

**МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ, МОЛОДІ ТА СПОРТУ
УКРАЇНИ**

ХАРКІВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ ЕКОНОМІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ

ВИЩА МАТЕМАТИКА. ЗАГАЛЬНІ РОЗДІЛИ

Частина перша

**Навчальний посібник для студентів напрямку підготовки 6.050101
„Комп’ютерні науки”**

Харків. Вид. ХНЕУ, 2013

УДК 51(075.8)

ББК 22.1я73

С 31

Рецензенти: докт. фіз.-мат. наук, професор, завідувач кафедри вищої та прикладної математики Української інженерно-педагогічної академії *Литвин О. М.*; докт. фіз.-мат. наук, професор кафедри вищої математики Національного аерокосмічного університету ім. М. Є. Жуковського „ХАІ” *Проценко В. С.*

Затверджено на засіданні вченої ради Харківського національного економічного університету

Протокол № 2 від 22.10.2012 р.

Сенчуков В. Ф.

С 31 Вища математика. Загальні розділи : навчальний посібник для студентів напряму підготовки 6.050101 „Комп’ютерні науки”. Ч. 1 / В. Ф. Сенчуков, Т. В. Денисова. – Х. : Вид. ХНЕУ, 2013. – 444 с. (Укр. мов.)

Подано теоретичний і практичний матеріал за розділами: „Лінійна і векторна алгебри та аналітична геометрія”, „Диференціальне числення функції однієї змінної”. У кінці кожної теми наведено: запитання для самодіагностики засвоєння матеріалу; задачі та вправи з відповідями; ключові терміни; резюме за темою; використану літературу.

Рекомендовано для студентів напряму підготовки 6.050101 „Комп’ютерні науки” всіх форм навчання.

УДК 51(075.8)

ББК 22.1я73

© Харківський національний економічний університет, 2013

© Сенчуков В. Ф.

Денисова Т. В.

2013

Вступ

Математика – це мова, якою говорять усі точні науки.

М. І. Лобачевський

Жодне людське дослідження не може називатись істинною наукою, якщо воно не пройшло через математичні доведення.

Леонардо да Вінчі

Під „Вищою математикою” розуміють математичні дисципліни, які виникли в XVII – XVIII ст. і в подальшому розвитку стали базою застосовної математики. Основний об’єкт, який вивчає вища математика, – це змінні величини, сталі величини мають другорядне значення, вони є об’єктом вивчення елементарної математики. Проте поділ математики на елементарну й вищу дуже умовний: ідеї вищої математики зародилися ще в працях Архімеда, але не знайшли тоді подальшого розвитку.

Частина перша пропонованого посібника з загального курсу навчальної дисципліни „Вища математика” для студентів напряму підготовки „Комп’ютерні науки” включає два розділи: „Лінійна і векторна алгебри та аналітична геометрія” (розділ 1), „Диференціальне числення функції однієї змінної” (розділ 2). Відповідний матеріал охоплює два змістовні модулі підсумкового контролю знань, викладений відповідно до чинної робочої програми, складеної згідно з Галузевими стандартами навчальної дисципліни.

У даному посібнику за кожною темою наводяться: *мета*, яку треба досягти в результаті вивчення теми; *питання теми*, які підлягають засвоєнню; *компетентності* (за Галузевими стандартами), що формуються після вивчення теми (*загальнонаукова, загальнопрофесійна, спеціалізовано-професійна*); *висвітлення питань теми*; *контрольні запитання* для самодіагностики засвоєння матеріалу; *задачі та вправи* і відповіді до них; *ключові терміни*; *резюме*; *література* за темою. У кінці посібника поміщені: список використаної *літератури*, *показчик позначень* і *предметний* показчик.

Лінійна алгебра охоплює основні відомості про: матриці, визначники квадратних матриць, (точні) методи розв’язання квадратних і прямокутних систем лінійних алгебраїчних рівнянь. Векторна алгебра розглядається у тісному зв’язку з лінійною алгеброю, а аналітична геометрія використовує теоретичні положення і лінійної, і векторної алгебр.

Виклад матеріалу про границі подано певною мірою не в традиційному плані: спочатку розглядаються дискретні (неперервні) нескінченно

малі і нескінченно великі величини, а потім границі довільних послідовностей (функцій неперервного аргументу). Це обумовлено тим, що обчислення границь у виключній більшості випадків „в'ється” навколо нескінченно малих та нескінченно великих. Такий підхід сприятиме, на думку авторів (на підставі практичного досвіду), кращому сприйняттю й усвідомленню як теоретичних положень, так і техніки обчислення границь.

Похідні та їхні застосування згідно з визначеними Галузовим стандартом темами викладаються за усталеною схемою.

З педагогічних та методичних міркувань автори не прагнули доводити всі теореми і при найбільш загальних умовах. Здебільшого доводиться одна з кількох однотипних за ідеєю доведення теорем. Певна частина роботи з опанування дисципліни залишається студенту, хоча всі принципові положення викладені. Систематично використовуються елементи сучасної математичної символіки, для засвоєння якої означення понять, формулювання теорем тощо у виключній більшості випадків подаються і словесно, і в символічному вигляді.

З метою кращого осмислення теоретичних основ навчальної дисципліни загальні викладки супроводжуються конкретними прикладами (в тому числі і застосовного характеру) з детальним коментарем.

Теоретичні відомості подаються, порівняно з іншими посібниками, в деякому сенсі не традиційно: не в академічному стилі – стилі монографії, а, так би мовити, „у педагогічно-методичному”. Автори неначебто ведуть бесіду з допитливими: по ходу викладу ставляться запитання щодо розуміння (осмислення) відповідного матеріалу. Введено своєрідні рубрики – „пропонуємо”, „наголошуємо” та інші (*прослідкуйте, обміркуйте, зіставте, порівняйте* тощо). На думку авторів, це сприятиме кращому засвоєнню теоретичних положень і більш глибокому розумінню їх суті.

Активне засвоєння матеріалу в запропонованому обсязі є запорукою успішного опанування ідей і методів математичного аналізу, інших дисциплін математичного циклу: „Теорія ймовірностей і математична статистика”, „Дискретна математика”, „Математичне програмування”, „Чисельні методи”, і спеціальних дисциплін.

Для того щоб посібник можна було студіювати незалежно від інших джерел інформації, він не містить (за текстом) посилань на них. Формули, рисунки, теореми тощо нумеруються трьома числами, перше з яких є номером теми, друге (після крапки) указує на номер питання теми, третє (після крапки) є власне порядковим номером тієї чи іншої смислової складової тексту.

Розділ 1. Лінійна і векторна алгебри та аналітична геометрія

1. Лінійна алгебра

Чим довше живе математика, тим більш абстрактною і, можливо, як раз тому тим більш практичною вона стає.

Леопольд Кронекер

Мета: закласти основи (фундамент) знань для опанування методів лінійного математичного програмування (планування) і застосування їх до розв'язання оптимізаційних задач в області комп'ютерних наук.

Питання теми:

1.1. Числові матриці.

1.2. Визначники квадратних матриць.

1.3. Системи n лінійних алгебраїчних рівнянь з n невідомими (СЛАР $n \times n$) та їх розв'язання.

1.4. Системи m лінійних алгебраїчних рівнянь з n невідомими (СЛАР $m \times n$): дослідження на сумісність та розв'язання.

Компетентності, що формуються після вивчення теми:

Загальнонаукові: набуття базових знань з матричного числення і лінійної алгебри для їх застосувань при розробці математичних моделей.

Загальнопрофесійні: підготовленість до засвоєння існуючих і розроблення нових методів реалізації функцій інформаційних систем.

Спеціалізовано-професійні: здатність до застосування опанованих ідей і методів при розв'язанні конкретних задач в області комп'ютерних наук, які зводяться до лінійних моделей.

1.1. Числові матриці

Означення матриць та деякі їхні різновиди

Множина чисел, подана у вигляді прямокутної таблиці A , яка має m рядків і n стовпців, називається **прямокутною** (числовою) **матрицею розміру $m \times n$** (матриця від лат. matrix – матка (поліграф.), а числа, що складають матрицю, – її **елементами**, або **членами**).

Вперше поняття матриці ввели англійські математики Уільям Гамільтон (1805 – 1865) і Артур Келі (1821 – 1895).

У загальному випадку елементами матриці можуть бути не тільки числа, а й змінні величини, функції, їхні похідні, вектори тощо.

Символьне зображення матриці таке: таблиця з елементів-чисел, що утворюють матрицю, береться в круглі або в квадратні дужки, а самі елементи позначаються, як правило, малими латинськими літерами з індексами i , j , а саме a_{ij} ; перший з них указує на номер рядка матриці, а другий – на номер стовпця:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} \dots a_{1j} \dots a_{1n} \\ \dots \dots \dots \\ a_{i1} \dots a_{ij} \dots a_{in} \\ \dots \dots \dots \\ a_{m1} \dots a_{m2} \dots a_{mn} \end{pmatrix}, \text{ або } A = \begin{bmatrix} a_{11} \dots a_{1j} \dots a_{1n} \\ \dots \dots \dots \\ a_{i1} \dots a_{ij} \dots a_{in} \\ \dots \dots \dots \\ a_{m1} \dots a_{m2} \dots a_{mn} \end{bmatrix}. \quad (1.1.1)$$

В теоретичних дослідженнях часто застосовують більш лаконічне позначення матриць:

$$A = (a_{ij})_{m \times n}, \text{ або } A = [a_{ij}]_{m \times n}, \text{ де } i = 1, 2, \dots, m, \quad j = 1, 2, \dots, n.$$

Читається: матриця A складена з елементів a_{ij} і має розмір $m \times n$, себто індекс i змінюється від одиниці до m , а j – від одиниці до n . Межі змінювання i , j більш стисло позначають так: $i = \overline{1, m}$, $j = \overline{1, n}$.

Рядки і стовпці матриці (1.1.1) називають одним терміном – **ряди матриці** (горизонтальні і вертикальні).

Матрицю будь-якого розміру $m \times n$, де, звичайно, m і n – натуральні числа, можна стлумачити як математичний образ числової таблиці з двома входами.

Наприклад, у задачах планування обчислювального процесу на ЕОМ з метою відшукування оптимального – найкращого за певних умов – розв'язку, вихідні дані подаються таблицею. Нехай: $\Pi_1, \Pi_2, \dots, \Pi_m$ – час на виконання тієї чи іншої процедури (програми); R_1, R_2, \dots, R_n – ресурси ЕОМ (об'єм оперативної і зовнішньої пам'яті, швидкодія проце-

сору, час звертання до зовнішніх пристроїв тощо); τ_{ij} ($i = \overline{1, m}, j = \overline{1, n}$) – час, який витрачається на використання j -го ресурсу для виконання i -ї програми. Тоді математичним образом числової таблиці (табл. 1.1.1) є матриця (позначимо її через T) розміру $m \times n$ з елементами τ_{ij} : $T = (\tau_{ij})_{m \times n}$.

Таблиця 1.1.1

Вихідні дані для планування обчислювального процесу

Програми	Ресурси ЕОМ			
	R_1	R_2	...	R_n
Π_1	τ_{11}	τ_{12}	...	τ_{1n}
Π_2	τ_{21}	τ_{22}	...	τ_{2n}
...
Π_m	τ_{m1}	τ_{m2}	...	τ_{mn}

За матрицею T методами математичного програмування (відповідна навчальна дисципліна вивчається пізніше) відшукується такий порядок реалізації програм, при якому часові й амортизаційні витрати на їх реалізацію будуть найменшими.

Матриця, всі елементи якої дорівнюють нулю, називається **нульовою матрицею (нуль-матрицею)**:

$$A - \text{нуль-матриця} \Leftrightarrow (a_{ij} = 0 \quad \forall i = \overline{1, m}, \quad \forall j = \overline{1, n}),$$

де \forall – символ, який називають *квантором загальності*, читається (залежно від контексту): „будь-який”, „який би не був”, „для всіх”, „всі”; (квантор від лат. quantum – скільки);

\Leftrightarrow – символ, або знак, *еквівалентції* (рівносильності, рівнозначності) *за означенням*; читається: „якщо і тільки якщо”, „всерівно, що”, „те ж саме, що”.

Стосовно місця розташування в матриці певного елемента a_{ij} – елемента з фіксованими вартостями індексів i , j – кажуть, що *він стоїть на перетині i -го рядка j -го стовпця*.

Матриця, утворена з елементів заданої матриці, які стоять на перетині фіксованих k рядків і l стовпців, за умови збереження їхнього взаємного розташування, називається **підматрицею** даної матриці розміру $k \times l$.

Якщо розглядаються дві (або більше) однакових за розміром матриці, то їхні елементи, які стоять на перетині тих самих за номерами рядків і стовпців, називаються **відповідними** (за місцем розташування в матрицях).

Наприклад, у нижче наведених матрицях

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -2 & 4 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} \pi & 4 & 0,5 \\ -3 & 1 & 10 \end{bmatrix}$$

розміру 2×3 відповідними є елементи $a_{12} = -2$ і $b_{12} = 4$, бо обидва вони стоять на перетині першого рядка і другого стовпця заданих матриць.

Дві матриці $A = (a_{ij})_{m \times n}$, $B = (b_{ij})_{m \times n}$ однакового розміру називаються **рівними**, якщо рівні між собою їхні відповідні елементи:

$$A = B \Leftrightarrow (a_{ij} = b_{ij}).$$

Якщо елементи кожного рядка матриці $A = (a_{ij})_{m \times n}$ записати в стовець (або навпаки), не порушуючи порядку їхнього розташування, то отримаємо матрицю $A^T = (a_{ji})_{m \times n}$, яка називається **транспонованою** відносно матриці A . (Транспонування від лат. transpositio – переставлення.) Перехід від матриці A до матриці A^T тлумачать як одномісну операцію над A і називають операцією **транспонування** матриці.

Наприклад,

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -2 & 4 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \Rightarrow A^T = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ -2 & 1 \\ 4 & -1 \end{bmatrix},$$

де \Rightarrow – символ (знак) *логічного наслідку*, читається: „якщо ..., то ...”, „із ... випливає ...”.

Переконайтеся, що двічі транспонована матриця дає вихідну матрицю, тобто $(A^T)^T = A$.

Матриця, у якої один рядок (стовпець), називається **матрицею-рядком (матрицею-стовпцем)**:

$$A - \text{матриця-рядок} \Leftrightarrow A = (a_{ij})_{1 \times n}$$

$$(A - \text{матриця-стовпець} \Leftrightarrow A = (a_{ij})_{m \times 1}).$$

Наприклад: $A = (3 \quad -1 \quad 8)$ – матриця-рядок, $B^T = (-7 \quad 1,5 \quad 14)$ визначає матрицю B як матрицю-стовпець.

Матриця $A = (a_{ij})_{n \times n}$, у якої число рядків дорівнює числу стовпців, називається **квадратною матрицею порядку n** (або n -го порядку):

$$A - \text{квадратна матриця} \Leftrightarrow (m = n).$$

Елементи квадратної матриці з однаковими індексами, тобто $i = j$, називаються **елементами головної діагоналі**, або просто **головною діагоналлю**, матриці.

Елементи квадратної матриці, сума індексів яких на одиницю більше порядку матриці, тобто $i + j = n + 1$, називаються **елементами сторонньої діагоналі**, або просто **сторонньою діагоналлю**, матриці.

Наприклад, у квадратної матриці

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 & 2 & 1 \\ 4 & 0 & -1 \\ 7 & 1,5 & 5 \end{bmatrix}$$

головну (сторонню) діагональ складають елементи $-3, 0, 5$ ($1, 0, 7$); *зверніть увагу* на співвідношення між індексами елементів кожної з діагоналей.

Квадратна матриця (не нульова), у якої всі елементи, що розташовані нижче (вище) головної діагоналі, дорівнюють нулеві, називається **верхньою (нижньою) трикутною матрицею**:

$$A - \text{верхня трикутна матриця} \Leftrightarrow (a_{ij} = 0 \quad \forall i > j)$$

$$(A - \text{нижня трикутна матриця} \Leftrightarrow (a_{ij} = 0 \quad \forall i < j)).$$

Приклади:

$$\begin{bmatrix} -1 & 3 & 4 \\ 0 & -2 & 6 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix} - \text{верхня та } \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ -2 & 1/2 & 0 \\ 0,3 & -3 & 3 \end{bmatrix} - \text{нижня трикутні матриці.}$$

Квадратна матриця називається **діагональною**, якщо всі її елементи, крім, можливо, елементів головної діагоналі, дорівнюють нулеві:

$$A - \text{діагональна матриця} \Leftrightarrow (a_{ij} = 0 \ \forall i \neq j \wedge \exists a_{ii} \neq 0),$$

де \exists – символ, який називають *квантором існування*, читається: „існує”, „деякий”; $\bar{\exists}$ (\nexists) – не існує;

\wedge – символ (знак) *логічного добутку*, читається „і”.

Діагональна матриця називається **одиничною**, якщо всі елементи головної діагоналі дорівнюють одиниці:

$$A - \text{одинична матриця} \Leftrightarrow (a_{ij} = 0 \ \forall i \neq j \wedge a_{ii} = 1 \ \forall i = \overline{1, n}).$$

Одиничні матриці прийнято позначати латинською літерою E .

Приклади:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -9 \end{bmatrix} - \text{діагональна та } E = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} - \text{одинична матриці.}$$

Означені види числових матриць не охоплюють усю їх розмаїтість. У спеціальних курсах математичних дисциплін застосовної направленості вивчаються матриці, які є узагальненням наведених вище матриць.

Наприклад, блокові матриці – матриці, елементами яких є, у свою чергу, матриці, їх називають **блоками**; **квазидіагональні матриці** – матриці, у яких елементами головної діагоналі є матриці-блоки:

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix}; \quad A = \begin{pmatrix} A_{11} & 0 \\ 0 & A_{22} \end{pmatrix}, \text{ де } A_{11}, A_{12}, A_{21}, A_{22} - \text{матриці-блоки.}$$

Підсумок розглянутого подамо у вигляді таблиці (табл. 1.1.2).

Основні різновиди матриць

№	Означення	Приклад
1	<p>Прямокутна матриця A розміру $m \times n$</p> $\Leftrightarrow A = \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i1} & \dots & a_{ij} & \dots & a_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & \dots & a_{mj} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}$ <p>$(A = (a_{ij})_{m \times n}, A = [a_{ij}]_{m \times n})$</p>	$A = \begin{bmatrix} 31 & 3 & -8 & 0 \\ 9 & 10 & -1 & -1 \end{bmatrix}$ <p>$(m \times n = 2 \times 4)$</p>
2	<p>Квадратна матриця A n-го порядку</p> $\Leftrightarrow A = \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i1} & \dots & a_{ij} & \dots & a_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{nj} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}$ <p>$(A = (a_{ij})_{n \times n}, A = [a_{ij}]_{n \times n})$</p>	$A = \begin{bmatrix} 31 & 3 & -8 \\ 9 & 10 & -1 \\ 0 & 52 & -3 \end{bmatrix}$ <p>$(n = 3)$</p>
3	<p>Трикутна верхня матриця A n-го порядку</p> $\Leftrightarrow A = \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & a_{ij} & \dots & a_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & 0 & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}$	$A = \begin{bmatrix} 31 & -7 & 4 \\ 0 & 10 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix}$
4	<p>Трикутна нижня матриця A n-го порядку</p> $\Leftrightarrow A = \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i1} & \dots & a_{ij} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{nj} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}$	$A = \begin{bmatrix} 31 & 0 & 0 \\ 6 & 10 & 0 \\ 9 & 0 & -3 \end{bmatrix}$
5	<p>Діагональна матриця A n-го порядку</p> $\Leftrightarrow A = \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & a_{ij} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & 0 & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}$	$A = \begin{bmatrix} 31 & 0 & 0 \\ 0 & 10 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix}$
6	<p>Одинична матриця A n-го порядку</p> $\Leftrightarrow A = \begin{bmatrix} 1 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix}$	$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$
7	<p>Матриця-стовпець (матриця-рядок)</p> $\Leftrightarrow A = \begin{bmatrix} a_{11} \\ \dots \\ a_{i1} \\ \dots \\ a_{m1} \end{bmatrix} \quad (A = [a_{11} \dots a_{1j} \dots a_{1n}])$	$A = \begin{bmatrix} 31 \\ -2 \\ 15 \end{bmatrix}$ <p>$(A = [1 \quad 1,5 \quad 0])$</p>

Арифметичні операції (дії) над матрицями

Під **арифметичними операціями** над матрицями розуміють утворення (побудову, складання, відшукання) за заданими матрицями нових матриць за допомогою арифметичних дій над їхніми елементами.

Розглянемо (числові) матриці однакового розміру: $A = (a_{ij})_{m \times n}$, $B = (b_{ij})_{m \times n}$, $C = (c_{ij})_{m \times n}$.

Сумою двох матриць A і B однакового розміру називається матриця C , кожний елемент якої c_{ij} є сумою відповідних елементів вихідних матриць:

$$C = A + B \Leftrightarrow (c_{ij} = a_{ij} + b_{ij} \quad \forall i = \overline{1, m}, \quad \forall j = \overline{1, n}). \quad (1.1.2)$$

Приклад на відшукання суми матриць:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 5 \\ 2 & 3 & -8 \\ -4 & 2 & 6 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 2 & -5 & 3 \\ -9 & 7 & 7 \\ 4 & 0 & -2 \end{bmatrix} \Rightarrow A + B = \begin{bmatrix} 2 & -6 & 8 \\ -7 & 10 & -1 \\ 0 & 2 & 4 \end{bmatrix}.$$

Самостійно *сформулюйте і запишіть* в символах (за аналогією з (1.1.2)) означення **різниці** матриць та *наведіть* ілюстративний приклад.

Наголошуємо, що додавати і віднімати можна тільки матриці однакового розміру!

Добутком матриці A з числом (скаляром) λ називається матриця C , елементами якої є добутки елементів матриці A з числом λ :

$$C = \lambda A \Leftrightarrow c_{ij} = \lambda a_{ij}. \quad (1.1.3)$$

Приклад:

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -2 & 4 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \end{bmatrix}, \quad \lambda = -1,5 \Rightarrow \lambda A = \begin{bmatrix} -4,5 & 3 & -6 & 1,5 \\ 0 & -1,5 & 1,5 & -3 \end{bmatrix}.$$

Матрицю, яка є добутком матриці A з числом -1 , називають **протилежною** відносно матриці A :

$$-A = (-1) \cdot A.$$

Вправа: сформулюйте записане в символах співвідношення, доведіть або спростуйте його, зробіть належний висновок:

$$A - B = A + (-1) \cdot B.$$

Оскільки операції додавання матриць (віднімання можна розглядати як алгебраїчну суму) і множення матриці на число зводяться до відповідних арифметичних дій над числами, то вони володіють усіма властивостями операцій над числами, а саме:

1) *комутативність* (переставний закон):

$$A + B = B + A, \quad \lambda A = A \lambda;$$

2) *асоціативність* (сполучний закон):

$$(A + B) + C = A + (B + C) = A + B + C, \quad \lambda(\mu A) = (\lambda\mu)A;$$

3) *дистрибутивність* (розподільний закон):

$$\lambda(A + B) = \lambda A + \lambda B, \quad (\lambda + \mu)A = \lambda A + \mu A.$$

Нехай далі $A = (a_{ij})_{m \times s}$, $B = (b_{ij})_{r \times n}$ – такі матриці, що число стовпців s матриці A дорівнює числу рядків r матриці B , тобто $s = r$, а $C = (c_{ij})_{m \times n}$ – матриця розміру $m \times n$.

Добутком матриці A з матрицею B називається матриця C , елементи якої підраховуються за формулою $c_{ij} = \sum_{k=1}^s a_{ik} b_{kj}$:

$$C = A \cdot B \Leftrightarrow c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + a_{i3}b_{3j} + \dots + a_{is}b_{sj}. \quad (1.1.4)$$

Із (1.1.4) випливає **правило**: щоб підрахувати елемент c_{ij} добутку матриць A і B , треба елементи i -го рядка матриці A помножити на відповідні за номером елементи j -го стовпця матриці B і знайти суму отриманих добутків.

Нижче наведено схему (рис. 1.1.1), згідно з якою вибирають пари елементів для утворення добутків $a_{ik}b_{kj}$, де $k = \overline{1, s}$.

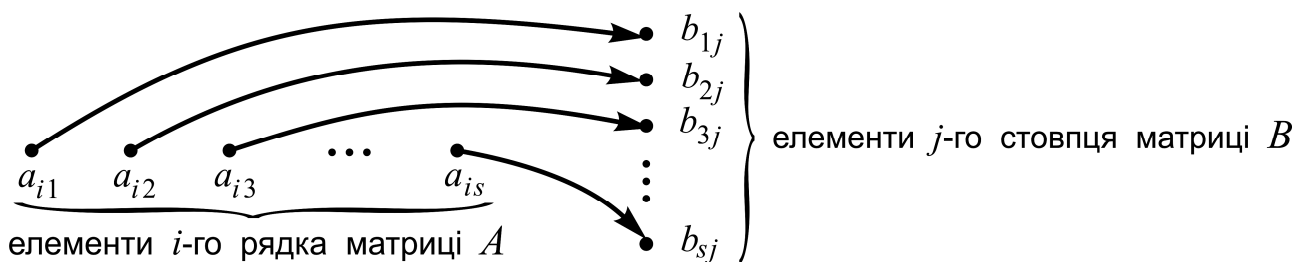


Рис. 1.1.1. **Схема вибору пар (a_{ik}, b_{kj}) для добутку матриць**

Приклад на відшукання добутку двох матриць (нижче матриць у дужках указано їхні розміри):

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -2 & 4 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -3 \\ -2 & 4 & 0 \\ 5 & -1 & 3 \end{bmatrix} \Rightarrow C = A \cdot B = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \end{bmatrix} =$$

$(m \times s = 2 \times 3)$
 $(r \times n = 3 \times 3)$
 $(m \times n = 2 \times 3)$

$$= \begin{bmatrix} 3 \cdot 2 + (-2)(-2) + 4 \cdot 5 & 3 \cdot 1 + (-2) \cdot 4 + 4 \cdot (-1) & 3 \cdot (-3) + (-2) \cdot 0 + 4 \cdot 3 \\ 0 \cdot 2 + 1 \cdot (-2) + (-1) \cdot 5 & 0 \cdot 1 + 1 \cdot 4 + (-1) \cdot (-1) & 0 \cdot (-3) + 1 \cdot 0 + (-1) \cdot 3 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 30 & -9 & 3 \\ -7 & 5 & -3 \end{bmatrix}.$$

Наголошуємо, що добуток двох матриць існує тоді і тільки тоді, коли число стовпців множеного дорівнює числу рядків множника!

У світлі наголошеного добуток $B \cdot A$ не існує, бо число стовпців матриці B не дорівнює числу рядків матриці A : $3 \neq 2$.

Якщо A і B є квадратними матрицями однакового розміру, то існує і добуток $A \cdot B$, і добуток $B \cdot A$, але $A \cdot B \neq B \cdot A$, тобто добуток матриць не підкоряється переставному закону (*перевірте!*). Щоправда для одиничних матриць E добутки з матрицею A (того ж розміру) зліва і справа рівні між собою і рівні матриці A :

$$A \cdot E = E \cdot A = A$$

(*переконайтеся* в цьому самостійно хоча б на прикладі матриць другого порядку!). Це означає, що при множенні матриці на матрицю одинична матриця „відіграє ту ж саму роль”, що і число одиниця (1) в арифметиці.

Елементарні перетворення та еквівалентність матриць

Під елементарними перетвореннями (е/п) матриць розуміють:

- 1) *транспонування* матриці – запис елементів кожного рядка матриці в стовпець (або навпаки), не порушуючи порядку їхнього розташування;
- 2) *переставлення* (взаємне) двох рядків або стовпців;
- 3) *множення* всіх елементів рядка (стовпця) на одне і те ж відмінне від нуля число;
- 4) *додавання* до елементів рядка (стовпця) відповідних за номером елементів іншого рядка (стовпця), помножених на одне і те ж число;
- 5) *вилучення* рядка чи стовпця, складеного з нулів, або одного з двох рядків (стовпців) з пропорційними, зокрема рівними, членами;
- 6) *включення* рядка чи стовпця, складеного з нулів, або рядка (стовпця) з членами, пропорційними, зокрема рівними, членам будь-якого рядка (стовпця) матриці.

Дві матриці A , B називаються **еквівалентними**, якщо кожену з них можна одержати з другої за допомогою скінченного числа е/п, і пишуть $A \sim B$, де тильда \sim є символом (знаком) еквівалентності.

Приклад виконання е/п (нижче кожної тильди в дужках вказано номер здійсненого е/п):

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & 6 & -4 \\ -3 & -14 & 11 \end{pmatrix} \underset{(1)}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ -2 & 6 & -14 \\ 3 & -4 & 11 \end{pmatrix} \underset{(2)}{\sim} \begin{pmatrix} -2 & 6 & -14 \\ 1 & 2 & -3 \\ 3 & -4 & 11 \end{pmatrix} \underset{(3)}{\sim} \\ \underset{(3)}{\sim} \begin{pmatrix} -2 & 3 & -14 \\ 1 & 1 & -3 \\ 3 & -2 & 11 \end{pmatrix} \underset{(4)}{\sim} \begin{pmatrix} -14 & 3 & -14 \\ -3 & 1 & -3 \\ 11 & -2 & 11 \end{pmatrix} \underset{(5)}{\sim} \begin{pmatrix} 3 & -14 \\ 1 & -3 \\ -2 & 11 \end{pmatrix} \underset{(6)}{\sim} \begin{pmatrix} 3 & -14 & 0 \\ 1 & -3 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Здійснено: транспонування матриці (1); взаємне переставлення першого і другого рядків (2); множення на $1/2$ другого стовпця (3); додавання до членів першого стовпця елементів другого стовпця, помножених на -4 (4); вилучення першого стовпця (5); включення нульового стовпця (6). Звичайно, е/п можна виконувати в будь-якому порядку і не обов'язково всі (що визначається намірами дослідника).

Підсумовуючи викладене, можна стверджувати: оскільки операції над матрицями і е/п матриць зводяться до відповідних арифметичних дій над числами чи оперуванням рядами матриці, то засвоєння відповідного матеріалу не повинно викликати ні психологічного, ні інтелектуального дискомфорту.

1.2. Визначники квадратних матриць

Визначники 2-го, 3-го, n-го порядків: основні поняття та їх означення

Математичний підхід до вивчення будь-якого об'єкта, явища чи процесу навколишнього світу передбачає, перш за все, встановлення його кількісних (числових) характеристик. Така „доля” не обминула й самі математичні (абстрактні) об'єкти, бо вони є моделями об'єктів, реально існуючих. Наприклад, з плоскою геометричною фігурою (просторовим тілом) пов'язують число, яке називають площею (об'ємом).

З кожною квадратною матрицею – множиною чисел, поданою у вигляді квадратної таблиці – пов'язують певне число, яке називають її *визначником*, або *детермінантом* (від лат. *determinans* – той, що визначає). Так, **визначником 2-го порядку** квадратної матриці A другого порядку називається число $\det A$, яке дорівнює різниці добутків елементів головної і побічної (сторонньої) діагоналей матриці, тобто

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \Rightarrow \det A = a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{21}. \quad (1.2.1)$$

Визначники (квадратних матриць) позначають ще грецькою буквою Δ з індексом, який указує на відповідну матрицю, або без нього, а також подають через елементи матриці, взяті в прямі дужки:

$$\Delta = \Delta_A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{21}; \quad + \begin{vmatrix} \circ & \circ \\ \circ & \circ \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} \circ & \circ \\ \circ & \circ \end{vmatrix} \quad (1.2.2)$$

Праворуч в (1.2.2) зображена геометрична схема, за якою обчислюється визначник 2-го порядку. Поряд зі словосполученням „обчислення визначника” часто застосовують – „розкриття визначника”.

Визначником 3-го порядку квадратної матриці A (третього порядку) називається число $\det A$, яке вираховується за формулою:

$$\Delta = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} + \left| \begin{array}{ccc} \circ & \circ & \circ \\ \circ & \circ & \circ \\ \circ & \circ & \circ \end{array} \right| - \left| \begin{array}{ccc} \circ & \circ & \circ \\ \circ & \circ & \circ \\ \circ & \circ & \circ \end{array} \right| \quad (1.2.3)$$

Справа в геометричній формі подано мнемонічне правило розкриття детермінанта, яке називають **правилом трикутника**, або **правилом Саррюса** (П'єр Фредерік Саррюс (1798 – 1861) – відомий французький математик).

Приклад обчислення визначника 3-го порядку:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 5 \\ -2 & 3 & 1 \\ 3 & -4 & -3 \end{vmatrix} = 1 \cdot 3 \cdot (-3) + 0 \cdot 1 \cdot 3 + 5 \cdot (-2) \cdot (-4) - 5 \cdot 3 \cdot 3 - 0 \cdot (-2) \cdot (-3) - 1 \cdot 1 \cdot (-4) = -10.$$

Для означення детермінантів n -го порядку ($n > 3$) знадобляться деякі поняття з теорії сполук. Нехай задана скінченна множина з n перших натуральних чисел $\{1, 2, 3, \dots, n\}$. Крім природного розташування чисел (за зростанням), їх можна упорядкувати і багатьма іншими способами. Будь-яке розташування чисел $1, 2, 3, \dots, n$ у деякому певному порядку називається **переставленням** із n чисел, а самі числа називають **елементами** переставлення. (Число різних переставлень із n чисел дорівнює добутку $1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot n$, який позначається через $n!$ і читається: „ен-факторіал“.)

Розглянемо два довільні елементи a і b переставлення з n елементів $1, 2, 3, \dots, n$. Кажуть, що елементи a, b утворюють **інверсію (безлад)**, якщо $a > b$, але в переставленні a передує b . Переставлення називається **парним (непарним)**, якщо воно має в собі парне (непарне) число інверсій.

Приклади:

$(1, 2, 3, 4, 5)$ – парне переставлення (число інверсій 0);

$(2, 1, 4, 3, 5)$ – парне переставлення (дві інверсії: $(2, 1), (4, 3)$);

$(5, 2, 1, 3, 4)$ – непарне переставлення (*переконайтеся!*).

$$\begin{bmatrix} (1, 2, 3, 4, 5) \\ (2, 1, 4, 3, 5) \end{bmatrix}$$
 З'ясуйте, яким стане верхнє переставлення, якщо його стовпці поміняти місцями в порядку зростання елементів нижнього.

Визначником n -го порядку (квадратної) матриці A називається число (!), яке дорівнює сумі всіляких добутків – **членів** визначника –

$$a_{1j_1} \cdot a_{2j_2} \cdot a_{3j_3} \cdot \dots \cdot a_{nj_n}, \quad (1.2.4)$$

утворених із n елементів матриці, взятих по одному і тільки по одному з кожного рядка і кожного стовпця, при цьому добуток береться зі своїм (з протилежним) знаком, якщо переставлення $(j_1, j_2, j_3, \dots, j_n)$ з других індексів елементів є парним (непарним).

Пропонуємо для кращого осмислення цього означення прослідкувати узгодженість з ним означень детермінантів 2-го і 3-го порядків.

Визначник $(n-1)$ -го порядку M_{ij} , який одержується з матриці чи визначника n -го порядку вилученням (закресленням) i -го рядка і j -го стовпця, називається **мінором** елемента a_{ij} (від лат. minor – менший).

Алгебраїчним доповненням A_{ij} елемента a_{ij} матриці або детермінанта n -го порядку називають його мінор, взятий зі знаком „плюс” („мінус”), якщо сума індексів $(i + j)$ є парним (непарним) числом:

$$A_{ij} = \begin{cases} +M_{ij}, & \text{якщо } (i+j) \text{ парне} \\ -M_{ij}, & \text{якщо } (i+j) \text{ непарне} \end{cases}, \text{ або } A_{ij} = (-1)^{i+j} \cdot M_{ij}. \quad (1.2.5)$$

Приклад:

$$\Delta = \begin{vmatrix} \cancel{1} & \cancel{2} & \cancel{3} \\ -1 & 0 & 4 \\ 4 & 3 & 5 \end{vmatrix} \Rightarrow \left(M_{12} = \begin{vmatrix} -1 & 4 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} = -21, \quad A_{12} = (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} -1 & 4 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} = 21 \right)$$

– мінор і алгебраїчне доповнення елемента $a_{12} = 2$.

Введені поняття використовуються для встановлення важливих положень (тверджень) щодо обґрунтування запроваджень матриць і визначників у різноманітні методи розв'язання застосовних задач.

Властивості детермінантів n -го порядку

Серед численних властивостей визначників розглянемо основні – ті, що часто залучаються при їх обчисленні. *Д о в е д е н н я* всіх властивостей базується на означенні детермінанта n -го порядку. *Пропонуємо* проілюструвати осмислення всіх властивостей на конкретних прикладах.

1^0 (про визначник транспонованої матриці). Визначник транспонованої матриці A^T рівний визначнику вихідної матриці A :

$$\det A^T = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = \det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} \quad (1.2.6)$$

(цю властивість називають також властивістю *про рівноправність рядків і стовпців визначника*).

Справді, після транспонування матриці A добутки з її n елементів $a_{1j_1} \cdot a_{2j_2} \cdot a_{3j_3} \cdot \dots \cdot a_{nj_n}$ набудуть вигляду $a_{j_1 1} \cdot a_{j_2 2} \cdot a_{j_3 3} \cdot \dots \cdot a_{j_n n}$. У цих добутків усі співмножники також належатимуть різним рядкам і стовпцям, а знак кожного з них залишиться без зміни, бо упорядковані за зростанням другі індекси $(j_1, j_2, j_3, \dots, j_n)$ тягнуть за собою переставлення з n перших індексів $(1, 2, 3, \dots, n)$ тієї ж парності (згідно з означенням переставлення).

2^0 (про зміну знака). Якщо в детермінанті Δ поміняти місцями (\leftrightarrow) два рядки (стовпці), то отримаємо детермінант $\overset{\leftrightarrow}{\Delta}$, протилежний за знаком:

$$a_{ij} \leftrightarrow a_{kj} \quad \forall j = \overline{1, n} \quad (a_{ij} \leftrightarrow a_{il}) \quad \forall i = \overline{1, n} \Rightarrow \overset{\leftrightarrow}{\Delta} = -\Delta, \quad (1.2.7)$$

де i, k (j, l) – номери двох рядків (стовпців), які міняються місцями.

Дійсно, нехай $a_{1j_1} \cdot \dots \cdot a_{ij_i} \cdot \dots \cdot a_{kj_k} \cdot \dots \cdot a_{nj_n}$ – деякий член визначника Δ , тоді відповідний (за складом елементів) член визначника $\overset{\leftrightarrow}{\Delta}$ матиме вигляд: $a_{1j_1} \cdot \dots \cdot a_{kj_i} \cdot \dots \cdot a_{ij_k} \cdot \dots \cdot a_{nj_n}$. Якщо в ньому впорядкувати елементи за зростанням перших індексів – $a_{1j_1} \cdot \dots \cdot a_{ij_k} \cdot \dots \cdot a_{kj_i} \cdot \dots \cdot a_{nj_n}$, – то пара індексів (j_k, j_i) додасть безладу в переставленні других індексів або зменшить число інверсій в ньому. У будь-якому разі непарне (парне)

переставлення стане парним (непарним), що і приводить до зміни знаків усіх членів вихідного визначника Δ .

Наведіть аналогічні міркування для випадку, коли міняються місцями стовпці: $a_{ij} \leftrightarrow a_{il} \quad \forall i = \overline{1, n}$ (або знайдіть більш лаконічне доведення, спираючись на розглянуті властивості).

3⁰ (про спільний множник елементів ряду). Якщо елементи деякого ряду визначника містять спільний множник k , то його можна винести за знак (символ) визначника:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ ka_{i1} & ka_{i2} & \dots & ka_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = k \cdot \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}. \quad (1.2.8)$$

(*Наведіть* аналогічний символічний запис у разі наявності спільного множника в елементів стовпця.)

