\rho)$.

Наприклад, нехай a – $const$ із $\mathbf{R}$, тоді рівняння $\rho=a$ описує коло радіуса a з центром у полюсі O; $\varphi=a$ є рівнянням променя з вершиною у полюсі, нахиленого під кутом a до полярної осі OP.

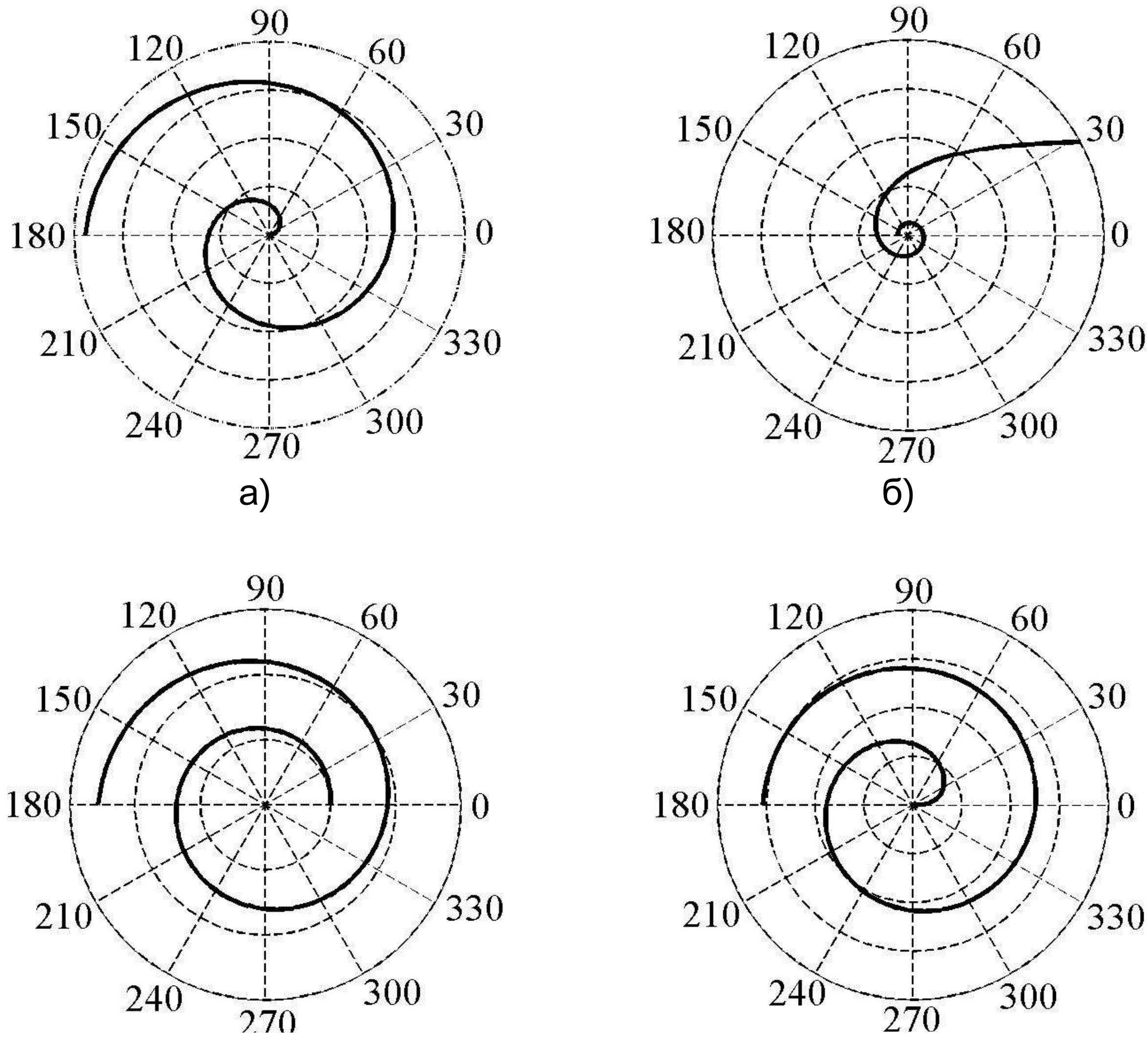
Кола (концентричні) різного радіуса з центром у полюсі і промені різного кута нахилу до полярної осі з вершиною у полюсі називаються **координатними лініями** полярної системи координат.

Наведемо *приклади* рівнянь специфічних, у деякому смислі, кривих і їхні графіки у системі $\rho O\varphi$ (рис. 12.4.10, 12.4.11):



а) б) в)

Рис. 12.4.10. **Криві: а) троянда $(\rho = a\sin k\varphi)$; б) кардіоїда $(\rho = a(1-\cos\varphi))$; в) лемніската $\left(\rho = a\sqrt{2\cos 2\varphi}\right)$**



а) б)

в) г)

Рис. 12.4.11. **Спіралі: а) Архімеда $(\rho = a\varphi)$; б) гіперболічна $(\rho = a/\varphi)$; в) логарифмічна $(\rho = ae^{k\varphi})$; г) Ферма $(\rho = a\sqrt{\varphi})$**

Зв'язок між координатами точки у полярній $\rho O\varphi$ і декартовій xOy системах координат легко установити, якщо полюс співпадає з початком координат, а полярна вісь лежить на осі абсцис (рис. 12.4.12), і масштабні одиниці систем однакові.

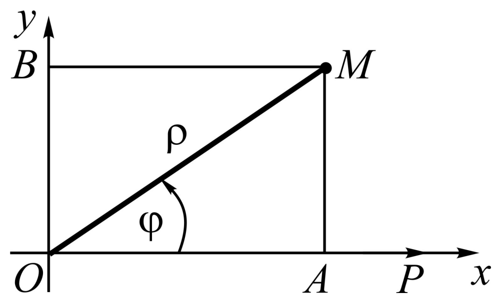


Рис. 12.4.12. **Зв'язок ρ, φ з x, y**

Із ΔOAM ($\angle A = 90^\circ$) маємо:

формули переходу від декартових до полярних координат:

$$\left[\begin{array}{l} x/\rho = \cos\varphi, \\ y/\rho = \sin\varphi \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x = \rho\cos\varphi, \\ y = \rho\sin\varphi, \end{array}\right. \qquad (12.4.13)$$

де $\rho > 0$, $-\pi < \varphi \le \pi$ чи $\varphi \in [0,\ 2\pi)$;

формули переходу від полярних до декартових координат:

$$\rho^2 = x^2 + y^2 \ \Rightarrow\ \rho = \sqrt{x^2 + y^2}\,; \qquad (12.4.14)$$

$$\left[\begin{array}{l} y/x = tg\varphi, \\ x/y = ctg\varphi \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \varphi = arctg\,(y/x), \quad x \ne 0, \\ \varphi = arcctg\,(x/y), \quad y \ne 0; \end{array}\right. \qquad (12.4.15)$$

$$\left[\begin{array}{l} x/\rho = \cos\varphi, \\ y/\rho = \sin\varphi \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \varphi = \arccos\,(x/\rho), \\ \varphi = \arcsin\,(y/\rho) \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \varphi = \arccos\dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}, \\ \varphi = \arcsin\dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}. \end{array}\right. \qquad (12.4.16)$$

Та чи інша формула вибирається залежно від намірів і цілей дослідника. (*Пропонуємо* як вправу здійснити перехід до декартових координат у рівняннях кривих, зображених на рис. 12.4.10, 12.4.11.)

Обчислення площ плоских фігур у системі $\rho O\varphi$ принципово нічим не відрізняється від розв'язання такої ж задачі у системі xOy. У якості „цеглинок" тут (тобто замість к/т) виступає так званий криволінійний сектор – узагальнення відомого поняття кругового сектора (*згадайте!*).

Фігура, обмежена двома променями: $\varphi=\alpha$ і $\varphi=\beta$, і дугою кривої $\rho=\rho(\varphi)$ називається **криволінійним сектором** (**к/с**) для $\rho=\rho(\varphi)$ на $[\alpha,\beta]$ у системі $\rho O\varphi$ (рис. 12.4.13).

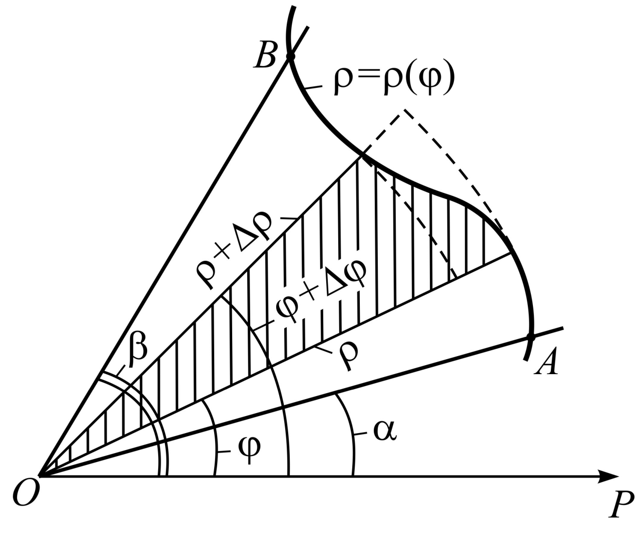


Рис. 12.4.13. **Криволінійний сектор**

У окремих випадках к/с може вироджуватися у **криволінійний сегмент** – це коли промінь $\varphi=0$ є дотичною до кривої, а точка A співпадає з полюсом, або у к/с з *розгорнутим центральним кутом* $\angle AOB$, якщо йдеться про площу фігури, обмеженої зімкненою лінією (див. рис. 12.4.10-б).

Задача 12.4.1. Знайти площу S_c криволінійного сектора Φ_c для $\rho=\rho(\varphi)$ на $[\alpha,\beta]$ як множини точок площини у системі $\rho O\varphi$:

$$\Phi_c=\{(\rho,\varphi)\mid \alpha\le\varphi\le\beta,\ 0\le\rho\le\rho(\varphi)\}. \qquad (12.4.17)$$

Р о з в' я з а н н я ґрунтується на підході (12.4.1) і формулі з елементарної геометрії для обчислення площі кругового сектора: $S_{сек}=\frac{1}{2}r^2\alpha$, де r – радіус круга, α – центральний кут у радіанах.

1. *Введемо* в розгляд функцію $S(\varphi)$, яка виражає площу к/с для $\rho=\rho(\varphi)$ на $[\alpha,\varphi]$ (див. рис. 12.4.13). Зрозуміло, що $S(\alpha)=0$, а $S(\beta)=S_c$.

2. *Надамо* аргументові φ приріст $\Delta\varphi$ так, що $[\varphi,\ \varphi+\Delta\varphi]\subset[\alpha,\beta]$, тоді $S(\varphi)$ набуде приріст $\Delta S=S(\varphi+\Delta\varphi)-S(\varphi)$, який не менше (не більше) площі вписаного $S_{вп}$ (описаного $S_{оп}$) кругового сектора з центральним кутом $\Delta\varphi$ і радіусом $\rho+\Delta\rho$ з $\Delta\rho<0$:

$$S_{вп}\le\Delta S\le S_{оп}\ \Rightarrow\ \frac{1}{2}(\rho+\Delta\rho)^2\Delta\varphi\le\Delta S\le\frac{1}{2}\rho^2\Delta\varphi.$$

3. *Складемо* відношення $\Delta S(\varphi)/\Delta\varphi$ і *здійснимо* у відповідній подвійній нерівності граничний перехід при $\Delta\varphi\to0$:

$$\frac{1}{2}\cdot\lim_{\Delta\varphi\to 0}(\rho+\Delta\rho)^2 \le \lim_{\Delta\varphi\to 0}\frac{\Delta S}{\Delta\varphi} \le \frac{1}{2}\cdot\lim_{\Delta\varphi\to 0}\rho^2 \;\Rightarrow\; \frac{1}{2}\cdot\rho^2 \le S'_{\varphi}(\varphi) \le \frac{1}{2}\cdot\rho^2,$$

бо в силу неперервності $\Delta\varphi \to 0 \Rightarrow \Delta\rho \to 0$. Таким чином,

$$S'_{\varphi}(\varphi)=\frac{1}{2}\rho^2 \;\Rightarrow\; dS(\varphi)=\frac{1}{2}\rho^2 d\varphi \;\Rightarrow\; \int_{\alpha}^{\beta} dS(\varphi)=\frac{1}{2}\cdot\int_{\alpha}^{\beta}\rho^2 d\varphi \;\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\; S(\varphi)\Big|_{\alpha}^{\beta}=\frac{1}{2}\cdot\int_{\alpha}^{\beta}\rho^2 d\varphi \;\Rightarrow\; S(\beta)-S(\alpha)=\frac{1}{2}\cdot\int_{\alpha}^{\beta}\rho^2 d\varphi.$$

Остаточно:

$$S_c=\frac{1}{2}\cdot\int_{\alpha}^{\beta}\rho^2 d\varphi \qquad (12.4.18)$$

– формула площі криволінійного сектора.

Більш складні, ніж к/с, плоскі фігури Φ у системі $\rho O\varphi$ подаються за допомогою операцій над множинами, $\bigcup$ і $\setminus$, через к/с (за аналогією з тим, як це робилося у координатній системі xOy). У структурній схемі обчислення площі плоскої фігури (див. рис. 12.4.12) треба замінити к/т (на *що?*).

Приклад. Знайти площу S фігури Φ, межі якої визначаються рівнянням: $\rho=6\left(\sqrt{\cos\varphi}+\sqrt{\sin\varphi}\right)^{-2}$.

Аналізуємо $\rho=\rho(\varphi)$ з метою установлення меж інтегрування і *складаємо* таблицю (табл. 12.4.1) пар (φ,ρ) для схематичної візуалізації фігури:

$$\left[\begin{array}{l}\cos\varphi\ge 0,\\ \sin\varphi\ge 0\end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{c}-\pi/2\le\varphi\le\pi/2,\\ 0\le\varphi\le\pi\end{array}\right. \Rightarrow 0\le\varphi\le\pi/2 \Rightarrow [\alpha,\beta]=[0,\pi/2].$$

Таблиця 12.4.1

Таблиця пар (φ,ρ) для побудови графіка лінії $\rho(\varphi)$

φ	0	$\pi/6$	$\pi/4$	$\pi/3$	$\pi/2$
ρ	6	$12/\left(1+\sqrt{3}+2\sqrt[4]{3}\right)\approx$ $\approx 2,24$	$3\sqrt{2}/2\approx$ $\approx 2,12$	$12/\left(1+\sqrt{3}+2\sqrt[4]{3}\right)\approx$ $\approx 2,24$	6

Фігура Φ є к/с для $\rho=\rho(\varphi)$ на $[0,\pi/2]$ (рис. 12.4.14-а), а для поки невизначеної $y=f(x)$ на $[0,6]$ являє собою к/т (рис. 12.4.14-б).

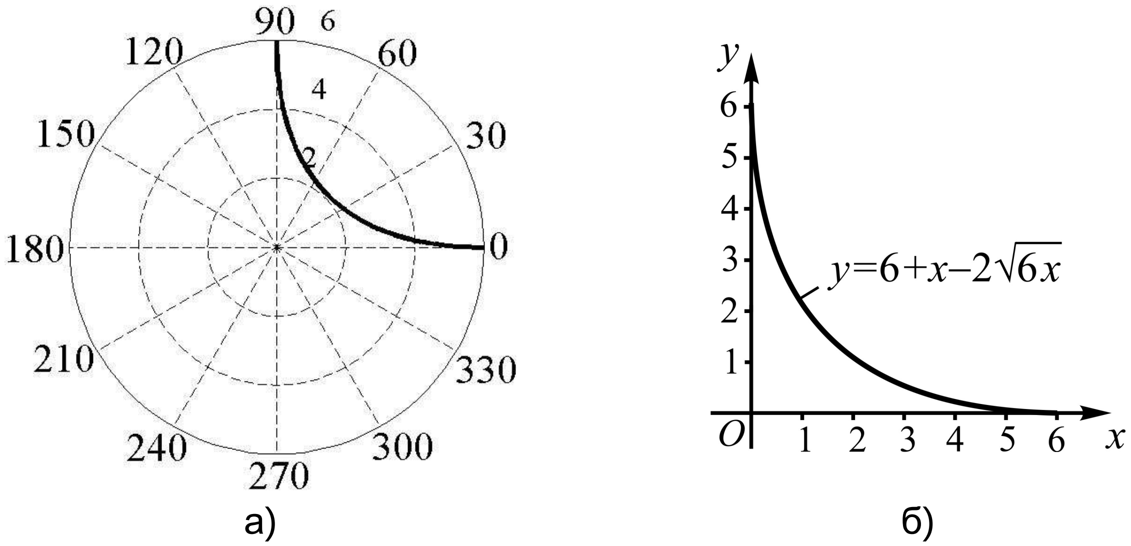


Рис. 12.4.14. **Зображення фігури Φ у:** а**)** $\rho O\varphi$**;** б**)** xOy

Отже, S чисельно дорівнює ВІ виду (12.4.18) або ВІ виду (12.1.4):

$$S=\frac{1}{2}\cdot\int\limits_0^{\pi/2}\rho^2 d\varphi=18\int\limits_0^{\pi/2}\left(\sqrt{\cos\varphi}+\sqrt{\sin\varphi}\right)^{-4}d\varphi,\quad S=\int\limits_0^6 f(x)dx.$$

Зважаючи на складність ВІ за змінною φ, здійснимо перехід до декартових координат:

$$\rho=\frac{6}{\left(\sqrt{\cos\varphi}+\sqrt{\sin\varphi}\right)^2}\ \Rightarrow\ \sqrt{\rho\cos\varphi}+\sqrt{\rho\sin\varphi}=\sqrt{6}\ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ \sqrt{\rho\cos\varphi}+\sqrt{\rho\sin\varphi}=\sqrt{6}\ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\left|\begin{array}{l}x=\rho\cos\varphi\\ y=\rho\sin\varphi\end{array}\right|\Rightarrow\sqrt{x}+\sqrt{y}=\sqrt{6}\Rightarrow y=6+x-2\sqrt{6}\cdot\sqrt{x}.$$

Таким чином приходимо до значно простішого інтеграла:

$$S=\int\limits_0^6(6+x-2\sqrt{6}\cdot\sqrt{x})dx=\left(6x+\frac{x^2}{2}-\frac{4}{3}\sqrt{6}\cdot x\sqrt{x}\right)\Bigg|_0^6=6\ \text{(кв. од.)}.$$

(*Переконайтеся*, що крива, дуга якої обмежує фігуру, є параболою.)

Зауваження. Перехід до декартових координат часто допомагає установити вид кривої. *Наприклад*, $\rho = 2\cos\varphi$ описує рівняння кола радіуса 1 з центром у точці $(1,0)$: $x^2 + y^2 - 2x = 0 \Rightarrow (x-1)^2 + y^2 = 1$.

ІІ. Обчислення об'ємів просторових тіл. Геометрична фігура, утворена обертанням к/т навколо деякої осі, називається **тілом обертання**.

Задача 12.4.2. Обчислити об'єм тіла V_{Ox}, утвореного обертанням к/т для неперервної на $[a,b]$ функції $f(x)$ навколо осі Ox.

Р о з в' я з а н н я ґрунтується на підході (12.4.1) і формулі з елементарної геометрії для обчислення об'єму прямого кругового циліндра: $V_{цил} = \pi r^2 h$, де r – радіус основи, h – висота циліндра.

Введемо в розгляд функцію $V(x)$, яка виражає об'єм тіла обертання, утвореного к/т для $y = f(x)$ на $[a,x]$ (рис. 12.4.15). Зрозуміло, що $V(a) = 0$, а $V(b) = V_{Ox}$.

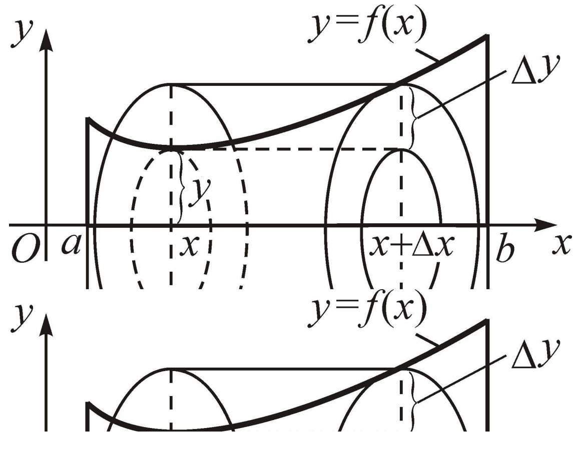


Рис. 12.4.15. **Тіло обертання**

Надамо аргументові x приріст Δx так, що $[x, x+\Delta x] \subset [a,b]$, тоді функція $V(x)$ набуде приріст $\Delta V = V(x+\Delta x) - V(x)$, який не менше (не більше) об'єму вписаного $V_{вп}$ (описаного $V_{оп}$) кругового циліндрика з висотою Δx і радіусом основи y $(y + \Delta y)$:

$$V_{вп} \le \Delta V \le V_{оп} \;\Rightarrow\; \pi y^2 \Delta x \le \Delta V \le \pi (y + \Delta y)^2 \Delta x.$$

Складемо відношення $\dfrac{\Delta V(x)}{\Delta x}$ і *здійснимо* у відповідній подвійній нерівності граничний перехід при $\Delta x \to 0$:

$$\pi \lim_{\Delta x \to 0} y^2 \le \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta V}{\Delta x} \le \pi \lim_{\Delta x \to 0} (y + \Delta y)^2 \Rightarrow \pi y^2 \le V_x'(x) \le \pi y^2,$$

бо в силу неперервності $\Delta x \to 0 \Rightarrow \Delta y \to 0$.

Таким чином,

$$V_x'(x)=\pi y^2 \;\Rightarrow\; dV(x)=\pi y^2 dx \;\Rightarrow\; \int_a^b dV(x)=\pi\int_a^b y^2 dx \;\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\; V(x)\Big|_a^b=\pi\int_a^b y^2 dx \;\Rightarrow\; V(b)-V(a)=\pi\int_a^b y^2 dx.$$

Остаточно:

$$V_{Ox}=\pi\int_a^b y^2 dx=\pi\int_a^b f^2(x)dx \qquad (12.4.19)$$

– **формула об'єму тіла обертання**.

Якщо тіло утворене обертанням к/т для неперервної $x=\varphi(y)$ на $[c,d]$ навколо осі Oy (див. рис. 12.4.1-б), то аналогічно:

$$V_{Oy}=\pi\int_c^d x^2 dy=\pi\int_c^d \varphi^2(y)dy. \qquad (12.4.20)$$

При обертанні к/т $f(x)$ на $[a,b]$ навколо осі Oy і к/т для $\varphi(y)$ на $[c,d]$ навколо осі Ox об'єми тіл обертання обчислюються за формулами (приймемо їх без виведення):

$$V_{Oy}=2\pi\int_a^b xy\,dx, \text{ де } y=f(x);\quad V_{Ox}=2\pi\int_c^d xy\,dy, \text{ де } x=\varphi(y). \qquad (12.4.21)$$

Ці формули називають **формулами Гульдена** за ім'ям швейцарського математика Пауля Гульдена (1577 – 1644).

Приклад. Обчислити об'єм тіла, утвореного обертанням фігури, обмеженої лініями: $y=\sqrt[3]{x^2}$ і $y=1$, навколо: 1) осі Ox; 2) осі Oy.

Зображуємо фігуру і *установлюємо* межі інтегрування. Для цього *знайдемо* точки взаємного перетину ліній, *нанесемо* їх на координатну площину і *відтворимо* схематичний графік ліній і фігури (рис. 12.4.16):

$$\begin{cases} y=\sqrt[3]{x^2} \\ y=1 \end{cases} \Rightarrow\; \sqrt[3]{x^2}=1 \;\Rightarrow\; \left[\begin{array}{ll} x_1=-1, & y_1=1, \\ x_2=1, & y_2=1. \end{array}\right.$$

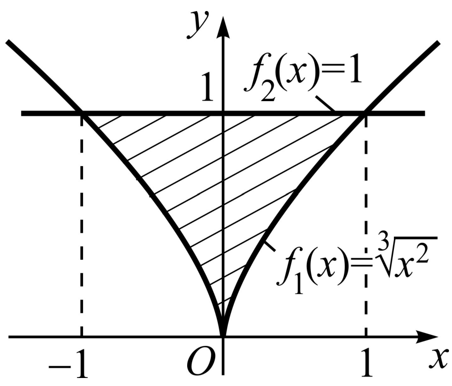


Рис. 12.4.16. **Фігура для обертання**

1. *Проводимо* візуальний аналіз фігури: в силу симетрії розглядатимемо її половину у правій півплощині як різницю двох к/т – прямокутника (для $f_2(x)=1$ на $[0,1]$) і криволінійного трикутника (на $[0,1]$ для $f_1(x)=\sqrt[3]{x^2}$). Отже, $\Phi=\Phi_2\setminus\Phi_1$.

Застосовуємо для кожної к/т формулу (12.4.19):

$$\frac{1}{2}V_{Ox}=\pi\int_0^1\left[f_2^2(x)-f_1^2(x)\right]dx=\pi\int_0^1\left(1-x^{4/3}\right)dx=$$

$$=\pi\left(x-\frac{3}{7}x^{7/3}\right)\Bigg|_0^1=\frac{4\pi}{7}\ \Rightarrow\ V_{Ox}=\frac{8\pi}{7}\approx 3{,}6 \text{ (куб. од.).}$$

2. Об'єм V_{Oy} отримаємо обертанням навколо Oy к/т для $x=\sqrt{y^3}$ на $[0,1]$ (див. рис. 12.4.15), а саме:

$$V_{Oy}=\pi\int_0^1 x^2dy=\pi\int_0^1 y^3dy=\frac{\pi}{4}y^4\Bigg|_0^1=\frac{\pi}{4}\approx 0{,}75 \text{ (куб. од.).}$$

Те ж саме тіло отримаємо обертанням усієї фігури, $\forall x\in[-1,1]$, проте обчислення дають нуль: $V_{Oy}=\pi\int_{-1}^{1}y^3dy=\frac{\pi}{4}y^4\Big|_{-1}^{1}=0$ (*чому?*).

При параметричному завданні функції $y=f(x)$ формули (12.4.19), (12.4.20) набувають вигляду:

$$\begin{cases}x=\varphi(t),\\ y=\psi(t),\end{cases}\quad t\in\langle\alpha,\beta\rangle\ \Rightarrow\ \left[\begin{array}{ll}V_{Ox}=\pi\int_{t_a}^{t_b}y^2(t)\cdot x'(t)\,dt, & (12.4.19')\\ V_{Oy}=\pi\int_{t_c}^{t_d}x^2(t)\cdot y'(t)\,dt, & (12.4.20')\end{array}\right.$$

де t_a, t_b і t_c, t_d – межі інтегрування за змінною t, відповідні межам a, b і c, d інтегрування за змінними x і y. (*Запишіть* аналогічні формули для формул Гульдена (12.4.21).)

Об'єм тіла, яке отримується обертанням навколо полярної осі OP криволінійного сектора, обмеженого дугою кривої $\rho=\rho(\varphi)$ і двома полярними радіусами: $\varphi=\alpha$, $\varphi=\beta$ (див. рис. 12.4.14), обчислюється за формулою (приймемо її без виведення):

$$V_{OP}=\frac{2\pi}{3}\int_{\alpha}^{\beta}\rho^3(\varphi)\sin\varphi\, d\varphi. \qquad (12.4.22)$$

Приклад. Знайти об'єм тіла, утвореного обертанням навколо полярної осі OP плоскої фігури, обмеженої пелюсткою троянди $\rho=\sin 3\varphi$ (див. рис. 12.4.10), розташованої у першій чверті.

Вибрана фігура є криволінійним сектором з межами змінювання полярного кута від $\alpha=0$ до $\beta=\pi/3$. За формулою (12.4.22) одержуємо:

$$V_{OP}=\frac{2\pi}{3}\int_{0}^{\pi/3}\sin^3 3\varphi\sin\varphi\, d\varphi.$$

За допомогою тригонометричних формул

$$\sin 3\alpha=3\sin\alpha-4\sin^3\alpha,\quad \sin\alpha\sin\beta=\frac{1}{2}\left(\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)\right)$$

перетворимо підінтегральну функцію до зручного для інтегрування вигляду:

$$f(\varphi)=\sin^3 3\varphi\cdot\sin\varphi=\frac{1}{4}(3\sin 3\varphi-\sin 9\varphi)\cdot\sin\varphi=$$

$$=\frac{1}{8}[\,3(\cos 2\varphi-\cos 4\varphi)-\cos 8\varphi+\cos 10\varphi\,].$$

Невизначеним інтегруванням знаходимо одну з первісних

$$F(\varphi)=\frac{1}{8}\left[3\left(\frac{1}{2}\sin 2\varphi-\frac{1}{4}\sin 4\varphi\right)-\frac{1}{8}\sin 8\varphi+\frac{1}{10}\sin 10\varphi\right]$$

і виконуємо подвійну підстановку:

$$F(\varphi)\Big|_0^{\pi/3}=\frac{1}{8}\left[3\left(\frac{1}{2}\sin\frac{2\pi}{3}-\frac{1}{4}\sin\frac{4\pi}{3}\right)-\frac{1}{8}\sin\frac{8\pi}{3}+\frac{1}{10}\sin\frac{10\pi}{3}\right]=$$

$$=\frac{1}{8}\cdot\frac{\sqrt{3}}{4}\left[3\left(1+\frac{1}{2}\right)-\frac{1}{4}-\frac{1}{5}\right]=\frac{\sqrt{3}}{32}\left(\frac{9}{2}-\frac{9}{20}\right)=\frac{81\sqrt{3}}{640}.$$

Таким чином,

$$V_{OP}=\frac{2\pi}{3}F(\varphi)\Big|_0^{\pi/3}=\frac{2\pi}{3}\cdot\frac{81\sqrt{3}}{640}=\frac{27\sqrt{3}\pi}{320}\approx 0{,}46 \text{ (куб. од.).}$$

(*Чи буде* обертання інших пелюстків давати тіла з такими ж об'ємами?)

Задача 12.4.3. Обчислити об'єм тіла V за відомими площами поперечних перерізів (рис. 12.4.17).

Р о з в'я з а н н я. Позначимо через $S(x)$ функцію, яка чисельно дорівнює площі перерізу тіла площиною, що проходить через точку $(x,0,0)$ перпендикулярно осі Ox.

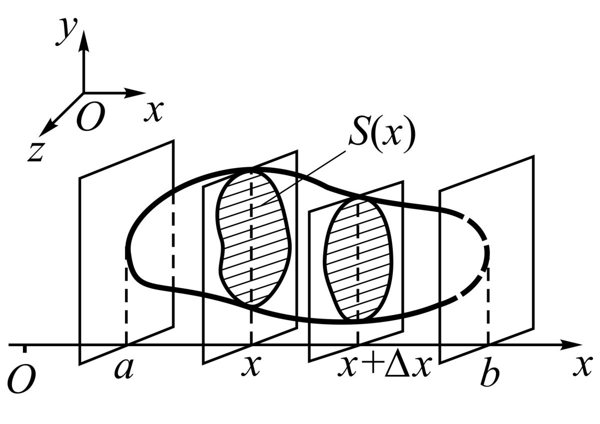


Рис. 12.4.17. **Просторове тіло**

Введемо в розгляд функцію $V(x)$, яка виражає об'єм тіла на відрізку $[a,x]$, тоді $V(a)=0$, а $V(b)=V$ – об'єм усього тіла.

Надамо аргументові x приріст Δx так, що $[x,\ x+\Delta x]\subset[a,b]$, тоді функція $V(x)$ набуде приріст $\Delta V = = V(x+\Delta x)-V(x)$, який не більше (не менше) об'єму описаного V_{on} (вписаного $V_{вn}$) кругового циліндрика з площею основи $S(x)$ $(S(x+\Delta x))$ і висотою Δx (див. рис. 12.4.17). Тоді (*прокоментуйте* за аналогією з тим, як це робилося при розв'язанні задачі 12.4.2):

$$V_{on}\ge\Delta V\ge V_{вn}\ \Rightarrow\ S(x)\Delta x\ge\Delta V\ge S(x+\Delta x)\Delta x\ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ S(x)\ge\frac{\Delta V}{\Delta x}\ge S(x+\Delta x)\ \Rightarrow\ \lim_{\Delta x\to 0}S(x)\ge\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta V}{\Delta x}\ge\lim_{\Delta x\to 0}S(x+\Delta x)\ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ S(x)\ge V_x'(x)\ge S(x)\ \Rightarrow\ V_x'(x)=\frac{dV}{dx}=S(x)\ \Rightarrow\ dV(x)=S(x)dx\ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ \int_a^b dV(x)=\int_a^b S(x)dx\ \Rightarrow\ V(x)\Big|_a^b=\int_a^b S(x)dx\ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ V=\int_a^b S(x)dx \qquad (12.4.23)$$

– **формула об'єму тіла за площами поперечних перерізів**.

Як окремий випадок із (12.4.23) отримуємо (12.4.19), де функція $S(x)$ має вигляд: $S(x)=\pi f^2(x)$, бо перерізом тіла обертання є круг.

ІІІ. Обчислення довжини дуги кривої і площі поверхні обертання.

Задача 12.4.4. Знайти довжину дуги лінії $y=f(x)$ на $[a,b]$ за умови, що $f(x)$ і $f'(x)$ неперервні функції (рис. 12.4.18).

Р о з в' я з а н н я (як і попередніх задач) проведемо згідно з формулою (12.4.1).

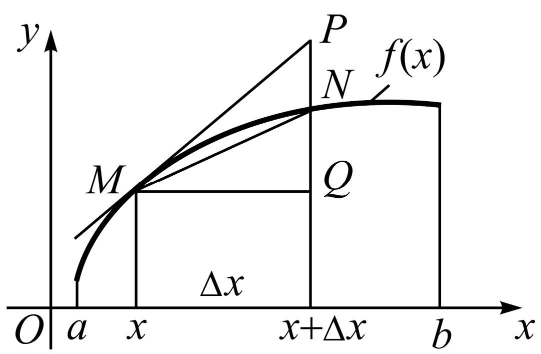


Рис. 12.4.18. **Дуга лінії $y=f(x)$**

Введемо в розгляд функцію $l(x)$, яка виражає довжину дуги кривої на відрізку $[a,x]$, тоді $l(a)=0$, а $l(b)=l$ – довжина усієї дуги.

Надамо аргументу x приріст Δx так, що $[x,x+\Delta x]\subset[a,b]$, тоді функція $l(x)$ набуде приріст $\Delta l=\cup MN=$ $=l(x+\Delta x)-l(x)$.

За рис. 12.4.18: MP – дотична; MN – хорда; MPN – ламана, яка обводить Δl, а значить $\cup MN\le MP+PN$; $QN=\Delta y$ – приріст функції на відрізку $[x,x+\Delta x]$; $QP=dy$ – диференціал функції як приріст ординати дотичної, отже, $MN\le\Delta l\le MP+PN$. Із трикутників ΔMQN $(\angle Q=90^\circ)$ і ΔMQP $(\angle Q=90^\circ)$ отримуємо:

$$MN=\sqrt{MQ^2+QN^2}=\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2};$$

$$MP=\sqrt{MQ^2+QP^2}=\sqrt{dx^2+dy^2};\quad PN=QP-QN=dy-\Delta y.$$

Таким чином:

$$\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2} \le \Delta l \le \sqrt{dx^2+dy^2}+dy-\Delta y \qquad (12.4.24)$$

– ключове співвідношення для отримання диференціала дуги dl.

Із (12.4.24) одержуємо (*наведіть* коментар самостійно):

$$\frac{\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}}{\Delta x} \le \frac{\Delta l}{\Delta x} \le \frac{\sqrt{dx^2+dy^2}}{dx}+\frac{dy-\Delta y}{\Delta x} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sqrt{1+\left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)^2} \le \frac{\Delta l}{\Delta x} \le \sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}+\frac{\alpha(\Delta x)}{\Delta x} \quad \text{(див. (12.4.2))} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left|\Delta x \to 0\right| \Rightarrow \sqrt{1+(y'_x)^2} \le l'_x(x) \le \sqrt{1+(y'_x)^2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow l'_x(x)=\frac{dl}{dx}=\sqrt{1+(y'_x)^2} \Rightarrow dl(x)=\sqrt{1+(y'_x)^2}dx \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \int_a^b dl(x)=\int_a^b \sqrt{1+(y'_x)^2}dx \Rightarrow l(x)\Big|_a^b=\int_a^b \sqrt{1+(y'_x)^2}dx \Rightarrow$$

$$\Rightarrow l=\int_a^b \sqrt{1+(y'_x)^2}dx \qquad (12.4.25)$$

– **формула довжини дуги кривої**. (*Як виглядає* ця формула, якщо $y=f(x)$ – рівняння прямої?)

Диференціал дуги $dl=\sqrt{1+(y'_x)^2}\,dx$ звичайно записують у вигляді:

$$dl=\sqrt{dx^2+dy^2}. \qquad (12.4.26)$$

Як наслідки з (12.4.25) з урахуванням (12.4.26) запишемо (без виведення) відповідні розрахункові **формули** для функцій, заданих у **параметричній формі** і у **полярних координатах**:

$$\begin{cases} x=\varphi(t), \\ y=\psi(t), \end{cases} \quad t\in\langle\alpha,\,\beta\rangle \Rightarrow l=\int_\alpha^\beta \sqrt{(\varphi'_t)^2+(\psi'_t)^2}dt; \qquad (12.4.27)$$

$$\left[\begin{array}{l} \rho=\rho(\varphi), \\ \varphi\in[\alpha,\beta] \end{array}\right. \Rightarrow \left|\begin{array}{l} x=\rho(\varphi)\cos\varphi \\ y=\rho(\varphi)\sin\varphi \end{array}\right| \Rightarrow l=\int_\alpha^\beta \sqrt{\rho^2+(\rho'_\varphi)^2}d\varphi. \qquad (12.4.28)$$

Оскільки підінтегральні функції формул довжини дуги містять радикали, то навіть для порівняно простих (за аналітичним виразом) функцій приходимо до обчислення відносно складних ВІ.

Приклад. Знайти довжину дуги кривої $y=\sqrt[3]{x^2}$ (див. рис. 12.4.16) на відрізку $[-1,1]$.

Порядок відшукання l такий:

1) *аналізуємо* поведінку функції і її похідної на проміжку $[-1,1]$:

$$y=\sqrt[3]{x^2} \Rightarrow y'_x=\left(x^{2/3}\right)'_x=\frac{2}{3}x^{-1/3}=\frac{2}{3\sqrt[3]{x}} \Rightarrow \left(x=\pm 0 \Rightarrow y'_x=\pm\infty\right),$$

і робимо висновок про наявність у похідної особливої точки $c^0=0$;

2) *обчислюємо* НВІ-2 на проміжку $[0,1]$ (в силу парності функції), застосовуючи другу підстановку Чебишева (див. теорему 11.4.2):

$$I_0^1=\int_0^1\sqrt{1+\frac{4}{9x^{2/3}}}\,dx=\frac{1}{3}\int_0^1\frac{\sqrt{4+9x^{2/3}}}{\sqrt[3]{x}}\,dx=\frac{1}{3}\int_0^1 x^{-1/3}\left(4+9x^{2/3}\right)^{1/2}dx \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left|\begin{array}{c} m=-1/3,\ n=2/3,\ p=1/2 \\ \dfrac{m+1}{n}=1-\text{ціле число}\end{array}\right| \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left|\begin{array}{ll} 4+9x^{2/3}=t^2 \quad \Rightarrow t=\sqrt{4+9x^{2/3}} & \begin{array}{c|c|c} x & 0 & 1 \\ t & 2 & \sqrt{13}\end{array} \\ 6x^{-1/3}dx=2t\,dt \Rightarrow x^{-1/3}dx=1/3t\,dt & \end{array}\right| \Rightarrow$$

$$\Rightarrow I_2^{\sqrt{13}}=\frac{1}{9}\int_2^{\sqrt{13}}t^2dt=\frac{1}{9}\cdot\frac{t^3}{3}\Bigg|_2^{\sqrt{13}}=\frac{1}{27}\left(\sqrt{13^3}-8\right).$$

Остаточно: $l=\dfrac{2}{27}\left(13\sqrt{13}-8\right)\approx 2{,}88$ (лін. од.). (Обчислювали НВІ, але *чому* не здійснювали граничний перехід?)

Задача 12.4.5. Знайти площу S **поверхні обертання** – поверхні, утвореної обертанням дуги лінії $y=f(x)$ на $[a,b]$ навколо осі Ox – за умови, що $f(x)$ і $f'(x)$ неперервні функції (див. рис. 12.4.18).

Р о з в' я з а н н я задачі за тією ж схемою, згідно з (12.4.1), потребує знання формули з елементарної геометрії для обчислення площі

бічної поверхні зрізаного конуса: $S_{біч} = \pi(r+R)L$, де r, R – радіуси основ, L – твірна. Здійснювати його не будемо (*спробуйте* зробити це самостійно), а наведемо готові формули для різних форм завдання кривої:

$$\left[\begin{array}{l} y = f(x), \\ x \in [a,b] \end{array}\right. \Rightarrow S = 2\pi\int_a^b y\sqrt{1+(y'_x)^2}\,dx = 2\pi\int_a^b y\,dl\,; \qquad (12.4.29)$$

$$\begin{cases} x = \varphi(t), \\ y = \psi(t), \end{cases} t \in \langle \alpha,\ \beta \rangle \Rightarrow S = 2\pi\int_\alpha^\beta \psi(t)\sqrt{(\varphi'_t)^2 + (\psi'_t)^2}\,dt\,; \qquad (12.4.30)$$

$$\left[\begin{array}{l} \rho = \rho(\varphi), \\ \varphi \in [\alpha,\beta] \end{array}\right. \Rightarrow \left| \begin{array}{l} x = \rho\cos\varphi \\ y = \rho\sin\varphi \end{array} \right| \Rightarrow S = 2\pi\int_\alpha^\beta \rho\sin\varphi\sqrt{\rho^2 + (\rho'_\varphi)^2}\,d\varphi. \qquad (12.4.31)$$

Приклад. Знайти площу S поверхні, утвореної обертанням навколо осі Ox дуги лінії, заданої у параметричній формі: $\begin{cases} x = t^2, \\ y = t \cdot \sqrt[3]{t}, \end{cases}$ $t \in [0,1]$.

Аналізуємо на неперервність задану функцію і її похідну: змінні x і y як функції від t є неперервними, і кожній вартості t відповідає єдина пара (x, y), отже, $y = f(x)$ – неперервна на $[0,1]$ функція; проте похідна $y'_x = y'_t / x'_t = 2/(3t^{2/3})$ при наближенні до нуля необмежено зростає, отже, приходимо до НВІ від необмеженої функції з особливою точкою $c^0 = 0$.

Формуємо підінтегральну функцію і *обчислюємо* відповідний ВІ:

$$S = 2\pi\int_\alpha^\beta \psi(t)\sqrt{(\varphi'_t)^2 + (\psi'_t)^2}\,dt = \left| \begin{array}{c} x'_t = 2t \\ y'_t = \dfrac{4}{3}\cdot\sqrt[3]{t} \end{array} \right| =$$

$$= 2\pi\int_0^1 \sqrt[3]{t^4}\cdot\sqrt{4t^2 + \frac{16}{9}t^{2/3}}\,dt = \frac{4\pi}{3}\int_0^1 t^{7/3}\cdot\sqrt{9 + 4t^{-4/3}}\,dt \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left| \begin{array}{lcc} m = 7/3,\ n = -4/3,\ p = 1/2 & & \\ \dfrac{m+1}{n} + p = -2 - \text{ціле число} & \Rightarrow & \underbrace{at^{-n} + b = z^s}_{\text{підстановка Чебишева}} \end{array} \right| \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left| \begin{array}{lcl} 9t^{4/3} + 4 = z^2 & \Rightarrow & z = \sqrt{4 + 9t^{4/3}} \\ 12t^{1/3}dt = 2zdz & \Rightarrow & t^{1/3}dt = 1/6\,zdz \end{array} \quad \begin{array}{c|c|c} t & 0 & 1 \\ \hline z & 2 & \sqrt{13} \end{array} \right| \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ S=\frac{2\pi}{81}\int\limits_{2}^{\sqrt{13}}\left(z^4-4z^2\right)dz=\frac{2\pi}{81}\left(\frac{z^5}{5}-\frac{4}{3}z^3\right)\Bigg|_{2}^{\sqrt{13}}=$$

$$=\frac{2\pi}{1215}\left(247\sqrt{13}+64\right)\approx 4{,}94\ \text{(кв. од.)}.$$

Зверніть увагу, інтеграл за новою змінною z уже не є невластивим. (*Перейдіть* до явного завдання $f(x)$ і *зіставте* з $f_1(x)$ на рис. 12.4.16.)

Фізичні застосування ВІ

Виведення розрахункових формул для фізичних величин проведемо за схемою (12.4.1) у скороченому вигляді (пропускаючи проміжні технічні виклади, аналогічні тим, які виконувалися у геометричних застосуваннях): *наведемо* ключову нерівність, *диференціал* належної функції, і власне *відповідний ВІ*.

І. Обчислення (механічної) роботи змінної сили.

Задача 12.4.6. Знайти роботу $\mathcal{A}$ змінної сили $F(s)$ як функції шляху s на відрізку $[a,b]$ за умови, що $F(s)$ є неперервною функцією і напрям сили співпадає з напрямом переміщення матеріальної точки (рис. 12.4.19).

Р о з в' я з а н н я зводиться до відшукання ВІ за змінною s.

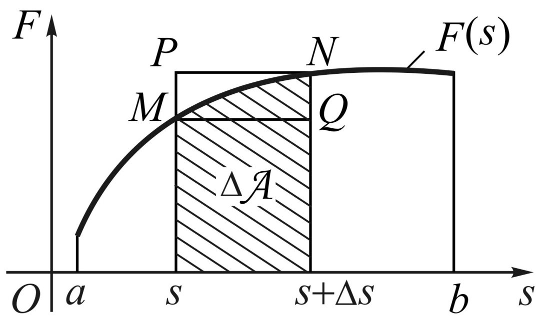


Рис. 12.4.19. **Приріст роботи сили**

Введемо в розгляд функцію $\mathcal{A}(s)$, яка виражає роботу сили $F(s)$ на шляху $[a,s]$, тоді $\mathcal{A}(a)=0$, а $\mathcal{A}(b)=\mathcal{A}$.

За схемою (12.4.1) маємо:

$$F\cdot\Delta s\le\Delta\mathcal{A}\le\left(F+\Delta F\right)\cdot\Delta s\ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow d\mathcal{A}=F(s)ds\ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ \mathcal{A}=\int\limits_a^b F(s)ds. \tag{12.4.32}$$

Приклад. Обчислимо роботу $\mathcal{A}$ сил гравітації при падінні тіла з висоти h. За другим законом Ньютона маємо:

$$F = ma \Rightarrow \left| a = g \approx 9{,}8\ \text{м/с}^2 \right| \Rightarrow F = mg - const \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \mathcal{A} = mg\int_0^h ds \Rightarrow \mathcal{A} = mgh.$$

Як і повинно бути, виконана робота дорівнює потенціальній енергії тіла, піднятого над Землею на висоту h.

II. Обчислення статичних моментів, моментів інерції, координат центра маси плоскої кривої.

Статичним моментом матеріальної точки з масою m відносно деякої осі (прямої) називають добуток маси m на відстань d від точки до осі: $M_l = m \cdot d$. Статичний момент множини (сукупності, системи) матеріальних точок, дискретної чи неперервної, дорівнює сумі їхніх моментів.

Якщо точку віднесено до площини xOy, то, як правило, обчислюють статичні моменти відносно координатних осей: $M_x = m \cdot y$, $M_y = m \cdot x$, де x, y – координати точки, які і вказують на відстань її від осей координат (зі знаком + чи –).

Розглядаючи дугу плоскої кривої $y = f(x)$ на $[a, b]$ як систему матеріальних точок – **матеріальну дугу**, і зосереджуючи усю масу дуги в центрі тяжіння $C(x_c, y_c)$, отримаємо:

$$M_x = m \cdot y_c,\ M_y = m \cdot x_c \Rightarrow x_c = \frac{M_y}{m},\ y_c = \frac{M_x}{m} \qquad (12.4.33)$$

– **координати центра маси** (**центра тяжіння**).

Стосовно розподілу маси дуги вводять поняття „середня густина" і „лінійна густина".

Середньою густиною розподілу маси кривої $\sigma_{\text{сер}}$ називають відношення маси дуги m до її довжини l: $\sigma_{\text{сер}} = m/l$. Для деякого приросту дуги Δl, який викликає приріст маси Δm, відповідно $\sigma_{\text{сер}} = \Delta m / \Delta l$.

Лінійною густиною $\sigma = \sigma(x)$ розподілу маси кривої $y = f(x)$ у точці $M_0(x_0,\ y_0)$ називають границю середньої густини розподілу маси частини дуги Δl, яка містить точку M_0, при стягуванні (зменшенні) цієї частини дуги до точки M_0, тобто:

$$\sigma = \sigma(x)\big|_{x=x_0} = \lim_{\Delta l \to 0} \sigma_{\text{сер}} = \lim_{\Delta l \to 0} \frac{\Delta m}{\Delta l}. \qquad (12.4.34)$$

За умови неперервності і диференційовності маси як функції довжини дуги для будь-якого $x \in [a,b]$ можна записати:

$$\sigma = \sigma(x) = \lim_{\Delta l \to 0} \frac{\Delta m}{\Delta l} = m_l' = \frac{dm}{dl} \;\Rightarrow\; dm = \sigma(x)dl \qquad (12.4.35)$$

– **зв'язок між диференціалами довжини дуги і маси**.

Позначимо через s шлях, пройдений по дузі від початкової до кінцевої точки, тобто покладаємо: $l\big|_{x=a} = 0$, $l\big|_{x=b} = s$. Зінтегрувавши ліву і праву частини рівності (12.4.35) за змінною l, відновимо масу за її диференціалом:

$$dm = \sigma(x)dl \;\Rightarrow\; \int_0^s dm = \int_0^s \sigma(x)\,dl \;\Rightarrow\; m = \int_0^s \sigma(x)\,dl. \qquad (12.4.36)$$

Перехід до змінної інтегрування x з урахуванням (12.4.25) дає:

$$m = \int_0^s \sigma(x)dl \Rightarrow \left|\; dl = \sqrt{dx^2 + dy^2} = \sqrt{1 + (y_x')^2}\,dx, \quad \left|\frac{l}{x}\middle|\frac{0}{a}\middle|\frac{s}{b}\right| \;\right| \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\; m = \int_a^b \sigma(x)\sqrt{1 + (y_x')^2}\,dx \qquad (12.4.37)$$

– **формула маси дуги матеріальної кривої**.

(*Здогадайтеся*, чому чисельно дорівнює маса дуги, якщо $\sigma(x) = 1$ $\forall x \in [a,b]$?)

Дуга кривої називається **однорідною**, або дугою **з рівномірним розподілом маси**, якщо її лінійна густина стала, тобто $\sigma - const$. Із механіки відомо, що центром маси однорідного прямолінійного відрізка є його середина.

Задача 12.4.7. Знайти формули для обчислення статичних моментів M_x, M_y однорідної дуги кривої $y = f(x)$ на $[a,b]$ за умови, що $f(x)$ і $f'(x)$ – неперервні функції.

Р о з в' я з а н н я. Для відшукання M_x і M_y спочатку установимо координати центрів маси хорди $MN = \overline{\Delta l}$, що стягує дугу Δl, і обвідної ламаної $MPN = \overline{\overline{\Delta l}}$ (рис. 12.4.20), а також їхні статичні моменти $\overline{M}_x$ і $\overline{\overline{M}}_x$ відповідно:

$$\begin{gathered}\overline{C}\left(x+\Delta x/2,\, y+\Delta y/2\right), \quad \overline{\overline{C}}\left(x+3/4\,\Delta x,\, y+dy/2\right);\\ \Delta\overline{M}_x = \sigma\overline{\Delta l}\cdot\left(y+\Delta y/2\right), \quad \Delta\overline{\overline{M}}_x = \sigma\overline{\overline{\Delta l}}\cdot\left(y+dy/2\right).\end{gathered} \tag{12.4.38}$$

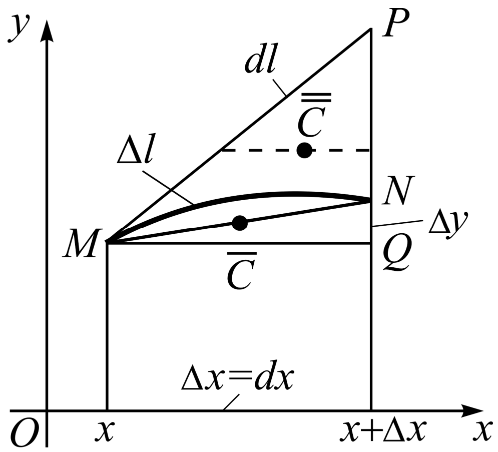


Рис. 12.4.20. **Центри маси $\overline{\Delta l}$ і $\overline{\overline{\Delta l}}$**

Завдяки подвійній нерівності $\overline{\Delta l} \le \Delta l \le \overline{\overline{\Delta l}}$ (див. задачу 12.4.4) маємо: $\Delta\overline{M}_x \le \Delta M_x \le \Delta\overline{\overline{M}}_x$, звідки отримуємо ключову нерівність:

$$\sigma\overline{\Delta l}\left(y+\frac{\Delta y}{2}\right) \le \Delta M_x \le \sigma\overline{\overline{\Delta l}}\left(y+\frac{dy}{2}\right).$$

При $\Delta x \to 0$ величини $\overline{\Delta l}$, Δl, $\overline{\overline{\Delta l}}$ – еквівалентні нескінченно малі.

Це можна показати, якщо подати у розгорнутому вигляді $\overline{\Delta l}$ і $\overline{\overline{\Delta l}}$: $\overline{\Delta l} = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}$, $\overline{\overline{\Delta l}} = \sqrt{dx^2 + dy^2} + dy - \Delta y$.

За умови неперервності і диференційовності моменту як функції довжини дуги, диференціал моменту і його відновлення за змінною l такі:

$$dM_x = \sigma y dl \;\Rightarrow\; M_x = \sigma\int_0^s y dl, \text{ де } y = f(x).$$

Аналогічно для M_y (*наведіть* міркування самостійно):

$$dM_y = \sigma x dl \;\Rightarrow\; M_y = \sigma\int_0^s x dl.$$

Перехід до змінної інтегрування x з урахуванням (12.4.26) дає:

$$\left(M_x = \sigma\int_0^s y dl,\; M_y = \sigma\int_0^s x dl\right) \Rightarrow \left| dl = \sqrt{dx^2+dy^2} = \sqrt{1+(y'_x)^2}dx, \quad \left|\frac{l}{x}\middle|\frac{0}{a}\middle|\frac{s}{b}\right| \right| \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(M_x = \sigma \int_a^b y\sqrt{1+\left(y_x'\right)^2}\, dx,\ M_y = \sigma \int_a^b x\sqrt{1+\left(y_x'\right)^2}\, dx \right) \qquad (12.4.39)$$

– **формули статичних моментів однорідної дуги кривої**.

Отримані формули і співвідношення (12.4.33), (12.4.37), як наслідок, дають **координати центра маси**:

$$x_c = \frac{M_y}{m} = \frac{\int_a^b x\sqrt{1+\left(y_x'\right)^2}\, dx}{\int_a^b \sqrt{1+\left(y_x'\right)^2}\, dx}; \quad y_c = \frac{M_x}{m} = \frac{\int_a^b y\sqrt{1+\left(y_x'\right)^2}\, dx}{\int_a^b \sqrt{1+\left(y_x'\right)^2}\, dx}. \qquad (12.4.40)$$

Формули (12.4.40) справедливі для довільної однорідної кривої, а при $\sigma \equiv 1$ набувають чисто геометричного змісту, бо маса будь-якої дуги кривої вимірюється просто її довжиною. Коли йдеться про момент чи центр тяжіння без згадування про лінійну густину, то вона вважається рівною одиниці.

(*Як виглядатимуть* ці формули, якщо σ є функцією від x?)

Приклад. Знайти координати центра маси арки циклоїди – лінії, яку описує точка кола, що рухається без ковзання по прямій (рис. 12.4.21):

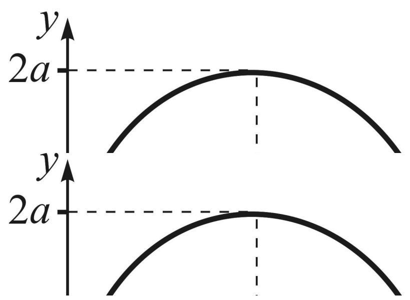


Рис. 12.4.21. **Арка циклоїди**

$$\begin{cases} x = a(t - \sin t), \\ y = a(1 - \cos t), \end{cases} \quad 0 \le t \le 2\pi.$$

Якщо взяти до уваги симетрію дуги відносно прямої $x = \pi a$, то відразу отримуємо: $x_c = \pi a$, і обчислювати M_y немає потреби.

Знаходимо довжину арки:

$$l = 2\int_0^{\pi} \sqrt{\left(x_t'\right)^2 + \left(y_t'\right)^2} dt = \left| \begin{array}{c} x_t' = a(1-\cos t) \\ y_t' = a\sin t \end{array} \right| =$$

$$= 2a\int_0^{\pi} \sqrt{2-2\cos t}\, dt = 4a\int_0^{\pi} \sin\frac{t}{2}\, dt = -8a\cos\frac{t}{2}\Big|_0^{\pi} = 8a.$$

Обчислюємо статичний момент M_x:

$$M_x = 2\int_0^{\pi a} y\sqrt{1+(y'_x)^2}\,dx = \left| y = 2a\sin^2\frac{t}{2} \right| = 8a^2\int_0^{\pi}\sin^3\frac{t}{2}\,dt =$$

$$= 16a^2\left(\frac{1}{3}\cos^3\frac{t}{2} - \cos\frac{t}{2}\right)\Bigg|_0^{\pi} = 16a^2\left[0 - \left(\frac{1}{3} - 1\right)\right] = \frac{32}{3}a^2.$$

Підраховуємо ординату центра тяжіння: $y_c = M_x/l = 4/3a$.

Таким чином: $C(x_c,\ y_c) = C(\pi a,\ 4/3a)$.

Моментом інерції матеріальної точки з масою m відносно осі l називають добуток маси m на квадрат відстані d від точки до осі: $I = m\cdot d^2$. У системі координат xOy розглядають моменти інерції відносно координатних осей: $I_x = m\cdot y^2$, $I_y = m\cdot x^2$, а також центральний (полярний) момент відносно точки O: $I_0 = m\left(x^2 + y^2\right) = I_x + I_y$.

Розглядаючи дугу кривої $y = f(x)$ як систему матеріальних точок, на підставі міркувань, які наводилися при виведенні формул статичних моментів, одержують розрахункові **формули моментів інерції дуги**:

$$I_x = \int_a^b \sigma(x)y^2\sqrt{1+(y'_x)^2}\,dx, \quad I_y = \int_a^b \sigma(x)x^2\sqrt{1+(y'_x)^2}\,dx,$$

$$I_0 = \int_a^b \sigma(x)\left(x^2 + y^2\right)\sqrt{1+(y'_x)^2}\,dx. \qquad (12.4.41)$$

Формули (12.4.41) значно спрощуються, якщо $\sigma = \sigma(x) - const$ $\forall x \in [a,b]$; при $\sigma \equiv 1$ говорять про моменти інерції як характеристики плоскої (геометричної) дуги, а не фізичного, наділеного масою, об'єкта. (*Пропонуємо* як *вправу* подати x_c, y_c к/т через моменти I_y, I_x.)

ІІІ. Обчислення статичних моментів, моментів інерції, координат центра маси плоскої фігури.

Не будемо „матеріалізувати" фігуру, тобто $\sigma \equiv 1$ $\forall x \in [a,b]$, тоді формули (12.4.33) набудуть вигляду:

$$M_x = S \cdot y_c,\ \ M_y = S \cdot x_c \ \Rightarrow\ x_c = \frac{M_y}{S},\ \ y_c = \frac{M_x}{S}, \qquad (12.4.42)$$

де S – площа фігури.

Задача 12.4.8. Знайти формули для обчислення статичних моментів M_x, M_y к/т для неперервної функції $y = f(x)$ на $[a,b]$.