Згідно з означенням кожний член детермінанта міститиме елемент i -го рядка, тобто матиме співмножник k . Винесення його за дужки і приводить до справедливості співвідношення (1.2.8).

Властивість 3⁰ припускає і друге формулювання: якщо всі елементи будь-якого ряду помножити на деяке число k , то сам визначник помножиться на k (*обміркуйте!*).

4⁰ (про рівність визначника нулю). Визначник дорівнює нулю, якщо:
а) всі елементи деякого ряду рівні нулеві:

$$\exists i: a_{ij} = 0 \quad \forall j = \overline{1, n} \quad (\exists j: a_{ij} = 0 \quad \forall i = \overline{1, n}) \Rightarrow \det A = 0; \quad (1.2.9)$$

б) він містить два рядки (стовпці) з однаковими або пропорційними елементами:

$$\left[\begin{array}{l} \exists \{i_1, i_2\}: a_{i_1 j} = a_{i_2 j} \quad \forall j = \overline{1, n} \\ (\exists \{i_1, i_2\}: a_{i_1 j} = ka_{i_2 j} \quad \forall j = \overline{1, n}) \end{array} \right] \Rightarrow \det A = 0, \quad (1.2.10)$$

де k – коефіцієнт пропорційності.

Пропонуємо записати самостійно аналогічне співвідношення в символах для стовпців і довести слушність твердження а).

Справедливість б) для рівних рядів випливає з того, що, з одного боку, міняючи однакові ряди місцями, ми отримуємо той самий визначник Δ . З іншого – за властивістю 2⁰ (про зміну знака) – приходимо до визначника з протилежним знаком. Тобто $\Delta = -\Delta$, звідки $\Delta = 0$. (Здогадайтеся, що попередньо треба здійснити, щоб випадок пропорційних рядів звести до розглянутого випадку рівних рядів.)

5⁰ (про інваріантність (незмінність) визначника). Визначник не зміниться, якщо до елементів будь-якого рядка (стовпця) додати відповідні за номером елементи іншого рядка (стовпця), помножені на одне і те ж число k :

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1l} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & \dots & a_{2j} & \dots & a_{2l} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{nj} & \dots & a_{nl} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} \Rightarrow \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1j} + ka_{1l} & \dots & a_{1l} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & \dots & a_{2j} + ka_{2l} & \dots & a_{2l} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{nj} + ka_{nl} & \dots & a_{nl} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = \Delta \quad (1.2.11)$$

(символічний запис властивості стосовно рядків *подайте самостійно*).

Кожен член визначника, який утворюється з Δ додаванням до елементів j -го стовпця відповідних за номером елементів l -го стовпця, помножених на число k , буде містити співмножник у вигляді суми двох доданків $a_{ij} + ka_{il} \quad \forall i = \overline{1, n}$. Застосовуючи розподільний закон (множення відносно додавання), отримаємо суму двох визначників, перший з яких Δ , а другий містить два стовпці з пропорційними елементами a_{il} і $ka_{il} \quad \forall i = \overline{1, n}$, а тому за властивістю 4⁰ б) дорівнює нулю, що і дає (1.2.11).

Як одну із властивостей детермінантів, наведемо без доведення теорему Лапласа (П'єр Симон Лаплас (1749 – 1827) – видатний французький математик, механік, астроном, філософ). Вона має важливе теоретичне значення і застосовується при обчисленні визначників порядків більших трьох.

Теорема 1.2.1 (теорема Лапласа про розкриття визначника). Детермінант n -го порядку дорівнює сумі добутків елементів будь-якого рядка (стовпця) на їхні алгебраїчні доповнення:

$$\Delta = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \dots + a_{in}A_{in} \quad \forall i = \overline{1, n} \quad (1.2.12)$$

$$(\Delta = a_{1j}A_{1j} + a_{2j}A_{2j} + \dots + a_{nj}A_{nj} \quad \forall j = \overline{1, n}). \quad (1.2.13)$$

Співвідношення (1.2.12), (1.2.13) називаються відповідно **формулами розкладу визначника за елементами i -го рядка, j -го стовпця**.

Наслідок. Сума добутків елементів будь-якого рядка (стовпця) на алгебраїчні доповнення відповідних за номером елементів якогось іншого рядка (стовпця) дорівнює нулеві:

$$\begin{aligned} a_{i1}A_{k1} + a_{i2}A_{k2} + \dots + a_{in}A_{kn} &= 0 \quad \forall i = \overline{1, n} \wedge k \neq i \\ (a_{1j}A_{1l} + a_{2j}A_{2l} + \dots + a_{nj}A_{nl} &= 0 \quad \forall j = \overline{1, n} \wedge l \neq j). \end{aligned} \quad (1.2.14)$$

Розглянемо, *наприклад*, застосування теореми Лапласа до обчислення визначника 3-го порядку (див. (1.2.3)), здійснюючи його розклад за елементами першого рядка:

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 5 \\ -2 & 3 & 1 \\ 3 & -4 & -3 \end{vmatrix} &= a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13} = 1 \cdot \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ -4 & -3 \end{vmatrix} + 5 \cdot \begin{vmatrix} -2 & 3 \\ 3 & -4 \end{vmatrix} = \\ &= 1 \cdot (-9 + 4) + 5 \cdot (8 - 9) = 1 \cdot (-5) + 5 \cdot (-1) = -10. \end{aligned}$$

Як бачимо, результати обчислень за означенням і за теоремою Лапласа співпали. У процесі виконання арифметичних операцій другий доданок $a_{12}A_{12}$ пропущено (чому?) і розкриття визначника звелось до обчислення двох визначників другого порядку.

Пропонуємо відшукати ще один варіант розкриття визначника зведенням до обчислення двох визначників другого порядку і реалізувати його, а також подумати, за яких умов обчислення визначника 3-го порядку зводиться до обчислення одного визначника 2-го порядку.

Обчислення визначників n -го порядку

Аналізуючи зміст теореми Лапласа, приходимо до **висновку**, що розкриття визначника n -го порядку можна завжди звести до обчислення n визначників $(n-1)$ -го порядку (див. (1.2.12), (1.2.13)), якими є мінори елементів обраного рядка чи стовпця, взяті зі знаком „плюс” або „мінус”, тобто – до обчислення алгебраїчних доповнень. Аналогічно розкриття визначників $(n-1)$ -го порядку зводяться до обчислення детермінантів $(n-2)$ -го порядку в кількості $(n-1)$ і так далі, поки не дійдемо до визнач-

ників першого порядку – просто чисел. Проте об’єм обчислювальної роботи зменшується, якщо деякі з елементів обраного в (1.2.12) рядка чи в (1.2.13) стовпця рівні нулеві, бо відповідні їм мінори нема потреби обчислювати.

Властивість 5⁰ (про інваріантність визначника) дозволяє в будь-якому ряді – рядку чи стовпці – замінити нулями всі елементи, крім одного (!). Елемент a_{rs} , який не замінюється нулем (тобто залишається без зміни), назовемо **головним**, або **провідним**, елементом; відповідні рядок r і стовпець s , на перетині яких стоїть a_{rs} , теж називаються **головними**, або **провідними**; головний елемент братимемо в кружок.

Правило „утворення” нулів. Щоб усі елементи r -го рядка, крім головного a_{rs} , замінити нулями, достатньо до елементів кожного стовпця $j \neq s$ додати відповідні за номером елементи s -го стовпця, помножені на дріб $(-a_{rj}/a_{rs})$, знаменник якого – головний елемент, а чисельником є елемент провідного рядка в j -му стовпці, взятий з протилежним знаком.

За цим правилом отримуємо „новий” визначник Δ' , рівний вихідному, з елементами

$$a'_{ij} = a_{ij} + a_{is} \left(\frac{-a_{rj}}{a_{rs}} \right) \quad \forall i = \overline{1, n}, \quad \forall j \neq s. \quad (1.2.15)$$

Якщо в (1.2.15) покласти $i = r$, то $a'_{rj} = a_{rj} + a_{rs}(-a_{rj}/a_{rs}) = 0 \quad \forall j \neq s$, що підтверджує слушність правила. (Пропонуємо самостійно сформулювати правило утворення нулів у провідному стовпці s і навести співвідношення, аналогічне (1.2.15).)

Розклад нового визначника за елементами r -го рядка (s -го стовпця), за теоремою Лапласа, дає змогу звести розкриття визначника n -го порядку до обчислення лише одного визначника $(n-1)$ -го порядку:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1s} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{r1} & a_{r2} & \dots & \boxed{a_{rs}} & \dots & a_{rn} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{ns} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a'_{11} & a'_{12} & \dots & a_{1s} & \dots & a'_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & a_{rs} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a'_{n1} & a'_{n2} & \dots & a_{ns} & \dots & a'_{nn} \end{vmatrix} = a_{rs} A_{rs}. \quad (1.2.16)$$

(вихідний визначник) (новий визначник)

(результат розкладу)

Зауваження. Який елемент a_{rs} визначника вибирати в якості головного (і разом з тим – провідні рядок r і стовпець s), загалом не має принципового значення. Але при розкритті визначника вручну бажано брати його меншеньким, щоб уникнути „громіздкої арифметики”, і краще за все, коли є $a_{rs} = 1$ (чому?). Якщо „одиниці” немає, то її попередньо утворюють за допомогою тієї ж властивості 5^0 (про інваріантність Δ).

Наведемо в супроводі конкретного прикладу відповідний **алгоритм** такого підходу до обчислення детермінантів.

1⁰. *Вибираємо* головний елемент a_{rs} і *визначаємось*, де маємо намір „робити” нулі – у провідних рядку чи стовпці.

$$\Delta = \begin{vmatrix} 3 & 4 & -5 \\ 2 & \textcircled{2} & 3 \\ 4 & -5 & -7 \end{vmatrix} \quad \begin{array}{l} \text{Вибираємо в якості головного елемента } a_{22} = 2 \text{ і будемо робити нулі в другому рядку.} \end{array}$$

2⁰. *Застосовуємо* правило утворення нулів.

$$\Delta = \begin{vmatrix} -1 & 4 & -11 \\ 0 & \textcircled{2} & 0 \\ 9 & -5 & 0,5 \end{vmatrix} \quad \begin{array}{l} \text{Елементи другого стовпця помножаємо на } (-1) \text{ і додаємо до першого стовпця:} \\ 2\text{с.} \times (-1) + 1\text{с.}; \end{array}$$

елементи другого стовпця помножаємо на $(-3/2)$ і додаємо до третього стовпця: $2\text{с.} \times (-3/2) + 3\text{с.}$

3⁰. *Здійснюємо* розклад нового визначника за елементами рядка (стовпця), в якому всі елементи – нулі, крім одного:

$$\Delta = a_{22}A_{22} = 2 \cdot \begin{vmatrix} -1 & -11 \\ 9 & 0,5 \end{vmatrix} = 2 \cdot (-0,5 + 99) = 197.$$

На практиці, за звичаєм, усі записи наводять ланцюжком, указуючи внизу, які операції виконуються. Покажемо це на тому ж *прикладі*:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 3 & 4 & -5 \\ 2 & \textcircled{2} & 3 \\ 4 & -5 & -7 \end{vmatrix} \underset{(1\text{с.} \times (-1) + 2\text{с.})}{=} \begin{vmatrix} 3 & \textcircled{1} & -5 \\ 2 & 0 & 3 \\ 4 & -9 & -7 \end{vmatrix} \underset{(1\text{р.} \times 9 + 3\text{р.})}{=} \begin{vmatrix} 3 & 1 & -5 \\ 2 & 0 & 3 \\ 31 & 0 & -52 \end{vmatrix} \underset{(\text{здійснюємо розклад})}{=} a_{12}A_{12} = 197.$$

Відзначимо: коли властивість *про незмінність визначника* застосовувати так, що нулями будуть замінені всі елементи, крім діагональних, або ті, які розташовані нижче або вище головної діагоналі, то новий визначник дорівнюватиме добутку елементів головної діагоналі (*поміркуйте, як це обґрунтувати*).

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_{22} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} \cdot \dots \cdot a_{nn}.$$

Продовжимо перетворювати детермінант попереднього *прикладу*:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 3 & 1 & -5 \\ 2 & 0 & 3 \\ 31 & 0 & -52 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 1 & 3 & -5 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 31 & -52 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 1 & 3 & -5 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & -98,5 \end{vmatrix} = 197.$$

(міняємо місцями 1с. і 2с.) (2р.×(-15,5)+3р.) (здійснюємо розклад)

Кількість членів визначника – $n!$ – зі збільшенням n стрімко зростає: $2!=2$, $3!=6$, $4!=24$, $5!=120$, $6!=720$, ..., і разом з тим – об'єм обчислювальної роботи.

З метою своєрідної „стандартизації” розглянутого підходу до обчислення детермінантів (щоб краще зорієнтуватися „що” на „що” помножається і до „чого” додається) корисно мати на увазі так зване **правило прямокутника**. Воно є наочною інтерпретацією *правила утворення нулів*, згідно з яким елементи a'_{ij} нового визначника Δ' підраховуються за формулою (1.2.15): $a'_{ij} = a_{ij} + a_{is}(-a_{rj}/a_{rs}) \quad \forall i = \overline{1, n}, \quad \forall j \neq s$.

Подамо формулу інакше і пов'яжемо з нею прямокутник (рис. 1.2.1):

$$a'_{ij} = \frac{a_{ij} \cdot a_{rs} - a_{is} \cdot a_{rj}}{a_{rs}} \quad \forall i = \overline{1, n}, \quad \forall j \neq s. \quad (1.2.17)$$

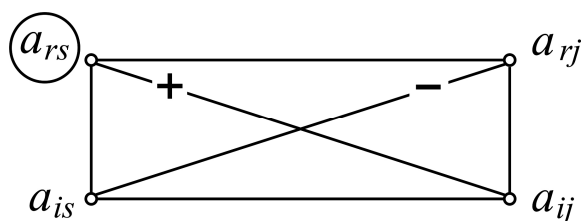


Рис. 1.2.1. **Правило прямокутника**

Помічаємо, що діагоналі прямокутника (з позначками) „+” і „-” з’єднують елементи a_{ij} , a_{rs} , a_{is} і a_{rj} , різниця добутків яких є чисельником формули (1.2.17).

Правило прямокутника. Для переходу до нового визначника з елементами a'_{ij} треба:

1) *замінити* нулями всі елементи провідного рядка (стовпця), крім головного, а провідний стовпець (рядок) *залишити* без зміни;

2) *знайти* добуток з елементів a_{ij} , a_{rs} , які з'єднує діагональ „+”, і *відняти* від нього добуток з елементів a_{is} , a_{rj} , які з'єднує діагональ „-”;

3) *поділити* знайдену різницю на головний елемент a_{rs} .

При застосуванні цього правила відповідний кожному елементові a'_{ij} ($i \neq r$, $j \neq s$) прямокутник накреслюємо (згідно з рис. 1.2.1) подумки, а не на папері. Накреслення кожного прямокутника рекомендуємо починати з головного елемента a_{rs} , а елементи a_{ij} перебираємо по черзі за рядками або стовпцями (кому як більше подобається). У процесі перетворення визначника часто виникає необхідність використовувати інші, крім п'ятої, властивості детермінантів. (*Подумайте*, якому провідному ряду (ряду чи стовпцю) слід віддати перевагу при заміні їхніх елементів, крім головного, нулями.)

Розглянемо *приклад* розкриття визначника п'ятого порядку.

$$\Delta = \begin{vmatrix} -2 & 5 & 0 & -1 & 3 \\ 1 & \underline{0} & \underline{3} & 7 & -2 \\ 3 & -1 & 0 & 5 & -5 \\ 2 & 6 & -4 & 1 & 2 \\ 0 & -\underline{3} & \textcircled{-1} & 2 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -2 & 5 & 0 & -1 & 3 \\ 1 & -9 & 0 & 13 & 7 \\ 3 & -1 & 0 & 5 & -5 \\ 2 & 18 & 0 & -7 & -10 \\ -0 & -3 & -1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = a_{53}A_{53}.$$

Елемент $a_{53} = -1$ вибрали в якості головного з тих міркувань, що в третьому стовпці вже є два нулі, і відповідні рядки не підлягають перетворенню.

Замінюємо нулями інші елементи провідного стовпця, крім a_{53} , а провідний рядок залишаємо без зміни.

Застосовуємо *правило прямокутника* для підрахунку a'_{ij} ($i \neq r$, $j \neq s$), накреслюючи в думці відповідний прямокутник (три вершини одного з них відмічені рисочками).

$$a_{53}A_{53} = \begin{vmatrix} -2 & 5 & -1 & 3 \\ 1 & -9 & 13 & 7 \\ -3 & \textcircled{+1} & -5 & +5 \\ 2 & 18 & -7 & -10 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 13 & 5 & 24 & -22 \\ -26 & -9 & -32 & 52 \\ -0 & -1 & -0 & -0 \\ 56 & 18 & 83 & -100 \end{vmatrix} = a_{32}A_{32}.$$

Щоб отримати головний елемент, рівний одиниці, попередньо застосували властивість 3^0 (у другому формулюванні). Нулями замінюємо (на відміну від попереднього кроку) елементи провідного рядка, крім a_{32} , а провідний стовпець залишаємо без зміни.

$$a_{32}A_{32} = \begin{vmatrix} 13 & 24 & -22 \\ +26 & +32 & -52 \\ 56 & 83 & -100 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 13 & 24 & 4 \\ 26 & 32 & 0 \\ 56 & 83 & 12 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 13 & 24 & \textcircled{4} \\ 26 & 32 & 0 \\ 17 & 11 & 0 \end{vmatrix} = a_{13}A_{13} =$$

(1с. \times 2 + 3с.) (1р. \times (-3) + 3р.) (здійснюємо розклад)

$$= 8 \cdot \begin{vmatrix} 13 & 16 \\ 17 & 11 \end{vmatrix} = 8 \cdot (143 - 272) = -8 \cdot 129 = -1032.$$

Для розкриття визначника 3-го порядку спочатку знову застосували властивість 3^0 (у другому формулюванні), а потім діяли за наведеним сценарієм; при обчисленні визначника 2-го порядку винесли за його знак спільний множник – двійку – елементів другого рядка.

Зауваження. Якщо формулу (1.2.17) записати у вигляді

$$a'_{ij} = a_{ij} - \frac{a_{rj} \cdot a_{is}}{a_{rs}} \quad \forall i = \overline{1, n}, \quad \forall j \neq s, \quad (1.2.18)$$

то отримаємо модифікацію (рис. 1.2.2) правила прямокутника (може комусь більше сподобається таке?).

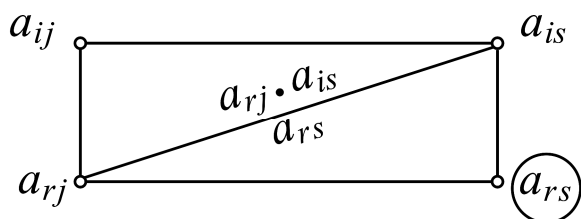


Рис. 1.2.2. Правило прямокутника

Щоб знайти новий елемент a'_{ij} треба від „старого” елемента a_{ij} відняти добуток з елементів a_{rj} , a_{is} , розташованих у суміжних до a_{ij} вершинах прямокутника, поділений на головний елемент a_{rs} .

Запорукою успіху в розкритті детермінантів є засвоєння процедури утворення нулів у поєднанні з теоремою Лапласа і практика, ..., практика.

СЛАР $n \times n$ називається **сумісною**, якщо вона має хоча б один розв'язок, і **несумісною**, якщо вона не має жодного розв'язку. *Пропонуємо* пересвідчитись, що будь-яка однорідна система має **нульовий** розв'язок, тобто $x_j = 0 \quad \forall j = \overline{1, n}$, а значить завжди сумісна. Сумісну систему називають **визначеною (невизначеною)**, якщо вона має єдиний розв'язок (більше одного розв'язку). Якщо однорідна система має **ненульовий** розв'язок, тобто хоча б одне з $x_j = \alpha_j, \quad j = \overline{1, n}$, відмінне від нуля, то вона невизначена і має нескінченно багато розв'язків $x_j = c\alpha_j$, де c – довільне число (*переконайтеся!*).

Дві системи (позначимо їх через S_1, S_2) називаються **еквівалентними** ($S_1 \sim S_2$), якщо всі розв'язки першої є розв'язками другої і навпаки. Дві несумісні системи за означенням вважаються еквівалентними.

З кожною СЛАР $n \times n$ можна пов'язати квадратну матрицю n -го порядку $A = (a_{ij})_{n \times n}$, складену з коефіцієнтів при невідомих, яку називають **основною матрицею** системи. Приєднуючи (через вертикальну риску) до основної матриці A стовпець вільних членів $b_i, \quad i = \overline{1, n}$, отримаємо прямокутну матрицю $\bar{A} = (a_{ij} | b_i)_{n \times (n+1)}$, яку називають **розширеною матрицею** системи.

Наведемо (без доведення) **критерій еквівалентності** систем: дві системи S_1 і S_2 еквівалентні тоді і тільки тоді, коли еквівалентні їхні розширені матриці \bar{A}_1 і \bar{A}_2 :

$$S_1 \sim S_2 \Leftrightarrow \bar{A}_1 \sim \bar{A}_2,$$

де \Leftrightarrow – символ *еквіваленції*, читається: „тоді і тільки тоді”, „якщо і тільки якщо”.

Це означає, що здійснивши е/п (див. п. 1.1) над рядками матриці \bar{A} , що відповідають рівнянням заданої системи, ми прийдемо до розширеної матриці системи, яка еквівалентна вихідній. Ті чи інші е/п виконуються залежно від методу розв'язання системи.

Розв'язання СЛАР $n \times n$ за правилом Крамера

Згадаємо, як у середній школі розв'язувались СЛАР 2×2 методом алгебраїчного додавання:

$$\left\{ \begin{array}{l|l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1 & a_{22} \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2 & -a_{12} \end{array} \right| \begin{array}{l} -a_{21} \\ a_{11} \end{array}. \quad (1.3.3)$$

Помножимо ліві і праві частини обох рівнянь на числа в стовпчиках (по черзі) і знайдемо суми лівих і правих частин отриманих рівнянь. Тоді одержимо систему, еквівалентну вихідній (*прослідкуйте*):

$$\left\{ \begin{array}{l} (a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})x_1 = b_1a_{22} - b_2a_{12} \\ (a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})x_2 = b_2a_{11} - b_1a_{21} \end{array} \right. \quad (1.3.4)$$

Помічаємо, що коефіцієнтом при x_1 і x_2 є визначник Δ 2-го порядку матриці, складеної з коефіцієнтів при невідомих; праві частини в (1.3.4) теж визначники 2-го порядку (Δ_1 , Δ_2), які отримуються з Δ заміною відповідно першого і другого стовпця стовпцем вільних членів системи:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}, \quad \Delta_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}. \quad (1.3.5)$$

За умови, що $\Delta \neq 0$, маємо:

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta}, \quad x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta} \quad - \text{розв'язок системи.}$$

Розглянутий підхід до розв'язання СЛАР 2×2 узагальнюється на $(n \times n)$ -системи, де $n > 2$.

Визначник Δ основної матриці $(n \times n)$ -системи (1.3.1) називають **визначником системи**; визначник Δ_j , $j = \overline{1, n}$, який одержується з Δ заміною j -го стовпця стовпцем вільних членів b_i , $i = \overline{1, n}$, називається **визначником, відповідним невідомому x_j** , $j = \overline{1, n}$:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2j} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nj} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}, \quad \Delta_j = \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1,j-1} & b_1 & a_{1,j+1} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & \dots & a_{2,j-1} & b_2 & a_{2,j+1} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{n,j-1} & b_n & a_{n,j+1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

(основний визначник системи)

(визначник, відповідний невідомому x_j)

Теорема 1.3.1 (правило Крамера). Якщо визначник $(n \times n)$ -системи відмінний від нуля ($\Delta \neq 0$), то вона має єдиний розв'язок, який відшукується за формулою:

$$x_j = \frac{\Delta_j}{\Lambda}, \quad j = \overline{1, n}, \text{ тобто } x_1 = \frac{\Delta_1}{\Lambda}, \quad x_2 = \frac{\Delta_2}{\Lambda}, \dots, \quad x_n = \frac{\Delta_n}{\Lambda}. \quad (1.3.6)$$

(Дайте словесне формулювання співвідношень із (1.3.6).)

Доведення базується на теоремі Лапласа (теорема 1.2.1) і наслідку з неї. Покажемо справедливість формули (1.3.6) для $j = 1$. Для цього помножимо ліву і праву частини i -го рівняння ($i = \overline{1, n}$) системи (1.3.1) на алгебраїчне доповнення A_{i1} елемента першого стовпця визначника системи Δ і запишемо суму перетворених таким чином рівнянь:

$$\left\{ \begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \dots\dots\dots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n = b_n \end{array} \right| \begin{array}{l} A_{11} \\ A_{21} \\ \dots \\ A_{n1} \end{array} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (a_{11}A_{11} + a_{21}A_{21} + \dots + a_{n1}A_{n1}) \cdot x_1 + (a_{12}A_{11} + a_{22}A_{21} + \dots + a_{n2}A_{n1}) \cdot x_2 + \dots + (a_{1n}A_{11} + a_{2n}A_{21} + \dots + a_{nn}A_{n1}) \cdot x_n = b_1A_{11} + b_2A_{21} + \dots + b_nA_{n1}.$$

В отриманому рівнянні коефіцієнт при невідомому x_1 є розкладом визначника системи Δ за елементами першого стовпця, а коефіцієнти при x_2, \dots, x_n дорівнюють нулеві (згідно з наслідком із теореми Лапласа). Вільний член є розкладом визначника Δ_1 , відповідного невідомому x_1 , за елементами першого стовпця. Отже, $x_1 = \Delta_1 / \Delta$.

Аналогічно виводимо формулу (1.3.6) для інших невідомих (*опи- шить*, як саме).

При розгляді частинного випадку – СЛАР 2×2 – ми не торкалися поняття „алгебраїчне доповнення” (чому?).

Зауваження. Правило Крамера (Габріель Крамер (1704 – 1752) – знаний швейцарський математик) виключає з розгляду випадок, коли $\Delta = 0$. А якщо $\Delta = 0$?

Аналізуючи формулу (1.3.6), приходимо до висновку:

1) якщо $\Delta = 0$, але хоча б один із визначників Δ_j , $j = \overline{1, n}$, відмінний від нуля, то система несутісна, бо принаймні один із дробів в (1.3.6) губить смисл (чому?);

2) якщо $\Delta = 0$ і $\Delta_j = 0 \quad \forall j = \overline{1, n}$, то система невизначена (чому?) і має безліч розв'язків; як їх знаходити, стане відомо пізніше.

Наведемо **загальний порядок** розв'язання $(n \times n)$ -систем за правилом Крамера на *прикладі* СЛАР 3×3 :

$$\begin{cases} 3x_1 + x_2 - 2x_3 = -4 \\ 3x_1 \quad \quad + 4x_3 = -1 \\ 2x_1 + 3x_2 + 2x_3 = -1. \end{cases}$$

(Відсутність у другому рівнянні члена з невідомим x_2 означає, що коефіцієнт при ньому дорівнює нулю.)

1⁰. *Випишемо визначник системи Δ і обчислимо його:*

$$\Delta = \begin{vmatrix} 3 & \textcircled{1} & -2 \\ 3 & 0 & 4 \\ 2 & 3 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 1 & -2 \\ 3 & 0 & 4 \\ -7 & 0 & 8 \end{vmatrix} = a_{12}A_{12} = - \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ -7 & 8 \end{vmatrix} = -52 \neq 0.$$

Висновок: задана система має єдиний розв'язок.

2⁰. *Складаємо і обчислимо визначники Δ_j , відповідні невідомим x_j , $j = 1, 2, 3$:*

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} -4 & \textcircled{1} & -2 \\ -1 & 0 & 4 \\ -1 & 3 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -4 & 1 & -2 \\ -1 & 0 & 4 \\ 11 & 0 & 8 \end{vmatrix} = -a_{12}A_{12} = - \begin{vmatrix} -1 & 4 \\ 11 & 8 \end{vmatrix} = 52,$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 3 & -4 & -2 \\ 3 & -1 & 4 \\ 2 & -1 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & -1 & -2 \\ 3 & 2 & 4 \\ 2 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 0, \quad \Delta_3 = \begin{vmatrix} 3 & 1 & -4 \\ 3 & 0 & -1 \\ 2 & 3 & -1 \end{vmatrix} = -26.$$

(1с.+2с.) (2с. \times 2 = 3с.) (переконайтеся)

3⁰. *Підраховуємо значення невідомих і робимо перевірку:*

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{52}{-52} = -1, \quad x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{0}{-52}, \quad x_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta} = \frac{-26}{-52} = \frac{1}{2}.$$

Підставляємо знайдені значення x_1, x_2, x_3 в ліві частини рівнянь і зіставляємо результати з правими частинами:

$$\begin{cases} 3 \cdot (-1) + 0 - 2 \cdot (0,5) = -4 \\ 3 \cdot (-1) + 0 + 4 \cdot (0,5) = -1 \\ 2 \cdot (-1) + 0 + 2 \cdot (0,5) = -1. \end{cases}$$

Значення невідомих задовольняють – перетворюють у тотожності – всі три рівняння, значить систему розв'язано правильно.

Відповідь: $(x_1, x_2, x_3) = (-1, 0, 1/2)$.

Обернена матриця: означення, теорема існування

Нехай $A = (a_{ij})_{n \times n}$ – довільна квадратна матриця n -го порядку. Перш ніж дати означення поняття „обернена матриця”, наведемо деякі допоміжні відомості. Квадратна матриця A називається **неособливою**, або **невиродженою**, якщо її визначник $\Delta = \det A$ не дорівнює нулю, і **особливою**, або **виродженою**, – у протилежному випадку:

$$\begin{aligned} A - \text{неособлива матриця} &\Leftrightarrow \det A \neq 0, \\ A - \text{особлива матриця} &\Leftrightarrow \det A = 0. \end{aligned} \tag{1.3.7}$$

Матриця A^* , складена з алгебраїчних доповнень елементів транспонованої матриці A^T , називається **присьднаною**, або **союзною**, матрицею до матриці A , тобто

$$A = (a_{ij})_{n \times n} \Rightarrow A^T = (a_{ji})_{n \times n} \Rightarrow A^* = (A_{ji})_{n \times n}.$$

Наприклад, для матриці третього порядку маємо:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \Rightarrow A^* = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{bmatrix}. \tag{1.3.8}$$

Рекомендуємо при складанні A^* не виписувати A^T , а обчисливши алгебраїчні доповнення елементів рядків матриці A , записувати їх за стовпцями.

Лема 1.3.1 (про добутки матриць A і A^*). Добутки матриці A з союзною до неї матрицею A^* справа і зліва рівні між собою і дають діагональну матрицю, ненульові елементи якої дорівнюють визначнику матриці A :

$$A \cdot A^* = A^* \cdot A = \begin{bmatrix} \Delta & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \Delta & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \Delta \end{bmatrix}. \quad (1.3.9)$$

Д о в е д е н н я. Справедливість леми, як і правила Крамера, випливає з теореми Лапласа і наслідку з неї. Не порушуючи принциповий підхід і загальності, будемо тримати орієнтири на (1.3.8).

За означенням елементи c_{ij} (див. рис. 1.1.1) добутку $C = A \cdot A^*$ при $i = j$ дають розклад Δ за елементами рядків матриці A , а при $i \neq j$ за наслідком (1.2.14) $c_{ij} = 0$. Аналогічні міркування (які саме?) наводимо для визначення добутку $A^* \cdot A$. (Здогадайтеся, чому дорівнює визначник добутку з матриць A і A^* , якщо A вироджена (невироджена) матриця.)

Матриця A^{-1} називається **оберненою** до (для, відносно) квадратної матриці A , якщо вона в добутку з матрицею A справа і зліва дає одиничну матрицю E :

$$A^{-1} \text{ – обернена до } A \text{ матриця} \Leftrightarrow A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = E. \quad (1.3.10)$$

Теорема 1.3.2 (теорема існування і єдиності оберненої матриці). Будь-яка неособлива матриця A має обернену матрицю A^{-1} і до того ж тільки одну, яка визначається за формулою:

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \cdot A^* = \begin{bmatrix} \frac{A_{11}}{\Delta} & \frac{A_{21}}{\Delta} & \dots & \frac{A_{n1}}{\Delta} \\ \frac{A_{12}}{\Delta} & \frac{A_{22}}{\Delta} & \dots & \frac{A_{n2}}{\Delta} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{A_{1n}}{\Delta} & \frac{A_{2n}}{\Delta} & \dots & \frac{A_{nn}}{\Delta} \end{bmatrix}. \quad (1.3.11)$$

(Сформулюйте відповідне правило побудови оберненої матриці.)

Д о в е д е н н я. Існування матриці A^{-1} незабарно випливає з леми 1.3.1, якщо ліву і праву частини рівності (1.3.9): $A \cdot A^* = A^* \cdot A$, помножити на число, обернене визначнику Δ , і врахувати комутативність множення матриці на число. Тоді діагональна матриця стане одиничною:

$$A \cdot \left(A^* \cdot \frac{1}{\Delta} \right) = \left(A^* \cdot \frac{1}{\Delta} \right) \cdot A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix} = E.$$

Матриця в круглих дужках – добуток союзної матриці з числом, оберненим до визначника матриці A , задовольняє умову (1.3.10) означення матриці A^{-1} , а значить, є шуканою матрицею.

Припустимо тепер існування матриці D , відмінної від A^{-1} , для якої теж виконується співвідношення (1.3.10), тобто $A \cdot D = D \cdot A = E$. Тоді на підставі асоціативності множення матриць приходимо до суперечності:

$$\left. \begin{aligned} DAA^{-1} &= D(AA^{-1}) = DE = D \\ DAA^{-1} &= (DA)A^{-1} = EA^{-1} = A^{-1} \end{aligned} \right\} \Rightarrow D = A^{-1}.$$

Матриця D не може бути відмінною від матриці A^{-1} .

Обернені матриці використовуються як в теоретичних дослідженнях, пов'язаних із властивостями матриць, так і в застосовних задачах.

Розв'язання СЛАР $n \times n$ за допомогою оберненої матриці

Матрична алгебра – розділ матричного числення, в якому вивчаються операції над матрицями – дозволяє подати $(n \times n)$ -системи у вигляді одного, так званого *матричного рівняння*, розв'язавши яке отримаємо розв'язок системи (в разі його існування). Робиться це так:

1) *виписуємо*, за заданою системою, **основну** матрицю системи A , матриці-стовпці **невідомих** X і **вільних членів** B :

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j = b_i, \quad i = \overline{1, n} \Rightarrow A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}, \quad X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix};$$

2) подаємо систему в **матричній формі (матричним рівнянням)**, спираючись на означення добутку і рівності матриць (прослідкуйте!):

$$A \cdot X = B, \quad (1.3.12)$$

де добуток матриць A і X дає ліві частини рівнянь СЛАР $n \times n$;

3) *розв'язуємо* матричне рівняння відносно матриці невідомих:

$$\begin{aligned} A \cdot X = B &\Rightarrow \left| \text{помножаємо обидві частини рівняння зліва на } A^{-1} \right| \Rightarrow \\ &\Rightarrow A^{-1}AX = A^{-1}B \Rightarrow \left| \text{застосовуємо сполучний закон} \right| \Rightarrow \\ &\Rightarrow (A^{-1}A)X = A^{-1}B \Rightarrow \left| A^{-1}A = E, \text{ а } EX = X \right| \Rightarrow X = A^{-1}B. \end{aligned}$$

Останнє співвідношення $X = A^{-1}B$ є ключем до розв'язання $(n \times n)$ -систем за допомогою оберненої матриці, або **методом оберненої матриці**:

$$X = A^{-1}B \Rightarrow \left| A^{-1} = \frac{1}{\Delta} \cdot A^* \right| \Rightarrow X = \frac{1}{\Delta} (A^* \cdot B). \quad (1.3.13)$$

Якщо згідно з (1.3.11) взяти матрицю A^{-1} в розгорнутому вигляді і помножити її на матрицю вільних членів B , то для невідомих x_j , $j = \overline{1, n}$, отримаємо ті ж самі формули, що і за правилом Крамера (*перевірте!*).

Розглянемо застосування (1.3.13) на конкретному *прикладі*. Нехай систему задано розширеною матрицею (*запишіть* систему в звичному вигляді (див. (1.3.1))):

$$\bar{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 3 & -2 \\ 5 & -1 & 4 & 3 \\ 2 & 0 & -3 & 10 \end{array} \right).$$

Розв'яжемо її методом оберненої матриці (якщо це можливо).

Розв'язання.

1⁰. *Випишуємо* основну матрицю системи A , матриці-стовпці невідомих X і вільних членів B :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 5 & -1 & 4 \\ 2 & 0 & -3 \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 10 \end{pmatrix}.$$

2⁰. Обчислюємо визначник системи:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 5 & \textcircled{-1} & 4 \\ 2 & 0 & -3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -9 & 0 & -5 \\ 5 & -1 & 4 \\ 2 & 0 & -3 \end{vmatrix} = a_{22}A_{22} = - \begin{vmatrix} -9 & -5 \\ 2 & -3 \end{vmatrix} = -37 \neq 0.$$

Висновок: систему можна розв'язати матричним способом.

3⁰. Знаходимо союзну матрицю A^* , підраховуючи алгебраїчні доповнення елементів рядків основної матриці і записуючи їх в стовпчик (або, що все рівно, підраховувати алгебраїчні доповнення елементів стовпців основної матриці і записати їх в рядок). Щоб не робити помилок у виборі знака A_{ij} , зразу виписуємо знаки $(-1)^{i+j}$ мінорів M_{ij} :

$$A_{11} = + \begin{vmatrix} -1 & 4 \\ 0 & -3 \end{vmatrix} = 3, \quad A_{21} = - \begin{vmatrix} -2 & 3 \\ 0 & -3 \end{vmatrix} = -6, \quad A_{31} = + \begin{vmatrix} -2 & 3 \\ -1 & 4 \end{vmatrix} = -5,$$

$$A_{12} = - \begin{vmatrix} 5 & 4 \\ 2 & -3 \end{vmatrix} = 23, \quad A_{22} = + \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -3 \end{vmatrix} = -9, \quad A_{32} = - \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 5 & 4 \end{vmatrix} = 11,$$

$$A_{13} = + \begin{vmatrix} 5 & -1 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = 2, \quad A_{23} = - \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = -4, \quad A_{33} = + \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 5 & -1 \end{vmatrix} = 9.$$

4⁰. Застосовуємо формулу (3.13) методу оберненої матриці:

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = -\frac{1}{37} \begin{pmatrix} 3 & -6 & -5 \\ 23 & -9 & 11 \\ 2 & -4 & 9 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 10 \end{pmatrix} = -\frac{1}{37} \begin{pmatrix} -74 \\ 37 \\ 74 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

Таким чином, $x_1 = 2$, $x_2 = -1$, $x_3 = -2$.

5⁰. Виконуємо перевірку:

$$\begin{cases} 1 \cdot 2 - 2 \cdot (-1) + 3 \cdot (-2) = -2 \\ 5 \cdot 2 - 1 \cdot (-1) + 4 \cdot (-2) = 3 \\ 2 \cdot 2 + 0 \cdot (-1) - 3 \cdot (-2) = 10. \end{cases}$$

Значення невідомих задовольняють – перетворюють у тотожності – всі три рівняння, значить систему розв'язано правильно.

Відповідь: $(x_1, x_2, x_3) = (2, -1, -2)$.

Розглянуті способи розв'язання СЛАР $n \times n$ – правило Крамера і метод оберненої матриці – не мають переваги один перед одним ні з принципової точки зору, ні в плані об'єму обчислювальної роботи.

Проте, якщо для утворення оберненої матриці застосувати *правило прямокутника* (як це робилося при розкритті детермінантів), то можна уникнути безпосереднього обчислення алгебраїчних доповнень елементів матриці системи A . Для цього треба до матриці A приписати справа одиничну матрицю E і за правилом прямокутника виконати перетворення отриманої матриці так, щоб на місці матриці A була матриця E , тоді місце матриці E займе матриця A^{-1} (*переконайтеся на конкретному прикладі*):

$$(A|E) \Leftrightarrow (E|A^{-1}). \quad (1.3.14)$$

Задача міжгалузевого балансу

Розглянемо застосування матричного числення до розв'язання задачі економічного змісту.

Постановка задачі. Нехай деяке матеріальне виробництво здійснюється кількома галузями (підприємствами, цехами, бригадами тощо). Знайти валовий випуск продукції кожною з галузей, якщо відомі прямі (внутрішні) витрати і кінцевий продукт галузі.

Математична модель. Введемо позначення кількісних характеристик – величин, якими описується виробництво, і наведемо зв'язок між ними:

m – кількість галузей;

x_i ($i = \overline{1, m}$) – *валовий випуск* кожною з галузей: кількість усієї випущеної продукції;

x_{ij} ($i = \overline{1, m}, j = \overline{1, m}$) – *внутрішнє споживання*: кількість продукції i -ї галузі, яка використовується для виробництва продукції j -ї галузі, зокрема, всередині галузі;

y_i ($i = \overline{1, m}$) – *кінцевий продукт* i -ї галузі: кількість продукції, яка йде на споживання зовні m галузей-виробників (на експорт, на споживання всередині країни) або на поповнення (з тією чи іншою метою) товарних запасів та ін.

Валовий продукт x_i кожної галузі є сумою компонент x_{ij} і y_i :

$$x_i = \sum_{j=1}^m x_{ij} + y_i, \quad i = \overline{1, m}; \quad (1.3.15)$$

a_{ij} ($i = \overline{1, m}, j = \overline{1, m}$) – *технологічні (витратні) коефіцієнти* внутрішньогалузевого споживання або *прямі (внутрішні) витрати*: величини, які указують скільки одиниць продукції i -ї галузі використовується для виробництва однієї одиниці продукції j -ї галузі, отже,

$$x_{ij} = a_{ij} \cdot x_j, \quad i = \overline{1, m}, \quad j = \overline{1, m}. \quad (1.3.16)$$

Кажуть, що це співвідношення визначає *виробничі програми* галузей. З урахуванням (1.3.16) рівність (1.3.15) набуває вигляду:

$$x_i = \sum_{j=1}^m a_{ij} x_j + y_i, \quad i = \overline{1, m}. \quad (1.3.17)$$

Введемо в розгляд матриці

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix}, \quad Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix}, \quad A = (a_{ij})_{m \times m} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mm} \end{pmatrix},$$

де X – матриця-стовпець *валових випусків* галузей;
 Y – матриця-стовпець *кінцевих продуктів* галузей;
 A – квадратна матриця *прямих витрат*.

Тоді співвідношення (1.3.17) можна подати в матричній формі (*підтвердіть!*):

$$X = AX + Y. \quad (1.3.18)$$

Отримане матричне рівняння називають **балансовою моделлю виробництва**, або **моделлю міжгалузевого балансу виробництва**.

При відомих прямих витратах (представлених матрицею A) і валових випусках галузей (представлених матрицею X) рівняння (1.3.18) визначає СЛАР $m \times m$ відносно y_i ($i = \overline{1, m}$) – *кінцевих продуктів* i -ї галузі, яке легко розв'язується відносно матриці Y :

$$Y = X - AX \Rightarrow \left| X = EX \right| \Rightarrow Y = (E - A)X. \quad (1.3.19)$$

А тепер перейдемо до розв'язання поставленої **задачі**: знайти валовий випуск x_i кожної з m галузей, якщо відомі прямі (внутрішні) витрати a_{ij} і кінцеві продукти галузей y_i ($i = \overline{1, m}, j = \overline{1, m}$).

Розв'язання. Запишемо рівняння (1.3.19) у вигляді $(E - A)X = Y$ і помножимо зліва обидві частини рівняння на матрицю $B = (E - A)^{-1}$, тоді:

$$BB^{-1}X = BY \Rightarrow \left| B^{-1}B = E \text{ і } EX = X \right| \Rightarrow X = BY. \quad (1.3.20)$$

Матрицю $B = (b_{ij})_{m \times m}$ називають матрицею *повних витрат*, а різниця матриць повних і прямих витрат – матриця $K = (k_{ij})_{m \times m}$ – називається матрицею *непрямих (опосередкованих) витрат*: $K = B - A$.

Таким чином, матриця-стовпець валових випусків галузей дорівнює добутку матриці повних витрат з матрицею-стовпцем кінцевих продуктів галузей.

Побудовану модель міжгалузевого балансу виробництва називають ще **статичною моделлю Леонтьєва багатогалузевої економіки** – „**витрати-випуск**” – за ім'ям американського економіста російського походження (Wassily Leontief (1906 – 1999)).

1.4. Системи m лінійних алгебраїчних рівнянь з n невідомими (СЛАР $m \times n$): дослідження на сумісність та розв'язання

Ранг матриці: означення, способи відшукування

Стосовно систем лінійних рівнянь, і взагалі систем рівнянь, виникає запитання: чи обов'язково кількість рівнянь і невідомих повинні бути однаковими? Відповідь не є ствердною, бо при описі (моделюванні) реальних процесів математичними засобами число невідомих може бути і менше, і більше кількості рівнянь (залежно від природи явища та умов, у яких воно відбувається). Тому глибокому вивченню (аналізу) підлягають не тільки квадратні матриці, а й прямокутні. Для матриць довільного розміру $m \times n$, де $m \leq n$ або $m > n$, вводять числову характеристику „ранг” (від нім. rang – чин, ступінь, розряд та ін.).

Отже, нехай $A = (a_{ij})_{m \times n}$ – матриця розміру $m \times n$. Виберемо довільним чином k рядків і k стовпців (число k не може перевищувати менше з чисел m, n : $1 \leq k \leq \min\{m, n\}$). Елементи, які стоять на перетині цих рядків і стовпців, утворюють квадратну підматрицю порядку k .

Визначник матриці k -го порядку, утвореної перетином k рядків і k стовпців матриці A , називається **мінором** k -го порядку $M^{(k)}$ матриці A .

Приклад.

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 8 & 5 & -4 \\ -7 & 0 & 1 & 10 \end{pmatrix} \Rightarrow M^{(2)} = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 10 \end{vmatrix} - \text{мінор другого порядку.}$$

Зрозуміло, що мінори матриці як визначники можуть бути рівними або не рівними нулю.

Усі можливі мінори нульової матриці дорівнюють нулю (чому?). У застосовних задачах інтерес викликають мінори, не рівні нулю, тому саме з такими мінорами пов'язане поняття *рангу матриці*.

Найбільше серед натуральних чисел проміжку $[1, \min\{m, n\}]$ число r , для якого існує відмінний від нуля мінор $M^{(r)}$ матриці A , називається **рангом матриці** A і позначається символом $rng A$:

$$rng A = r \Leftrightarrow \exists M^{(r)} \neq 0 \wedge M^{(k)} = 0 \quad \forall k > r. \quad (1.4.1)$$

Це означає, що матриця має ранг r , якщо знайдеться хоча б один мінор порядку r , не рівний нулю, а всі мінори $(r+1)$ -го порядку і вище – рівні нулю. Коротко: **ранг матриці** – це найвищий із порядків відмінних від нуля мінорів матриці. (Подумайте, чи існує матриця, ранг якої слід вважати рівним нулю.)

Наголошуємо: не плутайте ранг матриці з мінором (визначником), який йому відповідає.

Будь-який відмінний від нуля мінор, порядок якого дорівнює рангу матриці, називають **базисним мінором**:

$$M^{(k)} \neq 0 - \text{базисний мінор} \Leftrightarrow k = rng A. \quad (1.4.2)$$

Існує два способи встановлення рангу матриці.

1-й спосіб (метод обведення). Кажуть, що мінор $(k + 1)$ -го порядку *обводить* мінор k -го порядку, якщо він містить його цілком усередині себе. За методом обведення дотримуються правила:

при обчисленні рангу матриці A слід переходити від мінорів менших порядків до мінорів більших порядків;

якщо знайдено мінор порядку k , відмінний від нуля, то обчисленню підлягають лише мінори $(k + 1)$ -го порядку, які його обводять;

в разі, коли всі мінори $(k + 1)$ -го порядку рівні нулю, $\text{rng } A = k$.

Перебір мінорів починають, за звичаєм, з мінору 2-го порядку, розташованого в лівому верхньому куті матриці. Бажано перед перебором $M^{(2)}$ здійснити візуальний аналіз матриці з метою виявлення рядків чи стовпців з пропорційними елементами (в разі їх існування).

Приклад на встановлення рангу матриці методом обведення:

$$\begin{aligned}
 A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & 4 & -2 & 2 \\ 2 & 4 & -2 & 6 \end{pmatrix} &\Rightarrow \left| \begin{array}{l} \text{вибираємо мінор 2-го порядку} \\ \text{і обчислюємо його} \end{array} \right| \Rightarrow \\
 \Rightarrow M^{(2)} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 4 \end{vmatrix} = 4 \neq 0 &\Rightarrow \left| \begin{array}{l} \text{обчислюємо мінори, які} \\ \text{обводять } M^{(2)} \end{array} \right| \Rightarrow \\
 \Rightarrow \left[M_1^{(3)} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 4 & -2 \\ 2 & 4 & -2 \end{vmatrix} = 0, M_2^{(3)} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 2 \\ 2 & 4 & 6 \end{vmatrix} = 0. \right.
 \end{aligned}$$

Висновок: ранг матриці дорівнює двом ($r = \text{rng } A = 2$), бо всі мінори 3-го порядку, які обводять відмінний від нуля мінор, рівні нулю.

Пропонуємо підрахувати кількість базисних мінорів матриці A і розв'язати СЛАР 3×3 , розглядаючи A , як розширену матрицю системи.

2-й спосіб (метод елементарних перетворень (е/п) матриці). Наведемо теорему, яка є основою пропонованого методу.

Теорема 1.4.1 (про ранги еквівалентних матриць). Еквівалентні матриці мають один і той же ранг (інакше: е/п матриці не змінюють її ранг):

$$A \sim B \Rightarrow \text{rng } A = \text{rng } B. \quad (1.4.3)$$

Д о в е д е н н я зводиться до відповідей на запитання: як зміниться відмінний від нуля мінор матриці, який визначає її ранг, у результаті е/п матриці? Згідно з означенням е/п і властивостями визначника (адже мінор – визначник!) маємо: е/п 1) і 4) не змінюють мінор; е/п 2) змінює його знак на протилежний; е/п 3) рівносильне множенню мінору на відмінне від нуля число; е/п 5), 6) не торкаються базисного мінору, бо він не містить нульових чи пропорційних рядів. Отже, в результаті е/п матриці базисний мінор залишиться базисним (а ті мінори, що були нулями, ними і будуть).

Правило відшукування рангу матриці: щоб знайти ранг матриці $A = (a_{ij})_{m \times n}$, треба за допомогою е/п утворити з неї (при $m = n$) або в ній (при $m \neq n$) діагональну, а краще одиничну, матрицю, можливо, з точністю до розташування рядів; відтак порядок отриманої матриці дає ранг вихідної матриці A , тобто найвищий із порядків відмінних від нуля її мінорів.

Рекомендуємо для здійснення е/п застосовувати правило прямокутника; нулями замінити елементи (крім головного) провідних стовпців.

Приклад на встановлення рангу матриці методом е/п:

$$A = \begin{pmatrix} 1 \textcircled{2} & -1 & 3 \\ 0 & 4 & -2 & 2 \\ 2 & 4 & -2 & 6 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & 4 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow M^{(2)} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 4 \end{vmatrix} \neq 0 \Rightarrow (r = 2).$$

„Невдача” – ранг визначився і без утворення діагональної матриці. Якщо виконувати е/п далі, то отримаємо:

$$A \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \textcircled{3} \\ 0 & 2 & -1 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1-4 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = E \Rightarrow (r = 2).$$

СЛАР $m \times n$: означення, теорема Кронекера – Капеллі, дослідження на сумісність

Сукупність m рівнянь першого степеня відносно n невідомих x_1, x_2, \dots, x_n , які в кожному з рівнянь є числовими характеристиками одного і того ж явища чи процесу, називається **системою m лінійних алгебраїчних рівнянь з n невідомими**, або **$(m \times n)$ -системою**, причому

натуральні числа m і n можуть бути пов'язані будь-яким із співвідношень: $m < n$, $m = n$, $m > n$.

В символах СЛАР $m \times n$ подається в розгорнутому вигляді:

[illegible]

де складові (компоненти) системи мають таку ж назву, як і в СЛАР $n \times n$, або в стислому – за допомогою символу почленного підсумовування \sum :

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j = b_i, \quad i = \overline{1, m}. \quad (1.4.5)$$

СЛАР $n \times n$ і СЛАР $m \times n$ називають ще відповідно **квадратною** і **прямокутною** системами.

Усі поняття, які означалися для квадратних систем (див. п. 1.3), звичайно ж слід віднести і до систем прямокутних; зокрема це стосується матриць – **основної матриці** системи $A = (a_{ij})_{m \times n}$ та **розширеної матриці** системи $\bar{A} = (a_{ij} | b_i)_{m \times (n+1)}$:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}, \quad \bar{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{bmatrix}.$$

Виявляється, що зіставлення рангів матриць A і \bar{A} дає змогу встановити, сумісна чи несумісна $(m \times n)$ -система. Це було відкрито знаними німецькими математиками – Леопольдом Кронекером (1823 – 1891) і Альфредом Капеллі (1845 – 1910).

Теорема 1.4.2 (Кронекера – Капеллі, *критерій сумісності системи*). Система лінійних рівнянь (1.4.4) сумісна тоді і тільки тоді, коли ранг розширеної матриці дорівнює рангу основної матриці:

$$\text{СЛАР } m \times n \text{ сумісна} \Leftrightarrow \text{rng } \bar{A} = \text{rng } A \quad (\text{або } r_{\bar{A}} = r_A). \quad (1.4.6)$$

Число r , якому дорівнюють ранги обох матриць, називають **рангом системи рівнянь**, тобто $r_A = r_{\bar{A}} = r$ – ранг системи.

Згідно з теоремою 1.4.2 (доводити ми її не будемо) **дослідження на сумісність** $(m \times n)$ -системи – установлення того, чи має система розв'язки, чи не має – зводиться до задачі відшукування рангу матриці.

Оскільки основна матриця $A = (a_{ij})_{m \times n}$ є складовою частиною розширеної $\bar{A} = (a_{ij} | b_i)_{m \times (n+1)}$, то ранги матриць A і \bar{A} знаходять не окремо, а досліджують тільки розширену матрицю.

Приклад: дослідити на сумісність (4×4) -систему

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 5x_3 + 3x_4 = 1 \\ 2x_1 + x_2 + 6x_3 - 5x_4 = -3 \\ 3x_1 - x_2 - x_3 - 5x_4 = 3 \\ 4x_1 + 5x_2 - 4x_3 + x_4 = -1 \end{cases} \Rightarrow \bar{A} = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -5 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 6 & -5 & -3 \\ 3 & -1 & -1 & -5 & 3 \\ 4 & 5 & -4 & 1 & -1 \end{array} \right).$$

Установимо ранги матриць A і \bar{A} методом обведення.

1. *Починаємо з мінорів другого порядку* (див. вище):

$$M^{(2)} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 1 - 4 = -3 \neq 0.$$

2. *Обчислюємо мінори 3-го порядку, які обводять $M^{(2)}$:*

$$M^{(3)} = \begin{vmatrix} \textcircled{1} & 2 & -5 \\ 2 & 1 & 6 \\ 3 & -1 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -5 \\ 0 & -3 & 16 \\ 0 & -7 & 14 \end{vmatrix} = 7 \begin{vmatrix} 1 & 2 & -5 \\ 0 & \textcircled{1} & -2 \\ 0 & -3 & 16 \end{vmatrix} = 7 \begin{vmatrix} 1 & 2 & -5 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 10 \end{vmatrix} \neq 0.$$

Зверніть увагу: за допомогою правила прямокутника замінили нулями елементи, розташовані нижче головної діагоналі.

3. *Знаходимо мінори 4-го порядку, які обводять $M^{(3)}$:*

$$M_1^{(4)} = \begin{vmatrix} \textcircled{1} & 2 & -5 & 3 \\ 2 & 1 & 6 & -5 \\ 3 & -1 & -1 & -5 \\ 4 & 5 & -4 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -5 & 3 \\ 0 & -3 & 16 & -11 \\ 0 & -7 & 14 & -14 \\ 0 & -3 & 16 & -11 \end{vmatrix} = 0.$$

Покажіть, що другий мінор 4-го порядку теж дорівнює нулю.

Висновок: система сумісна $r_A = r_{\bar{A}} = 3$, ранг системи $r = 3$.

Пропонуємо самостійно дослідити систему на сумісність, визначаючи ранги матриць \bar{A} і A методом елементарних перетворень.

Загальний порядок розв'язання $(m \times n)$ -систем.

Методи Гаусса та Жордана – Гаусса

Теорема 1.4.2 – критерій сумісності системи – не відповідає на питання, чи визначена система, чи невизначена, і не дає, на жаль, ніякого способу для практичного відшукування всіх розв'язків сумісної $(m \times n)$ -системи. До висвітлення цього питання ми і перейдемо.

Перш за все зазначимо, що ранг системи не може перевищувати кількості невідомих, тобто $r = \text{rng } A = \text{rng } \bar{A} \leq n$. Дійсно, згідно з означенням ранг матриці не перевищує менший із розмірів матриці, тобто чисел m і n : $r \leq \min\{m, n\}$. Це означає, що при будь-якому співвідношенні між числами m і n (у вигляді нерівності), ранг не більше числа невідомих:

$$\begin{cases} m \leq n \Rightarrow |r \leq m| \Rightarrow r \leq m \leq n, \\ n < m \ (m > n) \Rightarrow r \leq n. \end{cases} \quad (1.4.7)$$

А тепер розглянемо окремо випадки: $r = n$, $r < n$.

1. Умові $r = n$ відповідає квадратна $(n \times n)$ -система з визначником – базисним мінором основної матриці системи, – відмінним від нуля. За правилом Крамера така система має *єдиний розв'язок*, який можна знайти за формулами Крамера або методом оберненої матриці.

2. Умові $r < n$ відповідатиме прямокутна $(r \times n)$ -система, в якій $(n - r)$ невідомих немовби „зайві”, щоб бути квадратною системою. Тоді поступаємо таким чином:

залишаємо в лівих частинах рівнянь r невідомих з коефіцієнтами, які відповідають одному з базисних мінорів основної матриці; невідомі, які залишаються в лівих частинах рівнянь, називаються **базисними**;

переносимо члени рівнянь з іншими $(n - r)$ невідомими в праві частини рівнянь: невідомі, які підлягають перенесенню в праві частини рівнянь, називають (оголошують) **вільними**, тобто такими, яким можна надавати будь-яких вартостей.

У результаті отримуємо $(r \times r)$ -систему з відмінним від нуля визначником – базисним мінором, – яку можна розв'язати за правилом Крамера.

При цьому r базисних невідомих будуть (лінійно) виражатись через $(n - r)$ вільних невідомих. Зрозуміло, що надаючи довільним чином значення вільним невідомим, ми отримаємо *безліч розв'язків* вихідної системи.

Розв'язок системи, що містить вільні невідомі, через які виражаються базисні невідомі, називається **загальним розв'язком** системи. **Частинним розв'язком** $(m \times n)$ -системи називається розв'язок, який отримується із загального при конкретних (фіксованих) вартостях вільних невідомих. Частинний розв'язок системи, знайдений при нульових значеннях вільних невідомих, називають **базисним розв'язком**.

Висновок: якщо $(m \times n)$ -система сумісна і має ранг r , то вона зводиться до розв'язання квадратної $(r \times r)$ -системи, незалежно від того, чи ранг дорівнює числу невідомих $(r = n)$, чи менше їх числа $(r < n)$; у другому випадку $(n - r)$ невідомих оголошуються вільними і відповідні члени рівнянь переносяться з лівої частини в праву.

Розглянемо на простеньких ілюстративних *прикладках* усі можливі випадки (*аналізуйте, осмислюйте і коментуйте* кожний крок):

$$1. \begin{cases} 2x_1 + 3x_2 = 5 \\ 2x_1 - x_2 = 1 \\ 4x_1 + 2x_2 = 5 \end{cases} \Rightarrow \bar{A} = \left(\begin{array}{cc|c} \textcircled{2} & 3 & 5 \\ 2 & -1 & 1 \\ 4 & 2 & 5 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 2 & 3 & 5 \\ 0 & -4 & -4 \\ 0 & -4 & -5 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 2 & 3 & 5 \\ 0 & \textcircled{1} & 1 \\ 0 & 1 & 5/4 \end{array} \right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{cc|c} 2 & 3 & 5 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1/4 \end{array} \right) \Rightarrow (r_A = 2, r_{\bar{A}} = 3) \Rightarrow \begin{cases} r_A \neq r_{\bar{A}} \\ \text{(система} \\ \text{несумісна)}. \end{cases}$$

$$2. \begin{cases} 2x_1 + 3x_2 = 5 \\ 2x_1 - x_2 = 1 \\ 2x_1 + x_2 = 3 \end{cases} \Rightarrow \bar{A} = \left(\begin{array}{cc|c} \textcircled{2} & 3 & 5 \\ 2 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 2 & 3 & 5 \\ 0 & -4 & -4 \\ 0 & -2 & -2 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 2 & 3 & 5 \\ 0 & 1 & 1 \end{array} \right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (r_A = r_{\bar{A}} = r = 2) \Rightarrow \text{система сумісна і визначена, бо } r = n = 2.$$

Помічаємо, що остання матриця, еквівалентна матриці \bar{A} , визначає еквівалентну заданій системі 2×2 -систему, яка легко розв'язується без залучення правила Крамера (її основна матриця трикутна):

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 = 5 \\ x_2 = 1 \end{cases} \Rightarrow (x_1, x_2) = (1, 1). \quad (1.4.8)$$

$$3. \begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 4 \\ x_1 - 2x_2 + x_3 = 0 \\ 2x_2 + x_3 = 2 \end{cases} \Rightarrow \bar{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} \textcircled{1} & 2 & 3 & 4 \\ 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 2 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & -4 & -2 & -4 \\ 0 & 2 & 1 & 2 \end{array} \right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & \textcircled{1} & 2 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -4 & 0 & -2 \\ 0 & 2 & 1 & 2 \end{array} \right) \Rightarrow \begin{cases} (r_A = r_{\bar{A}} = r = 2 < n = 3) \\ \text{(система сумісна і} \\ \text{невизначена)}. \end{cases}$$

Записуємо еквівалентну заданій (2×3) -систему, вибираємо в якості базисних невідомих x_1, x_3 , оголошуємо x_2 вільним невідомим, розв'язуємо систему відносно x_1, x_3 і подаємо загальний розв'язок:

$$\begin{cases} x_1 - 4x_2 = -2 \\ 2x_2 + x_3 = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = -2 + 4x_2 \\ x_3 = 2(1 - x_2) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = -2 + 4t \\ x_2 = t, \\ x_3 = 2(1 - t), \end{cases} \quad (1.4.9)$$

де t – числовий параметр – довільне дійсне число: $\forall t \in \mathbf{R} = (-\infty, +\infty)$.

Знайдіть самостійно один із частинних розв'язків і базисний розв'язок.

Здійснюючи е/п над розширеною матрицею системи \bar{A} , **слід мати на увазі**, що:

кожному рівнянню системи відповідає рядок матриці \bar{A} і навпаки;

після виконання е/п перетворень над рядками матриці \bar{A} отримуємо систему, еквівалентну вихідній;

стовпець вільних членів системи в якості головного не вибирається.

Підсумовуючи розглянуте, отримуємо **загальний порядок** розв'язання $(m \times n)$ -систем:

1⁰. Досліджуємо систему на сумісність, для чого встановлюємо ранги основної і розширеної матриць (методом обведення або методом е/п).

2⁰. Розв'язуємо систему в разі її сумісності (будь-яким із відомих методів), якщо ранг системи дорівнює числу невідомих ($r = n$); при цьому обов'язково (!) виконуємо перевірку знайденого розв'язку.

3⁰. Визначаємо базисні (і оголошуємо вільні) невідомі коли $r < n$, а потім переходимо безпосередньо до відшукування загального розв'язку.

Подамо загальний порядок розв'язання СЛАР $m \times n$ структурною схемою (рис. 1.4.1).

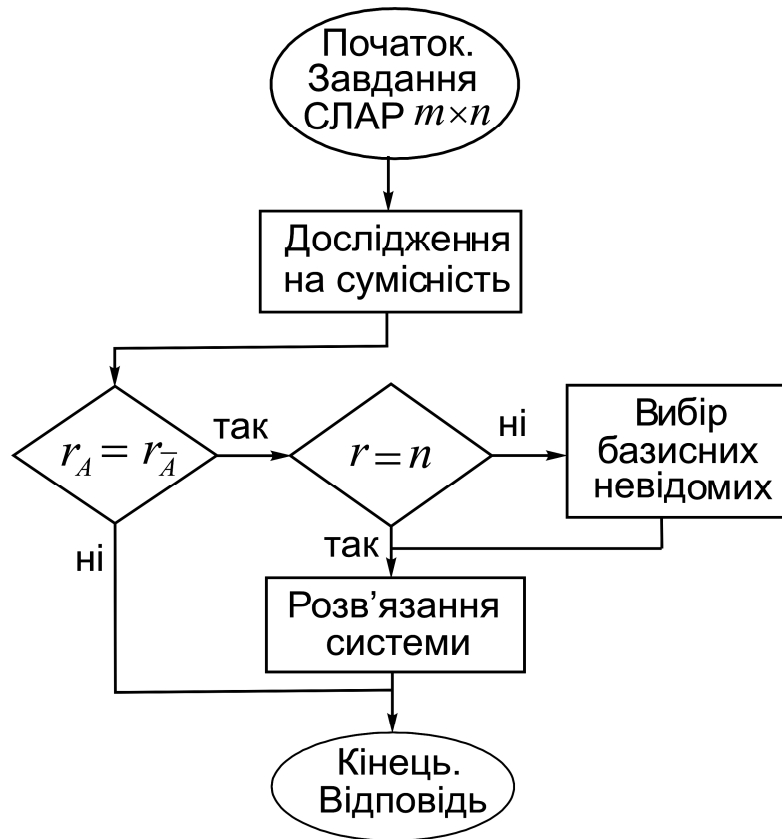


Рис. 1.4.1. Структурна схема розв'язання $(m \times n)$ -систем

Формули Крамера та метод оберненої матриці розв'язання квадратних систем викликають теоретичний інтерес, але практичного значення, на жаль, не мають, бо їхнє застосування спряжене з громізкою обчислювальною роботою (особливо при великих розмірах системи).

Аналізуючи процес розв'язування систем у наведених вище прикладах (див. (1.4.8), (1.4.9)), помічаємо, що разом із відшукуванням рангів матриць A і \bar{A} (за допомогою е/п) у кінцевому результаті в (1.4.8) отримали систему, основна матриця якої є трикутною, що дало змогу *легко знайти* розв'язок; у (1.4.9) одержали систему, основна матриця якої є одиничною, що дало змогу *відразу записати* розв'язок системи. Саме з такими підходами пов'язані *методи Гаусса і Жордана – Гаусса*, як його модифікації. (Карл Фрідріх Гаусс (1777 – 1855) – видатний німецький математик, Камілл Жордан (1838 – 1922) – видатний французький математик.)

Метод Гаусса, або метод послідовного виключення невідомих, полягає в такому: над рядками розширеної матриці \bar{A} виконують е/п так, щоб основна матриця системи A набула *трикутного* виду, коли $r = n$, або *трапецоїдного* виду, коли $r < n$, як зображено на рис. 1.4.2:

$$\begin{aligned} \text{а) } r = n: A = \left(\begin{array}{c|c} r & \\ \hline & r \end{array} \right) &\Rightarrow A \sim \left(\begin{array}{c|c} r & \\ \hline 0 & r \end{array} \right) \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \text{система} \\ \text{визначена;} \end{array} \right. \\ \\ \text{б) } r < n: A = \left(\begin{array}{c|c} n & \\ \hline & r \end{array} \right) &\Rightarrow A \sim \left(\begin{array}{c|c} r & n-r \\ \hline 0 & r \end{array} \right) \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \text{система} \\ \text{невизначена.} \end{array} \right. \end{aligned}$$

Рис. 1.4.2. Зведення матриці A до: а) трикутної; б) трапецоїдної

У випадку невизначеності системи після перенесення вільних невідомих в праві частини рівнянь теж отримуємо трикутну матрицю. Зведення основної матриці до трикутної називають **прямим ходом** розв'язання системи за методом Гаусса. **Зворотним ходом** називається безпосереднє відшукування значень невідомих, починаючи з рівняння з одним невідомим. Адже трикутній матриці відповідає (в загальному випадку) система, яка міститиме одне рівняння з r базисними невідомими, одне – з $(r-1)$ -м невідомим і так далі до одного рівняння з одним невідомим.

Приклад розв'язання СЛАР методом Гаусса:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 2 \\ x_1 - x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 + 3x_2 - x_3 = -2 \end{cases} \Rightarrow \bar{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} \textcircled{1} & 2 & 3 & 2 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & -1 & -2 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 2 \\ 0 & -3 & -2 & -2 \\ 0 & \textcircled{1} & -4 & -4 \end{array} \right) \sim$$

(зведення A до трикутного виду)

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 11 & 10 \\ 0 & 0 & -14 & -14 \\ 0 & 1 & -4 & -4 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -4 & -4 \\ 1 & 0 & 11 & 10 \end{array} \right) \Rightarrow |r = n = 3| \Rightarrow \begin{cases} x_3 = 1 \\ x_2 = 0 \\ x_1 = -1. \end{cases}$$

(трикутна матриця)

(розв'язок)

Як бачимо з прикладу, не суттєво, відносно якої діагоналі (головної чи сторонньої) буде утворена трикутна матриця.

Метод Жордана – Гаусса полягає в такому: за допомогою е/п над рядками розширеної матриці \bar{A} з основної матриці системи A (або в ній) утворюють *діагональну* або *одиначну* матрицю, що відповідає переходу від заданої $(m \times n)$ -системи до еквівалентної їй $(r \times r)$ -системи, кожне рівняння якої міститиме лише одну (базисну) невідому.

Практичні рекомендації:

при виконанні е/п нулями замінюють елементи, крім одного, головного стовпця і в різних рядках – різні;

стовпець вільних членів системи, як головний (провідний), не вибирається (чому?);

в якості провідних елементів (п/е) доцільно вибирати елементи, рівні за модулем одиниці (якщо такі є в наявності), щоб уникнути операції ділення при підрахунку елементів еквівалентної матриці.

Окрім наведеної вище форми подання ходу розв'язання систем – ланцюжком еквівалентних матриць, – застосовують іншу – у вигляді *таблиці*, що містить у собі розширену матрицю \bar{A} і еквівалентні їй матриці, які одержуються в результаті елементарних перетворень (табл. 1.4.1).

Крім того, для перевірки правильності виконання арифметичних дій, як правило, вводять „стовпець контрольних сум” (Σ), елементами якого є суми елементів рядків матриці \bar{A} . Для нових матриць кожний елемент цього стовпця також підраховується за правилом прямокутника. Якщо помилки в обчисленнях елементів нової матриці a'_{ij} , b'_i немає, то елемент контрольної суми дорівнюватиме сумі інших елементів рядка, якому він належить. На жаль, наведена умова не є достатньою (чому?).

У стовпці з написом „примітка” наводять короткий коментар щодо виконуваних елементарних перетворень; указуються: провідні елементи (п/е), зміна знака елементів рядка матриці, множення чи ділення елементів рядка на відмінне від нуля число.

Приклад розв'язання СЛАР методом Жордана – Гаусса:

$$\begin{cases} 3x_1 + x_2 + 2x_3 = 5 \\ 2x_1 + x_2 - 2x_3 = 7 \\ -x_1 - x_2 + 2x_3 = -4 \end{cases} \Rightarrow \bar{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 1 & 2 & 5 \\ 2 & 1 & -2 & 7 \\ -1 & -1 & 2 & -4 \end{array} \right).$$

Набір чисел $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) = (0, 0, \dots, 0)$ є розв'язком будь-якої однорідної системи (о/с), який називають **нульовим**, або **тривіальним**.

Якщо ранг системи дорівнює числу невідомих ($r = n$), то система *визначена*: вона має єдиний – нульовий – розв'язок.

Якщо $r < n$, то система має розв'язки, відмінні від тривіального, і їх *нескінченно багато*. Зокрема, якщо визначник однорідної квадратної $(n \times n)$ -системи дорівнює нулю, то вона невизначена (*на якій підставі?*).

Загальний розв'язок системи міститиме $k = n - r$ вільних невідомих. Виявляється, що уся *безліч* розв'язків о/с може бути зображена за допомогою *скінченної множини* її частинних розв'язків. Покажемо це.

Приклад. Знайти загальний розв'язок однорідної системи рівнянь:

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 - 9x_3 + x_4 + 3x_5 = 0 \\ 2x_1 \quad \quad - 3x_3 + x_4 + 4x_5 = 0 \\ 3x_1 + 2x_2 + 3x_3 + x_4 + 5x_5 = 0 \end{cases} \quad (1.4.10)$$

Перетворюємо матрицю системи за методом Жордана – Гаусса:

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & -9 & 1 & 3 \\ 2 & 0 & -3 & 1 & 4 \\ 3 & \textcircled{2} & 3 & 1 & 5 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -2 & -9 & 1 & 3 \\ 2 & 0 & -3 & 1 & 4 \\ 3 & 2 & 3 & 1 & 5 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -2 & -9 & 1 & 3 \\ 2 & 0 & -3 & 1 & 4 \\ 3 & 2 & 3 & 1 & 5 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -2 & -9 & 1 & 3 \\ 2 & 0 & -3 & 1 & 4 \\ 3 & 2 & 3 & 1 & 5 \end{pmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & -2 & -9 & 1 & 3 \\ 2 & 0 & -3 & 1 & 4 \\ 3 & 2 & 3 & 1 & 5 \end{pmatrix} \Rightarrow (r = 2, \quad \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} - \text{базисний мінор}).$$

Вибираємо в якості базисних невідомих x_2, x_4 .

Оголошуємо x_1, x_3, x_5 вільними невідомими, покладаючи: $x_1 = u$, $x_3 = v$, $x_5 = w$.

Виражаємо x_2, x_4 через вільні невідомі:

$$\begin{cases} 1 \cdot x_1 + 2 \cdot x_2 + 6 \cdot x_3 + 1 \cdot x_5 = 0 \\ 2 \cdot x_1 \quad \quad - 3 \cdot x_3 + 1 \cdot x_4 + 4 \cdot x_5 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_2 = -0,5 \cdot u - 3 \cdot v - 0,5 \cdot w \\ x_4 = -2 \cdot u + 3 \cdot v - 4 \cdot w. \end{cases}$$

Загальний розв'язок системи у матричній формі (позначимо його через $X_{3/0}$) зображується так:

$$X_{3/0} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u \\ -0,5u - 3v - 0,5w \\ v \\ -2u + 3v - 4w \\ w \end{pmatrix},$$

де u, v, w відіграють роль параметрів, які можуть приймати будь-які значення із множини дійсних чисел \mathbf{R} .

Система розв'язана.

Подамо матрицю-стовпець загального розв'язку $X_{3/0}$ у вигляді добутку з двох матриць розмірами 5×3 і 3×1 , тобто $n \times k$ і $k \times 1$:

$$X_{3/0} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -0,5 & -3 & -0,5 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & 3 & -4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix}. \quad (1.4.11)$$

Звичайно, при $u = v = w = 0$ отримуємо тривіальний розв'язок. Неважко переконатися (*зробіть це*), що стовпці першої матриці (матриці-множеного) є частинними розв'язками системи, які отримуються на наборах значень вільних невідомих, які є стовпцями одиничної матриці:

для системи (1.4.10)

у загальному випадку – матриці

$$\begin{pmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}; \quad E_k = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}_{k \times k}, \text{ де } k = n - r.$$

Сукупність (множина) частинних розв'язків о/с, що визначається матрицею E_k , стовпцями якої є набори значень вільних невідомих, називається **фундаментальною системою розв'язків** о/с X_Φ . Термін „фундаментальна” пояснюється тим, що загальний розв'язок системи $X_{3/0}$ як на фундаменті отримується у вигляді добутку X_Φ зі стовпцем вільних невідомих $X_B = (x_1, x_3, x_5)^T = (u, v, w)^T$:

$$X_{3/0} = X_\Phi \cdot X_B - \text{структура загального розв'язку о/с.} \quad (1.4.12)$$

Фундаментальну систему розв'язків системи (1.4.10) складають такі матриці-стовпці (див. (1.4.11)):

$$(1 - 0,5 \ 0 \ -2 \ 0)^T, (0 - 3 \ 1 \ 3 \ 0)^T, (0 - 0,5 \ 0 \ -4 \ 1)^T.$$

Зауваження: замість матриці E_k можна брати будь-яку еквівалентну їй матрицю, тобто матрицю рангу k (матрицю k -го порядку, визначник якої відмінний від нуля).

Однорідна система, яку одержано з неоднорідної системи (н/с) заміною вільних членів нулями, називається **зведеною системою** для системи неоднорідних рівнянь:

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j = b_i, \ i = \overline{1, m}, - \text{неоднорідна система} \Rightarrow \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j = 0 - \text{зведена система}$$

Між розв'язками н/с і зведеною для неї о/с існує тісний зв'язок, а саме: сума будь-якого розв'язку $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$ н/с з будь-яким розв'язком $\beta = (\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n)$ зведеної системи є розв'язком н/с.

Дійсно, за означенням поняття розв'язку системи маємо:

$$\left[\begin{array}{l} \sum_{j=1}^n a_{ij} \alpha_j = b_i \\ \sum_{j=1}^n a_{ij} \beta_j = 0 \end{array} \right] \Rightarrow \sum_{j=1}^n a_{ij} (\alpha_j + \beta_j) = \sum_{j=1}^n a_{ij} \alpha_j + \sum_{j=1}^n a_{ij} \beta_j = b_i, \ i = \overline{1, m}.$$

Пропонуємо, як вправу, аналогічним чином показати, що різниця будь-яких двох розв'язків н/с є розв'язком зведеної для неї о/с.

З'ясуємо зв'язок між загальними розв'язками н/с і зведеної для неї о/с на конкретному прикладі.

Приклад. Знайти загальний розв'язок системи рівнянь:

$$\begin{cases} x_1 + x_3 + x_4 = 3 \\ 2x_1 + x_2 - x_4 = 2 \\ x_1 + x_2 - x_3 - 2x_4 = -1 \end{cases} \quad (1.4.13)$$

Перетворимо розширену матрицю системи \bar{A} за методом Жордана – Гаусса і визначимо базисні та вільні невідомі:

$$\begin{aligned} \bar{A} &= \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & \textcircled{1} & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 0 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & -1 & -2 & -1 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 0 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 0 & -1 & 2 \end{array} \right) \sim \\ &\sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 0 & -1 & 2 \end{array} \right) \Rightarrow \begin{cases} x_1 + x_3 + x_4 = 3 \\ 2x_1 + x_2 - x_4 = 2 \end{cases} \Rightarrow \\ &\Rightarrow \begin{cases} x_1 = u \\ x_4 = v \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_2 = 2 - 2u + v \\ x_3 = 3 - u - v \end{cases}. \end{aligned}$$

Загальний розв'язок н/с (позначимо його через $X_{з/н}$) має вигляд:

$$X_{з/н} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u \\ 2 - 2u + v \\ 3 - u - v \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \\ -1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}. \quad (1.4.14)$$

Як бачимо, матрицю-стовпець загального розв'язку н/с подано у вигляді суми стовпця $X_{\text{ч}} = (0 \ 2 \ 3 \ 0)^T$, який є частинним розв'язком н/с (при яких значеннях вільних змінних?), і загального розв'язку $X_{з/о}$ зведеної для неї о/с.