Р о з в' я з а н н я. Із механіки відомо, що центром тяжіння прямокутника є точка перетину його діагоналей. Для відшукання і M_x, і M_y спочатку установимо координати центрів маси вписаного в к/т для $f(x)$ на $[x, x+\Delta x]$ і описаного навколо неї прямокутників (рис. 12.4.22), $\Delta M_{вп}$ і $\Delta M_{оп}$ відповідно (вони позначені жирними точками):

$$C_{вп}(x+\Delta x/2,\ y/2),\quad C_{оп}(x+\Delta x/2,\ (y+\Delta y)/2). \qquad (12.4.43)$$

Тоді стосовно ΔM_x, ΔM_y відповідно маємо:

$$\begin{gathered}\Delta M_{вп} = \Delta x y \cdot y/2,\quad \Delta M_{оп} = \Delta x(y+\Delta y)\cdot(y+\Delta y)/2;\\ \Delta M_{вп} = \Delta x y \cdot (x+\Delta x/2),\quad \Delta M_{оп} = \Delta x(y+\Delta y)\cdot(x+\Delta x/2).\end{gathered} \qquad (12.4.44)$$

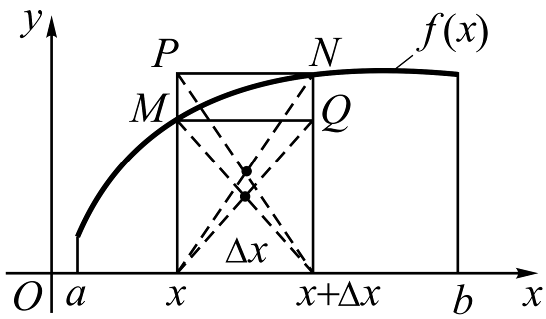


Рис. 12.4.22. **До виведення формул статичних моментів к/т**

Оскільки $\Delta M_{вп} \le \Delta M_x \le \Delta M_{оп}$, то $y \cdot \frac{y}{2} \le \frac{\Delta M_x}{\Delta x} \le (y+\Delta y)\frac{y+\Delta y}{2}$ – ключова нерівність. Звідки:

$$dM_x = \frac{y^2}{2}dx \Rightarrow \int_a^b dM_x = \frac{1}{2}\int_a^b y^2 dx \Rightarrow$$

$$\Rightarrow M_x = \frac{1}{2}\int_a^b y^2 dx \qquad (12.4.45)$$

– **формула статичного моменту к/т відносно осі Ox**.

Аналогічно знайдемо (*наведіть* міркування) **формулу статичного моменту к/т відносно осі Oy**:

$$M_y = \int_a^b xy dx. \qquad (12.4.46)$$

За формулами (12.4.42) отримуємо **координати центра тяжіння** криволінійної трапеції:

$$x_c = \frac{M_y}{S} = \frac{\int_a^b xydx}{\int_a^b ydx}; \quad y_c = \frac{M_x}{S} = \frac{\frac{1}{2}\int_a^b y^2dx}{\int_a^b ydx}. \tag{12.4.47}$$

(*Подумайте*, яка точка є центром маси, якщо фігура має центр симетрії?)

Зауваження:

1) якщо розглядається к/т для неперервної функції $x = \varphi(y)$ на $[c, d]$, то у формулах моментів замінюють (формально) x на y, а y на x;

2) більш складну фігуру подають як результат теоретико-множинних операцій над к/т і поступають так само, як це детально описано стосовно обчислення площі плоскої фігури;

3) обчислення розглянутих характеристик плоских фігур у полярних координатах приводить, як правило, до „екстраординарних” ВІ, навіть коли межі фігури описуються дуже простими рівняннями; *наприклад*: $\rho = \varphi$ (спіраль Архімеда), $\varphi = 0$, $\varphi = \pi/2$ (*переконайтеся*).

Приклад. Знайти M_x, M_y, x_c, y_c фігури, що обмежена лініями: $\rho = \left(\sqrt[3]{\cos^2\varphi} + \sqrt[3]{\sin^2\varphi}\right)^{-3/2}$, $\varphi = 0$, $\varphi = \pi/2$, суміщаючи полярну і декартову системи координат.

Перейдемо до декартових координат (щоб використати відповідні розрахункові формули):

$$\left| \begin{array}{c} \rho = \sqrt{x^2 + y^2}, \\ \cos\varphi = x/\rho,\ \sin\varphi = y/\rho \end{array} \right| \Rightarrow \rho = \left(\frac{\sqrt[3]{x^2} + \sqrt[3]{y^2}}{\sqrt[3]{\rho^2}} \right)^{-3/2} \Rightarrow \sqrt[3]{x^2} + \sqrt[3]{y^2} = 1,$$

звідки можна установити явне завдання функції.

Але найзручнішою для обчислень є параметрична форма, вона дає можливість позбавитись від ірраціональності: $\begin{cases} x = \cos^3 t, \\ y = \sin^3 t, \end{cases} \quad t \in [0, \pi/2].$

На проміжку $0 \le t \le 2\pi$ отримаємо зімкнену лінію, яка називається **астроїдою** (рис. 12.4.23).

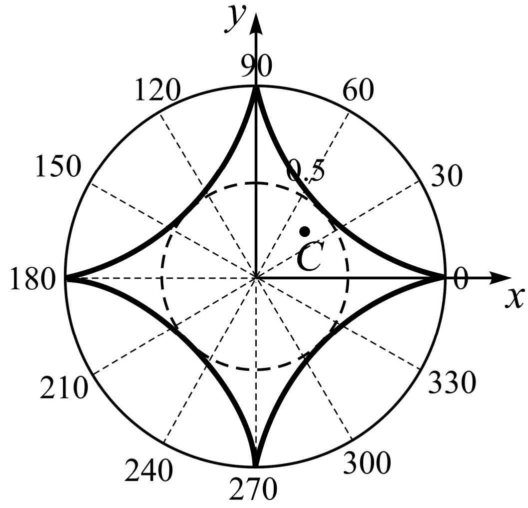


Рис. 12.4.23. **Астроїда**

Обчислюємо площу фігури, обмеженої дугою астроїди в першій чверті і осями координат Ox, Oy, розглядаючи її як к/т з основою на Oy (щоб урізноманітнити формули моментів):

$$S=\int_0^1 x\,dy=\left|\begin{array}{c} x=\cos^3 t,\quad t\in[0,\pi/2] \\ dy=3\sin^2 t\cos t\,dt\end{array}\right|=$$

$$=3\int_0^{\pi/2}\cos^4 t\sin^2 t\,dt=\frac{3\pi}{32}\ \text{(кв. од.)}.$$

Якщо виходити з рівняння $\rho=\rho(\varphi)$, то прийшли б до ВІ від функції, ірраціонально залежної від тригонометричних:

$$S=\frac{1}{2}\int_0^{\pi/2}\rho^2(\varphi)d\varphi=\frac{1}{2}\int_0^{\pi/2}\left(\sqrt[3]{\cos^2\varphi}+\sqrt[3]{\sin^2\varphi}\right)^{-3}d\varphi.$$

Знаходимо статичні моменти:

$$M_x=\int_0^1 xydy=\left|\begin{array}{c} x=\cos^3 t,\ y=\sin^3 t \\ dy=3\sin^2 t\cos t\,dt\end{array}\right|=3\int_0^1\cos^4 t\sin^5 t\,dt=$$

$$=\left|\begin{array}{c} z=\cos t \\ dz=-\sin t\,dt\end{array}\right|=-3\int_1^0 z^4(1-z^2)^2dz=3\left(\frac{z^5}{5}-\frac{2z^7}{7}+\frac{z^9}{9}\right)\Bigg|_0^1=\frac{8}{105}.$$

Завдяки симетрії фігури відносно прямої $y=x$ обчислювати M_y немає потреби, бо $M_y=M_x$ (*чому?*).

Підраховуємо координати центра тяжіння:

$$x_c=y_c=\frac{M_x}{S}=\frac{8}{105}:\frac{3\pi}{32}=\frac{256}{315\pi}\approx 0{,}26.$$

(Центр маси фігури, обмеженої астроїдою, *міститься* у точці …?)

Формули моментів інерції к/т одержують на підставі міркувань, які висвітлювалися при виведенні формул статичних моментів для $y=f(x)$

на $[a,b]$, тільки замість відстані центра маси від осі треба брати, за означенням, її квадрат (*пропонуємо* вивести їх самостійно):

$$I_x = \frac{1}{4}\int_a^b y^3\,dx, \quad I_y = \int_a^b x^2 y\,dx, \; I_0 = \frac{1}{4}\int_a^b y\left(4x^2 + y^2\right)dx. \qquad (12.4.48)$$

Зважаючи на вигляд підінтегральної функції, буває доцільним розглядати криволінійну трапецію для $x = \varphi(y)$ з основою на $[c,d] \subset Oy$. (*Запишіть* формули моментів для к/т з основою на осі Oy.)

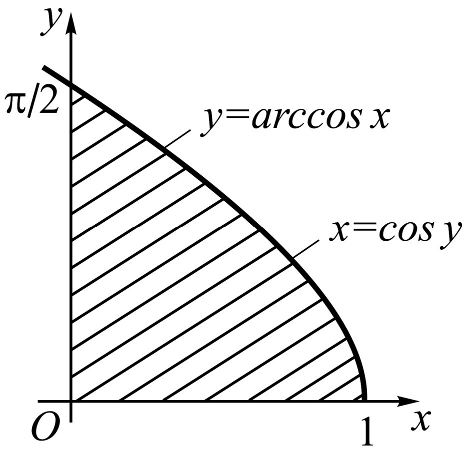


Рис. 12.4.24. **Фігура Φ**

Приклад. Знайти моменти інерції I_x, I_y плоскої фігури Φ, обмеженої координатними осями і лінією $y = \arccos x$ (рис. 12.4.24).

Будемо розглядати фігуру Φ як к/т для $x = \cos y$ на $[0, \pi/2]$ (*а чому* не для $y = \arccos x$ на $[0,1]$?).

Тоді формули (12.4.46) набувають вигляду:

$$I_x = \int_c^d xy^2 dy, \quad I_y = \frac{1}{4}\int_c^d x^3 dy.$$

Обчислюємо відповідні ВІ:

$$\left|\begin{array}{c} x = \cos y \\ c = 0,\ d = \pi/2 \end{array}\right| \Rightarrow I_x = \int_0^{\pi/2} y^2 \cos y dy = \left|\begin{array}{ll} u = y^2, & du = 2ydy \\ dv = \cos y dy, & v = \sin y \end{array}\right| =$$

$$= uv\Big|_0^{\pi/2} - \int_0^{\pi/2} v du = y^2 \sin y\Big|_0^{\pi/2} - 2\int_0^{\pi/2} y \sin y dy = \frac{\pi^2}{4} - 2I_1;$$

$$\left|\begin{array}{ll} u = y, & du = dy \\ dv = \sin y dy, & v = -\cos y \end{array}\right| \Rightarrow I_1 = -y\cos y\Big|_0^{\pi/2} + \int_0^{\pi/2} \cos y dy = \sin y\Big|_0^{\pi/2} = 1.$$

Остаточно: $I_x = \dfrac{\pi^2 - 8}{4} \approx 0{,}47$.

$$I_y=\frac{1}{4}\int_c^d x^3dy=\frac{1}{4}\int_0^{\pi/2}\cos^3 y\,dy=\left|\begin{array}{ll} t=\sin y & \begin{array}{c|c|c} y & 0 & \pi/2 \\ t & 0 & 1 \end{array} \\ dt=\cos y\,dy & \end{array}\right|=$$

$$=\frac{1}{4}\int_0^1\left(1-t^2\right)dt=\frac{1}{4}\left(t-\frac{t^3}{3}\right)\Bigg|_0^1=\frac{1}{4}\cdot\frac{2}{3}=\frac{1}{6}\approx 0{,}17\,.$$

(*Які методи* визначеного інтегрування використовувалися при обчисленні моментів?)

Економічні застосування ВІ

Повернемось до економічної моделі, що описує процес ціноутворення на ринку – модель **„попит-пропозиція”** (див. задачу 3.1.15 частини 1). Будь-який споживач хотів би купити товар якомога дешевше, але для кожного з них існує максимальна ціна, яку він згоден заплатити за дану одиницю товару, перш ніж відмовиться від її покупки. Така ціна називається **ціною попиту** p. Сукупність цін попиту всіх споживачів утворює **криву ринкового попиту**: $p=f(x)$.

Разом з тим всі споживачі, незалежно від їх цін попиту, купують товар по єдиній ринковій ціні p_0. Різниця між індивідуальною ціною попиту та ринковою ціною складає **виграш споживача** (споживчий надлишок) при покупці даної одиниці товару. Це свого роду **прибуток споживача**.

Будь-який виробник хотів би продати товар якомога дорожче, але для кожного з них існує мінімальна ціна, за якою він ще погодиться продавати дану одиницю товару, перш ніж відмовиться від її виробництва і продажу. Така ціна називається **ціною пропозиції** p. Сукупність цін пропозиції всіх виробників утворює **криву ринкової пропозиції** $p=g(x)$.

Разом з тим всі виробники, незалежно від їх цін пропозиції, продають товар за єдиною ринковою ціною p_0. Різниця між ринковою ціною та індивідуального ціною пропозиції і складає **виграш виробника** (надлишок виробника) при продажу даної одиниці товару. Зауважимо, що виграш виробника зазвичай не дорівнює його прибутку.

Дамо пояснення на простому прикладі. Нехай три фірми виробляють однорідний товар, але з різними витратами на виготовлення одиниці

товару. Нехай витрати першої складають 10 грн, другої – 11 грн, а третьої – 12 грн. Припустимо також, що на ринку цей товар коштує 12 грн. Тоді, продаючи по даній ціні свої товари, перша фірма виграє 2 грн, друга – 1 грн, а третя виграшу не отримує. Виграш споживачів розраховується за такою ж схемою.

Задача 12.4.9 (*про виграш споживачів та виробників*). Нехай *крива попиту* на деякий товар описується функцією $p = f(x)$, а *крива пропозиції* на той самий товар – функцією $p = g(x)$. Знайти виграш споживачів та виграш виробників (постачальників).

Р о з в' я з а н н я. Вздовж осі Ox відкладається кількість товару (x), а вздовж осі Oy – його вартість (p). На рис. 12.4.25 наведено графіки цих кривих.

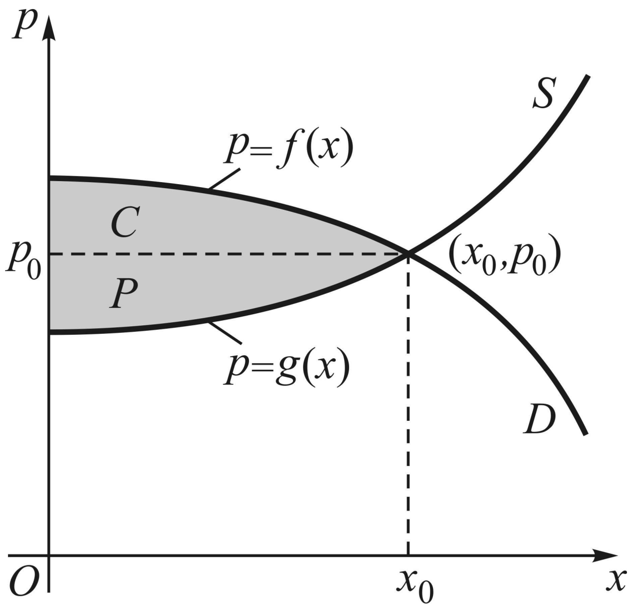


Рис. 12.4.25. **Криві попиту D та пропозиції S**

Традиційно крива попиту позначається літерою D, а крива пропозиції – літерою S (див. рис. 12.4.25). Точка перетину цих кривих (x_0, p_0) називається **точкою рівноваги**, якій відповідає ринкова ціна продукції. Зрозуміло, що деякі споживачі зможуть заплатити за товар ціну $p > p_0$. Знайдемо виграш споживачів від встановленої ціни p_0.

Розіб'ємо проміжок $[0, x_0]$ на n частин точками:

$$0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_n = x_0.$$

На кожному частковому проміжку $x_{i-1} \le x \le x_i$ візьмемо довільну точку u_i, $i = \overline{1,n}$. Виграш споживачів на відрізку $[x_{i-1}, x_i]$ становить $(f(u_i) - p_0)\cdot \Delta x_i$, де $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$. Тоді середній виграш на проміжку $[0, x_0]$ такий: $\sum\limits_{i=1}^{n}(f(u_i) - p_0)\cdot \Delta x_i$. Він є інтегральною сумою для функції $f(x) - p_0$ відрізку $[0, x_0]$.

Якщо функція попиту неперервна і $n \to \infty$, а $\max \Delta x_i \to 0$, то ця інтегральна сума має границю, яка визначає виграш споживачів C:

$$C = \int_0^{x_0} \left(f(x) - p_0 \right) dx \quad \text{або} \quad C = \int_0^{x_0} f(x) dx - p_0 x_0. \qquad (12.4.49)$$

Аналогічно обчислюється виграш постачальників:

$$P = p_0 x_0 - \int_0^{x_0} g(x) dx. \qquad (12.4.50)$$

Очевидно, що виграш споживачів C дорівнює площі між кривою попиту D та прямою $p = p_0$. Виграш постачальників P дорівнює площі між прямою $p = p_0$ та кривою пропозиції S.

Запитання для самодіагностики засвоєння матеріалу

Відповіді на всі запитання сформулюйте словесно, запишіть в символічній формі, обґрунтуйте (на підставі означень, теорем, правил, формул тощо), наведіть відповідні конкретні приклади.

1. Дайте означення визначеного інтеграла. Розкрийте його геометричний та фізичний смисли.
2. Сформулюйте теорему про існування визначеного інтеграла.
3. Сформулюйте і доведіть основні властивості визначеного інтеграла.
4. Сформулюйте і доведіть теорему про похідну від інтеграла із змінною верхньою межею.
5. Запишіть і доведіть формулу Ньютона – Лейбніца.
6. У чому полягає метод заміни змінної у визначеному інтегралі?
7. У чому полягає метод інтегрування частинами у визначеному інтегралі?
8. Що називається невластивим інтегралом першого типу?
9. Що називається невластивим інтегралом другого типу?
10. Наведіть ознаки збіжності невластивих інтегралів першого і другого типів.

11. Як обчислити площу плоскої фігури: а) у декартових координатах; б) у полярних координатах; в) у випадку лінії, заданої параметричними рівняннями?

12. Виведіть формулу для обчислення об'ємів тіл обертання.

13. Виведіть формулу для обчислення об'єму тіла за площами його поперечних перерізів.

14. Виведіть формулу для обчислення площі поверхні обертання.

15. Які фізичні застосування визначеного інтеграла ви знаєте?

Задачі та вправи

1. Обчислити за означенням визначені інтеграли, розбиваючи проміжок інтегрування на n рівних частин і вибираючи значення аргументу для складання інтегральної суми в лівих (чи правих) кінцях частин розбиття:

1) $\int\limits_0^5 (3+x)dx$; 2) $\int\limits_{-1}^2 x^2 dx$;

3) $\int\limits_2^3 e^x dx$; 4) $\int\limits_0^1 3^x dx$.

2. Здійснити безпосереднє визначене інтегрування:

1) $\int\limits_0^1 \sqrt{1-2x}\,dx$; 2) $\int\limits_{-2}^{-1} \frac{dx}{(11+5x)^2}$;

3) $\int\limits_0^{\pi/8} \cos(2x+\pi/4)dx$; 4) $\int\limits_0^{\pi/4} \sin^2\varphi\, d\varphi$;

5) $\int\limits_1^4 \frac{1+\sqrt{y}}{y^2}dy$; 6) $\int\limits_0^1 \frac{x-4}{\sqrt{x}-2}dx$;

7) $\int\limits_{\pi/6}^{\pi/3} \frac{dx}{\sin^2 x - \sin^4 x}$; 8) $\int\limits_{\pi/4}^{\pi/3} \frac{dx}{tg^2 x}$.

9) $\int\limits_2^3 \frac{dx}{x^2-4x+5}$; 10) $\int\limits_0^1 \frac{x^2+x+2}{(x+1)(x^2+1)}dx$;

11) $\int\limits_1^2 \frac{x^4+1}{\left(x^2+1\right)\cdot x^3}dx$; 12) $\int\limits_2^3 \frac{dx}{(x+1)\left(x^2-1\right)}$.

3. Обчислити:

а) $\int\limits_0^2 f(x)dx$, якщо $f(x)=\begin{cases} e^x, & 0\le x<1, \\ 1, & 1\le x\le 2; \end{cases}$

б) $\int\limits_{-\pi/4}^{\pi/4} f(x)dx$, якщо $f(x)=\begin{cases} \sin^2 x, & -\pi/4\le x\le 0, \\ tg\, x, & 0<x\le \pi/4. \end{cases}$

4. З'ясувати, не обчислюючи, який з інтегралів менший:

а) $I_1=\int\limits_{\pi/6}^{\pi/4}\cos x\,dx$ або $I_2=\int\limits_{\pi/6}^{\pi/4}\cos^2 x\,dx$;

б) $I_1=\int\limits_1^{15} x^5\,dx$ або $I_2=\int\limits_1^{15} x^6\,dx$;

в) $I_1=\int\limits_{-1}^{0} 4^{-x}\,dx$ або $I_2=\int\limits_{-1}^{0} 5^{-x}\,dx$.

5. Визначити знак інтеграла, не обчислюючи його:

а) $I=\int\limits_1^2\left(x^2-4x+3\right)dx$; б) $I=\int\limits_{\pi/2}^{\pi} x\cdot\sin x\,dx$.

6. Обчислити інтеграли методом підстановки (заміни змінної):

1) $\int\limits_1^e \frac{\sin\ln x}{x}dx$; 2) $\int\limits_0^1 \frac{x^2+1}{\left(x^3+3x+1\right)^5}dx$;

3) $\int\limits_0^{\ln 5} \frac{e^x\sqrt{e^x-1}}{e^x+3}dx$; 4) $\int\limits_0^{\sqrt{3}} \frac{2x+arctg^3 x}{1+x^2}dx$;

5) $\int\limits_0^1 \frac{x^3}{x^8-4}dx$; 6) $\int\limits_1^{\cos 1} \frac{\arccos^2 x-2}{\sqrt{1-x^2}}dx$;

7) $\int\limits_{\pi/6}^{\pi/2} \frac{\sin x + x\cos x}{(x\cdot \sin x)^2}\,dx$;

8) $\int\limits_{0}^{\pi^2/16} \frac{tg\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}\cdot\cos^2\sqrt{x}}\,dx$;

9) $\int\limits_{4}^{9} \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1}\,dx$;

10) $\int\limits_{0}^{5} \frac{x}{\sqrt{3x+1}}\,dx$;

11) $\int\limits_{0}^{1} \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\,dx$;

12) $\int\limits_{\sqrt{2}/2}^{1} \frac{\sqrt{1-x^2}}{x^4}\,dx$;

13) $\int\limits_{0}^{3\sqrt{3}} x^3\cdot\sqrt{x^2+9}\,dx$;

14) $\int\limits_{2}^{4/\sqrt{3}} \frac{\sqrt{x^2-4}}{x}\,dx$;

15) $\int\limits_{-\pi/2}^{0} \frac{\sin 2x}{\sin^2 x+2}\,dx$;

16) $\int\limits_{0}^{\pi/2} \frac{dx}{1+\cos x+\sin x}$;

17) $\int\limits_{0}^{\pi/4} \frac{dx}{4-3\sin^2 x}$;

18) $\int\limits_{0}^{1} \frac{x\,dx}{\sqrt{x^4+2x^2+2}}$;

19) $\int\limits_{-5}^{-3} \frac{3x+7}{x^2+10x+29}\,dx$;

20) $\int\limits_{0}^{\pi/2} \sin^3 x\cos^4 x\,dx$;

21) $\int\limits_{0}^{\pi/4} tg^3 x\,dx$;

22) $\int\limits_{0}^{\pi/2} \frac{\cos x}{6-5\sin x+\sin^2 x}\,dx$.

7. З’ясувати, чи можна обчислити інтеграл $\int\limits_{0}^{3} 2x\cdot\sqrt[3]{4-x^2}\,dx$ підстановкою $x = 2\cos t$.

8. Обчислити інтеграли методом інтегрування частинами:

1) $\int\limits_{0}^{\pi/2} (2x-\pi)\cos 3x\,dx$;

2) $\int\limits_{0}^{\pi} x\sin^2\frac{x}{2}\,dx$;

3) $\int\limits_{0}^{\ln 2} e^{2x+e^x}\,dx$;

4) $\int\limits_{0}^{1} x\cdot\arccos x\,dx$;

5) $\int\limits_{0}^{1} \arcsin^2 x\,dx$;

6) $\int\limits_{0}^{\pi/4} \frac{x}{\cos^2 x}\,dx$;

7) $\int\limits_{-2}^{0} x\cdot\ln(x+3)\,dx$; 8) $\int\limits_{1}^{e} \frac{\ln^3 x}{x^2}\,dx$;

9) $\int\limits_{0}^{1} \frac{x\,arctgx}{\sqrt{1+x^2}}\,dx$; 10) $\int\limits_{\pi/4}^{\pi/3} 4x\cdot tg^2 x\,dx$.

9. Знайти середнє значення визначеного інтеграла від функції $f(x)$ на проміжку $[a,b]$:

а) $f(x)=\frac{1}{x^2+x}$, $[a,b]=[1,3/2]$; б) $f(x)=\ln x$, $[a,b]=[1,2]$;

в) $f(x)=\sin^2 x$, $[a,b]=[0,\pi]$; г) $f(x)=\cos^3 x$, $[a,b]=[0,\pi/2]$.

10. Знайти межі вартостей визначених інтегралів:

а) $I=\int\limits_{-1}^{1} \frac{dx}{8+x^3}$; б) $I=\int\limits_{-1}^{1} \sqrt{8+x^3}\,dx$;

в) $I=\int\limits_{0}^{\pi/2} \frac{\sin x}{x}\,dx$; г) $I=\int\limits_{0}^{2\pi} \frac{dx}{10+3\cos x}$.

11. Обчислити площу фігури, обмеженої заданими лініями:

1) $y-3x+1=0$, $y=x^2-2x+3$; 2) $y^2=2x+1$, $x-y-1=0$;

3) $y=x^2-6$, $y=-x^2+5x-6$; 4) $y=(x-1)^2$, $x^2-y^2/2=1$;

5) $xy=20$, $x^2+y^2=41$ (I чверть); 6) $y=2-x^2$, $y^3=x^2$;

7) $y=\arcsin x$, $\pi x=2y$; 8) $y=\frac{8}{x^2+4}$, $y=\frac{x^2}{4}$;

9) $\begin{cases} x=a\cos t, \\ y=b\sin t; \end{cases}$ 10) $\begin{cases} x=a\cos^3 t, \\ y=a\sin^3 t; \end{cases}$

11) $\begin{cases} x=2(t-\sin t), \\ y=2(1-\cos t) \end{cases}$ $(0\le t\le 2\pi)$, $y=0$;

12) $\begin{cases} x=3t^2, \\ y=3t-t^3; \end{cases}$ 13) $\begin{cases} x=t^3-3t, \\ y=t^2+1; \end{cases}$

14) $\begin{cases} x = 2 + 3\cos t, \\ y = 3 + 2\sin t; \end{cases}$

15) $\begin{cases} x = 3at \big/ \left(1 + t^3\right), \\ y = 3at^2 \big/ \left(1 + t^3\right); \end{cases}$

16) $\rho = a \sin 3\varphi$;

17) $\rho = 5\cos\varphi$;

18) $\rho = a/\varphi \ \ (\pi/4 \le \varphi \le 2\pi)$;

19) $\rho^2 = 2\cos 2\varphi$;

20) $\rho = a(1 - \cos\varphi)$;

21) $\rho = 2\sqrt{\sin 2\varphi}$;

22) $\rho = 3(1 + \sin\varphi)$;

23) $\rho = 2 + \cos\varphi$.

12. Користуючись формулою обчислення об'єму тіла за площами поперечних перерізів, знайти об'єм тіла, обмеженого:

а) еліпсоїдом $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} + \dfrac{z^2}{c^2} = 1$;

б) еліптичним параболоїдом $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = z$ і площиною $z = h$.

(*Вказівка*: скористатися результатом задачі 11-9).)

13. Обчислити об'єм тіла, утвореного обертанням навколо вказаної осі фігури, що обмежена заданими лініями:

1) $y = x^2$, $x = 1$, $x = 2$, $y = 0$, навколо: а) осі Ox; б) осі Oy;

2) $x^2 + 4y^2 = 4$, навколо: а) осі Ox; б) осі Oy;

3) $y = \sin x \ \ (0 \le x \le \pi)$, $y = 0$, навколо: а) осі Ox; б) осі Oy;

4) $x^2 + (y - 3)^2 = 4$, навколо осі Ox;

5) $xy = 6$, $x = 1$, $x = 4$, $y = 0$, навколо: а) осі Ox; б) осі Oy;

6) $y = 2x - x^2$, $y = 2 - x$, навколо осі Ox;

7) $3x - y = 0$, $3x - 4y = 0$, $y = 3$, навколо осі Ox;

8) $\begin{cases} x = \cos t, \\ y = \sin 2t \end{cases} \ (0 \le t \le \pi/2)$, $y = 0$, навколо осі Ox;

9) $\begin{cases} x = a(t - \sin t), \\ y = a(1 - \cos t) \end{cases} \ (0 \le t \le 2\pi)$, $y = 0$, навколо осі Ox;

10) $\begin{cases} x = \cos^3 t, \\ y = \sin^3 t, \end{cases}$ навколо осі Ox;

11) $\begin{cases} x = t^2, \\ y = t - t^3/3, \end{cases}$ навколо осі Ox;

12) $\rho^2 = \cos 2\varphi$, навколо полярної осі OP;

13) $\rho = a\sin 2\varphi$, навколо полярної осі OP;

14) $\rho = \cos^2 \varphi$, навколо полярної осі OP.

14. Обчислити довжину дуги кривої:

1) $y = \ln\sin x$ на відрізку $[\pi/3, 2\pi/3]$;

2) $y = \dfrac{x^2}{2}$ від точки $O(0,0)$ до точки $A(1,1/2)$;

3) $\begin{cases} x = a\cos^3 t, \\ y = a\sin^3 t; \end{cases}$; 4) $\begin{cases} x = a(t - \sin t), \\ y = a(1 - \cos t) \end{cases}$ $(0 \le t \le 2\pi)$;

5) $\rho = a\sin^3\dfrac{\varphi}{3}$ від $\varphi = 0$ до $\varphi = 3\pi$; 6) $\rho = a(1 + \cos\varphi)$.

15. Обчислити площу поверхні, утвореної обертанням дуги кривої навколо осі Ox (в системі $\rho O\varphi$ – навколо полярної осі):

1) $y = x^3$ $(0 \le x \le 1/2)$; 2) $y^2 = 2x$ $(0 \le x \le 4)$;

3) $y = \sin 2x$ $(0 \le x \le \pi/2)$; 4) $9y^2 = x(3 - x)^2$;

5) $\begin{cases} x = a(t - \sin t), \\ y = a(1 - \cos t) \end{cases}$ $(0 \le t \le 2\pi)$; 6) $\begin{cases} x = a\cos t, \\ y = a\sin t; \end{cases}$

7) $\rho = 4\sin\varphi$; 8) $\rho = 2\cos\varphi$;

9) $\rho = 2\sqrt{\cos 2\varphi}$.

16. Яка робота виконується під час стискання пружини на 5 см, якщо для стискання пружини на 1 см витрачається сила 4 Н. Стиск пружини пропорційний прикладеній силі.

17. Знайти статичний момент відносно осі Ox однорідної дуги кривої $y = \cos x$ $(0 \le x \le \pi/2)$, якщо її лінійна густина $\sigma = 2$.

18. Знайти момент інерції відносно осі Ox і координати центра тяжіння дуги кола $x^2 + y^2 = a^2$, розташованої у I координатній чверті.

19. Знайти координати центра тяжіння півкруга $x^2 + y^2 \le a^2$, $y \ge 0$.

20. Знайти момент інерції відносно осі Oy фігури, обмеженої дугою еліпса $x = a\cos t$, $y = b\sin t$ $(y \ge 0)$ і віссю Ox.

21. Обчислити невластиві інтеграли або встановити їх розбіжність:

1) $\int\limits_0^{+\infty} \frac{dx}{x^2 + x + 1}$;
2) $\int\limits_1^{+\infty} \frac{dx}{x + \sqrt{x}}$;

3) $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x\sqrt{1-x}}$;
4) $\int\limits_{-\infty}^{0} x \cdot \cos x\, dx$;

5) $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} x^3 e^{-x^2} dx$;
6) $\int\limits_0^{+\infty} \frac{dx}{(x^2+1)^2}$;

7) $\int\limits_e^{+\infty} \frac{dx}{x\sqrt{\ln^3 x}}$;
8) $\int\limits_1^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{x} \cdot (1+x)}$.

22. Дослідити задані інтеграли на збіжність:

1) $\int\limits_1^{+\infty} \frac{\cos x}{\sqrt{x^4 + 1}} dx$;
2) $\int\limits_1^{+\infty} \frac{x+2}{\sqrt{x^3 - 2x^2 + 2}} dx$;

3) $\int\limits_0^{+\infty} \frac{arctgx}{\sqrt{(x^2+1)^3}} dx$;
4) $\int\limits_1^{+\infty} \ln \frac{x^2+5}{x^2+2} dx$;

5) $\int\limits_1^{+\infty} \frac{2 + 3\cos x}{x^4} dx$;
6) $\int\limits_1^{+\infty} \frac{\ln(1+x)}{x} dx$.

23. Обчислити невластиві інтеграли або встановити їх розбіжність:

1) $\int\limits_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x}}$;
2) $\int\limits_0^1 \frac{\ln x}{x} dx$;

3) $\int\limits_{-1}^1 \frac{3x^2+2}{\sqrt[3]{x^2}} dx$;
4) $\int\limits_1^2 \frac{dx}{x\ln x}$;

5) $\int\limits_0^2 \frac{x^5}{\sqrt{4 - x^2}} dx$;
6) $\int\limits_0^1 x \ln^2 x\, dx$;

7) $\int\limits_{0}^{1/\ln 2} \frac{e^{1/x}}{x^3}\,dx$;

8) $\int\limits_{1}^{2} \frac{2dx}{\sqrt{(x-1)(2-x)}}$.

24. Дослідити задані інтеграли на збіжність:

1) $\int\limits_{0}^{1} \frac{\sin x}{\sqrt{x^3+x^5}}\,dx$;

2) $\int\limits_{0}^{1} \frac{\sqrt{x}}{\ln\left(1+x^2\right)}\,dx$;

3) $\int\limits_{0}^{1} \frac{dx}{x\cdot(1-\cos 2x)}$;

4) $\int\limits_{0}^{1} \frac{\ln\left(1+\sqrt[3]{x}\right)}{e^{\sin x}-1}\,dx$;

5) $\int\limits_{0}^{1} \frac{dx}{3x^2+\sqrt[3]{x}}$;

6) $\int\limits_{0}^{1} \frac{\cos^2 x}{1-x^2}\,dx$.

Відповіді

1. 1) $27{,}5$; 2) 3; 3) e^3-e^2; 4) $2/\ln 3$.

2. 1) $1/3$; 2) $1/6$; 3) $\left(2-\sqrt{2}\right)/4$; 4) $(\pi-2)/8$; 5) $7/4$; 6) $8/3$; 7) $4/\sqrt{3}$; 8) $\left(12-4\sqrt{3}-\pi\right)/12$; 9) $\pi/4$; 10) $\ln 2+\pi/4$; 11) $\ln\frac{5}{4}+\frac{3}{8}$; 12) $\frac{1}{4}\ln\frac{3}{2}-\frac{1}{24}$.

3. а) e; б) $\frac{\pi-2}{8}+\ln\sqrt{2}$.

4. а) I_2; б) I_1; в) I_1.

5. а) $I<0$; б) $I>0$.

6. 1) $1-\cos 1$; 2) $52/625$; 3) $4-\pi$; 4) $\ln 4+\pi^4/324$; 5) $-\ln 3/16$; 6) $5/3$; 7) $10/\pi$; 8) 3; 9) $7+2\ln 2$; 10) 4; 11) $(\pi-2)/2$; 12) $1/3$; 13) $\frac{4698}{5}$; 14) $\frac{2\sqrt{3}}{3}-\frac{\pi}{3}$; 15) $\ln\frac{2}{3}$; 16) $\ln 2$; 17) $\frac{1}{2}arctg\frac{1}{2}$; 18) $\frac{1}{2}\ln\left|\frac{2+\sqrt{5}}{1+\sqrt{2}}\right|$; 19) $1{,}5\ln 2-\pi$; 20) $2/35$; 21) $(1-\ln 2)/2$; 22) $\ln(4/3)$.

7. Ні.

8. 1) $-2/9$; 2) $1+\frac{\pi^2}{4}$; 3) e^2; 4) $\pi/8$; 5) $\frac{\pi^2}{4}-2$; 6) $\frac{\pi}{4}-\frac{\ln 2}{2}$; 7) $4-4{,}5\ln 3$; 8) $6-\frac{16}{e}$; 9) $\frac{\sqrt{2}\pi}{4}-\ln\left(1+\sqrt{2}\right)$; 10) $\frac{4\sqrt{3}}{3}\pi-\frac{7\pi^2}{72}-\pi-\ln 4$.

9. а) $2\ln\frac{6}{5}$; б) $\ln 4-1$; в) $1/2$; г) $\frac{4}{3\pi}$.

10. а) $2/9\le I\le 2/7$; б) $2\sqrt{7}\le I\le 6$; в) $1\le I\le \pi/2$; г) $2\pi/13\le I\le 2\pi/7$.

11. 1) $\frac{9}{2}$; 2) $\frac{16}{3}$; 3) $\frac{125}{24}$; 4) $\frac{10}{3}+\frac{\sqrt{2}}{2}\ln\left(3+\sqrt{8}\right)$; 5) $\frac{41}{2}\arcsin\frac{9}{41}+$ $+20\ln\frac{4}{5}$; 6) $\frac{32}{15}$; 7) $2-\frac{\pi}{2}$; 8) $2\pi-\frac{4}{3}$; 9) πab; 10) $\frac{3\pi a^2}{8}$; 11) 12π; 12) $\frac{72\sqrt{3}}{5}$; 13) $\frac{24\sqrt{3}}{5}$; 14) 6π; 15) $\frac{3a^2}{2}$; 16) $\frac{\pi a^2}{4}$; 17) $\frac{25\pi}{4}$; 18) $\frac{7a^2}{4\pi}$; 19) 2; 20) $\frac{3\pi a^2}{2}$; 21) 2; 22) $\frac{27\pi}{2}$; 23) $4{,}5\pi$.

12. а) $\frac{4}{3}\pi abc$; б) $\frac{1}{2}\pi abh^2$.

13. 1) а) $31\pi/5$, б) $15\pi/2$; 2) а) $8\pi/3$, б) $16\pi/3$; 3) а) $\pi^2/2$, б) $2\pi^2$; 4) $24\pi^2$; 5) а) 27π, б) 36π; 6) $\pi/5$; 7) 18π; 8) $8\pi/15$; 9) $5\pi^2a^3$; 10) $32\pi/105$; 11) $3\pi/4$; 12) $\frac{\pi}{6\sqrt{2}}\left(3\ln\left(\sqrt{2}+1\right)-\sqrt{2}\right)$; 13) $\frac{64}{105}\pi a^3$; 14) $\frac{4\pi}{21}$.

14. 1) $\ln 3$; 2) $\frac{1}{2}\left(\sqrt{2}+\ln\left(1+\sqrt{2}\right)\right)$; 3) $6a$; 4) $8a$; 5) $\frac{3\pi a}{2}$; 6) $8a$.

15. 1) $\frac{61\pi}{1728}$; 2) $\frac{52\pi}{3}$; 3) $\frac{\pi}{2}\left(2\sqrt{5}+\ln\left(\sqrt{5}+2\right)\right)$; 4) 3π; 5) $\frac{64\pi a^2}{3}$; 6) $4\pi a^2$; 7) $16\pi^2$; 8) 4π; 9) $8\pi\left(2-\sqrt{2}\right)$.

16. $0{,}5$ Дж.

17. $M_x=\sqrt{2}+\ln\left(1+\sqrt{2}\right)$

18. $I_x=\pi a^3/4$, $C(2a/\pi, 2a/\pi)$.

19. $C\left(0,\frac{4a}{3\pi}\right)$.

20. $I_y=\pi a^3b/8$.

21. 1) $\frac{2\pi}{3\sqrt{3}}$; 2) розбігається; 3) 0; 4) розбігається; 5) 0; 6) $\pi/4$; 7) 2; 8) $\pi/2$.

22. 1) збігається; 2) розбігається; 3) збігається; 4) збігається; 5) збігається; 6) розбігається.

23. 1) 2; 2) розбігається; 3) $102/7$; 4) розбігається; 5) $256/15$; 6) $1/4$; 7) розбігається; 8) 2π.

24. 1) збігається; 2) розбігається; 3) розбігається; 4) збігається; 5) збігається; 6) розбігається.

Ключові терміни

Визначений інтеграл, геометричний смисл, теорема існування, діаметр розбиття, інтегральна сума, змінна інтегрування, середнє значення, формула Ньютона – Лейбніца, подвійна підстановка, методи визначеного інтегрування, невластиві інтеграли, інтеграл Ейлера – Пуассона, збіжний, розбіжний, ознака порівняння, мажоранта, міноранта, еталонний ряд, особлива точка, геометричні, фізичні й економічні, полярні координати, головне значення, координатні лінії, площа плоскої фігури, криволінійний сектор, об'єм просторових тіл, дуга кривої, площа поверхні, робота, статичний момент, моментів інерції, координати центра маси, виграш споживачів, виграш виробників.

Резюме

Викладено основні відомості стосовно визначеного інтеграла, а саме: означення; основні властивості; геометричний смисл; методи інтегрування. Наведено елементи теорії невластивих інтегралів (на необмежених проміжках і від необмежених функцій): різновиди, ознаки збіжності.

Розглянуто застосування визначеного інтеграла у різних галузях знань: *геометричні* (обчислення площі плоскої фігури, об'ємів тіл за відомими площами поперечних перерізів, об'ємів тіл обертання, довжини дуги кривої, площі поверхні обертання); *фізичні* (обчислення механічної роботи змінної сили; статичних моментів, моментів інерції, координат центра маси плоскої кривої та плоскої фігури); економічні (задача про виграш споживачів і виробників за моделлю „попит – пропозиція").

Література: [2 – 4; 7; 9 – 12; 16; 19; 21; 24].

Розділ 4. Функції кількох змінних. Числові і функціональні ряди

13. Функції кількох змінних (ФКЗ)

Велика книга природи написана математичними символами.

Галілео Галілей

Ніякої достовірності немає в науках там, де не можна прикласти жодної з математичних наук, і в тому, що не має зв'язку з математикою.

Леонардо да Вінчі

Мета: оволодіння майбутніми фахівцями одним із основних методів дослідження функціональних залежностей для вивчення швидкісних характеристик протікання у часі різноманітних процесів і явищ, залежних від кількох змінних.

Питання теми:

13.1. Вступ до диференціального числення ФКЗ.

13.2. Частинні похідні (ч/п) і диференціали, повний диференціал. Застосування ч/п в економічних задачах.

13.3. Похідна за напрямом, градієнт ФКЗ.

Компетентності, що формуються після вивчення теми:

Загальнонаукова: володіння засобами диференціального числення функції кількох змінних (для здійснення формалізації економічних процесів і розв'язання реальних економічних задач).

Загальнопрофесійна: підготовленість до дослідження (на еластичність, на екстремум тощо) інформаційного параметра як функції кількох змінних. (Під інформаційним параметром розуміють розмах сигналу від мінімуму до максимуму, екстремальне відхилення від середнього значення та ін.)

Спеціалізовано-професійна: уміння впроваджувати функції від кількох змінних в моделювання процесів управління інформаційними системами.

13.1. Вступ до диференціального числення ФКЗ

Означення основних понять, приклади економічного тлумачення ФКЗ

Різноманітні об'єкти, явища, процеси навколишнього світу при математичному підході до їх вивчення описуються, як правило, не однією-двома, а більшим числом змінних, тому поняття „функція кількох змінних” є природним узагальненням поняття „функція однієї змінної”.

Нехай x, y, z – деякі змінні величини. Сукупність пар (x, y) значень величин x, y, які вони можуть набувати сумісно, називається **областю змінювання** D цих змінних. Оскільки кожній парі (x, y) відповідає точка декартової координатної площини xOy – $M(x, y)$, то геометрично область D зображується множиною точок – підмножиною (частиною) xOy.

Наприклад, область $D = \{(x, y) |\ x \in [0, 2] \wedge y \in [0, 1]\}$ описує прямокутник зі сторонами 2, 1, одна з вершин якого – початок координат (*зобразіть його* самостійно).

Змінна z називається **функцією двох змінних x і y**, якщо кожній парі вартостей (x, y) із області D відповідає одне, цілком певне, значення величини z. Позначення:

$$z = f(x, y), \text{ або } z = f(M),$$

де символ f, як і для функції однієї змінної, означає **закон відповідності** між змінною z і парами (x, y);

x, y – **незалежні змінні**, або **аргументи**, функції;

M – точка із D, що відповідає парі поточних змінних (x, y).

Область змінювання пар (x, y) називають **областю визначення**, або **областю існування**, $D(f)$ функції, а множину відповідних значень z – **областю змінювання** $E(f)$ функції.

Наприклад, областю існування функції $z = x \cdot y$, як і областю змінювання, є вся площина:

$$D(f) = E(f) = \{(x, y) |\ -\infty < x < +\infty \wedge -\infty < y < +\infty\} = \mathbf{R}^2.$$

У задачах застосовного характеру $D(f)$ і $E(f)$ можуть звужуватись, залежно від смислу змінних x, y. Якщо, *наприклад*, x і y є сторонами прямокутника (позначимо їх відповідно через a і b), то для функції двох змінних $S = f(a,b) = a \cdot b$, значеннями якої є площа прямокутника, маємо:

$$D(f) = E(f) = \{(a,b) \mid 0 < a < +\infty \wedge 0 < b < +\infty\} = \mathbf{R}_{+}^{2}.$$

Задача відшукання області визначення (для) функції $z = f(x,y)$ базується на знанні областей існування основних елементарних функцій однієї змінної; узагалі вона зводиться до аналізу систем нерівностей, які пов'язують змінні x і y.

Наприклад, область існування функції

$$z = \frac{\sqrt{1 - x^2 - y^2}}{x}$$

визначається системою $\begin{cases} x^2 + y^2 \le 1, \\ x \ne 0, \end{cases}$ бо підкореневий вираз повинен бути невід'ємним, а знаменник дробу – відмінним від нуля (*чому?*).

Отже,

$$D(f) = \{(x,y) \mid x^2 + y^2 \le 1 \wedge x \in \mathbf{R} \setminus \{0\}\}$$

і являє собою круг радіуса 1 з центром у початку координат за виключенням точок вертикального діаметра: в кінцевих точках діаметра $(0,-1)$, $(0,1)$ функція невизначена, в інших точках діаметра – не існує. (*Пропонуємо* подати відповідне геометричне зображення.)

Основними **способами завдання** функцій двох змінних, як і функцій однієї змінної, є: *аналітичний*, *табличний, графічний*.

Табличний спосіб (табл. 13.1.1) – це коли функціональна залежність зображується у вигляді таблиці з двома входами для дискретних множин значень аргументів, в якій подаються: вартості незалежної змінної x (перший вхід), незалежної змінної y (другий вхід) та відповідні цим вартостям значення функції (у комірках таблиці).

Таблиця 13.1.1

Табличний спосіб завдання функції двох змінних

$x \backslash y$	y_1	y_2	$\ldots$	y_n
x_1	$f(x_1, y_1)$	$f(x_1, y_2)$	$\ldots$	$f(x_1, y_n)$
x_2	$f(x_2, y_1)$	$f(x_2, y_2)$	$\ldots$	$f(x_2, y_n)$
$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$
x_m	$f(x_m, y_1)$	$f(x_m, y_2)$	$\ldots$	$f(x_m, y_n)$

Графічний спосіб – це коли відповідність між незалежними змінними і функцією зображується за допомогою неперервної або дискретної множини точок (x, y, z) тривимірного простору, аплікати яких z задовольняють умову $z = f(x, y)$. Тобто кожній точці $M(x, y) \in D(f) \subseteq \mathbf{R}^2$ за законом f ставиться у відповідність точка $N(x, y, f(x, y)) \in \mathbf{R}^3$.

Множину всіх точок $N(x, y, z)$ простору $xOyz$, де $z = f(x, y)$, називають **графіком функції**. У разі неперервної множини точок $N(x, y, z)$ графік функції називається **поверхнею** у тривимірному просторі. *Прикладами* поверхонь є площина (див. п. 3.3 частини 1) і поверхні 2-го порядку (наприклад, сферична, конічна тощо).

Множиною рівня c називається підмножина множини $D(f)$, для точок якої $f(x, y)$ набуває сталих вартостей c. Тобто множиною рівня c є множина розв'язків рівняння $f(x, y) = c$. Для функцій неперервних (дискретних) аргументів множиною розв'язків є лінія – **лінія рівня c** (сукупність ізольованих точок).

Наприклад, для функції $z = \dfrac{\sqrt{1 - x^2 - y^2}}{x}$ маємо:

$$\frac{\sqrt{1-x^2-y^2}}{x} = c \Rightarrow \underbrace{\sqrt{1-x^2-y^2} = cx}_{\text{рівняння лінії рівня}},\ x \neq 0 \Rightarrow \left| c = 0 \right| \Rightarrow x^2 + y^2 = 1,\ x \neq 0,$$

тобто лінією рівня $c = 0$ є коло радіуса 1 з центром у початку координат за виключенням точок $(0, -1)$, $(0, 1)$.

За сукупністю ліній рівня можна скласти уяву про форму поверхні (рис. 13.1.1). Зображення множини ліній рівня є різновидом геометричного подання ФДЗ.

Здійснюється це так: *знаходять* перетин поверхні площиною $z = c$ і *проектують* лінію перетину на $D(f) \subseteq \mathbf{R}^2$ (див. рис. 13.1.1). (*Чи може* лінія рівня виродитись у множину ізольованих точок?)

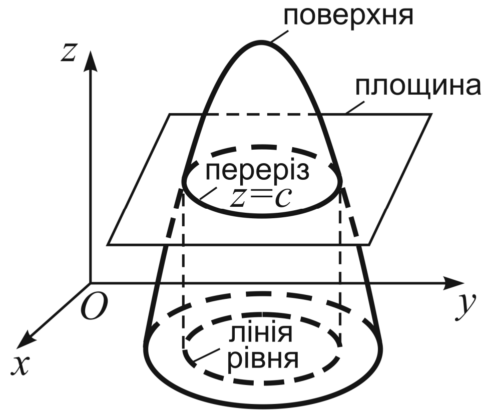


Рис. 13.1.1. **Побудова лінії рівня**

Зважаючи на добре розвинені обчислювальні засоби, від аналітичного способу завдання функції легко перейти і до табличного, і до графічного, але не навпаки: маючи таблицю чи графік функції, взагалі кажучи, важко знайти відповідний аналітичний вираз, хіба що – наближено.

Найбільш зручним для дослідження функцій є, безумовно, **аналітичний спосіб**, бо він дозволяє застосовувати методи диференціального числення (за аналогією з тим, як досліджувались функції однієї змінної).

Існує три **форми** аналітичного завдання функції: **явна** (у вигляді $z = f(x, y)$); **неявна** (у вигляді не розв'язаного відносно змінної z рівняння $F(x, y, z) = 0$, *прикладом* такого рівняння є канонічне рівняння сфери; **параметрична** – це коли зв'язок між змінними x, y, z подається через допоміжні змінні – параметри u, v, а саме: $x = x(u, v)$, $y = y(u, v)$, $z = z(u, v)$.

Наприклад, рівняння сферичної поверхні (сфери) $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ має таку параметричну форму (*переконайтеся*):

$$x = \cos u \cdot \cos v, \; y = \sin u \cdot \cos v, \; z = \sin v.$$

Відзначимо, що область існування і область значень функції двох змінних є відповідно підмножинами двовимірного і одновимірного просторів: $D(f) \subseteq \mathbf{R}^2$, $E(f) \subseteq \mathbf{R}$, тому кажуть, що функція двох змінних є **відображенням $\mathbf{R}^2$ в $\mathbf{R}$**, і пишуть:

$$\mathbf{R}^2 \xrightarrow{f} \mathbf{R} \quad \text{або} \quad f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}.$$

Аналогічним чином можна означити функцію більшого числа змінних, а саме: **функцією n змінних** x_1, x_2, …, x_n $(n > 2)$ називають відображення n-вимірного простору в одновимірний простір і позначають так: $u = f(x_1, x_2, ..., x_n)$, $\mathbf{R}^{n} \xrightarrow{f} \mathbf{R}$ або $f : \mathbf{R}^{n} \to \mathbf{R}$. Це означає, що кожному наборові вартостей змінних $(x_1, x_2, ..., x_n)$ відповідає певне значення змінної u.

Величини x_i, $i = \overline{1, n}$, – **незалежні змінні** (**аргументи**), u – **залежна змінна** (**функція**), f – **закон відповідності**. Функцію n змінних називають також функцією **кількох** (**багатьох**) змінних.

Аргументи ФКЗ можна позначати різними буквами без індексів. *Наприклад*, функцію трьох змінних (ФЗЗ) позначають так: $u = f(x, y, z)$ або $u = f(M)$, де $M(x, y, z) \in \mathbf{R}^3$. Для ФЗЗ можна зобразити тільки область визначення $D(f) \subseteq \mathbf{R}^3$, а сам геометричний образ функції відтворити неможливо, бо у нас – людей – відсутня інтуїція чотиривимірного простору. Множина рівня c ФЗЗ описується рівнянням $f(x, y, z) = c$ і називається **поверхнею рівня c**.

Найпростішими ФКЗ від n змінних є:

одночлен – добуток степенів змінних x_i, $i = \overline{1, n}$, з числовим коефіцієнтом $a \in \mathbf{R}$: $a \cdot x_1^{i_1} \cdot x_2^{i_2} \cdot ... \cdot x_n^{i_n}$, де i_1, i_2, …, i_n – натуральні числа або нуль; суму показників степеня аргументів $i_1 + i_2 + ... + i_n$ називають **степенем одночлена**.

Наприклад, $f(x_1, x_2, x_3) = -3 \cdot x_1^2 \cdot x_2^0 \cdot x_3^4 = -3x_1^2\, x_3^4$ – одночлен шостого степеня;

многочлен – сума одночленів від n змінних; **степенем многочлена** називається найвищий із степенів s його **членів** – доданків-одночленів.

Наприклад, многочлен $P(x_1, x_2, x_3) = 2x_1^2 x_2 x_3^3 - 5x_1\, x_2^3 x_3^4 + x_3^5$ має степінь $s = \max\{6, 8, 5\} = 8$.

Многочлени називають також **поліномами**.

Якщо всі члени полінома $u = P(x_1, x_2, ..., x_n)$ мають однаковий степінь s, то його називають **однорідним**, або **формою s-го степеня**.

Зокрема:

лінійна форма

$$L(x_1, x_2, ..., x_n) = a_1x_1 + a_2x_2 + ... + a_nx_n = \sum_{i=1}^{n} a_i x_i \, , \qquad (13.1.1)$$

де a_i, $i = \overline{1, n}$, – коефіцієнти (числові параметри), а $s = 1$;

квадратична форма

$$K(x_1, x_2, ..., x_n) = a_{11}x_1^2 + a_{12}x_1x_2 + ... + a_{nn}x_n^2 = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_{ij} \, , \qquad (13.1.2)$$

де $a_{ij} = a_{ji}$, $i = \overline{1, n}$, $j = \overline{1, n}$ – коефіцієнти (числові параметри), а $s = 2$.

Квадратична форма називається **канонічною**, якщо вона містить лише квадрати змінних, тобто $\forall i \neq j$: $a_{ij} = a_{ji} = 0$.

В економічних задачах часто використовується **виробнича функція** як одночлен від n змінних $u = a_0 \cdot x_1^{a_1} \cdot x_2^{a_2} \cdot ... \cdot x_n^{a_n}$, яка установлює залежність величини створеного суспільного продукту від різних факторів: витрат (живої) праці, об’єму виробничих фондів, енергоємності виробництва та ін.; економічний смисл параметрів $a_i < 1$, $i = \overline{0, n}$, розглядатиметься пізніше.

Прикладом виробничої функції є **функція Кобба – Дугласа**. Чарльз Кобб (1813 – 1949) – американський математик і економіст – і Пол Дуглас (1892 – 1976) – американський економіст – уперше установили функціональну залежність між обсягом основних фондів K, витратами праці L і обсягом продукції Q:

$$Q = F(L, K) = aL^{\alpha}K^{\beta},$$

де $a > 0$ – параметр продуктивності обраної технології;

$0 < \alpha < 1$, і, як правило, $\alpha + \beta = 1$.

У задачах **споживчого вибору** (і як одне із базових понять економічної теорії) використовується так звана **функція корисності**, яка описує кількісну характеристику доцільності придбання того чи іншого набору n різних товарів (благ) $X = (x_1, x_2, x_3, ..., x_n)$, де x_i – кількість i-го блага в натуральних одиницях.

Прикладами таких функцій є:

логарифмічна функція

$z=\sum_{i=1}^{n} a_i \ln(x_i - c_i)$, де a_i, c_i – параметри ($a_i > 0$, $x_i > c_i \geq 0$);

функція сталої еластичності

$z=\sum_{i=1}^{n} \frac{a_i}{1-b_i}(x_i - c_i)^{1-b_i}$, де b_i – сталі ($a_i > 0$, $0 < b_i < 1$, $x_i > c_i \geq 0$).

Звичайно, в основу моделі поведінки споживачів покладають гіпотезу: кожен з них, здійснюючи вибір наборів благ при заданих цінах і наявному доході, прагне максимізувати рівень задоволення своїх потреб.

Границя і неперервність ФКЗ

Принципової відмінності між означеннями понять „границя" для функції однієї змінної і кількох змінних немає. Але стосовно ФКЗ подання відповідних положень ускладнюється багатовимірністю, яка потребує більш високого ступеня абстракції.

Розглянемо спочатку функцію двох змінних (Ф2З) $z = f(x, y)$, або $z = f(M)$, де $M = M(x, y)$, з областю визначення $D(f) \subseteq \mathbf{R}^2$.

Послідовність точок в $\mathbf{R}^2$ є природним узагальненням поняття числової послідовності (ч/п) $\{x_n\}$ в $\mathbf{R}$, а саме: множина точок $M_1(x_1, y_1)$, $M_2(x_2, y_2)$, …, $M_n(x_n, y_n)$, …, які отримані за деяким законом, занумеровані за допомогою натуральних чисел і упорядковані за зростанням номерів, називається **послідовністю точок $\{M_n\}$ в $\mathbf{R}^2$**.

Нехай, *наприклад*, $\forall n \in \mathbf{N}$: $M_n = M_n(1/n, 1/n^2) \in \mathbf{R}^2$, тоді

$$\{M_n\}\text{: } (1,1),\ (1/2, 1/4),\ (1/3, 1/9), \ldots,\ (1/n, 1/n^2),\ \ldots,$$

тобто завдання послідовності точок у двовимірному просторі рівносильне завданню двох ч/п; у наведеному прикладі $x_n = 1/n$, $y_n = 1/n^2$.

Якщо $\{M_n\} \subset D(f)$, то послідовності точок із $D(f)$ відповідатиме ч/п вартостей функції $z = f(x, y)$: $\{z_n\} = \{f(M_n)\} = \{f(x_n, y_n)\}$.

Аналогічно означаються послідовності точок $\{M_n\}$, $n=1,2,3,\ldots$, у випадку більшої вимірності простору; при цьому звичайно збільшується кількість відповідних ч/п; наприклад, для $\mathbf{R}^3$: $\{M_n\}\leftrightarrow\{\{x_n\},\{y_n\},\{z_n\}\}$.

Якщо $\{M_n\}\subset D(f)$, то трьом ч/п відповідає ч/п вартостей функції трьох змінних $u=f(x,y,z)$: $\{u_n\}=\{f(M_n)\}=\{f(x_n,y_n,z_n)\}$.

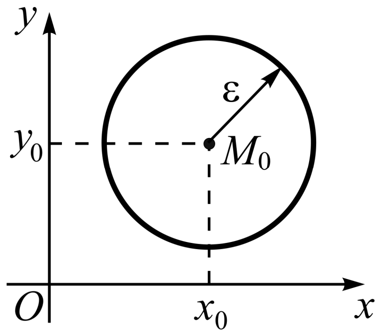


Рис. 13.1.2. **ε-Окіл точки $\boldsymbol{M_0}$**

ε-Околом точки $\boldsymbol{M_0(x_0,y_0)}$ на площині xOy (рис. 13.1.2) називається внутрішність круга *радіуса* ε з *центром* у точці M_0 і позначається через $B(M_0,\varepsilon)$:

$$(x-x_0)^2+(y-y_0)^2<\varepsilon^2. \quad (13.1.3)$$

(*Укажіть*, що слід розуміти під ε-околом точки M_0 в $\mathbf{R}^3$, $\mathbf{R}^n$?)

Послідовність точок площини $\{M_n\}$ називається **збіжною** (**збігається**) **до точки** M_0, якщо для будь-якого $\varepsilon>0$ існує номер $N(\varepsilon)$ такий, що для всіх номерів, більших $N(\varepsilon)$, відстань від M_n до M_0 менше ε:

$$\{M_n\}\rightarrowtail M_0 \rightleftharpoons \forall\varepsilon>0\ \exists N(\varepsilon)\in\mathbf{N}:\ \forall n>N(\varepsilon)\Rightarrow \rho(M_n,M_0)<\varepsilon, \quad (13.1.4)$$

де $\rho(M_n,M_0)=\sqrt{(x_n-x_0)^2+(y_n-y_0)^2}$ – відстань від M_n до M_0.

Інакше кажучи, починаючи з деякого номера $N(\varepsilon)$ *відстань* від точок послідовності $\{M_n\}$ до точки M_0 *стає* і *залишається* менше будь-якого заданого числа ε. Точка M_0 називають **границею послідовності** точок $\{M_n\}$:

$$\lim_{n\to\infty} M_n=M_0 \ \rightleftharpoons\ \forall\varepsilon>0:\ \underline{\rho(M_n,M_0)}<\varepsilon,$$

де підкреслення __ читається: „змінна-відстань стає і залишається".

Число A називається **границею функції $\boldsymbol{z=f(x,y)}$ у точці $\boldsymbol{M_0}$** (за Гейне), якщо для будь-якої послідовності точок $\{M_n\}$, збіжної до M_0, відповідна послідовність значень функції $\{f(M_n)\}$ збігається до A:

$$\lim_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x,y)=A \rightleftharpoons \forall\{M_n\}:\{M_n\}\to M_0 \Rightarrow \{f(M_n)\}\to A. \qquad (13.1.5)$$

Зауваження. Як і для функції однієї змінної, якщо для деяких двох послідовностей точок, що збігаються до M_0, відповідні границі послідовностей значень функції різні або хоча б одна з них не існує, то це означає, що у точці M_0 границя функції не існує. Часто для установлення існування чи неіснування границі розглядають прямування до граничної точки (x_0, y_0) по прямих $y-y_0=k(x-x_0)$, і тоді $x_n\to x_0 \Rightarrow y_n\to y_0$.

Наприклад, для функції $z=\dfrac{1-x-\sqrt{y^2+1}}{1-y-\sqrt{x^2+1}}$ граничний перехід у точці $(x_0, y_0)=(0,0)$ дає невизначеність $\dfrac{0}{0}$ (*прослідкуйте*), тоді покладаємо $y=kx\ \ (k\neq 0)$ і отримуємо:

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} z=\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\frac{1-x-\sqrt{y^2+1}}{1-y-\sqrt{x^2+1}}=\lim_{x\to 0}\frac{(1-x)-\sqrt{k^2x^2+1}}{(1-kx)-\sqrt{x^2+1}}=\left(\frac{0}{0}\right).$$

Помножаємо чисельник і знаменник на спряжені їм вирази, границя відношення яких рівна 1 (*переконайтеся* самостійно), і після спрощення дробу маємо:

$$\lim_{x\to 0}\frac{2-x+k^2x}{2k-k^2x+x}=\frac{1}{k} \ \Rightarrow\ \overline{\exists}\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} z.$$

Відзначимо, що загалом теорія границь і поняття неперервності для функції однієї змінної без суттєвих змін переноситься на ФКЗ, і обчислення границь ФКЗ у точці проводять за тією ж схемою і за тими ж правилами (арифметичними властивостями границь).

Наприклад, граничний перехід до точки $(x_0, y_0)=(\pi,\pi)$ під знаком логарифму у функції $z=\ln\dfrac{x+\sqrt{1-\sin y}}{y+\sqrt{1-tgx}}$ не дає невизначеності, тому за теоремою про границю відношення функцій і властивістю неперервності логарифмічної функції маємо:

$$\lim_{\substack{x\to\pi\\ y\to\pi}} \ln\frac{x+\sqrt{1-\sin y}}{y+\sqrt{1-tgx}} = \ln\frac{\pi+1}{\pi+1} = 0.$$

Нехай функція $z = f(x, y)$ з областю існування $D(f)$ визначена у точці $M_0(x_0, y_0)$, якій відповідає вартість функції $z_0 = f(x_0, y_0)$, і $M(x, y)$ – довільна точка з деякого околу (x_0, y_0) (див. рис. 13.1.2). Величини, на які змінилися значення аргументів при переході від точки (x_0, y_0) до (x, y), називаються **приростами аргументів** у точці (x_0, y_0): $\Delta x = x - x_0$, $\Delta y = y - y_0$, а відповідну зміну вартості функції називають **повним приростом функції** у точці (x_0, y_0) і пишуть:

$$\Delta z = f(M) - f(M_0) = f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0). \qquad (13.1.6)$$

Означення поняття *неперервності функції* $z = f(x, y)$ *у точці* M_0 вводять саме за допомогою понять *приростів функції* і *аргументів*. Домовимось множину функцій, неперервних у точці $M_0(x_0, y_0)$, позначати символом $\mathbf{C}(M_0)$.

Функція $z = f(x, y)$ називається **неперервною у точці** $(\boldsymbol{x_0}, \boldsymbol{y_0})$, якщо в цій точці нескінченно малому приросту аргументів відповідає нескінченно малий приріст функції:

$$f(x, y) \in \mathbf{C}(M_0) \ \rightleftharpoons\ (\Delta x \to 0 \wedge \Delta y \to 0 \Rightarrow \Delta z \to 0), \text{ або}$$
$$f(x, y) \in \mathbf{C}(M_0) \ \rightleftharpoons\ \lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}} \Delta f(x, y) = 0. \qquad (13.1.7)$$

Приклад. Покажемо, що функція $z = ye^{xy}$ неперервна у кожній точці (x, y) області визначення $D(f) = (-\infty, +\infty)$. Дійсно, надамо значенням аргументів x, y відповідно прирости Δx, Δy. Тоді

$$\Delta z = f(M) - f(M_0) = (y + \Delta y)e^{(x+\Delta x)(y+\Delta y)} - ye^{xy} =$$
$$= y\left(e^{(x+\Delta x)(y+\Delta y)} - e^{xy}\right) + \Delta y e^{(x+\Delta x)(y+\Delta y)} \ \Rightarrow\ \lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}} \Delta z = 0,$$

бо границя другого (першого) співмножника першого (другого) доданку дорівнює нулеві. Отже, задана функція неперервна $\forall(x, y)$ із $\mathbf{R}^2$.

Теорема 13.1.1 (*критерій неперервності „мовою границі"*). Функція $z = f(x, y)$ неперервна у точці (x_0, y_0) тоді і тільки тоді, коли границя функції у цій точці дорівнює значенню функції у ній:

$$f(x, y) \in \mathbf{C}(M_0) \;\Leftrightarrow\; \lim_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0}} f(x, y) = f(x_0, y_0). \tag{13.1.8}$$

Д о в е д е н н я. Справедливість (13.1.8) випливає із означення неперервності і властивостей границі функції.

Необхідність (⇒). Спочатку відзначимо, що коли $\Delta x \to 0$, $\Delta y \to 0$, то $M(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) \to M_0(x_0, y_0)$, тобто (*прослідкуйте*) відстань $\rho(M, M_0) = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2} \to 0$, і навпаки.

Далі, відштовхуючись від означення (13.1.7), маємо:

$$\lim_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta y \to 0}} \Delta z = 0 \;\Rightarrow\; \lim_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta y \to 0}} \left(f(M) - f(M_0) \right) = 0 \;\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \lim_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta y \to 0}} f(M) - \lim_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta y \to 0}} f(M_0) = 0 \;\Rightarrow\; \lim_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta y \to 0}} f(M) = f(M_0). \tag{13.1.9}$$

(при виведенні було використано властивості границі різниці функцій та границі $const$).

Достатність (⇐). Рухаємося в (13.1.9) справа наліво (*наведіть* відповідні записи самостійно), враховуючи, що $f(M_0) = \lim\limits_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta y \to 0}} f(M_0)$, і приходимо до (13.1.8): $\lim\limits_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta y \to 0}} \Delta z = 0$. Це означає, що $f(x, y) \in \mathbf{C}(M_0)$.

Зауваження. Якщо функція неперервна у точці (x_0, y_0), то для обчислення границі функції у цій точці достатньо у вираз функції підставити замість аргументів x, y їхні граничні значення, тобто здійснити граничний перехід, і отримаємо певне число (а не невизначеність!). Формально це означає, що знак (символ) границі і символ функції можна переставляти (як і для Ф13):

$$\lim_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x,y)= f\left(\lim_{x\to x_0} x,\ \lim_{y\to y_0} y\right).$$

Приклад. Дослідимо на неперервність функцію $z = ctg\,\dfrac{\pi y}{x-1}$.

Котангенс визначений і неперервний всюди в $\mathbf{R}^2$, крім точок, для яких $\pi y/(x-1)=\pi k$, $k\in \mathbf{Z}$. Функція не є неперервною на усіх прямих, що проходять через точку $(1,0)$ (вони описуються рівнянням $y = k(x-1)$).

13.2. Частинні похідні (ч/п) і диференціали, повний диференціал. Застосування ч/п в економічних задачах

Частинні похідні: означення, правило відшукання, геометричний смисл

Нехай у деякій області $D\subseteq xOy$ задано функцію $z = f(x,y)$. Виберемо довільним чином точку $M_0(x_0,y_0)\in D$, зафіксуємо, тобто залишимо без зміни, $y = y_0$, а значенню x_0 надамо приріст Δx, тобто перейдемо до точки $M(x_0+\Delta x, y_0)$. Величина, на яку змінюється вартість функції при переході від точки $M_0(x_0,y_0)$ до точки $M(x_0+\Delta x, y_0)$, називається **частинним приростом функції** у точці (x_0,y_0) **за змінною** $\boldsymbol{x}$ і пишуть:

$$\Delta_x z = f(M)- f(M_0)= f(x_0+\Delta x, y_0)- f(x_0,y_0). \qquad (13.2.1)$$

Аналогічно, фіксуючи $x = x_0$ і надаючи значенню y_0 приріст Δy, отримаємо **частинний приріст функції** у точці (x_0,y_0) **за змінною** $\boldsymbol{y}$:

$$\Delta_y z = f(M)- f(M_0)= f(x_0, y_0+\Delta y)- f(x_0,y_0). \qquad (13.2.2)$$

(*Сформулюйте* означення частинного приросту функції $\Delta_y z$.)

Надаючи певного значення одному з аргументів і змінюючи другий приходимо по суті до функції однієї змінної: $z = f(x,y_0)$ або $z = f(x_0,y)$, тому можна ставити питання про похідну за аргументом x або y відповідно (як це робилося у п. 9.1 частини 1).

Границя відношення частинного приросту функції $\Delta_x f(x,y)$ до приросту аргументу Δx, коли приріст аргументу довільним чином прямує до нуля, називається **частинною похідною (від) функції $z=f(x,y)$ у точці (x_0, y_0) за незалежною змінною x**:

$$z'_x\Big|_{\substack{x=x_0\\ y=y_0}} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta_x z}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x, y_0)-f(x_0,y_0)}{\Delta x}. \qquad (13.2.3)$$

Аналогічно означають **частинну похідну (від) функції $z=f(x,y)$ у точці (x_0, y_0) за незалежною змінною y**:

$$z'_y\Big|_{\substack{x=x_0\\ y=y_0}} = \lim_{\Delta y\to 0}\frac{\Delta_y z}{\Delta y} = \lim_{\Delta y\to 0}\frac{f(x_0, y_0+\Delta y)-f(x_0,y_0)}{\Delta y}. \qquad (13.2.4)$$

(*Сформулюйте* означення частинної похідної за змінною y.)

Частинні похідні у точці $M_0(x_0, y_0)$ позначають також символами: $f'_x(M_0)$, $f'_y(M_0)$ (читається: „еф штрих за ікс (ігрек) у точці M_0") або $\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{M_0}$, $\left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_{M_0}$ (читається: „де кругле зет за де ікс (ігрек) у точці M_0").

Якщо границя в (13.2.3) чи в (13.2.4) є невластивим числом $\pm\infty$, то кажуть, що **ч/п дорівнює нескінченності**; у противному випадку функція має **скінченні ч/п** або…(*укажіть*, який ще випадок може зустрітись при обчисленні ч/п).

Процес відшукання ч/п від даної функції зветься **частинним диференціюванням**. Звичайно, коли функція має скінченні ч/п у точці $M_0(x_0, y_0)$, то $f'_x(M_0)$, $f'_y(M_0)$ – певні числа; якщо ж функція частинно диференційовна в усіх точках області D (або її підмножини), то її ч/п, у свою чергу, є функціями від x, y: $z'_x = f'_x(x,y)$, $z'_y = f'_y(x,y)$.

Правило відшукання ч/п: щоб знайти ч/п функції $z=f(x,y)$ за обраною змінною, треба здиференціювати її як функцію цієї змінної, за умови сталості іншого аргументу.

Звісна річ, для ч/п Ф23 справедливі правила та формули диференціювання, установлені для Ф13.

Приклад. Знайти частинні похідні функції $z = y\ln x + \dfrac{x}{y}$.

Згідно з областями існування логарифмічної функції і дробу отримуємо: $D(f) = \{(x, y) \mid x > 0 \wedge y \neq 0\}$ – права півплощина за виключенням точок осі Ox (*зобразіть* її).

Фіксуємо y і диференціюємо $f(x, y)$ як функцію аргументу x:

$$\underset{(y-const)}{z'_x} = y \cdot (\ln x)'_x + \frac{1}{y} \cdot x'_x = y \cdot \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{x + y^2}{xy};$$

фіксуємо x і диференціюємо $f(x, y)$ як функцію аргументу y:

$$\underset{(x-const)}{z'_y} = \ln x \cdot y'_y + x \cdot \left(\frac{1}{y}\right)'_x = \ln x - \frac{x}{y^2}.$$

Обидві ч/п існують в усій області визначення заданої функції.

Обчислимо, наприклад, ч/п у точці $M_0(1,1)$: $z'_x\big|_{\substack{x=1\\y=1}} = 2$, $z'_y\big|_{\substack{x=1\\y=1}} = -1$.

Геометричний смисл ч/п функції двох змінних $z = f(x, y)$ у певній точці визначається відповідним смислом похідної функції одного аргументу (див. п. 9.1 частини 1). Розглянемо поверхню S, що є графіком функції у деякій області $D \subseteq D(f)$ (рис. 13.2.1).

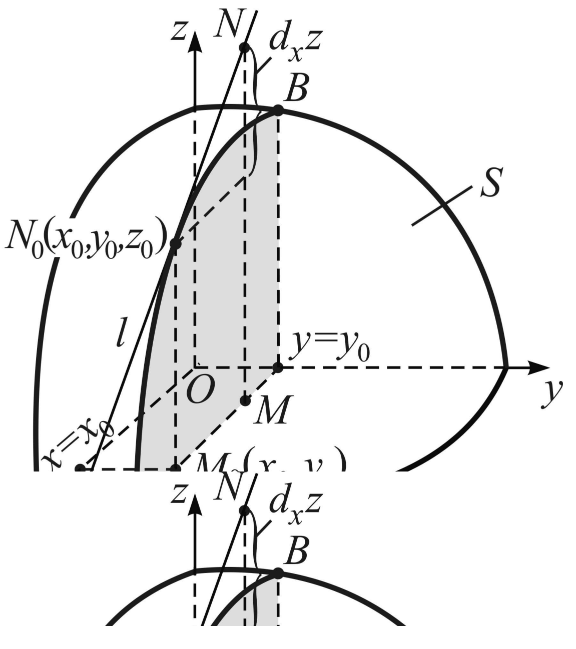


Рис. 13.2.1. **Геометричний смисл частинної похідної за змінною x**

Виберемо в області D точку $M_0(x_0, y_0)$, і нехай їй відповідає точка поверхні $N_0(x_0, y_0, z_0)$, де $z_0 = f(x_0, y_0)$.

З геометричної точки зору умова $y = y_0$ $(x = x_0)$ визначає площину, паралельну координатній площині xOz (yOz).

У результаті перетину цих площин із поверхнею S отримуємо криві, які описуються рівняннями:

$$z = f(x, y_0) \ (z = f(x_0, y)).$$

Для визначеності візьмемо випадок $y = y_0$ (див. рис. 13.2.1), тоді похідна функції однієї змінної $z = f(x, y_0)$ за змінною x дає ч/п функції двох змінних за аргументом x, і, як похідна всякої функції однієї змінної, чисельно дорівнює кутовому коефіцієнтові дотичної до кривої у розглядуваній точці, тобто $f'_x(x_0, y_0) = k_x = tg\alpha$, де α – кут, утворений дотичною l до кривої AB у точці N_0 з додатним напрямом осі Ox.

Аналогічні міркування (*наведіть* їх самостійно) приводять до висновку: $f'_y(x_0, y_0) = k_y = tg\beta$, де β – кут, утворений дотичною l до кривої AB у точці N_0 з додатним напрямом осі Oy.

Таким чином, у **геометричному смислі** ч/п $\frac{\partial z}{\partial x}$ $\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)$ у заданій точці (x_0, y_0) чисельно дорівнює тангенсу кута нахилу α (β) до осі Ox (Oy) дотичної до перерізу поверхні $z = f(x, y)$ площиною $y = y_0$ $(x = x_0)$.

З **фізичної точки зору** ч/п визначають швидкість змінювання функції за одним із аргументів при фіксованому значенні другого.

Висвітлені вище положення для ФДЗ узагальнюються на функції довільного скінченного числа змінних; до того ж використовуючи символічне позначення ФКЗ через $u = f(M)$, де $M = M(x_1, x_2, ..., x_n)$, отримуємо лаконічні записи тих чи інших співвідношень. *Наприклад*:

$\Delta u = f(M) - f(M_0)$ – повний приріст (див. (13.1.6));

$$f(M) \in \mathbf{C}(M_0) \rightleftharpoons \lim_{M \to M_0} \Delta f(M) = 0$$

– **означення неперервності** (див. (13.1.7));

$$f(M) \in \mathbf{C}(M_0) \;\Leftrightarrow\; \lim_{M \to M_0} f(M) = f(M_0)$$

– **критерій неперервності „мовою границь''** (див. (13.1.8));

$$u'_{x_i}\Big|_{M_0} = \lim_{\Delta x_i \to 0} \frac{\Delta_{x_i} u}{\Delta x_i} = \lim_{M \to M_0} \frac{f(M) - f(M_0)}{\Delta x_i}, \; i = 1, 2, \, ..., n$$

– **частинні похідні** (див. (13.2.3), (13.2.4)) та ін. (*Сформулюйте* правило відшукання ч/п функції n $(n > 2)$ аргументів.)

Приклад. Знайти частинні похідні функції $u=(x+y)(y-z)(z+x)$.

Фіксуючи по черзі пари змінних (y,z), (x,z), (x,y), тобто залишаючи змінними відповідно аргументи x, y, z, отримуємо:

$$u'_x=(y-z)\left[(x+y)(z+x)\right]'_x=(y-z)\left[(x+y)'_x(z+x)+(z+x)'_x(x+y)\right]=$$
$$=(y-z)(2x+y+z);$$

аналогічно (*прослідкуйте*):

$$u'_y=(x+z)\left[(x+y)(y-z)\right]'_y=(x+z)(2y+x-z);$$
$$u'_z=(x+y)\left[(y-z)(z+x)\right]'_z=(x+y)(-2z-x+y).$$

(*Сформулюйте* правила диференціювання, які використовувалися при відшуканні ч/п.)

Частинні і повний диференціали: означення, геометричний смисл

Поняття „диференціал'', означене для Ф13 (див. п. 9.2 частини 1), без принципових змін переносять у теорію ФКЗ.

Нехай, зокрема, $z=f(x,y)$. Введемо в розгляд нескінченно малу (н/м) змінну величину $\alpha=\alpha(\Delta x,\Delta y)$ при $\Delta x\to 0$, $\Delta y\to 0$.

Якщо існує ч/п функції $f(x,y)$ за змінною x (тобто при сталому значенні y), то функція неперервна у точці (x,y), і приріст її як функції одного аргументу можна подати (див. теорему 9.1.1 і (9.4.1) частини 1) у вигляді: $\Delta_x z=f'_x(x,y)\cdot\Delta x+\Delta x\cdot\alpha(\Delta x,0)$, де $\Delta y=0$ – стаціонарна н/м. Величина $f'_x(x,y)\cdot\Delta x$ – головна частина приросту $\Delta_x z$, а $f'_x(x,y)\cdot\Delta x$ і $\Delta_x z$ при $\Delta x\to 0$ є еквівалентними н/м (див. (9.4.3) частини 1):

$$f'_x(x,y)\cdot\Delta x\sim\Delta_x z. \qquad (13.2.5)$$

Головна, лінійна відносно приросту аргументу Δx, частина приросту функції $\Delta_x z$ називається **частинним диференціалом (ч/д) функції** $\boldsymbol{z=f(x,y)}$ **у точці** $\boldsymbol{(x,y)}$ **за змінною** $\boldsymbol{x}$ і позначається символом $d_x z$ або $d_x f(x,y)$:

$$d_x z = f'_x(x,y)\cdot\Delta x \ \ \left(d_x z = z'_x\cdot\Delta x\right), \text{ або}$$
$$d_x f(x,y) = f'_x(x,y)\cdot\Delta x. \tag{13.2.6}$$

Аналогічними міркуваннями (*наведіть* їх) приходимо до означення **частинного диференціала функції за змінною y**:

$$d_y z = f'_y(x,y)\cdot\Delta y \ \ \left(d_y z = z'_y\cdot\Delta y\right), \text{ або}$$
$$d_y f(x,y) = f'_y(x,y)\cdot\Delta y. \tag{13.2.7}$$

(*Сформулюйте* самостійно означення ч/д $d_y z$.)

Із означень частинних диференціалів випливає: *диференціали незалежних змінних x, y дорівнюють їхнім приростам.*

Дійсно, якщо $z = f(x,y) = x$, то $z'_x = 1$, а $d_x z = z'_x\cdot\Delta x \Rightarrow d_x x = \Delta x$, або просто $dx = \Delta x$; аналогічно (*покажіть*, як) $d_y z = z'_y\cdot\Delta y \Rightarrow d_y y = \Delta y$, або просто $dy = \Delta y$.

Отже, ч/д функції $z = f(x,y)$ дорівнюють добуткові ч/п з диференціалом відповідного аргументу:

$$d_x z = f'_x(x,y)dx, \quad d_y z = f'_y(x,y)dy. \tag{13.2.8}$$

Із зв'язку між ч/п і ч/д функції з урахуванням геометричного змісту ч/п легко отримуємо **геометричний зміст частинних диференціалів** (див. рис. 13.2.1): ч/д $d_x z$ $\left(d_y z\right)$ функції $z = f(x,y)$ у точці $M_0(x_0, y_0)$ є приростом аплікати дотичної до перерізу поверхні S площиною $y = y_0$ $(x = x_0)$ при переході від точки M_0 до точки $M(x_0+\Delta x, y_0)$ $\left(M(x_0, y_0+\Delta y)\right)$, тобто коли x_0 (y_0) набуває приросту Δx (Δy).

Основні властивості ч/д такі ж самі, як і у диференціала функції однієї змінної (див. (9.4.6) частини 1).

Поняття ч/д, і разом з тим формули (13.2.8), узагальнюється на ФКЗ довільного скінченного числа аргументів. Так, для $u = f(M)$, де $M = M(x_1, x_2, ..., x_n)$, маємо:

$$d_{x_i} u = f'_{x_i}(M)dx_i, \text{ або } d_{x_i} u = f'_{x_i}(x_1, x_2, ..., x_n)dx_i, \ i = \overline{1,n}. \tag{13.2.9}$$

Кожний із ч/д, як і кожна ч/п, характеризує функцію тільки за однією змінною. Щоб урахувати при дослідженні властивостей ФКЗ вплив на її „поведінку” усіх ч/п, тобто для більш повної характеристики функції, вводять поняття „повний диференціал”.

Повним диференціалом dz функції $z=f(x,y)$ називається сума добутків її частинних похідних з приростами (диференціалами) відповідних незалежних змінних:

$$dz=z'_x\Delta x+z'_y\Delta y\ \left(dz=z'_xdx+z'_ydy\right), \text{ або}$$
$$dz=\frac{\partial z}{\partial x}dx+\frac{\partial z}{\partial y}dy. \qquad (13.2.10)$$

Зважаючи на (13.2.7), (13.2.8), виходить, що повний диференціал є сумою ч/д:

$$dz=d_xz+d_yz. \qquad (13.2.11)$$

Приклад. Знайти повний диференціал функції $z=\dfrac{x^2}{x-y^2}$.

Відшукуємо частинні похідні:

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{2x\left(x-y^2\right)-x^2}{\left(x-y^2\right)^2}=\frac{x\left(x-2y^2\right)}{\left(x-y^2\right)^2};\quad \frac{\partial z}{\partial y}=\frac{2x^2y}{\left(x-y^2\right)^2}.$$

Застосовуємо (13.2.10): $dz=\dfrac{x\left(x-2y^2\right)dx+2x^2ydy}{\left(x-y^2\right)^2}$.

Зауважимо, що і сама функція, і її повний диференціал не існують в точках параболи $x=y^2$ при $x\neq 0$ (*чому?*).

Якщо у точці $M(x,y)$ повний приріст функції $z=f(x,y)$ можна подати у вигляді суми повного диференціала і двох н/м більш високого порядку, ніж прирости $\Delta x\to 0$ і $\Delta y\to 0$, то її називають **диференційовною** у точці $M(x,y)$:

$$\Delta z=dz+\alpha\Delta x+\beta\Delta y, \text{ або } \Delta z=\frac{\partial z}{\partial x}\Delta x+\frac{\partial z}{\partial y}\Delta y+\alpha\Delta x+\beta\Delta y, \qquad (13.2.12)$$

де $\alpha=\alpha(\Delta x,\Delta y)$, $\beta=\beta(\Delta x,\Delta y)$ – н/м при $\Delta x\to 0$, $\Delta y\to 0$.

Для функції від n аргументів: $u = f(M)$, де $M = M(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, означення диференційовності в символах виглядає так:

$$u = f(M) \text{ – диференційовна ФКЗ } \rightleftharpoons \ \Delta u = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial u}{\partial x_i} \Delta x_i + \alpha_i \Delta x_i \right),$$

де $\alpha_i = \alpha_i(\Delta x_1, \Delta x_2, \ldots, \Delta x_n)$ – н/м при $\Delta x_i \to 0$. (*Наведіть* самостійно словесне формулювання.)

Із (13.2.12) випливають *умови диференційовності* ФКЗ, які приймемо без доведення, але сформулюємо їх для функції n незалежних змінних.

Теорема 13.2.1 (*необхідна умова диференційовності ФКЗ*). Якщо $u = f(M)$ диференційовна у деякій точці $M_0 \in D(f)$, то у цій точці існують частинні похідні за всіма аргументами:

$$u = f(M) \text{ – диференційовна ФКЗ } \Rightarrow \ \forall i = \overline{1, n} \ \ \exists \left. \frac{\partial u}{\partial x_i} \right|_{M = M_0}. \qquad (13.2.13)$$

Теорема 13.2.2 (*достатня умова диференційовності ФКЗ*). Якщо $u = f(M)$ має частинні похідні за всіма аргументами у деякому ε-околі $B(M_0, \varepsilon)$ точки $M_0 \in D(f)$ і вони неперервні у самій точці, тобто

$$\exists \varepsilon > 0 : \forall M \in B(M_0, \varepsilon) \ \exists \frac{\partial u(M)}{\partial x_i} \ \forall i = \overline{1, n} \wedge \frac{\partial u}{\partial x_i} \in \mathbf{C}(M_0), \qquad (13.2.14)$$

то функція диференційовна у точці M_0.

При $\Delta x_i \to 0 \ \ \forall i = \overline{1, n}$ повний приріст і повний диференціал ФКЗ є еквівалентними н/м: $\Delta u \sim du$ (*чому*?), тому при відносно малих приростах аргументів справедлива наближена рівність

$$\Delta u \approx du \quad (\textit{зіставте} \text{ з (9.4.10) частини 1}),$$

із якої отримуємо **наближену формулу** для обчислення вартостей функції в околі заданої точки M_0:

$$f(M) \approx f(M_0) + du|_{M_0}. \qquad (13.2.15)$$

Зокрема, для диференційовної функції $z = f(x, y)$ при досить малих значеннях $\rho = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}$ – відстані між точками M і M_0 – маємо такі наближені рівності:

$$\Delta z \approx dz; \quad f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) \approx f(x_0, y_0) + dz\big|_{(x_0, y_0)}, \tag{13.2.16}$$

і наближення тим краще, чим менші Δx і Δy.

Приклад. Обчислити наближено число $a = (0{,}98)^{3{,}03}$.

Вводимо у розгляд функцію, для якої число a є її окремим значенням при окремих вартостях аргументів: $z = f(x, y) = y^x$.

Покладаємо $(x_0, y_0) = (3, 1)$, тоді $\Delta x = 0{,}03$; $\Delta y = -0{,}02$.

Знаходимо $f(x_0, y_0)$, $dz\big|_{(x_0, y_0)}$ *і застосовуємо* (13.2.16): $f(3,1) = 1$;

$(z'_x = y^x \ln y,\ z'_y = xy^{x-1}) \Rightarrow dz\big|_{(3,1)} = -0{,}06$;

$$a = f(3{,}03; 0{,}98) \approx f(3,1) + dz\big|_{(3,1)} = 1 - 0{,}06 = 0{,}94.$$

Калькулятор дає $a = 0{,}940621734$ ... .

Для диференціалів складених ФКЗ – функції від функцій, – як і для функції однієї змінної (див. (9.4.7) частини 1), справедлива властивість **інваріантності** (**незмінності**) форми диференціала, а саме: форма (вигляд, формула) диференціала ФКЗ не залежить від того, чи є аргументи незалежними змінними, чи, в свою чергу, функціями інших змінних.

Диференціювання складених і неявно заданих ФКЗ

Функція $z = f(x, y)$, де змінні x, y є функціями незалежних змінних u, v, ..., t, тобто $x = \varphi(u, v, ..., t)$, $y = \psi(u, v, ..., t)$, називається **складеною функцією** аргументів u, v, ..., t. Змінні x, y називають **проміжними аргументами**, u, v, ..., t – **основними аргументами**.

Теорема 13.2.3 (*про похідну складеної функції*). Якщо функція $z = f(x, y)$, де $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$, тобто $z = f(\varphi(t), \psi(t))$, диференційовна за змінними x і y, а $\varphi(t)$ і $\psi(t)$ мають похідні за аргументом t, то існує похідна z'_t, яка визначається формулою:

$$z'_t = z'_x \cdot x'_t + z'_y \cdot y'_t \text{, або } \frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dt}. \qquad (13.2.17)$$

Д о в е д е н н я базується на формулі приросту диференційовної функції (див. (13.2.12)). *Надамо* аргументові t приріст Δt, тоді x і y отримають деякі прирости Δx і Δy, а функція – приріст

$$\Delta z = \frac{\partial z}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial z}{\partial y}\Delta y + \alpha\Delta x + \beta\Delta y.$$

Поділимо обидві частини рівності на Δt:

$$\frac{\Delta z}{\Delta t} = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{\Delta x}{\Delta t} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{\Delta y}{\Delta t} + \alpha\frac{\Delta x}{\Delta t} + \beta\frac{\Delta y}{\Delta t}.$$

Спрямуємо Δt до нуля, тоді в силу неперервності функцій $\varphi(t)$, $\psi(t)$ маємо:

$$\Delta t \to 0 \Rightarrow (\Delta x \to 0,\ \Delta y \to 0) \Rightarrow (\alpha \to 0,\ \beta \to 0).$$

Границі відношень $\frac{\Delta z}{\Delta t}$, $\frac{\Delta x}{\Delta t}$, $\frac{\Delta y}{\Delta t}$ при $\Delta t \to 0$ дають відповідно похідні z'_t, x'_t, y'_t, і таким чином приходимо до (13.2.17).

Наслідок (*про формулу повної похідної*). Якщо $z = f(x, y)$, де $y = \psi(x)$, тобто змінна x виступає в якості проміжного і основного аргументів, то має місце формула:

$$\frac{dz}{dx} = \frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dx} \quad \text{– } \textbf{формула повної похідної}, \qquad (13.2.18)$$

де $\frac{dz}{dx}$ $\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)$ – **повна** (**частинна**) похідна функції $z = f(x, \psi(x))$.

Справедливість її випливає із (13.2.17), якщо покласти $t = x$, а $\varphi(x) = x$, тобто задати вихідну функцію у вигляді $z = f(\varphi(x), \psi(x))$:

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dt} \Rightarrow \left| \begin{array}{c} t = x \\ \varphi(x) = x \end{array} \right| \Rightarrow \frac{dz}{dx} = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{dx}{dx} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dx}.$$

Зауваження:

слід чітко розрізняти смислове значення прямого d і круглого ∂: якщо $\frac{dz}{dx}$ $\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)$, то йдеться про похідну Ф13 (про ч/п ФКЗ);

формула (13.2.17) узагальнюється на довільне скінченне число проміжних і основних аргументів (за умови диференційовності розглядуваних функцій), *наприклад*, якщо $z = f(x, y)$, а $x = \varphi(u, v)$, $y = \psi(u, v)$, то:

$$z'_u = z'_x \cdot x'_u + z'_y \cdot y'_u, \text{ або } \frac{\partial z}{\partial u} = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial u};$$
$$z'_v = z'_x \cdot x'_v + z'_y \cdot y'_v, \text{ або } \frac{\partial z}{\partial v} = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial v}, \tag{13.2.19}$$

тобто (***загальне правило відшукання ч/п складених ФКЗ***): ч/п складеної, або зложеної, функції за основним аргументом дорівнює сумі добутків ч/п за проміжними аргументами з ч/п проміжних аргументів за вибраним основним.

Приклади: а) $z = e^{x^2+y^2}$, де $y = \sin^2 x$. Знайти $\frac{dz}{dx}$.

За формулою повної похідної:

$$\frac{dz}{dx} = \frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dx} = e^{x^2+y^2} \cdot 2x + e^{x^2+y^2} \cdot 2y \cdot \sin 2x =$$

$$= 2e^{x^2+y^2}(x + y \sin 2x) \Rightarrow \frac{dz}{dx} = 2e^{x^2+\sin^4 x}\left(x + \sin^2 x \cdot \sin 2x\right).$$

Остаточний результат подають, як правило, через основну змінну;

б) $z = \ln\left(x^2 - y^2\right)$, де $x = u + t$, $y = u - t$. Знайти ч/п за основними аргументами.

Згідно з правилом відшукання ч/п складених ФКЗ *запишемо* загальний вигляд відповідних формул і за даними функціями *установимо* їхні складові:

$$z'_u = z'_x \cdot x'_u + z'_y \cdot y'_u = \frac{2x}{x^2 - y^2} \cdot 1 - \frac{2y}{x^2 - y^2} \cdot 1;$$

$$z'_t = z'_x \cdot x'_t + z'_y \cdot y'_t = \frac{2x}{x^2 - y^2} \cdot 1 - \frac{2y}{x^2 - y^2} \cdot (-1).$$

Остаточно:

$$z'_u = \frac{2(x-y)}{x^2-y^2} = \frac{2}{x+y} = \frac{1}{u}; \quad z'_t = z'_t = \frac{2(x+y)}{x^2-y^2} = \frac{2}{x-y} = \frac{1}{t}.$$

При потребі обчислюють ч/п у певних точках; *наприклад,*

$$z'_u\big|_{(1.1)} = z'_t\big|_{(1.1)} = 1.$$

Задача 13.2.1 (*про диференціювання неявних функцій*). Знайти похідну функції: 1) $y = f(x)$, заданої неявно рівнянням $F(x,y)=0$; 2) $z = f(x,y)$, задану не розв'язаним відносно z рівнянням $F(x,y,z)=0$.

Р о з в' я з а н н я спирається на означення поняття неявної форми завдання функції (див. п. 6.4 частини 1) і теорему 13.2.3 (*про похідну складеної функції*).

1. Якщо рівняння $F(x,y)=0$ визначає y як функцію від x, то для всіх пар $(x,y)=(x, f(x))$, де $x\in D(f)$, а $y=E(f)$, воно перетворюється у тотожність $F(x, f(x))\equiv 0$.

Здиференціюємо ліву і праву частини тотожності за змінною x: $\frac{dF}{dx} = \frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial y}\cdot\frac{dy}{dx} \equiv 0$, звідки

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{F'_x}{F'_y} \text{ за умови } F'_y \neq 0. \qquad (13.2.20)$$

2. Аналогічно, якщо рівняння $F(x,y,z)=0$ визначає z як функцію від x, y, то для всіх трійок $(x,y,z)=(x,y, f(x,y))$, де $(x,y)\in D(f)$, а $z\in E(f)$, воно перетворюється у тотожність $F(x,y, f(x,y))\equiv 0$.

Диференціюючи ліву і праву частини тотожності за змінною x, а потім y, отримуємо (*переконайтеся*):

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{F'_x}{F'_z}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{F'_y}{F'_z} \text{ за умови } F'_z \neq 0. \qquad (13.2.21)$$

Приклад. Знайти ч/п функції $z = f(x,y)$, заданої неявно рівнянням $z^2 - 3x^2yz = a^2$.

Приводимо рівняння до виду $F(x,y,z)=0$: $\underbrace{z^2-3x^2yz-a^2}_{F(x,y,z)}=0$, і застосовуємо (13.2.21):

$$\left(F'_x=-6xyz,\ F'_y=-3x^2z,\ F'_z=2z-3x^2y\right)\ \Rightarrow$$
$$\left(\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{F'_x}{F'_z}=\frac{6xyz}{2z-3x^2y},\ \ \frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{F'_y}{F'_z}=\frac{3x^2z}{2z-3x^2y}\right).$$

(Який *висновок* тягне за собою умова $F'_z=0$?)

Частинні похідні і диференціали вищих порядків

Нехай $f:\ \mathbf{R}^n\to\mathbf{R}$, тобто $u=f(M)$, де $M=M(x_1,x_2,...,x_n)$, і існують ч/п $\dfrac{\partial u}{\partial x_i}$, $i=\overline{1,n}$, у кожній точці $M\in D(f)$. Тоді ч/п також є ФКЗ, стосовно якої, у свою чергу, можна ставити задачу про відшукання ч/п, якщо, звичайно, така існує.

Ч/п за змінною j, $j\in\{1,2,...,n\}$, від ч/п $\dfrac{\partial u}{\partial x_i}$, $i\in\{1,2,...,n\}$, **називають частинною похідною функції u другого порядку (другою ч/п)** за змінними i, j і позначають символами: $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x_i\partial x_j}$, $u''_{x_ix_j}$, $f''_{x_ix_j}$.

Якщо $i\neq j$, то ч/п називається **мішаною**, при цьому розрізнюють мішані ч/п за змінними i, j і ч/п за змінними j, i:

$$\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{\partial u}{\partial x_i}\right)=\frac{\partial^2 u}{\partial x_i\partial x_j},\quad \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\partial u}{\partial x_j}\right)=\frac{\partial^2 u}{\partial x_j\partial x_i}. \tag{13.2.22}$$

Для ФДЗ $z=f(x,y)$ ч/п 1-го порядку породжують чотири ч/п 2-го порядку: $\left\{\dfrac{\partial z}{\partial x},\dfrac{\partial z}{\partial y}\right\}\ \Rightarrow\ \left\{\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2},\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y},\dfrac{\partial^2 z}{\partial y\partial x},\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}\right\}=\left\{z''_{xx},z''_{xy},z''_{yx},z''_{yy}\right\}$.

(*Скільки* ч/п 2-го порядку матиме функція трьох, чотирьох, …, *n* змінних?)

Частинною похідною m-го порядку (m-ю похідною) ФКЗ за змінними x_{i_1}, x_{i_2}, …, $x_{i_{m-1}}$, x_{i_m} називають ч/п від ч/п $(m-1)$-го порядку:

$$\frac{\partial^m u}{\partial x_{i_1}\ldots\partial x_{i_{m-1}}\partial x_{i_m}}=\frac{\partial}{\partial x_{i_m}}\left(\frac{\partial^{m-1}u}{\partial x_{i_1}\ldots\partial x_{i_{m-1}}}\right),$$

$$\forall k=\overline{1,m}\quad i_k\in\{1,2,\ldots,n\}. \tag{13.2.23}$$

Якщо не всі індекси i_1, i_2, …, i_{m-1}, i_m співпадають між собою, то ч/п m-го порядку називається **мішаною**.

Відшукання ч/п вищих порядків здійснюється за тим самим правилом, що і ч/п 1-го порядку, тобто як і „звичайні'' похідні, оскільки всі аргументи фіксуються, крім одного.

Приклад. Знайти другі ч/п функції $u=x^2y-y^2z+xy$.

Відшукуємо ч/п 1-го порядку:

$$u'_x=2xy+y,\ u'_y=x^2-2yz+x,\ u'_z=-y^2.$$

Ч/п кожної з найдених функцій за кожним із аргументів дають ч/п 2-го порядку заданої функції, тобто *другі ч/п*:

$$u''_{xx}=2y,\ u''_{xy}=2x+1,\ u''_{xz}=0;$$
$$u''_{yx}=2x+1,\ u''_{yy}=-2z,\ u''_{yz}=-2y;$$
$$u''_{zx}=0,\ u''_{zy}=-2y,\ u''_{zz}=0.$$

Аналізуючи другі ч/п, не важко помітити, що

$$u''_{xy}=u''_{yx}=2x+1,\ u''_{xz}=u''_{zx}=0,\ u''_{yz}=u''_{zy}=-2y,$$

тобто мішані похідні за одними і тими ж змінними рівні між собою, і це не випадково.

Теорема 13.2.4 (*достатні умови рівності мішаних ч/п*). Якщо ФКЗ $u=f(M)$, де $M=M(x_1,x_2,\ldots,x_n)$, у точці M_0 має диференційовні ч/п $(m-1)$-го порядку, то m-ні мішані ч/п не залежать від того, у якій послідовності здійснювати диференціювання за обраними змінними:

$$\left.\frac{\partial^{m-1}u}{\partial x_{i_1}\ldots\partial x_{i_{m-1}}}\right|_{M_0} \text{ – диференційовна ч/п } \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\frac{\partial^m u}{\partial x_{i_1}\ldots\partial x_{i_{m-1}}\partial x_{i_m}}\right|_{M_0} = \left.\frac{\partial^m u}{\partial x_{j_1}\ldots\partial x_{j_{m-1}}\partial x_{j_m}}\right|_{M_0}, \qquad (13.2.24)$$

де $\{i_1, i_2, ..., i_{m-1}, i_m\} = \{j_1, j_2, ..., j_{m-1}, j_m\}$.

Диференціали вищих порядків. Під **ч/д вищого порядку** $(m \geq 2)$ функції $u = f(x_1, x_2, ..., x_n)$ розуміють добуток ч/п вищого порядку і диференціалів відповідних аргументів:

$$d_{x_{i_1}\ldots x_{i_{m-1}}x_{i_m}}u = \frac{\partial^m u}{\partial x_{i_1}\ldots\partial x_{i_{m-1}}\partial x_{i_m}}dx_{i_1}\ldots dx_{i_{m-1}}dx_{i_m}, \qquad (13.2.25)$$

де $\forall k = \overline{1,m}$ $\;i_k \in \{1, 2, ..., n\}$.

Наприклад, для $u = f(x, y, z)$ маємо:

$d_{xx}u = u''_{xx}dxdx$, або так: $d_{x^2}u = u''_{x^2}dx^2$; $d_{xy}u = u''_{xy}dxdy$;

$d_{xyz}u = u'''_{xyz}dxdydz$; $d_{xyz^2}u = u^{(4)}_{xyz^2}dxdydz^2$ та ін.

Під **повним диференціалом вищого (m-го, $m \geq 2$) порядку** ФКЗ $u = f(x_1, x_2, ..., x_n)$ розуміють повний диференціал від повного диференціала $(m-1)$-го порядку, тобто $d^m u = d\left(d^{(m-1)}u\right)$; при цьому диференціали (прирости) незалежних змінних залишаються одними і тими ж при переході від одного диференціала до іншого, тобто розглядаються як сталі величини.

Відштовхуючись від першого повного диференціала, за умови його диференційовності як Ф2З, установимо, *наприклад*, вид d^2z, d^3z для $z = f(x, y)$:

$$dz = z'_x dx + z'_y dy \;\Rightarrow d^2z = (dz)'_x dx + (dz)'_y dy =$$

$$= \left(z''_{xx}dx + z''_{yx}dy\right)dx + \left(z''_{xy}dx + z''_{yy}dy\right)dy = z''_{xx}dx^2 + 2z''_{xy}dxdy + z''_{yy}dy^2.$$

Для d^3z (*здійсніть* проміжні виклади самостійно) маємо:

$$d^3z = \left(d^2z\right)'_x dx + \left(d^2z\right)'_y dy =$$

$$= z'''_{x^3} dx^3 + 3z'''_{x^2y} dx^2 dy + 3z'''_{xy^2} dx dy^2 + z'''_{y^3} dy^3 .$$

Аналогічним чином можна установити вираз $d^m z$ для довільного скінченного m, як тільки відомо $d^{m-1}z$. Але вирази стають дедалі більш громіздкими, тому для лаконічного запису застосовують символічне **мнемонічне правило**, спираючись на те, що за структурою вирази для повних диференціалів нагадують m-й степінь двочлена (див. d^2z, d^3z):

$$d^m z = \left(\frac{\partial}{\partial x}\cdot dx + \frac{\partial}{\partial y}\cdot dy\right)^m \cdot z . \qquad (13.2.26)$$

Користуються цим правилом так: підносять до m-го степеня (звичним чином) двочлен у дужках, а потім кожний доданок помножають на z, відносячи його до чисельників степенів дробів $\frac{\partial}{\partial x}$, $\frac{\partial}{\partial y}$.

Наприклад, для $m = 2$:

$$d^2z = \left(\frac{\partial}{\partial x}\cdot dx + \frac{\partial}{\partial y}\cdot dy\right)^2 z = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\cdot dx^2 + 2\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}\cdot dx dy + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\cdot dy^2 .$$

Зауваження. Повні диференціали вищих порядків властивістю інваріантності не володіють.

Еластичність функції кількох змінних. Застосування в економічних задачах

Поняття еластичності для функції однієї змінної (див. (9.4.13) частини 1):

$$y = f(x):\ \ E_x(y) = \frac{dy}{dx}\cdot\frac{x}{y} = \frac{dy/dx}{y/x} = \frac{y'}{y}\cdot x ,$$

поширюється на функції багатьох змінних.

Частинною еластичністю функції $z = f(x, y)$ за змінною x (y) називається величина $E_x(z)$ $\big(E_y(z)\big)$, яка наближено показує, на скільки відсотків змінюється функція при зміні аргументу x (y) на один відсоток:

$$z = f(x, y):\ E_x(z) = \frac{\partial z}{\partial x}\cdot\frac{x}{z},\quad E_y(z) = \frac{\partial z}{\partial y}\cdot\frac{y}{z}. \tag{13.2.27}$$

Функції $z = f(x, y)$ залежно від того, яким буде модуль частинної еластичності при фіксованих значеннях незалежних змінних порівняно з одиницею: >1, <1, $=1$, поділяють відповідно на ***еластичні***, ***нееластичні*** і ***нейтральні***.

Однією з поширених областей застосування функції кількох змінних у дослідженнях економічних процесів є побудова виробничих функцій. Під **виробничою функцією** розуміють функціональну залежність, яка описує кількість продукції, що виробляється, відповідно до факторів виробництва. Найбільш відомою виробничою функцією є функція Кобба – Дугласа (див. п. 13.1): функціональна залежність між обсягом основних фондів K – ресурсом капіталу, – витратами праці L – ресурсом праці – і обсягом продукції $Q = F(L, K) = aL^{\alpha}K^{\beta}$, де $a > 0$ – технологічний (або виробничий) коефіцієнт (параметр продуктивності обраної технології), $0 < \alpha < 1$ – частка ресурсу праці у доході; $\alpha + \beta = 1$ (рис. 13.2.2). (*Праця* – діяльність людини для задоволення власних потреб і благ шляхом використання засобів праці; *капітал* (у матеріальній формі) – один із факторів виробництва (поряд із землею та працею); він складається у цьому випадку із споруд, машин і пристроїв тощо.)

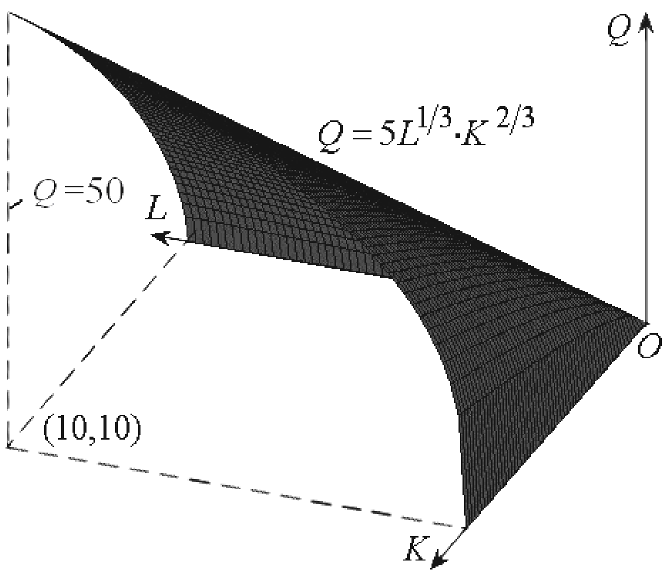


Рис. 13.2.2. **Функція Кобба – Дугласа**

З'ясуємо, який існує зв'язок між числовими параметрами α і β виробничої функції і її частинними еластичностями E_L і E_K.

Знайдемо частинну еластичність за ресурсом праці:

$$E_L = \frac{\partial Q}{\partial L} \cdot \frac{L}{Q} = \frac{aK^{\beta} \cdot \alpha L^{\alpha-1} \cdot L}{aL^{\alpha} K^{\beta}} = \alpha, \qquad (13.2.28)$$

вона, як бачимо, чисельно дорівнює параметрові α.

Стосовно функції $Q = aL^{\alpha} K^{\beta}$ величину α називають ***частинним коефіцієнтом еластичності*** за ресурсом праці.

Аналогічно:

$$E_K = \frac{\partial Q}{\partial K} \cdot \frac{K}{Q} = \frac{aL^{\alpha} \cdot \beta K^{\alpha-1} \cdot K}{aL^{\alpha} K^{\beta}} = \beta; \qquad (13.2.29)$$

частинна еластичність дорівнює параметрові β.

Стосовно функції Кобба – Дугласа величину β називається ***частинним коефіцієнтом еластичності*** за ресурсом капіталу.

Оскільки $\alpha + \beta = 1$, то формулу $Q = aL^{\alpha} K^{\beta}$ можна записати так:

$$\frac{Q}{L} = a\frac{L^{\alpha} K^{1-\alpha}}{L} = a\frac{L^{\alpha-1}}{K^{\alpha-1}} = a\left(\frac{L}{K}\right)^{\alpha-1}. \qquad (13.2.30)$$

Відношення Q/L є ***середньою продуктивністю*** праці, а L/K – середньою ***капіталоозброєністю*** праці. Відношення Q/K називається ***середньою капіталовіддачею***. Обернений дріб K/Q визначає ***середню*** **капіталомісткість** продукції, а L/Q – її ***середню трудомісткість***.

За виробничою функцією Кобба – Дугласа гранична продуктивність праці визначається формулою:

$$\frac{\partial Q}{\partial L} = \frac{\partial}{\partial L}\left(a \cdot L^{\alpha} \cdot K^{\beta}\right) = \alpha \cdot a \cdot L^{\alpha-1} K^{\beta} = \alpha \frac{Q}{L}. \qquad (13.2.31)$$

Отже, величина ефекту від кожної додаткової одиниці праці, що витрачається на виробництво продукції, пропорційна середній продуктивності праці, але менша за неї, оскільки $\alpha < 1$.

13.3. Похідна за напрямом, градієнт ФКЗ

Похідна за напрямом: означення, властивості, розрахункова формула

Частинні похідні функції $z = f(x, y)$ з фізичної точки зору трактуються як швидкості її змінювання у напрямі координатних осей Ox і Oy, тобто у напрямі векторів $\bar{i} = (1,0)$ і $\bar{j} = (0,1)$. „Похідна за напрямом” є узагальненням поняття частинної похідної за умови, що змінювання аргументів визначається довільною віссю l з одиничним напрямним вектором $\bar{l}_0 = (\cos\alpha,\ \cos\beta)$, де $\alpha = \bar{l}_0\hat{\ }Ox$, $\beta = \bar{l}_0\hat{\ }Oy$ – кути нахилу l до осі Ox, Oy відповідно, при цьому приростів набувають обидва аргументи. Завдяки парності косинуса можна брати кути нахилу координатних осей до осі l, як показано на рис. 13.3.1 (див. кут β).

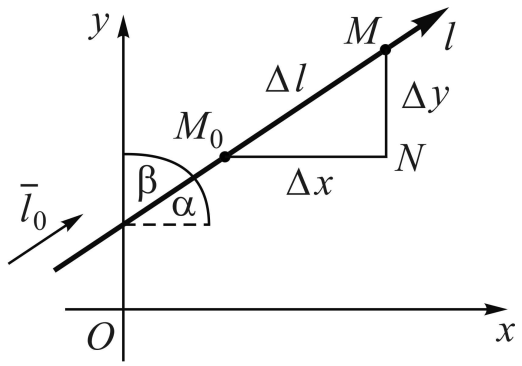


Рис.13.3.1. **До поняття похідної за напрямом**

Нехай $z = f(x, y)$ визначена у $D(f)$ і диференційовна в ній. Зафіксуємо деяку точку $M_0(x_0, y_0)$ і виберемо прирости аргументів Δx, Δy так, щоб перехід від точки M_0 до точки $M(x, y) = M(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y)$ здійснювався у напрямі вектора $\bar{l}_0$ (див. рис. 13.3.1).

Вектор $\overline{M_0M}$ з координатами Δx, Δy назвемо **вектором приростів аргументів**: $\overline{\Delta l} = (\Delta x,\ \Delta y)$. Його модулем є відстань між точками M_0 і M: $|\overline{\Delta l}| = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}$. Величину вектора $\overline{\Delta l}$ позначимо через Δl:

$$\Delta l = \left[\begin{array}{ll} +|\overline{\Delta l}|, & \text{якщо } \overline{\Delta l} \uparrow\uparrow \bar{l}_0, \\ -|\overline{\Delta l}|, & \text{якщо } \overline{\Delta l} \downarrow\uparrow \bar{l}_0 \end{array}\right. \quad \text{(див. (2.1.2) частини 1).}$$

Зауважимо, що $\Delta l \to 0 \Leftrightarrow (\Delta x \to 0 \wedge \Delta y \to 0)$ (*чому?*).

При переході від M_0 до M функція отримає деякий повний приріст

$$\Delta z = f(M) - f(M_0) = f(x_0 + \Delta x,\ y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0).$$

Похідною функції $z = f(M)$ у точці M_0 за напрямом l називають границю відношення повного приросту Δz до величини вектора приростів Δl при прямуванні її до нуля довільним чином уздовж осі l:

$$\left.\frac{\partial z}{\partial l}\right|_{M_0} = \lim_{\Delta l \to 0} \frac{\Delta z}{\Delta l}, \text{ або } \left.\frac{\partial z}{\partial l}\right|_{M_0} = \lim_{M \to M_0} \frac{f(M) - f(M_0)}{\text{вел}\,\overline{M_0 M}}. \qquad (13.3.1)$$

Похідну за напрямом у точці M_0 позначають також через

$$z_l'\big|_{M_0},\ z_l'(x_0, y_0) \text{ чи } f_l'\big|_{M_0},\ f_l'(x_0, y_0).$$

Похідна за напрямом у даній точці – це число, але якщо вона існує у кожній точці деякої області $D \subseteq D(f)$, то, як і вихідна функція, є функцією аргументів x і y.

Задача 13.3.1 (*про розрахункову формулу*). Знайти формулу для обчислення похідної за заданим напрямом l диференційовної в області D функції $z = f(x, y)$.

Р о з в' я з а н н я. Будемо діяти згідно з означенням (13.3.1), відштовхуючись від зображення повного приросту диференційовної функції у вигляді:

$$\Delta z = \frac{\partial z}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial z}{\partial y}\Delta y + \alpha_1 \Delta x + \beta_1 \Delta y \quad \text{(див. (13.2.12))},$$

де $\alpha_1 = \alpha_1(\Delta x, \Delta y)$, $\beta_1 = \beta_1(\Delta x, \Delta y)$ – н/м при $\Delta x \to 0$, $\Delta y \to 0$.

Знаходимо відношення $\Delta z / \Delta l$ і *переходимо* до границі при $\Delta l \to 0$ з урахуванням заданого (фіксованого) напряму l (див. рис. 13.3.1):

$$\frac{\Delta z}{\Delta l} = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{\Delta x}{\Delta l} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{\Delta y}{\Delta l} + \alpha_1 \cdot \frac{\Delta x}{\Delta l} + \beta_1 \cdot \frac{\Delta y}{\Delta l} \Rightarrow \left| \frac{\Delta x}{\Delta l} = \cos\alpha,\ \frac{\Delta y}{\Delta l} = \cos\beta \right| \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{\Delta z}{\Delta l} = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \cos\alpha + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \cos\beta + \alpha_1 \cdot \cos\alpha + \beta_1 \cdot \cos\beta \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \ \frac{\partial z}{\partial l}=\lim_{\Delta l\to 0}\frac{\Delta z}{\Delta l}=\frac{\partial z}{\partial x}\cdot\cos\alpha+\frac{\partial z}{\partial y}\cdot\cos\beta, \qquad (13.3.2)$$

бо величини $\cos\alpha$, $\cos\beta$ обмежені, а α_1, β_1 є н/м при $\Delta l\to 0$.

Формула (13.3.2) читається так: *похідна за напрямом дорівнює сумі добутків частинних похідних із напрямними косинусами обраного напряму.* (*Сформулюйте* відповідне *правило* відшукання похідної z'_l.)

У якості напрямного вектора осі l може бути довільний вектор $\bar{a}=(a_x,a_y)$ і тоді

$$\cos\alpha=\frac{a_x}{|\bar{a}|},\ \cos\beta=\frac{a_y}{|\bar{a}|} \quad \text{(див. (2.1.10) частини 1).}$$

Кути $\alpha=\bar{a}\,{}^\wedge Ox$ і $\beta=\bar{a}\,{}^\wedge Oy$ взаємозалежні (рис.13.3.2).

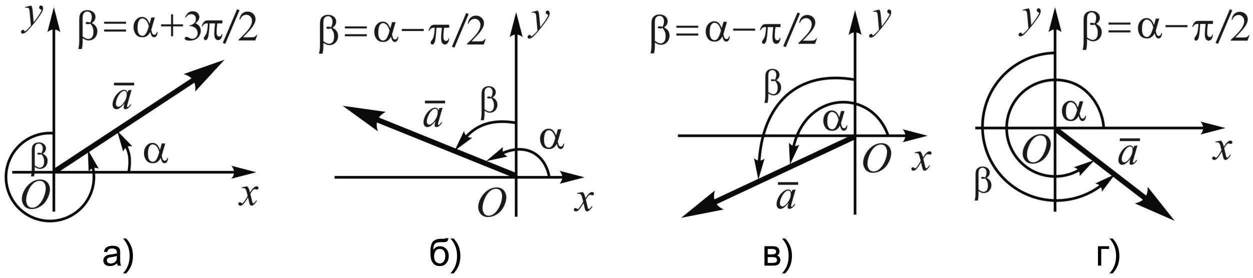


Рис.13.3.2. **Кути α, β у: а) першому; б) другому; в) третьому; г) четвертому квадрантах**

На підставі тригонометричних формул зведення виходить (*як це?*), що $\cos\beta=\sin\alpha$, і тоді розрахункова формула (13.3.2) набуває вигляду:

$$\frac{\partial z}{\partial l}=\frac{\partial z}{\partial x}\cdot\cos\alpha+\frac{\partial z}{\partial y}\cdot\sin\alpha. \qquad (13.3.3)$$

Правило: щоб отримати похідну за заданим напрямом, треба:

1) *знайти* частинні похідні даної функції $z=f(x,y)$;

2) *визначити* напрямні косинуси заданого напряму: $\cos\alpha$, $\cos\beta$;

3) *скласти*, згідно з (13.3.3) чи (13.3.2), суму попарних добутків частинних похідних і напрямних косинусів.

Напрям диференціювання – вісь l – може задаватись:

а) *вектором* $\bar{s}=s_x\bar{i}+s_y\bar{j}=(s_x,s_y)$; тоді

$$\cos\alpha = \frac{s_x}{|s|},\ \cos\beta = \frac{s_y}{|s|},\quad \text{де } |s| = \sqrt{(s_x)^2 + (s_y)^2}\ ;$$

б) *двома точками*: $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$, тобто вектором $\overline{AB}$ або $\overline{BA}$; тоді $\bar{s} = \overline{AB} = (x_2 - x_1,\ y_2 - y_1) = -\overline{BA}$ (див. випадок а));

в) *прямою*, у вигляді рівняння; тоді на ній вибирають дві довільні точки: $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$, і розглядають, як і в попередньому випадку, вектор $\overline{AB}$ або $\overline{BA}$, залежно від того, який напрям передбачається умовою задачі: у бік зростання чи спадання якоїсь із змінних (x або y).