Отже, зв'язок між $X_{з/н}$ і $X_{з/о}$ – загальними розв'язками н/с і зведеної для неї о/с – описується рівністю:

$$X_{з/н} = X_{\text{ч}} + X_{з/о}. \quad (1.4.15)$$

Формула (1.4.15) визначає **структуру загального розв'язку н/с**.

З урахуванням (1.4.12) маємо:

$$X_{з/н} = X_{\text{ч}} + X_{\text{ф}} \cdot X_{\text{в}}. \quad (1.4.16)$$

На закінчення відзначимо, що системи лінійних алгебраїчних рівнянь використовуються безпосередньо для побудови математичних моделей різноманітних практичних задач (наприклад, задачі міжгалузевого балансу, див. п. 1.3) і як теоретична база методів, що вивчаються в інших дисциплінах математичного циклу, наприклад, „Математичне програмування”, „Теорія ймовірностей та математична статистика”.

Запитання для самодіагностики засвоєння матеріалу

Відповіді на всі запитання сформулюйте словесно, запишіть в символічній формі, обґрунтуйте (на підставі означень, теорем, правил, формул тощо), наведіть відповідні конкретні приклади.

1. Що називають прямокутною числовою матрицею?
2. Які існують символічні позначення матриць?
3. Що називають елементами (рядами) матриці і чим визначається розмір матриці?
4. Яка матриця називається нульовою?
5. Як визначається місце розташування певного елемента матриці?
6. Які матриці називають рівними?
7. Що розуміють під транспонуванням матриці?
8. Чи можна стлумачити матрицю-стовпець як результат транспонування матриці-рядка і навпаки?
9. Для яких матриць вводять поняття „відповідні елементи” і які елементи кількох матриць називають відповідними?
10. Яка матриця називається квадратною?
11. Назвіть відомі вам види квадратних матриць.
12. Що таке головна (побічна) діагональ квадратної матриці?
13. Яка матриця називається верхньою (нижньою) трикутною?
14. Дайте означення діагональної й одиничної матриць.
15. Яку матрицю називають сумою (різницею) двох матриць? (Сформулюйте відповідне правило: щоб знайти ... матриць, треба ...)
16. Яку матрицю називають добутком матриці з числом?
17. Яким законам підкоряються дії додавання матриць і множення матриці на число?
18. Яку умову повинні задовольняти дві матриці, щоб їх можна було перемножити?
19. Дайте означення добутку двох матриць і сформулюйте правило відшукування елементів матриці-результату, наведіть відповідну схему.
20. Чи є комутативною операція множення матриць?
21. Які матриці називають еквівалентними?
22. Для якого виду матриць вводиться поняття „визначник”?
23. Що розуміють під визначником другого порядку?
24. Дайте означення детермінанта третього порядку? Опишіть, у чому полягає правило трикутника.

25. Що називають переставленням з n чисел?
26. Яке переставлення називають парним (непарним)?
27. Дайте означення визначника n -го порядку.
28. Що називають мінором елемента визначника?
29. Яким співвідношенням пов'язані між собою мінор і алгебраїчне доповнення елемента визначника (квадратної матриці)?
30. Які основні властивості визначників ви знаєте? (Перелічіть, сформулюйте, обґрунтуйте.)
31. Сформулюйте та запишіть в символах теорему Лапласа (і наслідок з неї), покажіть застосування на прикладі.
32. На чому базується розкриття визначників n -го порядку?
33. Сформулюйте правила утворення нулів та прямокутника.
34. Що називають СЛАР $n \times n$, або $n \times n$ -системою?
35. Наведіть символічні записи $n \times n$ -системи і опишіть їхні складові.
36. Які системи називаються однорідними (неоднорідними)?
37. Що таке розв'язок системи рівнянь?
38. Які системи називаються сумісними (несумісними)?
39. Які системи називаються визначеними (невизначеними)?
40. Які системи називаються еквівалентними?
41. Що таке основна (розширена) матриця системи?
42. Сформулюйте і доведіть правило Крамера.
43. Опишіть порядок розв'язання систем за правилом Крамера.
44. Яка матриця називається особливою (неособливою)?
45. Що називають приєднаною, або союзною, матрицею?
46. Сформулюйте і доведіть лему про добутки з матриць A і A^* .
47. Яку матрицю називають оберненою до заданої матриці?
48. Сформулюйте і доведіть теорему про існування і єдиність A^{-1} .
49. Опишіть, як здійснюється перехід від $n \times n$ -системи до матричного рівняння, і розв'яжіть його.
50. Який порядок розв'язання систем методом оберненої матриці?
51. Що називають рангом матриці і які існують способи його відшукування?
52. Опишіть відшукування рангу матриці методом обведення.
53. Опишіть відшукування рангу матриці методом е/п.
54. Який мінор матриці називається базисним мінором?
55. Яку систему називають СЛАР $m \times n$, або $(m \times n)$ -системою?

56. Які системи називають квадратними, прямокутними?
57. У чому полягає критерій сумісності $(m \times n)$ -системи?
58. Що називається рангом СЛАР $m \times n$?
59. Що розуміють під дослідженням системи на сумісність?
60. Наведіть порядок дослідження системи на сумісність.
61. Якою буде сумісна система, визначеною чи невизначеною, якщо її ранг дорівнює числу (менше числа) невідомих: $r = n$ ($r < n$)?
62. Які невідомі системи (з $r < n$) називають базисними, вільними?
63. Дайте означення загального, частинного та базисного розв'язків $(m \times n)$ -системи.
64. Опишіть загальний порядок розв'язання систем.
65. У чому полягає суть методу Гаусса, або методу послідовного виключення невідомих, розв'язання систем?
66. Що розуміють під прямим і зворотним ходами методу Гаусса?
67. У чому полягає суть методу Жордана – Гаусса розв'язання систем (модифікації методу Гаусса)?
68. Які СЛАР $m \times n$ називаються однорідними?
69. Чи є серед однорідних систем несумісні?
70. Опишіть структуру загального розв'язку однорідної системи.
71. Який зв'язок існує між розв'язками неоднорідної і зведеної для неї однорідної систем рівнянь?
72. Опишіть структуру загального розв'язку неоднорідної системи.

Задачі та вправи

1. Нехай $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$. Знайти:

- а) $2A - 3B$; б) $A + 2A^T$; в) $(-0,5B^T - B)^T$;
 г) $A^T - 1/3 B^T$; д) $(A + B) - (A^T + B^T)$.

2. Знайти AB і BA , якщо $A = (1 \ 2 \ 3)$, $B = (2 \ 1 \ 0)^T$.

3. Для матриць A і B знайти матрицю $AB - BA$:

- а) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -4 & 1 \end{pmatrix}$; б) $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

4. Обчислити $\left((2A - 3B^T) \cdot C\right)^2$, якщо

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 0 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

5. Для матриці $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 6 \\ 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1/3 & 0 \end{pmatrix}$ переконатися, що $A^3 = E$.

6. Визначити, при якому значенні числа m для заданої матриці A має місце рівність $A^m = O$ (O – нуль-матриця), якщо

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 2 & 4 & 10 \\ -1 & -2 & -5 \end{pmatrix}.$$

7. На прикладі довільних матриць 3-го порядку перевірити рівності:

а) $(A \cdot B)^T = B^T \cdot A^T$;

б) $(A \cdot B)^{-1} = B^{-1} \cdot A^{-1}$;

в) $(A^2)^{-1} = (A^{-1})^2$;

г) $(A^{-1})^T = (A^T)^{-1}$;

д) $A \cdot (B \cdot C) = (A \cdot B) \cdot C$;

е) $A \cdot (B + C) = A \cdot B + A \cdot C$.

8. Обчислити визначники:

а) $\begin{vmatrix} 2 & -4 \\ 3 & 5 \end{vmatrix}$;

б) $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -3 \end{vmatrix}$;

в) $\begin{vmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha \\ -\sin \alpha & \cos \alpha \end{vmatrix}$;

г) $\begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 5 & -2 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}$;

д) $\begin{vmatrix} 2 & 5 & -2 \\ 3 & 8 & 0 \\ 1 & 3 & 5 \end{vmatrix}$;

е) $\begin{vmatrix} a & 0 & -c \\ 0 & -a & -b \\ b & c & 0 \end{vmatrix}$;

є) $\begin{vmatrix} 6 & 3 & 0 & 3 \\ 4 & 4 & 2 & 1 \\ 0 & 4 & 4 & 2 \\ 7 & 7 & 8 & 5 \end{vmatrix}$; ж) $\begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & -2 & 0 \\ -1 & 3 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & -1 & 3 \end{vmatrix}$; з) $\begin{vmatrix} 2 & 7 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 3 & 4 & 2 & 2 \\ -2 & -5 & 17 & -6 & -11 \\ 4 & 2 & 1 & 7 & 9 \\ 8 & 3 & 6 & 8 & 11 \end{vmatrix}$.

9. Розв'язати рівняння:

$$\text{а) } \begin{vmatrix} x & x+2 \\ x-2 & 2x-5 \end{vmatrix} = 0; \quad \text{б) } \begin{vmatrix} x^2 & 4 & 9 \\ x & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0; \quad \text{в) } \begin{vmatrix} x^2 & 3 & 2 \\ x & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 4 \end{vmatrix} = 0.$$

10. Використовуючи властивості визначників, довести рівності:

$$\text{а) } \begin{vmatrix} 1+2a & 1 & a & x \\ 1+2b & 2 & b & x \\ 1+2c & 3 & c & x \\ 1+2d & 4 & d & x \end{vmatrix} = 0; \quad \text{б) } \begin{vmatrix} a & b & c & 1 \\ b & c & a & 1 \\ c & a & b & 1 \\ \frac{b+c}{2} & \frac{a+c}{2} & \frac{b+a}{2} & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

11. Розв'язати нерівності:

$$\text{а) } \begin{vmatrix} x & 0 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 4 & x & 1 \end{vmatrix} \leq 0; \quad \text{б) } \begin{vmatrix} x & x^2 & 1 \\ 1 & x & x^2 \\ x^2 & 1 & x \end{vmatrix} < 1.$$

12. Знайти матрицю, обернену до заданої матриці:

$$\text{а) } A = \begin{pmatrix} 3 & 5 & -2 \\ 1 & -3 & 2 \\ 6 & 7 & -3 \end{pmatrix}; \quad \text{б) } B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 & -5 \\ 0 & 3 & 2 & -4 \\ 1 & -2 & 2 & -3 \\ -3 & 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}; \quad \text{в) } C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 6 & 10 \\ 1 & 4 & 10 & 20 \end{pmatrix}.$$

13. Визначити, при яких значеннях параметра λ матриця A не має оберненої:

$$A = \begin{pmatrix} \lambda & 4 & 1 \\ 2 & 5 & -1 \\ 0 & \lambda & 1 \end{pmatrix}.$$

14. Розв'язати матричні рівняння:

$$\text{а) } X \times \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}; \quad \text{б) } \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 3 & 2 & -4 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix} \times X = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 \\ 10 & 2 & 7 \\ 10 & 7 & 8 \end{pmatrix};$$

$$\text{в)} X \times \begin{pmatrix} 5 & 3 & 1 \\ 1 & -3 & -2 \\ -5 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -8 & 3 & 0 \\ -5 & 9 & 0 \\ -2 & 15 & 0 \end{pmatrix}; \quad \text{г)} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \times X = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 7 \\ 8 & 1 & 2 \end{pmatrix};$$

$$\text{д)} \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 8 \end{pmatrix} \times X \times \begin{pmatrix} 5 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 7 \\ 6 & 5 & 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

15. Знайти ранг та базисний мінор матриці:

$$\text{а)} A = \begin{pmatrix} 4 & 32 & 84 & 44 \\ 5 & 40 & 105 & 55 \\ 11 & 88 & 231 & 121 \end{pmatrix}; \quad \text{б)} B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ -1 & 0 & 2 & 1 \\ -1 & 2 & 7 & 5 \\ -1 & 4 & 12 & 10 \end{pmatrix};$$

$$\text{в)} C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 5 \\ 6 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}; \quad \text{г)} D = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & -1 \\ 3 & -1 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & 4 & -2 \\ 4 & -3 & 1 & 1 \end{pmatrix}; \quad \text{д)} F = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 11 & 2 \\ 1 & 0 & 4 & -1 \\ 11 & 4 & 56 & 5 \\ 2 & -1 & 5 & -6 \end{pmatrix}.$$

16. Визначити, при яких значення параметра λ ранг матриці A буде найбільшим, і вказати, чому він дорівнює:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 6 & 9 \\ 4 & 8 & 12 \\ 2 & 4 & \lambda \end{pmatrix}.$$

17. Розв'язати СЛАР 3×3 трьома способами – методом Крамера, матричним методом (за допомогою оберненої матриці), методом Гаусса (послідовного виключення невідомих):

$$\text{а)} \begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 = 0 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 = 5; \\ 2x_2 - x_3 = 3 \end{cases} \quad \text{б)} \begin{cases} x_1 + 2x_2 = 3 \\ -x_1 + x_2 + 2x_3 = 5; \\ 3x_1 + x_3 = -2 \end{cases};$$

$$\text{в)} \begin{cases} x_1 + 4x_2 - x_3 = 1 \\ x_1 + x_2 + x_3 = 0; \\ 2x_1 + 3x_3 = 0 \end{cases} \quad \text{г)} \begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 6 \\ 4x_1 + 5x_2 + 6x_3 = 9; \\ 7x_1 + 8x_2 = -6 \end{cases}.$$

18. Дослідити СЛАР на сумісність і у випадку сумісності знайти розв'язок:

$$\text{а) } \begin{cases} 3x_1 - 2x_2 - 5x_3 + x_4 = 3 \\ 2x_1 - 3x_2 + x_3 + 5x_4 = -3; \\ x_1 + 2x_2 - 4x_4 = -3 \\ x_1 - x_2 - 4x_3 + 9x_4 = 22 \end{cases}; \quad \text{б) } \begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 2x_4 = 2 \\ 2x_1 + 3x_2 + 2x_3 + 5x_4 = 3 \\ 9x_1 + x_2 + 4x_3 - 5x_4 = 1; \\ 2x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 5 \\ 7x_1 + x_2 + 6x_3 - x_4 = 7 \end{cases}$$

$$\text{в) } \begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 - 5x_4 = 4 \\ 2x_1 + x_2 + 2x_3 - x_4 = 1; \\ 6x_1 - x_2 + 4x_3 - 11x_4 = 6 \end{cases}; \quad \text{г) } \begin{cases} 9x_1 - 3x_2 + 5x_3 + 6x_4 = 4 \\ 6x_1 - 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 5; \\ 3x_1 - x_2 + 3x_3 + 14x_4 = -8 \end{cases}$$

$$\text{д) } \begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 5 \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 1 \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 = 11; \\ 3x_1 + 4x_2 - x_3 = -5 \end{cases}; \quad \text{е) } \begin{cases} x_1 + x_2 + 3x_3 - 2x_4 + 3x_5 = 1 \\ 2x_1 + 2x_2 + 4x_3 - x_4 + 3x_5 = 2 \\ 3x_1 + 3x_2 + 5x_3 - 2x_4 + 3x_5 = 1 \\ 2x_1 + 2x_2 + 8x_3 - 3x_4 + 9x_5 = 2 \end{cases}$$

19. Знайти загальний розв'язок і фундаментальну систему розв'язків однорідної СЛАР:

$$\text{а) } \begin{cases} 9x_1 + 21x_2 - 15x_3 + 5x_4 = 0; \\ 12x_1 + 28x_2 - 20x_3 + 7x_4 = 0 \end{cases}; \quad \text{б) } \begin{cases} 14x_1 + 35x_2 - 7x_3 - 63x_4 = 0 \\ -10x_1 - 25x_2 + 5x_3 + 45x_4 = 0; \\ 25x_1 + 65x_2 - 13x_3 - 117x_4 = 0 \end{cases}$$

$$\text{в) } \begin{cases} 2x_1 - x_2 + 3x_3 - 2x_4 + 4x_5 = 0 \\ 4x_1 - 2x_2 + 5x_3 + x_4 + 7x_5 = 0; \\ 2x_1 - x_2 + x_3 + 8x_4 + 2x_5 = 0 \end{cases}; \quad \text{г) } \begin{cases} 3x_1 + x_2 - 8x_3 + 2x_4 + x_5 = 0 \\ 2x_1 - 2x_2 - 3x_3 - 7x_4 + 2x_5 = 0; \\ x_1 + 11x_2 - 12x_3 + 34x_4 - 5x_5 = 0 \end{cases}$$

$$\text{д) } \begin{cases} x_1 + x_2 - 3x_4 - x_5 = 0 \\ x_1 - x_2 + 2x_3 - x_4 = 0 \\ 4x_1 - 2x_2 + 6x_3 - 4x_5 = 0; \\ 2x_1 + 4x_2 - 2x_3 + 4x_4 - 7x_5 = 0 \end{cases}; \quad \text{е) } \begin{cases} 3x_1 + 4x_2 + 2x_3 + x_4 + 6x_5 = 0 \\ 5x_1 + 9x_2 + 7x_3 + 4x_4 + 7x_5 = 0; \\ 4x_1 + 3x_2 - x_3 - x_4 + 11x_5 = 0 \\ x_1 + 6x_2 + 8x_3 + 5x_4 - 4x_5 = 0 \end{cases}$$

$$\epsilon) \begin{cases} 3x_1 + 4x_2 + 2x_3 + x_4 + 3x_5 = 0 \\ x_1 + 9x_2 + 7x_3 + 4x_4 + 7x_5 = 0 \\ -2x_1 + 3x_2 - x_3 - x_4 + 11x_5 = 0 \\ x_1 + 4x_2 + 8x_3 + 5x_4 - 4x_5 = 0 \end{cases}; \text{ж)} \begin{cases} 3x_1 - 2x_2 + x_3 - x_4 + 2x_5 = 0 \\ x_1 + x_2 + 2x_4 + 3x_5 = 0 \\ -2x_1 + 3x_2 - x_3 + 3x_4 + x_5 = 0 \\ 2x_1 - x_2 + 4x_3 - 3x_4 + 4x_5 = 0 \\ -x_1 + x_2 - 3x_3 + 2x_4 + x_5 = 0 \end{cases}$$

20. Вказати всі значення параметра λ , при яких задана система рівнянь є невизначеною:

$$\begin{cases} (8-\lambda)x_1 + 2x_2 + 3x_3 + \lambda x_4 = 0 \\ x_1 + (9-\lambda)x_2 + 4x_3 + \lambda x_4 = 0 \\ x_1 + 2x_2 + (10-\lambda)x_3 + \lambda x_4 = 0 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 + \lambda x_4 = 0 \end{cases}$$

21. Вказати всі значення параметра λ , при яких задана система рівнянь є визначеною:

$$\begin{cases} -4x_1 + (2+2\lambda)x_2 + 2\lambda x_3 + 2\lambda x_4 = 0 \\ \lambda x_1 + (1+\lambda)x_2 + \lambda x_3 + \lambda x_4 = 0 \\ \lambda x_1 + (1+\lambda)x_2 - 2x_3 + \lambda x_4 = 0 \\ -\lambda x_1 - (1+\lambda)x_2 - \lambda x_3 - (2+2\lambda)x_4 = 0 \end{cases}$$

Відповіді

1. а) $\begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 3 & -14 \end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix} 3 & 8 \\ 7 & -3 \end{pmatrix}$; в) $\begin{pmatrix} 1,5 & -1 \\ -0,5 & -6 \end{pmatrix}$; г) $\begin{pmatrix} 4/3 & 8/3 \\ 2 & -7/3 \end{pmatrix}$; д) $\begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$.

2. $AB = (4)$, $BA = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

3. а) $\begin{pmatrix} 4 & -8 \\ 12 & -4 \end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix} 4 & 1 & 9 \\ -2 & -6 & 3 \\ -8 & -9 & 2 \end{pmatrix}$.

4. $\begin{pmatrix} 321 & 403 \\ 155 & 290 \end{pmatrix}$.

6. 2.

8. а) 22; б) -1; в) 1; г) -10; д) 3; е) 0; є) -216; ж) -21; з) 150.

9. а) {1,4}; б) {2,3}; в) {-2,0}.

11. а) [-4;1]; б) $(0; \sqrt[3]{2})$.

$$12. \text{ а) } A^{-1} = \frac{1}{10} \begin{pmatrix} -5 & 1 & 4 \\ 15 & 3 & -8 \\ 25 & 9 & -14 \end{pmatrix}; \quad \text{б) } B^{-1} = \frac{1}{50} \begin{pmatrix} 11 & 2 & -15 & -18 \\ 8 & 6 & -20 & -4 \\ 46 & -28 & -40 & 2 \\ 29 & -22 & -35 & -2 \end{pmatrix};$$

$$\text{в) } C^{-1} = \begin{pmatrix} 4 & -6 & 4 & -1 \\ -6 & 14 & -11 & 3 \\ 4 & -11 & 10 & -3 \\ -1 & 3 & -3 & 1 \end{pmatrix}.$$

13. $\lambda = -8; 1$.

$$14. \text{ а) } X = \begin{pmatrix} 70 & -39 \\ 57 & -32 \end{pmatrix}; \quad \text{б) } X = \begin{pmatrix} 6 & 4 & 5 \\ 2 & 1 & 2 \\ 3 & 3 & 3 \end{pmatrix}; \quad \text{в) } X = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix};$$

$$\text{г) } X = \begin{pmatrix} -7 & -1 & 5 \\ 15 & 2 & -3 \end{pmatrix}; \quad \text{д) } X = \begin{pmatrix} -40 & -50 & 43 \\ 29 & 36 & -31 \end{pmatrix}.$$

15. а) $\text{rng}A = 1$; б) $\text{rng}B = 3$; в) $\text{rng}C = 4$; г) $\text{rng}D = 2$; д) $\text{rng}F = 2$.

16. $\lambda \neq 6$, $\text{rng}A = 2$.

17. а) (1;2;1); б) (-1;2;1); в) (3;-1;-2); г) (-2;1;2).

18. а) система сумісна і визначена: (-1;3;-2;2); б) система сумісна і невизначена: $x_1 = -\frac{6}{7} + \frac{8}{7}x_4$, $x_2 = \frac{1}{7} - \frac{13}{7}x_4$, $x_3 = \frac{15}{7} - \frac{6}{7}x_4$; в) система несумісна; г) система сумісна і невизначена: $x_2 = 3x_1 - 13$, $x_3 = -7$, $x_4 = 0$; д) система сумісна і визначена: (2;-2;3); е) система несумісна.

19. а) $x_1 = -\frac{7}{3}x_2 + \frac{5}{3}x_3$, $x_4 = 0$, ФСР: $(-7 \ 3 \ 0 \ 0)^T$, $(5 \ 0 \ 3 \ 0)^T$; б) $x_3 = 2x_1 + 5x_2 - 9x_4$, ФСР: $(1 \ 0 \ 2 \ 0)^T$, $(0 \ 1 \ 5 \ 0)^T$, $(0 \ 0 \ -9 \ 1)^T$; в) $x_1 = 0,5x_2 - 6,5x_4 - 0,5x_5$, $x_3 = 5x_4 - x_5$, ФСР: $(0,5 \ 1 \ 0 \ 0 \ 0)^T$, $(-6,5 \ 0 \ 5 \ 1 \ 0)^T$, $(-0,5 \ 0 \ -1 \ 0 \ 1)^T$, $(-0,5 \ 0 \ -1 \ 0 \ 1)^T$; г) $x_1 = \frac{19}{8}x_3 + \frac{3}{8}x_4 -$

$$-\frac{1}{2}x_5, x_2 = \frac{7}{8}x_3 - \frac{25}{8}x_4 + \frac{1}{2}x_5, \text{ФСР: } \left(\frac{19}{8} \ \frac{7}{8} \ 1 \ 0 \ 0\right)^T, \left(\frac{3}{8} \ -\frac{25}{8} \ 0 \ 1 \ 0\right)^T, \\ \left(-\frac{1}{2} \ \frac{1}{2} \ 0 \ 0 \ 1\right)^T; \text{д) } x_1 = -x_2, x_3 = x_2, x_4 = x_5 = 0, \text{ФСР: } (-1 \ 1 \ 1 \ 0 \ 0)^T; \\ \text{е) } x_1 = \frac{10}{7}x_3 + x_4 - \frac{26}{7}x_5, x_2 = -\frac{11}{7}x_3 - x_4 + \frac{9}{7}x_5, \text{ФСР: } \left(\frac{10}{7} \ -\frac{11}{7} \ 1 \ 0 \ 0\right)^T, \\ (1 \ -1 \ 0 \ 1 \ 0)^T, \left(-\frac{26}{7} \ \frac{9}{7} \ 0 \ 0 \ 1\right)^T; \text{є) } x_1 = 0,9x_5, x_2 = -0,9x_5, x_3 = -8,6x_5, \\ x_4 = 15,1x_5, \text{ФСР: } (0,9 \ -0,9 \ -8,6 \ 15,1 \ 1)^T; \text{ж) } x_1 = -\frac{61}{42}x_5, x_2 = -\frac{3}{2}x_5, \\ x_3 = -\frac{2}{3}x_5, x_4 = -\frac{1}{42}x_5, \text{ФСР: } \left(-\frac{61}{42} \ -\frac{3}{2} \ -\frac{2}{3} \ -\frac{1}{42} \ 1\right)^T.$$

20. $\lambda = 0; 7$.

21. $\lambda \neq 1; -2$.

Ключові терміни

Матриця, операція, елементарні перетворення, еквівалентність, визначник (детермінант), мінор, алгебраїчне доповнення, способи обчислення визначників, система лінійних алгебраїчних рівнянь, неоднорідна (однорідна), визначена (невизначена), розв'язок, методи розв'язання, ранг, критерій сумісності, фундаментальна система розв'язків.

Резюме

Викладено елементи матричного числення, на основі чого розглянуто класичні (точні) методи розв'язання систем (квадратних і прямокутних) лінійних алгебраїчних рівнянь.

Література: [3; 4; 5; 6; 11; 16; 17; 18; 22; 25; 26].

2. Векторна алгебра

Математику вже тому вчити треба, що вона розум до ладу приводить.

М. В. Ломоносов

Мета: навчити студентів володінню засобами обробки характеристик явищ і процесів, які мають не тільки числову величину, а й напрям, для використання їх при побудові відповідних математичних моделей.

Питання теми:

- 2.1. Вектори: основні означення, лінійні операції.
- 2.2. Нелінійні операції над векторами.
- 2.3. Найпростіші застосування векторів у задачах геометрії.

Компетентності, що формуються після вивчення теми:

Загальнонаукова: розширення базових знань з векторної алгебри для їх застосувань при розробці різноманітних математичних моделей.

Загальнопрофесійна: підготовленість до засвоєння методів розв'язання геометричних задач алгебраїчними методами.

Спеціалізовано-професійна: здатність до застосування засобів векторної алгебри при розв'язанні конкретних задач кодування інформації.

2.1. Вектори: основні означення, лінійні операції

Із шкільних курсів геометрії та фізики допитливим поняття *вектора* (від лат. vector – носій) вже добре відоме; згідно з означеннями вектор має дві форми завдання: геометричну і координатну (числову). Зупинимося на кожній з них детальніше.

Геометрична форма – це відрізок (прямої) певної довжини і напрямку, який указується стрілкою, або коротко – напрямлений відрізок (рис. 2.1.1).

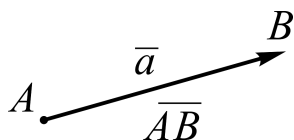


Рис. 2.1.1. Вектор

Позначається вектор здебільшого буквами латинської абетки (жирного шрифту, зі стрілочкою або з рискою: ***a***, \vec{a} , \overline{a}) або двома буквами: \overline{AB} , де перша буква – початок, друга – кінець відрізка.

Довжиною (модулем, абсолютною величиною) вектора називається довжина відповідного відрізка і позначається одним із символів: $|\vec{a}|$, a , $|\overline{AB}|$, AB .

Вектор, довжина якого дорівнює нулю (одиниці), називають **нульовим вектором** $\vec{0}$, або **нуль-вектором (одичним вектором \vec{e})**.

Вектори називаються **рівними (взаємно протилежними)**, якщо вони: паралельні або є відрізками однієї прямої; однаково (протилежно) напрямлені; мають рівні довжини.

Кожному векторові можна поставити у відповідність пряму (лінію), відрізком якої він є (на якій він розташований). Вектори, розташовані на одній прямій або на паралельних прямих, як зображено на рис. 2.1.2-а, називаються **колінеарними** (від лат. *com* (*sum*) – разом і *linea* – лінія) і позначаються символом \parallel , як і паралельні прямі: $\vec{a} \parallel \vec{b}$. (Чи є рівність векторів окремим випадком колінеарності?)

Вектори називаються **компланарними** (від лат. *com* – разом і *planum* – площа), якщо вони розташовані (лежать) в одній площині або паралельні одній площині (рис. 1.1.2-б). (Чи будуть компланарними вектори, які лежать на перехресних прямих?)

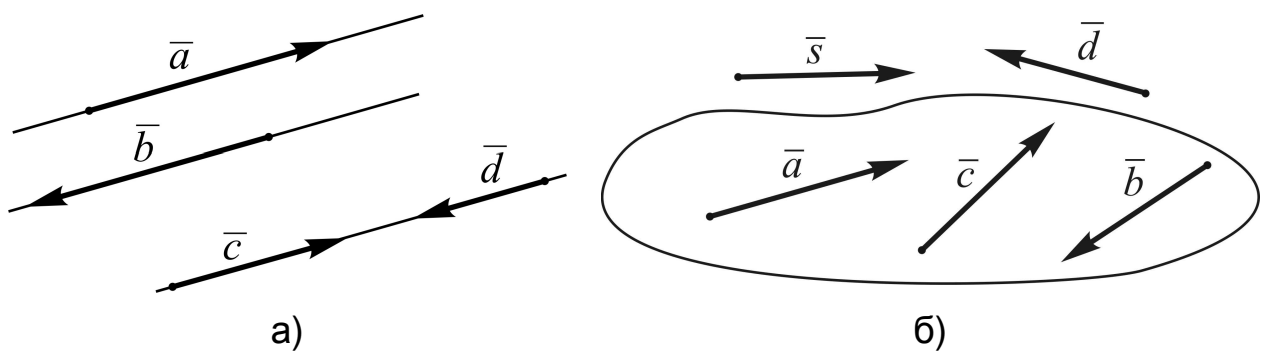


Рис. 2.1.2. Вектори: а) колінеарні; б) компланарні

Розглянемо три (не нульові) компланарні вектори \vec{a} , \vec{b} , \vec{c} . Здійснюючи паралельне перенесення одного з векторів \vec{a} , \vec{b} , проробимо таке:

а) сумістимо початки векторів \vec{a} , \vec{b} і за відрізками, що відповідають векторам, як за двома сторонами, побудуємо паралелограм (рис. 2.1.3-а);

б) сумістимо початок вектора \vec{b} з кінцем вектора \vec{a} (або навпаки) і за відрізками, що відповідають векторам, як за двома сторонами, побудуємо трикутник (рис. 2.1.3-б).

Сумою векторів \vec{a} , \vec{b} називається вектор \vec{c} , який визначається діагоналлю паралелограма (третьою стороною трикутника), з початком у початку векторів \vec{a} і \vec{b} (вектора \vec{a}). Перше формулювання – без дужок – називають **правилом паралелограма**, друге – **правилом трикутника** побудови суми двох векторів.



Рис. 2.1.3. Сума векторів:

а) правило паралелограма; б) правило трикутника

Обидва правила побудови суми двох векторів дають по суті один і той самий вектор (чому?). Перевагу слід віддати правилу трикутника, бо відштовхуючись від нього, можна знайти відразу суму будь-якого скінченного числа векторів: результуючим буде **замикальний** вектор ланцюжка всіх доданків – вектор, який з’єднує початок першого з кінцем останнього вектора-доданка. (Обміркуйте і наведіть відповідне зображення.)

Нехай λ – деяке дійсне число, або, на противагу терміну „вектор”, кажуть „скаляр” (від лат. scale – шкала) – величина, кожне значення якої (на відміну від вектора) може бути виражене тільки числом і зображене на шкалі вимірювального приладу (довжина, площа, час, температура, маса та ін. – скалярні величини).

Добутком вектора \vec{a} зі скаляром λ , або скаляра λ з вектором \vec{a} , називається вектор \vec{b} , модуль якого дорівнює добутку модулів $|\vec{a}|$, $|\lambda|$, а напрям \vec{b} співпадає з напрямом \vec{a} , якщо $\lambda > 0$, або протилежний напрям \vec{a} , якщо $\lambda < 0$ (рис. 2.1.4):

$$\vec{b} = \lambda \vec{a} = \vec{a} \lambda \Leftrightarrow |\vec{b}| = |\vec{a}| \cdot \lambda \wedge \begin{cases} \vec{b} \uparrow\uparrow \vec{a}, & \text{якщо } \lambda > 0, \\ \vec{b} \downarrow\uparrow \vec{a}, & \text{якщо } \lambda < 0. \end{cases} \quad (2.1.1)$$

Із (2.1.1) випливає, що вектори \vec{a} і \vec{b} колінеарні (чому?). При $\lambda = 0$ довжина $|\lambda \vec{a}|$ дорівнює нулеві і вектор \vec{b} перетворюється в нуль-вектор

(точку), який не має напрямку. (Збагніть, що відбувається з модулем вектора \bar{a} при множенні його на $|\lambda| < 1$, $|\lambda| = 1$, $|\lambda| > 1$.)

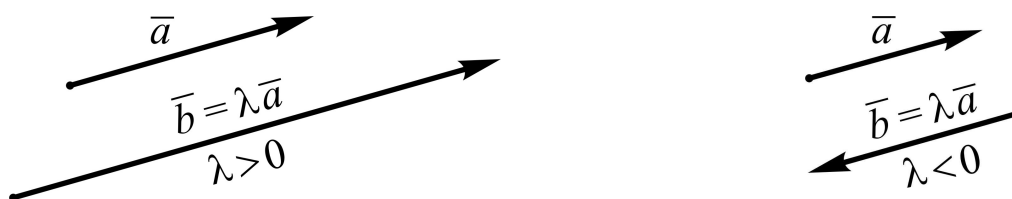


Рис. 2.1.4. Добуток \bar{a} з λ

Зауважимо, що різницю $\bar{c} = \bar{a} - \bar{b}$ можна розглядати як суму вектора \bar{a} з вектором, протилежним векторові \bar{b} : $\bar{c} = \bar{a} + (-1) \cdot \bar{b}$ (чому?).

Операції (дії) додавання векторів і множення вектора на число називаються **лінійними операціями** над векторами. Лінійні операції над векторами у результаті дають також вектори і підкоряються всім законам арифметики чисел, а саме:

1) **комутативність** (переставний закон):

$$\bar{a} + \bar{b} = \bar{b} + \bar{a}, \quad \lambda \bar{a} = \bar{a} \lambda;$$

2) **асоціативність** (сполучний закон):

$$(\bar{a} + \bar{b}) + \bar{c} = \bar{a} + (\bar{b} + \bar{c}), \quad \lambda(\mu \bar{a}) = \mu(\lambda \bar{a});$$

3) **дистрибутивність** (розподільний закон):

$$\lambda(\bar{a} + \bar{b}) = \lambda \bar{a} + \lambda \bar{b}, \quad (\lambda + \mu) \bar{a} = \lambda \bar{a} + \mu \bar{a}.$$

(Переконайтеся у цьому на конкретних прикладах або наведіть загальні міркування.)

Координатна форма – це коли вектор на прямій (в \mathbf{R}^1), на площині (в \mathbf{R}^2), у просторі (в \mathbf{R}^3) задають (описують) за допомогою відповідно одного, двох, трьох чисел, які називаються його **координатами** або **компонентами**. Здійснюється завдання вектора методом координат із залученням понять „величина вектора” і „проекція вектора на вісь”.

На прямій можна рухатись у двох взаємно протилежних напрямках. Один із цих напрямів (байдуже який) назвемо **додатним**, а другий – **від’ємним**. На кресленні додатний напрям домовились відмічати стріл-

кою, як і кінець вектора. Пряма, на якій встановлено додатний напрям, називається **віссю**. Якщо на осі вибрати довільним чином точку O (від лат. origo – початок) – **початок відліку**, – відносно якої будемо описувати положення всіх точок прямої, і одиницю масштабу, то отримаємо **числову вісь**. Саме числовими осями визначаються декартові прямокутні системи координат (надалі просто системи координат): одно-, дво-, тривимірна система координат визначається відповідно однією віссю (Ox), двома взаємно перпендикулярними осями (Ox, Oy), трьома взаємно перпендикулярними осями (Ox, Oy, Oz). Число, яке відповідає кожній точці осі (згідно з вибраною одиницею масштабу), називається **координатою точки**.

Наприклад, символічні записи $A(2)$, $B(-3)$ означають відповідно, що точка A має координату 2, а точка B – координату -3 .

Розглянемо числову вісь Ox (розташуємо її горизонтально, хоча це і необов'язково), і вектори \vec{a} , \vec{b} на ній (рис. 2.1.5).

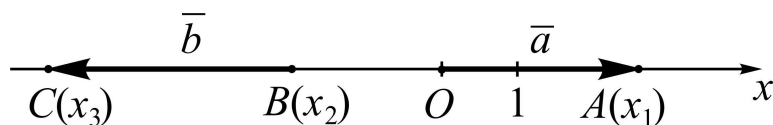


Рис. 2.1.5. Вектори на числовій осі

Як описати за допомогою одного числа вектор, який містить безліч точок як відрізок, та ще й урахувати його напрям?

Величиною вектора \vec{a} називається його модуль, взятий зі знаком „плюс” (+), якщо напрям вектора співпадає з (додатним) напрямом осі, і „мінус” (–), якщо напрям вектора протилежний напрямку осі:

$$\text{вел } \vec{a} - \text{величина } \vec{a} \Leftrightarrow \text{вел } \vec{a} = \begin{cases} +|\vec{a}|, & \text{якщо } \vec{a} \uparrow\uparrow Ox, \\ -|\vec{a}|, & \text{якщо } \vec{a} \downarrow\uparrow Ox. \end{cases} \quad (2.1.2)$$

У вектора \vec{a} величина додатна, у вектора \vec{b} – від’ємна (див. рис. 2.1.5). Згідно з (2.1.2) величина вектора указує на його довжину і на те, чи в один бік „дивляться” вектор і вісь, на якій він розташований, чи у різні боки. Саме величина вектора дає змогу зобразити (відтворити) його на числовій осі.

Усі вектори на осі (в \mathbf{R}^1) можна привести (зсуненням) до спільного початку O , тоді вектори з додатною величиною розташуються на додатній півосі, з від'ємною величиною – на від'ємній півосі; нуль-вектор співпаде з точкою O . При такому розташуванні векторів на осі їхні величини співпадатимуть з координатами кінців. У вектора \bar{a} (див. рис. 2.1.5) вел $\bar{a} = x_1$. Якщо початок вектора не у точці O , як на рис. 2.1.5 у вектора \bar{b} , то його величина визначається довжиною (як різницею між більшою і меншою координатами кінцевих точок відрізка) зі знаком „+” або „–” залежно від напрямку вектора:

$$|\bar{b}| = |\overline{BC}| = x_2 - x_3 \Rightarrow \text{вел } \bar{b} = -(x_2 - x_3), \text{ бо } \bar{b} \downarrow \uparrow Ox.$$

Величина вектора \bar{a} , розташованого на (координатній) осі Ox , називається **координатою вектора** a_x , тобто $a_x = \text{вел } \bar{a}$, і пишуть: $\bar{a} = (a_x)$.