У цьому випадку можна поступати інакше, спираючись на геометричний зміст похідної: знайти кутовий коефіцієнт прямої – $k = tg\alpha$ – і через нього за допомогою формул тригонометрії підрахувати напрямні косинуси:

$$\cos\alpha = \frac{1}{\pm\sqrt{1 + tg^2\alpha}},\quad \cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \sin\alpha = \frac{tg\alpha}{\pm\sqrt{1 + tg^2\alpha}}$$

(знак перед радикалом вибирається залежно від умови задачі);

г) *напрямом лінії* L: $y = \varphi(x)$, тобто дотичною до L у розглядуваній точці $A(x_1, y_1)$ у бік зростання чи спадання якоїсь із змінних (x або y); тоді $k = tg\alpha = \varphi'(x_1)$ і за наведеними вище формулами знаходимо напрямні косинуси. А можна скласти рівняння дотичної до L у даній точці $A(x_1, y_1)$: $y - y_1 = k(x - x_1)$, вибрати ще одну точку на дотичній: $B(x_2, y_2)$, і поступити так само, як у випадку в).

Наведемо ілюстративні *приклади*:

1. Знайти похідну функції $z = y\sqrt{x} - x\sqrt[3]{y}$ у точці $M_0(1, -1)$ за напрямом вектора $\bar{a} = \overline{AB}$, який визначається точками $A(9, 5)$ і $B(4, -7)$.

Відшукуємо ч/п у заданій точці:

$$z'_x = y\frac{1}{2\sqrt{x}} - \sqrt[3]{y} \;\Rightarrow\; z'_x\big|_{(1,-1)} = -\frac{1}{2} + 1 = \frac{1}{2};$$

$$z'_y = \sqrt{x} - x\frac{1}{3\sqrt[3]{y^2}} \;\Rightarrow\; z'_y\big|_{(1,-1)} = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}.$$

Визначаємо напрямні косинуси:

$$\bar{a} = (x_B - x_A,\ y_B - y_A) = (-5,-12)\ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ |\,\bar{a}\,| = \sqrt{(-5)^2 + (-12)^2} = 13\ \Rightarrow\ \left(\cos\alpha = -\frac{5}{13},\ \sin\alpha = -\frac{12}{13}\right).$$

Обчислюємо похідну вздовж $\overline{AB}$ у точці M_0:

$$\left.\frac{\partial z}{\partial l}\right|_{M_0} = \frac{\partial z(M_0)}{\partial x}\cdot\cos\alpha + \frac{\partial z(M_0)}{\partial y}\cdot\sin\alpha = \frac{1}{2}\cdot\left(-\frac{5}{13}\right) + \frac{2}{3}\cdot\left(-\frac{12}{13}\right) =$$

$= -\dfrac{21}{26} \approx -0{,}81$. (*Пропонуємо* подати вектор напряму диференціювання геометрично.)

2. Знайти похідну функції $z = x/y$ у точці $A(1,1)$ за напрямом лінії $L:\ y = x^2$ у бік від'ємної півосі Ox.

Знаходимо частинні похідні у заданій точці:

$$z'_x = \frac{1}{y}\ \Rightarrow\ \left.z'_x\right|_{(1,1)} = 1;\ \ z'_y = -\frac{x}{y^2}\ \Rightarrow\ \left.z'_y\right|_{(1,1)} = -1.$$

Визначаємо напрямні косинуси:

$$k = tg\alpha = \left.y'\right|_{x=1}\ \Rightarrow\ k = 2x\,\big|_{x=1} = 2\ \Rightarrow$$

$$\cos\alpha = \frac{1}{-\sqrt{1+tg^2\alpha}} = -\frac{1}{\sqrt{5}},\quad \sin\alpha = \frac{tg\alpha}{-\sqrt{1+tg^2\alpha}} = -\frac{2}{\sqrt{5}}$$

(*обґрунтуйте* вибір знака перед радикалом).

Підраховуємо похідну вздовж $\bar{l}_0 = (\cos\alpha, \sin\alpha)$ у точці $A(1,1)$:

$$\left.\frac{\partial z}{\partial l}\right|_{A} = \frac{\partial z(A)}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial z(A)}{\partial y}\sin\alpha = 1\cdot\left(-\frac{1}{\sqrt{5}}\right) - 1\cdot\left(-\frac{2}{\sqrt{5}}\right) =$$

$$= 1/\sqrt{5} = \sqrt{5}/5 \approx 0{,}45.$$

У випадку функції трьох змінних $u = f(x,y,z)$ похідна за даним напрямом визначається аналогічно. Відповідна формула має вигляд:

$$\frac{\partial u}{\partial l}=\frac{\partial u}{\partial x}\cos\alpha+\frac{\partial u}{\partial y}\cos\beta+\frac{\partial u}{\partial z}\cos\gamma, \qquad (13.3.4)$$

де $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ – напрямні косинуси осі l.

Для функції n змінних $u=f(x_1,x_2,...,x_n)$ розрахункова формула для похідної за заданим напрямом така:

$$\frac{\partial u}{\partial l}=\frac{\partial u}{\partial x_1}\cos\alpha_1+\frac{\partial u}{\partial x_2}\cos\alpha_2+...+\frac{\partial u}{\partial x_n}\cos\alpha_n=\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial u}{\partial x_i}\cos\alpha_i\,, \qquad (13.3.5)$$

де $\cos\alpha_i$, $i=\overline{1,n}$ – напрямні косинуси осі l, тобто $\alpha_i=l\,^\wedge Ox_i$.

(*Укажіть*, для яких n можливе геометричне зображення осі l.)

Градієнт ФКЗ: означення, властивості, зв'язок з похідною за напрямом

Вектор, координатами якого є частинні похідні ФКЗ $u=f(M)$ у заданій точці $M_0\in D(f)$, називається **градієнтом функції** у цій точці (від лат. gradiens – крокуючий) і позначається символом $grad\,u$ або ∇u; читається: „градієнт u” або „набла u”:

$$grad\,u\big|_{M_0}=\nabla u\big|_{M_0}=\left(\frac{\partial u}{\partial x_1}\bigg|_{M_0},\ \frac{\partial u}{\partial x_2}\bigg|_{M_0},\ ...,\ \frac{\partial u}{\partial x_n}\bigg|_{M_0}\right). \qquad (13.3.6)$$

Якщо функція диференційовна у деякій області $D\subseteq D(f)$, то градієнт теж є функцією відповідного числа змінних.

Для функцій двох і трьох аргументів (в інших позначеннях) маємо:

$$\begin{aligned} z=f(x,y)&:\ \nabla z=\left(z'_x,z'_y\right)=z'_x\cdot\bar{i}+z'_y\cdot\bar{j}\,;\\ u=f(x,y,z)&:\ \nabla u=\left(u'_x,\,u'_y,\,u'_z\right)=u'_x\cdot\bar{i}+u'_y\cdot\bar{j}+u'_z\cdot\bar{k}\,. \end{aligned} \qquad (13.3.7)$$

Оскільки градієнти є векторами, то вони володіють усіма *властивостями векторів*, і над ними можна виконувати знайомі лінійні і нелінійні операції (див. п. 2.1 частини 1). Зокрема:

$|\,\nabla z\,|=\sqrt{\left(z'_x\right)^2+\left(z'_y\right)^2}$ – модуль градієнта; (13.3.8)

$$\left.\begin{array}{l}\cos\alpha = \cos\left(\nabla z\,\hat{}\,Ox\right) = \dfrac{z'_x}{|\nabla z|},\\[2ex] \cos\beta = \sin\alpha = \cos\left(\nabla z\,\hat{}\,Oy\right) = \dfrac{z'_y}{|\nabla z|}\end{array}\right] \text{– напрямні косинуси;} \qquad (13.3.9)$$

$$\nabla f_1 \pm \nabla f_2 = \left(\frac{\partial f_1}{\partial x} \pm \frac{\partial f_2}{\partial x},\ \ \frac{\partial f_1}{\partial y} \pm \frac{\partial f_2}{\partial y}\right)$$

– сума (різниця) градієнтів двох функцій: $z = f_1(x, y)$, $z = f_2(x, y)$ та ін.

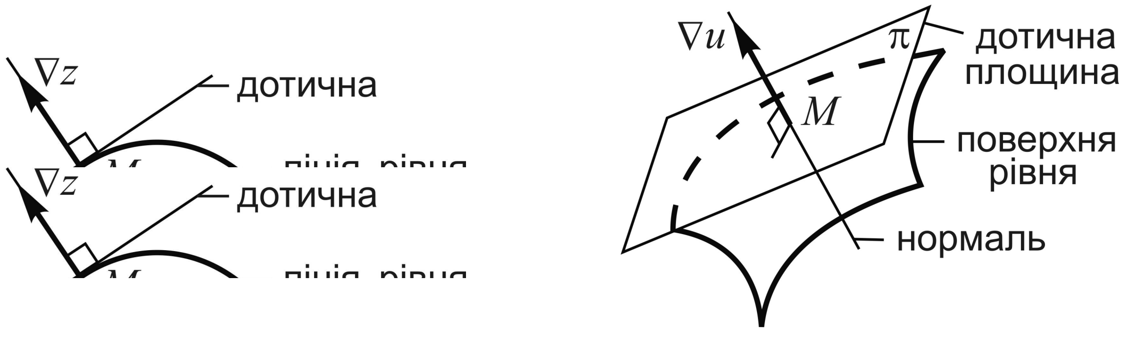
З іншого боку, градієнти тісно пов’язані з ч/п, а тому володіють арифметичними властивостями похідних (*сформулюйте* їх самостійно):

1) $\nabla(cu) = c\nabla u$; 2) $\nabla(u \pm v) = \nabla u \pm \nabla v$;

3) $\nabla(u \cdot v) = \nabla u \cdot v + \nabla v \cdot u$; 4) $\nabla\left(\dfrac{u}{v}\right) = \dfrac{1}{v^2}(\nabla u \cdot v - \nabla v \cdot u)$,

де $u = u(M)$, $v = v(M)$ – ФКЗ, $c - const$.

Теорема 13.3.1 (*геометричний смисл градієнта*). Градієнт функції $z = f(x, y)$ $(u = f(x, y, z))$ у точці $M(x, y)$ $(M(x, y, z))$ є вектором нормалі до лінії (поверхні) рівня у розглядуваній точці (рис. 13.3.3-а, б).



а) б)

Рис. 13.3.3. **Геометричний смисл градієнтів: а) ∇z; б) ∇u**

Д о в е д е н н я проведемо для Ф2З $z = f(x, y)$. Воно базується на порівнянні кутових коефіцієнтів градієнта (k_∇), тобто кутового коефіцієнта прямої, на якій лежить ∇z, і нормалі $(k_{\text{н}})$ до лінії рівня, яка проходить через точку M (див. рис. 13.3.3-а).

На підставі (13.3.9) для k_∇ маємо:

$$\left(\cos\alpha=\frac{f'_x}{|\nabla z|},\ \sin\alpha=\frac{f'_y}{|\nabla z|}\right)\ \Rightarrow\ k_\nabla=tg\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=\frac{f'_y}{f'_x}.$$

Кутовий коефіцієнт дотичної $(k_{\text{д}})$ (див. (9.1.3) частини 1) до лінії рівня знаходимо відштовхуючись від її рівняння $f(x,y)=c$, або $f(x,y)-c=0$, як неявного завдання функції $y=y(x)$. Якщо ввести в розгляд Ф2З $F(x,y)=f(x,y)-c$ і застосувати формулу диференціювання неявно заданих функцій (13.2.20), то отримаємо: $k_{\text{д}}=y'_x=-F'_x\big/F'_y=$ $=-f'_x\big/f'_y$. Нормаль і дотична до кривої взаємно перпендикулярні (за означенням), тому $k_{\text{д}}\cdot k_{\text{н}}=-1$, а значить $k_{\text{н}}=-1\big/k_{\text{д}}=f'_y\big/f'_x$ за умови $f'_x\neq 0$. Зіставляючи k_∇ і $k_{\text{н}}$ переконуємося у справедливості теореми.

У випадку Ф3З $u=f(x,y,z)$ треба довести (чого робити не будемо), що градієнт функції ∇u ортогональний до дотичної площини π, тобто $\nabla u^\wedge\pi=90^\circ$ (див. рис. 13.3.3-б).

Теорема 13.3.2 (*зв'язок між градієнтом і похідною за напрямом*). Похідна ФКЗ $u=f(M)$, $M\in\mathbf{R}^n$, за напрямом l дорівнює скалярному добутку градієнта функції ∇u з вектором $\bar{l}_0$ вибраного напряму:

$$u'_l=\nabla u\cdot\bar{l}_0, \tag{13.3.10}$$

де $\nabla u=\left(\dfrac{\partial u}{\partial x_1},\dfrac{\partial u}{\partial x_2},...,\dfrac{\partial u}{\partial x_n}\right)$, $\bar{l}_0=(\cos\alpha_1,\cos\alpha_2,...,\cos\alpha_n)$.

Д о в е д е н н я. Справедливість твердження випливає з розрахункової формули для похідної за напрямом l як суми добутків ч/п $\dfrac{\partial u}{\partial x_i}$ з напрямними косинусами $\cos\alpha_i$, $i=\overline{1,n}$ (див. (13.3.5)):

$$\frac{\partial u}{\partial l}=\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial u}{\partial x_i}\cos\alpha_i.$$

Залучаючи поняття скалярного добутку багатовимірних векторів (див. (4.1.4) частини 1), отримуємо (13.3.10).

Зокрема:

$$\begin{aligned} z = f(x,y):\ z_l' &= \nabla z \cdot \bar{l}_0 = \left(z_x', z_y'\right) \cdot (\cos\alpha, \cos\beta); \\ u = f(x,y,z):\ u_l' &= \nabla u \cdot \bar{l}_0 = \left(u_x', u_y', u_z'\right) \cdot (\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma). \end{aligned} \qquad (13.3.11)$$

Наслідок 1 (*про найбільше значення похідної за напрямом*). Похідна ФКЗ $u = f(M)$, $M \in \mathbf{R}^n$, за напрямом градієнта ∇u приймає найбільше значення, рівне модулеві градієнта:

$$\bar{l}_0 \uparrow\uparrow \nabla u \ \Rightarrow\ \frac{\partial u}{\partial \nabla u} = \max_{\forall l}\left\{\frac{\partial u}{\partial l}\right\} = |\nabla u|. \qquad (13.3.12)$$

Д о в е д е н н я проведемо для $n = 2$, тобто розглянемо двовимірний випадок $z = f(x,y)$:

$$z_l' = z_x' \cdot \cos\alpha + z_y' \cdot \cos\beta = \nabla z \cdot \bar{l}_0.$$

За означенням скалярного добутку двох векторів і з урахуванням, що $\left|\bar{l}_0\right| = 1$, отримаємо:

$$z_l' = \nabla z \cdot \bar{l}_0 = |\nabla z| \cdot \left|\bar{l}_0\right| \cdot \cos\left(\nabla z \wedge \bar{l}_0\right) \ \Rightarrow\ z_l' = |\nabla z| \cdot \cos\left(\nabla z \wedge \bar{l}_0\right).$$

Значення $|\nabla z|$ у вибраній (заданій) точці є величиною сталою, отже, z_l' залежатиме від множника $\cos\left(\nabla z \wedge \bar{l}_0\right)$, з максимальною вартістю 1. Це означає, що z_l' приймає найбільше значення при виконанні умови $\bar{l}_0 \uparrow\uparrow \nabla u$, бо кут між однаково напрямленими векторами дорівнює нулеві, а $\cos 0 = 1$. Таким чином

$$\frac{\partial z}{\partial \nabla z} = \max_{\forall l}\left\{\frac{\partial z}{\partial l}\right\} = |\nabla z|. \qquad (13.3.13)$$

Висновок: з *фізичної точки зору* градієнт ФКЗ визначає напрям найбільшої швидкості змінювання функції.

(*Обміркуйте*, що визначає **антиградієнт** – вектор, протилежний градієнту.)

Наслідок 2 (*про рівність нулю похідної за напрямом*). Похідна ФДЗ $z = f(M)$, $M \in \mathbf{R}^2$, за напрямом дотичної до лінії рівня дорівнює нулю.

Д о в е д е н н я наслідку *пропонуємо* провести самостійно. (*Вказівка*: нормаль і дотична до кривої взаємно перпендикулярні.)

Приклад. Для функції $z = 4x^2 + 9y^2 - 24x - 36y + 36$: 1) *установити* рівняння лінії рівня (L), яка проходить через точку $M_0(1/2, 1)$; 2) *визначити* градієнт (∇z) у цій точці і *переконатися*, що він перпендикулярний дотичній до лінії рівня $(\nabla z \perp l)$; 3) *зобразити* геометрично на xOy лінію рівня, дотичну до неї та градієнт у точці M_0.

Розв'язання. 1. Функція являє собою многочлен відносно змінних x і y, тому $M_0 \in D(f) = \mathbf{R}^2$ (на якій *підставі*?).

Для установлення рівняння лінії рівня $L \ni M_0$ *обчислимо вартість функції у точці* $M_0(1/2, 1)$: $z\big|_{(1/2,1)} = -2$. Усі точки рівня $c = -2$ визначають лінію, яка описується рівнянням $f(x, y) = c$ (див. п. 13.1), тобто $4x^2 + 9y^2 - 24x - 36y + 36 = -2$, або $4x^2 + 9y^2 - 24x - 36y + 38 = 0$.

Після зведення до канонічного виду (виділенням повних квадратів двочленів відносно x і y) отримуємо:

$$4(x-3)^2 + 9(y-2)^2 = 34, \text{ або } \frac{(x-3)^2}{34/4} + \frac{(y-2)^2}{34/9} = 1$$

– рівняння еліпса з центром симетрії у точці $(3, 2)$ і півосями $a = \sqrt{34}/2 \approx 2{,}9$; $b = \sqrt{34}/3 \approx 1{,}9$.

2. *Знайдемо* частинні похідні першого порядку та *обчислимо* їх у точці M_0, що і визначає градієнт:

$$\left.\begin{array}{l} z'_x = 8(x-3) \;\;\Rightarrow\;\; z'_x(M_0) = -20, \\ z'_y = 18(y-2) \Rightarrow z'_y(M_0) = -18 \end{array}\right] \Rightarrow \nabla z = (-20, -18) = -20 \cdot \bar{i} - 18 \cdot \bar{j}.$$

Далі *підрахуємо* і *зіставимо* кутові коефіцієнти градієнта функції (k_∇) і дотичної до лінії рівня ($k_{\text{д}}$) у розглядуваній точці M_0 (див. теорему 13.3.1 про *геометричний смисл градієнта*).

Для градієнта маємо:

$$k_{\nabla} = tg\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \frac{f'_y}{f'_x} = \frac{-18}{-20} = \frac{9}{10},$$

а $k_{\text{д}}$ обчислимо за неявним завданням лінії рівня L:

$$\underbrace{4(x-3)^2 + 9(y-2)^2 - 34}_{F(x,y)} = 0 \;\Rightarrow\; k_{\text{д}} = y'_x = -\frac{F'_x}{F'_y} = -\frac{8(x-3)}{18(y-2)} \;\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\; k_{\text{д}}\Big|_{(1/2,1)} = \frac{4(-2{,}5)}{9(-1)} = -\frac{10}{9}.$$

Безперечно: $k_{\text{д}} \cdot k_{\nabla} = -1$, тому $\nabla z \perp l$ (рис. 13.3.4).

3. За результатами в 1) і 2) наносимо на xOy (рис. 13.3.4) геометричні образи лінії рівня L, дотичної до неї l та градієнта ∇z у точці $M_0(1/2, 1)$, при цьому ∇z подамо у масштабі $1:5$, тобто зобразимо вектор $\frac{1}{5} \cdot \nabla z = (-4; -3{,}6)$ (*здогадайтеся*, чому).

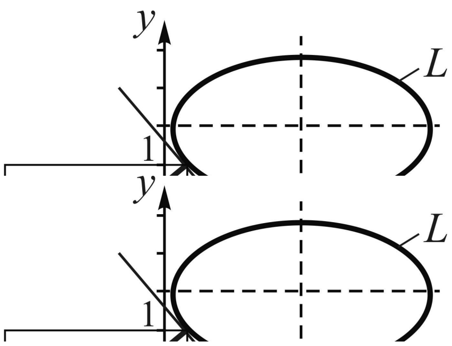


Рис. 13.3.4. **Лінія рівня, дотична до неї і градієнт функції**

Пропонуємо також переконатися, що осі Ox, Oy є дотичними для лінії рівня $c = 0$.

Однією з областей застосування функцій кількох змінних є задачі оптимізації – задачі відшукання найкращого із можливих розв’язків. Важливу роль при розв’язанні таких задач відіграє поняття градієнта.

Математична дисципліна, яка розглядає теорію побудови математичних моделей задач оптимізації та методи їх розв’язання, називається **математичним програмуванням**.

Запитання для самодіагностики засвоєння матеріалу

Відповіді на всі запитання сформулюйте словесно, запишіть в символічній формі, обґрунтуйте (на підставі означень, теорем, правил, формул тощо), наведіть відповідні конкретні приклади.

1. Що називається функцією двох змінних?

2. Що називається областю визначення функції і який її геометричний зміст?

3. Що являє собою графік функції $z = f(x, y)$?

4. Що називається лінією рівня функції $z = f(x, y)$?

5. Дайте означення функції трьох змінних, n змінних.

6. Що називається границею функції $z = f(M)$ при $M \to M_0$?

7. Що називається поверхнями рівня функції $u = f(x, y, z)$?

8. Дайте означення неперервної функції двох змінних у точці?

9. Сформулюйте критерій неперервності функції $z = f(x, y)$ „мовою границі".

10. Дайте означення частинних похідних функції двох змінних. Укажіть їх геометричний зміст.

11. Як визначаються частинні похідні вищих порядків від функції двох змінних?

12. Сформулюйте теорему про рівність других мішаних похідних.

13. Сформулюйте і доведіть теорему про неперервність диференційовної функції.

14. Виведіть достатні умови диференційовності функції двох (кількох) змінних.

15. Дайте означення повного диференціала функції двох змінних і вкажіть формулу для його відшукання. Узагальніть цю формулу на випадок функції n змінних.

16. Як застосовується повний диференціал функції для наближеного обчислення її значень?

17. У чому полягає інваріантність форми диференціала першого порядку? Чому цієї властивості не мають диференціали вищих порядків?

18. У чому полягає геометричний зміст повного диференціала функції двох змінних?

19. Що називають похідною за даним напрямом?
20. Виведіть формулу для обчислення похідної за напрямом.
21. Дайте означення градієнта функції кількох змінних.
22. Сформулюйте і доведіть властивості градієнта функції.
23. Доведіть теорему про зв'язок градієнта і похідної за напрямом.

Задачі та вправи

1. Дано функцію $f(x,y)=\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$. Знайти: а) $f(3,-1)$; б) $f(1,0)$; в) $f(kx,ky)$, $k\neq 0$; г) $f(\cos t,\sin t)$.

2. Знайти та зобразити область визначення функції:

1) $z=\dfrac{x-y}{e^{x-y}}$;
2) $z=\dfrac{1}{\sqrt[3]{-x-y}}$;
3) $z=\sqrt{x^2+y^2-1}+\ln\left(4-x^2-y^2\right)$;
4) $z=ctg\pi(x+y)$;
5) $z=\arcsin\dfrac{y-1}{x}$;
6) $z=\sqrt{\ln x-\ln y}$;
7) $z=\sqrt{\sin\left(x^2+y^2\right)}$;
8) $z=arctg\,\dfrac{x-y}{1+x^2y^2}$;
9) $z=\sqrt{1+\sqrt{-(x+y)^2}}$;
10) $z=\sqrt{\max(x,y)}$.

3. Навести приклад функції, яка має таку область визначення:

а) площина з вилученою точкою $(-3,1)$;

б) площина з вилученою параболою $y^2=4x$ та колом $x^2+y^2=8$;

в) точки площини між прямими $x+y=1$ та $x+y=-1$;

г) внутрішні точки кільця, утвореного концентричними колами з центрами у початку координат і радіусами 1 та 2, із залученням точок кіл.

4. Записати рівняння ліній рівня функції та зобразити одну із них:

а) $z=x+y$;
б) $z=x^2+y^2$;
в) $z=x^2-y^2$;
г) $z=\dfrac{1}{x^2+2y^2}$;
д) $z=\dfrac{2x}{x^2+y^2}$;
е) $z=e^{xy}$.

5. Обчислити границі:

а) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \dfrac{x^2+y^2}{\sqrt{x^2+y^2+1}-1}$;

б) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$;

в) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 2}} \dfrac{\sqrt{x^2+(y-2)^2+1}-1}{x^2+(y-2)^2}$;

г) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \left(1+x^2+y^2\right)^{\frac{1}{x^2+y^2}}$;

д) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 2}} \dfrac{e^{y(x+y-2)}-1}{3(1+x)(x+y-2)}$;

е) $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ y\to 1}} \dfrac{\sin(x+2y-3)}{(x+2y)^2-9}$;

є) $\lim\limits_{\substack{x\to \infty\\ y\to \infty}} \left(x^2+y^2\right)\cdot tg\,\dfrac{1}{x^2+y^2}$;

ж) $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ y\to -3}} \dfrac{\ln\left(3+x^2+y\right)}{x^2+y+2}$.

6. Дослідити функцію на неперервність:

а) $z=2x^2+3y$;

б) $z=\dfrac{x^2+3x-y^2+2}{x^2+y^2}$;

в) $z=\dfrac{x+y-1}{y^2-2x}$;

г) $z=\dfrac{1}{\ln\left(x^2+y^2\right)}$;

д) $z=\begin{cases}(x-y-3)\sin\dfrac{1}{(x-4)^2+(y-1)^2}, & \text{при } x\neq 4,\ y\neq 1,\\ 0 & \text{при } x=4,\ y=1.\end{cases}$

7. Знайти частинні похідні першого порядку заданих функцій:

1) $z=3x^2-5y^3-2xy^2+8x-1$;

2) $z=y\cdot x^y$;

3) $z=e^{x\sqrt{y}}\cdot\dfrac{x}{\sqrt{y}}$;

4) $z=\arcsin\dfrac{x-y}{x+y}$;

5) $z=\dfrac{x}{y^3}+\dfrac{y}{x^3}-\dfrac{1}{6x^2y}$;

6) $z=\dfrac{e^{xy}+1}{xy}$;

7) $u=x^2z+arctg\,\dfrac{x}{y}$;

8) $u=z\ln\sqrt{x^2+y^2}$;

9) $z=\ln(x+y)-\dfrac{2y^2}{(x+y)^2}$ у точці $(0,1)$.

8. Показати, що функція $z=f(x,y)$ задовольняє задане рівняння:

а) $z=\sqrt{x}\cdot\sin(y/x), \quad 2x\cdot z'_x+2y\cdot z'_y=z$;

б) $z=\sqrt{x^2+y^2}, \quad (z'_x)^2+(z'_y)^2=1$;

в) $z=x^y y^x, \quad x\cdot z'_x+y\cdot z'_y=z\cdot(x+y+\ln z)$.

9. Знайти повний диференціал першого порядку заданої функції:

а) $z=x^3y^2$;

б) $z=arctg\,\dfrac{x+y}{x-y}$;

в) $z=e^x(\cos y+x\sin y)$;

г) $z=\ln tg(xy)$;

д) $u=(xy)^z$;

е) $u=\dfrac{x}{\sqrt{y^2+z^2}}$.

10. Обчислити наближено за допомогою повного диференціала функції:

а) $\sqrt{5e^{0,02}+2{,}03^2}$;

б) $\ln\left(0{,}09^3+0{,}99^3\right)$;

в) $arctg\,\dfrac{1{,}02}{0{,}95}$;

г) $\dfrac{1{,}03^2}{\sqrt[3]{0{,}98}\cdot\sqrt[4]{1{,}05^3}}$;

д) $1{,}002\cdot 2{,}003^2\cdot 3{,}004^3$;

е) $\sqrt{1{,}04^{1,99}+\ln 1{,}02}$;

є) $\sin 28^\circ\cdot\cos 61^\circ$;

ж) $\cos 2{,}36\cdot arctg\,0{,}97\cdot 3^{2,05}$.

11. Знайти повну похідну $\dfrac{dz}{dx}$, якщо $z=\dfrac{x^2-y}{x^2+y}$, де $y=3x+1$.

12. Нехай $u=0{,}2e^{2x}(y-z)$, де $y=2\sin x$, $z=\cos x$. Показати, що $\dfrac{du}{dx}=e^{2x}\sin x$.

13. Знайти $\dfrac{dz}{dt}$, якщо $z=arctg\,\dfrac{x-y}{1-xy}$, де $x=tg\,t$, $y=ctg\,t$.

14. Нехай $z=x+y^2$, де $x=u^2+\sin v$, $y=\ln(u+v)$. Показати, що $z'_u-z'_v=2u-\cos v$.

15. Знайти частинні похідні функції $z = f(x, y)$, заданої неявно рівнянням:

а) $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$; б) $\frac{x}{z} = \ln\frac{x}{y}$;

в) $\sin z + e^{xyz} = 1$; г) $yz = arctg(xz)$;

д) $x^2 y - xy^2 - xyz + xyz^3 = 6$; е) $y \sin z = \cos(x - z)$;

є) $z^3 - 4xz - y^2 = 4$ у точці $M(1, -2, 2)$.

16. Показати, що функція $z = f(x, y)$ $(u = f(x, y, z))$ задовольняє задане рівняння:

а) $z = x^3 - x^2 y - y^3$, $z''_{yy} - 3z''_{xx} - 9z''_{xy} = 0$;

б) $z = \frac{xy}{x - y}$, $z''_{xx} + 2z''_{xy} + z''_{yy} = \frac{2}{x - y}$;

в) $z = \frac{\cos y^2}{x}$, $(x^3 z''_{xx})^2 + (\frac{x^2}{y} z''_{xy}) = 4$;

г) $z = e^x (x \cos y - y \sin y)$, $z''_{xx} + z''_{yy} = 0$;

д) $u = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$, $u''_{xx} + u''_{yy} + u''_{zz} = 2/u$;

е) $u = \frac{1}{x - y} + \frac{1}{y - z} + \frac{1}{z - x}$, $u''_{xx} + u''_{yy} + u''_{zz} + 2(u''_{xy} + u''_{yz} + u''_{xz}) = 0$.

17. Знайти повний диференціал другого порядку функції $z = f(x, y)$:

а) $z = 4x^3 + 3x^2 y + 3xy^2 - y^3$; б) $z = e^{xy}$;

в) $z = xy - \frac{y}{x}$; г) $z = \ln(x^2 + y^2)$;

д) $z = \sin x \sin y$ у точці $A\left(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$; е) $z = \frac{x}{x - y}$ у точці $B(2, 1)$.

18. Для функції $z = x^2 + y^2$: а) знайти $grad\, z$ у довільній точці та у точці $M(3, 4)$; б) знайти $\left| grad\, z(M) \right|$; в) переконатися аналітично і геометрично в тому, що $grad\, z$ у точці M перпендикулярний дотичній до лінії рівня, що проходить через цю точку.

19. Знайти гострий кут φ між градієнтами:

а) функції $u = \dfrac{x}{x^2 + y^2 + z^2}$ у точках $A(1, 2, 2)$ і $B(-3, 1, 0)$;

б) функцій $u = \dfrac{yz^2}{x^2}$, $v = \dfrac{x^3}{2} + 6y^3 + 3\sqrt{6}z^3$ у точці $M\left(\sqrt{2}, \dfrac{1}{\sqrt{2}}, \dfrac{1}{\sqrt{3}}\right)$.

20. Знайти похідну функції $z = f(x, y)$ $(u = f(x, y, z))$ у точці M у заданому напрямі:

а) $z = x\sqrt{x} - \sqrt{y}$, $M(3,1)$, за напрямом, що утворює кут $\alpha = 30^\circ$ з додатним напрямом осі Ox;

б) $z = arctg(xy)$, $M(1,1)$, за напрямом бісектриси першого координатного кута;

в) $u = \dfrac{\sqrt{x}}{y} + \dfrac{8y}{2 + \sqrt{z}}$, $M(4,1,4)$, за напрямом вектора $\overline{MN}$, де $N(7,-3,4)$;

г) $z = \ln(x + y)$, $M(1,2)$, за напрямом параболи $y^2 = 4x$ у бік додатної півосі Ox;

д) $u = y\ln(1 + x^2) + arctg\, z$, $M(0,1,1)$, за напрямом градієнта цієї функції у точці M.

21. Довести, що похідна функції $z = y^2/x$ у довільній точці еліпса $2x^2 + y^2 = 1$ за напрямом нормалі до еліпса дорівнює нулю.

Відповіді

1. а) $0{,}8$; б) 1; в) $f(x, y)$; г) $\cos 2t$.

2. 1) $D(z) = \{(x, y) \mid x \in \mathbf{R},\ y \in \mathbf{R}\}$ – уся площина xOy; 2) $D(z) = \{(x, y) \mid y \neq -x\}$ – площина xOy за виключенням точок прямої $y = -x$; 3) $D(z) = \{(x, y) \mid 1 \leq x^2 + y^2 < 4\}$ – множина точок, що містяться між колами $x^2 + y^2 = 1$ і $x^2 + y^2 = 4$, причому точки внутрішнього кола області $D(z)$ належать, а зовнішнього – ні; 4) $D(z) = \{(x, y) \mid x + y \neq k,\ k \in \mathbf{Z}\}$ –

площина xOy за виключенням точок прямих $x+y=k$, $k\in\mathbf{Z}$; 5) $D(z)=\{(x,y)\,|\,1-|x|\le y\le 1+|x|,\ x\ne 0\}$ – внутрішня частина правого і лівого вертикальних кутів, утворених прямими $y=1+x$ і $y=1-x$, з залученням точок самих цих прямих, але без точки їх перетину; 6) $D(z)=\{(x,y)\,|\ x>0\wedge y>0\wedge x\cdot y\ge 1\}$ – множина точок I-ї координатної чверті, розташованих над гіперболою $y=1/x$ і на ній; 7) $D(z)=\{(x,y)\,|\,2\pi k\le x^2+y^2\le\pi(2k+1),\ k\in\mathbf{N}\bigcup\{0\}\}$ – сім'я концентричних кіл; 8) $D(z)=\mathbf{R}^2$ – уся площина xOy; 9) $D(z)=\{(x,y)\,|\ y=-x\}$ – бісектриса II-го і IV-го координатних кутів; 10) $D(z)=\{(x,y)\,|\ (x\ge y\wedge x\ge 0)\vee$ $\vee\,(x<y\wedge y\ge 0)\}$ – уся площина xOy за виключенням внутрішніх точок III-ї координатної чверті.

3. а) $z=\dfrac{1}{(x+3)(y-1)}$; б) $z=\dfrac{1}{y^2-4x}-\dfrac{1}{x^2+y^2-8}$; в) $z=\arcsin(x+y)$; г) $z=\sqrt{x^2+y^2-1}+\sqrt{4-x^2-y^2}$.

4. а) сім'я прямих $x+y=c$ $(c-const)$; б) концентричні кола $x^2+y^2=c$ при $c\ne 0$, точка $(0,0)$ при $c=0$; в) сім'я гіпербол $x^2-y^2=c$ при $c\ne 0$, прямі $y=\pm x$ при $c=0$; г) сім'я еліпсів $x^2+2y^2=1/c$ $(c>0)$ з півосями $a=\sqrt{1/c}$ і $b=\sqrt{1/(2c)}$; д) сім'я кіл $(x-1/c)^2+y^2=1/c^2$ при $c\ne 0$, вісь Oy при $c=0$, за виключенням точки $(0,0)$ в обох випадках; е) сім'я гіпербол $xy=\ln c$ при $c\ne 1$ $(c>0)$, координатні осі при $c=1$.

5. а) 2; б) границя не існує; в) $1/2$; г) e; д) $2/3$; е) $1/6$; є) 1; ж) 1.

6. а) функція неперервна на всій площині xOy; б) функція розривна в точці $(0,0)$; в) точками розриву є точки параболи $y^2=2x$; г) функція розривна в точках кола $x^2+y^2=1$ і в точці $(0,0)$; д) функція неперервна на всій площині xOy.

7. 1) $z'_x=6x-2y^2+8$, $z'_y=-15y^2-4xy$; 2) $z'_x=y^2x^{y-1}$, $z'_y=x^y(1+y\ln x)$; 3) $z'_x=\dfrac{e^{x\sqrt{y}}}{\sqrt{y}}(x\sqrt{y}+1)$, $z'_y=\dfrac{xe^{x\sqrt{y}}}{2y}\left(x-\dfrac{1}{\sqrt{y}}\right)$; 4) $z'_x=\dfrac{y}{|x+y|\sqrt{xy}}$, $z'_y=\dfrac{x}{|x+y|\sqrt{xy}}$;

5) $z'_x=\frac{1}{y^3}-\frac{3y}{x^4}+\frac{1}{3x^3y}$, $z'_y=-\frac{3x}{y^4}+\frac{1}{x^3}+\frac{1}{6x^2y^2}$; 6) $z'_x=e^{xy}$, $z'_y=\frac{e^{xy}(xy-1)-1}{y^2}$;

7) $u'_x=2xz+\frac{y}{x^2+y^2}$, $u'_y=-\frac{x}{x^2+y^2}$; $u'_z=x^2$; 8) $u'_x=\frac{xz}{x^2+y^2}$, $u'_y=\frac{yz}{x^2+y^2}$, $u'_z=\ln\sqrt{x^2+y^2}$; 9) $z'_x(0,1)=5$, $z'_y(0,1)=1$.

9. а) $dz=3x^2y^2dx+2x^3ydy$; б) $dz=\frac{x\,dy-y\,dx}{x^2+y^2}$; в) $dz=e^x[(\sin y+$ $+\cos y+x\sin y)dx+(x\cos y-\sin y)dy]$; г) $dz=\frac{2(y\,dx+x\,dy)}{\sin(2xy)}$; д) $du=(xy)^z\times$ $\times\left(\frac{z}{x}dx+\frac{z}{y}dy+\ln(xy)dz\right)$; е) $dz=\frac{dx}{\sqrt{y^2+z^2}}-\frac{xy\,dy+xz\,dz}{\sqrt{(y^2+z^2)^3}}$.

10. а) $3{,}037$; б) $-0{,}03$; в) $0{,}82$; г) $1{,}055$; д) $108{,}972$; е) $1{,}05$; є) $0{,}227$; ж) $-5{,}3675$.

11. $\frac{dz}{dx}=\frac{6x^2+4x}{(x^2+3x+1)^2}$.

13. $\frac{dz}{dt}=2$.

15. а) $z'_x=-\frac{c^2}{a^2}\cdot\frac{x}{z}$, $z'_y=-\frac{c^2}{b^2}\cdot\frac{y}{z}$; б) $z'_x=\frac{z(x-z)}{x^2}$, $z'_y=\frac{z^2}{xy}$;

в) $z'_x=\frac{yz(\sin z-1)}{\cos z+xy(1-\sin z)}$, $z'_y=\frac{xz(\sin z-1)}{\cos z+xy(1-\sin z)}$; г) $z'_x=\frac{z}{y(1+x^2z^2)-x}$, $z'_y=\frac{z(1+x^2z^2)}{x-y(1+x^2z^2)}$; д) $z'_x=\frac{2xy-y^2-yz+yz^3}{xy-3xyz^2}$, $z'_y=\frac{x^2-2xy-xz+xz^3}{xy-3xyz^2}$;

е) $z'_x=\frac{\sin(x-z)}{\sin(x-z)-y\cos z}$, $z'_y=\frac{\sin z}{\sin(x-z)-y\cos z}$; є) $z'_x\big|_M=1$, $z'_y\big|_M=-\frac{1}{2}$.

17. $d^2z=6(4x+y)dx^2+12(x+y)dxdy+6(x-y)dy^2$; б) $d^2z=e^{xy}\times$ $\times\left(y^2dx^2+2(1+xy)dxdy+x^2dy^2\right)$; в) $d^2z=-2yx^{-3}dx^2+2(1+x^{-2})dxdy$;

г) $d^2z=2\frac{(y^2-x^2)dx^2-4xydxdy+(x^2-y^2)dy^2}{(x^2+y^2)^2}$; д) $d^2z\big|_A=-dx^2-dy^2$;

е) $d^2z\big|_B=2dx^2-6dxdy+4dy^2$.

18. а) $grad\, z = 2x\cdot\bar{i} + 2y\cdot\bar{j}$, $grad\, z(M) = 6\cdot\bar{i} + 8\cdot\bar{j}$; б) $|grad\, z(M)| = 10$.

19. а) $\varphi \approx 27^\circ$; б) $\varphi = 45^\circ$.

20. а) 2 ; б) $\sqrt{2}/2$; в) $3/20$; г) $\sqrt{2}/3$; д) $1/2$.

Ключові терміни

Функція двох змінних, область визначення функції, область значень функції, графік функції, лінія рівня, функція трьох змінних, поверхня рівня, границя функції, неперервність функції, повний приріст функції, частинний приріст функції, частинні похідні, частинні похідні вищих порядків, мішані похідні, неперервність диференційовної функції, достатні умови диференційовності, повний диференціала функції, інваріантність форми диференціала, геометричний зміст повного диференціала функції двох змінних, похідна за даним напрямом, градієнт функції кількох змінних, зв’язок градієнта і похідної за напрямом.

Резюме

Викладено основи теорії функцій багатьох змінних як узагальнення функцій однієї змінної. Наведені означення основних понять, на яких основується диференціальне числення функції кількох змінних: окіл точки; приріст функції; границя функції.

Розглянуто: теоретичні положення, пов’язані з частинними похідними і диференціалами першого й вищих порядків; диференціювання функцій різних форм завдання; похідну за напрямом як узагальнення частинних похідних; градієнт функції і його зв’язок з похідною за напрямом.

Література: [2; 4; 9; 11 – 13; 16; 19; 22].

14. Екстремуми функції кількох змінних, необхідні і достатні умови

Легкість математики заснована на можливості чисто логічної її побудови, труднощі, які відлякують багатьох, – на неможливості іншого викладу.

Хьюго Штейнгаус

Мета: засвоєння майбутніми фахівцями основних аналітичних методів дослідження функцій кількох змінних на екстремум.

Питання теми:

14.1. Локальні екстремуми ФКЗ. Необхідна та достатня умови екстремуму.

14.2. Найменше та найбільше значення функції на замкненій області (тотальний екстремум).

14.3. Умовні екстремуми ФКЗ. Методи відшукання.

14.4. Поняття про емпіричні формули, метод найменших квадратів.

Компетентності, що формуються після вивчення теми:

Загальнонаукова: володіння методами дослідження функцій кількох змінних на екстремум.

Загальнопрофесійна: підготовленість до дослідження на екстремум інформаційних параметрів як функцій кількох змінних.

Спеціалізовано-професійна: уміння будувати математичні моделі для оптимізації управління інформаційними системами.

14.1. Локальні екстремуми ФКЗ. Необхідна та достатня умови екстремуму

Нехай Ф2З $z = f(x, y)$ визначена у точці $M_0(x_0.y_0)$ і деякому її ε-околі $B(\varepsilon, M_0)$, що належить множині $D \subseteq D(f) \subseteq \mathbf{R}^2$. Точка M_0 називається **точкою локального максимуму** (**мінімуму**) функції, якщо для всіх точок деякого ε-околу цієї точки вартості функції менші (більші) значення функції у самій точці:

$$(x_0, y_0) \text{ – точка } \max\ (\min) \rightleftharpoons \exists \varepsilon > 0 \wedge \forall (x, y) \in B(\varepsilon, M_0): \quad f(x, y) < (>)\, f(x_0, y_0). \tag{14.1.1}$$

Терміни „максимум” (від. лат. maximum – найбільше) та „мінімум” (від лат. minimum – найменше) об’єднуються загальною назвою **екстремум** (від лат. extremum – крайній, надзвичайний); а термін „локальний” походить від лат. localis – місцевий.

Якщо для координат точок околу (x,y) покласти $x = x_0 + \Delta x$, $y = y_0 + \Delta y$, де Δx, Δy – прирости аргументів у межах околу точки M_0, то нерівності із (14.1.1) набудуть вигляду:

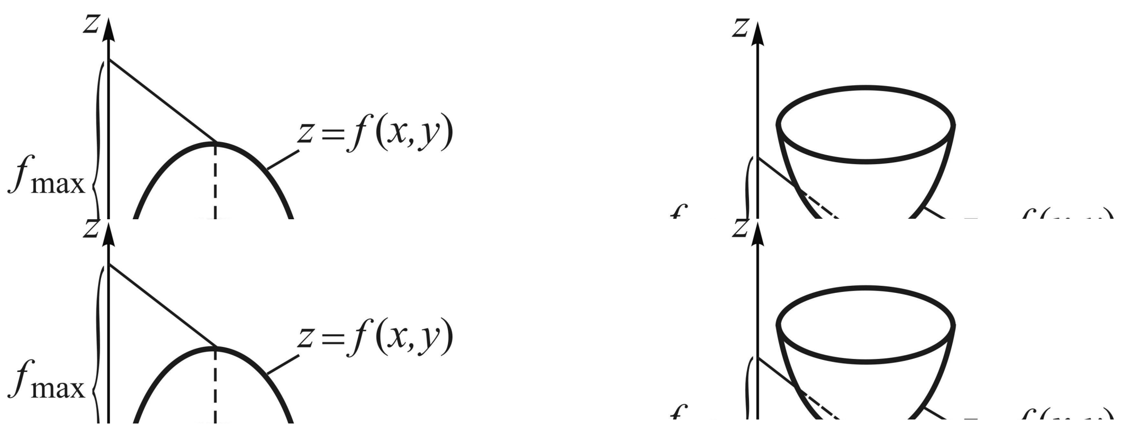
$$\begin{aligned} &f(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y) - f(x_0,y_0) < 0, \text{ або } \Delta f(x_0,y_0) < 0; \\ &f(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y) - f(x_0,y_0) > 0, \text{ або } \Delta f(x_0,y_0) > 0. \end{aligned} \qquad (14.1.2)$$

Таким чином, якщо (x_0, y_0) – точка локального максимуму (мінімуму), то в деякому околі цієї точки повний приріст функції від’ємний (додатний) і навпаки (*сформулюйте,* як це):

$$(x_0,y_0) \text{ – точка } \max\ (\min) \iff \Delta f(x_0,y_0) < 0\ \left(\Delta f(x_0,y_0) > 0\right). \qquad (14.1.3)$$

Співвідношення (14.1.3) можна покласти в основу означення точок локального екстремуму. Надалі для скорочення висловлень і записів термін „локальний” будемо проминати, якщо це не буде викликати непорозумінь.

Вартості функції у точках екстремуму називають **екстремумами функції**; відповідно – **максимумом** $(f_{\max})$ або **мінімумом функції** $(f_{\min})$ (рис. 14.1.1).



а) б)

Рис. 14.1.1. **Екстремуми Ф23: а) максимум; б) мінімум**

Означення точок локального екстремуму (і екстремумів ФКЗ) для функції довільного скінченного числа n $(n>2)$ аргументів $u=f(M)$, де $M=M(x_1,x_2,...,x_n)$, або $u=f(x_1,x_2,...,x_n)$, нічим принципово не відрізняється від (14.1.1), (14.1.3) і в символах подається так:

$$M_0 \text{ – точка } \max\ (\min) \rightleftharpoons \exists\varepsilon>0 \wedge \forall M\in B(\varepsilon,M_0): \quad f(M)<(>)\ f(M_0); \tag{14.1.4}$$

$$M_0 \text{ – точка } \max\ (\min) \Leftrightarrow \Delta f(M_0)<0\ \ (\Delta f(M_0)>0). \tag{14.1.5}$$

(*Наведіть* словесне формулювання співвідношень (14.1.4), (14.1.5).)

Теорема 14.1.1 *(необхідна умова екстремуму).* Якщо функція кількох змінних $u=f(x_1,x_2,...,x_n)$ у деякій точці $M_0(x_1^0,\ x_2^0,...,\ x_n^0)$ має екстремум, то у цій точці кожна її частинна похідна дорівнює нулю або не існує:

$$M_0 \text{ – точка extr} \Rightarrow \forall i\in\{1,2,..,n\}:\ f'_{x_i}(M_0)=0 \vee f'_{x_i}(M_0)\,\overline{\exists}. \tag{14.1.6}$$

Д о в е д е н н я базується на необхідній умові екстремуму Ф13 (див. (10.4.11) частини 1).

Зафіксуємо у функції $u=f(M)$ усі аргументи, крім одного, наприклад, x_1, поклавши їх рівними координатам точки M_0: $x_i=x_i^0$, $i=\overline{2,n}$. Тоді отримаємо Ф13 $\varphi(x_1)=f(x_1,x_2^0,...,x_n^0)$, яка має екстремум при $x_1=x_1^0$. Похідна φ'_{x_1} у точці $x_1=x_1^0$ є водночас ч/п функції $u=f(x_1,x_2,...,x_n)$ у точці M_0: $\varphi'_{x_1}\big|_{x_1=x_1^0}=f'_{x_1}(M_0)$. Отже, згідно з необхідною умовою екстремуму Ф13 $f'_{x_1}(M_0)$ дорівнює нулю або не існує.

За допомогою аналогічних міркувань (*наведіть* їх) отримуємо, що $\forall i\in\{2,3,...,n\}$: $f'_{x_i}(M_0)=0 \vee f'_{x_i}(M_0)\,\overline{\exists}$.

Внутрішні точки області визначення функції, в яких виконується необхідна умова екстремуму, називають **критичними**. Якщо у критичній точці функція диференційовна, то така точка називається **стаціонарною**. Звичайно, у стаціонарній точці $f'_{x_i}(M_0)=0$ $\forall i=\overline{1,n}$.

Прикладом нестаціонарної точки є $O(0,0)$ – точка максимуму $(f_{\max}=0)$ для функції $z=-\sqrt{x^2+y^2}$, яка описує нижню половину конічної поверхні (рис. 14.1.2).

Ця ж сама точка не є точкою екстремуму, якщо розглядати усю конічну поверхню $x^2+y^2-z^2=0$ (*чому?*).

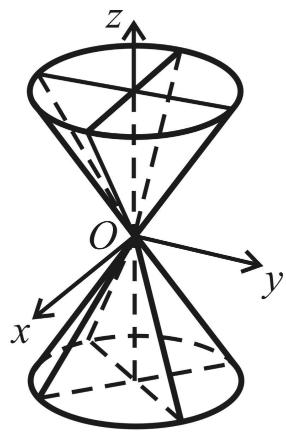


Рис. 14.1.2. **Конічна поверхня**

Згідно з теоремою 14.1.1 у технічному плані **відшукання критичних точок ФКЗ** зводиться до розв'язання системи рівнянь

$$f'_{x_i}(M)=0,\ \ i=\overline{1,n},$$

і установлення точок із $D(f)$, у яких частинні похідні не існують.

Приклад. Знайти критичні точки Ф2З $z=(1+\sqrt{x})y-0{,}5x-y^2$.

Область існування $D(f)=\{(x,y)|\ y\in\mathbf{R}\wedge x\ge 0\}$ (*чому?*).

Здійснюємо частинне диференціювання:

$$z'_x=y\cdot\frac{1}{2\sqrt{x}}-\frac{1}{2},\ \ z'_y=1+\sqrt{x}-2y.$$

Складаємо систему рівнянь, лівими частинами яких є ч/п, і *розв'язуємо* її:

$$\begin{cases} y/\sqrt{x}-1=0, \\ 1+\sqrt{x}-2y=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y=\sqrt{x}, \\ 1-\sqrt{x}=0 \end{cases} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x=1, \\ y=1 \end{array}\right. \Rightarrow$$

$\Rightarrow\ M_0(1,1)$ – критична точка, яка є стаціонарною.

Установлюємо точки, у яких частинні похідні не існують: похідна за y існує на усій $D(f)$, а ч/п за x не існує при $x=0$; проте точка $N_0(0,1/2)$ не є критичною, бо лежить не всередині, а на межі області існування (*то й що?*).

Таким чином, функція має одну стаціонарну точку. Але чи є вона точкою екстремуму?

Відповідь на це запитання дамо після розгляду достатньої умови екстремуму, установлення якої для ФКЗ зводиться до аналізу повного диференціала 2-го порядку у стаціонарній точці M_0:

$$d^2 f(M_0) > 0 \;\Rightarrow\; \Delta f(M_0) > 0 \;\Rightarrow\; M_0 - \text{точка extr}. \tag{14.1.7}$$

Зважаючи на складність відповідної теореми, приймемо її без доведення, обмежуючись випадком Ф2З.

Нехай функція $z = f(x, y)$ визначена, неперервна і має неперервні ч/п першого і другого порядків у деякому околі стаціонарної точки $M_0(x_0.y_0)$, тобто двічі диференційовна у точці $M_0(x_0.y_0)$.

Проробимо таке:

1) *знайдемо* другі ч/п у точці M_0:

$$f''_{xx}(M_0) = A,\; f''_{xy}(M_0) = f''_{yx}(M_0) = B,\; f''_{yy}(M_0) = C, \tag{14.1.8}$$

де через A, B, C позначено їхні числові вартості;

2) *складемо* визначник $\Delta(M_0)$ 2-го порядку, елементами головної діагоналі якого є числа A, C, а побічної – число B, і *обчислимо* його:

$$\Delta(M_0) = \begin{vmatrix} f''_{xx}(M_0) & f''_{xy}(M_0) \\ f''_{yx}(M_0) & f''_{yy}(M_0) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A & B \\ B & C \end{vmatrix} = AC - B^2. \tag{14.1.9}$$

Теорема 14.1.2 *(достатня умова екстремуму)*. Якщо функція $z = f(x,y)$ двічі диференційовна у стаціонарній точці $M_0(x_0.y_0)$ і визначник Δ у цій точці додатний, то $M_0(x_0.y_0)$ є точкою екстремуму:

$$\left[\begin{array}{l} M_0 - \text{стаціонарна точка}, \\ \exists\, f''_{xx}\big|_{M_0},\; f''_{xy}\big|_{M_0},\; f''_{yx}\big|_{M_0},\; f''_{yy}\big|_{M_0}, \\ \Delta(M_0) > 0 \end{array}\right. \;\Rightarrow\; M_0 - \text{точка extr}, \tag{14.1.10}$$

до того ж:

$$\begin{aligned} & f''_{xx}(M_0) = A > 0 \;\Rightarrow\; M_0 - \text{точка min}; \\ & f''_{xx}(M_0) = A < 0 \;\Rightarrow\; M_0 - \text{точка max}. \end{aligned} \tag{14.1.11}$$

Для інших випадків значень $\Delta = \Delta(M_0)$ установлено:

$$\begin{gathered}\Delta < 0 \;\Rightarrow\; M_0 \text{ не є точкою extr};\\ \Delta = 0 \;\Rightarrow\; \text{екстремум у } M_0 \text{ може бути, а може і не бути.}\end{gathered} \tag{14.1.12}$$

Цей, „сумнівний”, випадок потребує глибокого аналізу диференціалів більш високих порядків (або досліджується повний приріст функції (див. (14.1.3)), як і у випадку нестаціонарних критичних точок).

Приклад. Дослідити функцію $z = \left(1+\sqrt{x}\right)y - 0{,}5x - y^2$ на локальний екстремум (див. *приклад* вище).

Дослідження потребує двох кроків: 1) *відшукання* критичних точок; 2) *перевірка* виконання достатньої умови (14.1.10).

Стаціонарною критичною точкою є $M_0(1{,}1)$. *Знаходимо* у цій точці ч/п 2-го порядку:

$$z''_{xx} = (z'_x)'_x = \left(y\cdot\frac{1}{2\sqrt{x}} - \frac{1}{2}\right)'_x = -\frac{y}{4}x^{-3/2} \;\Rightarrow\; A = z''_{xx}\Big|_{M_0} = -\frac{1}{4};$$

$$z''_{xy} = z''_{yx} = \left(y\cdot\frac{1}{2\sqrt{x}} - \frac{1}{2}\right)'_y = \frac{1}{2\sqrt{x}} \;\Rightarrow\; B = z''_{xy}\Big|_{M_0} = \frac{1}{2};$$

$$z''_{yy} = \left(z'_y\right)'_y = \left(1+\sqrt{x}-2y\right)'_y = -2 \;\Rightarrow\; C = z''_{yy}\Big|_{M_0} = -2.$$

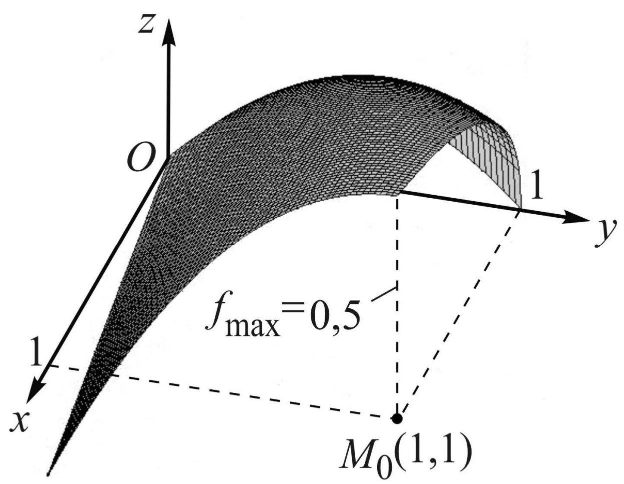


Рис. 14.1.3. **Точка максимуму ФДЗ і сам максимум**

Перевіряємо, чи виконується достатня умова екстремуму, для чого *складаємо* і *обчислюємо* визначник Δ:

$$\Delta = \begin{vmatrix} A & B \\ B & C \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -0{,}25 & 0{,}5 \\ 0{,}5 & -2 \end{vmatrix} = 0{,}25 > 0.$$

Згідно з (14.1.10) екстремум є і до того ж максимум (*чому?*).

Таким чином, задана функція у точці $(1{,}1)$ має локальний максимум (рис. 14.1.3): $f_{\max} = 0{,}5$.

14.2. Найменше та найбільше значення функції на замкненій області (тотальний екстремум)

Для ФКЗ, визначеної і неперервної в деякій обмеженій замкненій області $D \subseteq D(f)$ – області, якій належить її межа, – як і для функції однієї змінної (див. теореми 8.4.4, 8.4.5 частини 1), справедливі теореми про *обмеженість* і про *найменше і найбільше значення неперервної функції*.

Точка $M_0 \in D$, у якій функція набуває найменшого (найбільшого) значення, називається **точкою тотального мінімуму** (**максимуму**), а відповідне значення функції – **тотальним**, або **повсюдним**, **мінімумом** (**максимумом**) (тотальний від лат. totalis – увесь, цілий, повний).

Якщо точка M_0 лежить всередині області, то можливі локальні екстремуми визначаються критичними точками, проте тотального екстремуму функція може досягати і на межі області. Тому **порядок відшукання тотальних екстремумів** такий:

1) *знаходять* критичні точки і *обчислюють* значення функції у тих із них, які лежать всередині розглядуваної області; перевіряти виконання достатньої умови екстремуму немає потреби (*чому?*);

2) *знаходять* найменше і найбільше значення функції на лініях, які складають межу області;

3) *зіставляють* значення функції, знайдені на кроках 1), 2), і вибирають серед них найменше $\min\limits_{D} f(M)$ і найбільше $\max\limits_{D} f(M)$; таких значень функція може набувати у декількох точках.

За допомогою теорії максимумів та мінімумів ФКЗ розв'язуються численні задачі з геометрії, механіки, економіки та інших наук.

Приклад. Знайти найбільше та найменше значення функції $z = x^2 + y^2 - xy - x - y$ в області $D = \left\{(x, y) \middle| \; x \ge 0,\ y \ge 0,\ x^2 + y^2 \le 4\right\}$.

Аналізуємо нерівності, які визначають область D:

$x \ge 0$ описує праву півплощину;

$y \ge 0$ відповідає множині точок верхньої півплощини;

$x^2 + y^2 \le 4$ – аналітичний образ круга радіуса 2 з центром $O(0,0)$.

Описуємо лінії, які складають її межу: $x = 0,\ \ y = 0,\ \ x^2 + y^2 = 4$, і *зображуємо* D на xOy (рис. 14.2.1).

Знаходимо критичні точки і обчислюємо значення функції у тих із них, що лежать всередині D:

$$\begin{cases} z'_x = 0, \\ z'_y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x - y - 1 = 0, \\ 2y - x - 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = 1, \\ y = 1 \end{cases} \Rightarrow (1,1) \in D \Rightarrow f(1,1) = \underline{-1}.$$

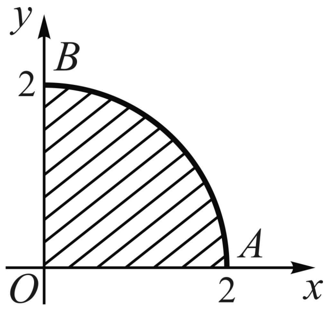


Рис. 14.2.1. **Область завдання функції**

Досліджуємо поведінку функції на межі області, яка складається з трьох ділянок: відрізки OA, OB осей координат і дуга кола $\cup AB$.

$$OA: (y = 0,\ 0 \le x \le 2) \Rightarrow z = x^2 - x \Rightarrow z'_x = 2x - 1 = 0 \Rightarrow x = 1/2;$$

обчислюємо значення функції у точці $(1/2, 0)$ і на кінцях відрізка:

$$f(1/2, 0) = \underline{-1/4}; \quad f(0,0) = \underline{0}; \quad f(2,0) = \underline{\underline{2}}.$$

Аналогічним чином (*прослідкуйте*) маємо:

$$OB: (x = 0,\ 0 \le y \le 2) \Rightarrow z = y^2 - y \Rightarrow z'_y = 2y - 1 = 0 \Rightarrow y = 1/2;$$

$f(0, 1/2) = \underline{-1/4}$; $f(0,2) = \underline{\underline{2}}$; $f(0,0)$ уже обчислювалось.

$$\cup AB: (x^2 + y^2 = 4) \Rightarrow z = 4 - x - \sqrt{4 - x^2}\,(x+1) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow z'_x = -1 + \frac{x(x+1)}{\sqrt{4 - x^2}} - \sqrt{4 - x^2} = 0 \Rightarrow \left| x \ne \pm 2 \right| \Rightarrow$$

$\Rightarrow$ | приходимо до розв’язання ірраціонального рівняння | $\Rightarrow$

$$\Rightarrow \sqrt{4 - x^2} = 2x^2 + x - 4 \Rightarrow 2x^4 + 2x^3 - 7x^2 - 4x + 6 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (2x^2 + 2x - 3)(x^2 - 2) = 0 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x^2 - 2 = 0, \\ 2x^2 + 2x - 3 = 0 \end{array} \right. \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left[\begin{aligned} &x_{1,2}=\pm\sqrt{2}, \\ &x_{3,4}=\frac{-1\pm\sqrt{7}}{2} \end{aligned}\right. \Rightarrow \left[\begin{aligned} &y_1=\sqrt{2}, \\ &y_3=\frac{\sqrt{8+2\sqrt{7}}}{2} \end{aligned}\right. \Rightarrow \left[\begin{aligned} &f(x_1,\, y_1)\approx \underline{-0{,}83}, \\ &f(x_3, y_3)\approx \underline{1{,}80}\,. \end{aligned}\right.$$

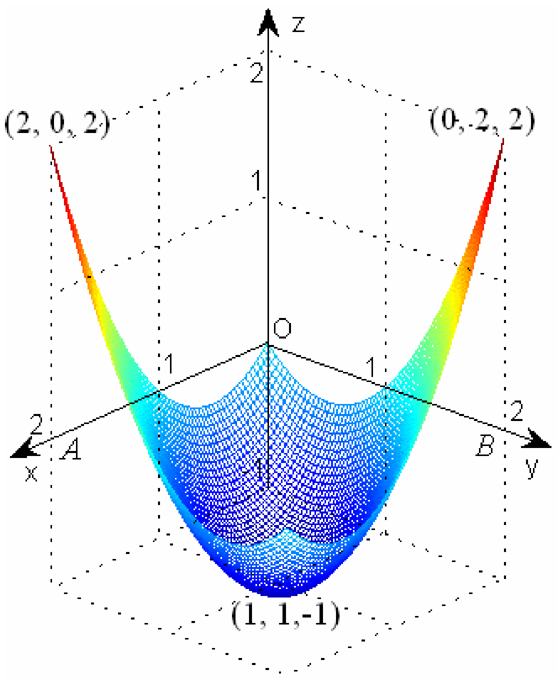


Рис. 14.2.2. **Тотальні екстремуми**

Вибираємо серед підкреслених чисел найменше і найбільше, *будуємо* відповідні точки в системі $xOyz$ (рис. 14.2.2): $\min\limits_D f(M)=-1$ у стаціонарній точці $(1,1)$; $\max\limits_D f(M)=2$ у точках $A(2,0)$ і $B(0,2)$ межі області.

Як бачимо, до точок тотальних екстремумів не увійшли внутрішні точки ділянок межі області D, зокрема точки дуги кола $\cup AB$ (на рис. 14.2.2 вона не зображена). (*Подумайте*, яку поверхню описує досліджена функція.)

14.3. Умовні екстремуми ФКЗ. Методи відшукання

Нехай функція $z=f(M)$, де $M=M(x_1,x_2,...,x_n)$, визначена в області $D\subseteq D(f)$ і задані додаткові умови – **рівняння зв'язку**, – яким повинні підкорятися аргументи: $\varphi_i(x_1,x_2,...,x_n)=0$, $i=\overline{1,m}$, причому $m<n$ (*чому?*).

Точка $M_0\in D$ називається **точкою відносного** (або **умовного**) **локального максимуму** (**мінімуму**) функції, якщо для всіх точок деякого ε-околу цієї точки з урахуванням рівнянь зв'язку вартості функції менші (більші) значення функції у самій точці:

$$(x_0,y_0) \text{ – точка умовного } \max\ (\min) \rightleftharpoons$$

$$\rightleftharpoons \left.\begin{aligned} \exists\varepsilon>0:\forall(x,y)\in B(\varepsilon,M_0),\\ \varphi_i(x_1,x_2,...,x_n)\big|_{M_0}=0 \end{aligned}\right]: f(x,y)<(>)\,f(x_0,y_0). \qquad (14.3.1)$$

Вартості функції у точках умовного екстремуму називають **умовними екстремумами функції**; відповідно – **максимумом** ($f^c_{\max}$) або **мінімумом функції** ($f^c_{\min}$); індекс c від лат. conditions – умова.

Приклад. Визначити найменше значення Ф2З $z = f(x, y) = x^2 + y^2$, якщо: а) $(x, y) \in \mathbf{R}^2$; б) $x - y = 2$.

У випадку а) ніякі обмеження на значення аргументів не накладаються: $\mathbf{R}^2$ є областю визначення функції. Найменше значення Ф2З легко установити без аналітичного дослідження на екстремум: сума квадратів двох чисел не може бути від'ємною, тому локальний мінімум буде у точці $O(0,0)$: $z_{\min} = 0$; *переконайтеся* у цьому аналітичним шляхом.

У випадку б), коли треба враховувати рівняння зв'язку, яке в стандартній неявній формі має вигляд: $\varphi = \varphi(x, y) = x - y - 2 = 0$, поступають так:

1) *розв'язують* його, *наприклад*, відносно змінної y: $y = x - 2$. Тоді $z|_{y=x-2} = f(x, x-2) = x^2 + (x-2)^2 = 2(x^2 - 2x + 2)$ стає Ф1З;

2) *досліджують* на екстремум отриману функцію: критична точка $x = 1$ є точкою локального мінімуму Ф1З (*переконайтеся*) і водночас визначає точку умовного локального мінімуму Ф2З: $M_0(1,-1)$, і сам умовний мінімум: $f^c_{\min} = 2$.

Наведені вище кроки 1) і 2) описують **порядок відшукання** $f^c_{\min}$ чи $f^c_{\max}$, якщо рівняння зв'язку розв'язуване відносно змінної x або y.

Зауваження:

якщо в (14.3.1) нерівності виконуються зі знаками „$\le$" чи „$\ge$", то умовні екстремуми функції називають **нестрогими**;

на противагу умовним локальним екстремумам розглянуті вище локальні екстремуми (див. (14.1.1)) називають **безумовними**.

Висновок (*узагальнення розглянутого на прикладі*). Якщо рівняння зв'язку розв'язувані відносно кожної змінної (кількох змінних), то їх можна розглядати як явне завдання функцій меншого числа аргументів або навіть одного, і тоді вихідна ФКЗ подається складеною функцією меншого числа аргументів. *Наприклад*, нехай для функції 3-х змінних

$u = f(x_1, x_2, x_3)$ маємо одне рівняння зв'язку $\varphi(x_1, x_2, x_3) = 0$, тоді якщо з нього $x_3 = \psi(x_1, x_2)$, то $u = f(x_1, x_2, \psi(x_1, x_2))$ – Ф2З.

У разі двох додаткових умов: $\varphi_1(x_1, x_2, x_3) = 0$, $\varphi_2(x_1, x_2, x_3) = 0$ отримуємо: $(x_3 = \psi_1(x_1, x_2),\ x_3 = \psi_2(x_1, x_2)) \Rightarrow (x_2 = \mu(x_1),\ x_3 = \nu(x_1))$, і тоді маємо: $u = f(x_1, \mu(x_1), \nu(x_1))$ – Ф1З. (А якщо *взяти* три додаткові умови?)

Таким чином, виходить, *що задача умовного екстремуму зводиться до розв'язання задачі на безумовний екстремум складеної функції.* Відповідний спосіб відшукання екстремуму f^c_{extr} ФКЗ природно назвати **методом зведення до складеної**, або **зложеної**, **функції**.

На жаль, такий підхід до визначення умовних екстремумів неспроможний, якщо рівняння зв'язку $\varphi_i(x_1, x_2, ..., x_n) = 0$, $i = \overline{1, m}$, не припускають розв'язання їх відносно змінних x_j, $j = \overline{1, n}$. Тому необхідна і достатня умови відносного локального екстремуму установлені саме для такого випадку, хоча вони придатні і для явного завдання рівнянь зв'язку (*на якій підставі*?). Наведемо відповідні твердження без доведення.

Теорема 14.3.1 *(необхідна умова відносного екстремуму).* Якщо точка M_0 є точкою локального умовного екстремуму при обмеженнях $\varphi_i(M) = 0$, $i = \overline{1, m}$, і числова матриця розміру $m \times n$, складена із ч/п функцій $\varphi_i(M)$ у точці M_0, має ранг $r = m$, то існують дійсні числа λ_1, λ_2, …, λ_m такі, що точка M_0 є критичною точкою функції n змінних

$$F = f + \lambda_1\varphi_1 + \lambda_2\varphi_2 + ... + \lambda_m\varphi_m, \tag{14.3.2}$$

де $F = F(M)$, $f = f(M)$, $\varphi_i = \varphi_i(M)$:

$$\left.\begin{array}{l} M_0 - \text{точка } f^c_{\text{extr}} \\ r\left(\dfrac{\partial\varphi_i(M_0)}{\partial x_j}\right)_{m\times n} = m \end{array}\right] \Rightarrow \exists\lambda_i \in \mathbf{R}:\ M_0 - \text{кр. точка } F = f + \sum_{i=1}^{m}\varphi_i. \tag{14.3.3}$$

Функція F і числа λ_1, λ_2, …, λ_m називаються відповідно **функцією Лагранжа** і **множниками Лагранжа**.

Для ФЗЗ $z = f(x, y)$ з рівнянням зв'язку $\varphi(x, y) = 0$ матриця, складена із ч/п функцій $\varphi(M)$ у точці M_0, має розмір 1×2: $\begin{pmatrix}\varphi'_x & \varphi'_y\end{pmatrix}$, а для $u = f(x, y, z)$ з рівняннями зв'язку $\varphi_1(x, y, z) = 0$ і $\varphi_2(x, y, z) = 0$ така:

$$\left(\frac{\partial\varphi_i}{\partial x_j}\right)_{2\times 3} = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial\varphi_1}{\partial x} & \dfrac{\partial\varphi_1}{\partial y} & \dfrac{\partial\varphi_1}{\partial z} \\ \dfrac{\partial\varphi_2}{\partial x} & \dfrac{\partial\varphi_2}{\partial y} & \dfrac{\partial\varphi_2}{\partial z} \end{pmatrix}, \text{ де } (x_1, x_2, x_3) = (x, y, z). \qquad (14.3.4)$$

Наслідок (*про достатні умови відносного екстремуму).* Якщо установлено, що M_0 – критична точка функції $F = f + \sum_{i=1}^{m}\varphi_i$, то для неї проводять дослідження згідно з (14.1.7), тобто на безумовний екстремум:

$$d^2F(M_0) > 0 \Rightarrow \Delta F(M_0) > 0 \Rightarrow M_0 \text{ – точка extr } f(M). \qquad (14.3.5)$$

Для функції $z = f(x, y)$ за аналогією з (14.1.9) **достатня умова відносного екстремуму** з рівнянням зв'язку $\varphi(x, y) = 0$ остаточно виглядає так:

$$\Delta(M_0) = \begin{vmatrix} 0 & \varphi'_x & \varphi'_y \\ \varphi'_x & F''_{xx} & F''_{xy} \\ \varphi'_y & F''_{xy} & F''_{yy} \end{vmatrix} < 0 \ (> 0) \Rightarrow M_0 \text{ – точка } \min \ (\max). \qquad (14.3.6)$$

На практиці часто оцінку того, чи є стаціонарна точка точкою мінімуму або максимуму, здійснюють виходячи із смислу задачі.

На підставі викладеного дотримуються такого порядку дослідження функцій на умовний екстремум (**методом Лагранжа**):

1. *Складають* функцію Лагранжа: $F = f + \lambda_1\varphi_1 + \lambda_2\varphi_2 + ... + \lambda_m\varphi_m$.

2. *Відшукують* її ч/п F'_{x_j}, $j = \overline{1, n}$, і F'_{λ_i}, $i = \overline{1, m}$.

3. *Знаходять* критичні точки функції F, для чого складають відповідну систему рівнянь ($F'_{x_j} = 0$, $j = \overline{1, n}$; $F'_{\lambda_i} = 0$, $i = \overline{1, m}$), і розв'язують її; при цьому якщо $(x_1^0, x_2^0, ..., x_n^0, \lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_m)$ – критична точка для $F(M)$, то точка $(x_1^0, x_2^0, ..., x_n^0)$ є критичною для $f(M)$.

4. *Установлюють*, чи є критична точка точкою екстремуму, для чого досліджують знак другого диференціала $d^2 f(M)$ (*перевіряють* виконання достатніх умов) або повного приросту $\Delta f(M)$ в околі критичних точок, або виходять із смислу задачі.

Зауваження: у спеціальних розділах вищої математики, наприклад „Чисельні методи", вивчаються наближені методи дослідження ФКЗ на наявність тих чи інших екстремумів; широкий клас серед них складають так звані *градієнтні методи*.

Приклади. 1. Знайти методом Лагранжа умовний екстремум функції $z = 2 - x^2 - y^2$, якщо $x + y = 1$ (рис. 14.3.1).

Функція Лагранжа має вигляд:

$$F(x, y, \lambda) = f(x, y) + \lambda\varphi(x, y) \;\Rightarrow\; F = 2 - x^2 - y^2 + \lambda(x + y - 1).$$

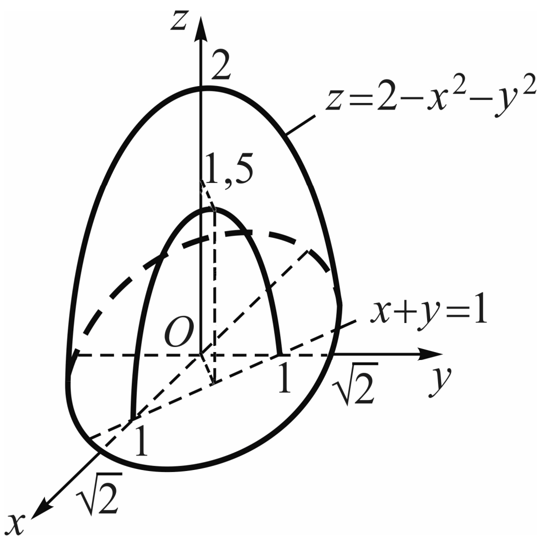


Рис. 14.3.1. **Умовний екстремум**

Знаходимо її критичні точки:

$$\begin{cases} F'_x = 0 \\ F'_y = 0 \\ F'_\lambda = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -2x + \lambda = 0 \\ -2y + \lambda = 0 \\ x + y - 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = \lambda/2 \\ y = \lambda/2 \\ x + y - 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \lambda = 1 \\ x = 1/2 \\ y = 1/2 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \; M_0 = M_0(1/2, 1/2).$$

Залучаємо (14.3.6), підраховуючи ч/п у критичній точці:

$$\Delta(M_0) = \begin{vmatrix} 0 & \varphi'_x & \varphi'_y \\ \varphi'_x & F''_{xx} & F''_{xy} \\ \varphi'_y & F''_{xy} & F''_{yy} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & -2 \end{vmatrix} = 4 > 0 \;\Rightarrow\; f^c_{\max} = \frac{3}{2}.$$

(*Зіставте* $f^c_{\max}$ з $f_{\max}$ (див. рис. 14.3.1); *розв'яжіть* цей самий приклад зведенням до дослідження на безумовний екстремум функції однієї змінної.)

2. Дослідити на умовний екстремум функцію $z=(x-1)^2 y$ з рівнянням зв'язку $\varphi(x,y)=x-y-1=0$.

За методом Лагранжа маємо (коментар *наведіть* самостійно):

$$F=(x-1)^2 y+\lambda(x-y-1) \Rightarrow \begin{cases} F'_x=2(x-1)y+\lambda=0 \\ F'_y=(x-1)^2-\lambda=0 \\ F'_\lambda=x-y-1=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x-1=y \\ 2y^2+\lambda=0 \\ y^2-\lambda=0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (y=0,\ \lambda=0,\ x=1) \Rightarrow M_0(1,0) \text{ – критична точка } \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \Delta(M_0)=\begin{vmatrix} 0 & \varphi'_x & \varphi'_y \\ \varphi'_x & F''_{xx} & F''_{xy} \\ \varphi'_y & F''_{xy} & F''_{yy} \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{vmatrix}=0 \Rightarrow \text{сумнівний випадок:}$$

умовний екстремум може бути, а може не бути.

Проведемо дослідження приросту функції Δz у точці $M_0(1,0)$:

$$\Delta z=f(x+\Delta x,y+\Delta y)-f(x,y)=(x+\Delta x-1)^2(y+\Delta y)-(x-1)^2 y \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \Delta z\big|_{(1,0)}=\Delta x^2\cdot\Delta y \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \Delta y<0 \Rightarrow \Delta z<0 \\ \Delta y>0 \Rightarrow \Delta z>0 \end{array}\right. \Rightarrow \text{екстремуму немає.}$$

Такий самий результат отримаємо методом зведення до складеної функції: розв'язати рівняння зв'язку відносно одного з аргументів, наприклад x, і перейти до дослідження на безумовний екстремум Ф13:

$$x-y-1=0 \Rightarrow x=y+1 \Rightarrow z=y^3 \text{ – Ф13 } \Rightarrow$$

$$\Rightarrow z'_y=3y^2=0 \Rightarrow y=0 \text{ – критична точка.}$$

При переході через „нуль" похідна не змінює знак, отже, $z=y^3$ не має безумовного екстремуму, а Ф23 – умовного екстремуму в $M_0(1,0)$.

14.4. Поняття про емпіричні формули, метод найменших квадратів

Нехай при дослідженні якогось явища або процесу (зокрема, економічного) спостерігалися дві змінні величини x і y, у результаті чого

отримано n пар (x, y), які за звичаєм подаються у вигляді таблиці (табл. 14.4.1).

Таблиця 14.4.1

Результати експерименту

x	x_1	x_2	$\dots$	x_n
y	y_1	y_2	$\dots$	y_n

Ставиться ***задача:*** за даними експерименту знайти наближену функціональну залежність y від x: $y = \tilde{f}(x)$.

Функціональні залежності, які будуються за даними експерименту, називаються **емпіричними формулами** (е/ф).

Р о з в' я з а н н я задачі – **побудова е/ф** – реалізується в два етапи.

І. *Вибір* множини (класу) можливих функцій, якому належить за припущенням (здогадкою) шукана залежність. Це здійснюється на основі теоретичних міркувань або природи експерименту, або візуального аналізу розташування точок на площині.

Як правило, той чи інший клас функцій характеризується кількома числовими параметрами: a_0, a_1, ..., a_m, які вносять у символічне позначення е/ф: $y = \tilde{f}(x, a_0, a_1, ..., a_m)$. Наприклад, лінійна залежність $y = kx + b$ містить два параметри: k – кутовий коефіцієнт, b – величина відрізка, який пряма відтинає на осі ординат; квадратична залежність описується формулою, у якої три числових параметра: $y = ax^2 + bx + c$, де, як і вище, x – поточна змінна, а $\{a, b, c\}$ – множина параметрів.

ІІ. *Визначення* числових параметрів е/ф: $y = \tilde{f}(x, a_0, a_1, ..., a_m)$, які б у певному сенсі найкращим чином описували явище (процес), що вивчається дослідником.

Одним із широко відомих методів відшукання параметрів е/ф є **метод найменших квадратів** (МНК), суть якого полягає у такому:

різницю між експериментальними значеннями y_i, $i = \overline{1, n}$, і знайденими за е/ф $\tilde{f}(x, a_0, a_1, ..., a_m)$ називають **відхилом** (наближених теоретичних значень величини y від вихідних даних) і позначають через ε_i:

$$y_i - \tilde{f}(x_i, a_0, a_1, ..., a_m) = \varepsilon_i, \quad i = \overline{1, n};$$

невідомі параметри е/ф вибирають так, щоб сума квадратів відхилів була мінімальною:

$$S=\sum_{i=1}^{n}\varepsilon_i^2=\sum_{i=1}^{n}\left(y_i-\tilde{f}\left(x_i,a_0,a_1,...,a_m\right)\right)^2\to\min. \qquad (14.4.1)$$

Сума S є функцією параметрів a_j, $j=\overline{0,m}$: $S=S(a_0,a_1,...,a_m)$, яку і треба мінімізувати.

Порядок відшукання параметрів е/ф такий:

1) *складають* суму квадратів відхилів (14.4.1);

2) *знаходять* a_j, $j=\overline{0,m}$, які забезпечують мінімальне значення S. Для цього за необхідною умовою локального екстремуму складають систему рівнянь $\frac{\partial S}{\partial a_j}=0$, $j=\overline{0,m}$, і розв'язують її. Доведено, що відповідна стаціонарна точка є точкою мінімуму ФКЗ $S=S(a_0,a_1,...,a_m)$.

Приклад. Нехай $\tilde{f}(x,a_0,a_1)=a_0+a_1x$. Знайти параметри е/ф.

Функція $S=S(a_0,a_1)$ має вигляд: $S=\sum_{i=1}^{n}(a_0+a_1x_i-y_i)^2$, а система рівнянь, яка визначає критичну точку, така:

$$\begin{cases} S'_{a_0}=\sum\limits_{i=1}^{n}2(a_0+a_1x_i-y_i)\cdot 1=0, \\ S'_{a_1}=\sum\limits_{i=1}^{n}2(a_0+a_1x_i-y_i)\cdot x_i=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_0\sum\limits_{i=1}^{n}1+a_1\sum\limits_{i=1}^{n}x_i=\sum\limits_{i=1}^{n}y_i, \\ a_0\sum\limits_{i=1}^{n}x_i+a_1\sum\limits_{i=1}^{n}x_i^2=\sum\limits_{i=1}^{n}x_iy_i. \end{cases}$$

Якщо ввести в розгляд арифметичні середні значень x, y, xy, x^2:

$$\frac{1}{n}\sum x_i=\overline{x},\ \frac{1}{n}\sum x_i^2=\overline{x^2},\ \frac{1}{n}\sum y_i=\overline{y},\ \frac{1}{n}\sum x_iy_i=\overline{xy},\ \text{де}\ \sum=\sum_{i=1}^{n},$$

то приходимо до системи:

$$\begin{cases} a_0\ \ +a_1\overline{x}\ \ =\overline{y}, \\ a_0\overline{x}+a_1\overline{x^2}=\overline{xy}, \end{cases}$$

або в матричній формі: $\begin{pmatrix} 1 & \overline{x} \\ \overline{x} & \overline{x^2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \overline{y} \\ \overline{xy} \end{pmatrix}$.

Ця система називається **системою нормальних рівнянь** для відшукання параметрів е/ф. Згідно з (14.4.1) розв'язок системи дає найкращі значення шуканих параметрів і подається він такими формулами:

$$a_0 = \frac{\overline{x^2} \cdot \overline{y} - \overline{x} \cdot \overline{xy}}{\overline{x^2} - \overline{x}^2}, \quad a_1 = \frac{\overline{xy} - \overline{x} \cdot \overline{y}}{\overline{x^2} - \overline{x}^2}. \tag{14.4.2}$$

У випадку, коли залежність між змінними y та x треба апроксимувати функцією, яка не є лінійною, застосування методу найменших квадратів потребує попередньої **лінеаризації** моделі – введення нових змінних таким чином, щоб залежність між цими новими змінними була лінійною.

Наприклад, якщо залежність змінної y від змінної x описується гіперболічною функцією, тобто $f(x, a_0, a_1) = a_0 + a_1 x^{-1}$, то вводять змінну $X = x^{-1}$, і складають систему нормальних рівнянь для пари (X, y).

Якщо залежність показникова: $f(x, a_0, a_1) = a_0 \cdot a_1^x$, функцію лінеаризують логарифмуванням за будь-якою основою, наприклад, за десятковою: $\lg y = \lg a_0 + \lg a_1 \cdot x$, покладають $Y = \lg y$ і будують е/ф за значеннями елементів пари (x, Y). Після обчислення параметрів моделі повертаються до вихідних змінних.

Зауваження. Існує простий спосіб **уточнення емпіричної формули** у тому випадку, якщо вона дає суму квадратів похибок більш значну, ніж бажано. Розглядають нову функцію: $\overline{y} = \tilde{y} + c$, де c – деяка стала, і підбирають число c так, щоб сума квадратів нових похибок була мінімальною:

$$\overline{S} = \sum_{i=1}^{n} \overline{\varepsilon}_i^2 = \sum_{i=1}^{n} (y_i - \tilde{y}_i - c)^2 = \sum_{i=1}^{n} (\varepsilon_i - c)^2 \to \min.$$

Для мінімуму цієї функції необхідно, щоб

$$\frac{\partial \overline{S}}{\partial c} = 2\sum_{i=1}^{n} (\varepsilon_i - c) = 0, \text{ відкіля: } nc = \sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i \Rightarrow c = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i .$$

Оскільки $\frac{\partial^2 \overline{S}}{\partial c^2} = 2n > 0$, то знайдене значення c дає найменшу суму квадратів $\overline{S}$.

Отже, найкращою сталою c є середнє арифметичне похибок ε_i, $i = \overline{1, n}$. Звичайно, якщо $c = 0$ або близьке до нуля, то розглянутий спосіб потрібного ефекту не дає.

Задача 14.4.1. За даними підприємства залежність між кількістю продукції x (ум. од.), що випускається, і витратами виробництва на одиницю продукції y (грн) подається таблицею (табл. 14.4.1). (**Витрати на одиницю продукції** – це середні валові витрати, які дорівнюють загальним витратам, поділеним на обсяг виробництва товарів.)

Побудувати емпіричну формулу виробничої функції.

Таблиця 14.4.1

Значення змінних x і y

x	10,1	21,2	32,4	39,8	50,0	62,0	70,0
y	222,0	119,4	87,1	69,6	60,0	52,5	48,5

Р о з в' я з а н н я. Зважаючи на те, що виробнича функція $y = y(x)$ у багатьох випадках описується степеневою функцією, емпіричну формулу будемо відшукувати у вигляді:

$$y = \tilde{f}(x, a_0, a_1) = a_0 \cdot x^{a_1}, \qquad (14.4.3)$$

де a_0, a_1 – числові параметри, які підлягають визначенню.

Лінеаризуємо логарифмуванням модель задачі:

$$\ln y = \ln a_0 + a_1 \ln x \;\Rightarrow\; \left| \begin{array}{l} Y = \ln y,\ X = \ln x, \\ A_0 = \ln a_0,\ A_1 = a_1 \end{array} \right| \;\Rightarrow\; Y = A_0 + A_1 X .$$

Складаємо таблицю значень нових змінних X, Y (табл. 14.4.2).

Таблиця 14.4.2

Значення змінних X і Y

X	2.3125	3.0540	3.4782	3.6839	3.9120	4.1271	4.2485
Y	5.4027	4.7825	4.4671	4.2428	4.0943	3.9608	3.8816

Підраховуємо параметри системи нормальних рівнянь і *обчислюємо* за формулами (14.4.2) параметри емпіричної формули:

$$A_0 = \frac{\overline{X^2} \cdot \overline{Y} - \overline{X} \cdot \overline{XY}}{\overline{X^2} - \overline{X}^2} \approx 7{,}2157, \quad A_1 = \frac{\overline{XY} - \overline{X} \cdot \overline{Y}}{\overline{X^2} - \overline{X}^2} \approx -0{,}7930; \qquad (14.4.4)$$

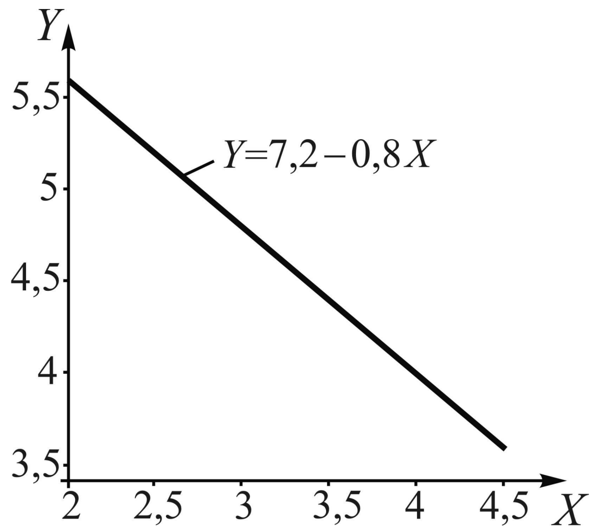
і отримуємо рівняння прямої $Y = A_0 + A_1 X$, яку назвемо **спрямляючою**; отже, $Y = 7{,}2 - 0{,}8X$ (рис 14.4.1-а).

Повертаємось до вихідних параметрів:

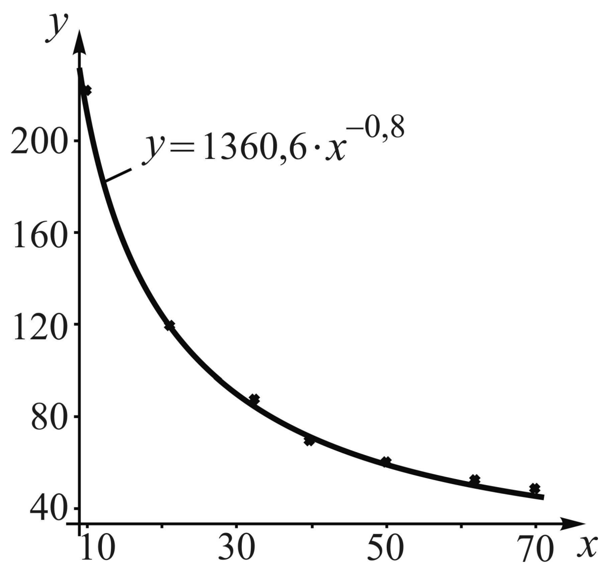
$$A_0 = \ln a_0 \;\Rightarrow\; a_0 = e^{7{,}2157} \approx 1360{,}6; \;\; a_1 \approx -0{,}8;$$

і вихідних змінних x, y, і *записуємо* (14.4.3): $\tilde{y} = 1360{,}6 \cdot x^{-0{,}8}$.

На рис. 14.4.1-б зображено теоретичну лінію і вихідні точки.



а)



б)

Рис. 14.4.1. **Графіки формул: а) спрямляючої; б) емпіричної**

Уточнення емпіричної формули проводити нема потреби, бо теоретична лінія досить переконливо узгоджується з точками результатів дослідження.

Зауваження. На практиці при виборі емпіричної формули керуються ***правилом***: якщо про вигляд залежності між величинами x і y із теоретичних (чи інших) міркувань нічого невідомо, то із декількох варіантів вибирають той, який *краще узгоджується* з експериментальними даними і має *найменше число параметрів*, а потім проводять уточнення.

Запитання для самодіагностики засвоєння матеріалу

Відповіді на всі запитання сформулюйте словесно, запишіть в символічній формі, обґрунтуйте (на підставі означень, теорем, правил, формул тощо), наведіть відповідні конкретні приклади.

1. Які точки із області визначення ФКЗ називаються точками локального екстремуму – мінімуму, максимуму?
2. Які нерівності задовольняють повні прирости ФКЗ у околі точок локального екстремуму?
3. У чому полягають необхідні умови локального екстремуму функції кількох змінних?
4. Які точки із області існування ФКЗ називають критичними, стаціонарними?
5. Сформулюйте теорему про достатні умови локального екстремуму функції двох змінних.
6. Наведіть загальний порядок дослідження ФКЗ на локальний екстремум.
7. Що розуміють під „тотальним” екстремумом ФКЗ у замкненій області?
8. У якому порядку здійснюють дослідження функції на тотальний екстремум?
9. Чи треба при відшуканні тотального екстремуму з’ясовувати, якою є критична точка – точкою мінімуму чи точкою максимуму („так”, „ні” і чому)?
10. Як називають додаткову умову, з урахуванням якої досліджують ФКЗ на умовний (відносний) екстремум?
11. У чому полягає відшукання відносного екстремуму методом зведення до складеної функції?
12. Яку функцію багатьох змінних називають функцією Лагранжа?
13. Сформулюйте необхідну умову відносного екстремуму.
14. Сформулюйте достатні умови відносного екстремуму.
15. Як виглядає достатня умова відносного екстремуму, зображена визначником третього порядку?
16. Наведіть загальний порядок дослідження ФКЗ на умовний екстремум.
17. Які формули називають емпіричними?

18. Із яких етапів складається побудова емпіричних формул?

19. У чому полягає суть методу найменших квадратів?

20. Що розуміють під лінеаризацією нелінійної функціональної залежності?

21. Опишіть спосіб уточнення емпіричної формули.

Задачі та вправи

1. Дослідити задані функції на локальний екстремум:

1) $z = x^2 + y^2 + xy - 2x - y$;

2) $z = -x^2 + xy - y^2 - 9y + 6x - 35$;

3) $z = x^2 - y^2 + 2xy - 4x - 8y + 1$;

4) $z = 4x^2 - 5xy + 3y^2 - x - 8y$;

5) $z = 6x^2 - 7xy + 2y^2 + 6x - 3y$;

6) $z = 2x^3 + 2y^3 - 36xy + 10$;

7) $z = 14x^3 + 27xy^2 - 69x - 54y$;

8) $z = \dfrac{x^3}{3} - xy^2 + \dfrac{x^2}{2} - 3xy - 2x + y^2 + 3y$;

9) $z = x^4 + y^4 - x^2 - 2xy - y^2$;

10) $z = xy(12 - x - y)$;

11) $z = x^3 + y^2 - 6xy - 39x + 18y + 20$;

12) $z = e^{x/2}\left(x + y^2\right)$;

13) $z = 1 - \sqrt{x^2 + y^2}$;

14) $z = 2 - \sqrt[3]{x^2 + y^2}$;

15) $z = x\sqrt{y} - x^2 - y + 6x + 3$.

2. Знайти найбільше ($M = \max\limits_{D} f(x, y)$) та найменше ($m = \min\limits_{D} f(x, y)$) значення функції $z = f(x, y)$ в замкненій області D:

1) $z = x^2 y(2 - x - y)$, $D = \left\{(x, y) \mid x \ge 0,\ y \ge 0,\ x + y \le 6\right\}$;

2) $z = xy + x + y$, $D = \left\{(x, y) \mid 1 \le x \le 2,\ 2 \le y \le 3\right\}$;

3) $z = x + y$, $D = \left\{(x, y) \middle| \ x^2 + y^2 \le 1\right\}$. (*Вказівка*: при відшуканні критичних точок на межі області D скористатись рівнянням кола у параметричній формі.);

4) $z = x^2 + y^2 - 6x + 4y + 2$, $D = \left\{(x, y) \middle| \ 1 \le x \le 4, \ -3 \le y \le 2\right\}$;

5) $z = x^2 + 3y^2 + x - y$, $D = \left\{(x, y) \middle| \ x \le 1, \ y \le 1, \ x + y \ge 1\right\}$;

6) $z = 1 - x^2 - y^2$, $D = \left\{(x, y) \middle| \ (x-1)^2 + (y-1)^2 \le 1\right\}$ (скористатися вказівкою до задачі 3));

7) $z = -10xy^2 + x^2 + 10x + 1$, $D = \left\{(x, y) \middle| \ \dfrac{|x|}{7} + \dfrac{|y|}{2} \le 1\right\}$;

8) $z = x^2 - y^2$, $D = \left\{(x, y) \middle| \ x^2 + y^2 \le 4\right\}$;

9) $z = x^2 - xy + 2y^2 + 3x + 2y + 1$, $D = \left\{(x, y) \middle| \ x \le 0, \ y \le 0, \ x + y \ge -5\right\}$;

10) $z = \sin x + \sin y + \sin(x + y)$, $D = \left\{(x, y) \middle| \ 0 \le x \le \pi/2, \ 0 \le y \le \pi/2\right\}$.

3. Дослідити на умовний екстремум функцію $z = f(x, y)$ з рівнянням зв'язку $\varphi(x, y) = 0$:

1) $z = x^2 + y^2$, $\varphi(x, y) = \dfrac{x}{2} + \dfrac{y}{3} - 1 = 0$;

2) $z = xy$, $\varphi(x, y) = \dfrac{x^2}{8} + \dfrac{y^2}{2} - 1 = 0$ $(x > 0, y > 0)$;

3) $z = x^2 + y^2 - xy + x + y - 4$, $\varphi(x, y) = x + y + 3 = 0$;

4) $z = \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y}$, $\varphi(x, y) = x + y - 2 = 0$;

5) $z = xy$, $\varphi(x, y) = y + x^2 - 3 = 0$;

6) $z = e^{xy}$, $\varphi(x, y) = x + y - 1 = 0$;

7) $z = 6 - 4x - 3y$, $\varphi(x, y) = x^2 + y^2 - 1 = 0$.

4. Відрізок довжиною a поділити на три частини так, щоб сума площ квадратів, побудованих на цих відрізках як на основах, була найменшою.

5. На площині $3x - 2z = 0$ знайти точку, сума квадратів відстаней якої від точок $A(1,1,1)$ та $B(2,3,4)$ є найменшою.

6. Довести, що добуток трьох невід'ємних чисел заданої суми є найбільшим тоді і лише тоді, коли ці числа рівні між собою.

7. Вікно має форму прямокутника і рівностороннього трикутника, побудованого на верхній основі прямокутника. При заданому периметрі p вікна визначити такі його розміри, при яких воно пропускає найбільше світла.

8. Визначити розміри прямокутного паралелепіпеда даного об'єму V, який має найменшу площу поверхні.

9. На параболі $x^2+2xy+y^2+4y=0$ знайти точку, найменш віддалену від прямої $3x-6y+4=0$.

10. Вказати зовнішні розміри відкритого ящика форми прямокутного паралелепіпеда зі заданою товщиною стінок h і об'ємом V, при яких на його виготовлення витратять найменше матеріалу.

Відповіді

1. 1) $z_{\min}(1,0)=-1$; 2) $z_{\max}(1,-4)=-14$; 3) критична точка $(3,-1)$ не є точкою екстремуму; 4) $z_{\min}(2,3)=-13$; 5) критична точка $(3,6)$ не є точкою екстремуму; 6) $z_{\min}(6,6)=-422$, критична точка $(0,0)$ не є точкою екстремуму; 7) $z_{\min}(1,1)=-82$, $z_{\max}(-1,-1)=82$; 8) критичні точки $(1,0)$ і $(1,-3)$ не є точками екстремуму, точка $(-1/2,-3/2)$ потребує додаткового дослідження; 9) $z_{\min}(-1,-1)=z_{\min}(1,1)=-2$, критична точка $(0,0)$ потребує додаткового дослідження; 10) $z_{\max}(4,4)=64$, критичні точки $(0,0)$, $(12,0)$, $(0,12)$ не є точками екстремуму; 11) $z_{\min}(5,6)=-86$, критична точка $(1,-6)$ не є точкою екстремуму; 12) $z_{\min}(-2,0)=-\dfrac{2}{e}$; 13) $z_{\max}(0,0)=1$; 14) $z_{\max}(0,0)=2$; 15) $z_{\max}(4,4)=15$.

2. 1) $m=f(4,2)=-128$, $M=f(1,1/2)=1/4$; 2) $m=f(1,2)=5$, $M=f(2,3)=11$; 3) $m=f\left(-\sqrt{2}/2,-\sqrt{2}/2\right)=-\sqrt{2}$, $M=f\left(\sqrt{2}/2,\sqrt{2}/2\right)=\sqrt{2}$; 4) $m=f(3,-2)=-11$, $M=f(1,2)=9$; 5) $m=f(1/2,1/2)=1$, $M=f(1,1)=4$; 6) $m=f\left(1+\dfrac{\sqrt{2}}{2},1+\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)=-2\left(1+\sqrt{2}\right)$, $M=f\left(1-\dfrac{\sqrt{2}}{2},1-\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)=-2\left(1-\sqrt{2}\right)$; 7) $m=f(-5,0)=-24$, $M=f(7,0)=120$; 8) $m=f(0,-2)=f(0,2)=-4$,

$M = f(-2,0) = f(2,0) = 4$; 9) $m = f(-2,-1) = -3$, $M = f(0,-5) = 41$; 10) $m = f(0,0) = 0$, $M = f(\pi/3, \pi/3) = 3\sqrt{3}/2$.

3. 1) $f^c_{\min} = f(18/13, 12/13) = 36/13$; 2) $f^c_{\max} = f(2,1) = 2$; 3) $f^c_{\min} = f(-3/2, -3/2) = -19/4$; 4) $f^c_{\min} = f(1,1) = 2$; 5) $f^c_{\min} = f(-1,2) = -2$, $f^c_{\max} = f(1,2) = 2$; 6) $f^c_{\max} = f(1/2, 1/2) = \sqrt[4]{e}$; 7) $f^c_{\min} = f(4/5, 3/5) = 1$, $f^c_{\max} = f(-4/5, -3/5) = 11$.

4. $a/3$, $a/3$, $a/3$.

5. $(21/13, 2, 63/26)$.

7. $\dfrac{p}{6-\sqrt{3}}$, $\dfrac{p(3-\sqrt{3})}{2(6-\sqrt{3})}$.

8. $\sqrt[3]{V}$, $\sqrt[3]{V}$, $\sqrt[3]{V}$.

9. $(-5/9, -1/9)$.

10. $(a,\ a,\ a/2)$, де $a = 2h + \sqrt[3]{2V}$.

Ключові терміни

Точка локального екстремуму (мінімуму, максимуму), необхідні умови, критичні точки, стаціонарні точки, достатні умови, замкнена область, тотальний екстремум, точка умовного екстремуму, умовний екстремум, рівняння зв’язку, метод зведення до складеної функції, функція Лагранжа, множники Лагранжа, метод Лагранжа.

Резюме

Розглядаються основні аналітичні методи дослідження функцій кількох змінних на екстремуми: локальні (місцеві), тотальні (повсюдні), локальні (відносні). Викладено: необхідні і достатні умови локальних і відносних екстремумів, порядок їх відшукання; порядок відшукання тотальних екстремумів; етапи побудови емпіричних формул; метод найменших квадратів; один із способів уточнення емпіричних формул.

Література: [4; 9; 11; 13; 15; 16; 19; 23].

15. Числові, функціональні, степеневі ряди, ряди Фур'є

В очах необізнаного математичні символи немов ворожі штандарти, що розвиваються над, здавалося б, неприступною цитаделлю.

Моріс Клайн

Мета: навчити майбутніх фахівців умінню використовувати апарат рядів у наближених обчисленнях часткових значень функцій і наближеному розв'язанні математичних задач – моделей, що описують економічні і природничі процеси.

Питання теми:

15.1. Числові ряди: означення, необхідна ознака збіжності, властивості збіжних рядів.

15.2. Достатні ознаки збіжності рядів з додатними членами.

15.3. Знакопереміжні і знакозмінні числові ряди.

15.4. Функціональні ряди: основні поняття, дослідження на збіжність.

15.5. Степеневі ряди, ряди Тейлора – Маклорена.

15.6. Ряди Фур'є.

Компетентності, що формуються після вивчення теми:

Загальнонаукова: набуття базових знань стосовно відшукання наближень до даної функції за допомогою рядів.

Загальнопрофесійна: здатність до застосування рядів у перетвореннях сигнальних (інформаційних) функцій.

Спеціалізовано-професійна: підготовленість до впровадження апарату числових і функціональних рядів у математичні моделі оптимізації управління інформаційними системами.

15.1. Числові ряди: означення, необхідна ознака збіжності, властивості збіжних рядів

Візьмемо для розгляду числову послідовність $\{u_n\}$ із загальним членом $u_n = f(n)$, $n = 1, 2, 3, \ldots$. Поняття „числовий ряд" є представленням числових послідовностей у своєрідній формі (для вивчення їхніх

властивостей). **Числовим рядом** називають формальну суму, складену із членів послідовності, а її доданки – **членами ряду**:

$$u_1+u_2+....+u_n+...=\sum_{n=1}^{\infty}u_n \tag{15.1.1}$$

(„формальна" сума тому, що нескінченне число додавань здійснити неможливо!).

Функція $u_n=f(n)$, яка дає можливість записати будь-який член ряду за його номером n, називається **загальним членом** ряду.

Подамо, *наприклад*, ряд із загальним членом $u_n=\dfrac{1}{n(n+1)}$:

$$\sum_{n=1}^{\infty}u_n=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)}=\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+....+\frac{1}{n(n+1)}+..., \tag{15.1.2}$$

його називають рядом **обернених добутків пар** послідовних натуральних чисел.

Суму n перших членів ряду називають ***n*-ю** („енною") **частковою сумою** ряду:

$$s_n=u_1+u_2+...+u_n=\sum_{i=1}^{n}u_i\,. \tag{15.1.3}$$

Щоб отримати наступну суму ряду s_{n+1}, треба до s_n додати наступний член u_{n+1}, тобто $s_{n+1}=s_n+u_{n+1}$. Зокрема:

$$s_1=u_1,\;\; s_2=u_1+u_2,\;\; s_3=u_1+u_2+u_3,\; \dots\,. \tag{15.1.4}$$

Часткові суми ряду, у свою чергу, складають числову послідовність $\{s_n\}$: s_1, s_2, …, s_n, …, яку називають **послідовністю часткових сум** ряду. Знайдемо, *наприклад*, загальний член часткової суми ряду обернених добутків пар:

$$s_n=\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{i\cdot(i+1)}=\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+...+\frac{1}{n\cdot(n+1)}.$$

Помічаємо, що $u_n=\dfrac{1}{n\cdot(n+1)}=\dfrac{1}{n}-\dfrac{1}{n+1}\;\;\forall n\in\mathbf{N}$, тоді

$$s_n=\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+\ldots+\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)=1-\frac{1}{n+1}=\frac{n}{n+1},$$

бо від'ємник у попередньому члені ряду, починаючи з першого, взаємно знищується зі зменшуваним у наступному члені ряду (*прослідкуйте*).

Залежно від поведінки $\{s_n\}$ при необмеженому зростанні n: $n\to\infty$, числові ряди поділяють на *збіжні* і *розбіжні*.

Позначимо ряд (15.1.1) із загальним членом $u_n=f(n)$ через U. Якщо послідовність часткових сум ряду U при $n\to\infty$ має скінченну границю s, то ряд називається **збіжним** (або кажуть **ряд збігається**):

$$U\succ \rightleftharpoons \lim_{n\to\infty} s_n=s \text{ – скінченне число,} \qquad (15.1.5)$$

при цьому число s називають **сумою** ряду і пишуть $s=\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$.

Наприклад, для ряду обернених добутків пар (див. (15.1.2)) маємо:

$$s_n=\frac{n}{n+1}\Rightarrow \lim_{n\to\infty} s_n=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{n+1}=\left(\frac{0}{0}\right)=s=1 \text{ – скінченне число.}$$

Отже, ряд збігається, його сума рівна одиниці: $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\cdot(n+1)}=1$.

Якщо границя послідовності часткових сум ряду U при $n\to\infty$ не є скінченною або зовсім не існує, то ряд називається **розбіжним** (або кажуть **ряд розбігається**):

$$U\prec \rightleftharpoons \lim_{n\to\infty} s_n=\infty\vee\bar{\exists}\lim_{n\to\infty} s_n. \qquad (15.1.6)$$

Установимо, *наприклад*, збігається чи розбігається **ряд арифметичної прогресії** – ряд, складений із членів арифметичної прогресії. Якщо $a_n=a_1+d(n-1)$ – її загальний член, де a_1 – перший член, d – різниця, то сума n членів обчислюється за формулою $s_n=\frac{2a_1+d\cdot(n-1)}{2}n$, і при ненульових значеннях a_1 і d маємо:

$$\lim_{n\to\infty} s_n=\lim_{n\to\infty}\frac{2a_1+d\cdot(n-1)}{2}\cdot n=\infty\cdot\infty=\infty \text{ – ряд розбігається.}$$

Дослідіть, *збіжним* чи *розбіжним* буде ряд арифметичної прогресії у випадках, коли обидва параметри a, d рівні нулеві або один із них.

Для **ряду геометричної прогресії** (Γ) – ряду, складеного із членів геометричної прогресії, маємо: $b_n = b_1 q^{n-1}$ – загальний член прогресії, де b_1 – її перший член, q – знаменник; сума n її членів обчислюється за формулою:

$$s_n = \frac{b_1\left(1-q^n\right)}{1-q} = b_1\left(1+q^2+q^3+...+q^{n-1}\right). \qquad (15.1.7)$$

Знайдемо границю s_n при різних значеннях знаменника q:

$\underline{q=1}$: $b_n = b_1 \Rightarrow s_n = nb_1 \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} s_n = \infty$ – ряд розбігається;

$\underline{q=-1}$: $b_1 - b_1 + b_1 - b_1 + ... \Rightarrow s_{2n} = 0 \wedge s_{2n-1} = b_1 \Rightarrow \overline{\exists} \lim\limits_{n\to\infty} s_n$ – ряд розбігається;

$\underline{|q|<1}$: $\lim\limits_{n\to\infty} q^n = 0 \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} s_n = \dfrac{b_1}{1-q}$ – ряд збігається;

$\underline{|q|>1}$: $\lim\limits_{n\to\infty} q^n = \infty \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} s_n = \infty$ – ряд розбігається.

Висновок: $|q|<1: \Gamma \succ$; $|q| \ge 1: \Gamma \prec$ (*сформулюйте* словесно).

Приклад. Розглянемо ряд Γ з параметрами $b_1 = q = 0{,}5$:

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\frac{1}{2^4}+...+\frac{1}{2^{n-1}}+\frac{1}{2^n}+... .$$

Знайдемо суму ряду: $s = \lim\limits_{n\to\infty} s_n = \dfrac{b_1}{1-q} = 1$, і дамо геометричну інтерпретацію наближення n-ї часткової суми до одиниці (1) на квадраті з площею $s=1$ (рис. 15.1.1): кожному члену суми s_n відповідає певна частка його площі.

Зі збільшенням номера члена ряду ця частка необмежено зменшується, наближаючись до нуля, а сума площ прямокутничків і квадратиків буде все ближче і ближче до одиниці.

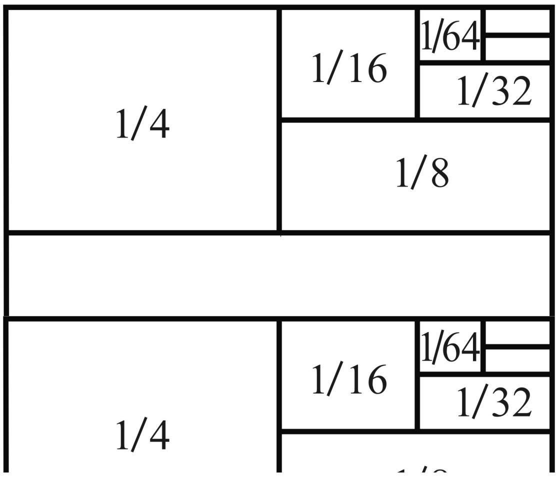


Рис. 15.1.1. **Наближення S_n до 1**

Основною задачею теорії рядів є **дослідження рядів на збіжність**: установити, збігається чи розбігається числовий ряд, і знайти суму збіжного ряду.

Розв'язати цю задачу безпосереднім обчисленням границі часткової суми s_n буває не тільки важко, а й неможливо, оскільки не удається знайти аналітичний вираз для s_n як функції від n.

У таких випадках дослідження рядів здійснюється опосередкованим шляхом: за допомогою ознак збіжності, і якщо ряд збігається, то можна обчислити його суму з необхідним ступенем точності (*опишіть*, яким чином це досягається).

Теорема 15.1.1 (*необхідна ознака збіжності*). Якщо ряд U збігається, то границя n-го члена дорівнює нулю при необмеженому зростанні номера:

$$U \succ \;\Rightarrow\; \lim_{n\to\infty} u_n = 0 \text{ (або пишуть: } u_n \to 0,\ n\to\infty). \qquad (15.1.8)$$

Д о в е д е н н я зводиться до аналізу u_n-го, поданого у вигляді різниці часткових сум: $u_n = s_n - s_{n-1}$, $n \geq 2$.

За означенням у разі збіжності ряду $s_n \to s$, $n \to \infty$. Але якщо $n \to \infty$, то і $(n-1) \to \infty$.

Таким чином:

$$\lim_{n\to\infty} u_n = \lim_{n\to\infty}(s_n - s_{n-1}) = \lim_{n\to\infty} s_n - \lim_{(n-1)\to\infty} s_{n-1} = s - s = 0.$$

Наслідки.

1. $U \succ \;\Rightarrow\; u_{n+1} + u_{n+2} + \ldots + u_{2n} = (s_{2n} - s_n) \to 0,\ n \to \infty.$ (15.1.9)

Дійсно, адже разом з $u_n \to 0$, $n \to \infty$ і $u_{n+1} \to 0$, …, $u_{2n} \to 0$.

(*Наведіть* словесне формулювання (15.1.9).)

2. Якщо необхідна ознака збіжності ряду не виконується, то ряд розбігається:

$$u_n \not\to 0,\ n \to \infty \ \Rightarrow\ U \lessdot. \qquad (15.1.10)$$

Дійсно, якщо припустити протилежне, то приходимо до протиріччя: з одного боку, за умовою, $u_n \not\to 0$, $n \to \infty$; з другого – за припущенням, повинно бути: $u_n \to 0$, $n \to \infty$.

Висновок. Невиконання необхідної ознаки збіжності ряду є **достатньою умовою його розбіжності**.

Зауваження. Теорема, обернена до теореми 15.1.1, не є вірною, тобто із того, що n-й член прямує до нуля, не випливає збіжність ряду:

$$\lim_{n\to\infty} u_n = 0 \ \not\Rightarrow\ U \gtrdot. \qquad (15.1.11)$$

Щоб підтвердити це, достатньо одного прикладу. Наведемо його.

Ряд, членами якого є числа, обернені до натуральних чисел $n = 1, 2, 3, \ldots$, називається **простим гармонійним** (**гармонічним**) рядом:

$$\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \ldots + \frac{1}{n} + \ldots \quad \left(u_n = \frac{1}{n} \right). \qquad (15.1.12)$$

Границею його n-го члена є нуль: $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = \frac{1}{\infty} = 0$, але ряд розбіжний. Дійсно, припустимо, що ряд збігається, тоді спираючись на (15.1.9), різниця $s_{2n} - s_n$ повинна прямувати до нуля, але

$$s_{2n} - s_n = \underbrace{\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \ldots + \frac{1}{2n}}_{n \text{ доданків}} \geq \frac{1}{2n} + \frac{1}{2n} + \ldots + \frac{1}{2n} = n \cdot \frac{1}{2n} = \frac{1}{2}.$$

Для будь-якого n різниця $s_{2n} - s_n \geq 1/2$, отже:

$$s_{2n} - s_n \not\to 0,\ n \to \infty \ \Rightarrow\ U \lessdot.$$

Висновок. Якщо необхідна умова збіжності ряду виконується, то певного висновку зробити не можна: ряд **може збігатися**, а **може** й **розбігатися**.

Властивості збіжних рядів. Нехай задано збіжні ряди U, V із загальними членами u_n, v_n і сумами s і σ відповідно:

$$u_1+u_2+u_3+\ldots+u_n+\ldots=\sum_{n=1}^{\infty}u_n=s \qquad (U);$$

$$v_1+v_2+v_3+\ldots+v_n+\ldots=\sum_{n=1}^{\infty}v_n=\sigma \qquad (V).$$

Якщо ряд U почленно помножити на число c, то отриманий ряд із загальним членом cu_n називають **добутком ряду на число**:

$$cu_1+cu_2+cu_3+\ldots+cu_n+\ldots=\sum_{n=1}^{\infty}cu_n \qquad (cU).$$

Під **сумою** (**різницею**) двох рядів розуміють ряд, який отримується почленним додаванням (відніманням) цих рядів:

$$(u_1\pm v_1)+(u_2\pm v_2)+\ldots+(u_n\pm v_n)+\ldots=\sum_{n=1}^{\infty}(u_n\pm v_n) \quad (U\pm V).$$

Теорема 15.1.2 (*арифметичні властивості збіжних рядів*). Якщо:

1) ряд U збігається, то збігається і добуток ряду на число c, і його сума дорівнює добутку $c\cdot s$:

$$U\succ \;\Rightarrow\; cU\succ \wedge \sum_{n=1}^{\infty}cu_n=cs; \qquad (15.1.13)$$

2) ряди U і V збігаються, то збігається сума (різниця) рядів, і сума вислідного ряду дорівнює сумі $s+\sigma$ (різниці $s-\sigma$):

$$U\succ \wedge V\succ \;\Rightarrow\; (U\pm V)\succ \wedge \sum_{n=1}^{\infty}(u_n\pm v_n)=s\pm\sigma. \qquad (15.1.14)$$

Д о в е д е н н я ґрунтується на відповідних властивостях границь.

1. Складемо n-ну часткову суму ряду cU і знайдемо її границю:

$$\sum_{i=1}^{n}cu_i=c\sum_{i=1}^{n}u_i=cs_n \;\Rightarrow\; \exists\lim_{n\to\infty}cs_n=c\cdot\lim_{n\to\infty}s_n=cs.$$

2. Складемо n-ну часткову суму ряду $(U+V)$ і знайдемо її границю:

$$\sum_{i=1}^{n}(u_i+v_i)=\sum_{i=1}^{n}u_i+\sum_{i=1}^{n}v_i \;\Rightarrow \;\boxed{\text{існують скінченні границі доданків}}\;\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\; \exists \lim_{n\to\infty}\left(\sum_{i=1}^{n}u_i+\sum_{i=1}^{n}v_i\right)=\lim_{n\to\infty}(s_n+\sigma_n)=s+\sigma.$$

(*Доведіть* самостійно теорему для різниці рядів.)

Якщо із ряду U вилучити скінченне число перших k членів, то отримаємо ряд, який називається **залишком ряду** U після k-го члену:

$$u_{k+1}+u_{k+2}+u_{k+3}+\ldots+u_n+\ldots=\sum_{n=k+1}^{\infty}u_n \qquad (R_U) \tag{15.1.15}$$

(при достатньо великих n усі відкинуті члени міститимуться у сумі s_n).

Теорема 15.1.3 (*про збіжність залишку ряду*). Якщо ряд збігається, то збігається і залишок ряду; і навпаки: якщо збігається залишок ряду, то збігається і сам ряд:

$$U \succ\!\!\!\succ \;\Leftrightarrow\; R_U \succ\!\!\!\succ. \tag{15.1.16}$$

Д о в е д е н н я зводиться до аналізу часткових сум обох рядів:

$$s_n=\sum_{i=1}^{n}u_i=\underbrace{u_1+u_2+\ldots+u_k}_{c_k}+\underbrace{u_{k+1}+u_{k+2}+\ldots+u_n}_{r_{n-k}}=c_k+r_{n-k}, \tag{15.1.17}$$

де c_k – сума вибраних перших k членів (стала, тому не залежна від n);

r_{n-k} – часткова сума залишку ряду.

Н е о б х і д н і с т ь ($\Rightarrow$). Якщо ряд U збігається, то існує, за означенням, скінченна границя часткової суми s_n: $\lim\limits_{n\to\infty}s_n=s$, тоді повинна існувати скінченна границя правої частини рівності $s_n=c_k+r_{n-k}$, а значить, і доданка r_{n-k} з урахуванням, що $n\to\infty \Rightarrow (n-k)\to\infty$:

$$r_{n-k}=s_n-c_k \;\Rightarrow\; \lim_{n\to\infty}r_{n-k}=\lim_{n\to\infty}s_n-\lim_{n\to\infty}c_k=s-c_k.$$

Д о с т а т н і с т ь ($\Leftarrow$) *пропонуємо* довести, за аналогією, самим.

Зауваження:

стосовно розбіжних рядів аналогічним чином легко показати, що добуток ряду з константою є розбіжним рядом і вилучення скінченного числа перших членів ряду дає розбіжний ряд;

теорему 15.1.3 можна тлумачити як критерій збіжності ряду „*мовою залишку ряду*”; практична цінність його невелика.

Висновок: вилучення скінченного числа перших членів ряду не впливає на його збіжність, тобто збіжний ряд залишиться збіжним, а розбіжний – розбіжним (*наведіть* відповідні міркування); *подумайте,* чи вплине на збіжність ряду приписування скінченного числа членів спереду ряду.

15.2. Достатні ознаки збіжності рядів з додатними членами

Найбільш підсильні для дослідження на збіжність ряди, усі члени яких невід’ємні або недодатні; їх звичайно називають **знакосталими рядами**, бо нулю можна приписати і „плюс”, і „мінус”. Вивчати будемо ряди з **додатними членами**: $u_n \geq 0 \ \ \forall n \in \boldsymbol{N}$, або коротко – **додатні ряди**: дослідження на збіжність рядів з **від’ємними членами** ($u_n \leq 0 \, \forall n \in \boldsymbol{N}$) зводиться до дослідження додатних рядів помноженням на (-1), що не впливає на збіжність ряду (див. теорему 15.1.2).