Якщо на Ox задати одиничний вектор \bar{i} , напрям якого співпадає з напрямом осі: $\bar{i} \uparrow \uparrow Ox$, то залучаючи операцію множення вектора на число (див. (2.1.1)), будь-який вектор \bar{a} із \mathbf{R}^1 можна подати у вигляді добутку його координати a_x з одиничним вектором (ортом) \bar{i} :

$$\bar{a} = \text{вел } \bar{a} \cdot \bar{i} = a_x \cdot \bar{i}. \quad (2.1.3)$$

Таке символічне зображення вектора \bar{a} називають **алгебраїчною формою** вектора.

Виберемо далі на площині: а) вісь l і точку M ; б) систему координат xOy і вектор $\bar{a} = \overline{AB}$. **Проекцією** (від лат. proectio – кидати (відкидати) вперед) **точки** M на вісь l називається точка M_1 , яка є основою перпендикуляра, опущеного з точки M на цю вісь (рис. 2.1.6-а), і пишуть: $M_1 = \text{пр}_l M$. **Числовою проекцією**, або просто **проекцією вектора** \bar{a} на вісь Ox , називають величину вектора $\bar{a}_1 = \overline{A_1B_1}$, початок (кінець) якого є проекцією на вісь початку (кінця) вектора \overline{AB} , а самий вектор $\overline{A_1B_1}$ – **геометричною проекцією** \bar{a} на вісь Ox (рис. 2.1.6-б):

$$\text{пр}_{Ox} \bar{a} - \text{проекція } \bar{a} \text{ на вісь } Ox \Leftrightarrow \text{пр}_{Ox} \bar{a} = \text{вел } \overline{A_1B_1}, \quad (2.1.4)$$

де $A_1 = \text{пр}_{Ox} A$, $B_1 = \text{пр}_{Ox} B$.

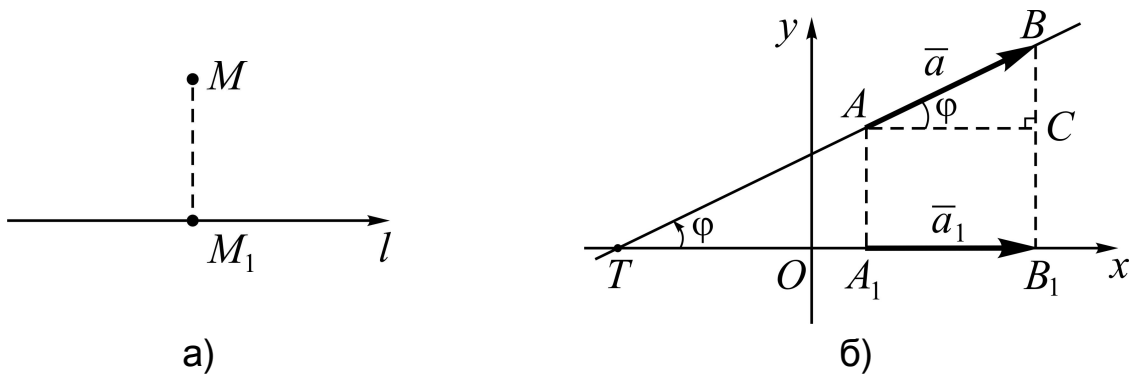


Рис. 2.1.6. Проекції: а) точки на вісь; б) вектора на вісь

Позначимо через φ (див. рис. 2.1.6-б) кут нахилу вектора \vec{a} до осі Ox , тобто кут, на який треба повернути вісь навколо точки T , щоб її додатний напрям співпав з додатним напрямом осі $l \uparrow \vec{a}$, на якій лежить вектор \vec{a} . Тоді з прямокутного трикутника ABC , де $AC = A_1B_1 = |\vec{a}_1|$, $AB = |\vec{a}|$, з урахуванням (2.1.2), (2.1.4) отримаємо:

$$\begin{aligned} \cos \varphi = \frac{AC}{AB} \Rightarrow AB \cos \varphi = A_1B_1 &= \begin{cases} |\vec{a}_1|, & \text{якщо } \vec{a}_1 \uparrow \uparrow Ox, \\ -|\vec{a}_1|, & \text{якщо } \vec{a}_1 \downarrow \uparrow Ox \end{cases} \Rightarrow \\ \Rightarrow AB \cos \varphi = \text{вел } \overline{A_1B_1} \Rightarrow \text{пр}_{Ox} \vec{a} = |\vec{a}| \cos \varphi. \end{aligned} \quad (2.1.5)$$

Завдяки парності „косинуса” кут φ завжди можна вибрати в межах від 0 до π : $0 \leq \varphi \leq \pi$. Якщо \vec{a} лежить на осі Ox , то його проекція співпадає з вел \vec{a} , бо у разі $\vec{a} \uparrow \uparrow Ox$ ($\vec{a} \downarrow \uparrow Ox$) кут нахилу $\varphi = 0$ ($\varphi = \pi$).

Висновок: проекція вектора на вісь дорівнює добутку модуля вектора на косинус кута нахилу вектора до осі.

До такого ж висновку приходимо, розглядаючи проекцію вектора \vec{a} на вісь Oy (в \mathbf{R}^2) і на вісь Oz , якщо вектор задано в \mathbf{R}^3 .

Проекції вектора \vec{a} на координатні осі Ox , Oy , Oz називаються **координатами (компонентами)** вектора \vec{a} : $a_x = \text{пр}_{Ox} \vec{a}$, $a_y = \text{пр}_{Oy} \vec{a}$, $a_z = \text{пр}_{Oz} \vec{a}$, і пишуть: $\vec{a} = (a_x, a_y, a_z)$. Для одиничних векторів \vec{i} , \vec{j} , \vec{k} , розташованих на осях координат (рис. 2.1.7), які називаються **ортами** (від нім. ortung – орієнтування), маємо (обґрунтуйте):

$$\vec{i} = (1, 0, 0), \quad \vec{j} = (0, 1, 0), \quad \vec{k} = (0, 0, 1). \quad (2.1.6)$$

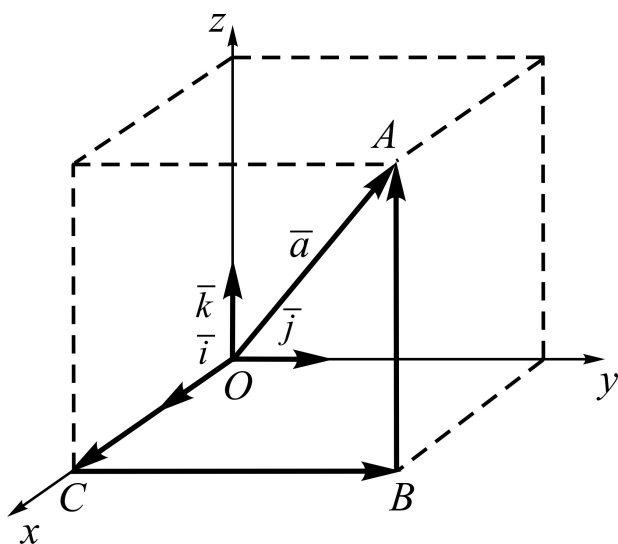


Рис. 2.1.7. Розклад \vec{a} за базисом

Ці вектори називають **базисом** тривимірного простору (від грецьк. basis – основа): вони у поєднанні з проекціями вектора на координатні осі дають можливість описати (зобразити) будь-який вектор.

Дійсно, згідно з операцією додавання векторів (за правилом трикутника) отримуємо (див. рис. 2.1.7): \vec{a} – замикальний вектор трьох векторів \vec{OC} , \vec{CB} , \vec{BA} , тому

$$\vec{a} = \vec{OC} + \vec{CB} + \vec{BA}.$$

У свою чергу, на підставі (2.1.3), (2.1.4) маємо:

$$\vec{OC} = \text{пр}_{Ox} \vec{a} \cdot \vec{i}, \quad \vec{CB} = \text{пр}_{Oy} \vec{a} \cdot \vec{j}, \quad \vec{BA} = \text{пр}_{Oz} \vec{a} \cdot \vec{k},$$

і тоді

$$\vec{a} = a_x \cdot \vec{i} + a_y \cdot \vec{j} + a_z \cdot \vec{k}. \quad (2.1.7)$$

Подання \vec{a} у вигляді (2.1.7) називають **розкладом вектора \vec{a} за базисом $\{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$** ; він визначає **алгебраїчну форму зображення** вектора \vec{a} . Таким чином

$$\vec{a} = (a_x, a_y, a_z) = a_x \cdot \vec{i} + a_y \cdot \vec{j} + a_z \cdot \vec{k}.$$

Геометрична ілюстрація (див. рис. 2.1.7) дає змогу знайти модуль вектора \vec{a} , заданого координатами. Дійсно, побудуємо на відрізках OC , BC , AB як на ребрах прямокутний паралелепіпед. Тоді за теоремою про квадрат його діагоналі (згадайте її) маємо: $a^2 = a_x^2 + a_y^2 + a_z^2$. Звідки

$$|\vec{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}. \quad (2.1.8)$$

(Наведіть словесне формулювання.)

Для векторів, заданих у координатній формі, спираючись на властивості лінійних операцій, легко установити **правила** відшукування суми (різниці) двох векторів і добутку вектора з числом.

1⁰. При додаванні (відніманні) двох векторів $\vec{a} = (a_x, a_y, a_z)$ і $\vec{b} = (b_x, b_y, b_z)$ їхні відповідні за номером координати додаються (віднімаються):

$$\vec{a} \pm \vec{b} = (a_x \pm b_x, a_y \pm b_y, a_z \pm b_z). \quad (2.1.9)$$

Дійсно, якщо перейти до алгебраїчної форми, то отримаємо:

$$\begin{aligned} \vec{a} \pm \vec{b} &= (a_x \vec{i} + a_y \vec{j} + a_z \vec{k}) \pm (b_x \vec{i} + b_y \vec{j} + b_z \vec{k}) = \\ &= (a_x \pm b_x) \vec{i} + (a_y \pm b_y) \vec{j} + (a_z \pm b_z) \vec{k}. \end{aligned}$$

Звідки і випливає (2.1.9).

2⁰. При множенні вектора \vec{a} на скаляр λ усі його координати помножуються на цей скаляр:

$$\begin{aligned} \lambda \vec{a} &= \lambda (a_x \vec{i} + a_y \vec{j} + a_z \vec{k}) = \lambda a_x \vec{i} + \lambda a_y \vec{j} + \lambda a_z \vec{k} = \\ &= (\lambda a_x, \lambda a_y, \lambda a_z). \end{aligned} \quad (2.1.10)$$

Пропонуємо закінчити формулювання твердження: „два задані координатами вектори рівні, якщо ...”; запишіть у символах і обґрунтуйте його.

2.2. Нелінійні операції над векторами

До нелінійних дій над векторами відносять *скалярний, векторний і мішаний* добутки.

Скалярний добуток двох векторів. Назва цієї операції цілком узгоджується з її суттю, а саме: **скалярним добутком** $\vec{a} \cdot \vec{b}$ двох векторів \vec{a} і \vec{b} називається число (скаляр), яке дорівнює добутку їхніх модулів, помноженому на косинус кута між ними $\varphi = \angle \vec{a} \vec{b}$:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos \varphi. \quad (2.2.1)$$

Замість $\vec{a} \cdot \vec{b}$ часто пишуть $\vec{a} \vec{b}$ або використовують позначення (\vec{a}, \vec{b}) .

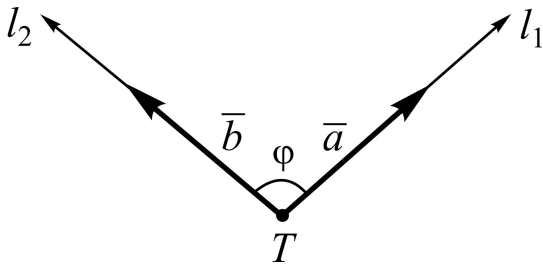


Рис. 2.2.1. Кут між векторами

Нагадаємо, що для визначення кута φ між векторами \bar{a} і \bar{b} суміщають їхні початки і розглядають кут між двома променями (рис. 2.2.1) l_1 і l_2 – півосями $l_1 \uparrow \bar{a}$, $l_2 \uparrow \bar{b}$, – які виходять із спільної точки T .

Якщо кут φ гострий ($0 \leq \varphi < \pi/2$), то $\bar{a} \cdot \bar{b} > 0$; якщо φ тупий ($\pi/2 < \varphi \leq \pi$), то $\bar{a} \cdot \bar{b} < 0$. *Укажіть*, чому дорівнює скалярний добуток, якщо $\varphi = 0, \pi/2, \pi$.

Із означення (2.2.1) випливають **основні властивості** (\bar{a}, \bar{b}) .

1⁰ (про рівність нулю). Скалярний добуток $\bar{a} \cdot \bar{b}$ дорівнює нулю тоді і тільки тоді, коли хоча б один із векторів нульовий або вектори взаємно перпендикулярні (ортогональні):

$$\bar{a} \cdot \bar{b} = 0 \Leftrightarrow (\bar{a} = \bar{0} \vee \bar{b} = \bar{0} \vee \varphi = \pi/2). \quad (2.2.2)$$

2⁰ (про скалярний квадрат). Скалярний квадрат вектора дорівнює квадратові його модуля, тобто

$$\bar{a} \cdot \bar{a} = \bar{a}^2 = a \cdot a \cdot \cos(\bar{a} \wedge \bar{a}) = a^2. \quad (2.2.3)$$

3⁰ (про арифметичні властивості). Скалярний добуток підкоряється усім законам арифметики чисел відносно лінійних операцій (*обміркуйте*):

$$\bar{a} \cdot \bar{b} = \bar{b} \cdot \bar{a}, \quad \bar{a} \cdot (\bar{b} + \bar{c}) = \bar{a} \cdot \bar{b} + \bar{a} \cdot \bar{c}, \quad (\lambda \bar{a}) \cdot \bar{b} = \lambda(\bar{a} \cdot \bar{b}) = \bar{a} \cdot (\lambda \bar{b}). \quad (2.2.4)$$

4⁰ (про зв'язок з проекціями). Скалярний добуток двох векторів дорівнює добутку модуля одного із них з проекцією другого на вісь, напрям якої визначається першим вектором:

$$\begin{aligned} \bar{a} \cdot \bar{b} &= a(b \cdot \cos \varphi) = a \cdot \text{пр}_a \bar{b}, \\ \bar{a} \cdot \bar{b} &= b(a \cdot \cos \varphi) = b \cdot \text{пр}_b \bar{a}. \end{aligned} \quad (2.2.5)$$

Доведення ґрунтується на співвідношеннях (2.1.2), (2.1.4).

Задача 2.2.1. Знайти скалярний добуток векторів \vec{a} і \vec{b} , заданих у координатній формі: $\vec{a} = (a_x, a_y, a_z)$, $\vec{b} = (b_x, b_y, b_z)$.

Розв'язання базується на властивостях (\vec{a}, \vec{b}) і лінійних операцій над векторами.

1. Підраховуємо всілякі скалярні добутки одиничних векторів \vec{i} , \vec{j} , \vec{k} . За властивістю 2⁰ (про скалярний квадрат) $\vec{i} \cdot \vec{i} = \vec{j} \cdot \vec{j} = \vec{k} \cdot \vec{k} = 1$. Для інших пар на підставі властивості 1⁰ (про рівність нулю) маємо: $\vec{i} \cdot \vec{j} = \vec{j} \cdot \vec{k} = \vec{k} \cdot \vec{i} = 0$.

2. Знаходимо власне $\vec{a} \cdot \vec{b}$, подаючи вектори в алгебраїчній формі і використовуючи розподільний закон:

$$\begin{cases} \vec{a} = a_x \vec{i} + a_y \vec{j} + a_z \vec{k} \\ \vec{b} = b_x \vec{i} + b_y \vec{j} + b_z \vec{k} \end{cases} \Rightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} = (a_x \vec{i} + a_y \vec{j} + a_z \vec{k}) \cdot (b_x \vec{i} + b_y \vec{j} + b_z \vec{k}).$$

Розкриваємо дужки і отримуємо:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z. \quad (2.2.6)$$

Висновок. Скалярний добуток двох векторів дорівнює сумі добутків однойменних координат.

Як наслідок із (2.2.6) при $\vec{a} = \vec{b}$ одержуємо (2.1.8) аналітичним шляхом:

$$|\vec{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}.$$

Задача 2.2.2. Знайти кут між двома не нульовими векторами \vec{a} і \vec{b} , заданими в координатній формі.

Розв'язання. Використовуючи означення (2.2.1) скалярного добутку і співвідношення (2.1.8), (2.2.6), маємо:

$$\begin{aligned} \vec{a} \cdot \vec{b} &= a \cdot b \cdot \cos \varphi \Rightarrow \cos \varphi = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{a \cdot b} \Rightarrow \\ \Rightarrow \cos \varphi &= \frac{a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2} \cdot \sqrt{b_x^2 + b_y^2 + b_z^2}} \Rightarrow \varphi = \arccos(\cos \varphi). \end{aligned} \quad (2.2.7)$$

Задача 2.2.3. Установити умови: а) ортогональності; б) колінеарності двох векторів \vec{a} і \vec{b} , заданих у координатній формі.

Розв'язання (словесний коментар пропонуємо навести самостійно).

$$\text{а) } \vec{a} \perp \vec{b} \Leftrightarrow \varphi = \pi/2 \Leftrightarrow \cos \varphi = 0 \Leftrightarrow a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z = 0 \quad (2.2.8)$$

– **критерій ортогональності** двох векторів;

$$\text{б) } \vec{a} \parallel \vec{b} \Leftrightarrow \vec{b} = \lambda \vec{a} \Leftrightarrow (b_x = \lambda a_x, b_y = \lambda a_y, b_z = \lambda a_z) \Leftrightarrow \frac{b_x}{a_x} = \frac{b_y}{a_y} = \frac{b_z}{a_z} \quad (2.2.9)$$

– **критерій колінеарності** двох векторів.

Задача 2.2.4. Знайти косинуси кутів α , β , γ , які утворює вектор $\vec{a} = (a_x, a_y, a_z)$ із координатними осями: $\alpha = \vec{a} \wedge Ox$, $\beta = \vec{a} \wedge Oy$, $\gamma = \vec{a} \wedge Oz$.

Розв'язання спирається на означення проекції вектора на вісь:

$$\begin{aligned} \text{пр}_{Ox} \vec{a} = a_x = a \cdot \cos \alpha &\Rightarrow \cos \alpha = a_x / a, \\ \text{пр}_{Oy} \vec{a} = a_y = a \cdot \cos \beta &\Rightarrow \cos \beta = a_y / a, \\ \text{пр}_{Oz} \vec{a} = a_z = a \cdot \cos \gamma &\Rightarrow \cos \gamma = a_z / a. \end{aligned} \quad (2.2.10)$$

Косинуси кутів, які вектор утворює з осями координат, називаються **напрямними косинусами** вектора.

Як наслідки із (2.2.10) отримуємо такі **властивості**.

1⁰. Напрямні косинуси одиничного вектора \vec{e} чисельно дорівнюють його координатам:

$$\vec{e} = (\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma). \quad (2.2.11)$$

2⁰. Сума квадратів напрямних косинусів ненульового вектора дорівнює одиниці:

$$\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = \frac{a_x^2}{a^2} + \frac{a_y^2}{a^2} + \frac{a_z^2}{a^2} = 1. \quad (2.2.12)$$

Векторний добуток двох векторів. Нехай \vec{a} , \vec{b} , \vec{s} – некопланарні вектори в \mathbf{R}^3 і $\vec{a} \neq \vec{0}$, $\vec{b} \neq \vec{0}$ визначають деяку площину ρ . Вектор \vec{s} називається **векторним добутком** векторів \vec{a} і \vec{b} , якщо:

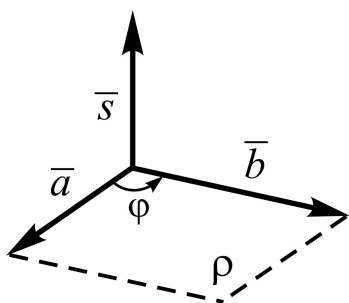


Рис. 2.2.2. **Векторний добуток векторів \vec{a} і \vec{b}**

модуль його чисельно дорівнює площі паралелограма, побудованого на векторах \vec{a} і \vec{b} як на сторонах;

напрявлений він перпендикулярно площині цього паралелограма і якщо дивитись з його кінця, то суміщення (поворотом) \vec{a} з \vec{b} найкоротшим шляхом відбувається проти руху годинникової стрілки (рис. 2.2.2).

Позначення: $\vec{a} \times \vec{b}$ або $[\vec{a}, \vec{b}]$. Отже,

$$\vec{s} = \vec{a} \times \vec{b} \Leftrightarrow (s = a \cdot b \cdot \sin \varphi \wedge \vec{s} \perp \rho), \quad (2.2.13)$$

де $\varphi = \angle \vec{a} \vec{b}$ – найменший із кутів ($0 < \varphi < \pi$), що відповідає суміщенню \vec{a} з \vec{b} рухом проти годинникової стрілки.

Із означення (2.2.13) випливають **основні властивості** добутку $\vec{a} \times \vec{b}$ (переконайтеся в їхній справедливості).

1^о (про рівність нулю). Векторний добуток дорівнює нуль-вектору тоді і тільки тоді, коли вектори \vec{a} і \vec{b} колінеарні:

$$\vec{a} \times \vec{b} = \vec{0} \Leftrightarrow \vec{a} = \lambda \vec{b}. \quad (2.2.14)$$

Це означає, що перетворення векторного добутку в нуль-вектор є **критерієм колінеарності** векторів.

2^о (про зміну знака). Векторні добутки з різним порядком співмножників є взаємно протилежними векторами:

$$\vec{a} \times \vec{b} = -(\vec{b} \times \vec{a}). \quad (2.2.15)$$

Інакше: векторний добуток не підкоряється переставному (комутативному) закону.

3^о (про арифметичні властивості). Векторний добуток підкоряється асоціативному (сполучному) закону відносно скалярного множника і дистрибутивному (розподільному) закону відносно додавання:

$$\lambda(\vec{a} \times \vec{b}) = (\lambda \vec{a}) \times \vec{b} = \vec{a} \times (\lambda \vec{b}); \quad \vec{a} \times (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \times \vec{b} + \vec{a} \times \vec{c}. \quad (2.2.16)$$

Задача 2.2.5. Знайти векторний добуток векторів \vec{a} і \vec{b} , заданих у координатній формі: $\vec{a} = (a_x, a_y, a_z)$, $\vec{b} = (b_x, b_y, b_z)$.

Розв'язання базується на властивостях $[\vec{a}, \vec{b}]$ і лінійних операцій над векторами.

1. *Визначаємо* всілякі векторні добутки одиничних векторів \vec{i} , \vec{j} , \vec{k} (рис. 2.2.3). Добуток однойменних векторів, як колінеарних, за властивістю 1⁰ (про рівність нулю) дає нуль-вектор: $\vec{i} \times \vec{i} = \vec{j} \times \vec{j} = \vec{k} \times \vec{k} = \vec{0}$.

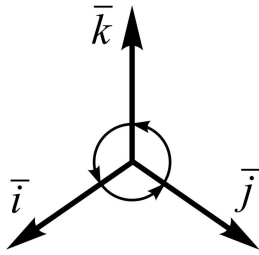


Рис. 2.2.3. Орти

Усі добутки різнойменних одиничних векторів теж даватимуть одиничні вектори, бо їхні модулі – це площі квадратів зі стороною, рівною одиниці (1). Напрямок добутку кожної пари або співпадатиме з третім ортом, або буде протилежним йому, а саме:

$$\begin{aligned} \vec{i} \times \vec{j} &= \vec{k}, & \vec{j} \times \vec{k} &= \vec{i}, & \vec{k} \times \vec{i} &= \vec{j}; \\ \vec{j} \times \vec{i} &= -\vec{k}, & \vec{k} \times \vec{j} &= -\vec{i}, & \vec{i} \times \vec{k} &= -\vec{j}. \end{aligned} \quad (2.2.17)$$

Обміркуємо, наприклад, добуток $\vec{i} \times \vec{j}$. Суміщення \vec{i} з \vec{j} найкоротшим шляхом, указаним дугою зі стрілкою (див. рис. 2.2.3), відбувається проти руху годинникової стрілки, якщо дивитися з кінця вектора \vec{k} , отже, $\vec{i} \times \vec{j} = \vec{k}$. Тоді за властивістю 2⁰ (про зміну знака) $\vec{j} \times \vec{i} = -\vec{k}$. Аналогічно (пропонуємо переконатися) отримуємо інші співвідношення із (2.2.17).

2. *Знаходимо* власне $\vec{a} \times \vec{b}$, подаючи вектори в алгебраїчній формі і використовуючи арифметичні властивості (2.2.16) з урахуванням співвідношень (2.2.17):

$$\begin{aligned} \vec{s} &= \vec{a} \times \vec{b} = (a_x \vec{i} + a_y \vec{j} + a_z \vec{k}) \times (b_x \vec{i} + b_y \vec{j} + b_z \vec{k}) = a_x b_y (\vec{i} \times \vec{j}) + \\ &+ a_x b_z (\vec{i} \times \vec{k}) + a_y b_x (\vec{j} \times \vec{i}) + a_y b_z (\vec{j} \times \vec{k}) + a_z b_x (\vec{k} \times \vec{i}) + a_z b_y (\vec{k} \times \vec{j}) = \\ &= a_x b_y \vec{k} - a_x b_z \vec{j} - a_y b_x \vec{k} + a_y b_z \vec{i} + a_z b_x \vec{j} - a_z b_y \vec{i} = \\ &= (a_y b_z - a_z b_y) \vec{i} - (a_x b_z - a_z b_x) \vec{j} + (a_x b_y - a_y b_x) \vec{k}. \end{aligned}$$

Помічаємо, що множники при \bar{i} , \bar{j} , \bar{k} – це розкриті визначники 2-го порядку, тому

$$\bar{s} = \begin{vmatrix} a_y & a_z \\ b_y & b_z \end{vmatrix} \cdot \bar{i} - \begin{vmatrix} a_x & a_z \\ b_x & b_z \end{vmatrix} \cdot \bar{j} + \begin{vmatrix} a_x & a_y \\ b_x & b_y \end{vmatrix} \cdot \bar{k}. \quad (2.2.18)$$

Якщо символи \bar{i} , \bar{j} , \bar{k} стлумачити (умовно) як елементи рядка визначника 3-го порядку, то остаточно отримаємо:

$$\bar{s} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix} - \text{подання } \bar{a} \times \bar{b} \text{ у вигляді визначника.} \quad (2.2.19)$$

Переконайтеся, що розклад цього визначника за елементами 1-го рядка дає (2.2.18).

У координатній формі $\bar{a} \times \bar{b}$ виглядатиме так:

$$\bar{s} = \bar{a} \times \bar{b} = (s_x, s_y, s_z) = \left(\begin{vmatrix} a_y & a_z \\ b_y & b_z \end{vmatrix}, - \begin{vmatrix} a_x & a_z \\ b_x & b_z \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} a_x & a_y \\ b_x & b_y \end{vmatrix} \right). \quad (2.2.20)$$

Правило (зручне для використання) відшукування компонент s_x , s_y , s_z вектора $\bar{s} = \bar{a} \times \bar{b}$:

1) *скласти* з координат векторів \bar{a} , \bar{b} матрицю $\begin{pmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{pmatrix}$;

2) *викреслити (вилучити)* подумки перший стовпець і обчислити визначник 2-го порядку $\begin{vmatrix} a_y & a_z \\ b_y & b_z \end{vmatrix}$, який дає першу координату s_x ;

3) *поступити* аналогічно, викресливши по черзі 2-й (для s_y) і 3-й (для s_z) стовпці, при цьому другий мінор матриці треба взяти з протилежним знаком.

Наприклад, знайдемо векторний добуток векторів $\bar{a} = (1, -2, 3)$, $\bar{b} = (2, 0, -3)$ за наведеним правилом:

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & 0 & -3 \end{pmatrix} \Rightarrow \left(s_x = \begin{vmatrix} -2 & 3 \\ 0 & -3 \end{vmatrix} = 6, s_y = -\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -3 \end{vmatrix} = 9, s_z = \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = 4 \right) \Rightarrow \\ \Rightarrow \bar{s} = \bar{a} \times \bar{b} = (6, 9, 4).$$

Задача 2.2.6. Знайти кут між двома векторами, відштовхуючись від векторного добутку.

Розв'язання. За означенням $|\bar{a} \times \bar{b}| = ab \sin \varphi$, звідки $\sin \varphi = \frac{|\bar{a} \times \bar{b}|}{ab}$.

Отже,

$$\varphi = \arcsin \frac{|\bar{a} \times \bar{b}|}{ab}. \quad (2.2.21)$$

(Сформулюйте словесно отриманий результат.)

Мішаним добутком трьох векторів \bar{a} , \bar{b} , \bar{c} називається векторний добуток двох із них, помножений скалярно на третій вектор: $(\bar{a} \times \bar{b}) \cdot \bar{c}$, $(\bar{a} \times \bar{c}) \cdot \bar{b}$, $(\bar{b} \times \bar{c}) \cdot \bar{a}$ та ін. Мішаний добуток називають також **векторно-скалярним** і позначають трійкою векторів, в якій векторним добутком вважають пов'язаними перші два елементи; *наприклад*, $(\bar{c}, \bar{b}, \bar{a})$ – це все рівно, що $(\bar{c} \times \bar{b}) \cdot \bar{a}$. Результатом мішаного добутку є скаляр, бо векторний добуток $\bar{a} \times \bar{b}$ дає вектор (позначимо його через \bar{s}), а добуток $\bar{s} \cdot \bar{c}$ – число. З'ясуємо, у чому полягає геометричний зміст цього числа.

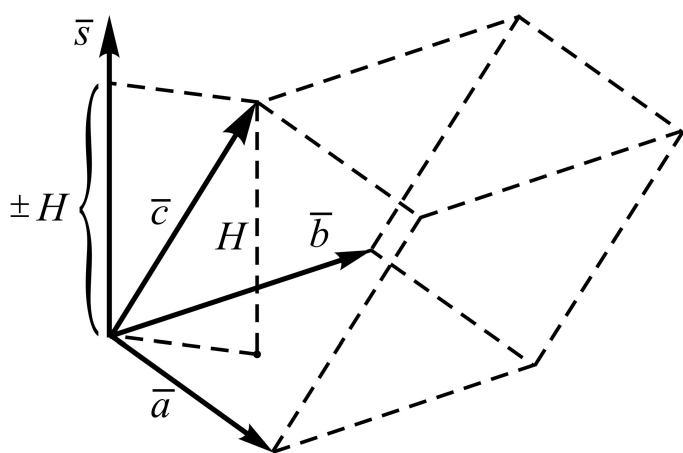


Рис. 2.2.4. Геометричний зміст мішаного добутку

Нехай \bar{a} , \bar{b} , \bar{c} – некопланарні вектори. Побудуємо на цих векторах як на ребрах паралелепіпед (рис. 2.2.4).

Вектор $\bar{s} = \bar{a} \times \bar{b}$ за довжиною чисельно рівний площі паралелограма, побудованого на векторах \bar{a} і \bar{b} як на сторонах, і напрямлений перпендикулярно площині паралелограма. Скалярний добуток $\bar{s} \cdot \bar{c}$ згідно з (2.2.5)

можна подати як добуток модуля $|\vec{s}|$ з проекцією вектора \vec{c} на відповідну векторові \vec{s} вісь:

$$(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = (\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} = \vec{s} \cdot \vec{c} = |\vec{s}| \cdot |\vec{c}| \cos(\vec{s} \wedge \vec{c}) = |\vec{s}| \cdot \text{пр}_s \vec{c}, \quad (2.2.22)$$

де $\text{пр}_s \vec{c}$ є додатним (від'ємним) числом, якщо кут між \vec{s} і \vec{c} гострий (тупий), і за модулем дорівнює висоті паралелепіпеда H (*обміркуйте*).

Висновок: модуль мішаного добутку трьох векторів чисельно дорівнює об'ємові паралелепіпеда V_{Π} , побудованого на векторах як на ребрах:

$$|(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c}| = V_{\Pi} = s \cdot H. \quad (2.2.23)$$

У цьому і полягає *геометричний смисл* мішаного добутку

Наслідок: об'єм тетраедра V_T – чотиригранної трикутної піраміди – дорівнює одній шостій модуля мішаного добутку векторів, що визначаються трьома її ребрами, які виходять з однієї вершини:

$$V_T = \frac{1}{6} V_{\Pi} = \frac{1}{6} s \cdot H. \quad (2.2.24)$$

Слушність (2.2.24) впливає з відомого в елементарній геометрії твердження: трикутну призму можна розбити на три рівновеликі трикутні піраміди.

Із означення і геометричного смислу мішаного добутку впливають його **основні властивості** (*обґрунтуйте*).

¹⁰ (*про рівність нулю*). Мішаний добуток дорівнює нулю у випадках, якщо:

- а) хоча б один з векторів нульовий;
- б) принаймні два з трьох векторів колінеарні;
- в) три вектори компланарні (паралельні одній і тій самій площині).

Якщо $(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} = 0$, то має місце один із випадків а), б), в). Розглядаючи випадки а), б) як частинні випадки компланарності, можна стверджувати: рівність $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = 0$ є **необхідною і достатньою умовою (критерієм) компланарності** трьох векторів.

Пов'яжемо із зображеними на площині векторами \vec{a} , \vec{b} , \vec{c} коло, як показано на рис. 2.2.5.

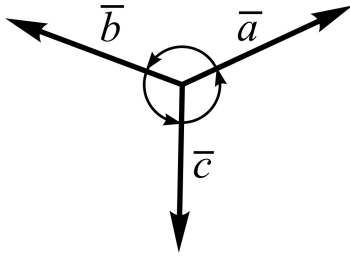


Рис. 2.2.5. Переставлення трьох векторів

Перелічення векторів, починаючи з будь-якого, відповідно до додатного або від'ємного руху по колу (див. рис. 2.2.5), назовемо відповідно **додатним** або **від'ємним переставленням** векторів. Додатне переставлення називають **циклічним**, або **коловим**.

2⁰ (про переставлення співмножників). Циклічне переставлення трьох співмножників векторно-скалярного добутку не змінює його величини, а від'ємне переставлення міняє знак на протилежний:

$$(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = (\vec{b}, \vec{c}, \vec{a}) = (\vec{c}, \vec{a}, \vec{b}) = -(\vec{a}, \vec{c}, \vec{b}) = -(\vec{b}, \vec{a}, \vec{c}) = -(\vec{c}, \vec{b}, \vec{a}). \quad (2.2.25)$$

(Наведіть відповідні міркування, спираючись на геометричний смисл мішаного добутку.)

Задача 2.2.7. Знайти мішаний добуток векторів \vec{a} , \vec{b} , \vec{c} , заданих у координатній формі: $\vec{a} = (a_x, a_y, a_z)$, $\vec{b} = (b_x, b_y, b_z)$, $\vec{c} = (c_x, c_y, c_z)$.

Розв'язання базується на означенні мішаного добутку та поданні векторного і скалярного добутків у координатній формі (див. (2.2.20), (2.2.6)):

$$\begin{aligned} (\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} &= \vec{s} \cdot \vec{c} = \left(\begin{vmatrix} a_y & a_z \\ b_y & b_z \end{vmatrix}, -\begin{vmatrix} a_x & a_z \\ b_x & b_z \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} a_x & a_y \\ b_x & b_y \end{vmatrix} \right) \cdot (c_x, c_y, c_z) = \\ &= c_x \cdot \begin{vmatrix} a_y & a_z \\ b_y & b_z \end{vmatrix} - c_y \cdot \begin{vmatrix} a_x & a_z \\ b_x & b_z \end{vmatrix} + c_z \cdot \begin{vmatrix} a_x & a_y \\ b_x & b_y \end{vmatrix}. \end{aligned}$$

Аналізуючи отриману суму добутків, пізнаємо в ній розклад визначника 3-го порядку матриці, складеної з координат векторів, за елементами третього рядка, тобто

$$(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}. \quad (2.2.26)$$

Наслідок. Вектори \bar{a} , \bar{b} , \bar{c} компланарні тоді і тільки тоді, коли визначник 3-го порядку, елементами рядків якого є координати векторів, дорівнює нулю (див. властивість 1⁰):

$$\bar{a}, \bar{b}, \bar{c} \text{ – компланарні} \Leftrightarrow \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix} = 0. \quad (2.2.27)$$

2.3. Найпростіші застосування векторів у задачах геометрії

Задача 2.3.1. Знайти довжину відрізка, заданого координатами кінцевих точок: $A_1(x_1, y_1, z_1)$, $A_2(x_2, y_2, z_2)$, або інакше: знайти відстань між двома точками.

Розв'язання ґрунтується на означеннях координат точки і вектора як проєкцій на координатні осі, на лінійних операціях над векторами і понятті „довжина вектора”.

1. Вводимо в розгляд вектор $\bar{a} = \overline{A_1A_2}$ з початком A_1 і кінцем A_2 , і допоміжні вектори $\bar{b} = \overline{OA_1}$, $\bar{c} = \overline{OA_2}$ (рис. 2.3.1).

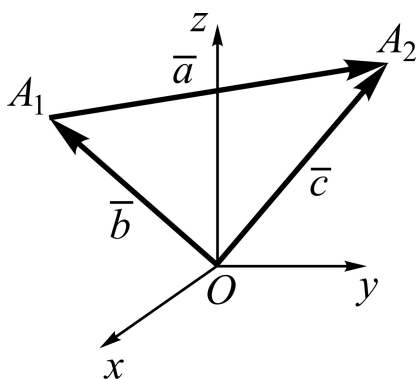


Рис. 2.3.1. До визначення довжини відрізка

2. Установлюємо координати векторів \bar{b} , \bar{c} , \bar{a} . У векторів \bar{b} , \bar{c} за означенням координати рівні координатам відповідно точок A_1 , A_2 , тобто

$$\begin{aligned} \bar{b} &= \overline{OA_1} = (x_1, y_1, z_1), \\ \bar{c} &= \overline{OA_2} = (x_2, y_2, z_2). \end{aligned}$$

Вектор $\bar{a} = \overline{A_1A_2}$ є різницею векторів \bar{c} і \bar{b} (див. рис. 2.3.1), тому згідно з (2.1.9) маємо:

$$\bar{a} = (a_x, a_y, a_z) = (x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1).$$

3. Знаходимо модуль вектора \bar{a} , що і дає довжину відрізка A_1A_2 :

$$a = A_1A_2 = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}. \quad (2.3.1)$$

Наведіть словесне формулювання отриманого результату; подумайте, що зміниться, якщо розглядати вектор $\overline{A_2A_1}$, а не $\overline{A_1A_2}$; запишіть (2.3.1) для двовимірного і одновимірного просторів.

Задача 2.3.2. Знайти площу трикутника, заданого координатами вершин: $A_1(x_1, y_1, z_1)$, $A_2(x_2, y_2, z_2)$, $A_3(x_3, y_3, z_3)$.

Розв'язання. За аксіомою стереометрії відомо, що три точки у просторі визначають площину і до того ж тільки одну. Для простоти викладу домовимось розглядати трикутник $A_1A_2A_3$ на площині xOy , тобто візьмемо $A_1(x_1, y_1, 0)$, $A_2(x_2, y_2, 0)$, $A_3(x_3, y_3, 0)$.

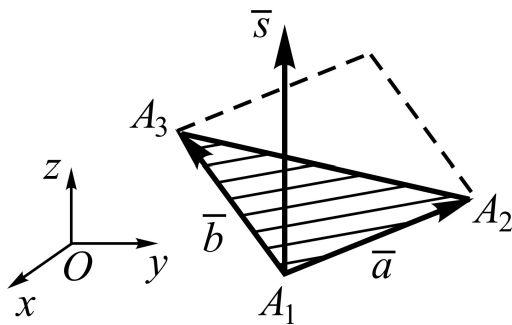


Рис. 2.3.2. До обчислення площі трикутника

1. Вводимо в розгляд вектори (рис. 2.3.2)

$$\begin{aligned}\bar{a} &= \overline{A_1A_2} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1, 0), \\ \bar{b} &= \overline{A_1A_3} = (x_3 - x_1, y_3 - y_1, 0)\end{aligned}$$

і знаходимо їхній векторний добуток $\bar{s} = \bar{a} \times \bar{b}$ (див. (2.2.20)):

$$\begin{aligned}\bar{s} = \bar{a} \times \bar{b} &= \left(0, 0, \begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 \end{vmatrix} \right) = 0 \cdot \bar{i} + 0 \cdot \bar{j} + \begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 \end{vmatrix} \cdot \bar{k} \Rightarrow \\ &\Rightarrow \bar{s} \perp xOy.\end{aligned}$$

2. Обчислюємо модуль вектора \bar{s} , що дає чисельно площу паралелограма, побудованого на векторах \bar{a} , \bar{b} як на сторонах (див. рис. 2.3.2), а його половина є площею трикутника:

$$\begin{aligned}S &= \sqrt{\begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 \end{vmatrix}^2} = \pm \begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 \end{vmatrix} \Rightarrow \\ &\Rightarrow S_{\Delta} = \pm \frac{1}{2} \begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 \end{vmatrix}.\end{aligned}\tag{2.3.2}$$

Знак „+” чи „-” береться залежно від того, яким буде визначник – додатним чи від’ємним. Формулу (2.3.2) можна подати (перевірте) через визначник 3-го порядку:

$$S_{\Delta} = \pm \frac{1}{2} \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}, \text{ або } S_{\Delta} = \pm \frac{1}{2} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{vmatrix}. \quad (2.3.3)$$

Якщо трикутник визначає не площину xOy , а якусь іншу площину в \mathbf{R}^3 , то все рівно його площу можна знайти за формулою:

$$S_{\Delta} = \frac{1}{2} |\bar{a} \times \bar{b}|,$$

але в розгорнутому вигляді – через координати – її подавати не доцільно (як ви гадаєте, чому?).

Наприклад, знайдемо площу трикутника з вершинами $A_1(-3, 5, 1)$, $A_2(2, 0, -3)$, $A_3(4, -1, 5)$, для чого:

1) вводимо в розгляд вектори $\bar{a} = \overline{A_1A_2} = (5, -5, -4)$, $\bar{b} = \overline{A_1A_3} = (7, -6, 4)$;

2) знаходимо їхній векторний добуток $\bar{s} = \bar{a} \times \bar{b} = (-44, -48, 5)$;

3) обчислюємо площу трикутника

$$S_{\Delta} = \frac{1}{2} \sqrt{44^2 + 48^2 + 5^2} = \frac{1}{2} \sqrt{4140} \approx 32 \text{ (кв. од.)}.$$

Для розв'язання наступної задачі обговоримо і означимо поняття „**поділ відрізка у заданому відношенні**”. Поділ заданого відрізка у відношенні $\lambda = 1:1$ означає, що його треба поділити на дві рівні за довжиною частини, тобто навпіл; і не суттєво, від якого з двох кінців відрізка відкласти його половину. Якщо ж торкатися, наприклад, питання поділу на частини медіан трикутника точкою їхнього перетину, то це відношення дорівнює $2:1$ ($1:2$), якщо відштовхуватись від вершини трикутника (середини протилежної сторони). Отже, у загальному випадку треба зазначати, яка з двох кінцевих точок відрізка приймається за початок, а яка – за кінець. Тому з відрізком A_1A_2 пов'язують вісь l , згідно з напрямом якої визначається напрям на відрізку, що перетворює його у вектор (рис. 2.3.3). При цьому, якщо точка A_0 осі l , яка поділяє A_1A_2 у деякому відношенні λ , лежить всередині (зовні) відрізка, то кажуть, що вона здійснює **внутрішній (зовнішній) поділ** відрізка на частини.

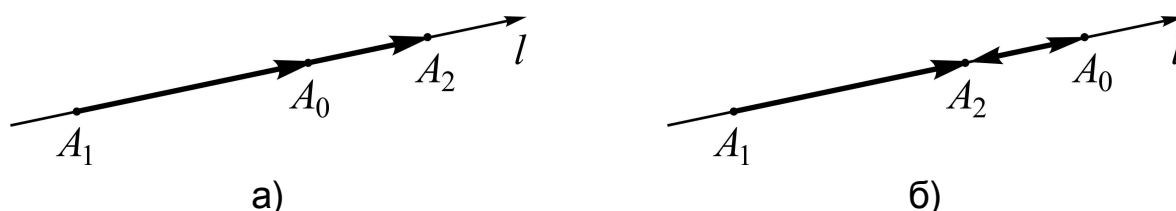


Рис. 2.3.3. Поділ відрізка на частини: а) внутрішній; б) зовнішній

Саме **відношення** λ означається так: відношенням, у якому точка A_0 поділяє напрямлений відрізок – вектор – $\overline{A_1A_2}$, називається число λ , яке визначається рівністю:

$$\lambda = \frac{\text{вел } \overline{A_1A_0}}{\text{вел } \overline{A_0A_2}}, \quad (2.3.4)$$

тобто є відношенням величин векторів $\overline{A_1A_0}$ і $\overline{A_0A_2}$, для першого з яких точка A_0 є кінцем, а для другого – початком.

Якщо A_0 здійснює внутрішній (зовнішній) поділ відрізка на частини, то $\lambda > 0$ ($\lambda < 0$). *Обміркуйте* це, аналізуючи рис. 2.3.3.

Задача 2.3.3. Відрізок A_1A_2 задано координатами кінцевих точок: $A_1(x_1, y_1, z_1)$, $A_2(x_2, y_2, z_2)$. Знайти координати точки $A_0(x_0, y_0, z_0)$, яка поділяє напрямлений відрізок $\overline{A_1A_2}$ у відношенні λ .

Розв'язання спирається на співвідношення (2.3.4) із залученням поняття колінеарності векторів, а саме:

$$\lambda = \frac{\text{вел } \overline{A_1A_0}}{\text{вел } \overline{A_0A_2}} \Rightarrow \text{вел } \overline{A_1A_0} = \lambda \cdot \text{вел } \overline{A_0A_2}. \quad (2.3.5)$$

Це означає, що вектори $\overline{A_1A_0}$ і $\overline{A_0A_2}$ колінеарні, і $\overline{A_1A_0} \uparrow\uparrow \overline{A_0A_2}$ при $\lambda > 0$, $\overline{A_1A_0} \downarrow\uparrow \overline{A_0A_2}$ при $\lambda < 0$ (див. рис. 2.3.3).

Виведемо формули для обчислення x_0 , y_0 , z_0 за умови внутрішнього поділу ($\lambda > 0$):

$$(x_0 - x_1 = \lambda(x_2 - x_0), \quad y_0 - y_1 = \lambda(y_2 - y_0), \quad z_0 - z_1 = \lambda(z_2 - z_0)) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(x_0 = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1 + \lambda}, y_0 = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1 + \lambda}, z_0 = \frac{z_1 + \lambda z_2}{1 + \lambda} \right). \quad (2.3.6)$$

Обміркуйте, як виглядатимуть формули (2.3.6), якщо $\lambda < 0$.

У частинних випадках маємо координати:

середини відрізка A_1A_2 ($\lambda = 1$):

$$x_0 = \frac{x_1 + x_2}{2}, y_0 = \frac{y_1 + y_2}{2}, z_0 = \frac{z_1 + z_2}{2}; \quad (2.3.7)$$

точки перетину медіан трикутника, якщо вважати початком на-
прямленої медіани вершину трикутника A_1 , а кінцем A_2 – середину про-
тилежної сторони ($\lambda = 2$):

$$x_0 = \frac{x_1 + 2x_2}{3}, y_0 = \frac{y_1 + 2y_2}{3}, z_0 = \frac{z_1 + 2z_2}{3}. \quad (2.3.8)$$

Приклад. Знайти центр тяжіння однорідної (за густиною) трикутної
платівки з вершинами $A_1(3, -1)$, $A_2(5, 2)$, $A_3(-2, 3)$.

Розв'язання. Розглянемо медіану, проведену із вершини A_1 . Для
відшукування координат середини протилежної сторони A_2A_3 (позначимо її
через A_4) використаємо (2.3.7):

$$x_4 = \frac{x_2 + x_3}{2} = \frac{3}{2}, y_4 = \frac{y_2 + y_3}{2} = \frac{5}{2}.$$

Координати центра тяжіння $A_0(x_0, y_0)$ обчислимо за формулами
(2.3.8):

$$x_0 = \frac{x_1 + 2x_4}{3} = 2, y_0 = \frac{y_1 + 2y_4}{3} = \frac{4}{3}.$$

(Підтвердіть обчислення геометричними побудовами.)

Розглянуті задачі і загалом викладенні положення векторної алгебри
дозволяють на аналітичному рівні описати (рівняннями) геометричні фі-
гури, визначити їхнє розташування у просторі та числові характеристики.

Векторна алгебра має численні застосування в задачах опису фун-
кціональних зв'язків між елементами інформаційних систем – ІС. (Інфор-

мація (від лат. *informatio* – освідомлення, обізнаність) – буквально: відомості, дані, знання; система (від грецьк. *systema* – поєднане, складене з частин) – сукупність елементів, які певним чином пов'язані між собою і утворюють деяку цілісність.)

Нехай $\mathbf{u}(t) = (u_1(t), u_2(t))$, $\mathbf{v}(t) = (v_1(t), v_2(t))$ – вектори, координати яких змінюються залежно від часу t ; в ІС їх називають **сигналами**, або **сигнальними функціями**. Позначення векторів навмисне взяті такими, якими вони є у спеціальній літературі, модуль вектора в теорії ІС називають його **нормою**.

Незважаючи на певну абстрактність скалярного добутку, він може набувати конкретний зміст для конкретних процесів, що відображаються сигнальними функціями – математичною моделлю процесу. Скалярний добуток сигналів (\mathbf{u}, \mathbf{v}) відображує ступінь їхнього зв'язку (подібності, схожості). Сутність цієї операції наочно відображено на рис. 2.3.4: добуток довжини (норми) одного вектора з проекцією другого вектора на напрям першого вектора.

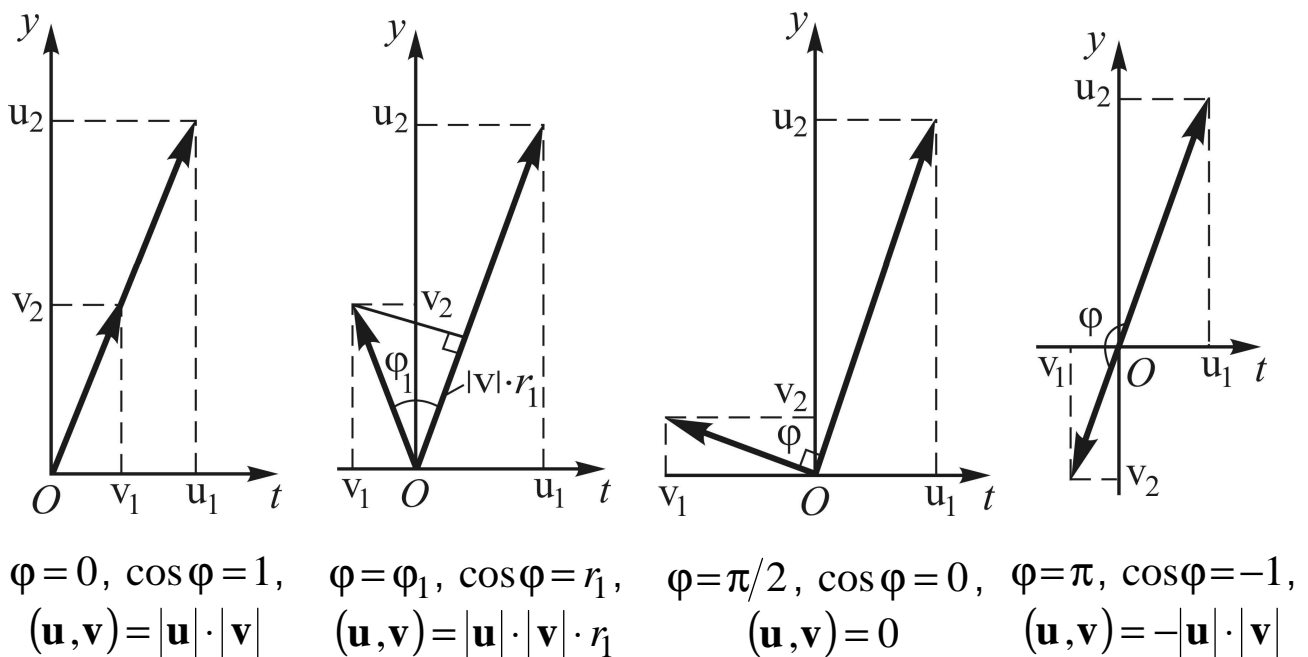


Рис. 2.3.4. Скалярний добуток сигналів у двовимірному просторі

Якщо, *наприклад*, $\mathbf{u} = \mathbf{u}(t)$ – сила, прикладена до тіла, $\mathbf{v} = \mathbf{v}(t)$ – переміщення тіла під дією цієї сили, то робота \mathcal{A} сили чисельно дорівнює скалярному добутку:

$$\mathcal{A} = (\mathbf{u}, \mathbf{v}) = |\mathbf{u}| \cdot |\mathbf{v}| \cdot \cos \varphi. \quad (2.3.9)$$

Запитання для самодіагностики засвоєння матеріалу

Відповіді на всі запитання сформулюйте словесно, запишіть в символічній формі, обґрунтуйте (на підставі означень, теорем, правил, формул тощо), наведіть відповідні конкретні приклади.

1. Яка форма завдання вектора називається геометричною і що розуміють під модулем вектора?
2. Яким умовам згідно з означенням повинні відповідати рівні, протилежні, колінеарні, компланарні вектори?
3. Що розуміють під сумою (різницею), добутком вектора зі скаляром? Наведіть геометричне зображення.
4. Які операції над векторами називають лінійними? Якими властивостями вони володіють?
5. Яка форма завдання вектора називається координатною (числовою) і що таке величина вектора?
6. Що називають координатою вектора, який лежить на числовій осі?
7. Яка форма завдання вектора називається алгебраїчною в одно-, дво-, тривимірному просторах?
8. Як розташований відносно координатних осей і площин вектор у тривимірному просторі за умови, що одна або дві з його координат дорівнюють нулю?
9. Що називають проекцією вектора на вісь і як вона визначається?
10. Як визначається модуль вектора, заданого координатами?
11. Наведіть правила відшукування суми (різниці) двох векторів, добутку вектора зі скаляром, якщо вектори задані в координатній формі.
12. Що називають скалярним добутком двох векторів і якими властивостями він володіє?
13. Як відшукуються: скалярний добуток векторів, заданих у координатній формі; кут між двома векторами?
14. Що розуміють під напрямними косинусами вектора, за якими формулами вони обчислюються, якими властивостями володіють?
15. Що називають векторним добутком двох векторів і якими властивостями він володіє?
16. Як відшукується векторний добуток векторів, заданих у координатній формі?

17. Наведіть критерії ортогональності та колінеарності двох векторів, якщо вектори задані в координатній формі.
18. Що називають мішаним добутком трьох векторів і якими властивостями він володіє?
19. У чому полягає геометричний смисл мішаного добутку векторів?
20. Чому дорівнює мішаний добуток векторів, заданих у координатній формі?
21. Наведіть критерій компланарності трьох векторів.
22. Як відшукується довжина відрізка, заданого координатами кінцевих точок?
23. За якою формулою обчислюється площа трикутника, заданого координатами вершин?
24. Що розуміють під внутрішнім і зовнішнім поділом відрізка на частини у заданому відношенні?
25. Як устанавлюються координати точки, яка поділяє даний відрізок у заданому відношенні?

Задачі та вправи

1. Довести, що при будь-якому розміщенні точок A, B, C в \mathbf{R}^2 (\mathbf{R}^3) справедлива формула $\overline{AB} + \overline{BC} + \overline{CA} = \overline{0}$.
2. У трикутнику OAB проведена медіана OC . Довести, що $\overline{OC} = 0,5(\overline{OA} + \overline{OB})$.
3. Довести, що умова $\overline{a} + \overline{b} + \overline{c} = \overline{0}$ є необхідною і достатньою для того, щоб з векторів $\overline{a}, \overline{b}, \overline{c}$ можна було утворити трикутник ($\overline{a} \neq \overline{0}, \overline{b} \neq \overline{0}, \overline{c} \neq \overline{0}$).
4. Задано точки $A(0, -1, 2)$ і $B(-1, 1, 4)$. Знайти координати, довжину та напрямні косинуси вектора \overline{AB} .
5. З'ясувати, чи може вектор утворювати з осями координат кути $\alpha = \beta = 60^\circ, \gamma = 30^\circ$.
6. Знайти вектор $\overline{a} = (a_x, -1, a_z)$, колінеарний вектору $\overline{b} = (1, -2, 3)$.
7. На векторах $\overline{AB} = (2, 6, -4)$ і $\overline{AC} = (4, 2, -2)$ побудовано трикутник ABC . Визначити координати векторів-медіан $\overline{AM}, \overline{BN}, \overline{CP}$.

8. Вектори \vec{a} і \vec{b} утворюють кут $\varphi = 120^\circ$, $|\vec{a}| = 3$, $|\vec{b}| = 4$. Обчислити: а) $\vec{a} \cdot \vec{b}$; б) $(\vec{a})^2$; в) $(\vec{a} - \vec{b})^2$; г) $(\vec{a} + 2\vec{b}) \cdot (3\vec{a} - 2\vec{b})$.

9. Відомо, що $(\vec{a} \wedge \vec{b}) = \pi/3$, $|\vec{a}| = 5$, $|\vec{b}| = 8$. Знайти: а) $|\vec{a} + \vec{b}|$; б) $|\vec{a} - \vec{b}|$.

10. Знайти довжину вектора $\vec{c} = 3\vec{a} + 2\vec{b}$, якщо $|\vec{a}| = 1$, $|\vec{b}| = \sqrt{2}$, $(\vec{a} \wedge \vec{b}) = \pi/4$.

11. Задані вектори $\vec{a} = (0, -2, -3)$, $\vec{b} = (3, 2, 3)$. Обчислити: а) $\vec{a} \cdot \vec{b}$; б) $|3\vec{a} + 2\vec{b}|$.

12. Обчислити роботу \mathcal{A} сили $\vec{F} = (2, -1, 4)$, яка прямолінійно переміщує матеріальну точку з точки $M(-1, 0, 3)$ в точку $N(2, -3, 5)$ ($\mathcal{A} = \vec{F} \cdot \vec{S}$, де \vec{S} – вектор переміщення).

13. Відомо, що $(\vec{a} \wedge \vec{b}) = 120^\circ$, $|\vec{a}| = 4$. Знайти $\text{pr}_{\vec{b}} \vec{a}$.

14. Задані вектори $\vec{a} = (2, 0, -2)$ і $\vec{b} = (-2, 1, 2)$. Знайти: а) проекцію вектора $\vec{c} = 2\vec{a} + \vec{b}$ на вектор \vec{b} ; б) проекцію вектора \vec{a} на вектор \vec{c} .

15. Задано точки $A(1, 1, 1)$ і $B(4, 5, -3)$. Знайти проекцію вектора \overline{AB} на вісь, яка утворює з координатними осями рівні гострі кути.

16. Трикутник заданий вершинами $A(0, -1, 2)$, $B(-1, -2, 7)$, $C(1, -2, 6)$. Знайти його внутрішній кут при вершині A .

17. Знайти кут між діагоналями паралелограма, побудованого на векторах $\vec{a} = 2\vec{i} - \vec{j}$ і $\vec{b} = -\vec{j} + 2\vec{k}$ як на сторонах.

18. Відомо, що $|\vec{a}| = 3$, $|\vec{b}| = 5$. При якому значенні числа α вектори $\vec{a} + \alpha\vec{b}$, $\vec{a} - \alpha\vec{b}$ взаємно перпендикулярні?

19. Довести, що $(\vec{a} + \vec{b}) \times (\vec{a} - \vec{b}) = 2(\vec{b} \times \vec{a})$.

20. Довести тотожність: $(\vec{a} \times \vec{b})^2 + (\vec{a} \cdot \vec{b})^2 = (\vec{a})^2 (\vec{b})^2$.

21. Знайти $|(3\vec{a} - \vec{b}) \times (\vec{a} - 2\vec{b})|$, якщо $|\vec{a}| = 3$, $|\vec{b}| = 4$, $(\vec{a} \wedge \vec{b}) = \pi/2$.

22. Знайти площу паралелограма, побудованого на векторах $\vec{a} = \vec{m} - 2\vec{n}$ і $\vec{b} = 2\vec{m} + 3\vec{n}$, якщо $|\vec{m}| = |\vec{n}| = 1$, $(\vec{m} \wedge \vec{n}) = \pi/6$.

23. Задані вектори $\vec{a} = (3, -1, 2)$ і $\vec{b} = (1, 2, -1)$. Знайти координати векторів: а) $\vec{a} \times \vec{b}$; б) $(2\vec{a} + \vec{b}) \times (2\vec{a} - \vec{b})$.

24. Знайти орт вектора, перпендикулярного до векторів $\vec{a} = 4\vec{i} + 4\vec{j} + 2\vec{k}$ та $\vec{b} = 4\vec{i} + 5\vec{j} + 3\vec{k}$.

25. Знайти площу трикутника, заданого вершинами $A(1, 2, 0)$, $B(0, -2, 1)$, $C(-1, 0, 2)$.

26. При якому значенні числа λ вектори $\vec{a} = \vec{i} + \vec{j} + \lambda\vec{k}$, $\vec{b} = \vec{j}$, $\vec{c} = 3\vec{i} + \vec{k}$ компланарні?

27. Довести, що при будь-яких векторах \vec{a} , \vec{b} і \vec{c} , вектори $\vec{b} - \vec{c}$, $\vec{a} - \vec{b}$ та $\vec{c} - \vec{a}$ компланарні.

28. Встановити, чи є компланарними вектори \vec{a} , \vec{b} і \vec{c} , якщо:

а) $\vec{a} = (3, 2, 2)$, $\vec{b} = (1, -1, 3)$, $\vec{c} = (1, 9, -11)$;

б) $\vec{a} = (5, -1, 3)$, $\vec{b} = (2, 1, 2)$, $\vec{c} = (3, -1, -2)$.

29. Знайти об'єм тетраедра, заданого вершинами $A(2, -1, 0)$, $B(5, 5, 3)$, $C(3, 2, -2)$, $D(4, 1, 2)$.

30. Задані вершини тетраедра $A(1, 2, 3)$, $B(9, 6, 4)$, $C(3, 0, 4)$, $D(5, 2, 6)$. Знайти довжину висоти тетраедра, опущеної з вершини D .

31. Об'єм піраміди $V = 5$, три її вершини лежать у точках $A(2, 1, -1)$, $B(3, 0, 1)$, $C(2, -1, 3)$. Знайти координати четвертої вершини D , якщо відомо, що вона лежить на осі Oy .

32. Довести, що точки $A(0, 1, 2)$, $B(-2, 0, -1)$, $C(-1, 5, 8)$, $D(1, 6, 11)$ лежать в одній площині.

33. Відрізок між точками $A(2, -3)$ і $B(6, 8)$ поділено точками C і D на три рівні частини. Знайти координати точок C і D .

34. Дано дві точки $A(2, -1)$ і $B(1, 1)$. Знайти координати точки N , що симетрична точці B відносно точки A .

35. Дано три точки $A(2, -1)$, $B(4, 3)$ і $C(5, 5)$, що лежать на одній прямій. Визначити відношення λ , в якому кожна з них поділяє відрізок, обмежений двома іншими.

Відповіді

4. $\overline{AB} = (-1, 2, 2)$; $|\overline{AB}| = 3$; $\cos \alpha = -1/3$, $\cos \beta = \cos \gamma = 2/3$.
5. Ні. 6. $\bar{a} = (1/2, -1, 3/2)$.
7. $\overline{AM} = (3, 4, -3)$, $\overline{BN} = (0, -5, 3)$, $\overline{CP} = (-3, 1, 0)$.
8. а) -6 ; б) 9 ; в) 37 ; г) -61 . 9. а) $\sqrt{129}$; б) 7 .
10. $\sqrt{29}$. 11. а) -13 ; б) 7 .
12. $\mathcal{A} = 17$. 13. $\text{пр}_{\bar{b}} \bar{a} = -2$.
14. $\text{пр}_{\bar{b}} \bar{c} = -7/3$; б) $\text{пр}_{\bar{c}} \bar{a} = 8/3$. 15. $\sqrt{3}$.
16. $\varphi = \arccos 0,91 \approx 25^\circ$. 17. $\pi/2$.
18. $\alpha = \pm 3/5$. 21. 60 .
22. $3,5$. 23. а) $(-3, 5, 7)$; б) $(12, -20, -28)$.
24. $\bar{x} = \pm \frac{1}{3}(\bar{i} - 2\bar{j} + 2\bar{k})$ 25. $3\sqrt{2}$.
26. $\lambda = 1/3$. 28. а) так; б) ні.
29. 3 . 30. $4\sqrt{2}/3$.
31. $D_1(0, 8, 0)$, $D_2(0, -7, 0)$. 33. $C(10/3, 4/3)$, $D(14/3, 13/3)$.
34. $N(3, -3)$. 35. $\lambda_1 = \frac{AB}{BC} = 2$; $\lambda_2 = \frac{AC}{CB} = -3$; $\lambda_3 = \frac{BA}{AC} = -\frac{2}{3}$.

Ключові терміни

Вектор, напрям, довжина (модуль), величина, операція (лінійна, нелінійна), проекція (геометрична, алгебраїчна), форма (геометрична, алгебраїчна), координати, добуток (скалярний, векторний, мішаний).

Резюме

Викладено елементи векторної алгебри в одно-, дво-, тривимірному просторах як теоретичну базу для розв'язання геометричних задач алгебраїчними методами.

Література: [3; 4; 5; 8; 11; 17; 18; 22; 25].

3. Аналітична геометрія на площині та в просторі

Геометрія є наймогутнішим засобом для витончення наших розумових здібностей.

Г. Галілей

Мета: забезпечити майбутніх фахівців володінням алгебраїчними засобами опису геометричних фігур як образів реальних об'єктів з метою використання їх для побудови відповідних математичних моделей.

Питання теми:

- 3.1. Пряма на площині (в \mathbf{R}^2).
- 3.2. Криві другого порядку (К2П).
- 3.3. Площина у просторі (в \mathbf{R}^3).
- 3.4. Пряма у просторі (в \mathbf{R}^3). Пряма і площина в \mathbf{R}^3 .

Компетентності, що формуються після вивчення теми:

Загальнонаукова: поглиблення базових знань з геометрії у поєднанні із засобами алгебраїчного аналізу геометричних об'єктів.

Загальнопрофесійна: підготовленість до впровадження засобів координатного методу візуалізації в задачах аналізу складових інформаційних систем.

Спеціалізовано-професійна: здатність до алгебраїчного аналізу геометричної інтерпретації різноманітних залежностей між характеристиками об'єктів в задачах, що зводяться до моделей, які не є лінійними.

3.1. Пряма на площині (в \mathbf{R}^2)

Що таке аналітична геометрія?

Об'єктом вивчення елементарної геометрії (від грецьк. *ge* – Земля, *metreo* – вимірюю), що студіювалася у середній школі, є геометричні фігури, розташовані на площині (в \mathbf{R}^2) й у просторі (в \mathbf{R}^3), а *предметом* – установлення властивостей фігур за допомогою (переважно) побудови їхніх зображень на площині.

Нагадаємо, що **геометричне тіло** – це частина простору, обмежена з усіх боків. Геометричне тіло відмежовується від оточуючого простору **поверхнею**. Частина поверхні відділяється від суміжної частини **лінією**,

а частина лінії від її суміжної частини – **точкою**. Сукупність (множина) будь-яких точок, розташованих певним чином на площині чи у просторі, називається узагалі **геометричною фігурою**. Як правило, вивчаються фігури, точки яких володіють у сукупності деякою властивістю. Такі множини точок називають **геометричним місцем точок** (г. м. т.). *Наприклад*, коло – це г. м. т., рівновіддалених від заданої точки – центра кола.

Характерною особливістю елементарної геометрії є те, що розв'язання усіх типів задач (на відшукування г. м. т., на доведення, на побудову, на обчислення) здійснюється за допомогою креслення із залученням певних аксіом чи теорем. В аналітичній геометрії провідну роль відіграють алгебраїчні засоби й обчислення, а не геометричні побудови. Такий підхід до розв'язання геометричних задач здійснюється *методом координат* (координатним методом), згідно з яким положення точки на прямій, на площині, у просторі визначається числами. Це дає змогу описати алгебраїчними засобами будь-яку геометричну фігуру.

Засновником методу координат і, разом з тим, аналітичної геометрії є Рене Декарт (1596 – 1650) – французький філософ, математик, фізик і фізіолог. Його ім'ям і названа відома „декартова прямокутна система координат”, яка дозволяє визначити положення фігури в \mathbf{R}^1 , \mathbf{R}^2 чи \mathbf{R}^3 .

Підсумовуючи викладене, означуємо: **аналітична геометрія** – розділ математики, *об'єктом* вивчення якої є геометричні фігури, а *предметом* – установлення їхніх властивостей засобами алгебри за допомогою координатного методу. Теоретичною базою цієї науки є викладена у попередній темі *векторна алгебра*.

Поняття про рівняння лінії на площині. Основні задачі аналітичної геометрії

Будь-яку лінію L на площині xOy в аналітичній геометрії розглядають як сукупність точок, які володіють деякою спільною властивістю, тобто являють собою геометричне місце точок (г. м. т.). Спираючись на цю властивість, між координатами точок лінії x і y установлюють співвідношення, яке міститиме дві змінні величини і, можливо, деякі числові параметри та константи.

Рівняння $\Phi(x, y) = 0$ називається **рівнянням лінії L** , якщо координати будь-якої точки $M(x, y)$ на лінії задовольняють його і навпаки, якщо

пара чисел (x, y) задовольняє рівняння, то x і y є координатами точки, яка належить лінії:

$$\Phi(x, y) = 0 \text{ – рівняння } L \Leftrightarrow (x, y) \in L \Leftrightarrow \Phi(x, y) = 0, \quad (3.1.1)$$

де Φ – закон, який відображує властивість точок лінії;

\in – символ (знак) *належності* ($M \in L$ – точка M належить лінії L).

Змінні x і y , які входять у рівняння лінії, називаються **поточними координатами** точок лінії: під x, y розуміються координати будь-якої точки лінії. Якщо ми зуміємо відшукати (побудувати, знайти, скласти) рівняння лінії, тоді вивчення її властивостей зведеться до дослідження рівняння.

Приклад. Скласти рівняння кола радіуса R з центром у точці $C(x_0, y_0)$ (рис. 3.1.1).

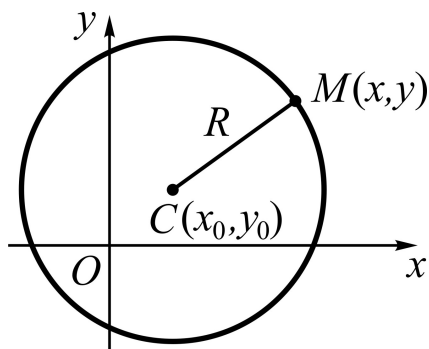


Рис. 3.1.1. Коло

Розв'язання базується на означенні кола і формулі відстані між двома точками в \mathbf{R}^2 (2.3.1).

Нехай $M(x, y)$ – довільна точка кола, тоді $CM = R$, тобто

$$CM = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} = R,$$

або

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = R^2. \quad (3.1.2)$$

Рівняння (3.1.2) називають **канонічним рівнянням кола** (від грецьк. *kanon* – норма, правило). (*Запишіть* самостійно канонічне рівняння точки в \mathbf{R}^2 .)

Наслідок: якщо центр кола лежить у початку координат, то його канонічне рівняння має вигляд: $x^2 + y^2 = R^2$.

Буває і так, що змінні x, y не безпосередньо пов'язані між собою, а за допомогою **параметра** t – допоміжної змінної. *Наприклад*, рівняння кола (3.1.2) можна подати у **параметричній формі**:

$$\begin{cases} x = x_0 + R \cos t \\ y = y_0 + R \sin t, \quad t \in [0, 2\pi]. \end{cases} \quad (3.1.3)$$

Пропонуємо виключити із (3.1.3) параметр t і отримати (3.1.2).

До **основних задач** аналітичної геометрії в \mathbf{R}^2 відносять такі задачі:

1. Побудувати лінію (криву) за заданим рівнянням (*пряма задача*).
2. Скласти рівняння заданої кривої (*обернена задача*).

Обернена задача більш важка, бо г. м. т. може володіти різноманітними властивостями, і урахувати їх усі дуже складно. Лише у середині 20-го століття за допомогою так названих R -функцій задача була розв'язана у загальному вигляді для ліній, складених із дуг кривих і прямих, рівняння яких відомі. Це здійснив наш співвітчизник Рвачов В. Л. (1926 – 2005) – механік і математик, академік Національної академії наук України.

Різновиди рівнянь прямої на площині

Поняття „пряма лінія”, або просто „пряма”, є первинним в геометрії, тобто не означуваним через інші математичні поняття. Із аксіом елементарної геометрії відомо: через дві точки можна провести пряму і до того ж тільки одну; через точку, яка не належить прямій, можна провести паралельну пряму і до того ж тільки одну.

Задамо на площині систему координат xOy і деяку пряму l .

1°. *Канонічне і параметричне рівняння прямої.*

Будь-який не нульовий вектор $\bar{s} = (m, n)$, який паралельний прямій l або лежить на ній, називається **напрямним вектором** прямої. Координати напрямного вектора m, n згідно з означенням подаються так:

$$m = |\bar{s}| \cdot \cos \alpha, \quad n = |\bar{s}| \cdot \cos \beta = |\bar{s}| \cdot \sin \alpha, \quad (3.1.4)$$

де $\cos \alpha, \cos \beta$ – напрямні косинуси вектора (див. (2.2.10)).

Задача 3.1.1. Скласти рівняння прямої, що проходить через точку $M_0(x_0, y_0)$ і має напрямний вектор $\bar{s} = (m, n)$.

Розв'язання. Виберемо на прямій l (рис. 3.1.2) довільну точку $M(x, y)$, відмінну від M_0 , і введемо в розгляд вектор $\overrightarrow{M_0M} = (x - x_0, y - y_0)$.

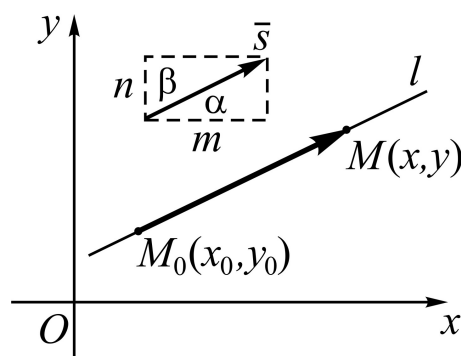


Рис. 3.1.2. Пряма та її напрямний вектор

Напрямний вектор \vec{s} і вектор $\overline{M_0M}$ колінеарні, тому їхні координати пропорційні, тобто

$$\frac{x - x_0}{m} = \frac{y - y_0}{n} \quad (3.1.5)$$

– канонічне рівняння прямої.

Наслідки:

1) якщо в якості напрямного вектора взяти одиничний вектор \vec{s}_0 , то на підставі (3.1.4) $m = \cos \alpha$, $n = \sin \alpha$, а (3.1.5) набуде вигляду:

$$\frac{x - x_0}{\cos \alpha} = \frac{y - y_0}{\sin \alpha} \quad (3.1.6)$$

– канонічне рівняння прямої з одиничним напрямним вектором;

2) якщо в (3.1.5) покласти коефіцієнт пропорційності рівним t , то отримаємо:

$$\left(\frac{x - x_0}{m} = t, \frac{y - y_0}{n} = t \right) \Rightarrow \begin{cases} x = x_0 + mt \\ y = y_0 + nt, \quad \forall t \in \mathbf{R} \end{cases} \quad (3.1.7)$$

– параметричні рівняння прямої.

У випадках, коли одна з компонент, m або n , дорівнює нулю, отримуємо параметричні рівняння прямих, паралельних відповідно осі Oy або осі Ox . (Обміркуйте ці випадки стосовно канонічного рівняння (3.1.5).)

2°. Рівняння прямої, що проходить через дві задані точки.

Задача 3.1.2. Скласти рівняння прямої, що проходить через точки $M_1(x_1, y_1)$ і $M_2(x_2, y_2)$.

Розв'язання. Виберемо на прямій l (рис. 3.1.3) довільним чином точку $M(x, y)$, відмінну від M_1 і M_2 , і введемо в розгляд вектори $\overline{M_1M}$ і $\overline{M_1M_2}$:

$$\begin{aligned} \overline{M_1M} &= (x - x_1, y - y_1), \\ \overline{M_1M_2} &= (x_2 - x_1, y_2 - y_1). \end{aligned}$$

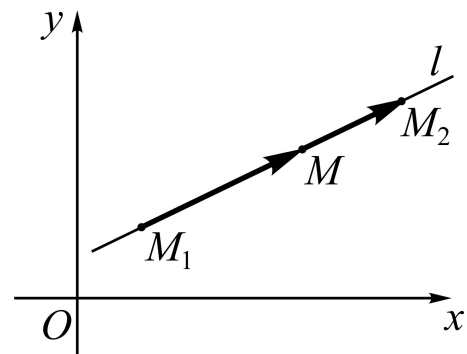


Рис. 3.1.3. Пряма і задані точки

Оскільки ці вектори колінеарні, то шукане рівняння прямої має вигляд:

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} \quad (3.1.8)$$

– рівняння прямої, що проходить через дві задані точки.

Зазначимо, що вектор $\overline{M_1M_2}$ є напрямним вектором прямої, як і протилежний вектор $\overline{M_2M_1}$.

3°. Рівняння прямої, яка проходить через задану точку у заданому напрямі.

Задача 3.1.3. Знайти рівняння прямої, яка проходить через точку $M_0(x_0, y_0)$ і нахилена до осі Ox під кутом α (рис. 3.1.4).

Розв'язання базується на канонічному рівнянні прямої (3.1.5) і співвідношеннях (3.1.4):

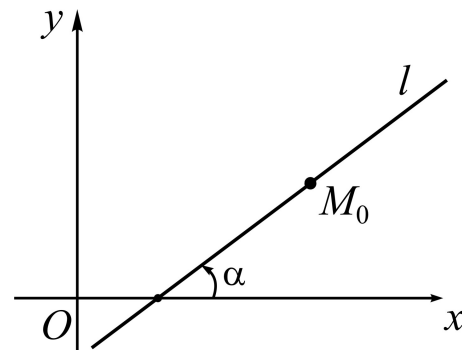


Рис. 3.1.4. Пряма та задані кут і точка

$$\begin{aligned} \frac{x - x_0}{m} &= \frac{y - y_0}{n} \Rightarrow \\ \Rightarrow y - y_0 &= \frac{n}{m}(x - x_0) \Rightarrow \left| \frac{n}{m} = \frac{|\bar{s}| \sin \alpha}{|\bar{s}| \cos \alpha} = \operatorname{tg} \alpha \right| \Rightarrow y - y_0 = \operatorname{tg} \alpha \cdot (x - x_0). \end{aligned}$$

Остаточно маємо:

$$y - y_0 = k \cdot (x - x_0), \quad (3.1.9)$$

де $k = \operatorname{tg} \alpha$ – **кутовий коефіцієнт** прямої, який і визначає її напрям.