Нехай задано числові ряди U, V із загальними членами u_n, v_n і у разі збіжності їхні суми позначимо через s і σ відповідно:

$$u_1 + u_2 + u_3 + ... + u_n + ... \qquad (U), \quad \sum_{n=1}^{\infty} u_n = s;$$

$$v_1 + v_2 + v_3 + ... + v_n + ... \qquad (V), \quad \sum_{n=1}^{\infty} v_n = \sigma.$$

І. Ознаки порівняння. Суть цих ознак полягає у тому, що члени ряду $(U: \ u_n = f(n))$, який підлягає дослідженню, порівнюються з членами ряду $(V: \ v_n = \varphi(n))$, *поведінка* якого – збіжність чи розбіжність – уже відома. Якщо певне співвідношення між членами рядів U і V виконується, починаючи не з першого члена, а з якогось k-го $(k \geq 1)$, то розглядають відповідні залишки рядів, нумеруючи їхні члени з $n = 1$.

Теорема 15.2.1 (*достатня ознака порівняння у формі нерівностей*):

1. Якщо ряд V збігається і члени ряду U не перевищують членів ряду V, то і ряд U також збігається:

$$V \succ \wedge \left(\forall n \geq 1:\ u_n \leq v_n\right) \Rightarrow U \succ. \qquad (15.2.1)$$

2. Якщо ряд V розбігається і члени ряду U не менші членів ряду V, то і ряд U також розбігається:

$$V \prec \wedge \left(\forall n \geq 1:\ u_n \geq v_n\right) \Rightarrow U \prec. \qquad (15.2.2)$$

Д о в е д е н н я спирається на теорему 7.1.5 (*про збіжність монотонних обмежених ч/п*). Часткові суми додатних рядів є монотонно неспадними послідовностями.

1. Із умови теореми $u_n \leq v_n$ випливає, що часткові суми рядів пов'язані тим же знаком нерівності: $s_n \leq \sigma_n$. Оскільки ряд V збігається, то $\exists \lim\limits_{n\to\infty} \sigma_n = \sigma$. Це означає, що послідовність часткових сум s_n є обмеженою, і як монотонна ч/п має скінченну границю: $\lim\limits_{n\to\infty} s_n = s \leq \sigma$, а значить ряд U збіжний.

2. Якщо ряд V розбігається, то його суми σ_n необмежено зростають. Але тоді в силу нерівності $u_n \geq v_n$ повинні необмежено зростати і часткові суми ряду U, який за таких обставин є розбіжним.

Теорему доведено.

Зауваження. При невиконанні умов теореми із порівняння рядів певного висновку про поведінку ряду U зробити не можна, а саме:

1) $V \succ \wedge \left(\forall n \geq 1:\ u_n \geq v_n\right) \Rightarrow$ поведінка ряду U не з'ясовується;

2) $V \prec \wedge \left(\forall n \geq 1:\ u_n \leq v_n\right) \Rightarrow$ поведінка ряду U не з'ясовується.

Такі випадки слід розцінювати як невдалий вибір ряду V для порівняння з рядом U.

Наприклад, нехай для дослідження на збіжність ряду

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} + \frac{1}{25} + \ldots. + \frac{1}{n^2} + \ldots \quad (U),$$

який називають **рядом обернених квадратів** натуральних чисел, вибрано простий гармонійний ряд: $v_n = 1/n$, який розбігається. Тоді маємо (див. випадок 2) зауваження):

$$V \lessdot \wedge \left(\forall n \geq 1 : u_n = \frac{1}{n^2} \leq v_n = \frac{1}{n} \right).$$

Якщо для порівняння візьмемо збіжний ряд обернених добутків пар (див. (15.1.2)) із загальним членом $v_n = \dfrac{1}{n \cdot (n+1)}$, при цьому ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n^2}$ розглядатимемо, починаючи з 2-го члена, то:

$$\frac{1}{(n+1)^2} < \frac{1}{n \cdot (n+1)} \Rightarrow \left(\forall n \geq 1 : u_n < v_n \right) \Rightarrow U \gtrdot \text{ згідно з (15.2.1).}$$

Ряди V, з якими порівнюються досліджувані ряди U, називають **еталонними рядами** (від фр. etalon – зразок міри). В якості еталонних рядів звичайно беруть:

ряд геометричної прогресії: $v_n = v_1 q^{n-1}$, де перший член v_1 і знаменник q вибираються залежно від виду ряду U (часто беруть $v_1 = 1$);

простий гармонійний ряд: $v_n = \dfrac{1}{n}$;

узагальнений гармонійний ряд: $v_n = \dfrac{1}{n^p}$, де p – числовий параметр $(p \in \mathbf{R})$, який **збігається** (**розбігається**) за умови: $\boldsymbol{p > 1}$ $(\boldsymbol{p \leq 1})$.

При $p = 1$, $p = 2$ отримуємо відповідно простий гармонійний ряд і розглянутий вище ряд обернених квадратів. Легко з'ясувати поведінку ряду для $p < 1$ і $p > 2$.

Покажемо, що згідно з (15.2.2) ряд розбігається для $p < 1$, порівнюючи його з простим гармонійним рядом:

$$p < 1 \Rightarrow n^p \leq n \Rightarrow \underbrace{\frac{1}{n^p}}_{u_n} \geq \underbrace{\frac{1}{n}}_{v_n} \Rightarrow V \lessdot \wedge \left(\forall n \geq 2 : u_n > v_n \right) \Rightarrow U \lessdot.$$

(*Доведіть* збіжність узагальненого гармонійного ряду для $p > 2$.)

Деякі рекомендації до застосування теореми 15.2.1. Використання ознак порівняння у дослідженнях на збіжність потребує певної винахідливості, уміння аналізувати, щоб вибрати підхожий ряд для порівняння.

Якщо загальний член u_n ряду U містить як складові показникові функції (a^n) чи степеневі функції (n^α), то слід порівняти вихідний ряд з рядом геометричної прогресії, з узагальненим гармонійним рядом відповідно:

$$a^n \leftrightarrow v_n = v_1 q^{n-1}; \quad n^\alpha \leftrightarrow v_n = 1/n^p, \qquad (15.2.3)$$

де a (α) – додатне (довільне) дійсне число.

Приклади. Дослідити на збіжність ряди, задані загальними членами:

1. $u_n = \dfrac{5n-2}{3n^2+1}$ (загальний член містить степеневі функції).

Зіставляємо (незважаючи на числові коефіцієнти) старші степені n чисельника і знаменника: $n/n^2 = 1/n$. Отже, доцільно порівняти заданий ряд з простим гармонійним $(v_n = 1/n)$ або з його залишком:

$$u_n \ \gamma \ v_n \Rightarrow \frac{5n-2}{3n^2+1} \ \gamma \ \frac{1}{n} \Rightarrow (5n-2)n \ \gamma \ \left(3n^2+1\right) \Rightarrow \left(2n^2-2n-1\right) \ \gamma \ 0,$$

де γ – один із символів нерівностей, тобто $\gamma \in \{<, >, \leq, \geq\}$.

Квадратний тричлен $\left(2n^2-2n-1\right)$ $\forall n \geq 2$ додатний $(\gamma = >)$, тому, починаючи з другого члена, $u_n > v_n$ (*переконайтеся*). Отже, $U <$.

2. $u_n = \dfrac{5^n - 2n}{9^n + 1}$ (загальний член містить показникові функції).

Знаходимо відношення більших основ степенів у чисельнику і знаменнику: $5/9$, і беремо геометричну прогресію з $v_1 = q = 5/9 < 1$, тобто покладаємо $v_n = (5/9)^n$.

Застосовуємо ознаку порівняння:

$$u_n \, \gamma \, v_n \ \Rightarrow \ \frac{5^n - 2n}{9^n + 1} \, \gamma \, \frac{5^n}{9^n} \ \Rightarrow \ -2n \cdot 9^n \ \gamma \ 5^n \ \Rightarrow \ |\gamma = <| \ \Rightarrow \ U >.$$

Зауваження. Співвідношення-нерівності між членами рядів при нестрогому аналізі установлюють за кількома їхніми першими членами:

$$n=1,2,3:\begin{bmatrix} u_n: & 3/10 & 21/82 & 119/244 & \ldots \\ v_n: & 5/9 & 25/81 & 125/243 & \ldots \end{bmatrix} \Rightarrow\ u_n < v_n \Rightarrow\ U \succ.$$

При такому підході можна й помилитися, якщо відповідна поведінці ряду закономірність настає після „далекого” k-го ($k>>1$) члена ряду.

Теорема 15.2.2 (*достатня ознака порівняння у граничній формі*). Якщо існує скінченна границя L відношення загальних членів досліджуваного ряду U і ряду V, вибраного в якості еталонного, то обидва ряди збігаються або розбігаються одночасно:

$$\left.\begin{matrix} \exists \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{u_n}{v_n}=c, \\ 0<c<\infty \end{matrix}\right] \Rightarrow \begin{matrix} 1)\ V\succ\ \Rightarrow U\succ; \\ 2)\ V\prec\ \Rightarrow U\prec. \end{matrix} \qquad (15.2.4)$$

Д о в е д е н н я спирається на теорему 15.1.1 (*необхідну ознаку збіжності*): $u_n \to 0$, $n\to\infty$, і достатню умову розбіжності числового ряду (див. (15.1.10)): $u_n \not\to 0$, $n\to\infty$.

1. Припустимо, що у разі збіжності ряду V ряд U (при виконанні умов теореми) розбігається. Тоді його загальний член має границю, відмінну від нуля: $u_n \to l\neq 0$, $n\to\infty$, а $v_n\to 0$, $n\to\infty$. За таких умов границею відношення u_n/v_n буде нескінченність, що суперечить умові теореми: $c<\infty$.

2. Припустимо, що у разі розбіжності ряду V ряд U (при виконанні умов теореми) збігається. Тоді його загальний член має границю, рівну нулеві: $u_n\to 0$, $n\to\infty$, а $v_n\to l\neq 0$, $n\to\infty$. За таких умов границею відношення u_n/v_n є нуль, що суперечить умові теореми: $c>0$.

Деякі рекомендації до застосування теореми 15.2.2. Якщо загальний член ряду U містить як складову загальний член якогось еталонного ряду V, то саме з ним слід порівняти вихідний ряд.

Приклади. Дослідити на збіжність ряди, задані загальними членами:

1. $u_n=\sqrt[n]{10}-1$.

Порівнюємо заданий ряд з простим гармонійним рядом $\left(v_n=1/n\right)$:

$$L=\lim_{n\to\infty}\frac{u_n}{v_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{10^{1/n}-1}{1/n}=\left(\frac{0}{0}\right).$$

Розкриваємо невизначеність за правилом Лопіталя, вважаючи n дійсною змінною (бо $[x]=n\ \ \forall x\in[n,\,n+1)$, і якщо $x\to+\infty$ як неперервна змінна, то $n\to+\infty$ як дискретна змінна (див. доведення теореми 7.3.7 частини 1)):

$$L=\lim_{n\to\infty}\frac{\left(10^{1/n}-1\right)'}{\left(1/n\right)'}=\lim_{n\to\infty}\frac{\left(-1/n^2\right)\cdot 10^{1/n}\ln 10}{-1/n^2}=\ln 10\ \Rightarrow U\prec.$$

2. $u_n=\sin\left(1/n^3\right)$.

Порівнюємо U з рядом **обернених кубів** $\left(v_n=1/n^3\right)$:

$$L=\lim_{n\to\infty}\frac{u_n}{v_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\sin\left(1/n^3\right)}{1/n^3}=\left(\frac{0}{0}\right)=1\ \Rightarrow U\succ.$$

3. $u_n=\dfrac{6n-1}{n\left(2n^2-1\right)}$ (n-й член містить степеневі функції).

Зіставляємо між собою старші степені змінної n у чисельнику і знаменнику: $n/n^3=1/n^2$. Отже, доцільно порівняти заданий ряд з рядом обернених квадратів $\left(v_n=1/n^2\right)$:

$$L=\lim_{n\to\infty}\frac{u_n}{v_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{(6n-1)\,n^2}{n\left(2n^2-1\right)}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{6n^3}{2n^3}=3\ \Rightarrow U\succ.$$

4. $u_n=\dfrac{7^n}{5^n+2^n}$ (загальний член містить показникові функції).

Знаходимо відношення більших основ степенів у чисельнику і знаменнику: $7/5$, і беремо геометричну прогресію з $v_1=q=7/5>1$, тобто покладаємо $v_n=(7/5)^n$.

Застосовуємо ознаку порівняння у граничній формі:

$$L=\lim_{n\to\infty}\frac{u_n}{v_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{7^n}{5^n+2^n}\cdot\frac{5^n}{7^n}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{1+(2/5)^n}=1\ \Rightarrow U\prec.$$

Відзначимо: у цьому прикладі можна було б обійтися без застосування достатньої ознаки порівняння, бо не виконується необхідна ознака збіжності (*переконайтеся*), що тягне за собою розбіжність ряду. Для оберненого до u_n дробу залучення достатньої умови мало б сенс.

ІІ. Ознака Даламбера (за ім'ям видатного французького математика і механіка Жана Лерона Д'Аламбера (1717 – 1783)).

Для дослідження ряду U на збіжність розглядається послідовність відношень наступних членів (u_{n+1}) до попередніх (u_n): $\rho_n = u_{n+1}/u_n$, $n = 1, 2, 3, \ldots$.

Теорема 15.2.3 (*достатня ознака Даламбера*). Якщо при необмеженому зростанні n послідовність $\{\rho_n\}$ має границю ρ (скінченну чи нескінченну), то: при $\rho < 1$ ряд збігається, при $\rho > 1$ – розбігається, а $\rho = 1$ не дає можливості зробити висновок про поведінку ряду:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \rho \Rightarrow \begin{array}{l} 1)\ \rho < 1 \Rightarrow U, \\ 2)\ \rho > 1 \Rightarrow U, \\ 3)\ \rho = 1 \Rightarrow U\ \mathbf{-?} \end{array} \qquad (15.2.5)$$

Д о в е д е н н я зводиться до застосування ознаки порівняння у формі нерівностей (див. теорему 15.2.1). У якості еталонних рядів використовуються ряди геометричної прогресії – збіжний і розбіжний:

$$0 < q < 1:\ \sum_{n=1}^{\infty} v_1 q^n = v_1 q + v_1 q^2 + \ldots + v_1 q^n + \ldots \qquad (V);$$

$$q = 1:\ \sum_{n=1}^{\infty} v_1 = v_1 + v_1 + v_1 + \ldots + v_1 + \ldots\ (V).$$

1. Якщо $\rho < 1$, то виберемо додатне число ε, менше, ніж $1 - \rho$, так що і $\rho + \varepsilon < 1$, і покладемо $q = \rho + \varepsilon$ (рис. 15.2.1).

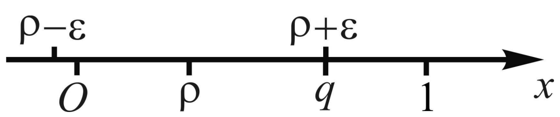


Рис. 15.2.1. **До порівняння ρ_n з q**

За означенням границі послідовності $\forall n > N(\varepsilon)$, тобто починаючи з деякого номера $N = N(\varepsilon)$, матимемо:

$$|\rho_n - \rho| < \varepsilon \Rightarrow \rho - \varepsilon < \rho_n < \rho + \varepsilon = q.$$

Звідки отримуємо:

$$\rho_{N+1} = \frac{u_{N+2}}{u_{N+1}} < q \;\Rightarrow\; u_{N+2} < u_{N+1} \cdot q\,;$$

$$u_{N+3} < u_{N+2} \cdot q \;\;\Rightarrow\;\; u_{N+3} < u_{N+1} \cdot q^2\,;$$

$$u_{N+4} < u_{N+3} \cdot q \;\;\Rightarrow\;\; u_{N+4} < u_{N+1} \cdot q^3 \quad \text{і т. д.}$$

Тобто члени залишку ряду U після N-го члена менші членів збіжного ряду V – геометричної прогресії із загальним членом $v_n = u_{N+1} \cdot q^n$.

Отже, за теоремою 15.1.3 (*про збіжність залишку ряду*) маємо:

$$\forall n > N : V \succ \wedge \left(u_n < v_n\right) \;\Rightarrow\; R_U \succ \Rightarrow U \succ \text{ (див. (15.1.16)).}$$

2. Якщо $\rho > 1$ (ρ – скінченне), то виберемо додатне число ε, рівним $\rho - 1$, так що $\rho - \varepsilon = 1$, і покладемо $q = \rho - \varepsilon = 1$ (рис. 15.2.2).

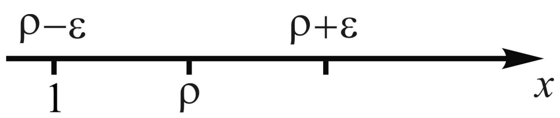


Рис. 15.2.2. **До порівняння ρ_n з 1**

За означенням границі послідовності $\forall n > N(\varepsilon)$, тобто починаючи з деякого номера $N = N(\varepsilon)$, матимемо:

$$\left|\rho_n - \rho\right| < \varepsilon \;\Rightarrow\; q = 1 < \rho_n < 2\rho - 1.$$

Звідки отримуємо:

$$\rho_{N+1} = \frac{u_{N+2}}{u_{N+1}} > 1 \;\Rightarrow\; u_{N+2} > u_{N+1}\,;$$

$$u_{N+3} > u_{N+2} \;\;\Rightarrow\;\; u_{N+3} > u_{N+1}\,;$$

$$u_{N+4} > u_{N+3} \;\;\Rightarrow\;\; u_{N+4} > u_{N+1} \quad \text{і т. д.}$$

Тобто члени залишку ряду U після N-го члена більші членів розбіжного ряду V геометричної прогресії з першим членом $v_1 = u_{N+1}$ і знаменником $q = 1$, тобто із загальним членом $v_n = u_{N+1}$. Отже,

$$\forall n > N : V \prec \wedge \left(u_n > v_n\right) \;\Rightarrow\; R_U \prec \Rightarrow U \prec.$$

У випадку нескінченного ρ $\left(\rho = \infty\right)$, починаючи з деякого номера $N = N(\varepsilon)$, матиме місце співвідношення $\rho_n = u_{n+1}/u_n > 1$, тобто

$u_{n+1} > u_n$, і загальний член ряду не прямує до нуля при $n \to \infty$; отже, ряд буде розбіжним.

3. Справедливість висновку теореми для $\rho = 1$ випливає з того, що у таких випадках існують ряди, які збігаються, і ряди, що розбігаються.

Наприклад, простий гармонійний ряд розбігається, ряд обернених квадратів збігається, а для обох рядів $\rho = 1$:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} : \left(u_n = \frac{1}{n},\, u_{n+1} = \frac{1}{n+1} \right) \;\Rightarrow\; \rho = \lim_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{n+1} = 1.$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} : \left(u_n = \frac{1}{n^2},\, u_{n+1} = \frac{1}{(n+1)^2} \right) \;\Rightarrow\; \rho = \lim_{n\to\infty} \frac{n^2}{(n+1)^2} = 1.$$

Деякі рекомендації до застосування теореми 15.2.3. Ознака Даламбера, як правило, дає відповідь на запитання про збіжність чи розбіжність ряду, якщо його загальний член містить факторіали і (або) показникові функції, і не дає відповіді, якщо u_n-не є раціональним алгебраїчним дробом або дробом з кореневою ірраціональністю.

Приклади. Дослідити ряди на збіжність:

1. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{n^2+2}{3^n}$.

Виписуємо за n-м членом ряду $(n+1)$-й:

$$u_n = \frac{n^2+2}{3^n} \;\Rightarrow\; u_{n+1} = \frac{(n+1)^2+2}{3^{n+1}};$$

знаходимо відношення наступного члена ряду до попереднього і *спрощуємо* його (якщо це можливо):

$$\rho_n = \frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{(n+1)^2+2}{3^{n+1}} \cdot \frac{3^n}{n^2+2} = \frac{(n+1)^2+2}{3\left(n^2+2\right)}.$$

Обчислюємо ρ і робимо відповідний *висновок*:

$$\rho = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^2+2}{3\left(n^2+2\right)} = \left(\frac{\infty}{\infty}\right) = \frac{1}{3} < 1 \;\Rightarrow\; U \genfrac{}{}{0pt}{}{\searrow}{\nearrow}.$$

Наголошуємо: $\boldsymbol{u_{n+1} \neq u_n + 1}$. Щоб отримати u_{n+1}-й член ряду, треба додавати одиницю не до u_n-го, а до n, збільшуючи таким чином номер члену ряду на одиницю, бо

$$u_n = f(n) \Rightarrow u_{n+1} = f(n+1),$$

а не $u_n = f(n) \Rightarrow u_{n+1} = f(n)+1$.

2. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{n!}{5^n}$.

За аналогією з розв'язанням прикладу 1 (*прокоментуйте*):

$$\left(u_n = \frac{n!}{5^n} \Rightarrow u_{n+1} = \frac{(n+1)!}{5^{n+1}} \right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \rho_n = \frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{(n+1)!}{5^{n+1}} \cdot \frac{5^n}{n!} = \frac{n+1}{5} \Rightarrow \rho = \lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{5} = \infty > 1 \Rightarrow U \prec.$$

(*Обміркуйте* поведінку рядів, загальні члени яких обернені до заданих в прикладах 1 і 2.)

III. **Ознака Коші радикальна** (за ім'ям видатного французького математика і механіка Огюсте́на Коші (1789 – 1857)).

Теорема 15.2.4 (*достатня ознака Коші радикальна*).

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{u_n} = \rho \Rightarrow \begin{array}{l} 1)\ \rho < 1 \Rightarrow U \succ, \\ 2)\ \rho > 1 \Rightarrow U \prec, \\ 3)\ \rho = 1 \Rightarrow U \ \textbf{– ?} \end{array} \qquad (15.2.6)$$

(*Наведіть* словесне формулювання самостійно.)

Д о в е д е н н я цієї ознаки аналогічне доведенню ознаки Даламбера і зводиться до застосування ознаки порівняння у формі нерівностей (див. теорему 15.2.1). У якості еталонних рядів використовуються ряди геометричної прогресії – збіжний і розбіжний:

$$0 < q < 1: \ \sum_{n=1}^{\infty} q^n = q + q^2 + \ldots + q^n + \ldots \ (V \succ);$$

$$q = 1: \ \sum_{n=1}^{\infty} 1 = 1 + 1 + 1 + \ldots + 1 + \ldots \ (V \prec).$$

1. Якщо $\rho < 1$, то виберемо додатне число ε, менше, ніж $1-\rho$, так що і $\rho+\varepsilon < 1$, і покладемо $q = \rho + \varepsilon$ (див. рис. 15.2.1).

За означенням границі послідовності $\forall n > N(\varepsilon)$, тобто починаючи з деякого номера $N = N(\varepsilon)$, матимемо: $|\rho_n - \rho| < \varepsilon \Rightarrow \rho - \varepsilon < \rho_n < \rho + \varepsilon = q < 1$, де $\rho_n = \sqrt[n]{u_n}$.

Звідки отримуємо:

$$\sqrt[N+1]{u_{N+1}} < q \;\Rightarrow\; u_{N+1} < q^{N+1};$$

$$\sqrt[N+2]{u_{N+2}} < q \Rightarrow\; u_{N+2} < q^{N+2};$$

$$\sqrt[N+3]{u_{N+3}} < q \Rightarrow\; u_{N+3} < q^{N+3} \quad \text{і т. д.}$$

Тобто члени залишку ряду U після N-го члена менші членів збіжного ряду V геометричної прогресії із загальним членом $v_n = q^n$.

Отже,

$$\forall n > N : V \succ \wedge (u_n < v_n) \;\Rightarrow\; R_U \succ \Rightarrow U \succ \text{ (див. (15.1.16)).}$$

2. Якщо $\rho > 1$ (ρ – скінченне), то виберемо додатне число ε, рівним $\rho - 1$, так що $\rho - \varepsilon = 1$, і покладемо $q = \rho - \varepsilon = 1$ (див. рис. 15.2.2).

За означенням границі послідовності $\forall n > N(\varepsilon)$, тобто починаючи з деякого номера $N = N(\varepsilon)$, матимемо: $|\rho_n - \rho| < \varepsilon \Rightarrow q = 1 < \rho_n < 2\rho - 1$.

Звідки отримуємо:

$$\rho_{N+1} = \sqrt[N+1]{u_{N+1}} > 1 \;\Rightarrow\; u_{N+1} > 1;$$

$$\rho_{N+2} = \sqrt[N+2]{u_{N+2}} > 1 \;\Rightarrow\; u_{N+2} > 1;$$

$$\rho_{N+3} = \sqrt[N+3]{u_{N+3}} > 1 \;\Rightarrow\; u_{N+3} > 1 \quad \text{і т. д.}$$

Тобто члени залишку ряду U після N-го члена більші членів розбіжного ряду V геометричної прогресії з $v_1 = q = 1$, тобто із загальним членом $v_n = 1$. Отже,

$$\forall n > N : V \prec \wedge (u_n > v_n) \;\Rightarrow\; R_U \prec \Rightarrow U \prec.$$

У випадку нескінченності ρ $(\rho = \infty)$, починаючи з деякого номера $N = N(\varepsilon)$, матиме місце співвідношення $\rho_n = \sqrt[n]{u_n} > 1$, тобто $u_n > 1$, і загальний член ряду не прямує до нуля при $n \to \infty$; отже, ряд буде розбіжним.

3. Справедливість висновку теореми для $\rho = 1$ випливає з того, що у таких випадках існують ряди, які збігаються, і ряди, що розбігаються.

Наприклад, для узагальненого гармонійного ряду $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ при усіх скінченних дійсних значеннях p отримуємо $\rho = 1$:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}:\ \rho_n = \sqrt[n]{\frac{1}{n^p}} \Rightarrow \rho = \lim_{n\to\infty} \rho_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^{p/n}} = \left(\frac{1}{\infty^0}\right) = 1,$$

де за правилом Лопіталя

$$\lim_{n\to\infty} n^{p/n} = \left(\infty^0\right) = \lim_{n\to\infty} e^{p\frac{\ln n}{n}} = \lim_{n\to\infty} e^{\frac{p}{n}} = e^0 = 1. \qquad (15.2.7)$$

Деякі рекомендації до застосування теореми 15.2.4. Радикальна ознака Коші за „потужністю", як правило, не відрізняється від ознаки Даламбера, тобто вона дає відповідь на запитання про збіжність чи розбіжність ряду тоді, коли її дає ознака Даламбера, і навпаки. Ознака Коші ефективно застосовується, якщо загальний член ряду є n-м степенем якогось виразу. При використанні цієї ознаки часто корисною буває як готова формула границя (15.2.7) або її окремий випадок:

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = \left(\infty^0\right) = 1.$$

Приклади. Дослідити ряди на збіжність:

1. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\ln^n(n+1)}$.

Згідно з (15.2.6) *виписуємо* u_n, *знаходимо* $\rho_n = \sqrt[n]{u_n}$ і *обчислюємо* ρ:

$$u_n = \frac{1}{\ln^n(n+1)} \Rightarrow \rho = \lim_{n\to\infty} \rho_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\ln(n+1)} = \left(\frac{1}{\infty}\right) = 0 < 1.$$

Висновок: ряд збігається.

2. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{e^{2\sqrt{n}}}{\sqrt{2n}}$.

Аналогічно проробленому в прикладі 1:

$$u_n=\frac{e^{2\sqrt{n}}}{\sqrt{2n}} \Rightarrow \rho=\lim_{n\to\infty}\rho_n=\lim_{n\to\infty}\frac{e^{2/\sqrt{n}}}{(2n)^{1/2n}}=\frac{e^{2/\infty}}{\infty^0}=\frac{1}{1}=1\Rightarrow ? \qquad (15.2.8)$$

Висновок: радикальна ознака Коші відповіді не дає.

IV. Ознака Коші інтегральна. Нехай $u_n=f(n)$ – загальний член ряду U, що підлягає дослідженню, а $y=f(x)$ – функція неперервного аргументу, яка отримується із u_n-го формальною заміною n на x. *Наприклад*, $u_n=\sin n\leftrightarrow y=\sin x$, $u_n=\frac{1}{n}\leftrightarrow y=\frac{1}{x}$. Для дослідження ряду U на збіжність розглядається ряд V, членами якого є інтеграли:

$$\int_1^2 f(x)dx+\int_2^3 f(x)dx+\ldots+\int_n^{n+1} f(x)dx+\ldots\ (V),\quad \text{тобто } v_n=\int_n^{n+1} f(x)dx.$$

Теорема 15.2.5 (*достатня ознака Коші інтегральна*). Якщо послідовність $\{u_n\}$ монотонно незростаюча: $u_n\ge u_{n+1}$, а $f(x)$ неперервна і не зростає для всіх $x\ge 1$, то обидва ряди, U і V, збігаються або розбігаються одночасно:

$$\left.\begin{array}{l}\forall n\ge 1:\{u_n\}\searrow,\\ \forall x\in[1,\infty):\ f(x)\in\mathbf{C}\wedge f(x)\searrow\end{array}\right]\Rightarrow\begin{array}{l}1)\ V\rightrightarrows\ \Rightarrow U\rightrightarrows;\\ 2)\ V\leftleftarrows\ \Rightarrow U\leftleftarrows.\end{array} \qquad (15.2.9)$$

Д о в е д е н н я зводиться до застосування ознаки порівняння у формі нерівностей (див. теорему 15.2.1).

Часткові суми ряду V, як і його члени, також будуть інтегралами

$$\sigma_n=\int_1^2 f(x)dx+\int_2^3 f(x)dx+\ldots+\int_n^{n+1} f(x)dx=\int_1^{n+1} f(x)dx. \qquad (15.2.10)$$

(Завдяки якій *властивості* ВІ отримано інтеграл для σ_n?)

Збіжність ряду означає, за означенням, існування скінченної границі послідовності часткових сум, тобто збіжність невластивого інтеграла:

$$I_1^{\infty} = \lim_{n\to\infty} \sigma_n = \int_1^{\infty} f(x)dx .$$

За умовою теореми функція $f(x)$ монотонно не зростає, отже, для будь-якого числа x між n і $n+1$ виконується нерівність $u_n \ge f(x) \ge u_{n+1}$.

Здійснимо у ній перехід до ВІ (див. (12.1.10)) за змінною x:

$$\int_n^{n+1} u_n dx \ge \int_n^{n+1} f(x)dx \ge \int_n^{n+1} u_{n+1}dx \;\Rightarrow\; u_n \ge \underbrace{\int_n^{n+1} f(x)dx}_{v_n} \ge u_{n+1}, \qquad (15.2.11)$$

оскільки для вибраного (заданого) n величин u_n і u_{n+1} є сталими.

Із правої частини подвійної нерівності (15.2.11), починаючи з другого члена, маємо: $u_n \le v_n$, і якщо ряд V збіжний, то ряд U також збіжний.

Із лівої частини подвійної нерівності (15.2.11) $\forall n \ge 1$ маємо: $u_n \ge v_n$, і якщо ряд V розбіжний, то ряд U також розбіжний. Теорема доведена.

Достатню ознаку Коші інтегральну звичайно формулюють у термінах НВІ: якщо виконуються умови теореми, то ряд U: $u_n = f(n)$, і невластивий інтеграл $I_1^{\infty} = \int_1^{\infty} f(x)dx$ збігаються чи розбігаються одночасно:

$$1)\ I_1^{\infty} \succ \;\Rightarrow U \succ;\quad 2)\ I_1^{\infty} \prec \;\Rightarrow U \prec, \qquad (15.2.12)$$

або так: якщо виконуються умови теореми, то ряд U: $u_n = f(n)$, і первісна $F(x)$ для $f(x)$ збігаються чи розбігаються одночасно:

$$1)\ F(\infty) \succ \;\Rightarrow U \succ;\quad 2)\ F(\infty) \prec \;\Rightarrow U \prec, \qquad (15.2.13)$$

де $F(\infty) = \lim_{x\to\infty} F(x)$.

Зауваження. Вперше ця ознака була знайдена у геометричній формі Коліном Маклореном – знаним англійським математиком і механіком (1698 – 1746), потім забута і знову знайдена Коші (у формі (15.2.13)).

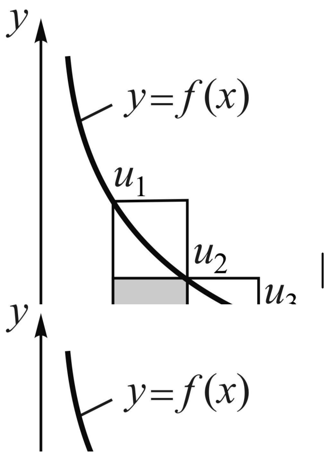


Рис. 15.2.3. **До ознаки Коші**

Якщо зобразити $y = f(x)$, то $u_n = f(n)$ виражають величини ординат цілочислових точок $x = 1, 2, 3, \ldots, n, \ldots$. Тоді, з одного боку, $F(\infty)$ виражає площу криволінійної трапеції (к/т) для $f(x)$ на $[1, \infty)$, з іншого – сума ряду U є сумою площ прямокутників, що виходять за межі к/т (рис. 15.2.3).

Якщо площа к/т скінченна, то скінченною є також площа ступінчастої фігури, складеної із прямокутників, що розташовані нижче кривої (на рис. 15.2.3 вони затемнені), якщо ж площа к/т нескінченна, то нескінченна і площа ступінчастої фігури, яка містить у собі к/т.

Інтегральна ознака Коші є *найпотужнішою* з усіх розглянутих достатніх ознак, вона непохитно розпізнає збіжність чи розбіжність числових рядів. *Наприклад*, застосовуючи цю ознаку до дослідження узагальненого гармонійного ряду, отримуємо:

$$\left(u_n = \frac{1}{n^p} \quad (p \in \mathbf{R}) \Rightarrow f(x) = \frac{1}{x^p}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow I_1^\infty = \int_1^\infty \frac{dx}{x^p} : \left[\begin{array}{l} p = 1 \Rightarrow I_1^\infty = \ln x \Big|_1^\infty = \infty \Rightarrow I_1^\infty \prec \Rightarrow U \prec; \\ p > 1 \Rightarrow I_1^\infty = -\dfrac{1}{(p-1)x^{p-1}}\Bigg|_1^\infty = \dfrac{1}{p-1} \Rightarrow I_1^\infty \succ \Rightarrow U \succ. \end{array}\right.$$

(*Доведіть* розбіжність ряду для $p < 1$.)

На закінчення застосуємо ознаку до дослідження ряду (див. (15.2.8)), поведінка якого за допомогою радикальної ознаки не була з’ясована:

$$\left(u_n = \frac{e^{2\sqrt{n}}}{\sqrt{2n}} \Rightarrow f(x) = \frac{e^{2\sqrt{x}}}{\sqrt{2x}}\right) \Rightarrow I_1^\infty = \int_1^\infty \frac{e^{2\sqrt{x}}}{\sqrt{2x}} dx =$$

$$= \left| \begin{array}{ll} t = 2\sqrt{x} \Rightarrow x = t^2/4 \Rightarrow & dx = t\,dt/2 \\ \sqrt{2x} = \sqrt{t^2/2} = t/\sqrt{2}, & \begin{array}{c|c|c} x & 1 & \infty \\ \hline t & 2 & \infty \end{array} \end{array} \right| = \frac{\sqrt{2}}{2}\int_2^\infty e^t dt = \frac{\sqrt{2}}{2} e^t \Big|_2^\infty = \infty.$$

Невластивий інтеграл розбігається, отже, і ряд розбіжний.

Звичайно, при застосуванні інтегральної ознаки Коші, щоб уникнути обчислення НВІ I_1^{∞}, доцільно використовувати ознаки порівняння невластивих інтегралів (див. (12.3.6), (12.3.7)). Так, у розглянутому прикладі, беручи в якості еталонного ряд степеневої функції $u_n = n^{-p}$, отримуємо:

$$\left(p \le 1 \;\Rightarrow\; I_1^{\infty} = \int\limits_1^{\infty} x^{-p} dx \prec \text{ (див. (12.3.8)), } \frac{e^{2\sqrt{x}}}{\sqrt{2x}} > \frac{1}{x^{1/2}} \right) \;\Rightarrow\; U \prec .$$

15.3. Знакопереміжні й знакозмінні числові ряди

Знакопереміжні ряди: означення, теорема Лейбніца, абсолютна й умовна збіжності

Числові ряди, у яких попередній (u_n-й) і наступний (u_{n+1}-й) члени мають різні знаки, називаються **знакопереміжними**, або **знакопочережними**, рядами. Звичайно їх подають у вигляді:

$$\begin{gathered} u_1 - u_2 + u_3 - u_4 + \ldots + (-1)^{n+1} u_n + \ldots \quad \left(U^{\pm}\right), \text{ або} \\ -u_1 + u_2 - u_3 + u_4 + \ldots + (-1)^{n} u_n + \ldots \quad \left(U^{\mp}\right), \end{gathered} \tag{15.3.1}$$

де для наочності знаки членів записують перед ними, вважаючи $u_n \ge 0$, тобто u_n – це модуль загального члену ряду, а степінь з основою -1 є своєрідним індикатором знака члена (нулю можна приписати і „плюс”, і „мінус”); у теоретичних дослідженнях, як правило, розглядають $U^{\pm}$.

Для дослідження знакопереміжних рядів на збіжність застосовують **теорему Лейбніца**.

Теорема 15.3.1 (*достатня ознака збіжності рядів* $U^{\pm}$). Якщо:

1) абсолютні величини членів ряду утворюють монотонно незростаючу послідовність $\{u_n\}$ і

2) ця послідовність збігається до нуля,

то ряд $U^{\pm}$ збігається:

$$\left. \begin{aligned} &1)\ \forall n \ge 1:\ \ u_n \ge u_{n+1} \ge 0, \\ &2)\ \lim_{n\to\infty} u_n = 0 \end{aligned} \right] \;\Rightarrow\; U^{\pm} \succ . \tag{15.3.2}$$

Д о в е д е н н я зводиться до аналізу часткових сум з непарним $(n = 2m-1)$ і з парним $(n = 2m)$ числом доданків.

Проаналізуємо часткові суми з непарним числом доданків, групуючи по два члени, починаючи з другого:

$$s_{2m-1} = u_1 - \underbrace{(u_2 - u_3)}_{\geq 0} - \underbrace{(u_4 - u_5)}_{\geq 0} - \ldots - \underbrace{(u_{2m-2} - u_{2m-1})}_{\geq}. \qquad (15.3.3)$$

За першою умовою теореми $u_n \geq u_{n+1}$, тому кожна різниця у круглих дужках невід'ємна, отже, сума s_{2m-1} *обмежена*: $s_{2m-1} \leq u_1$.

Подамо тепер суму інакше, групуючи по два члени, починаючи з першого:

$$s_{2m-1} = \underbrace{(u_1 - u_2)}_{\geq 0} + \underbrace{(u_3 - u_4)}_{\geq 0} + \ldots + \underbrace{(u_{2m-3} - u_{2m-2})}_{\geq 0} + \underbrace{u_{2m-1}}_{\geq 0}. \qquad (15.3.4)$$

Кожний доданок суми s_{2m-1} невід'ємний, тому зі збільшенням номера m вона не зменшується, а значить $\{s_{2m-1}\}$ є монотонно неспадною послідовністю: $s_{2m-1} \geq s_{2m-3} \geq 0 \;\; \forall m \geq 2$.

Таким чином, $\{s_{2m-1}\}$ $\forall m \geq 1$ монотонно *не спадає* і *обмежена*, а значить має скінченну границю (див. теорему 7.1.5 частини 1 (*про збіжність монотонних обмежених ч/п*)): $\lim\limits_{m\to\infty} s_{2m-1} = s \in \mathbf{R}$.

Для часткових сум з парним числом доданків маємо:

$$s_{2m} = s_{2m-1} + u_{2m} \;\Rightarrow\; \lim_{m\to\infty} s_{2m} = \lim_{m\to\infty}(s_{2m-1} + u_{2m}) = s, \qquad (15.3.5)$$

бо за другою умовою теореми $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 0$; у даному розгляді $n = 2m$.

Отже, послідовність $\{s_n\}$ і при непарних, і при парних n збігається до числа s, а значить ряд $U^{\pm}$ збіжний. (*Доведіть* теорему, аналізуючи спочатку часткові суми s_{2m}.)

Наслідки:

1) сума збіжного знакопереміжного ряду $U^{\pm}$ невід'ємна і не перевищує його першого члена (див. (15.3.3), (15.3.5)): $0 \leq s \leq u_1$;

2) залишок $R_{U^{\pm}}$ збіжного знакопереміжного ряду після k-го члена має знак свого першого члена і не перевищує його за модулем:

$$r_k=(-1)^k u_{k+1}+(-1)^{k+1}u_{k+2}+\ldots+(-1)^{k+n-1}u_{k+n}+\ldots\ \left(R_{U^{\pm}}\right)\ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\left[\begin{array}{lll} k=2m & \Rightarrow & 0\le r_{2m}\le u_{2m+1}, \\ k=2m-1 & \Rightarrow & r_{2m-1}<0\wedge\left|r_{2m-1}\right|\le u_{2m}\end{array}\right.\Rightarrow\forall k\ge 1:\ \left|r_k\right|\le u_{k+1};$$

3) при заміні суми s ряду $U^{\pm}$ його частковою сумою абсолютна похибка не перевищує модуля першого відкинутого члена:

$$r_k=s-s_k\ \Rightarrow\ \left|s-s_k\right|\le u_{k+1}. \tag{15.3.6}$$

Формула (15.3.6) часто використовується у наближених обчисленнях за допомогою рядів.

Зауваження:

невиконання хоча б однієї з умов 1), 2) теореми 15.3.1 є **достатньою умовою розбіжності** ряду $U^{\pm}$, тому при дослідженні на збіжність нема потреби перевіряти виконання обох умов, якщо установлено, що якась не виконується; перевірку умов можна починати з будь-якої із них;

співвідношення 1) $\forall n\ge 1:\ u_n\ge u_{n+1}\ge 0$ може справджуватись, починаючи не з першого члена, а з деякого k-го $(k>1)$. Тому перевірку його виконання слід проводити у загальному вигляді, тобто установити, для яких n виконується нерівність $u_n\ge u_{n+1}$, а не виписувати кілька членів ряду і робити загальний висновок.

Приклади. Дослідити на збіжність знакопереміжні ряди:

1. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{n}{(n-1)^2+20}=\frac{1}{20}-\frac{2}{21}+\frac{3}{24}-\frac{4}{29}+\frac{5}{36}-\frac{6}{45}+\ldots$.

Аналізуємо ряд з метою установлення того, чи виконуються умови достатньої ознаки збіжності. Друга умова виконується, бо u_n є правильним раціональним дробом:

$$\lim_{n\to\infty}u_n=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{(n-1)^2+20}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{n^2}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0.$$

З'ясовуємо виконання першої умови ознаки Лейбніца, для чого виписуємо попередній (u_n) та наступний (u_{n+1}) члени ряду і розв'язуємо нерівність $u_n \geq u_{n+1}$:

$$\left(u_n = \frac{n}{(n-1)^2+20} \;\Rightarrow\; u_{n+1} = \frac{n+1}{n^2+20} \right):$$

$$\left| u_n \geq u_{n+1} \right| \;\Rightarrow\; n^3+20n \geq \left(n^2-2n+21\right)(n+1) \;\Rightarrow\; n^2+n-21 \geq 0 \;\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\; n_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{85}}{2} \approx \frac{-1 \pm 9{,}2}{2} \;\Rightarrow\; n \geq 5$$. Отже: $U^{\pm} \succ$.

Перша умова виконується після 5-го члена:

$$\begin{array}{l} u_n\!:\; \dfrac{1}{20},\; \dfrac{2}{21},\; \dfrac{3}{24},\; \dfrac{4}{29},\; \dfrac{5}{36},\; \dfrac{6}{45},\; \ldots, \\ \qquad\quad < \quad < \quad < \quad < \quad > \quad > \ldots \end{array}$$

і якби аналізували тільки перші п'ять членів, то висновок був би хибний.

2. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \dfrac{n-2}{n^2-2} = 1 - 0 + \dfrac{1}{7} - \dfrac{2}{14} + \dfrac{3}{23} - \dfrac{4}{34} + \ldots$.

Друга умова виконується:

$$\lim_{n\to\infty} u_n = \lim_{n\to\infty} \frac{n-2}{n^2-2} = \left(\frac{\infty}{\infty}\right) = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{n^2} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = \frac{1}{\infty} = 0.$$

Для перевірки виконання першої умови розв'язуємо відносно n відповідну нерівність:

$$\left(u_n = \frac{n-2}{n^2-2} \Rightarrow u_{n+1} = \frac{n-1}{(n+1)^2-2} \right):$$

$$\left| u_n \geq u_{n+1} \right| \Rightarrow \frac{n-2}{n^2-2} \geq \frac{n-1}{n^2+2n-1} \Rightarrow n^3-5n+2 \;\geq\; n^3-2n-n^2+2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow n(n-3) \geq 0 \;\Rightarrow\; n \geq 3;$$

$$\begin{array}{l} u_n\!:\; 1,\; 0,\; \dfrac{1}{7},\; \dfrac{1}{7},\; \dfrac{3}{23},\; \dfrac{2}{17},\; \ldots, \\ \quad > \; < \; = \; > \quad > \quad > \ldots \end{array}$$ монотонність починається з 3-го члена.

Якщо ж збігається залишок ряду, то збігається і сам ряд.

3. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{n}=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+...+(-1)^{n+1}\frac{1}{n}+...\,.$ (15.3.7)

Установлюємо, чи виконується перша умова ознаки Лейбніца. У цьому прикладі можна обійтись візуальним аналізом модулів членів ряду: чисельники дробів однакові, а знаменники зростають зі збільшенням номера, отже, дроби зменшуються, тобто $u_n \ge u_{n+1}\ \ \forall n\in\mathbf{N}$. При аналітичному підході аналіз послідовності $\{u_n\}$ виглядає так:

$$\left(u_n=\frac{1}{n}\ \Rightarrow\ u_{n+1}=\frac{1}{n+1}\right):\ \frac{1}{n}\ge\frac{1}{n+1}\ \Rightarrow\ n+1>n\quad\forall n\in\mathbf{N}.$$

Переконуємося у справедливості другої умови:

$$\lim_{n\to\infty}u_n=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}=\left(\frac{1}{\infty}\right)=0.$$

Таким чином, ряд збігається.

Помічаємо: досліджений знакочережний ряд збігається, а ряд, складений із модулів його членів як гармонійний ряд, є розбіжним.

4. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{n^2}=1-\frac{1}{4}+\frac{1}{9}-\frac{1}{16}+...+(-1)^{n+1}\frac{1}{n^2}+...\,.$ (15.3.8)

За аналогією з розв'язанням прикладу 1 отримуємо (*прокоментуйте*):

$$u_n\ge u_{n+1}:\ \frac{1}{n^2}\ge\frac{1}{(n+1)^2}\ \Rightarrow\ (n+1)^2>n^2\quad\forall n\in\mathbf{N};$$

$$\lim_{n\to\infty}u_n=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}=\left(\frac{1}{\infty}\right)=0.$$

Таким чином, ряд збігається.

Помічаємо: досліджений знакочережний ряд збігається і ряд, складений із модулів його членів як ряд обернених квадратів, теж збігається (на відміну від ряду, розглянутому в прикладі 3).

(*Обміркуйте*, чи можна за допомогою ознаки Лейбніца досліджувати на збіжність знакопереміжні ряди виду $U^{\mp}$.)

У світлі результатів дослідження рядів (15.3.7) і (15.3.8) розрізнюють *абсолютну* та *умовну* збіжність знакопочережних рядів.

Ряд, складений із абсолютних величин членів знакопереміжного ряду, називають **модульним рядом** (відносно до, або для, вихідного ряду).

Збіжний знакопереміжний ряд називається **абсолютно** (**умовно**) **збіжним**, якщо його модульний ряд збігається (розбігається).

Принципова, змістова, відмінність абсолютно й умовно збіжних рядів полягає у такому. Доведено, що:

1) переставляючи члени умовно збіжного ряду, можна отримати ряд, який збігається до будь-якої наперед заданої суми, і може навіть стати розбіжним;

2) довільна перестановка членів абсолютно збіжного ряду породжує ряд, який збігається до тієї ж суми.

Знакозмінні ряди: означення, ознаки збіжності

Числові ряди, знаки членів яких змінюються довільним чином, називаються **знакозмінними рядами**:

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n = u_1 + u_2 + u_3 + u_4 + \ldots + u_n + \ldots \ \ (U), \ \exists u_n \geq 0 \wedge \exists u_n \leq 0 . \qquad (15.3.9)$$

Знакозмінні ряди є узагальненням знакопереміжних рядів. Для них також вводять поняття *модульного ряду* й *абсолютної* (*умовної*) *збіжності*. Наведемо відповідні означення у символічному вигляді (*пропонуємо* дати словесне формулювання самостійно):

$$\left|U\right| \text{ – модульний ряд для } U \rightleftharpoons \sum_{n=1}^{\infty} \left|u_n\right| = \left|u_1\right| + \left|u_2\right| + \ldots + \left|u_n\right| + \ldots ;$$

$$\text{абсолютна збіжність} \rightleftharpoons U \rightarrowtail \wedge \left|U\right| \rightarrowtail ;$$

$$\text{умовна збіжність} \rightleftharpoons U \rightarrowtail \wedge \left|U\right| \leftarrowtail . \qquad (15.3.10)$$

Теорема 15.3.2 (*про зв'язок знакозмінного і модульного рядів*). Якщо модульний ряд $|U|$ збігається, то збігається і сам ряд U:

$$|U| \rightarrowtail \ \Rightarrow \ U \rightarrowtail . \qquad (15.3.11)$$

Д о в е д е н н я базується на властивості абсолютної величини числа: $a \le |a|$, або $|a| \ge a$, на арифметичних властивостях збіжних рядів (див. теорему 15.1.2) із залученням ознаки порівняння (див. (15.2.1)).

Складемо (утворимо) допоміжний ряд, рівний сумі рядів U і $|U|$, тобто ряд із загальним членом $(u_n + |u_n|)$. Члени цього ряду задовольняють умову:

$$0 \le \; u_n + |u_n| \; \le \; |u_n| + |u_n| = 2|u_n| \quad \forall n \ge 1,$$

тобто члени його невід'ємні і не перевищують членів збіжного ряду із загальним членом $2|u_n|$, а значить, допоміжний ряд збігається.

Ряд U є сумою допоміжного ряду і збіжного ряду із загальним членом $(-|u_n|)$:

$$\sum_{n=1}^{\infty}(u_n + |u_n|) + \sum_{n=1}^{\infty}(-|u_n|) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n \,,$$

і як сума двох збіжних рядів також збігається: $U \succ$.

Наслідки*:*

1) збіжність модульного ряду $|U|$ є **достатньою умовою** збіжності знакозмінного ряду U: $|U| \succ \;\Rightarrow\; U \succ$, але не є необхідною (*чому?*);

2) модуль суми знакозмінного ряду (s^U) не перевищує суми модульного ряду $(s^{|U|})$: $|s^U| \le s^{|U|}$.

За властивістю абсолютних величин модуль суми не перевищує суми модулів доданків, тому для часткових сум рядів маємо:

$$\left|\sum_{i=1}^{n} u_i\right| \le \sum_{i=1}^{n} |u_i|,$$

звідки і випливає справедливість твердження.

Якщо при дослідженні знакозмінного ряду установлена його збіжність, то з'ясовують, як він збігається – *абсолютно* чи *умовно*.

Оскільки модульні ряди є додатними рядами, то для установлення їхньої збіжності чи розбіжності можна застосовувати достатні умови збіжності додатних рядів (див. п. 15.2).

Наприклад, ряд із загальним членом $u_n = \dfrac{1}{2^n}\cos\dfrac{(2n-1)\pi}{4}$ є знакозмінним рядом, у якого за кожною парою від'ємних членів іде пара додатних членів:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}\cos\frac{(2n-1)\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2^2} - \frac{1}{2^3} + \frac{1}{2^4} + \frac{1}{2^5} - \frac{1}{2^6} - \frac{1}{2^7} + \ldots\right).$$

Його модульний ряд є добутком ряду геометричної прогресії з $b_1 = q = 0{,}5 < 1$ зі сталою $1/\sqrt{2}$:

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n} = \frac{\sqrt{2}}{2}\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{2^4} + \frac{1}{2^5} + \frac{1}{2^6} + \frac{1}{2^7} + \ldots\right).$$

Модульний ряд *збігається*, отже, за доведеною теоремою заданий ряд збігається і до того ж *абсолютно*. (Ознаку Лейбніца до заданого ряду застосувати не можна, *чому?*)

Оскільки модульні ряди є додатними рядами, то для дослідження знакозмінних рядів на абсолютну збіжність застосовують також ознаку Даламбера і ознаки Коші до їхніх модульних рядів.

Наприклад, проведемо дослідження на абсолютну збіжність ряду із загальним членом $u_n = (-1)^{[n/3]}\dfrac{(n-3)^2}{n!}$, де $[\cdot]$ символ цілої частини:

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{[n/3]}\frac{(n-3)^2}{n!} = \frac{4}{1!} + \frac{1}{2!} - \frac{0}{3!} - \frac{1}{4!} - \frac{4}{5!} + \frac{9}{6!} + \frac{16}{7!} + \frac{25}{8!} - \ldots.$$

Застосуємо ознаку Даламбера до модульного ряду:

$$\left(|u_n| = \frac{(n-3)^2}{n!} \Rightarrow |u_{n+1}| = \frac{(n-2)^2}{(n+1)!}\right):$$

$$\underset{(n>3)}{\rho_n} = \frac{|u_{n+1}|}{|u_n|} = \frac{(n-2)^2}{(n+1)!}\cdot\frac{n!}{(n-3)^2} = \frac{(n-2)^2}{(n+1)(n-3)^2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \rho = \lim_{n\to\infty}\rho_n = 0 < 1 \Rightarrow \left|U\right| \succ.$$

Модульний ряд збігається, а це тягне за собою абсолютну збіжність заданого ряду.

15.4. Функціональні ряди: основні поняття, дослідження на збіжність

Поняття „функціональний ряд" є узагальненням поняття „числовий ряд": елементи такого ряду не сталі, а змінні величини.

Множину функцій $u_n(x) = f_n(x) \ \forall n \in \mathbf{N}$, визначених і неперервних на деякому проміжку $\langle a, b \rangle \subseteq \mathbf{R}$, занумерованих за допомогою натуральних чисел і розташованих у порядку зростання номерів, називають **функціональною послідовністю**, або **послідовністю функцій**, а функції $u_n(x)$ – її **елементами**, або **членами**.

Функціональним рядом називають формальну суму, складену із членів послідовності, а її доданки – **членами ряду**:

$$u_1(x) + u_2(x) + ... + u_n(x) + ... = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) \quad (\widetilde{U}) \tag{15.4.1}$$

(„формальна" сума тому, що нескінченне число додавань здійснити неможливо!).

Функція $u_n(x) = f_n(x)$, яка дає можливість записати будь-який член ряду за його номером n, називається **загальним членом** ряду.

Подамо, *наприклад*, ряд із загальним членом $u_n(x) = \dfrac{1}{x^n + n}$:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{x^n + n} = \frac{1}{x+1} + \frac{1}{x^2+2} + \frac{1}{x^3+3} + ... + \frac{1}{x^n+n} + ... \tag{15.4.2}$$

Зрозуміло, що при певному (фіксованому) значенні аргументу x: $x = x_0$, функціональний ряд перетворюється у числовий ряд, який може збігатися чи розбігатися. Якщо у (15.4.2) покласти $x_0 = 0$ або $x_0 = 1$, то отримаємо (*прослідкуйте*) відповідно гармонійний ряд і його залишок після першого члена, які є розбіжними рядами. Якщо ж взяти, *наприклад*, $2 \le x < \infty$, то відповідні числові ряди будуть збіжними, бо їхні члени для всіх n не перевищують членів ряду геометричної прогресії $b_1 = q = 0{,}5$:

$$\forall n \in \mathbf{N} \quad \forall x \in [2, \infty): \quad \frac{1}{x^n + n} \le \frac{1}{x^n} \le \frac{1}{2^n}. \tag{15.4.3}$$

Функціональний ряд називається **збіжним** (**розбіжним**) у точці x_0, якщо відповідний числовий ряд збігається (розбігається).

Сукупність усіх значень змінної x, для яких ряд $\widetilde{U}$ збігається, називається **областю поточкової збіжності** функціонального ряду $D(\widetilde{U})$. **Сумою** збіжного ряду є функція $s = s(x)$, визначена на множині $D(s) = D(\widetilde{U})$.

Суму n перших членів ряду називають ***n*-ю** („енною") **частковою сумою** ряду:

$$s_n(x) = u_1(x) + u_2(x) + ... + u_n(x) = \sum_{i=1}^{n} u_i(x). \tag{15.4.4}$$

Щоб отримати наступну суму ряду $s_{n+1}(x)$, треба до $s_n(x)$ додати наступний член $u_{n+1}(x)$, тобто $s_{n+1}(x) = s_n(x) + u_{n+1}(x)$. Зокрема:

$$s_1(x) = u_1(x),\ \ s_2(x) = u_1(x) + u_2(x),\ \ s_3(x) = u_1(x) + u_2(x) + u_3(x),\ ... .$$

Часткові суми ряду, у свою чергу, складають послідовність функцій $\{s_n(x)\}$, визначених і неперервних на деякому проміжку $\langle a, b \rangle \subseteq \mathbf{R}$, яку називають **послідовністю часткових сум** ряду. У разі збіжності числових рядів в області $D(\widetilde{U})$, послідовність часткових сум збігається до суми ряду $s = s(x)$ з областю існування $D(s) = D(\widetilde{U})$:

$$\forall x \in D(\widetilde{U}):\ \lim_{n \to \infty} s_n(x) = s(x). \tag{15.4.5}$$

Теорема 15.4.1 (*про залишок збіжного функціонального ряду*). Якщо функціональний ряд збігається, то його залишок $r_n(x)$ для всіх x із області збіжності при необмеженому зростанні n прямує до нуля:

$$\forall x \in D(\widetilde{U}):\ \widetilde{U} \succ\!\!\succ \ \Rightarrow\ \lim_{n \to \infty} r_n(x) = 0. \tag{15.4.6}$$

Д о в е д е н н я. Справедливість твердження випливає з означень поточкової збіжності ряду і залишку ряду.

Дійсно, $s(x)=s_n(x)+r_n(x)$, але $s_n(x)\to s(x)$, $n\to\infty$, тоді:

$$\lim_{n\to\infty} r_n(x)=\lim_{n\to\infty}\left(s(x)-s_n(x)\right)=s(x)-s(x)=0.$$

Зауваження. За означенням границі функції рівність $\lim\limits_{n\to\infty} r_n(x)=0$ з урахуванням поняття поточкової збіжності функціонального ряду слід розуміти так: для кожного фіксованого $x=x_0\in D(s)$ відповідний числовий ряд:

$$u_1(x_0)+u_2(x_0)+....+u_n(x_0)+...=\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x_0), \tag{15.4.7}$$

збігається, а значить для будь-якого $\varepsilon>0$ існує такий номер $N=N(\varepsilon)$, що для всіх $n>N$ виконується нерівність

$$|\,r_n(x_0)|=|\,s(x_0)-s_n(x_0)|<\varepsilon.$$

Виникає питання, чи існує для кожного $\varepsilon>0$ такий *незалежний від* x номер N, що нерівність

$$|\,r_n(x)|=|\,s(x)-s_n(x)|<\varepsilon \tag{15.4.8}$$

виконується *відразу для всіх* x із $D(s)$.

Виявляється, що для одних рядів такий номер існує, для інших – ні. Тому стосовно функціональних рядів розрізнюють два типи збіжності – *рівномірну* і *нерівномірну*.

Збіжний функціональний ряд називається **рівномірно збіжним** на $[a,b]$, якщо для будь-якого $\varepsilon>0$ існує такий номер $N=N(\varepsilon)$, після якого $(\forall n>N)$ модуль залишку ряду $r_n(x)$ менше ε для всіх x із $[a,b]$:

$$\begin{aligned}&\tilde{U} \rightarrowtail \text{рівномірно} \rightleftharpoons \forall\varepsilon>0\ \exists N=N(\varepsilon):\\ &\forall n>N\quad |\,r_n(x)|<\varepsilon\quad \forall x\in[a,b].\end{aligned} \tag{15.4.9}$$

У противному випадку кажуть, що збіжний ряд $\tilde{U}$ **збігається нерівномірно** (*запишіть* означення такого ряду у символах).