Рівняння (3.1.9) називають також **рівнянням жмутка (зв'язки) прямих з центром** $M_0(x_0, y_0)$. Така назва пояснюється тим, що при заданій (фіксованій) точці M_0 , змінюючи довільним чином у рівнянні (3.1.9) значення параметра k – кутового коефіцієнта, – ми зможемо отримати будь-яке число прямих (навіть нескінченно багато!), які проходять через точку $M_0(x_0, y_0)$. Найпростішим рівнянням зв'язки прямих є рівняння $y = kx$. (Де знаходиться центр такого жмутка?)

4°. Рівняння прямої з кутовим коефіцієнтом.

Задача 3.1.4. Скласти рівняння прямої, яка нахилена до осі Ox під кутом α і відтинає на осі Oy відрізок величиною b (рис. 3.1.5).

Розв'язок отримуємо як наслідок із (3.1.9), якщо в якості x_0 , y_0 взяти координати точки $B(0, b)$ (див. рис. 3.1.5):

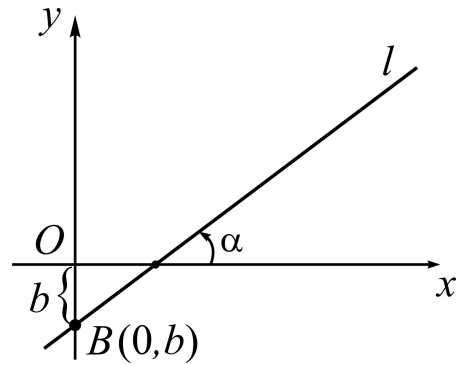


Рис. 3.1.5. Пряма та задані кут і величина відрізка

$$\begin{aligned} y - y_0 &= k \cdot (x - x_0) \Rightarrow \left| \begin{array}{l} x_0 = 0 \\ y_0 = b \end{array} \right| \Rightarrow y - b = k \cdot x \Rightarrow \\ &\Rightarrow y = k \cdot x + b \end{aligned} \quad (3.1.10)$$

– рівняння прямої з кутовим коефіцієнтом.

Рівняння (3.1.10) добре відоме із шкільного курсу математики. (Подумайте, чому рівняннями (3.1.9), (3.1.10) не описуються прямі, перпендикулярні осі Ox .)

5°. Рівняння прямої у відрізках на осях.

Задача 3.1.5. Побудувати рівняння прямої, яка відтинає на осях координат Ox і Oy відповідно відрізки величиною a і b , тобто a (b) – абсциса (ордината) точки перетину прямої з Ox (Oy) (рис. 3.1.6).

Розв'язання. Скористуємося рівнянням (3.1.8), вибираючи в якості точок M_1 і M_2 точки $A(a, 0)$ і $B(0, b)$ (див. рис. 3.1.6):

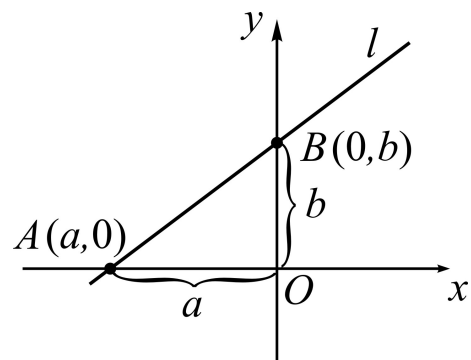


Рис. 3.1.6. Відрізки на осях

$$\frac{x-a}{0-a} = \frac{y-0}{b-0} \Rightarrow \frac{x}{-a} + 1 = \frac{y}{b} \Rightarrow \frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1 \quad (3.1.11)$$

– рівняння прямої у відрізках на осях.

6°. Нормальне рівняння прямої.

Задача 3.1.6. Відшукати рівняння прямої, якщо відстань від початку координат до прямої дорівнює p ($p > 0$), а відповідний відстані відрізок нахилений до осі Ox під кутом α (рис. 3.1.7).

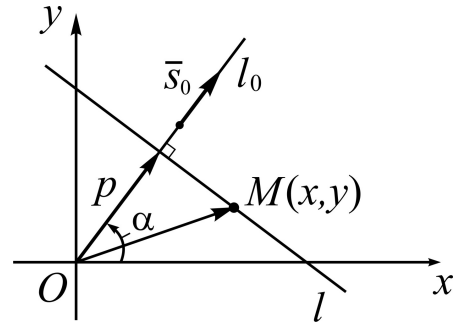


Рис. 3.1.7. Відстань p і кут нахилу α

Розв'язання. Виберемо на прямій l довільним чином точку $M(x, y)$ і введемо в розгляд вектор $\overrightarrow{OM} = (x, y)$.

Нехай l_0 – пряма з напрямним вектором $\bar{s}_0 = (\cos \alpha, \sin \alpha)$, на якій відкладено відрізок довжини p (див. рис. 3.1.7). Залучаючи скалярний добуток двох векторів (див. (2.2.5), (2.2.6)), отримуємо: з одного боку, $\overrightarrow{OM} \cdot \bar{s}_0 = x \cdot \cos \alpha + y \cdot \sin \alpha$, з іншого – $\overrightarrow{OM} \cdot \bar{s}_0 = |\bar{s}_0| \cdot \text{пр}_{l_0} \overrightarrow{OM} = p$.

Таким чином, шукане рівняння має вигляд:

$$x \cdot \cos \alpha + y \cdot \sin \alpha = p, \quad \text{або} \quad x \cdot \cos \alpha + y \cdot \sin \alpha - p = 0, \quad (3.1.12)$$

– **нормальне рівняння прямої**. (Установіть, який різновид рівняння прямої одержимо, якщо $p=0$.)

7°. Рівняння прямої із заданим нормальним вектором.

Будь-який не нульовий вектор $\bar{N} = (A, B)$, перпендикулярний до прямої, називається **нормальним вектором** цієї прямої.

Задача 3.1.7. Побудувати рівняння прямої з нормальним вектором $\bar{N} = (A, B)$, яка проходить через точку $M_0(x_0, y_0)$ (рис. 3.1.8).

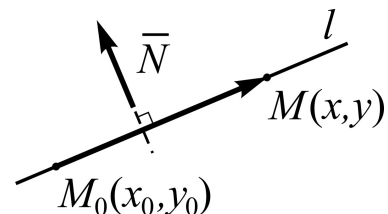


Рис. 3.1.8. Пряма, точка і нормальний вектор

Розв'язання. Візьмемо на прямій l довільну точку $M(x, y)$, відмінну від $M_0(x_0, y_0)$, і введемо в розгляд вектор $\overrightarrow{M_0M} = (x - x_0, y - y_0)$. З умови ортогональності векторів \bar{N} і $\overrightarrow{M_0M}$ (див. (2.2.8)) маємо:

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) = 0 \quad (3.1.13)$$

– рівняння прямої із заданим нормальним вектором $\overline{N} = (A, B)$.

Зауваження: якщо в (3.1.13) розкрити дужки, то отримаємо стандартний запис в символах лінійного рівняння з двома змінними:

$$Ax + By + C = 0, \quad (3.1.14)$$

де $C = -Ax_0 - By_0$ – вільний член рівняння (деяке число).

8°. Загальне рівняння прямої та його дослідження.

Вище виведено (див. задачі 3.1.1 – 3.1.7) вісім різновидів рівнянь прямих, які відрізняються за формою символічного подання, але всі вони є лінійними рівняннями відносно змінних x, y – поточних координат точок прямої. Кожне з них за допомогою елементарних тотожних перетворень можна звести до виду (3.1.14). *Наприклад,*

$$\text{а) } y = 2x - 3 \Rightarrow 2x - y - 3 = 0; \quad \text{б) } \frac{x-1}{2} = \frac{y+1}{3} \Rightarrow 3x - 2y - 5 = 0;$$

$$\text{в) } \frac{x}{-1} + \frac{y}{5} = 1 \Rightarrow 5x - y + 5 = 0.$$

Рівняння $Ax + By + C = 0$, де $A^2 + B^2 + C^2 \neq 0$, лінійне відносно змінних x і y , називається **загальним рівнянням** прямої в \mathbf{R}^2 , або рівнянням прямої у **загальному вигляді**.

Теорема 3.1.1 (про загальне рівняння прямої):

- 1) будь-яка пряма описується рівнянням (3.1.14);
- 2) кожне рівняння виду (3.1.14) визначає пряму лінію.

Д о в е д е н н я базується на рівнянні (3.1.13).

1. Довільну пряму можна описати рівнянням $A(x - x_0) + B(y - y_0) = 0$.

Звідки (див. 3.1.14) маємо: $Ax + By + C = 0$ – загальне рівняння прямої.

2. Нехай задано рівняння (3.1.14), де $A^2 + B^2 \neq 0$ (бо вектор $\overline{N} = (A, B)$ не нульовий), і покладемо $B \neq 0$. Тоді

$$Ax + By + C = 0 \Rightarrow A(x - 0) + B\left(y - \frac{-C}{B}\right) = 0. \quad (3.1.15)$$

Рівняння (3.1.15) визначає пряму, яка проходить через точку $M_0(0, -C/B)$ і має нормальний вектор $\bar{N} = (A, B)$.

Дослідження загального рівняння прямої передбачає з'ясування особливостей розташування прямої відносно координатних осей залежно від рівності (чи не рівності) нулю тих чи інших із чисел A, B, C . А саме (пропонуємо коментар до викладу навести самостійно):

1) $(A \neq 0, B \neq 0, C \neq 0) \Rightarrow Ax + By + C = 0$ – рівняння прямої загального положення;

2) $(A = 0, B \neq 0, C \neq 0) \Leftrightarrow |\bar{N} = (0, B) \perp Ox| \Rightarrow By + C = 0 \Rightarrow$
 $\Rightarrow y = -\frac{C}{B} \Rightarrow l \parallel Ox;$

3) $(A \neq 0, B = 0, C \neq 0) \Leftrightarrow |\bar{N} = (A, 0) \perp Oy| \Rightarrow Ax + C = 0 \Rightarrow$
 $\Rightarrow x = -\frac{C}{A} \Rightarrow l \parallel Oy;$ (3.1.16)

4) $(A \neq 0, B \neq 0, C = 0) \Leftrightarrow Ax + By = 0 \Rightarrow y = -\frac{A}{B}x \Rightarrow$
 $\Rightarrow O(0,0) \in l;$

5) $(A = C = 0, B \neq 0) \Leftrightarrow By = 0 \Rightarrow y = 0$ – рівняння осі Ox ;

6) $(B = C = 0, A \neq 0) \Leftrightarrow Ax = 0 \Rightarrow x = 0$ – рівняння осі Oy .

Обміркуйте, що описує рівняння при $A = B = C = 0$: $0 \cdot x + 0 \cdot y + 0 = 0$.

Основні задачі на пряму в \mathbb{R}^2

Задача 3.1.8. Дві прямі l_1 і l_2 задані загальними рівняннями:

$$\begin{aligned} A_1x + B_1y + C_1 &= 0 \quad (l_1), \\ A_2x + B_2y + C_2 &= 0 \quad (l_2). \end{aligned}$$

Установити умови: 1) перетину; 2) паралельності; в) збігу двох прямих.

Розв'язання зводиться до дослідження СЛАР 2×2 на сумісність і визначеність чи невизначеність у разі сумісності.

1. Якщо прямі перетинаються, то вони мають спільну точку і до того ж тільки одну. Це означає, що система $\begin{cases} A_1x + B_1y = -C_1 \\ A_2x + B_2y = -C_2 \end{cases}$ сумісна і має єдиний розв'язок. Отже, за правилом Крамера визначник системи Δ відмінний від нуля:

$$\Delta = \begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix} = A_1B_2 - B_1A_2 \neq 0 \Rightarrow \frac{A_1}{A_2} \neq \frac{B_1}{B_2} \quad (3.1.17)$$

– **умова перетину** прямих.

2. Якщо прямі паралельні, то вони не мають спільних точок. Це означає, що система несумісна. Тоді $\Delta = 0$ і за теоремою Кронекера – Капеллі ранги основної і розширеної матриць системи не рівні між собою: існують мінори другого порядку зі стовпцем вільних членів, відмінні від нуля, тобто $C_1B_2 \neq B_1C_2$ і $A_1C_2 \neq C_1A_2$. Отже:

$$\left(\begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix} \mid \begin{vmatrix} C_1 \\ C_2 \end{vmatrix} \right) \Rightarrow \left(\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} \wedge \frac{B_1}{B_2} \neq \frac{C_1}{C_2} \wedge \frac{A_1}{A_2} \neq \frac{C_1}{C_2} \right) \Rightarrow \frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} \neq \frac{C_1}{C_2} \quad (3.1.18)$$

– **умова паралельності** двох прямих.

3. Якщо прямі збігаються, то вони мають безліч спільних точок. Це означає, що система сумісна і невизначена. Отже, всі мінори 2-го порядку рівні нулеві і тоді

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2} \quad (3.1.19)$$

– **умова збігу** двох прямих.

Співвідношення (3.1.17) – (3.1.19) можна стлумачити як критерії відповідного взаємного розташування прямих на площині (чому?). *Наведіть самостійно словесні формулювання цих тверджень.*

У контексті попередньої задачі постає питання: якщо прямі перетинаються, то який кут вони утворюють між собою?

Під **кутом між двома прямими**, які описуються загальними рівняннями, природно розуміти один із двох суміжних кутів між їхніми нормаль-

ними векторами (бо кути зі взаємно перпендикулярними сторонами рівні або в сумі складають розгорнутий кут).

Задача 3.1.9. Знайти кут між двома прямими:

$$A_1x + B_1y + C_1 = 0 \quad (l_1), \quad A_2x + B_2y + C_2 = 0 \quad (l_2).$$

Розв'язання базується на формулі (2.2.7) кута між векторами $\vec{N}_1 = (A_1, B_1)$ і $\vec{N}_2 = (A_2, B_2)$ (рис. 3.1.9):

$$\begin{aligned} \cos \varphi &= \cos(\vec{N}_1 \wedge \vec{N}_2) = \frac{\vec{N}_1 \cdot \vec{N}_2}{N_1 \cdot N_2} = \\ &= \frac{A_1A_2 + B_1B_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2} \cdot \sqrt{A_2^2 + B_2^2}} \Rightarrow \end{aligned}$$

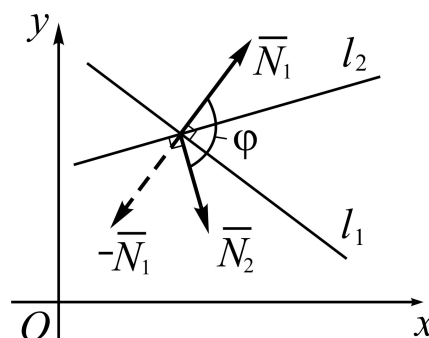


Рис. 3.1.9. Кут між двома прямими

$$\Rightarrow \varphi = \arccos(\cos \varphi) = \arccos \frac{A_1A_2 + B_1B_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2} \cdot \sqrt{A_2^2 + B_2^2}}, \quad 0 \leq \varphi \leq \pi. \quad (3.1.20)$$

Якщо нормальні вектори \vec{N}_1 і \vec{N}_2 складають тупий кут (див. рис. 3.1.9), то і кут між прямими визначатиметься тупий; якщо ж в якості нормального вектора прямої l_1 вибрати вектор $-\vec{N}_1$, то φ – гострий кут.

Із (3.1.20) згідно з (2.2.8) отримуємо **умову ортогональності** прямих:

$$l_1 \perp l_2 \Leftrightarrow \varphi = \pi/2 \Leftrightarrow \cos \varphi = 0 \Leftrightarrow A_1A_2 + B_1B_2 = 0. \quad (3.1.21)$$

Співвідношення (3.1.17) – (3.1.21) без змін переносяться на випадок опису прямих рівняннями виду (3.1.13).

Оскільки кожне з рівнянь, наведених в 1⁰ – 6⁰, допускає зображення у загальному вигляді, то формули (3.1.17) – (3.1.21) можна записати через параметри відповідного різновиду рівняння прямої.

Задача 3.1.10. Знайти кут між двома прямими, умови паралельності і перпендикулярності прямих, рівняння яких наведені в 1⁰ – 6⁰.

Розв'язання проведемо таким чином: здійснимо перехід від рівняння „спеціального” виду (із 1⁰ – 6⁰) до рівняння загального вигляду (тим

самим визначимо координати нормального вектора через параметри вихідного рівняння), а потім скористаємось формулами (3.1.19) – (3.1.21).

$$1^0. \frac{x-x_0}{m} = \frac{y-y_0}{n} \Rightarrow nx - my + (my_0 - nx_0) = 0 \Rightarrow \bar{N} = (n, -m) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \cos \varphi = \frac{m_1 m_2 + n_1 n_2}{\sqrt{m_1^2 + n_1^2} \cdot \sqrt{m_2^2 + n_2^2}} \Rightarrow \begin{cases} l_1 \parallel l_2 \Leftrightarrow \frac{m_1}{m_2} = \frac{n_1}{n_2} \\ l_1 \perp l_2 \Leftrightarrow m_1 m_2 + n_1 n_2 = 0. \end{cases} \quad (3.1.22)$$

Відзначимо: щоб за відомим напрямним вектором прямої $\bar{s} = (m, n)$ установити один із нормальних векторів, треба поміняти місцями його координати і одну з них взяти з протилежним знаком, тобто покласти $\bar{N} = (n, -m)$ або $\bar{N} = (-n, m)$.

У випадку одиничного напрямного вектора $\bar{s}_0 = (\cos \alpha, \sin \alpha)$ матимемо $\bar{N} = (\sin \alpha, -\cos \alpha)$ або $\bar{N} = (-\sin \alpha, \cos \alpha)$ і тоді:

$$\cos \varphi = \cos \alpha_1 \cos \alpha_2 + \sin \alpha_1 \sin \alpha_2 = \cos(\alpha_1 - \alpha_2) \Rightarrow \varphi = \pm(\alpha_1 - \alpha_2) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} l_1 \parallel l_2 \Leftrightarrow \frac{\cos \alpha_1}{\cos \alpha_2} = \frac{\sin \alpha_1}{\sin \alpha_2} \Leftrightarrow \sin(\alpha_1 - \alpha_2) = 0 \Leftrightarrow (\alpha_1 - \alpha_2 \in \{0, \pi\}) \\ l_1 \perp l_2 \Leftrightarrow \cos(\alpha_1 - \alpha_2) = 0 \Leftrightarrow \alpha_1 - \alpha_2 = \pm \pi/2. \end{cases} \quad (3.1.23)$$

$$2^0. \frac{x-x_1}{\underbrace{x_2-x_1}_m} = \frac{y-y_1}{\underbrace{y_2-y_1}_n} \Rightarrow nx - my + (my_1 - nx_1) = 0 \Rightarrow \bar{N} = (n, -m).$$

Порівняно з (3.1.22) принципово нового нічого не отримали, тільки додається „арифметики” для відшукування m і n .

$$3^0. y - y_0 = k(x - x_0) \Rightarrow kx - y + (y_0 - kx_0) = 0 \Rightarrow \bar{N} = (k, -1) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \cos \varphi = \frac{k_1 k_2 + 1}{\sqrt{k_1^2 + 1} \cdot \sqrt{k_2^2 + 1}} \Rightarrow \begin{cases} l_1 \parallel l_2 \Leftrightarrow k_1 = k_2 \\ l_1 \perp l_2 \Leftrightarrow k_1 k_2 + 1 = 0, \end{cases} \quad (3.1.24)$$

де $k = \operatorname{tg} \varphi$, $k_1 = \operatorname{tg} \alpha_1$, $k_2 = \operatorname{tg} \alpha_2$.

$$4^0. y = kx + b \Rightarrow kx - y + b = 0 \Rightarrow \bar{N} = (k, -1) \Rightarrow \cos \alpha \cdot \bar{N} = (\sin \alpha, -\cos \alpha).$$

Таким чином приходимо до співвідношень (3.1.23), які через кутові коефіцієнти для кута між прямими дають відмінну від (3.1.24) формулу:

$$\varphi = \pm(\alpha_1 - \alpha_2) \Rightarrow \operatorname{tg} \varphi = \pm \operatorname{tg}(\alpha_1 - \alpha_2) \Rightarrow \operatorname{tg} \varphi = \pm \frac{k_1 - k_2}{1 + k_1 k_2}, \quad (3.1.25)$$

а умови паралельності і перпендикулярності такі, як у (3.1.24).

$$5^0. \frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1 \Rightarrow bx + ay - ab = 0 \Rightarrow \bar{N} = (b, a) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \cos \varphi = \frac{a_1 a_2 + b_1 b_2}{\sqrt{a_1^2 + b_1^2} \cdot \sqrt{a_2^2 + b_2^2}} \Rightarrow \begin{cases} l_1 \parallel l_2 \Leftrightarrow \frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} \\ l_1 \perp l_2 \Leftrightarrow a_1 a_2 + b_1 b_2 = 0. \end{cases} \quad (3.1.26)$$

$$6^0. \cos \alpha \cdot x + \sin \alpha \cdot y - p = 0 \Rightarrow (\bar{N} = (\cos \alpha, \sin \alpha), |\bar{N}| = 1) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \cos \varphi = \cos(\alpha_1 - \alpha_2) \Rightarrow \begin{cases} l_1 \parallel l_2 \Leftrightarrow \frac{\cos \alpha_1}{\cos \alpha_2} = \frac{\sin \alpha_1}{\sin \alpha_2} \\ l_1 \perp l_2 \Leftrightarrow \cos(\alpha_1 - \alpha_2) = 0. \end{cases} \quad (3.1.27)$$

Як бачимо, приходимо до вже розглянутого випадку в 1^0 . (Пропонуємо для всіх співвідношень (3.1.22) – (3.1.27) дати словесні формулювання.)

У задачі 3.1.10 здійснювався перехід від рівнянь спеціального виду до загального рівняння прямої. Не важко зробити і зворотний перехід.

Наприклад,

$$Ax + By + C = 0 \Rightarrow |B \neq 0| \Rightarrow y = -\frac{A}{B}x - \frac{C}{B} \Rightarrow y = kx + b. \quad (3.1.28)$$

Отже, отримали рівняння прямої з кутовим коефіцієнтом, де $k = -A/B$ – кутовий коефіцієнт ($k = \operatorname{tg} \alpha = \operatorname{tg}(l \wedge Ox)$), $b = -C/B$ – ордината точки перетину l з Oy .

Задача 3.1.11. За заданим загальним рівнянням прямої знайти її рівняння у нормальному вигляді.

Розв'язання зводиться до переходу у рівнянні $Ax + By + C = 0$ від нормального вектора $\bar{N} = (A, B)$ до одиничного вектора $\bar{N}_0 = (\cos \alpha, \sin \alpha)$,

такого, щоб у нормальному рівнянні $\cos \alpha \cdot x + \sin \alpha \cdot y - p = 0$ параметр p був додатний ($p > 0$), тобто вільний член – від'ємний.

Для цього треба зменшити довжину вектора в $N = \sqrt{A^2 + B^2}$ разів і установити згідно з умовою $p > 0$ відповідний напрям, беручи N зі знаком „плюс” (+) чи „мінус” (–):

$$\begin{aligned}\bar{N}_0 = (\cos \alpha, \sin \alpha) &= \frac{1}{\pm N} \cdot \bar{N} = \left(\frac{A}{\pm N}, \frac{B}{\pm N} \right) \Rightarrow \\ \Rightarrow \cos \alpha &= \frac{A}{\pm N}, \quad \sin \alpha = \frac{B}{\pm N}.\end{aligned}\quad (3.1.29)$$

Помножимо ліву і праву частини загального рівняння на число $\frac{1}{\pm N}$, тоді отримаємо:

$$\frac{A}{\pm N}x + \frac{B}{\pm N}y + \frac{C}{\pm N} = 0 \Rightarrow \cos \alpha \cdot x + \sin \alpha \cdot y - p = 0, \quad (3.1.30)$$

де $p = \frac{-C}{\pm N}$ повинно бути додатним.

За цієї умови знак дробу $\frac{1}{\pm N}$ береться протилежним знакові вільного члена C загального рівняння (*обміркуйте*).

Число $\frac{1}{\pm N}$ з певним знаком називається **нормувальним множником** M загального рівняння прямої:

$$M = \begin{cases} 1/N, & \text{якщо } C < 0, \\ -1/N, & \text{якщо } C > 0. \end{cases} \quad (3.1.31)$$

Приклад. Здійснити перехід від загального рівняння прямої $2x - 3y + 5 = 0$ до рівняння у нормальному вигляді.

Розв'язання.

1. Знаходимо модуль нормального вектора $\bar{N} = (2, -3)$ і нормувальний множник. Вільний член $C = 5 > 0$, отже, $M = \frac{-1}{N} = \frac{-1}{\sqrt{2^2 + (-3)^2}} = \frac{-1}{\sqrt{13}}$.

2. Здійснюємо нормування загального рівняння, помножаючи ліву і праву частини рівняння на M :

$$-\frac{2}{\sqrt{13}}x + \frac{3}{\sqrt{13}}y - \frac{5}{\sqrt{13}} = 0$$

– нормальне рівняння прямої з нормальним вектором $\vec{N}_0 = \left(\frac{-2}{\sqrt{13}}, \frac{3}{\sqrt{13}} \right)$,

відстань до якої від початку координат дорівнює $p = 5/\sqrt{13}$.

Задачу можна було розв'язати інакше: після обчислення M згідно з (3.1.29), (3.1.30) знайти: $\cos \alpha = A \cdot M$, $\sin \alpha = B \cdot M$, $p = -C \cdot M$.

Відстань від прямої до початку координат визначається вільним членом її нормального рівняння. А як знайти відстань від довільної точки до заданої прямої?

Задача 3.1.12. Знайти відстань d від точки $M_0(x_0, y_0)$ до прямої, яка описується рівнянням $\cos \alpha \cdot x + \sin \alpha \cdot y - p = 0$.

Розв'язання. Виберемо на прямій довільним чином точку $M(x, y)$ (рис. 3.1.10), введемо в розгляд вектор $\vec{M_0M} = (x - x_0, y - y_0)$ і знайдемо (див. (2.2.5)) скалярний добуток векторів $\vec{M_0M}$ і $\vec{N}_0 = (\cos \alpha, \sin \alpha)$:

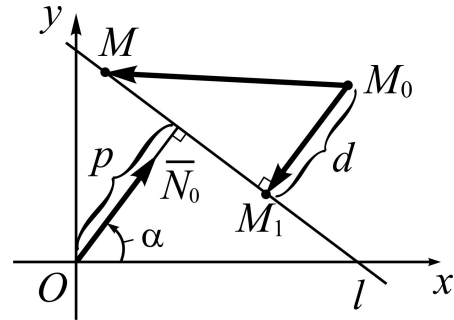


Рис. 3.1.10. Відстань від точки до прямої

$$\begin{aligned} \vec{M_0M} \cdot \vec{N}_0 &= N_0 \cdot \text{пр}_{N_0} \vec{M_0M} = \\ &= \text{пр}_{N_0} \vec{M_0M}, \text{ бо } N_0 = 1. \end{aligned}$$

$$\text{Але } \left| \text{пр}_{N_0} \vec{M_0M} \right| = \left| \vec{M_0M_1} \right| = d \text{ (див. рис. 3.1.10).}$$

Отже, відстань d дорівнює модулю скалярного добутку векторів $\vec{M_0M}$ і \vec{N}_0 :

$$\begin{aligned} d &= \left| \vec{M_0M} \cdot \vec{N}_0 \right| = \left| (x - x_0) \cos \alpha + (y - y_0) \sin \alpha \right| = \\ &= \left| x \cos \alpha + y \sin \alpha - (x_0 \cos \alpha + y_0 \sin \alpha) \right|. \end{aligned}$$

Оскільки для будь-якої точки прямої $\cos \alpha \cdot x + \sin \alpha \cdot y = p$, то остаточно отримаємо:

$$d = \left| x_0 \cos \alpha + y_0 \sin \alpha - p \right|. \quad (3.1.32)$$

Правило: щоб обчислити відстань від точки до прямої, заданої нормальним рівнянням, треба у ліву частину рівняння замість поточних координат x і y підставити координати заданої точки і взяти за модулем отримане число.

Якщо пряма описується загальним рівнянням $Ax + By + C = 0$, то, зважаючи на (3.1.30), отримуємо (обміркуйте):

$$d = \left| \frac{Ax_0 + By_0 + C}{\sqrt{A^2 + B^2}} \right|. \quad (3.1.33)$$

Знайдемо, *наприклад*, відстань від точки $M_0(2,7)$ до прямої $3x + 7y - 9 = 0$:

$$d = \left| \frac{3 \cdot 2 + 7 \cdot 7 - 9}{\sqrt{3^2 + 7^2}} \right| = \frac{46}{\sqrt{58}} \approx 6,0 \text{ (лін. од.)}.$$

На останок розв'яжемо задачу на відшукування рівняння г. м. т.

Задача 3.1.13. Знайти рівняння г. м. т, рівновіддалених від двох прямих $A_1x + B_1y + C_1 = 0$ (l_1) і $A_2x + B_2y + C_2 = 0$ (l_2).

(Інакше: знайти рівняння бісектрис кутів, утворених двома прямими l_1 і l_2 .)

Розв'язання ґрунтується на формулі відстані від точки до прямої.

Позначимо поточні координати точок бісектриси через X , Y і виберемо на ній довільну точку $M(X, Y)$ (рис. 3.1.11).

За умовою задачі відстані d_1 і d_2 рівні між собою, тому на підставі (3.1.33) маємо:

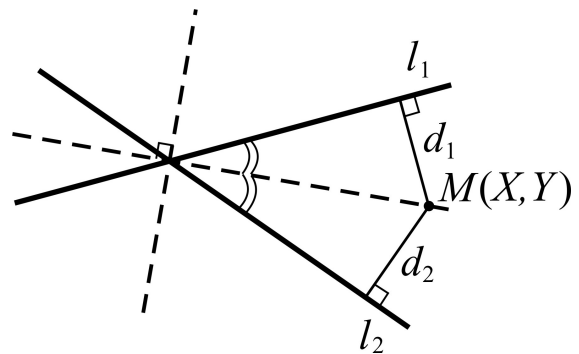


Рис. 3.1.11. Бісектриси кутів між прямими

$$\frac{1}{N_1} |A_1X + B_1Y + C_1| = \frac{1}{N_2} |A_2X + B_2Y + C_2|,$$

де $N_1 = \sqrt{A_1^2 + B_1^2}$, $N_2 = \sqrt{A_2^2 + B_2^2}$.

Знімаючи символи модулів, отримаємо, як і годиться, два рівняння:

$$\begin{aligned}\frac{1}{N_1}|A_1X + B_1Y + C_1| &= \frac{1}{N_2}|A_2X + B_2Y + C_2|, \\ \frac{1}{N_1}|A_1X + B_1Y + C_1| &= -\frac{1}{N_2}|A_2X + B_2Y + C_2|.\end{aligned}\tag{3.1.34}$$

Запишіть самостійно рівняння бісектрис кутів між прямими, які описуються нормальними рівняннями.

Приклад. Написати рівняння бісектрис кутів, утворених прямими: $3x + 2y - 1 = 0$ (l_1), $4x - 6y - 19 = 0$ (l_2).

Розв'язання. Згідно з (3.1.34) знаходимо модулі нормальних векторів і записуємо рівняння бісектрис, повертаючись до позначення координат поточних точок бісектрис малими буквами:

$$\begin{aligned}(N_1 = \sqrt{13}, N_2 = 2\sqrt{13}) &\Rightarrow \\ \Rightarrow \begin{cases} 3x + 2y - 1 = 2x - 3y - 9,5 \Rightarrow x + 5y + 8,5 = 0 \\ 3x + 2y - 1 = -2x + 3y + 9,5 \Rightarrow 5x - y - 10,5 = 0. \end{cases}\end{aligned}$$

Викладених відомостей про пряму достатньо для того, щоб описати елементи і числові характеристики більш складних геометричних фігур – многокутників, сторонами яких є відрізки прямих. Для успішного розв'язання відповідних задач (у тому числі застосовного характеру) необхідно вільно володіти обсягом знань щодо різновидів рівнянь прямої і чітким розумінням смислу кожного елемента символічного зображення прямої – її рівняння. Підсумок розглянутого подамо у вигляді таблиці (табл. 3.1.1).

Таблиця 3.1.1

Різновиди рівнянь прямої в \mathbb{R}^2

№	Назва	Символічний запис	Опис складових: змінних*, параметрів, констант
1	2	3	4
1	Канонічне рівняння прямої	$\frac{x - x_0}{m} = \frac{y - y_0}{n}$	(x_0, y_0) – точка, через яку проходить пряма; m, n – координати напрямного вектора прямої

Закінчення табл. 3.1.1

1	2	3	4
2	Параметричні рівняння прямої	$\begin{cases} x = x_0 + mt \\ y = y_0 + nt \end{cases}$	(x_0, y_0) – точка, що належить прямій; $\vec{s} = (m, n)$ – напрямний вектор прямої
3	Рівняння прямої, що проходить через дві задані точки	$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1}$	$(x_1, y_1), (x_2, y_2)$ – точки, через які проходить пряма
4	Рівняння прямої, що проходить через дану точку у заданому напрямі	$y - y_0 = k(x - x_0)$	(x_0, y_0) – точка, що належить прямій; $k = \operatorname{tg} \alpha$ – кутовий коефіцієнт, де $\alpha = l^\wedge Ox$
5	Рівняння прямої з кутовим коефіцієнтом	$y = kx + b$	k – кутовий коефіцієнт; b – ордината точки перетину прямої з Oy
6	Рівняння прямої у відрізках на осях	$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$	a, b – величини відрізків, які пряма відтинає на Ox, Oy
7	Нормальне рівняння прямої	$x \cos \alpha + y \sin \alpha - p = 0$	p – відстань прямої до початку координат; α – кут нахилу відповідного відрізка до Ox
8	Рівняння прямої із заданим нормальним вектором	$A(x - x_0) + B(y - y_0) = 0$	A, B – координати нормального вектора; (x_0, y_0) – точка, що належить прямій
9	Загальне рівняння прямої: 1) загального положення; 2) паралельної осі Ox (перпендикулярної Oy); 3) паралельної осі Oy (перпендикулярної Ox); 4) що проходить через начало координат; 5) що збігається з Ox ; 6) що збігається з Oy	$Ax + By + C = 0$ $By + C = 0 \Rightarrow y = -\frac{C}{B}$ $Ax + C = 0 \Rightarrow x = -\frac{C}{A}$ $Ax + By = 0 \Rightarrow y = -\frac{A}{B}x$ $By = 0 \Rightarrow y = 0$ $Ax = 0 \Rightarrow x = 0$	A, B – координати нормального вектора – коефіцієнти при невідомих, C – вільний член

* **Примітка:** в усіх рівняннях x, y – змінні (поточні) координати точок прямої.

Рівняння прямої як математична модель економічних задач

Задача 3.1.14 (про прості відсотки). Громадянин здійснює вклад заощаджень у банк під **прості відсотки** – проценти, що нараховуються лише на **вихідну**, або **основну**, суму грошей. Яка сума підлягає виплаті вкладнику через декілька: а) років, б) місяців, в) днів?

Розв'язання:

а) введемо позначення величин, про які йдеться в умові задачі:

S_0 – початкова (вихідна, основна) сума внеску;

$p\%$ – відсотки, які нараховуються за рік (*ставка* простих відсотків);

t – кількість років, за які нараховується простий відсоток;

S_t – сума, яка підлягає виплаті вкладнику через t років.

За умовою задачі за один рік вклад збільшиться на суму $S_0 \cdot \frac{p}{100}$, тоді через t років нарахування складатимуть суму в t разів більшу.

Отже,

$$S_t = S_0 + S_0 \frac{p}{100} t = S_0 \left(1 + \frac{p}{100} t \right), \quad (3.1.35)$$

де множник $\left(1 + \frac{p}{100} t \right)$ називають **коефіцієнтом нарощування** суми простих процентів, а співвідношення (3.1.35) – **формулою простих відсотків**. (Пропонуємо самостійно розв'язати задачі б), в), зважаючи на те, що рік – це 12 місяців, а місяць складають 30 днів.)

Формула простих відсотків містить дві змінні величини (t, S_t) , два числові параметри (S_0, p) , сталу (100), і являє собою лінійну залежність між часом нарахування простих відсотків t та сумою S_t , яка підлягає виплаті. Її можна записати як рівняння прямої з кутовим коефіцієнтом $(y = kx + b)$, а саме:

$$S_t = \left(S_0 \frac{p}{100} \right) \cdot t + S_0.$$

(Укажіть, яка величина є кутовим коефіцієнтом.)

Чергова задача потребує введення деяких економічних понять, пов'язаних з товарним ринком:

попит – потреба у товарах ринку з боку покупців, а **пропозиція** – представлена на ринку можливість придбати товар;

закон попиту – закон, згідно з яким зниження ціни зумовлює відповідне зростання величини попиту, і навпаки;

закон попиту та пропозиції – ціна будь-якого товару змінюється, щоб врівноважити попит (обсягу Q_d) і пропозицію (обсягу Q_s);

рівновага товарного ринку – стан ринку, коли для продажу пропонується така кількість товару, яку споживач готовий купити;

рівноважна ціна P^* – ціна, яка врівноважує попит і пропозицію;

рівноважний обсяг Q^* – обсяг пропозиції та обсяг попиту в умовах, коли врівноважується попит і пропозиція; якщо попит на товар перевищує пропозицію товару, виникає **дефіцит пропозиції**, або **надлишковий попит**; якщо попит на товар менший за пропозицію товару, виникає **надлишок пропозиції**, або **дефіцит попиту**.

Економічну модель, що описує процес ціноутворення на ринку, називають моделлю „попит-пропозиція”.

Найпростіший випадок математичної моделі отримуємо у разі лінійної залежності обсягів попиту і пропозиції від ціни товару і навпаки. На рис. 3.1.12 схематично відтворено пряму попиту d , пряму пропозиції s , точку рівноваги (Q^*, P^*) .

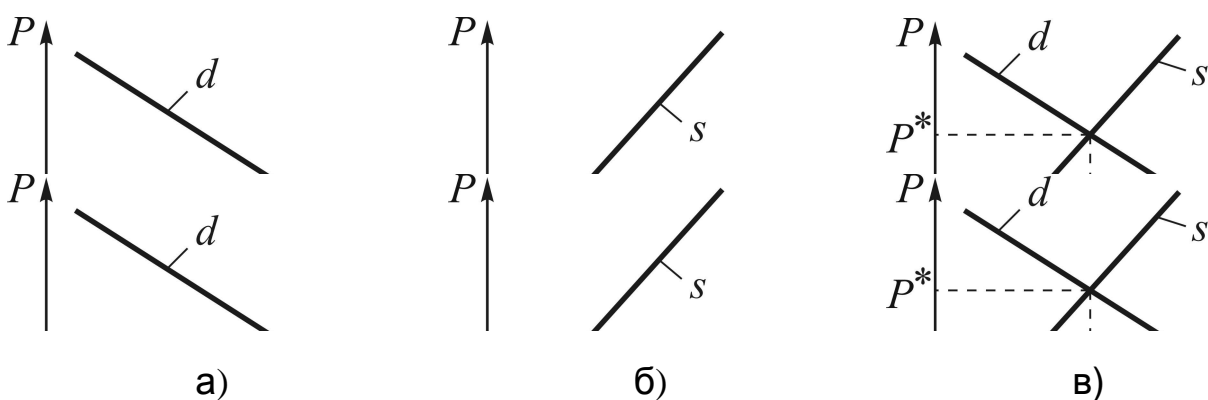


Рис. 3.1.12. Модель „попит-пропозиція”: а) пряма попиту;
б) пряма пропозиції; в) точка рівноваги

Задача 3.1.15 (про попит і пропозицію). За даними табл. 3.1.2 знайти точку рівноваги товарного ринку.