Приклади $\Big($домовимось надалі замість $\sum\limits_{n=1}^{\infty}$ писати просто $\sum\Big)$:

1. Ряд геометричної прогресії $\sum x^n$ збігається в інтервалі $(-1,1)$. У ньому залишок ряду після n-го члена такий (*переконайтеся*):

$$r_n(x)=\frac{x^{n+1}}{1-x}\ \ \forall\, x\in(-1,1).$$

Зафіксуємо n і обчислимо односторонні границі залишку при наближенні до -1 справа і до $+1$ зліва (рис. 15.4.1):

$$\lim_{x\to-1+0}\left|\frac{x^{n+1}}{1-x}\right|=\left|\frac{(-1+0)^{n+1}}{1-(-1+0)}\right|=\frac{1}{2};\ \ \lim_{x\to1-0}\left|\frac{x^{n+1}}{1-x}\right|=\left|\frac{(1-0)^{n+1}}{1-(1-0)}\right|=\frac{1}{0}=\infty.$$

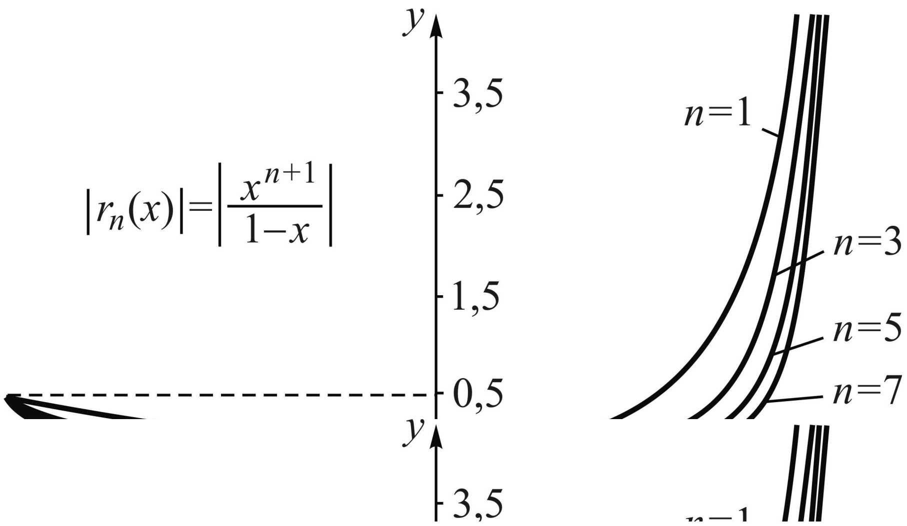


Рис. 15.4.1. **Нерівномірна збіжність ряду**

Обидві границі показують, що при одному і тому ж номері n неможливо забезпечити нерівність $|r_n(x)|<\varepsilon$ для всіх x із $(-1,1)$ відразу при довільному $\varepsilon>0$; зокрема це неможливо зробити якщо $\varepsilon<1/2$ (див. рис. 15.4.1).

2. Розглянемо знакопереміжний ряд $\sum\frac{(-1)^{n+1}}{n}x^n$ на відрізку $[0,1]$. Згідно з наслідком 2) із теореми 15.3.1 (*достатня ознака збіжності рядів* $U^{\pm}$) залишок $R_{U^{\pm}}$ збіжного знакопереміжного ряду після n-го члена має знак свого першого члена і не перевищує його за модулем:

$$|\,r_n(x)\,| \le \left|\frac{x^{n+1}}{n+1}\right|, \text{ а оскільки } x \in [0,1], \text{ то } |\,r_n(x)\,| \le \frac{1}{n+1}.$$

Це дає можливість за заданим довільно $\varepsilon > 0$ знайти для всіх x із $[0,1]$ номер N, починаючи з якого $|\,r_n(x)\,| < \varepsilon$ (рис. 15.4.2):

$$\frac{1}{n+1} < \varepsilon \;\Rightarrow\; n+1 > \frac{1}{\varepsilon} \;\Rightarrow\; n > \frac{1}{\varepsilon} - 1 \;\Rightarrow\; N = \left[\frac{1}{\varepsilon} - 1\right] + 1.$$

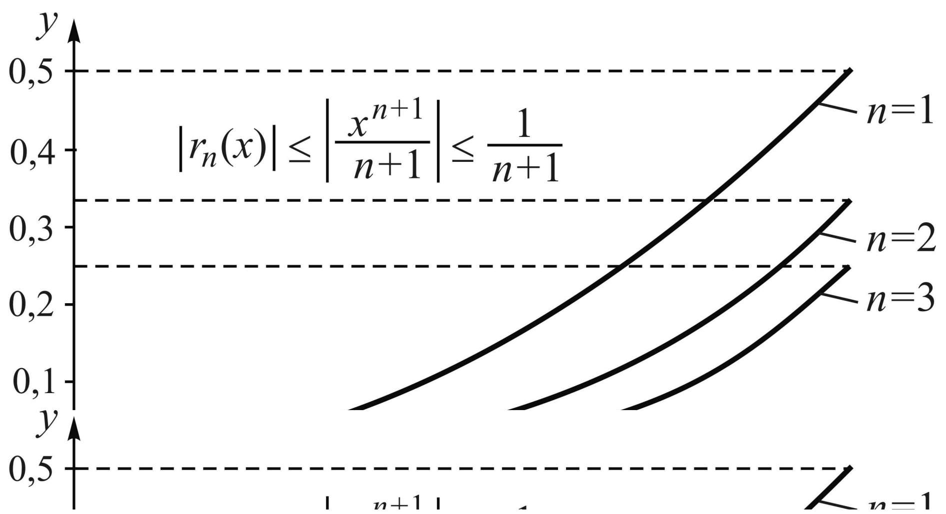


Рис. 15.4.2. **Рівномірна збіжність ряду**

Дослідження $\tilde{U}$ на збіжність можна проводити за допомогою ознак збіжності числових рядів, бо поточкова збіжність функціонального ряду означає збіжність числового ряду при заданому x із $D(\tilde{U})$.

Наприклад, дослідимо ряд $\sum \frac{x^n}{n}$ за допомогою ознаки Коші радикальної:

$$\left(|\,u_n(x)\,| = \left|\frac{x^n}{n}\right| \Rightarrow |\,\rho_n(x)\,| = \left|\frac{x}{\sqrt[n]{n}}\right|\right) \Rightarrow |\,\rho(x)\,| = |\,x\,| \cdot \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{n}} = |\,x\,|.$$

Область (інтервал) збіжності знаходимо за умови, що $|\,\rho(x)\,|$ повинне бути менше одиниці, тобто при $|\,x\,| < 1$ ряд збігається, тоді при $|\,x\,| \ge 1$ ряд розбігається (*обґрунтуйте* розбіжність ряду при $x = 1$).

Дослідження $\widetilde{U}$ на рівномірну збіжність здійснюється за допомогою інших, спеціально розроблених, ознак; однією із них є **ознака Вейєрштрасса** (за ім'ям знаного німецького математика Карла Вейєрштрасса (1815 – 1897)).

Нехай U^+: $c_n = \varphi(n)$ – додатний числовий ряд із сумою σ у разі збіжності, $\left|\widetilde{U}\right|$ – модульний ряд для функціонального ряду $\widetilde{U}$.

Теорема 15.4.2 (*достатня ознака рівномірної збіжності функціонального ряду*). Якщо ряд U^+ збігається, а члени модульного ряду $\left|\widetilde{U}\right|$ для всіх значень x із $[a,b]$ не перевищують членів ряду U^+, то функціональний ряд $\widetilde{U}$ збігається рівномірно:

$$U^+ \succ \wedge \left(\left| u_n(x) \right| \le c_n \;\; \forall n \ge 1 \;\; \forall x \in [a,b] \right) \Rightarrow \widetilde{U} \succ \text{рівномірно.} \qquad (15.4.10)$$

Д о в е д е н н я спирається на ознаку порівняння числових рядів з урахуванням означень поточкової збіжності ряду і залишку ряду.

Дійсно, із умов теореми і ознаки порівняння (15.2.1) випливає абсолютна збіжність ряду $\widetilde{U}$ $\forall x \in [a,b]$.

Для збіжного ряду U^+ маємо: $\sigma = \sigma_n + r_n^+$, де σ_n $\left(r_n^+\right)$ – часткова сума (залишок) ряду, тоді:

$$r_n^+ = \sigma - \sigma_n \;\Rightarrow\; \lim_{n \to \infty} r_n^+ = \lim_{n \to \infty} (\sigma - \sigma_n) = 0.$$

Це означає, що для будь-якого $\varepsilon > 0$ існує номер $N = N(\varepsilon)$, після якого, тобто $\forall n > N$, залишок ряду r_n^+ менше ε: $r_n^+ < \varepsilon$.

Залишок ряду $\widetilde{U}$ за умови $\left| u_n(x) \right| \le c_n \;\; \forall n \ge 1 \, \forall x \in [a,b]$ задовольняє нерівність

$$\left| r_n(x) \right| = \left| \sum_{k=n+1}^{\infty} u_k(x) \right| \le \sum_{k=n+1}^{\infty} \left| u_k(x) \right| \le \sum_{k=n+1}^{\infty} c_k = r_n^+ < \varepsilon \quad \forall x \in [a,b],$$

а це і означає, що функціональний ряд збігається рівномірно.

Ознака Вейєрштрасса справедлива для будь-якого числового проміжку $\langle a,b \rangle$, як скінченного, так і нескінченного.

Функціональний ряд $\widetilde{U}$, для якого існує такий додатний збіжний числовий ряд U^+: $c_n = \varphi(n)$, що для всіх значень x із $[a,b]$ члени модульного для $\widetilde{U}$ ряду не перевищують членів ряду U^+, називається **мажорованим** на проміжку $[a,b]$:

$$\widetilde{U} \text{ – мажорований ряд} \rightleftharpoons \forall x \in [a,b]\ \exists U^+ : |u_n(x)| \le c_n\ \forall n \in \mathbf{N}, \quad (15.4.11)$$

при цьому ряд U^+ називають **мажорантою** ряду $\widetilde{U}$.

Наведений вище ряд (15.4.2) є мажорованим на півсегменті $[2,\infty)$, його мажоранта – ряд геометричної прогресії: $c_n = 1/2^n$.

Зауваження. Із означення мажорованого ряду випливає його *абсолютна збіжність* на проміжку мажорування. Мажорованість ряду $\widetilde{U}$ є достатньою умовою його рівномірної збіжності, але *не є необхідною*, тобто існують рівномірно збіжні ряди, у яких немає мажоранти.

Властивості рівномірно збіжних рядів приймемо без доведення.

1^0 (*про неперервність суми ряду*). Якщо функції $u_n(x)$ – члени ряду – неперервні на відрізку $[a,b]$: $u_n(x) \in \mathbf{C}([a,b])$, і ряд на ньому збігається рівномірно, то сума ряду є неперервною на $[a,b]$ функцією:

$$\forall x \in [a,b]: \begin{array}{l} 1)\ \forall n \ge 1:\ u_n(x) \in \mathbf{C}; \\ 2)\ \widetilde{U} \succ\!\!\!\rightarrow \text{рівномірно} \end{array} \Rightarrow s(x) = \sum u_n(x) \in \mathbf{C}. \quad (15.4.12)$$

2^0 (*про почленне диференціювання рядів*). Якщо:

1) на відрізку $[a,b]$ члени функціонального ряду $\widetilde{U}$ неперервно диференційовні: $u_n(x) \in \mathbf{C}^{(1)}([a,b])$;

2) існує точка із $[a,b]$, у якій ряд збігається;

3) ряд $\widetilde{U}'$, складений із похідних членів функціонального ряду, є рівномірно збіжним,

то на $[a,b]$: сума ряду $\widetilde{U}$ неперервно диференційовна; ряд можна почленно диференціювати, при цьому сума вислідного ряду $\sigma(x)$ дорівнює похідній суми вихідного ряду $s(x)$:

$$\left.\begin{array}{l} 1)\ \forall n \ge 1:\ u_n(x) \in \mathbf{C}^{(1)}, \\ 2)\ \exists x_0 \in [a,b]:\ \sum u_n(x_0) \succ, \\ 3)\ \widetilde{U}' \succ \text{ рівномірно на } [a,b] \end{array}\right] \Rightarrow \left[\begin{array}{l} s(x) = \sum u_n(x) \in \mathbf{C}^{(1)}, \\ \sigma(x) = s'(x) = \sum u_n'(x). \end{array}\right. \qquad (15.4.13)$$

Легко показати, *наприклад*, що ряд $\sum \frac{x^n}{n}$ диференційовний на відрізку $[-2/3,\ 2/3]$: члени ряду – неперервно диференційовні функції на $\mathbf{R}$; у точці $x_0 = 1/2$ ряд збігається, оскільки члени відповідного числового ряду за модулем не перевищують членів збіжної геометричної прогресії $\frac{1}{n2^n} \le \frac{1}{2^n}$; ряд із похідних $u_n'(x) = x^{n-1}$ мажорується рядом $\sum \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}$.

Отже, сума ряду $s(x)$ – неперервно диференційовна функція і його можна почленно диференціювати:

$$\widetilde{U}':\ \sigma(x) = s'(x) = \sum x^{n-1} = 1 + x + x^2 + \ldots + x^{n-1} + \ldots \Rightarrow \sigma(x) = \frac{1}{1-x}$$

– сума ряду геометричної прогресії з першим членом $b_1 = 1$ і знаменником $q = x$, $|x| \le 2/3 < 1$. Проміжок почленного диференціювання можна розширити до інтервалу $(-1,1)$ (*на якій підставі?*).

3^0 (*про почленне інтегрування рядів*). Рівномірно збіжний на відрізку $[a,b]$ ряд можна почленно інтегрувати, при цьому сума вислідного ряду $\sigma(x)$ на $\forall[\alpha, x] \subseteq [a,b]$ дорівнює ВІ від суми вихідного ряду $s(x)$:

$$\forall x \in [a,b]:\ \widetilde{U} \succ \text{ рівномірно } \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \int\limits_\alpha^x \sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(t)\,dt = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \int\limits_\alpha^x u_n(t)\,dt, \\ \sigma(x) = \int\limits_\alpha^x s(t)\,dt. \end{array}\right. \qquad (15.4.14)$$

Якщо розглядати проміжок $[\alpha, \beta] \subseteq [a,b]$, то отримаємо збіжний числовий ряд з відповідною сумою $\sigma = \int\limits_\alpha^\beta s(x)\,dx$.

Повертаючись до дослідження ряду $\sum \frac{x^n}{n}$, за сумою ряду $\tilde{U}'$ (яку легко вдалося установити) інтегруванням знайдемо суму вихідного ряду на сегменті $[\alpha, x] \subseteq [-2/3, 2/3]$:

$$s(x) = \int_{\alpha}^{x} s'(t)dt = \int_{\alpha}^{x} \frac{1}{1-t} dt = -\ln|1-t| \,\Big\|_{\alpha}^{x} = -\ln\left|\frac{1-x}{1-\alpha}\right|. \qquad (15.4.15)$$

Якщо покласти $\alpha = 0$, то отримаємо функцію $s(x) = -\ln|1-x|$, яка є сумою ряду на відрізку $[0, x]$, і тоді:

$$\ln|1-x| = \sum \frac{x^n}{n} = -\left(x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \ldots + \frac{x^n}{n} + \ldots\right). \qquad (15.4.16)$$

Якщо брати послідовно $x = k/(k+1)$, де $k = 1, 2, \ldots$, тобто інтегрувати на відрізках $[0, k/(k+1)]$, то із (15.4.16) отримаємо зображення натуральних логарифмів натуральних чисел у вигляді рядів.

Наприклад:

$$k = 1: \quad s = \ln 2 = \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 2^2} + \frac{1}{3 \cdot 2^3} + \ldots + \frac{1}{n \cdot 2^n} + \ldots;$$
$$k = 2: \quad s = \ln 3 = \frac{1}{1 \cdot 3} + \frac{1}{2 \cdot 3^2} + \frac{1}{3 \cdot 3^3} + \ldots + \frac{1}{n \cdot 3^n} + \ldots.$$

Таке подання дозволяє обчислити $\ln n \;\; \forall n \in \mathbf{N}$ з будь-якою точністю, вибираючи відповідну часткову суму; як це робиться, буде розглянуто нижче у застосуваннях рядів.

15.5. Степеневі ряди, ряди Тейлора – Маклорена

Степеневі ряди: означення основних понять, область збіжності

Нехай $\{a_n\}$, $n \geq 0$ – деяка послідовність дійсних чисел, $\forall x \in \mathbf{R}$, x_0 – фіксована точка із $\mathbf{R}$. Функціональний ряд називають **степеневим**, якщо його елементами є степеневі функції з показниками степеня n із розширеної множини натуральних чисел: $\mathbf{N} \cup \{0\}$.

Розрізнюють степеневий ряд **за степенями змінної x**:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n + \ldots, \tag{15.5.1}$$

і степеневий ряд **за степенями різниці $(x - x_0)$**:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n = a_0 + a_1(x-x_0) + a_2(x-x_0)^2 + \ldots + a_n(x-x_0)^n + \ldots; \tag{15.5.2}$$

числа a_0, a_1, a_2, …, a_n, … називають **коефіцієнтами** (членів) ряду.

Заміною $t = x - x_0$ ряд (15.5.2) можна звести до вивчення ряду за степенями t, тому звичайно вивчають ряд (15.5.1), який позначимо через $U(x)$. Зазначимо, що частковими сумами ряду $U(x)$ є многочлени, ряд (з будь-якими коефіцієнтами a_n) збігається при $x = 0$ (*до якої суми?*).

Степеневі ряди є найпростішими функціональними рядами, для них легко установити область збіжності, і властивості їх сум особливо прості.

Задача 15.5.1 (*про область абсолютної збіжності*). Знайти область абсолютної збіжності ряду $U(x)$.

Р о з в' я з а н н я задачі проведемо за допомогою достатніх ознак збіжності числових рядів, бо поточкова збіжність функціонального ряду означає збіжність числового ряду при заданому x.

1-й спосіб. *Складемо* модульний ряд $|U(x)|$ і застосуємо достатню ознаку Коші радикальну, ураховуючи, що x незалежна від n змінна:

$$\rho_n(x) = \sqrt[n]{|a_n x^n|} = \sqrt[n]{|a_n|} \cdot |x| \;\Rightarrow\; \rho(x) = |x| \cdot \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}.$$

Розв'язуємо нерівність $\rho(x) < 1$, тим самим *знаходимо* область абсолютної збіжності ряду:

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} \cdot |x| < 1 \Rightarrow |x| < \frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}} \Rightarrow -\frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}} < x < \frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}}.$$

Число $R = 1 \Big/ \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}$ називається **радіусом абсолютної збіжності** ряду, а проміжок $(-R, R)$ – **інтервалом абсолютної збіжності**.

2-й спосіб. *Складемо* модульний ряд $\left|U(x)\right|$ і застосуємо достатню ознаку Даламбера, ураховуючи, що x незалежна від n змінна:

$$\rho_n(x)=\frac{\left|a_{n+1}x^{n+1}\right|}{\left|a_n x^n\right|}=\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|\cdot\left|x\right| \;\Rightarrow\; \rho(x)=\left|x\right|\cdot\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|.$$

Розв'язуємо нерівність $\rho(x)<1$, тим самим *знаходимо* область абсолютної збіжності ряду:

$$\left|x\right|\cdot\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|<1 \Rightarrow \left|x\right|<\frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right|} \Rightarrow \left|x\right|<\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| \Rightarrow x\in(-R,R),$$

де $R=\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{a_n}{a_{n+1}}\right|$ – **радіус абсолютної збіжності** ряду.

Висновки:

областю абсолютної збіжності ряду $U(x)$ є інтервал з центром у точці 0, тобто симетричний відносно точки $x=0$: $x\in(-R,R)$;

степеневий ряд $U(x)$ розбігається за межами інтервалу абсолютної збіжності (рис. 15.5.1):

$$x<-R \vee x>R:\ U(x)\lessdot \quad (\textit{чому?}).$$

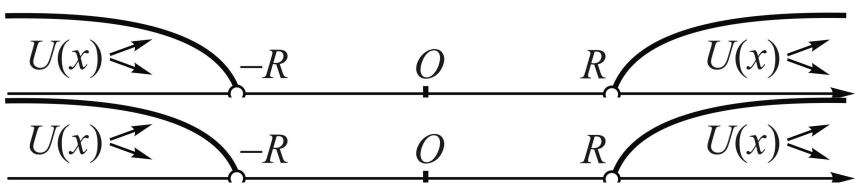


Рис. 15.5.1. **Області абсолютної збіжності і розбіжності ряду**

Зауваження:

для установлення **всієї області збіжності** степеневого ряду треба дослідити поведінку числових рядів, що відповідають точкам $x=R$ і $x=-R$, тобто на кінцях інтервалу абсолютної збіжності. *Наголошуємо*: *застосовувати при цьому ознаки Даламбера і Коші радикальну немає сенсу* (*чому?*);

якщо члени ряду мають вигляд: $u_n(x)=a_n x^{\varphi(n)}$, тобто показники степеня є функціями від номера члену n, то для відшукання радіуса абсолютної збіжності знайдені вище формули

$$R=\frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}},\quad R=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|, \tag{15.5.3}$$

неприйнятні; необхідне окреме для кожного випадку дослідження, його результат залежить від індивідуальних особливостей конкретного ряду.

Приклади. Знайти область збіжності заданих степеневих рядів:

1. $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(n-1)^n\cdot x^n=1+0\cdot x^1+1\cdot x^2+2\cdot x^3+\ldots$.

За ознакою Коші радикальною маємо:

$$R=\frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}}\ \Rightarrow\ \left|a_n=(n-1)^n\right|\ \Rightarrow\ R=\frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty}|n-1|}=\frac{1}{\infty}=0.$$

Висновок: існують ряди, які збігаються лише в одній точці: $x=0$.

2. $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}=1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\ldots$. (15.5.4)

За ознакою Даламбера маємо:

$$R=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|\ \Rightarrow\ R=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n!}\cdot\frac{(n+1)!}{1}=\lim_{n\to\infty}(n+1)=+\infty.$$

Висновок: існують ряди, які збігаються на усій числовій осі: $R=\infty$.

3. $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{x}{\sqrt[3]{2}}\right)^{2n+1}=\frac{x}{\sqrt[3]{2}}-\frac{x^3}{\sqrt[3]{8}}+\frac{x^5}{\sqrt[3]{32}}+\ldots$.

Складемо модульний ряд $|U(x)|$ і застосуємо достатню ознаку Даламбера, ураховуючи, що x незалежна від n змінна:

$$\rho_n(x)=\left|\frac{u_{n+1}(x)}{u_n(x)}\right|\ \Rightarrow\ \rho_n(x)=\left|\left(\frac{x}{\sqrt[3]{2}}\right)^{2n+3}\cdot\left(\frac{\sqrt[3]{2}}{x}\right)^{2n+1}\right|=\frac{1}{\sqrt[3]{4}}\cdot x^2\ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \ \rho(x) = x^2 \cdot \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{4}} \ \Rightarrow \ \rho(x) = \frac{x^2}{\sqrt[3]{4}} \ .$$

Розв'язуємо нерівність $\rho(x) < 1$ і *знаходимо* радіус абсолютної збіжності ряду:

$$x^2 < \sqrt[3]{4} \ \Rightarrow \ |\,x\,| < \sqrt[3]{2} \ \Rightarrow \ -\sqrt[3]{2} < x < \sqrt[3]{2} \ \Rightarrow \ R = \sqrt[3]{2}\,.$$

Досліджуємо ряд на кінцях інтервалу абсолютної збіжності:

$$x = \sqrt[3]{2}: \ \ \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n 1^{2n+1} = 1 - 1 + 1 - 1 + \ldots + (-1)^n + \ldots \Rightarrow \ U(x) \prec;$$

$$x = -\sqrt[3]{2}: \ \ \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{3n-1} = -1 + 1 - 1 + \ldots + (-1)^{3n-1} + \ldots \Rightarrow \ U(x) \prec.$$

(*Обґрунтуйте* розбіжність ряду в точках $x = \pm R = \pm\sqrt[3]{2}$.)

Областю збіжності ряду є інтервал абсолютної збіжності: $\left(-\sqrt[3]{2}, \sqrt[3]{2}\right)$.

Рівномірна збіжність. Властивості степеневих рядів

Область рівномірної збіжності степеневого ряду $U(x)$ легко визначається за його інтервалом абсолютної збіжності.

Теорема 15.5.1 (*про рівномірну збіжність степеневого ряду*). Якщо ряд $U(x)$ збігається (абсолютно) на інтервалі $(-R, R)$, то він збігається рівномірно на будь-якому відрізку $[a,b]$, що включається в нього:

$$U(x) \succ \text{абсолютно } \forall x \in (-R, R) \ \Rightarrow \ \forall [a,b] \subset (-R,\ R):$$
$$U(x) \succ \text{рівномірно.} \qquad (15.5.5)$$

Д о в е д е н н я базується на теоремі Вейєрштрасса (див. (15.4.10)). Покажемо, що для ряду $U(x)$ на $[a,b]$ існує мажоранта. Дійсно, якщо відрізок $[a,b]$ лежить всередині інтервалу $(-R, R)$, то у точці $|\,b\,|$ числовий додатний ряд $U(|\,b\,|)$: $|\,a_0| + |\,a_1 b\,| + \left|\,a_2 b^2\right| + \ldots + \left|\,a_n b^n\right| + \ldots$, збіжний.

Але для всіх $x<|b|$ члени ряду $U(x)$ на $[a,b]$ не перевищують членів ряду $U(|b|)$: $a_n x^n \le |a_n b^n|$ (рис. 15.5.2).

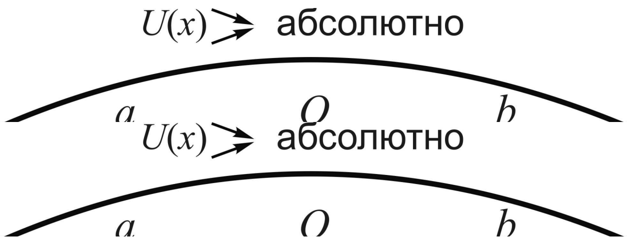


Рис. 15.5.2. **До рівномірної збіжності ряду на $[a,b]\subset(-R,R)$**

Отже, $U(|b|)$ – мажоранта для $U(x)$ на $[a,b]$. За достатньою ознакою рівномірної збіжності функціональних рядів (ознакою Вейєрштрасса) отримуємо справедливість теореми.

Зауваження:

збіжність степеневого ряду на всьому інтервалі збіжності $(-R,R)$ може бути і нерівномірною. Це було показано для ряду геометричної прогресії $\sum x^n$ на інтервалі $(-1,1)$ (див. рис. 15.4.1);

специфічна особливість степеневого ряду – диференційовність його членів довільне число разів на усій числовій осі, а значить, і на інтервалі збіжності $(-R,R)$. Загалом функцію $y=f(x)$, яка у деякій точці (на інтервалі) має похідну будь-якого порядку, називають **нескінченно диференційовною** в цій точці (на цьому інтервалі).

Властивості збіжних і рівномірно збіжних степеневих рядів випливають із установлених вище властивостей функціональних рядів з урахуванням щойно доведеної теореми. В інтервалі збіжності $(-R,R)$:

1^0 сума степеневого ряду – нескінченно диференційовна функція;

2^0 степеневий ряд можна почленно диференціювати довільне число разів, причому вислідні ряди збігаються у тому ж інтервалі; похідні від суми вихідного ряду можна одержати за допомогою його почленного диференціювання;

3^0 степеневий ряд можна почленно інтегрувати (звичайно беруть проміжок $[0,x]\subset(-R,R)$, отримуючи ряд з тим же радіусом збіжності.

У світлі властивостей 1^0, 2^0 наведемо, як наслідок, ще одну властивість суми степеневого ряду.

Теорема 15.5.2 (*про відновлення значень суми степеневого ряду*). Значення суми степеневого ряду на інтервалі збіжності $(-R, R)$ відновлюються за її вартостями і вартостями її похідних в одній точці $(x=0)$:

$$s(x)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \;\Rightarrow\; \forall n \ge 0:\; a_n = \frac{s^{(n)}(0)}{n!}. \qquad (15.5.6)$$

Д о в е д е н н я. Запишемо ряд у розгорнутому вигляді і здиференціюємо його почленно n разів:

$$s(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+\ldots+a_nx^n+\ldots \;\Rightarrow\; a_0=s(0);$$

$$s'(x)=1\cdot a_1+2\cdot a_2x+3\cdot a_3x^2+\ldots+n\cdot a_nx^{n-1}+\ldots \;\Rightarrow\; a_1=\frac{s'(0)}{1!};$$

$$s''(x)=2\cdot a_2+2\cdot 3\cdot a_3x+\ldots+(n-1)\cdot n\cdot a_nx^{n-1}+\ldots \;\Rightarrow\; a_2=\frac{s''(0)}{2!};$$

…………………………………………………………………………..

$$s^{(n)}(x)=1\cdot 2\cdot\ldots\cdot(n-1)\cdot n\cdot a_n+(n+1)!\cdot a_{n+1}x+\ldots \;\Rightarrow\; a_n=\frac{s^{(n)}(0)}{n!};$$

…………………………………………………………………………..

Таким чином, можна записати:

$$s(x)=s(0)+\frac{s'(0)}{1!}x+\frac{s''(0)}{2!}x^2+\ldots+\frac{s^{(n)}(0)}{n!}x^n+\ldots=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{s^{(n)}(0)}{n!}x^n,$$

де $s^{(0)}(x)=s(x)$, а $0!=1$.

Відзначимо, що отримані результати для степеневих рядів за степенями змінної x (15.5.1) справедливі і для рядів за степенями різниці $(x-x_0)$ (15.5.2) у відповідних інтервалах збіжності: (x_0-R, x_0+R).

(*Який вигляд* має (15.5.6) для рядів за степенями різниці $(x-x_0)$?)

Ряди Тейлора і Маклорена. Основні розклади

Сума будь-якого степеневого ряду є деякою функцією, визначеною всередині його інтервалу збіжності. У зв'язку з цим виникають дві задачі:

1) *за заданим рядом* знайти функцію $s(x)$, яка є його сумою в області збіжності; таку задачу називають **підсумовуванням** збіжного ряду;

2) *за заданою функцією* $f(x)$ знайти збіжний ряд (того чи іншого типу), сума якого в області збіжності дорівнювала б заданій функції; цю задачу називають **розвиненням** (**розкладанням**) функції в ряд, а результат розвинення – **розкладом** функції в ряд.

У другій задачі згідно із властивістю суми степеневого ряду (1^0) $f(x)$ повинна бути нескінченно диференційовною функцією, або, кажуть, функцією класу $\mathbf{C}^{(\infty)}$: $f(x)\in \mathbf{C}^{(\infty)}$. Ця умова є *необхідною*, але, як виявляється, не є достатньою.

Степеневий ряд виду:

$$f(x_0)+\frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\ldots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+\ldots=$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n,\ x\in(x_0-R,x_0+R), \qquad (15.5.7)$$

називається **рядом Тейлора** (для) функції $f(x)$ в околі точки x_0.

Зокрема, при $x_0=0$ ряд Тейлора називають **рядом Маклорена**:

$$f(0)+\frac{f'(0)}{1!}x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\ldots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n+\ldots=$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n,\quad x\in(-R,R). \qquad (15.5.8)$$

Зауваження: ряди (15.5.8), (15.5.7) інакше означаються як степеневі ряди, коефіцієнти яких обчислюються відповідно за формулами:

$$a_n=\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!},\quad a_n=\frac{f^{(n)}(0)}{n!},\quad n=0,1,2,\ldots; \qquad (15.5.9)$$

у світлі теореми 15.5.2 можна стверджувати, що *будь-який степеневий ряд є рядом Тейлора своєї суми.*

Частковою сумою $s_n(x)$ ряду Тейлора, як і будь-якого іншого ряду, називають суму n перших його членів, а **залишком ряду** після n-го члена – різницю $r_n(x)=f(x)-s_n(x)$.

Теорема 15.5.3 (*достатня умова збіжності ряду Тейлора*). Якщо на інтервалі $(x_0-R,\, x_0+R)$ послідовність залишків ряду $\{r_n(x)\}$ після n-го члена при необмеженому зростанні n прямує до нуля, то ряд Тейлора для $f(x)$ в околі точки x_0 збігається до функції $f(x)$:

$$\left.\begin{array}{l}\forall\, x\in(x_0-R,\ x_0+R):\\ \lim\limits_{n\to\infty} r_n(x)=0\end{array}\right] \Rightarrow\ f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n. \qquad (15.5.10)$$

Д о в е д е н н я. Із означення залишку ряду $f(x)=r_n(x)+s_n(x)$. Перейдемо до границі при $n\to\infty$ у лівій і правій частинах рівності:

$$\lim_{n\to\infty} f(x)=\lim_{n\to\infty} r_n(x)+\lim_{n\to\infty} s_n(x)\ \Rightarrow\ f(x)=\lim_{n\to\infty} s_n(x),$$

а це і означає, що сума ряду дорівнює $f(x)$.

На жаль, теорема 15.5.3 не дає відповіді на запитання, як перевірити здійсненність чи нездійсненність достатньої умови.

Приймемо без доведення теорему, яка надає конструктивну можливість розв’язання цього запитання.

Теорема 15.5.4 (*про умови розкладності функції в ряд Тейлора*). Якщо на інтервалі (x_0-R, x_0+R):

1) функція $f(x)$ нескінченно диференційовна;

2) існує стала C, якою обмежені модулі її похідних,

то сумою ряду Тейлора для $f(x)$ в околі точки x_0 є функція $f(x)$, тобто виконується достатня умова збіжності:

$$\left.\begin{array}{l}\forall x\in(x_0-R, x_0+R):\\ 1)\ f(x)\in \mathbf{C}^{(\infty)},\\ 2)\forall n\ge 1\ \exists C\in \mathbf{R}:\ \left|f^{(n)}(x)\right|\le C\end{array}\right]\Rightarrow\ \begin{array}{c}\forall x\in(x_0-R, x_0+R):\\ \lim\limits_{n\to\infty} r_n(x)=0.\end{array} \qquad (15.5.11)$$

Як ***наслідок*** з теореми 15.5.4 установлено оцінку абсолютної похибки, яка виникає при заміні ряду його n-ю частковою сумою:

$$\left|f^{(n)}(x)\right|\le C\ \Rightarrow\ \delta_n(x)\le\frac{C}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}. \qquad (15.5.12)$$

Приклад. Здійснимо розклад функції $y=e^x$ в околі точки $x_0=0$, тобто знайдемо для неї ряд Маклорена, і переконаємося в тому, що він збігається до функції e^x на усій числовій осі.

Згідно з (15.5.9) коефіцієнти ряду визначаються за формулою:

$$a_n=\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}\ \Rightarrow\ \left|\forall n\ge 0:\ y^{(n)}(0)=e^0=1\right|\ \Rightarrow\ a_n=\frac{1}{n!},$$ тому:

$$e^x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}=1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+...+\frac{x^n}{n!}+...$$ (*порівняйте* з (15.5.4)).

Виберемо інтервал $(-a,a)$, де a – довільне дійсне число. Для всіх x із нього $e^x\le e^a=C$ (*чому?*). Отже, $\left|f^{(n)}(x)\right|\le C$ і $\lim\limits_{n\to\infty} r_n(x)=0$. Оскільки a – довільна стала, то функція e^x розвивається в ряд Маклорена на всій числовій осі.

Зауваження. Такий самий результат отримано вище (див. (15.5.4)) за допомогою ознаки Даламбера до вивчення рядів Тейлора. Теорема 15.5.4 дає своєрідний метод розкладу функцій у ряди Тейлора. Проте умови теореми не завжди виконуються або не можуть так просто перевірятися, як у розглянутому прикладі. На практиці більш ефективним підходом до отримання розкладів є використання властивостей степеневих рядів з урахуванням того, що *будь-який степеневий ряд є рядом Тейлора своєї суми* (див. теорему 15.5.2). Наведемо ілюстративні *приклади*.

1. Відштовхуючись від функції $f(x)=\dfrac{1}{1-x}$ як суми нескінченно спадної геометричної прогресії при $|x|<1$ почленним інтегруванням отримуємо степеневий ряд з інтервалом збіжності $(-1,1)$ (див. (15.4.16)):

$$\ln(1-x)=-\sum\frac{x^n}{n}=-\left(x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}+...+\frac{x^n}{n}+...\right),\ x\in(-1,\,1). \qquad (15.5.13)$$

Аналогічним чином почленне інтегрування функції $f(x)=\dfrac{1}{1+x}$ як суми нескінченно спадної геометричної прогресії при $|x|<1$ дає розклад функції $\ln(1+x)$:

$$\ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\ldots=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{x^n}{n},\quad x\in(-1,\,1). \tag{15.5.14}$$

Відзначимо, що область збіжності вислідного ряду може бути ширше інтервалу збіжності вихідного ряду: вислідний ряд може збігатися у одній або в обох кінцевих точках інтервалу.

Наприклад, ряди (15.5.13), (15.5.14) збігаються до функцій $\ln(1-x)$, $\ln(1+x)$ відповідно на проміжках: $x\in[-1,1)$, $x\in(-1,1]$, завдяки неперервності їхніх сум:

$$\lim_{x\to-1}\ln(1-x)=\ln 2,\quad \lim_{x\to1}\ln(1+x)=\ln 2,$$

незважаючи на те, вихідні ряди у цих точках розбігаються.

2. Для функцій $\sin x$, $\cos x$ умови теореми 15.5.4 виконуються: вони нескінченно диференційовні, модулі їхніх похідних будь-якого порядку, як і самих функцій, $\forall x\in\mathbf{R}$ обмежені одиницею (див. приклади в п. 9.3 частини 1):

$$(\sin x)^{(n)}=\sin\left(x+n\frac{\pi}{2}\right);\quad (\cos x)^{(n)}=\cos\left(x+n\frac{\pi}{2}\right).$$

Коефіцієнти розкладу $\sin x$ $(\cos x)$ в околі нуля при парних (непарних) n рівні нулеві (*чому?*), а ненульові визначаються формулами:

$$a_{2n+1}=(-1)^n\frac{1}{(2n+1)!}\quad\left(a_{2n}=(-1)^n\frac{1}{(2n)!}\right),\ n=0,1,2,\ldots\ .$$

Відповідні розклади в околі нуля мають вигляд:

$$\sin x=1-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\frac{x^7}{7!}+\ldots=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!},\ x\in\mathbf{R}; \tag{15.5.15}$$

$$\cos x=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\frac{x^6}{6!}+\ldots=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!},\ x\in\mathbf{R}. \tag{15.5.16}$$

Зауваження: розклади для tgx і $ctgx$ потребують відомостей, які виходять за межі програми, тому наводити їх не будемо.

3. Нехай $f(x)=(1+x)^{\alpha}$, $\alpha\in\mathbf{R}$. Знайдемо похідну n-го порядку і її значення у точці $x=0$:

$$f'(x)=\alpha(1+x)^{\alpha-1} \;\Rightarrow\; f'(0)=\alpha;$$
$$f''(x)=\alpha(\alpha-1)(1+x)^{\alpha-2} \;\Rightarrow\; f''(0)=\alpha(\alpha-1);$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$f^{(n)}(x)=\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1)(1+x)^{\alpha-n} \;\Rightarrow$$
$$\Rightarrow\; f^{(n)}(0)=\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1).$$

Визначимо попередній і наступний коефіцієнти ряду, радіус і інтервал абсолютної збіжності:

$$a_n=\frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1)}{n!},\quad a_{n+1}=a_{n+1}=\frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n)}{(n+1)!};$$
$$R=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{n+1}{\alpha-n}\right|=1 \;\Rightarrow\; x\in(-1,\,1).$$

Доведено, що ряд, побудований на установленому інтервалі, збігається в околі нуля до заданої функції:

$$\underset{(\alpha\in\mathbf{R})}{(1+x)^{\alpha}}=1+\alpha x+\frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2+\frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{3!}x^3+\ldots=$$
$$=1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1)}{n!}x^n,\quad x\in(-1,\,1). \tag{15.5.17}$$

Ряд Маклорена для функції $f(x)=(1+x)^{\alpha}$, $\alpha\in\mathbf{R}$, $x\in(-1,1)$, називають **біноміальним рядом**.

При натуральному α: $\alpha=m\in\mathbf{N}$, починаючи з члена зі степенем x^{m+1}, всі коефіцієнти рівні нулеві (чому?), і ряд перетворюється у многочлен. Тобто як *наслідок* із (15.5.17) отримуємо відому формулу бінома Ньютона, яка справедлива для всіх $x\in\mathbf{R}$:

$$\underset{(m\in\mathbf{N})}{(1+x)^m}=C_m^0+C_m^1x+C_m^2x^2+\ldots+C_m^mx^m=\sum_{i=0}^{m}C_m^ix^i,$$

де C_m^i – число комбінацій без повторень із m елементів по i:

$$C_m^i = \frac{m(m-1)...(m-i+1)}{i!},\ i=\overline{0,m},\ C_m^0 = 1.$$

4. Розвинення в ряд Тейлора обернених тригонометричних функцій $\arcsin x$, $arctg\, x$ та інших здійснюється почленним інтегруванням біноміальних рядів:

$$\int_0^x (1-t^2)^{-1/2} dt = \int_0^x \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} = \arcsin t \,\Big|_0^x = \arcsin x; \qquad (15.5.18)$$

$$\int_0^x (1+t^2)^{-1} dt = \int_0^x \frac{dt}{1+t^2} = arctg\, t \,\Big|_0^x = arctg\, x. \qquad (15.5.19)$$

(*Пропонуємо* виконати почленне інтегрування самостійно.)

Аналогічно для $\arccos x$, $arcctgx$; проте відповідні ряди можна подати, спираючись на співвідношення:

$$\arccos x + \arcsin x = \pi/2; \quad arcctg\, x + arctg\, x = \pi/2.$$

Зауваження: для розвинення в ряд інших елементарних функцій можна також виходити із загальних теоретичних положень, але простіше використати установлені розклади (табл. 15.5.1) і властивості степеневих рядів.

Наприклад, для $f(x) = arctg 2x$ ряд Маклорена такий:

$$arctg\, 2x = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{2^{2n-1}}{2n-1} x^{2n-1},\ x \in [-1/2, 1/2]. \qquad (15.5.20)$$

При розвиненні в ряд складених функцій слід ураховувати можливу зміну області збіжності у бік звуження або розширення. У світлі розкладу функції $f(x) = arctg 2x$ (див. (15.5.20)) маємо: $x \in [-1,1]$ для $arctg\, x$, $x \in [-1/2, 1/2]$ для $arctg\, 2x$. Якщо ж $f(x) = arctg(x/2)$, то область збіжності – сегмент $x \in [-2, 2]$.

Якщо вихідний ряд збігається на усій числовій осі, то область збіжності ряду складеної функції може і не змінитись.

Таблиця 15.5.1

Основні розклади функцій у степеневий ряд

№ п/п	Функція та її зображення у вигляді степеневого ряду	Область збіжності
1	$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$	$x \in \mathbf{R}$
2	$\sin x = 1 - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$	$x \in \mathbf{R}$
3	$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}$	$x \in \mathbf{R}$
4	$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n}$,	$x \in (-1,1]$
5	$\ln(1-x) = -x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} - \ldots = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$	$x \in [-1,1)$
6	$(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!} x^2 + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{3!} x^3 + \ldots =$ $(\alpha \in \mathbf{R})$ $= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1)}{n!} x^n$ (біноміальний ряд)	$x \in (-1,1)$
7*	$\arcsin x = x + \frac{1}{2} \cdot \frac{x^3}{3} + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} \cdot \frac{x^5}{5} + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \cdot \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$	$x \in (-1,1)$
8	$\arccos x = \pi/2 - \arcsin x$	$x \in (-1,1)$
9	$arctg\, x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^{2n-1}}{2n-1}$	$x \in [-1,1]$
10	$arcctg\, x = \pi/2 - arctg\, x$	$x \in [-1,1]$

* *Примітка:* $(2n-1)!! = 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \ldots \cdot (2n-1)$; $(2n)!! = 2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \ldots \cdot 2n$.

Деякі застосування степеневих рядів

Розклади функцій в ряд мають численні застосування у практичних задачах, розв'язання яких пов'язане із наближеннями обчислювального чи теоретичного характеру. *Математична складова* таких задач – знайти наближено суму ряду, заміняючи його частковою сумою із заданою точністю.

І. Обчислення значень функції у даній точці зводиться до:

1) *вибору* функції, для якої задане число є її частковим значенням;

2) *розвинення* її в ряд Тейлора чи Маклорена;

3) *установлення* числа членів часткової суми для забезпечення заданої точності або похибки наближення за заданим числом її членів.

Відмітимо три підходи до **оцінки похибки** обчислень:

а) якщо ряд Тейлора вибраної функції знакопочережний із монотонно спадними за модулем членами, то залишок ряду не перевищує свого першого члена (див. наслідок з теореми 15.3.1): $\forall n \geq 1$: $\left| r_n \right| \leq u_{n+1}$;

б) якщо ряд додатний, то для залишку намагаються знайти мажоранту, сума якої легко установлюється, і оцінюють залишок цією сумою;

в) якщо модулі всіх похідних функції обмежені деякою сталою C, тобто $\forall n \geq 1$: $\left| f^{(n)}(x) \right| \leq C$, похибку оцінюють за допомогою нерівності (див. (15.5.12)):

$$\delta_n(x) \leq \frac{C(x-x_0)^{n+1}}{(n+1)!}.$$

Наведемо ілюстративні *приклади* використання кожного із підходів:

1. Обчислити наближено число $A = \sqrt[10]{3/2}$ з точністю до $0,01$.

Задане число можна *розглядати* як часткове значення функції $f(x) = (1+x)^{1/10}$ при $x = 1/2$, тобто *використати* біноміальний ряд

$$(1+x)^{\alpha} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1)}{n!} x^n \text{, де } x = 1/2,\ \alpha = 0,1:$$

$$A = (1+1/2)^{1/10} = 1 + \frac{1}{10} \cdot \frac{1}{2} - \frac{1}{10} \cdot \frac{9}{10} \cdot \frac{1}{2!} \cdot \frac{1}{4} + \frac{1}{10} \cdot \frac{9}{10} \cdot \frac{19}{10} \cdot \frac{1}{3!} \cdot \frac{1}{8} - \ldots .$$

Підраховуємо послідовно члени записаної часткової суми і з'ясовуємо, що останній з них (*прослідкуйте*) дорівнює $171/48000 = 0,0035625$ і

не перевищує $0{,}01$. Наближене значення A із заданою точністю визначається трьома першими членами ряду:

$$A \approx 1 + 0{,}05 - 0{,}01125 = 1{,}03875.$$

(*Чи можливо* за допомогою біноміального ряду обчислити $\sqrt[10]{2}$?)

Число A можна знайти наближено (*пропонуємо* як вправу) і за допомогою додатного ряду – узагальнення розкладу $f(x) = e^x$ заміною e на довільне додатне дійсне a, не рівне одиниці:

$$\underset{(a>0,\ a\neq 1)}{a^x} = e^{x\ln a} = 1 + \frac{\ln a}{1!}x + \frac{\ln^2 a}{2!}x^2 + \frac{\ln^3 a}{3!}x^3 + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{\ln^n a}{n!}x^n,\ x \in \mathbf{R},$$

де для підрахунку A покладаємо: $a = 1{,}5$; $x = 0{,}1$.

2. Обчислити наближено $A = \ln 2$ за трьома членами ряду (15.4.17):

$$\ln k = \frac{1}{1\cdot k} + \frac{1}{2\cdot k^2} + \frac{1}{3\cdot k^3} + \ldots + \frac{1}{n\cdot k^n} + \ldots, \text{ де } k = 2, 3, \ldots\ .$$

Беремо три члени розкладу і *підраховуємо* часткову суму:

$$A = \ln 2 \approx \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 2^2} + \frac{1}{3\cdot 2^3} = \frac{1}{2} + \frac{1}{8}\cdot\frac{4}{3} = \frac{2}{3} = 0,(6) = 0{,}6666\ldots.$$

Для *оцінки* абсолютної похибки наближення числа A випишемо залишок ряду після n-го члена і знайдемо його мажоранту:

$$r_n(k) = \frac{1}{(n+1)\cdot k^{n+1}} + \frac{1}{(n+2)\cdot k^{n+2}} + \frac{1}{(n+3)\cdot k^{n+3}} + \ldots\ .$$

Замінимо у знаменниках множники $(n+1)$, $(n+2)$, $(n+3)$, … на найменший із них, тобто на $(n+1)$, тоді приходимо до нерівності:

$$r_n(k) < \frac{1}{n+1}\left(\frac{1}{k^{n+1}} + \frac{1}{k^{n+2}} + \frac{1}{k^{n+3}} + \ldots\right),$$

де у дужках маємо ряд нескінченно спадної геометричної прогресії з першим членом $b_1 = \dfrac{1}{k^{n+1}}$, знаменником $q = \dfrac{1}{k}$, а отже, з сумою

$$s=\frac{b_1}{1-q}=\frac{1}{k^{n+1}}\cdot\frac{k}{k-1}=\frac{1}{(k-1)k^n}.$$

Таким чином, залишок ряду визначається нерівністю:

$$r_n(k)<\frac{1}{(n+1)(k-1)k^n}, \tag{15.5.21}$$

що при $n=3$, $k=2$ дає: $r_3(2)<\frac{1}{4\cdot 2^3}=\frac{1}{32}\approx 0,03125$.

Якщо порівняти взяте з п'ятьма десятковими знаками точне значення $\ln 2$: $\ln 2=0,69314\ldots$, з наближенням $A=0,6666\ldots$, то різниця між ними: $\ln 2-A=0,69314\ldots-0,66666\ldots=0,02648\ldots$, менше, ніж $0,03125$.

3. Обчислити наближено $A=\sin 85^\circ$ з точністю до $0,001$.

Перейдемо до радіанної міри кута: $85\pi/180=17\pi/36$, тоді $A=\sin(17\pi/36)$, а за формулами зведення: $A=\cos(\pi/36)$. *Використаємо* розклад

$$\cos x=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\frac{x^6}{6!}+\ldots=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!} \quad \text{при } x=\pi/36:$$

$$\cos\frac{\pi}{36}=1-\left(\frac{\pi}{36}\right)^2\frac{1}{2!}+\left(\frac{\pi}{36}\right)^4\frac{1}{4!}-\left(\frac{\pi}{36}\right)^6\frac{1}{6!}+\ldots .$$

Установимо число членів часткової суми для забезпечення заданої точності за нерівністю: $\delta_n(x)\le C(x-x_0)^{n+1}/(n+1)!$, з урахуванням, що $\left|(\cos x)^{(n)}\right|=\left|\cos(x+\pi n/2)\right|\le C=1$, а $x_0=0$. Для цього знайдемо n таке, щоб виконувалась нерівність: $\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}\le 0,001$, де $x=\pi/36$:

$$n=1 \Rightarrow \left(\frac{\pi}{36}\right)^2\cdot\frac{1}{2}=0,003\ldots>0,001;$$

$$n=2 \Rightarrow \left(\frac{\pi}{36}\right)^3\cdot\frac{1}{6}=0,00001\ldots<0,001.$$

Таким чином, $A=\cos\frac{\pi}{36}\approx 1-\left(\frac{\pi}{36}\right)^2\frac{1}{2!}\approx 1-\frac{1}{2}0,0076154=0,9961923$.

Насправді у знайденого наближення точність значно вища: у нього вірними є п'ять десяткових знаків, бо $\cos(\pi/36) = 0{,}9961946980\,917455\ldots$. (*Пропонуємо* оцінити точність за першим відкинутим членом ряду.)

II. Інтегрування функцій здійснюється так:

1) *розвивають* підінтегральну функцію у ряд Тейлора (Маклорена);

2) *інтегрують* почленно отриманий ряд (що припустимо в області його збіжності);

3) *знаходять* часткову суму розкладу, яка дає наближення із заданою точністю.

Приклад. Обчислити визначений інтеграл $\int\limits_0^{0,5}(1+x)^{-1}dx$: 1) за частковою сумою із трьох членів; 2) з точністю до $0{,}001$.

1. Підінтегральну функцію можна розглядати як суму ряду геометричної прогресії з $b_1 = 1$, $q = -x$, де $|x| < 1$, або як суму біноміального ряду з $\alpha = 0{,}5$ (*переконайтеся*):

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + \ldots + (-1)^n x^n + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^n .$$

Виконуємо почленне інтегрування:

$$\int\limits_0^{0,5}\frac{1}{1+x}dx = \int\limits_0^{0,5}\left(1 - x + x^2 - x^3 + \ldots + (-1)^n x^n + \ldots\right)dx =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty}\int\limits_0^{0,5}(-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1}dx = \left(x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \ldots\right)\Bigg|_0^{0,5} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2^2} + \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2^3} - \ldots\ .$$

Підраховуємо часткову суму із трьох членів:

$$s_3 = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2^2} + \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2^3} = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{4} + \frac{1}{12}\right) = \frac{5}{12} = 0{,}41(6).$$

Інтегрований ряд знакопереміжний, отже, похибка δ від заміни його суми n-ю частковою сумою не перевищує модуля першого відкинутого члена, тобто першого члена залишку ряду після n-го члена:

$$\delta \le |u_{n+1}(x)| = \left|x^{n+1}/(n+1)\right| \;\Rightarrow\; \delta \le 1/64 = 0{,}015625 \;\Rightarrow\; I \approx 0{,}4167 .$$

2. Для наближення з точністю до $0{,}001$ кількість членів ряду визначається числом N, яке відшукується із умови: $1/\left(N\cdot 2^{N}\right)\le 0{,}001$. Таким N є число 8:

$$\delta \le 1/\left(8\cdot 2^{8}\right)=1/2048\approx 0{,}0005 \;\Rightarrow\; I\approx 0{,}4058.$$

(*Перевірте*, чи узгоджуються похибки з найденими наближеннями, якщо точне значення інтеграла: $I=\ln 1{,}5$, а з чотирма десятковими знаками $I\approx 0{,}4055$.)

III. Розв'язання диференціальних рівнянь $F\left(x,y,y',...,y^{(n)}\right)=0$ з початковими умовами: $y\big|_{x=x_0}=y_0$, $y'\big|_{x=x_0}=y'_0$, …, $y^{(n-1)}\Big|_{x=x_0}=y_0^{(n-1)}$, можна здійснювати двома способами.

1⁰. Метод порівняння коефіцієнтів полягає у такому:

1) *відшукують* невідому функцію $y=y(x)$ у вигляді степеневого ряду за степенями $(x-x_0)$, де x_0 – точка, у якій задано початкові умови, з невизначеними коефіцієнтами:

$$y(x)=a_0+a_1(x-x_0)+a_2(x-x_0)^2+...+a_n(x-x_0)^n+...;$$

2) *визначають* за початковими умовами перші n коефіцієнтів: a_0, a_1, a_2, …, a_{n-1};

3) *підставляють* у рівняння замість $y=y(x)$ степеневий ряд із 1), а замість y', y'', …, $y^{(n)}$ відповідні степеневі ряди, отримані почленним диференціюванням ряду для $y(x)$;

4) *порівнюють* коефіцієнти при однакових степенях $(x-x_0)$, визначаючи таким чином інші коефіцієнти ряду.

Приклад. Розв'язати наближено задачу Коші для рівняння $y'=xy$; $y(0)=1$. Взяти три ненульові члени розкладу $y(x)$ в степеневий ряд.

Покладаємо: $y(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+...+a_nx^n+...$, тоді з урахуванням початкової умови отримаємо: $a_0=1$.

Знаходимо $y'(x)=a_1+2a_2x+...+na_nx^{n-1}+...$ і подаємо ліву і праву частини рівняння $y'=xy$ у вигляді рядів:

$$a_1+2a_2x+3a_3x^2+4a_4x^3+5a_5x^4+6a_6x^5+\ldots+na_nx^{n-1}+\ldots=$$
$$=x+a_1x^2+a_2x^3+a_3x^4+a_4x^5+a_5x^6+\ldots+a_nx^{n+1}+\ldots$$

Порівнюємо коефіцієнти при однакових степенях x у лівій і правій частинах рівності, у результаті чого отримуємо ланцюжок співвідношень, які пов'язують наступні коефіцієнти ряду з попередніми (*прослідкуйте*):

$$\left.\begin{array}{c} x^0 \\ x^1 \\ x^2 \\ x^3 \\ x^4 \end{array}\right| \begin{cases} a_1=0 \\ 2a_2=1 \\ 3a_3=a_1 \\ 4a_4=a_2 \\ 5a_5=a_3 \end{cases} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} a_1=0 \\ a_2=1/2 \\ a_3=0 \\ a_4=1/(2\cdot 4) \\ a_5=0 \end{array}\right.\;.$$

Якщо взяти перші три ненульові члени розкладу, то наближений розв'язок такий: $y(x)\approx 1+\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{8}x^4$.

Аналізуючи знайдені коефіцієнти, приходимо до формул:

$$a_{2n-1}=0,\quad a_{2n}=\frac{1}{2\cdot 4\cdot\ldots\cdot 2n},\quad n=1,2,\ \ldots\ ,$$

а зв'язок між коефіцієнтами ряду у вигляді однієї формули знайдемо, якщо порівняти їх при степенях x^{n+1}:

$$(n+2)a_{n+2}=a_n \;\Rightarrow\; a_{n+2}=\frac{a_n}{n+2},\ \text{при}\ a_0=1,\ a_1=0.$$

У випадку нескладної структури коефіцієнтів ряду, як у цьому прикладі, вдається його відновити повністю, а саме:

$$y(x)=1+\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{2\cdot 4}x^4+\ldots+\frac{1}{2\cdot 4\cdot\ldots\cdot 2n}x^{2n}+\ldots\ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ y(x)=1+\frac{1}{1!}\left(\frac{x^2}{2}\right)+\frac{1}{2!}\left(\frac{x^2}{2}\right)^2+\ldots+\frac{1}{n!}\left(\frac{x^2}{2}\right)^n+\ldots=e^{x^2/2}.$$

(*Знайдіть* розв'язок рівняння відокремленням змінних і *зіставте* його із сумою ряду.)

2⁰. Метод послідовного диференціювання передбачає:

1) *подання* невідомої функції $y = y(x)$ у вигляді ряду Тейлора:

$$y(x) = y(x_0) + \frac{y'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{y''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \ldots + \frac{y^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + \ldots;$$

2) *відшукання* за початковими умовами перших n коефіцієнтів: a_0, a_1, a_2, …, a_{n-1};

3) *визначення* наступних коефіцієнтів ряду: a_n, a_{n+1}, a_{n+2}, …, підстановкою значення $x = x_0$ у рівняння, отримані послідовним диференціюванням вихідного рівняння.

Приклад. Розв'язати наближено задачу Коші для рівняння $y' = xy$; $y(1) = 1$. Взяти п'ять ненульових членів розкладу $y(x)$ в ряд Тейлора.

Покладаємо:

$$y(x) = y(1) + \frac{y'(1)}{1!}(x-1) + \frac{y''(1)}{2!}(x-1)^2 + \ldots + \frac{y^{(n)}(1)}{n!}(x-1)^n + \ldots,$$

тоді з урахуванням початкової умови отримаємо: $y' = 1$.

Диференціюємо ліву і праву частини заданого рівняння і визначаємо вартості похідних більш високих порядків у точці $x = 1$:

$$y'' = y + y'x \;\Rightarrow\; y''(1) = 2,$$

$$y''' = y' + y''x + y' \Rightarrow\; y'''(1) = 4,$$

$$y^{(4)} = 2y'' + y'''x + y'' \Rightarrow\; y^{(4)}(1) = 10,$$

……………………………………………….

$$y^{(n)} = (n-1)y^{(n-2)} + xy^{(n-1)}.$$

Наближений розв'язок має вигляд:

$$y(x) \approx 1 + \frac{1}{1!}(x-1) + \frac{2}{2!}(x-1)^2 + \frac{4}{3!}(x-1)^3 + \frac{10}{4!}(x-1)^4.$$

(*Переконайтеся* самостійно, що точним розв'язком розглядуваного диференціального рівняння є функція: $y(x) = e^{\left(x^2-1\right)/2}$.)

15.6. Ряди Фур'є

Деякі відомості стосовно періодичних функцій

Функція $y = f(x)$ називається **періодичною**, якщо для будь-якого x із області визначення функції існує дійсне число $T \neq 0$ – **період функції** – таке, що:

1) значення аргументу $x - T$ і $x + T$ також належать області існування функції $D(f)$;

2) виконується рівність $f(x \pm T) = f(x)$:

$y = f(x)$ – періодична функція $\rightleftharpoons$ $\forall x \in D(f)\ \exists T\ (T \in \mathbf{R},\ T \neq 0)$:

$$\left[\begin{array}{l} 1)\ (x \pm T) \in D(f); \\ 2)\ f(x \pm T) = f(x). \end{array}\right. \qquad (15.6.1)$$

Якщо $f(x)$ має період T, то вона має нескінченно багато періодів (*на якій підставі?*), але звичайно розглядають **головний**, який виражається найменшим (якщо такий існує), із усіх періодів, додатним числом.

Прикладами періодичних функцій є тригонометричні функції.

Нагадаємо деякі **властивості періодичних функцій**:

1^0. Якщо функції $f_1(x)$ і $f_2(x)$ мають період T, то їхні сума, різниця, добуток, частка є періодичними функціями з періодом T.

2^0. Якщо функція $f(x)$ має період T, то $f(kx)$, де $k - const$, періодична з періодом T/k.

3^0. Якщо функція $f(x)$ має період T, то

$$\int_a^{a+T} f(x)dx = \int_b^{b+T} f(x)dx, \qquad (15.6.2)$$

тобто визначені інтеграли від періодичної функції на будь-якому відрізку, довжина якого дорівнює періодові, рівні між собою.

Властивості 1^0, 2^0 відомі з курсу тригонометрії, а третя доводиться дуже просто. Перш за все, на підставі означення (15.6.1) маємо:

$$\int_a^b f(x)dx = \int_{a+T}^{b+T} f(x)dx.$$

Нехай $a<b<a+T$, тоді $a+T<b+T$, і за властивістю адитивності ВІ отримуємо (для стислості запису підінтегральні вирази пропускаємо):

$$\left(\int_a^{a+T}=\int_a^b+\int_b^{a+T},\quad \int_b^{b+T}=\int_{a+T}^{b+T}+\int_b^{a+T}\right)\ \Rightarrow\ \int_a^{a+T}=\int_b^{b+T}.$$

(*Розгляньте* самостійно випадок, коли b лежить зовні $[a,a+T]$.)

Тригонометричний ряд, коефіцієнти Фур'є, ряд Фур'є

Функціональний ряд вигляду

$$\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)=$$

$$=\frac{a_0}{2}+a_1\cos x+b_1\sin x+a_2\cos 2x+b_2\sin 2x+\ldots, \qquad (15.6.3)$$

де a_0, a_n, b_n $(n=1,2,\ldots)$ – **коефіцієнти ряду** (сталі величини), називається **тригонометричним** рядом.

Часткові суми ряду $s_n(x)$, а у разі збіжності і його сума $s(x)$, як і члени ряду, є періодичними функціями з періодом 2π (*обґрунтуйте*).

Задача 15.6.1 (*про коефіцієнти ряду*). Визначити коефіцієнти ряду (15.6.3) за умови, що періодична функція $f(x)$ з періодом 2π зображується тригонометричним рядом, який збігається до заданої функції на інтервалі $(-\pi,\pi)$ і припускає почленне інтегрування на ньому.

Р о з в' я з а н н я. За умовою задачі $s(x)=f(x)$, тобто

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx). \qquad (15.6.4)$$

Інтегруючи на відрізку $[-\pi,\pi]$, отримуємо:

$$\int_{-\pi}^{\pi}f(x)dx=\int_{-\pi}^{\pi}\frac{a_0}{2}dx+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\int_{-\pi}^{\pi}a_n\cos nx\,dx+\int_{-\pi}^{\pi}b_n\sin nx\,dx\right)\ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ \left|\ \int_{-\pi}^{\pi}\cos nxdx=\frac{\sin x}{n}\Big|_{-\pi}^{\pi}=0,\ \int_{-\pi}^{\pi}\sin nxdx=-\frac{\cos nx}{n}\Big|_{-\pi}^{\pi}=0\ \right|\ \Rightarrow \qquad (15.6.5)$$

$$\Rightarrow \int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx = \frac{a_0}{2} x \Big|_{-\pi}^{\pi} = \pi a_0 \quad \Rightarrow \quad a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx. \tag{15.6.6}$$

Для відшукання коефіцієнтів a_n помножимо ліву і праву частини рівності (15.6.4) на $\cos mx$, $m \in \mathbf{N}$, і зінтегруємо їх на відрізку $[-\pi, \pi]$:

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos mx\,dx = \frac{a_0}{2}\int_{-\pi}^{\pi}\cos mx\,dx +$$

$$+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\int_{-\pi}^{\pi}\cos nx\cos mx\,dx + b_n\int_{-\pi}^{\pi}\sin nx\cos mx\,dx\right). \tag{15.6.7}$$

Для інтегралів правої частини з урахуванням (15.6.5) маємо:

$$\int_{-\pi}^{\pi}\cos mx\,dx = 0 \quad \forall m = 1, 2, \dots; \tag{15.6.8}$$

$$\int_{-\pi}^{\pi}\cos nx\cos mx\,dx = \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi}\left[\cos(n+m)x + \cos(n-m)x\right]dx =$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{\sin(n+m)x}{n+m} + \frac{\sin(n-m)x}{n-m}\right]\Bigg|_{-\pi}^{\pi} = 0 \quad \text{при } m \neq n. \tag{15.6.9}$$

Аналогічно при $m \neq n$ отримаємо (*покажіть* це самостійно):

$$\int_{-\pi}^{\pi}\sin nx\cos mx\,dx = \frac{1}{2}\left[\frac{\cos(n+m)x}{n+m} + \frac{\cos(n-m)x}{n-m}\right]\Bigg|_{-\pi}^{\pi} = 0. \tag{15.6.10}$$

Отже, при $m \neq n$ права частина у (15.6.7) рівна нулеві.

Якщо ж $m = n$, то інтеграли-множники при a_n, b_n відповідно такі:

$$\int_{-\pi}^{\pi}\cos nx\cos mx\,dx = \int_{-\pi}^{\pi}\cos^2 nx\,dx = \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi}(1+\cos 2nx)dx = \pi; \tag{15.6.11}$$

$$\int_{-\pi}^{\pi}\sin nx\cos mx\,dx = \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi}\sin 2nx\,dx = 0 \text{ (див. (15.6.5))}. \tag{15.6.12}$$

Отже, у правій частині (15.6.7) перший доданок рівний нулю, а під знаком $\sum$ усі інтеграли мають нульові значення, крім одного, при якому стоїть коефіцієнт ряду a_n.

Таким чином, при $m = n$ (15.6.7) набуває вигляду:

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\,dx = a_n\pi, \text{ звідки } a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\,dx. \qquad (15.6.13)$$

Для відшукання коефіцієнтів b_n помножимо ліву і праву частини рівності (15.6.4) на $\sin mx$, $m \in \mathbf{N}$, і зінтегруємо їх на відрізку $[-\pi, \pi]$ (детальний виклад *пропонуємо* зробити як вправу):

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx\,dx = b_n\pi, \text{ звідки } b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx\,dx. \qquad (15.6.14)$$

Коефіцієнти тригонометричного ряду (15.6.3), обчислені за формулами (15.6.6), (15.6.13), (15.6.14):

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx,$$
$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\,dx, \quad b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx\,dx, \; n = 1, 2, \ldots, \qquad (15.6.15)$$

називаються **коефіцієнтами Фур'є**, а тригонометричний ряд з коефіцієнтами Фур'є називають **рядом Фур'є**.

Ряд Фур'є дає можливість будь-який коливальний процес подати у вигляді суми (правда, нескінченної) найбільш простих гармонічних коливань. У цьому полягає **фізичний смисл** ряду.

Приклад. Побудувати ряд Фур'є для періодичної функції з періодом 2π, яка визначається співвідношеннями: $y = 2x$, $-\pi < x \le \pi$.

Підраховуємо коефіцієнти Фур'є: $a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} 2x\,dx = \frac{1}{\pi} x^2 \Big|_{-\pi}^{\pi} = 0$;

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} 2x\cos nx dx = \left| \begin{array}{ccc} u = x & \Rightarrow & du = dx \\ dv = \cos nx dx & \Rightarrow & v = \frac{1}{n}\sin nx \end{array} \right| =$$

$$=\frac{2}{\pi}\left(\frac{x}{n}\sin nx+\frac{1}{n^2}\cos nx\right)\Bigg|_{-\pi}^{\pi}=\frac{2}{\pi}\cdot\frac{1}{n^2}\left(\cos\pi n-\cos(-\pi n)\right)=0\,;$$

$$b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}2x\sin nx\,dx=\left|\begin{array}{ccc} u=x & \Rightarrow & du=dx \\ dv=\sin nx\,dx & \Rightarrow & v=-\frac{1}{n}\cos nx \end{array}\right|=$$

$$=\frac{2}{\pi}\left(-\frac{x}{n}\cos nx+\frac{1}{n^2}\sin nx\right)\Bigg|_{-\pi}^{\pi}=-\frac{4}{n}\cos\pi n=(-1)^{n+1}\frac{4}{n}.$$

Записуємо відповідний ряд Фур’є для заданої функції; її графік на проміжку $(-\pi,\ 3\pi]$ зображений на рис. 15.6.1:

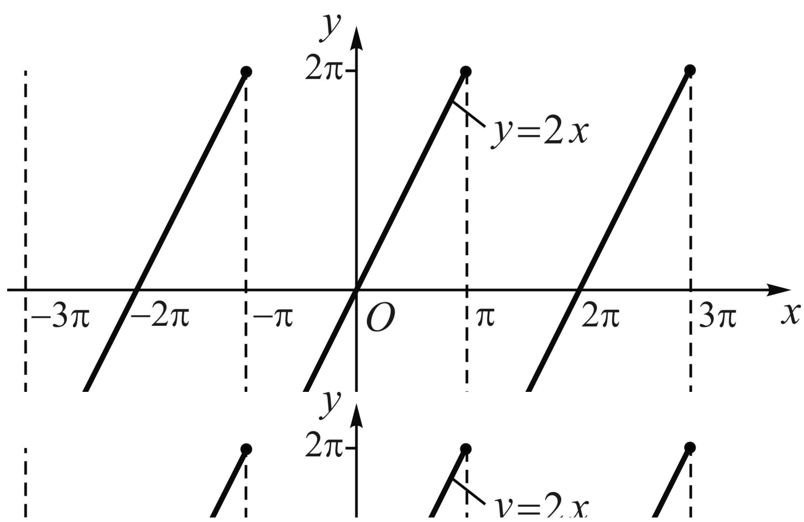


Рис. 15.6.1. **Графік періодичної функції $y=2x$, $-\pi<x\le\pi$**

$$f(x)=2x=4\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{n}\sin nx=$$

$$=4\left(\frac{\sin x}{1}-\frac{\sin 2x}{2}+\frac{\sin 3x}{3}+\ldots+(-1)^{n+1}\frac{\sin nx}{n}+\ldots\right). \qquad (15.6.16)$$

Помічаємо, що побудований ряд не містить доданки з „косинусами”, і це не випадково: якщо межі інтегрування симетричні відносно нуля, то для непарної функції $\int_{-a}^{a}f(x)dx=0$. У розглянутому прикладі інтеграли, через які виражаються коефіцієнти ряду a_n, $n=0,1,2,\ldots$, містять непарні підінтегральні функції.

У загальному випадку (*наведіть* виклад самостійно) маємо:

$$f(-x) = f(x) \;\Rightarrow\; f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx\,;$$
$$f(-x) = -f(x) \;\Rightarrow\; f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx\,. \tag{15.6.17}$$

Висновок: ряди Фур'є для парних (непарних) періодичних функцій містять відповідно тільки „косинуси” (тільки „синуси”).

(*Обміркуйте*, який вигляд мають ряди Фур'є для $\sin x$, $\cos x$.)

Ряд Фур'є для періодичних функцій з періодом $T = 2l$

Задача 15.6.2 (*про побудову ряду Фур'є на інтервалі* $(-l, l)$). Установити вид ряду Фур'є для періодичної функції з періодом $T = 2l$, заданої на інтервалі $(-l, l)$.

Р о з в' я з а н н я. Введемо в розгляд нову змінну t, яка при змінюванні x від $-l$ до l приймає значення з інтервалу $(-\pi, \pi)$: $t = \pi x/l$, або $x = lt/\pi$. Тоді $f(lt/\pi)$ як функція аргументу t є періодичною з періодом 2π, а значить, для неї за результатами розв'язання задачі 15.6.1 можна записати ряд Фур'є:

$$f\left(\frac{l}{\pi}t\right) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n \cos nt + b_n \sin nt\right),$$

де:

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f\left(\frac{l}{\pi}t\right)dt\,; \quad a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f\left(\frac{l}{\pi}t\right)\cos nt\,dt\,;$$
$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f\left(\frac{l}{\pi}t\right)\sin nt\,dt\,,\; n = 1, 2, \ldots. \tag{15.6.18}$$

Повертаємось у співвідношеннях (15.6.18) до вихідної змінної x: $t = \dfrac{\pi}{l}x$, а $dt = \dfrac{\pi}{l}dx$, тоді формули для коефіцієнтів a_0, a_n, b_n набувають вигляду (*прослідкуйте*):

$$a_0 = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)dx; \quad a_n = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\cos\frac{\pi n x}{l}dx;$$
$$b_n = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\sin\frac{\pi n x}{l}dx, \; n = 1, 2, \dots. \tag{15.6.19}$$

Ряд Фур'є для функції з періодом $T = 2l$ на інтервалі $(-l, l)$ такий:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n \cos\frac{\pi n}{l}x + b_n \sin\frac{\pi n}{l}x\right). \tag{15.6.20}$$

Достатні умови розвинення функції у ряд Фур'є

Як і при розвиненні функцій у ряд Тейлора не можна стверджувати, що побудований для заданої періодичної функції $f(x)$ ряд Фур'є збігається і до того ж його сумою буде саме $f(x)$. Якщо ж ряд Фур'є для $f(x)$ має своєю сумою функцію $f(x)$, то кажуть, що ця функція **розкладається** (**розвивається**) в ряд Фур'є. Достатні умови розвинення функції у ряд Фур'є визначає **теорема Діріхле** (за ім'ям знаного німецького математика Йоганна Петера Густава Лежен-Діріхле (1805 – 1859)). Її доведення виходить за межі навчальної програми.

Теорема 15.6.1 (*достатні умови розвинення функції у ряд Фур'є*). Якщо на проміжку $[-l, l]$ функція $f(x)$ має:

1) скінченне число розривів 1-го роду (або неперервна);

2) скінченне число точок екстремуму (або не має їх зовсім),

то її ряд Фур'є збігається:

а) у точках неперервності $f(x)$ до самої функції: $s(x) = f(x)$;

б) у кожній точці розриву x_k до півсуми односторонніх границь зліва і справа:

$$s(x_k) = (f(x_k - 0) + f(x_k + 0))/2, \quad k = 1, 2, \dots, m;$$

в) у кінцевих точках сегмента до півсуми односторонніх границь зсередини відрізка:

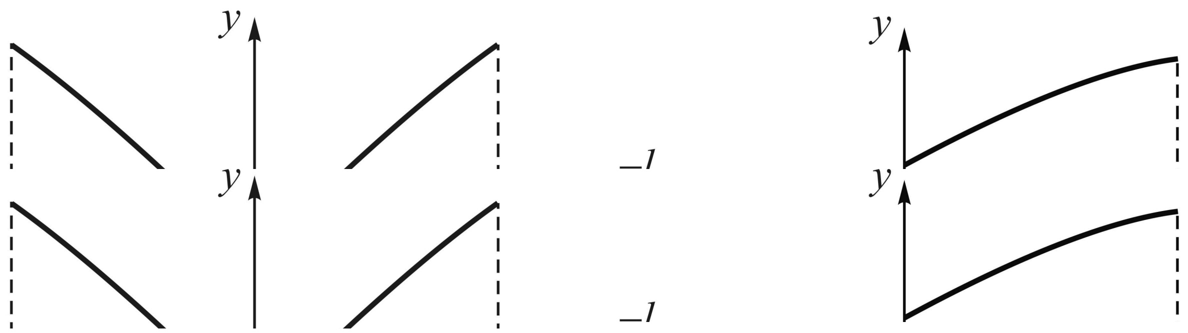
$$s(-l) = s(l) = (f(-l + 0) + f(l - 0))/2.$$

Зауваження:

установлено, що на будь-якому відрізку, належному області неперервності, ряд Фур'є збігається до $f(x)$ рівномірно;

теорема Діріхле застосовна і у випадках коли $f(x)$ задана на відрізку $[0, l]$, а не $[-l, l]$, для чого функцію доповнюють (довільним чином) на проміжку $[-l, 0)$; якщо її доповнити (продовжити) **парним чином** (рис. 15.6.2-а) – симетрично відносно осі Oy, – то отримаємо розклад за „косинусами", а у разі **непарного продовження** (рис. 15.6.2-б) – симетрично відносно точки O – матимемо розклад за „синусами";

у ряд Фур'є, виявляється, можна розвинути будь-яку неперіодичну функцію, яка задовольняє умови теореми на деякому проміжку $[a, b]$, для цього задану функцію поширюють за межі $[a, b]$ за законом періодичності (див. рис. 15.6.1): $f(x \pm T) = f(x)$, вибираючи в якості періоду число $T = 2l \geq b - a$; зрозуміло, що для всіх x із $[a, b]$ (крім точок розриву, якщо вони є) $s(x) = f(x)$, а інші точки, які лежать зовні $[a, b]$, дослідника, як правило, не цікавлять.



а) б)

Рис. 15.6.2. **Продовження функції на $[-l, 0)$: а) парне; б) непарне**

Висновок: теорема Діріхле з урахуванням зауважень охоплює досить широкий клас функцій, для яких припустимий розклад у ряд Фур'є. Зокрема, всі основні елементарні функції розвиваються в ряд Фур'є на довільному скінченному відрізку із області їхнього існування.

Подамо, *наприклад*, експоненту $y = e^x$, задану на проміжку $[1, 2]$, як суму нескінченного числа гармонічних коливань. Для цього продовжи-

мо функцію за межі відрізка $[1,2]$ – на проміжок $[0,1)$, – і покладемо $T=2l=2$, тобто приймемо $l=1$ (рис. 15.6.3).

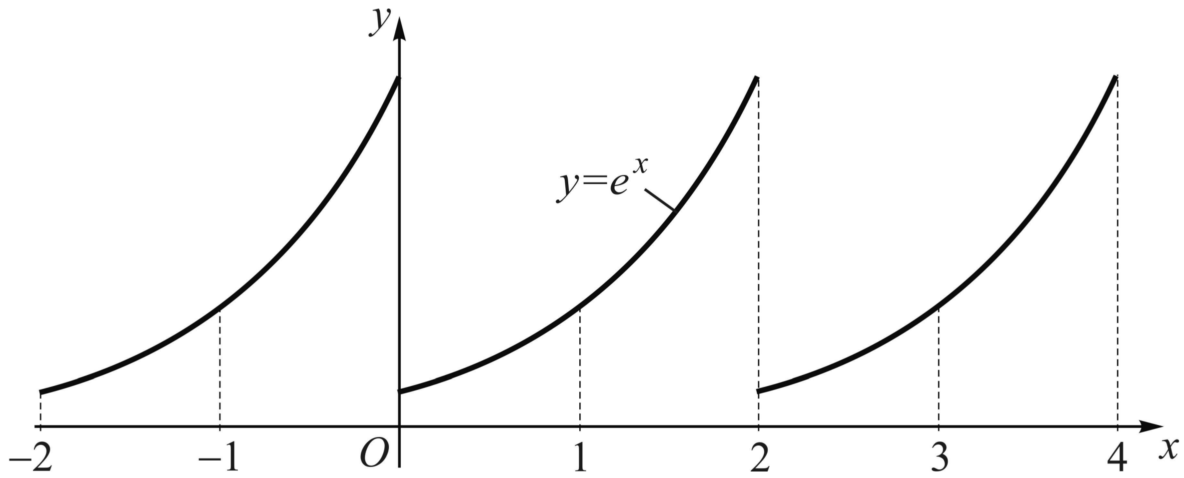


Рис. 15.6.3. **Продовження функції за межі відрізка $[1,2]$ з $T=2l=2$**

За формулами (15.6.19) обчислюємо коефіцієнти ряду. Для a_0 маємо табличний інтеграл, а інтеграли для a_n, b_n беремо (двічі) частинами (див. п. 12.2):

$$a_0=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(x)dx=\int_{-1}^{1}e^x dx=e-e^{-1};$$

$$a_n=\int_{-1}^{1}e^x\cos\pi nx\,dx=(-1)^n\frac{e-e^{-1}}{(\pi n)^2+1}; \qquad (15.6.21)$$

$$b_n=\int_{-1}^{1}e^x\sin\pi nx\,dx=(-1)^{n+1}\frac{e-e^{-1}}{(\pi n)^2+1}, \quad n=1,2,\ldots.$$

Розклад у ряд Фур'є функції $y=e^x$ з періодом $T=2$ на інтервалі $(0,2)$ такий:

$$e^x=\left(e-e^{-1}\right)\left(\frac{1}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{(-1)^n}{(\pi n)^2+1}\cos nx+\frac{(-1)^{n+1}\pi n}{(\pi n)^2+1}\sin nx\right)\right). \qquad (15.6.22)$$

Тригонометричні ряди Фур'є знайшли застосування у багатьох розділах не тільки математики, а й математичної фізики і її впровадженнях у розв'язання конкретних задач механіки і фізики: вони імітують довільний періодичний процес за допомогою підсумовування гармонік.

Надаючи змінній x конкретні значення, отримуємо числові ряди, для яких відповідні часткові значення функції є їхніми сумами.

Наприклад, якщо покласти: у (15.6.16) $x = \pi/2$, а у (15.6.22) $x = 0$, то отримаємо числові ряди, сумами яких є відповідно число π і одиниця:

$$\pi = 4\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{2n-1}; \quad 1 = \left(e - e^{-1}\right)\left(\frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{(-1)^n}{(\pi n)^2 + 1}\right)\right).$$

Теорію розвинення функцій у ряди Фур'є називають **гармонічним аналізом**. Існує і так званий **практичний гармонічний аналіз**, у якому розглядаються методи наближеного обчислення коефіцієнтів ряду.

Справа в тому, що у багатьох випадках, які зустрічаються в практиці застосування рядів, функція задається у вигляді таблиці (коли функціональна залежність отримується в результаті експерименту) або у вигляді кривої, яка накреслюється якимось приладом. Відзначимо, що створені прилади названі **гармонічними аналізаторами**, які за графіком даної функції дозволяють обчислити коефіцієнти ряду.

Крім розглянутої форми запису ряду Фур'є, яку називають **тригонометричною**, існує **комплексна форма** ряду Фур'є. Для її отримання вираз $a_n \cos nx + b_n \sin nx$ перетворюють за допомогою формули Ейлера (див. (5.1.15)): $e^{i\varphi} = \cos\varphi + i \cdot \sin\varphi$, складають часткову суму:

$$s_N(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{N}\left(a_n \cos nx + b_n \sin nx\right),$$

переходять до границі при $N \to \infty$, і ряд набуває вигляду:

$$f(x) = \sum_{-\infty}^{+\infty} c_n e^{inx}, \text{ де } c_n = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} f(x)e^{-inx}dx \quad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots);$$

коефіцієнти c_n пов'язані з a_n, b_n співвідношенням:

$$c_{\mp n} = \frac{a_n \pm ib_n}{2}.$$

У такій формі ряди Фур'є використовуються для опису сигнальних функцій у технічних інформаційних системах і в інших галузях знань, де зустрічаються коливальні процеси.

Запитання для самодіагностики засвоєння матеріалу

Відповіді на всі запитання сформулюйте словесно, запишіть в символічній формі, обґрунтуйте (на підставі означень, теорем, правил, формул тощо), наведіть відповідні конкретні приклади.

1. Що називається числовим рядом, загальним членом ряду?
2. Який ряд називається збіжним (розбіжним)?
3. Сформулюйте і доведіть необхідну ознаку збіжності ряду.
4. Сформулюйте і доведіть достатні ознаки збіжності рядів: ознаки порівняння, Даламбера, радикальну й інтегральну ознаки Коші.
5. Які ряди називаються знакопереміжними? Сформулюйте і доведіть ознаку Лейбніца.
6. Який ряд відносно заданого ряду називають модульним? Сформулюйте і доведіть достатню ознаку збіжності знакозмінного ряду.
7. Який ряд називається абсолютно (умовно) збіжним? Навести приклади.
8. Який ряд називають функціональним?
9. Що називається областю збіжності функціонального ряду?
10. Який ряд називається рівномірно збіжним? Дайте геометричне тлумачення рівномірної та нерівномірної збіжності.
11. Сформулюйте і доведіть ознаку Вейєрштрасса.
12. Який ряд називається степеневим? Як відшукується його область збіжності?
13. Сформулюйте властивості степеневих рядів.
14. Що називається рядом Тейлора для функції $f(x)$? Як знайти коефіцієнти ряду Тейлора?
15. Сформулюйте теорему про необхідні і достатні умови, за яких сума ряду Тейлора функції $f(x)$ збігається до цієї функції.
16. Який ряд називається рядом Маклорена? Розкладіть у ряд Маклорена функції: e^x, $\sin x$, $\cos x$, $(1+x)^m$, $\ln(1+x)$, $arctg\, x$.
17. Як наближено обчислити значення функції за допомогою степеневого ряду? Вкажіть способи оцінки залишку ряду.
18. У чому полягає метод інтегрування функцій за допомогою рядів?
19. Як за допомогою рядів розв’язуються диференціальні рівняння?

20. Які ряди називають тригонометричними? Які тригонометричні ряди називаються рядами Фур'є?

21. У чому полягають достатні умови розкладання функції в ряд Фур'є?

Задачі та вправи

1. Записати індукцією за n формулу загального члена ряду:

1) $\frac{1}{3}+\frac{2}{9}+\frac{3}{27}+\frac{4}{81}+\ldots;$

2) $\frac{1}{2}+\frac{4}{5}+\frac{7}{8}+\frac{10}{11}+\ldots;$

3) $\frac{1}{2}-\frac{3}{5}+\frac{5}{10}-\frac{7}{17}+\ldots;$

4) $\frac{2}{5}+\left(\frac{3}{8}\right)^2+\left(\frac{4}{11}\right)^3+\left(\frac{5}{14}\right)^4+\ldots;$

5) $-\frac{1\cdot 3}{2\cdot 3}+\frac{3\cdot 5}{4\cdot 7}-\frac{5\cdot 7}{6\cdot 11}+\frac{7\cdot 9}{8\cdot 15}-\ldots;$

6) $1+\frac{1}{2}-\frac{1}{5}+\frac{1}{12}-\frac{1}{27}+\ldots.$

2. Записати формулу n-ї часткової суми ряду s_n; користуючись означенням збіжного числового ряду, встановити, які з наведених рядів збігаються; знайти їхні суми s:

1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{4n^2-1};$

2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{4}{3^{n-1}};$

3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(2n-1);$

4) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\ln\frac{n+1}{n};$

5) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2}{3}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1};$

6) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{9n^2-3n-2}.$

3. Дослідити ряди на збіжність, використовуючи ознаки порівняння. Указати загальний член еталонного ряду:

1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n\sqrt{n}}{n^2+4};$

2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\sin^3\frac{2\pi}{\sqrt{n+1}};$

3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}tg\,\frac{\pi}{5^n};$

4) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\cdot\sqrt[n]{n}};$

5) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n-1}}{n};$

6) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{5^n+1}{2^n};$

7) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{arctg\,n+1}{n^2}$; 8) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\ln n}{\sqrt{n}}$;

9) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n\sqrt{n}+2}{\sqrt{n^6+2n-2}}$; 10) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt[3]{n}}\ln\frac{n+1}{n}$.

4. Дослідити ряди на збіжність, використовуючи ознаку Даламбера. Указати значення $\rho=\lim\limits_{n\to\infty}\left(u_{n+1}/u_n\right)$:

1) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n-1}{\left(\sqrt{2}\right)^n}$; 2) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n!)^2}{n^n}$;

3) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{5n-4}{\sqrt{n\cdot 3^n}}$; 4) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n-1)!}{7^n\cdot n!}$;

5) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^{n^2}}{(2n)!}$; 6) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\pi}{n}\cdot\sin\frac{\pi}{n!}$;

7) $\sum_{n=1}^{\infty}(n+1)\cdot tg\,\frac{\pi}{2^{n+1}}$; 8) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^n}{2^n n!}$;

9) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{7^n}{4^n+1}$; 10) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^3+1}{3^{n+1}}$.

5. Дослідити ряди на збіжність, використовуючи радикальну ознаку Коші. Указати значення $\rho=\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n}$:

1) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n+2}{1+2n}\right)^n$; 2) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^{n-1}}{3n^n}$;

3) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{\ln^n(n+1)}$; 4) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n^2+5}{n^2+1}\right)^{n^3}$;

5) $\sum_{n=1}^{\infty}\ln^n\left(\frac{n+2}{n+3}\right)$; 6) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}\left(\frac{n+2}{n+1}\right)^{n^2}$;

7) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n+2}{3n-1}\right)^{2n+1}$; 8) $\sum_{n=1}^{\infty}\arcsin^n\frac{n+1}{n+3}$;

9) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^{n^2}2^n}{(n+1)^{n^2}}$; 10) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n}{\sqrt{n^n}}$.

6. Дослідити ряди на збіжність, використовуючи інтегральну ознаку Коші. Указати, чому дорівнює НВІ $I_a^{\infty}=\int\limits_a^{\infty}f(x)dx$:

1) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+1)\ln(n+1)}$; 2) $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n\ln^3 n}$;

3) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt[n]{3}}{n^2}$; 4) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\ln n}{n(\ln^4 n+1)}$;

5) $\sum_{n=1}^{\infty}n^3\cdot e^{n^4}$; 6) $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n\sqrt[3]{\ln n}}$;

7) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{e^{1/n^2}}{n^3}$; 8) $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n\cdot\ln n\cdot(\ln\ln n)^2}$.

7. Для наведених рядів встановити, які з них збігаються абсолютно, які – умовно, а які розбігаються:

1) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n+1}}$; 2) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)\sqrt{2n+1}}$;

3) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\ln\frac{n+1}{n+2}$; 4) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\sqrt{\frac{n^2+1}{n^2+2}}$;

5) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}\cdot 3^n}{(4n+1)\cdot 5^n}$; 6) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\left(\frac{4n+1}{2n+3}\right)^n$;

7) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n\ln n}{\sqrt{n}}$; 8) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n\cdot\sqrt[3]{\ln n+2}}$;

9) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n(2n-1)}{5^n+1}$; 10) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}n}{3n^2+4}$;

11) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos n\pi}{2^n}$; 12) $\sum_{n=1}^{\infty}tg\,\frac{(2n-1)\pi}{4}$;

13) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}}{\sqrt{n^3}} \left(\frac{n+1}{n}\right)^n$;

14) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} \frac{7^n}{n^2}$.

8. Знайти область збіжності функціонального ряду $D\left(\tilde{U}\right)$:

1) $\sum_{n=1}^{\infty} x^n$;

2) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 + x^2}$;

3) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(1+x)^2}$;

4) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n^2}$;

5) $\sum_{n=1}^{\infty} \ln^n x$;

6) $\sum_{n=1}^{\infty} x^n tg\, \frac{x}{2^n}$;

7) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(x+2)^n}$;

8) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n \cdot (3x-4)^n}{5^n}$;

9) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^x}$;

10) $\sum_{n=1}^{\infty} e^{(1-n)x}$.

9. Довести рівномірну збіжність наведених функціональних рядів у зазначених проміжках:

1) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 + x^2}$, $(-\infty,+\infty)$;

2) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2\left(1+x^2\right)}$, $(-\infty,+\infty)$;

3) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4^{n-1}\sqrt{1+(2n-1)x}}$, $(0,+\infty)$;

4) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x}{1+n^4x^2}$, $(0,+\infty)$;

5) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(x+2n-1)(x+2n+1)}$, $(0,+\infty)$;

6) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{(2n)!}$, $(-\infty,+\infty)$.

10. Знайти область збіжності заданих степеневих рядів:

1) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{2n+1}$;

2) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!(x-3)^{n-1}}{2^{n+1}}$;

3) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+1)^n}{n^2}$;

4) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^{n-1}(x+1)^n}{n^n}$;

5) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{2^{n-1}x^{n-1}}{(2n-1)^2\sqrt{3^{n-1}}}$;

6) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \sqrt{\frac{n+1}{n+2}}(2-x)^n$;

7) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2+1}\left(\frac{x}{2}\right)^n$;

8) $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{(x+5)^n}{3^{n+1}n\ln^3 n}$;

9) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n+1}{n}\right)^n x^{2n}$;

10) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(3-x)^{2n}}{\sqrt{n}}$;

11) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{(x-4)^{2n-1}}{2n-1}$;

12) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(3x)^{5n}}{2n-1}$;

13) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n+1}{2n+1}\right)^n (x-2)^{2n}$;

14) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(x-1)^{n(n+1)}}{n^n}$;

15) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{x^{3n}}{(4n-3)8^n}$;

16) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(2x+1)^n}{\sqrt{n}\left(n^2+1\right)}$.

11. Знайти суми наведених рядів:

1) $1+2x+3x^2+4x^3+\ldots+nx^{n-1}+\ldots$, якщо $|x|<1$;

2) $x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}+\frac{x^4}{4}+\ldots+\frac{x^n}{n}+\ldots$, якщо $|x|<1$;

3) $\frac{1}{a}+\frac{2x}{a^2}+\frac{3x^2}{a^3}+\frac{4x^3}{a^4}+\ldots+\frac{nx^{n-1}}{a^n}+\ldots$, якщо $|x|<a$;

4) $\frac{x^2}{2a}+\frac{x^3}{3a^2}+\frac{x^4}{4a^3}+\frac{x^5}{5a^4}+\ldots+\frac{x^{n+1}}{(n+1)a^n}+\ldots$, якщо $-a\le x<a$;

5) $\frac{1\cdot 2}{a^2}+\frac{2\cdot 3}{a^3}x+\frac{3\cdot 4}{a^4}x^2+\ldots+\frac{n(n+1)}{a^{n+1}}x^{n-1}+\ldots$, якщо $|x|<a$;

6) $-2x+4x^2-6x^3+\ldots+(-1)^n 2n\cdot x^{2n-1}+\ldots$, якщо $|x|<1$;

7) $\frac{x^2}{1\cdot 2}-\frac{x^3}{2\cdot 3}+\frac{x^4}{3\cdot 4}-\ldots+(-1)^n\frac{x^{n+1}}{n\cdot(n+1)}+\ldots$, якщо $-1\le x<1$.

12. Розвинути функцію $f(x)$ в ряд Тейлора в околі точки x_0:

1) $f(x)=\ln x$, $x_0=1$;

2) $f(x)=1/x^2$, $x_0=-1$;

3) $f(x)=\cos^2 x$, $x_0=\pi/4$;

4) $f(x)=1/x$, $x_0=2$;

5) $f(x)=\ln\dfrac{1}{x^2-2x+2}$, $x_0=1$;

6) $f(x)=\dfrac{1}{x^2+4x+7}$, $x_0=-2$.

13. Розвинути функцію $f(x)$ в ряд Маклорена:

1) $f(x)=x^2\ln\left(1-x^3\right)$;

2) $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{4-x^2}}$;

3) $f(x)=\sin^2 x$;

4) $f(x)=x\cdot e^{-x/2}$;

5) $f(x)=\ln\sqrt{\dfrac{1+x}{1-x}}$;

6) $f(x)=3^x$;

7) $f(x)=\cos\dfrac{\pi x}{4}$;

8) $f(x)=\dfrac{\sin 3x}{x}$.

14. Обчислити наближено з точністю до $0{,}0001$:

1) $\sqrt[5]{15}$; 2) $\cos 10^\circ$; 3) $\ln 1{,}3$; 4) $\arcsin 0{,}2$; 5) $arctg\, 0{,}5$; 6) $\sqrt[3]{e}$.

15. Обчислити визначені інтеграли з точністю до $0{,}001$:

1) $\int\limits_0^{1/4} e^{-x^2}dx$;

2) $\int\limits_0^{0,1} \dfrac{\ln(1+x)}{x}dx$;

3) $\int\limits_{0,1}^{1/3} \dfrac{dx}{1+x^4}$;

4) $\int\limits_0^{1/2} \dfrac{arctg\, x}{x}dx$;

5) $\int\limits_0^{1/4} \sin x^2 dx$;

6) $\int\limits_{\pi/6}^{\pi/4} \dfrac{\cos x}{x}dx$;

7) $\int\limits_0^{1/2} \dfrac{dx}{\sqrt{1+x^4}}$;

8) $\int\limits_{0,1}^{0,2} \dfrac{e^{-x}}{x^3}dx$.

16. Розвинувши функції в ряд Маклорена, обчислити границі:

1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-arctg\, x}{x^3}$;

2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{e^x-1-x}$;

3) $\lim\limits_{x\to 0}\left(x-x^2\ln\left(1+\dfrac{1}{x}\right)\right)$;

4) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1+x)\cdot e^{-x}-(1-x)\cdot e^x}{\arcsin x-arctg\, x}$.

17. Знайти три перших (відмінних від нуля) члени розкладу в ряд розв'язку диференціального рівняння, які задовольняють задані початкові умови:

1) $y' = 2x + \cos y$, $\quad y(0) = 0$;

2) $2y' - (x + y) \cdot y - e^x = 0$, $\quad y(0) = 2$;

3) $y' + y\cos x - 3e^x y^2 - \sin x = 0$, $\quad y(0) = 1$;

4) $y' = xy + \ln(x + y)$, $\quad y(1) = 0$;

5) $y'' = y\cos y' + x$, $\quad y(0) = 1$, $y'(0) = \pi/3$;

6) $y'' = (y')^2 + xy - 2x$, $\quad y(2) = 0$, $y'(2) = 2$;

7) $y'' = x^2 + y^2$, $\quad y(-1) = 0$, $y'(-1) = 0$.

18. Зобразити рядом Фур'є періодичну функцію $f(x)$ з періодом T, задану на вказаному проміжку:

1) $f(x) = x + \pi$, $x \in (-\pi, \pi]$, $\quad T = 2\pi$;

2) $f(x) = \begin{cases} 0, & -\pi < x < 0, \\ x, & 0 \le x \le \pi, \end{cases} \quad T = 2\pi$;

3) $f(x) = |\, x \,|$, $x \in [-\pi, \pi]$, $\quad T = 2\pi$;

4) $f(x) = \begin{cases} -1, & -\pi \le x < 0, \\ 1, & 0 \le x < \pi, \end{cases} \quad T = 2\pi$;

5) $f(x) = 2x - 3$, $x \in [-\pi, \pi)$, $\quad T = 2\pi$.

6) $f(x) = \begin{cases} -1/2, & -\pi < x < 0, \\ 1, & 0 \le x \le \pi, \end{cases} \quad T = 2\pi$;

7) $f(x) = x^2$, $x \in [-1, 1]$, $\quad T = 2$;

8) $f(x) = \begin{cases} 0, & -2 < x < 0, \\ 2, & 0 \le x \le 2, \end{cases} \quad T = 4$.

19. Розкласти в ряд Фур'є за синусами функцію $f(x) = \cos 2x$ на півперіоді $(0, \pi]$.

20. Розкласти в ряд Фур'є за косинусами функцію $f(x) = \dfrac{\pi}{4} - \dfrac{x}{2}$ на півперіоді $(0, \pi]$.

21. Розкласти в ряд Фур'є функцію $f(x)=x-\frac{x^2}{2}$, задану на півперіоді $(0,\ 2]$: а) за синусами; б) за косинусами.

Відповіді

1. 1) $u_n=\frac{n}{3^n}$; 2) $u_n=\frac{3n-2}{3n-1}$; 3) $u_n=(-1)^{n+1}\frac{2n-1}{n^2+1}$; 4) $u_n=\left(\frac{n+1}{3n+2}\right)^n$; 5) $u_n=(-1)^n\frac{(2n-1)\cdot(2n+1)}{2n\cdot(4n-1)}$; 6) $u_n=\frac{(-1)^{n+1}}{2^n-n}$.

2. 1) $s_n=\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{2n+1}\right)$, ряд збігається, $s=\frac{1}{2}$; 2) $s_n=6\left(1-3^{-n}\right)$, ряд збігається, $s=6$; 3) $s_n=n^2$, ряд розбігається; 4) $s_n=\ln(n+1)$, ряд розбігається; 5) $s_n=\frac{4}{3}\left(1-2^{-n}\right)$, ряд збігається, $s=\frac{4}{3}$; 6) $s_n=\frac{1}{3}\left(1-\frac{1}{3n+1}\right)$, ряд збігається, $s=\frac{1}{3}$.

3. 1) розбігається, $v_n=1/\sqrt{n}$; 2) збігається, $v_n=1/n^{3/2}$; 3) збігається, $v_n=(1/5)^n$; 4) розбігається, $v_n=1/n$; 5) збігається, $v_n=1/n^{3/2}$; 6) розбігається, $v_n=(5/2)^n$; 7) збігається, $v_n=1/n^2$; 8) розбігається, $v_n=1/\sqrt{n}$; 9) збігається, $v_n=1/n^{3/2}$; 10) збігається, $v_n=1/n^{4/3}$.

4. 1) збігається, $\rho=1/\sqrt{2}$; 2) розбігається, $\rho=+\infty$; 3) збігається, $\rho=1/\sqrt{3}$; 4) розбігається, $\rho=+\infty$; 5) розбігається, $\rho=+\infty$; 6) збігається, $\rho=0$; 7) збігається, $\rho=1/2$; 8) розбігається, $\rho=e/2$; 9) розбігається, $\rho=7/4$; 10) збігається, $\rho=1/3$.

5. 1) збігається, $\rho=1/2$; 2) збігається, $\rho=0$; 3) збігається, $\rho=0$; 4) розбігається, $\rho=e^4$; 5) збігається, $\rho=0$; 6) розбігається, $\rho=e/2$; 7) збігається, $\rho=1/9$; 8) розбігається, $\rho=\pi/2$; 9) збігається, $\rho=2/e$; 10) збігається, $\rho=0$.

6. 1) розбігається, $I_1^\infty = \infty$; 2) збігається, $I_2^\infty = \dfrac{1}{2\ln^2 2}$; 3) збігається, $I_1^\infty = \dfrac{2}{\ln 3}$; 4) збігається, $I_1^\infty = \dfrac{\pi}{4}$; 5) розбігається, $I_1^\infty = \infty$; 6) розбігається, $I_2^\infty = \infty$; 7) збігається, $I_1^\infty = \dfrac{e-1}{2}$; 8) збігається, $I_2^\infty = \dfrac{1}{\ln\ln 2}$.

7. 1) збігається умовно; 2) збігається абсолютно; 3) збігається умовно; 4) розбігається; 5) збігається абсолютно; 6) розбігається; 7) збігається умовно; 8) збігається умовно; 9) збігається абсолютно; 10) збігається умовно; 11) збігається абсолютно; 12) розбігається; 13) збігається абсолютно; 14) розбігається.

8. 1) $D(\tilde{U}) = (-1,1)$; 2) $D(\tilde{U}) = \mathbf{R}$; 3) $D(\tilde{U}) = (-\infty,-2)\cup(0,+\infty)$; 4) $D(\tilde{U}) = \mathbf{R}$; 5) $D(\tilde{U}) = (e^{-1}, e)$; 6) $D(\tilde{U}) = (-2,2)$; 7) $D(\tilde{U}) = (-\infty,-3)\cup$ $\cup(-1,+\infty)$; 8) $D(\tilde{U}) = (-1/3,3)$; 9) $D(\tilde{U}) = (1,+\infty)$; 10) $D(\tilde{U}) = (0,+\infty)$.

10. 1) $[-1,1)$; 2) $x=3$; 3) $[-2,0]$; 4) $(-\infty,+\infty)$; 5) $[-\sqrt{3}/2,\sqrt{3}/2]$; 6) $(1,3)$; 7) $[-2,2]$; 8) $[-8,-2]$; 9) $(-1,1)$; 10) $(2,4)$; 11) $[3,5]$; 12) $[-1/3,1/3)$; 13) $(2-\sqrt{2},2+\sqrt{2})$; 14) $[0,2]$; 15) $[-2,2)$; 16) $[-1,0]$.

11. 1) $\dfrac{1}{(1-x)^2}$; 2) $-\ln(1-x)$; 3) $\dfrac{a}{(a-x)^2}$; 4) $a\ln\dfrac{a}{a-x} - x$; 5) $\dfrac{2a}{(a-x)^3}$; 6) $-\dfrac{2x}{(1+x^2)^2}$; 7) $(x+1)\ln(x+1) - x$.

12. 1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\dfrac{(x-1)^n}{n}$, $x\in(0,2]$; 2) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(n+1)(x+1)^n$, $x\in(-2,0)$; 3) $\dfrac{1}{2}+\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n 4^{n-1}}{(2n-1)!}\left(x-\dfrac{\pi}{4}\right)^{2n-1}$, $x\in(-\infty,+\infty)$; 4) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{2^{n+1}}(x-2)^n$, $x\in(0,4)$; 5) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n(x-1)^{2n}}{n}$, $x\in[0,2]$; 6) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^n(x+2)^{2n}}{3^{n+1}}$, $x\in(-2-\sqrt{3},-2+\sqrt{3})$.

13. 1) $-\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{x^{3n+2}}{n}$, $x\in[-1,1)$; 2) $\dfrac{1}{2}+\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\cdot\dfrac{x^{2n}}{2^{2n+1}}$, $x\in(-2,2)$;

3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}2^{2n-1}}{(2n)\ !}x^{2n}$, $x\in(-\infty,+\infty)$; 4) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n}}{2^{n}n!}x^{n+1}$, $x\in(-\infty,+\infty)$;

5) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x^{2n-1}}{2n-1}$, $x\in(-1,1)$; 6) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\ln^{n}3}{n!}x^{n}$, $x\in(-\infty,+\infty)$; 7) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^{n}\left(\frac{\pi}{4}\right)^{2n}\frac{x^{2n}}{(2n)!}$,

$x\in(-\infty,+\infty)$; 8) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}3^{2n-1}}{(2n-1)!}x^{2n-2}$, $x\in(-\infty,\infty)$.

14. 1) $1{,}7188$; 2) $0{,}9848$; 3) $0{,}2624$; 4) $0{,}2014$; 5) $0{,}4636$; 6) $1{,}3956$.

15. 1) $I_{0}^{1/4}\approx 0{,}245$; 2) $I_{0}^{0,1}\approx 0{,}098$; 3) $I_{0,1}^{1/3}\approx 0{,}232$; 4) $I_{0}^{1/2}\approx 0{,}487$; 5) $I_{0}^{1/4}\approx 0{,}005$; 6) $I_{\pi/6}^{\pi/4}\approx 0{,}323$; 7) $I_{0}^{1/2}\approx 0{,}497$; 8) $I_{0,1}^{0,2}\approx 32{,}831$.

16. 1) $1/3$; 2) 1; 3) 0; 4) $4/3$.

17. 1) $y=x+x^{2}-\frac{x^{3}}{6}+\ldots$; 2) $y=2+\frac{5}{2}x+\frac{13}{4}x^{2}+\ldots$; 3) $y=1+2x+7x^{2}+\ldots$; 4) $y=\frac{(x-1)^{2}}{2}+\frac{(x-1)^{3}}{6}+\frac{(x-1)^{4}}{6}+\ldots$; 5) $y=1+\frac{\pi}{3}x+\frac{1}{4}x^{2}+\ldots$; 6) $y=2(x-2)+$ $+\frac{(x-2)^{3}}{3}+\frac{(x-2)^{4}}{2}+\ldots$; 7) $y=\frac{(x+1)^{2}}{2}-\frac{(x+1)^{3}}{3}+\frac{(x+1)^{4}}{12}+\ldots$.

18. 1) $f(x)=\pi+2\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}\sin nx$; 2) $f(x)=\frac{\pi}{4}+\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{(-1)^{n}-1}{\pi n^{2}}\cos nx+\right.$ $\left.+\frac{(-1)^{n}}{n}\sin nx\right)$; 3) $f(x)=\frac{\pi}{2}+\frac{2}{\pi}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n}-1}{n^{2}}\cos nx$; 4) $f(x)=\frac{2}{\pi}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1-(-1)^{n}}{n}\times$ $\times\sin nx$; 5) $f(x)=-3+4\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n}}{n}\sin nx$; 6) $f(x)=\frac{1}{4}+\frac{3}{\pi}\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{\sin(2n+1)x}{2n+1}$; 7) $f(x)=\frac{1}{3}+\frac{4}{\pi^{2}}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n}}{n^{2}}\cos\pi nx$; 8) $f(x)=1-\frac{4}{\pi}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n-1}\sin\frac{\pi(2n-1)x}{2}$.

19. $f(x)=\frac{4}{\pi}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2n-1}{2^{2}-(2n-1)^{2}}\sin(2n-1)x$.

20. $f(x)=\frac{2}{\pi}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\cos(2n+1)x}{(2n+1)^2}$.

21. а) $f(x)=\frac{1}{4}-\frac{4}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n+1}{n^2}\cos\frac{\pi nx}{2}$; б) $f(x)=\frac{8}{\pi^3}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n+1}{n^3}\sin\frac{\pi nx}{2}$.

Ключові терміни

Числовий ряд, часткова сума ряду, збіжність і розбіжність ряду, властивості збіжних рядів, необхідна умова збіжності, гармонійний ряд, ряд геометричної прогресії, достатні ознаки збіжності рядів з додатними членами, ознаки порівняння, ознака Даламбера, ознака Коші радикальна, ознака Коші інтегральна, знакозмінні ряди, ознака Лейбніца, умовна та абсолютна збіжності, функціональний ряд, степеневий ряд, радіус і область збіжності, ряд Тейлора, ряд Маклорена, розвинення функцій у степеневий ряд, тригонометричний ряд, ряд Фур'є, коефіцієнти ряду Фур'є, теорема Діріхле, гармонічний аналіз.

Резюме

Викладено основні теоретичні положення щодо: числових рядів (необхідна і достатні умови збіжності додатних і знакозмінних рядів); функціональних рядів (необхідна ознака збіжності, рівномірна і нерівномірна збіжності, мажорування рядів, властивості рівномірно збіжних рядів); степеневих рядів (властивості, відшукання області збіжності, розвинення функцій в ряди Тейлора і Маклорена); тригонометричних рядів Фур'є (визначення коефіцієнтів ряду, достатні умови збіжності, розвинення в ряд Фур'є функцій, заданих на довільних скінченних проміжках.

Література: [4; 6; 12; 14; 18; 20; 22; 23].

Використана література

1. Берман Г. Н. Сборник задач по курсу математического анализа / Г. Н. Берман. – М. : Наука, 2002. – 384 с.

2. Бузько Я. П. Вища математика. Ч. 1 / Я. П. Бузько, В. Ф. Сенчуков, В. Г. Тітарев. – Х. : ХДЕУ, 1996. – 136 с.

3. Васильченко І. П. Вища математика для економістів : підручник / І. П. Васильченко. – К. : Знання-Прес, 2002. – 454 с.

4. Вища математика. Збірник задач : навч. посібн. / В. П. Дубовик, І. І. Юрик, І. П. Вовкодав та ін. ; за ред. В. П. Дубовика, І. І. Юрика. – К. : Вид. А.С.К., 2003. – 480 с.

5. Вища математика: основні означення, приклади і задачі : навч. посібн. Кн. 2 / І. П. Васильченко, В. Я. Данилов, А. І. Лобанов та ін. – К. : Либідь, 1994. – 480 с.

6. Воробьев Н. Р. Теория рядов / Н. Р. Воробьев. – М. : Наука, 1970. – 204 с.

7. Высшая математика для экономистов / под ред. Н. Ш. Кремера. – М. : ЮНИТИ, 2002. – 440 с.

8. Давыдов А. Г. Сигналы и линейные системы: тематические лекции / А. Г. Давыдов. – Екатеринбург : УГГУ, ИГиГ. Фонд электронных документов, 2005. – 262 с.

9. Данко П. Е. Высшая математика в упражнениях и задачах : учебное пособие для вузов : в 2-х ч. / П. Е. Данко, А. Г. Попов, Т. Я. Кожевникова. – 6-е изд. – М. : Издательский дом „ОНИКС 21 век” : Мир и Образование, 2003. – Ч. 1. – 304 с. ; Ч. 2. – 416 с.

10. Дороговцев А. Я. Математичний аналіз : підручник : у 2-х ч. : Ч.1 / А. Я. Дороговцев. – К. : Либідь, 1993. – 320 с.

11. Дубовик В. П. Вища математика : навч. посібн. / В. П. Дубовик, І. І. Юрик. – К. : Вид. А.С.К., 2004 – 648 с.

12. Игнатьева А. В. Курс высшей математики / А. В. Игнатьева, Т. И. Краснощекова, В. Ф. Смирнов. – М. : Высшая школа, 1968. – 692 с.

13. Информационные системы и технологии в экономике : учебник / Т. П. Барановская, В. И. Лойко, М. И. Семенов и др. ; под. ред. В. И. Лойко. – М. : Финансы и статистика, 2006. – 416 с.

14. Корн Г. Справочник по математике для научных работников и инженеров / Г. Корн, Т. Корн ; пер. с англ. ; под ред. И. Г. Арамановича. – М. : Наука, 1970. – 720 с.

15. Кудрявцев Л. Д. Современная математика и ее преподавание / Л. Д. Кудрявцев. – М. : Наука, 1985. – 176 с.

16. Пискунов Н. С. Дифференциальное и интегральное исчисления. Т. 1, 2 / Н. С. Пискунов. – М. : Наука, 1972. – Т. 1. – 456 с. ; Т. 2. – 576 с.

17. Робоча програма навчальної дисципліни “Вища математика” для студентів напряму підготовки „Комп’ютерні науки” всіх форм навчання / укл. В. Ф. Сенчуков, Т. В. Денисова. – Х. : Вид. ХНЕУ, 2011. – 60 с.

18. Романовский П. И. Ряды Фурье. Теория поля. Аналитические и специальные функции. Преобразование Лапласа / П. И. Романовский – М. : Наука, 1973. – 336 с.

19. Сборник задач по высшей математике. 1 курс / К. Н. Лунгу, Д. Т. Письменный, С. Н. Федин и др. – М. : Айрис-пресс, 2004. – 576 с.

20. Сборник задач по высшей математике. 2 курс / К. Н. Лунгу, В. П. Норин, Д. Т. Письменный и др. ; под. ред. С. Н. Федина. – 3-е изд., испр. – М. : Айрис-пресс, 2005. – 592 с.

21. Тевяшев А. Д. Высшая математика. Сборник задач и упражнений / А. Д. Тевяшев, А. Г. Литвин. – Х. : ХТУРЭ, 1999. – 192 с.

22. Травкін Ю. І. Математика для економістів : підручник / Ю. І. Травкін, Л. М. Малярець. – Х. : ВД „ІНЖЕК”, 2005. – 816 с.

23. Фихтенгольц Г. М. Курс дифференциального и интегрального исчисления. Т. 2 / Г. М. Фихтенгольц. – Л. : Физматгиз, 1962. – 808 с.

24. Шкіль М. І. Математичний аналіз. Ч. 1 / М. І. Шкіль. – К. : Вища школа, 1994. – 424 с.

Покажчик позначень

$I_a^{+\infty}$, $\left(I_{-\infty}^{b},\ I_{-\infty}^{+\infty}\right)$	– невластивий інтеграл першого типу (НВІ-1) від функції $f(x)$ на проміжку $[a,+\infty]$ $((-\infty,b]$, $(-\infty,+\infty))$, 72
$I_a^{+\infty} \succ (\prec)$	– НВІ-1 збіжний (розбіжний), 72 (73)
$\Leftrightarrow$	– еквіваленція (якщо і тільки якщо), 75
$\bigcup$	– об’єднання (перетин) множин, 76
$\delta(t)$	– дельта-функція Дірака, 78
c^0	– особлива точка функції, 78
$\backslash$	– різниця множин, 81
$\rho\ (\varphi)$	– полярний радіус (кут), 89
$V_{Ox}\ \left(V_{Oy},\ V_{OP}\right)$	– об’єм тіла, утвореного обертанням фігури навколо осі Ox (Oy, полярної осі), 97 (97, 99)
$\mathcal{A}$	– робота змінної сили, 105
$\wedge$	– кон’юнкція (… і …), 129
$\{x \mid P(x)\}$	– множина елементів x із властивістю $P(x)$, 129
$D(f)\ (E(f))$	– область існування (змінювання) функції f, 129
$u = f(x_1, x_2,.., x_n)$	– функція n змінних x_1, x_2, …, x_n, 133
$\mathbf{R}^2$, $\mathbf{R}^3$, $\mathbf{R}^n$	– дво-, три-, n-вимірні простори, 129, 133
$\{M_n\} = \{(x_n, y_n)\}$	– послідовність точок в $\mathbf{R}^2$, 135
$\in$	– знак належності, 136
$B(M_0, \varepsilon)$	– ε-окіл точки M_0, 136
$\{M_n\} \succ M_0$	– збіжна до M_0 послідовність точок $\{M_n\}$, 136
$\rho(M_0, M_n)$	– відстань від M_n до M_0, 136
$\lim\limits_{n\to\infty} M_n = M_0$	– границя послідовності точок $\{M_n\}$, 136
___	– „при змінюванні стає і залишається”, 136
Δx, Δy (Δz)	– прирости аргументів x, y (повний приріст) функції $z = f(x,y)$ у точці, 138
$\lim\limits_{\substack{x\to x_0 \\ y\to y_0}} f(x,y)$	– границя функції $z = f(x,y)$ у точці (x_0, y_0), 138

$\Delta_{x_i} u$ – частинний приріст ФКЗ $u = f(M)$ за змінною x_i, 140

u'_{x_i}, $\dfrac{\partial u}{\partial x_i}$, f'_{x_i} – частинна похідна (ч/п) ФКЗ $u = f(M)$ за змінною x_i, 141

$\alpha \sim \beta$ – еквівалентні н/м α і β, 144

$d_{x_i} u$, $d_{x_i} f(M)$ – частинний диференціал ФКЗ $u = f(M)$ за змінною x_i, 144

du $(d^m u)$ – повний диференціал першого (m-го порядку $(m \geq 2,\ m \in \mathbf{N})$) ФКЗ $u = f(M)$, 146 (154)

$\dfrac{\partial^m u}{\partial x_{i_1} \ldots \partial x_{i_{m-1}} \partial x_{i_m}}$ – ч/п ФКЗ $u = f(M)$ m-го порядку за змінними x_{i_1}, x_{i_2}, …, $x_{i_{m-1}}$, x_{i_m} $(m \geq 2,\ m \in \mathbf{N})$, 153

$d_{x_{i_1} \ldots x_{i_{m-1}} x_{i_m}} u$ – частинний диференціал ФКЗ $u = f(M)$ m-го порядку за змінними x_{i_1}, x_{i_2}, …, $x_{i_{m-1}}$, x_{i_m}, 154

$E_x(z)$ $(E_y(z))$ – частинна еластичність функції $z = f(x, y)$ за змінною x (y), 156 (156)

$\bar{i}$, $\bar{j}$, $\bar{k}$ – координатні орти, 158

$\bar{l}_0 = (\cos\alpha, \cos\beta)$ – одиничний напрямний вектор, 158

$\overline{\Delta l} = (\Delta x, \Delta y)$ – вектор приростів аргументів, 158

u'_l, $\dfrac{\partial u}{\partial l}$, f'_l – похідна функції $u = f(M)$ за напрямом l, 159

$|\bar{a}|$ – довжина (модуль) вектора $\bar{a}$, 160

$grad\, u$, ∇u – градієнт функції $u = f(M)$, 163

$f_{\max}$ $(f_{\min})$ – локальний максимум (мінімум) ФКЗ $u = f(M)$, 179

$\vee$ – диз’юнкція (… або …), 180

$\min\limits_D f(M)$, $\max\limits_D f(M)$ – найменше, найбільше значення ФКЗ $u = f(M)$ в області D, 184

$f^c_{\max}$ $(f^c_{\min})$ – умовний максимум (мінімум) ФКЗ $u = f(M)$, 187

$\varphi_i(M) = 0$, $i = \overline{1, m}$ – рівняння зв’язку, 186

$\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n \ (U)$ – числовий ряд із загальним членом u_n, 203

$s_n \ (s)$ – часткова сума (сума) ряду, 203 (204)

Γ – ряд геометричної прогресії, 205

$U \succ (U \prec)$ – збіжний (розбіжний) ряд U, 204

$R_U \ (r_n(x))$ – залишок числового (функціонального) ряду, 209 (234)

$U^{\pm} \ (U^{\mp})$ – знакопереміжний ряд, 225

$\sum\limits_{n=1}^{\infty} |u_n| \ (|U|)$ – модульний ряд для ряду U, 230

$\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x) \ (\widetilde{U})$ – функціональний ряд, 233

$D(\widetilde{U})$ – область поточкової збіжності ряду $\widetilde{U}$, 234

$\mathbf{C}^{(1)}([a,b])$ – множина неперервно диференційовних на сегменті $[a,b]$ функцій, 239

$\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x_n \ (U(x))$ – степеневий ряд за степенями x, 242

R – радіус абсолютної збіжності ряду, 242

$(-R, R)$ – інтервал абсолютної збіжності ряду, 242

$\mathbf{C}^{(\infty)}$ – множина нескінченно диференційовних функцій, 248

$\delta(x)$ – абсолютна похибка при заміні суми ряду його частковою сумою, 249

C_n^i – біноміальні коефіцієнти, 253

T – період функції, 262

$i = \sqrt{-1}$ – уявна одиниця, 271

Предметний покажчик

Зміст

НАВЧАЛЬНЕ ВИДАННЯ

ВИЩА МАТЕМАТИКА. ЗАГАЛЬНІ РОЗДІЛИ

Частина друга

Навчальний посібник для студентів напряму підготовки 6.050101 „Комп'ютерні науки"

Автори: **Сенчуков Віктор Федорович**
Денисова Тетяна Володимирівна

Відповідальний за випуск **Малярець Л. М.**
Відповідальний редактор **Сєдова Л. М.**

Редактор **Семенова І. М.**
Коректор **Мартовицька-Максимова В. А.**

План 2013 р. Поз. № 21 – П
Підп. до друку Формат 60×90 1/16. Папір MultiCopy. Друк Riso.
Ум.-друк. арк. 27,75 Обл.-вид. арк. Тираж прим. 400. Зам. №

Свідоцтво про внесення до Державного реєстру суб'єктів видавничої справи ***Дк №481 від 13.06.2001р.***

Видавець і виготівник – видавництво ХНЕУ, 61001, м. Харків, пр. Леніна, 9а