Таблиця 3.1.2

Вихідні дані для побудови моделі „попит-пропозиція”

Ціна, грн	2,0	2,5	3,0	3,5	4,0
Обсяг попиту, тис. кг	250	230	210	190	170
Обсяг пропозиції, тис. кг	200	210	220	230	240

Розв’язання задачі зводиться до відшукування точки перетину двох прямих.

Для запису рівнянь прямих попиту та пропозиції скористаємось рівнянням прямої, яка проходить через дві точки (див. (3.1.8)).

Рівняння прямої попиту:

$$\frac{P-2}{4-2} = \frac{Q_d-250}{170-250} \Rightarrow Q_d = -40P + 330.$$

Рівняння прямої пропозиції:

$$\frac{P-2}{4-2} = \frac{Q_s-200}{240-200} \Rightarrow Q_s = 20P + 160.$$

Розв’язуємо систему двох рівнянь з двома невідомими за умови, що $Q_d = Q_s = Q$:

$$\begin{cases} Q = -40P + 330 \\ Q = 20P + 160 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} P^* = 2,8(3) \\ Q^* = 183,(3). \end{cases}$$

Відповідь. Рівноважні ціна $P^* = 2,8(3)$ і обсяг $Q^* = 183,(3)$.

При $P = 2,5$ попит на товар – $Q_d = -40 \cdot 2,5 + 330 = 230$ – перевищує пропозицію $Q_s = 20 \cdot 2,5 + 160 = 210$. Отже, на ринку має місце *товарний дефіцит*. (Пропонуємо самостійно зобразити прямі попиту і пропозиції.)

3.2. Криві другого порядку (К2П)

Загальне рівняння кривої другого порядку, різновиди кривих.

Загальне рівняння кола

Під поняттям „крива лінія”, або просто „крива”, слід розуміти лінію, яка не є прямою. **Кривою другого порядку** називається лінія, яка описується рівнянням

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0, \quad (3.2.1)$$

де x, y – змінні – **поточні координати** точок лінії;

A, B, C, D, E, F – задані дійсні числа – **коефіцієнти** при змінних і **вільний член** F ; при цьому числа A, B, C одночасно не рівні нулеві (чому?): $A^2 + B^2 + C^2 \neq 0$.

Рівняння (3.2.1) називають **загальним рівнянням К2П**. За певних умов стосовно коефіцієнтів при змінних і вільного члена воно описує одну із чотирьох, знайомих зі школи, кривих: *коло, еліпс, гіперболу, параболу*. (Часто коло розглядають як окремий випадок еліпса).

Може трапитись і таке, що не існує точок (x, y) з дійсними координатами, які задовольняють рівняння (3.2.1). У цьому випадку кажуть, що рівняння визначає **уявну К2П**. *Наприклад*, рівняння $x^2 + y^2 + 5 = 0$, або $x^2 + y^2 = -5$, визначає уявне коло.

Крім того, зустрічаються **випадки виродження К2П** у прямі або точку. *Наприклад*: $x^2 + y^2 = 0$ – рівняння точки $(0,0)$; $x^2 - a^2 = 0$ ($a \geq 0$) – рівняння паралельних або збіжних прямих; $x^2 - y^2 = 0$ – рівняння прямих, що перетинаються ($y = x, y = -x$).

Дослідженнями рівняння (3.2.1), чого робити не будемо, встановлено:

1) $AC - B^2 > 0 \Rightarrow$ „(3.2.1) описує *еліпс* (коло при $A = C$ і $B = 0$), точку або уявну криву”;

2) $AC - B^2 < 0 \Rightarrow$ „(3.2.1) є рівнянням *гіперболи* або пари (*) прямих, що перетинаються”;

3) $AC - B^2 = 0 \Rightarrow$ „(3.2.1) визначає *параболу*, пару паралельних прямих або уявну криву”.

Відповідно до випадків 1), 2), 3) кажуть, що (*) визначає **умови належності рівняння (3.2.1) до еліптичного, гіперболічного, параболічного типу**.

Загальне рівняння К2П при $A = C$ і $B = 0$, тобто рівняння

$$Ax^2 + Ay^2 + Dx + Ey + F = 0, \quad (3.2.2)$$

називається **загальним рівнянням кола**.

Задача 3.2.1. Здійснити перехід від загального рівняння кола до його канонічного рівняння: $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = R^2$.

Розв'язання зводиться до тотожних перетворень лівої частини (3.2.2), пов'язаних з виділенням повних квадратів двочленів, як того вимагає (3.1.2) (*прослідкуйте і наведіть коментар*):

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 + \frac{D}{A}x + \frac{E}{A}y + \frac{F}{A} = 0 &\Rightarrow \begin{cases} D/A = 2a \\ E/A = 2b \\ F/A = c \end{cases} \Rightarrow (x^2 + 2ax) + \\ &+ (y^2 + 2by) + c = 0 \Rightarrow (x + a)^2 - a^2 + (y + b)^2 - b^2 + c = 0 \Rightarrow \\ &\Rightarrow (x + a)^2 + (y + b)^2 = a^2 + b^2 - c \Rightarrow (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = R^2, \end{aligned} \quad (3.2.3)$$

де $x_0 = -a$, $y_0 = -b$, $R = \sqrt{a^2 + b^2 - c}$.

Зауваження:

1) із нерівності $a^2 + b^2 - c > 0$ знаходимо умову, за якої (3.2.2) описує невироджене коло: $D^2 + E^2 - 4AF > 0$;

2) перехід від канонічного рівняння кола до загального не викликає труднощів: досить розкрити дужки у (3.1.2), перенести R^2 у ліву частину рівняння і звести подібні члени (*проробіть це самостійно*).

Розглянемо *приклад* зведення (3.2.2) до (3.1.2):

$$\begin{aligned} 3x^2 + 3y^2 + 6x - 7y + 3 = 0 &\Rightarrow x^2 + y^2 + 2x - \frac{7}{3}y + 1 = 0 \Rightarrow \\ &\Rightarrow (x+1)^2 + \left(y - \frac{7}{6}\right)^2 - \frac{49}{36} = 0 \Rightarrow (x+1)^2 + \left(y - \frac{7}{6}\right)^2 = \frac{49}{36} \quad - \text{рівняння кола} \\ &\text{радіуса } R = 7/6 \text{ з центром у точці } (x_0, y_0) = (-1, 7/6). \end{aligned}$$

Канонічні рівняння еліпса, гіперболи, параболи

І. **Еліпсом** називається геометричне місце точок, сума відстаней яких до двох заданих точок (фокусів) є величиною сталою.

Задача 3.2.2. Вивести рівняння еліпса з фокусами у точках $F_1(-c,0)$, $F_2(c,0)$, а сума відстаней точок еліпса до фокусів дорівнює $2a$.

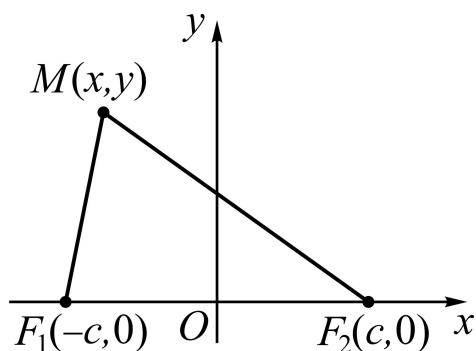


Рис. 3.2.1. Фокуси і довільна точка кривої

Розв'язання. Виберемо на площині систему координат xOy і нехай $M(x, y)$ – довільна точка еліпса (рис. 3.2.1). Тоді згідно з означенням $F_1M + F_2M = 2a$.

За формулою відстані між двома точками маємо:

$$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} + \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = 2a,$$

або

$$\sqrt{(x-c)^2 + y^2} = 2a - \sqrt{(x+c)^2 + y^2}. \quad (3.2.4)$$

Далі позбавляємось від ірраціональності (піднесенням до квадрата обох частин (3.2.4)) і спрощуємо рівняння:

$$\begin{aligned} (x-c)^2 + y^2 &= 4a^2 - 4a\sqrt{(x+c)^2 + y^2} + (x+c)^2 + y^2 \Rightarrow \\ &\Rightarrow 4a\sqrt{(x+c)^2 + y^2} = 4a^2 + 4cx \Rightarrow \\ &\Rightarrow a^2(x^2 + 2cx + c^2 + y^2) = a^4 + 2a^2cx + c^2x^2 \Rightarrow \\ &\Rightarrow a^2x^2 + a^2c^2 + a^2y^2 = a^4 + c^2x^2 \Rightarrow \\ &\Rightarrow (a^2 - c^2)x^2 + a^2y^2 = a^2(a^2 - c^2) \Rightarrow \left| \begin{array}{l} \text{покладаємо} \\ a^2 - c^2 = b^2 \end{array} \right| \Rightarrow \\ &\Rightarrow b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2 \Rightarrow \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1. \end{aligned} \quad (3.2.5)$$

Рівняння (3.2.5) називається **канонічним рівнянням еліпса**.

Оскільки $2a > 2c$ (бо сума двох сторін трикутника більше третьої сторони), тому позначення $a^2 - c^2$ через b^2 коректне.

Аналізуючи рівняння (3.2.5), робимо **висновки**:

1) еліпс симетричний відносно осей координат, бо рівняння містить тільки квадрати поточних координат x і y ; отже, координатні осі є **осями симетрії** еліпса; вісь симетрії, на якій лежать фокуси, називається **фокальною віссю**; точку перетину осей симетрії називають **центром симетрії**, або **центром** еліпса;

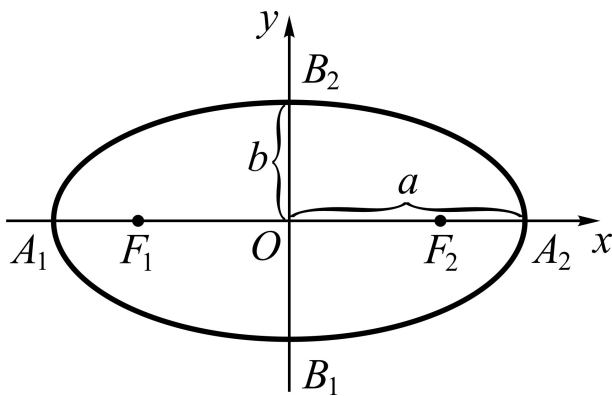


Рис. 3.2.2. Еліпс

2) крива перетинає координатні осі у точках – **вершинах** еліпса – з абсцисами $x = \pm a$ і з ординатами $y = \pm b$: $A_1(-a, 0)$, $A_2(a, 0)$, $B_1(0, -b)$, $B_2(0, b)$ (рис. 3.2.2); відрізки A_1A_2 і B_1B_2 , що з'єднують протилежні вершини еліпса, а також їхні довжини $2a$ і $2b$, називають відповідно **великою** і **малою осями** еліпса; довжини a і b – **великою** і **малою пів-осями**;

3) в силу симетрії еліпса достатньо дослідити форму кривої для $x \geq 0$ і $y \geq 0$: із (3.2.5) $y = \frac{b}{a} \sqrt{a^2 - x^2}$, тому зі зростанням x від 0 до a ордината за наведеним законом зменшується від b до 0, як показано на рис. 3.2.2.

Еліпс знаходиться всередині круга радіуса a з центром у початку координат (чому?). Ступінь „стислості” еліпса відносно осі Ox визначається відношенням відстані між фокусами $2c$ до великої осі $2a$, яке називається **ексцентриситетом** еліпса e (від лат. ex – від і centrum – центр круга):

$$e = \frac{c}{a}, \quad 0 < e < 1. \quad (3.2.6)$$

За допомогою співвідношення $b^2 = a^2 - c^2$ ексцентриситет e легко подати через півосі a і b :

$$e = \frac{c}{a} \Rightarrow \left| c = \sqrt{a^2 - b^2} \right| \Rightarrow \left(e = \frac{1}{a} \sqrt{a^2 - b^2}, e^2 = 1 - \left(\frac{b}{a} \right)^2 \right). \quad (3.2.7)$$

Ексцентриситет кола дорівнює нулю: $e = 0$ (обґрунтуйте).

Зауваження:

1) канонічне рівняння еліпса можна вивести, вибираючи фокуси на Oy , тоді більшою буде піввісь b ;

2) задачі на еліпс узагалі зводяться згідно з його канонічним рівнянням до розв'язання 2×2 -системи відносно a^2, b^2 .

Наприклад, знайдемо рівняння еліпса L , який проходить через точку $M_0(5, -3)$, а його ексцентриситет дорівнює $0,8$.

Розв'язання:

$$\begin{aligned} \left. \begin{array}{l} M_0(5, -3) \in L \\ e = 0,8 \end{array} \right] &\Rightarrow \begin{cases} \frac{25}{a^2} + \frac{9}{b^2} = 1 \\ c = 0,8a \\ b^2 = a^2 - c^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{25}{a^2} + \frac{9}{b^2} = 1 \\ b^2 = 0,36a^2 \end{cases} \Rightarrow \\ &\Rightarrow \begin{cases} \frac{25}{a^2} + \frac{9}{0,36a^2} = 1 \\ b^2 = 0,36a^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{50}{a^2} = 1 \\ b^2 = 0,36a^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 5\sqrt{2} \\ b = 3\sqrt{2} \end{cases} \Rightarrow \frac{x^2}{50} + \frac{y^2}{18} = 1. \end{aligned}$$

Еліпс, як і коло, описується, за аналогією, **параметричними рівняннями**:

$$\begin{cases} x = a \cos t \\ y = b \sin t, \quad 0 \leq t \leq 2\pi. \end{cases} \quad (3.2.8)$$

II. Гіперболою називається геометричне місце точок, різниця відстаней яких до двох заданих точок (фокусів) є величиною сталою, відмінною від нуля.

Задача 3.2.3. Скласти рівняння гіперболи з фокусами у точках $F_1(-c, 0), F_2(c, 0)$, а різниця відстаней точок гіперболи до фокусів дорівнює $\pm 2a$ ($a > 0$). (Подумайте, яку лінію отримаємо, якщо $a = 0$.)

Розв'язання. Скористаємось рис. 3.2.1, на якому тепер $M(x, y)$ – довільна точка гіперболи. Залучимо формулу відстані між двома точками, тоді

$$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} - \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = \pm 2a, \text{ або}$$

$$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} = \sqrt{(x-c)^2 + y^2} \pm 2a.$$

Виконуємо перетворення, аналогічні тим, які проробляли при виведенні рівняння еліпса:

$$\begin{aligned} (x+c)^2 + y^2 &= (x-c)^2 + y^2 \pm 4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} + 4a^2 \Rightarrow \\ &\Rightarrow 4cx - 4a^2 = \pm 4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} \Rightarrow \\ &\Rightarrow c^2x^2 - 2a^2cx + a^4 = a^2(x^2 - 2cx + c^2 + y^2) \Rightarrow \\ &\Rightarrow (c^2 - a^2)x^2 - a^2y^2 = a^2(c^2 - a^2) \Rightarrow \left| \begin{array}{l} \text{покладаємо} \\ c^2 - a^2 = b^2 \end{array} \right| \Rightarrow \\ &\Rightarrow b^2x^2 - a^2y^2 = a^2b^2 \Rightarrow \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1. \end{aligned} \quad (3.2.9)$$

Рівняння (3.2.9) називається **канонічним рівнянням гіперболи**.

Оскільки $2c > 2a$ (бо різниця двох сторін трикутника завжди менше третьої сторони), тому різниця $c^2 - a^2$ є додатним числом, позначеним через b^2 .

Аналізуючи отримане рівняння, приходимо до **висновків**:

1) гіпербола симетрична відносно осей координат, бо рівняння містить тільки квадрати змінних x , y ; отже, координатні осі є **осями симетрії**; вісь симетрії, на якій лежать фокуси, називається **фокальною віссю**;

точку перетину осей симетрії називають **центром симетрії**, або **центром** гіперболи;

2) крива перетинає вісь Ox у точках – **вершинах** гіперболи – з абсцисами $x = \pm a$: $A_1(-a, 0)$, $A_2(a, 0)$ (рис. 3.2.3); з віссю Oy крива спільних точок не має (чому?); вісь симетрії, яка перетинає гіперболу, називається **дійсною віссю симетрії**; друга – **уявною віссю симетрії**.

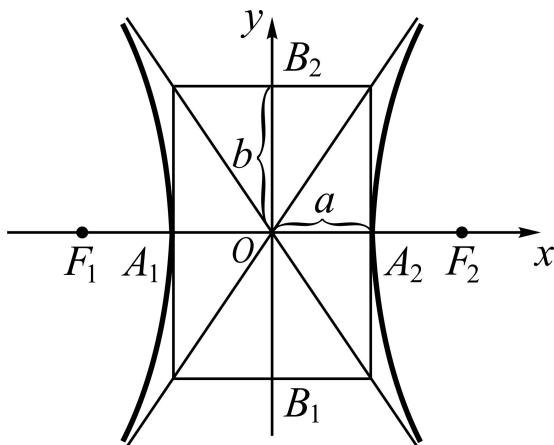


Рис. 3.2.3. Гіпербола

Відрізок A_1A_2 , який з'єднує вершини гіперболи, а також його довжина $2a$, називаються **дійсною віссю** гіперболи; відрізок B_1B_2 (див. рис. 3.2.3), а також його довжина $2b$, називаються **уявною віссю** гіперболи;

3) в силу симетрії гіперболи достатньо дослідити форму кривої для $x > 0, y > 0$: із (3.2.9) $y = \frac{b}{a} \sqrt{x^2 - a^2}$, тому при збільшенні x від a до $+\infty$ ордината y теж необмежено зростає від 0 до $+\infty$ за наведеним законом, як показано на рис. 3.2.3.

Прямокутник зі сторонами $A_1A_2 = 2a, B_1B_2 = 2b$ із центром симетрії у початку координат називають **основним прямокутником** гіперболи.

Прямі, на яких лежать його діагоналі, з рівняннями

$$y = -\frac{b}{a}x, \quad y = \frac{b}{a}x, \quad (3.2.10)$$

називаються **асимптотами** гіперболи (від грецьк. asymptotos – незбіжний). Ці прямі володіють *властивістю*: при необмеженому зростанні абсциси x ($x \rightarrow \pm\infty$) відстань точок гіперболи до асимптот необмежено зменшується, наближаючись до нуля.

Покажемо це на *прикладі* асимптоти з рівнянням $y = \frac{b}{a}x$, або $bx - ay = 0$. Нехай $M(x, y)$ – точка гіперболи, де $y = \frac{b}{a} \sqrt{x^2 - a^2}$, тоді (див. (3.1.33))

$$d = \frac{1}{\sqrt{a^2 + b^2}} \left| bx - a \cdot \frac{b}{a} \sqrt{x^2 - a^2} \right| = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} \left| x - \sqrt{x^2 - a^2} \right|. \quad (3.2.11)$$

Поділимо і помножимо праву частину (3.2.11) на вираз, спряжений виразу під знаком модуля, тобто на вираз $x + \sqrt{x^2 - a^2}$, тоді отримаємо:

$$d = \frac{ab}{\sqrt{a^2 + b^2}} \cdot \frac{1}{x + \sqrt{x^2 - a^2}}. \quad (3.2.12)$$

Перший співмножник у (3.2.12) – стала, другий є дробом зі сталим чисельником. При необмеженому зростанні x знаменник дробу необме-

жено збільшується, а сам дріб зменшується і стає все ближче і ближче до нуля.

Ураховуючи наведену властивість, геометричне зображення гіперболи починають з побудови основного прямокутника і нанесення її асимптот. Частини графіка кривої при $x \leq -a$ і $x \geq a$ називають **гілками** гіперболи.

Як і для еліпса, ступінь „стислості” гіперболи відносно осі Ox визначається відношенням фокусної відстані $2c$ до дійсної осі $2a$:

$$e = \frac{c}{a} \text{ — екцентриситет гіперболи } (e > 1, \text{ чому?}). \quad (3.2.13)$$

Зауваження:

1) канонічне рівняння гіперболи можна вивести, вибираючи фокуси на Oy , тоді дійсною (уявною) буде вісь Oy (Ox), а відповідне рівняння таке:

$$-\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad (3.2.14)$$

– **рівняння гіперболи, спряженої до гіперболи (3.2.9).**

Криві, які описуються рівняннями (3.2.9) і (3.2.14), називаються **взаємно спряженими гіперболами**;

2) задача на складання рівняння гіперболи зводиться (як і для еліпса) до розв’язання СЛАР 2×2 відносно a^2 , b^2 ; задача значно спрощується, якщо $a = b$, тобто крива описується рівняннями:

$$x^2 - y^2 = a^2 \text{ або } x^2 - y^2 = -a^2. \quad (3.2.15)$$

Криві, які описуються рівняннями (3.2.15), називаються **рівнобічними гіперболами**. (Подумайте, які прямі є асимптотами рівнобічних гіпербол.)

III. **Параболою** називається геометричне місце точок, рівновіддалених від заданої точки (фокуса) і заданої прямої (директриси).

Задача 3.2.4. Знайти рівняння параболи з фокусом у точці $F(0, p/2)$ і директрисою, паралельною осі Ox , з рівнянням $y = -p/2$ ($p > 0$).

Розв'язання. Виберемо на площині систему координат xOy (рис. 3.2.4) і нехай $M(x, y)$ – довільна точка параболи. Тоді згідно з означенням $FM = BM$ (рис. 3.2.4). За формулою відстані між двома точками маємо:

$$\sqrt{x^2 + \left(y - \frac{p}{2}\right)^2} = y + \frac{p}{2}.$$

Піднесемо до квадрата обидві частини останнього рівняння і спростимо його:

$$x^2 + y^2 - py + \frac{p^2}{4} = y^2 + py + \frac{p^2}{4}, \text{ звідки} \\ x^2 = 2py. \quad (3.2.16)$$

Рівняння (3.2.16) називається **канонічним рівнянням параболи**. Число p – відстань фокуса до директриси – називають **параметром** параболи.

Аналізуючи рівняння (3.2.16), приходимо до **висновків**:

1) парабола симетрична відносно осі Oy , бо змінна x входить у рівняння у другому степені; вісь симетрії (Oy) називають **віссю** параболи;

змінна y не може бути від'ємною; точка $O(0,0)$ належить кривій і є точкою перетину параболи з її віссю. Цю точку називають **вершиною** параболи;

2) при змінюванні x за модулем від 0 до $+\infty$ змінна y необмежено зростає за законом $y = \frac{1}{2p}x^2$

(рис. 3.2.5-а); якщо $p = 1/2$, то отримуємо дуже знайому параболу $y = x^2$.

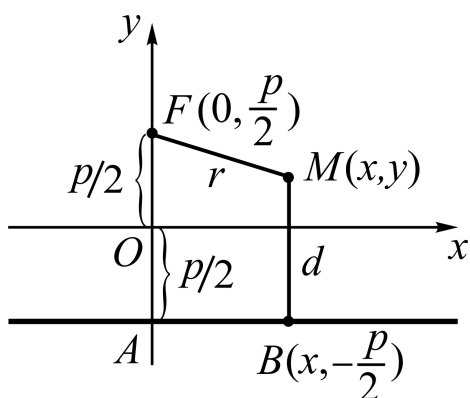


Рис. 3.2.4. **Фокус, директриса і точка параболи**

Інші варіанти канонічного рівняння параболи одержуємо, вибираючи фокуси і директриси як показано на рис. 3.2.5-б, в, г. (*Пропонуємо, на закріплення усвідомленого, самостійно вивести рівняння б), в), г).*)

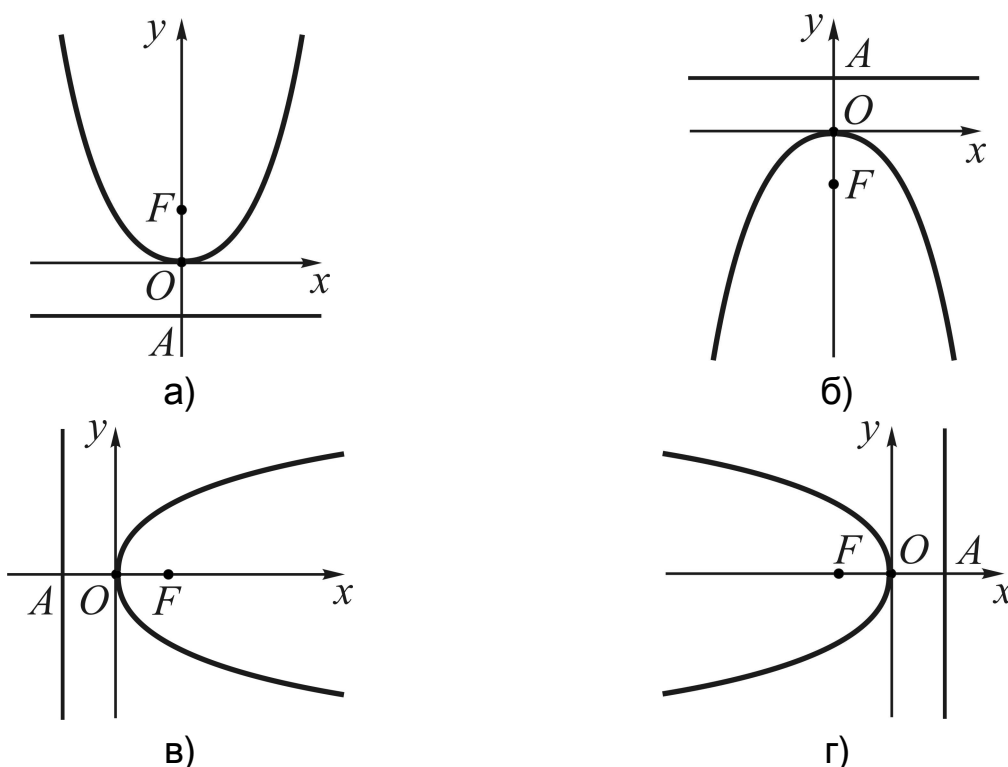


Рис. 3.2.5. Графіки парабол: а) $x^2 = 2py$; б) $x^2 = -2py$; в) $y^2 = 2px$; г) $y^2 = -2px$

Задачі на складання канонічних рівнянь параболи вельми прості: вони зводяться до відшукування лише однієї величини – параметра p ($p > 0$).

Наприклад, побудуємо рівняння параболи, яка проходить через точку $M_0(5, -3)$, а її віссю є вісь Ox .

Розв'язання. Точка M_0 лежить в четвертому квадранті, тому відповідне рівняння має вигляд: $y^2 = 2px$. Підставляємо координати заданої точки у рівняння і знаходимо значення p , при якому воно задовольняється:

$$(-3)^2 = 2p \cdot 5 \Rightarrow p = \frac{9}{10} \Rightarrow y^2 = \frac{9}{5}x \quad \text{або} \quad y = \pm 3\sqrt{\frac{x}{5}}.$$

Рівняння $y = 3\sqrt{x/5}$, $y = -3\sqrt{x/5}$ визначають **гілки** параболи. У цьому випадку кажуть, що гілки параболи **напрявлені вправо**. (Знайдіть рівняння гілок параболи у випадках а), б), г) і укажіть, як вони направлені.)

Криві еліпс (коло) і гіпербола називаються **центральними** К2П, а парабола – **нецентральною** К2П; за її **ексцентриситет** приймають відношення **фокального радіуса** $FM = r$ довільної точки M параболи до відстані $BM = d$ (див. рис. 3.2.4) цієї точки до директриси, тобто

$$e = r/d = 1.$$

Задача виведення рівнянь К2П ускладнюється, якщо у центральних кривих центр лежить не у початку координат і (або) осі симетрії не є координатними осями; а для нецентральных кривих – якщо фокус не лежить на координатній осі і (або) директриса не ортогональна жодній із осей координат. Для установлення положення на площині К2П, що описуються загальним рівнянням, вибирають таку – „нову” – систему координат, у якій загальне рівняння набуває канонічного виду.

Зведення загального рівняння К2П до канонічного виду

І. Перетворення координат: паралельне перенесення, поворот осей координат. Якщо на площині вибрати дві системи координат, то координати однієї і тієї ж точки у різних системах будуть різними.

Задача перетворення координат полягає в тому, щоб знайти співвідношення між координатами точок у двох системах координат, одну з яких назвемо **старою**, другу – **новою**.

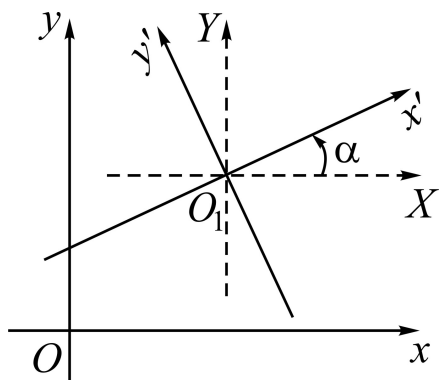


Рис. 3.2.6. Перетворення координат

Будь-яку нову систему координат $x'O_1y'$ (рис. 3.2.6) можна отримати із старої xOy **перенесенням початку координат** у точку O_1 зі збереженням напрямку осей, а потім поворотом отриманої (допоміжної системи XO_1Y) на деякий кут α навколо початку O_1 .

Задача 3.2.5 (про паралельне перенесення осей координат). Установити зв'язок між координатами довільної точки площини M у системах з різним початком координат, але з однаковим напрямком осей (рис. 3.2.7).

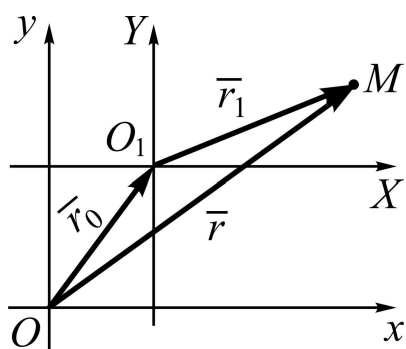


Рис. 3.2.7. Паралельне перенесення осей

Розв'язання. Нехай xOy – стара, XO_1Y – нова системи координат (див. рис. 3.2.7). Введемо позначення: x, y (X, Y) – координати точки M у старій (новій) системі координат; x_0, y_0 – координати нового початку O_1 у старій системі координат, тобто $O_1(x_0, y_0)$.

Пов'яжемо з відрізками OO_1 , O_1M , OM відповідно вектори \vec{r}_0 , \vec{r}_1 , \vec{r} (див. рис. 3.2.7), тоді:

$$\left. \begin{array}{l} \vec{r}_0 = (x_0, y_0) \\ \vec{r}_1 = (X, Y) \\ \vec{r} = (x, y) \end{array} \right\} \Rightarrow \vec{r}_1 = \vec{r} - \vec{r}_0 \Rightarrow (X, Y) = (x, y) - (x_0, y_0) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{l} X = x - x_0 \\ Y = y - y_0 \end{array} \right] \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x = X + x_0 \\ y = Y + y_0 \end{array} \right. \quad (3.2.17)$$

Висновок: нова (стара) координата точки M дорівнює старій (новій) координаті мінус (плюс) координата нового початку у старій системі координат.

Співвідношення (3.2.17) називаються **формулами паралельного перенесення осей координат**.

Задача 3.2.6 (про поворот осей координат). Установити зв'язок між координатами довільної точки M площини у системах зі спільним початком і різним напрямом осей координат (рис. 3.2.8).

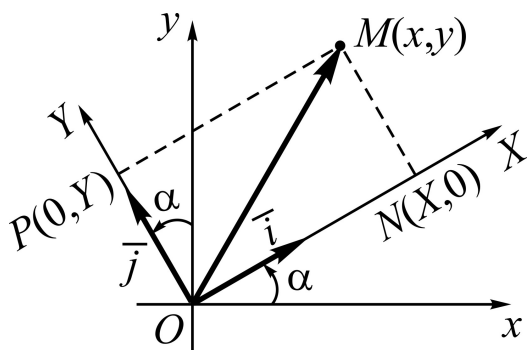


Рис. 3.2.8. Поворот осей координат

Розв'язання. Нехай xOy – стара, XOY – нова системи координат (див. рис. 3.2.8). Введемо позначення: x, y (X, Y) – старі (нові) координати точки M ; α – кут повороту старої системи навколо точки O .

Знайдемо напрямні косинуси нових осей OX , OY у старій системі xOy , або, що те ж саме, координати одиничних векторів \bar{i} і \bar{j} (див. рис. 3.2.8). Проекції вектора $\overline{OM} = (x, y)$ на напрями цих векторів визначають координати X і Y :

$$\begin{aligned} & [\bar{i} = (\cos \alpha, \sin \alpha), \bar{j} = (\cos(\pi/2 + \alpha), \sin \alpha)] \Rightarrow \\ & \Rightarrow \begin{cases} \overline{OM} \cdot \bar{i} = (x, y) \cdot (\cos \alpha, \sin \alpha) = \text{пр}_{\bar{i}} \overline{OM} = X \\ \overline{OM} \cdot \bar{j} = (x, y) \cdot (-\sin \alpha, \cos \alpha) = \text{пр}_{\bar{j}} \overline{OM} = Y \end{cases} \Rightarrow \\ & \Rightarrow \begin{cases} X = x \cos \alpha + y \sin \alpha \\ Y = -x \sin \alpha + y \cos \alpha \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = X \cos \alpha - Y \sin \alpha \\ y = X \sin \alpha + Y \cos \alpha. \end{cases} \end{aligned} \quad (3.2.18)$$

Друга пара формул у (3.2.18) отримується з першої (*переконайтеся*) розв'язанням відповідної системи рівнянь відносно змінних x і y , адже ці змінні в обох рівняннях означають одні і ті ж величини.

Співвідношення (3.2.18) називаються **формулами повороту осей координат**.

Наслідок (із задач 3.2.5, 3.2.6): якщо послідовно здійснюється паралельне перенесення і поворот осей координат (див. рис. 3.2.6) або навпаки, то старі координати x , y через нові x' , y' (після повороту осей) виражаються так:

$$\begin{aligned} x &= x' \cos \alpha - y' \sin \alpha + x_0 \\ y &= x' \sin \alpha + y' \cos \alpha + y_0. \end{aligned} \quad (3.2.19)$$

Вирази нових координат через старі безпосередньо впливають (*знайдіть їх*) із співвідношень (3.2.19).

У подальшому ми будемо переважно застосовувати формули переходу від старих координат до нових.

II. **Зведення до канонічного виду** рівняння К2П, що не містить добутку змінних ($B = 0$):

$$Ax^2 + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0. \quad (3.2.20)$$

Умови належності цих рівнянь (див. (*)) до певного типу виглядають так:

- 1) $A \cdot C > 0 \Rightarrow$ „крива еліптичного типу (коло при $A = C$)”;
- 2) $A \cdot C < 0 \Rightarrow$ „крива гіперболічного типу”; (3.2.21)
- 3) $A \cdot C = 0 \Rightarrow$ „крива параболічного типу”.

Спрощення рівняння (3.2.20) зведенням до канонічного виду здійснюється за допомогою *паралельного перенесення осей координат* аналогічно (у технічному плані) тому, як це робилося для рівняння кола.

Приклади. За заданим рівнянням установити вид К2П і її розташування на площині зведенням до канонічного виду.

$$1. 4x^2 - 25y^2 - 24x - 50y - 89 = 0.$$

Розв'язання.

Установлюємо тип кривої: ($A = 4$, $C = -25$) $\Rightarrow A \cdot C < 0$. Отже, рівняння описує криву гіперболічного типу.

Групуємо в лівій частині рівняння члени зі змінними x , y і виділяємо повні квадрати двочленів із цими змінними:

$$\begin{aligned} 4(x^2 - 6x) - 25(y^2 + 2y) - 89 &= 0 \Rightarrow \\ \Rightarrow 4[(x^2 - 2 \cdot 3x + 9) - 9] - 25[(y^2 + 2y + 1) - 1] - 89 &= 0 \Rightarrow \\ \Rightarrow 4(x - 3)^2 - 25(y + 1)^2 = 100 \Rightarrow \frac{(x - 3)^2}{25} - \frac{(y + 1)^2}{4} &= 1. \end{aligned}$$

Вводимо нові координати: $x - 3 = X \Rightarrow x_0 = 3$; $y + 1 = Y \Rightarrow y_0 = -1$, і *записуємо* канонічне рівняння у новій системі з початком у точці $(3, -1)$:

$$\frac{X^2}{25} - \frac{Y^2}{4} = 1.$$

Відповідь: гіпербола з центром у точці $(3, -1)$ і півсями $a = 5$, $b = 2$.

$$2. 2x^2 + 3y^2 + 16x - 18y + 59 = 0.$$

Розв'язання (належний коментар пропонуємо навести самостійно).

$$(A = 2, C = 3) \Rightarrow A \cdot C > 0 \Rightarrow \text{„крива еліптичного типу”};$$

$$\begin{aligned}
& 2(x^2 + 8x) + 3(y^2 - 6y) + 59 = 0 \Rightarrow \\
& \Rightarrow 2[(x+4)^2 - 16] + 3[(y-3)^2 - 9] + 59 = 0 \Rightarrow \\
& \Rightarrow 2(x+4)^2 + 3(y-3)^2 = 0 \Rightarrow \frac{(x+4)^2}{3} + \frac{(y-3)^2}{2} = 0 \Rightarrow \\
& \Rightarrow \left| \begin{array}{l} x+4 = X \Rightarrow x_0 = -4 \\ y-3 = Y \Rightarrow y_0 = 3 \end{array} \right| \Rightarrow \frac{X^2}{3} + \frac{Y^2}{2} = 0.
\end{aligned}$$

Відповідь: вироджений у точку $(-4, 3)$ еліпс.

3. $2x^2 - y - 4x + 8 = 0.$

Розв'язання.

$(A = 2, C = 0) \Rightarrow A \cdot C = 0 \Rightarrow$ „крива параболічного типу”;

$$\begin{aligned}
& y = 2x^2 - 4x + 8 \Rightarrow y = 2(x^2 - 2x + 1) - 2 + 8 \Rightarrow \\
& \Rightarrow y = 2(x-1)^2 + 6 \Rightarrow y - 6 = 2(x-1)^2 \Rightarrow (x-1)^2 = \frac{1}{2}(y-6) \Rightarrow \\
& \Rightarrow \left| \begin{array}{l} x-1 = X \Rightarrow x_0 = 1 \\ y-6 = Y \Rightarrow y_0 = 6 \end{array} \right| \Rightarrow X^2 = \frac{1}{2}Y \Rightarrow Y = 2X^2.
\end{aligned}$$

Відповідь: парабола з вершиною у точці $O_1(1,6)$, симетрична відносно O_1Y , параметр дорівнює $1/4$ ($p = 1/4$).

III. Зведення загального рівняння К2П до канонічного виду:

Спрощення загального рівняння К2П (див. (3.2.1))

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$$

здійснюється в два етапи:

1-й етап. Зводимо загальне рівняння за допомогою повороту осей координат до рівняння (3.2.20), яке не містить добутку змінних.

Відповідний кут повороту осей α визначається співвідношенням (виводити його не будемо): $\operatorname{ctg} 2\alpha = (A - C)/B$, звідки за формулами тригонометрії маємо:

$$\cos 2\alpha = \frac{\operatorname{ctg} 2\alpha}{\pm \sqrt{1 + \operatorname{ctg}^2 2\alpha}} \Rightarrow \begin{cases} \sin \alpha = \pm \sqrt{\frac{1 - \cos 2\alpha}{2}}, \\ \cos \alpha = \pm \sqrt{\frac{1 + \cos 2\alpha}{2}}, \end{cases} \quad (3.2.22)$$

де знак вибирається залежно від того, у якій чверті кут α .

Описаний вибір кута при переході від старих координат x, y до нових X, Y за формулами (див. 3.2.18)

$$\begin{aligned} x &= X \cos \alpha - Y \sin \alpha, \\ y &= X \sin \alpha + Y \cos \alpha, \end{aligned} \quad (3.2.23)$$

дає рівняння відносно змінних X і Y , яке не містить їх добутку.

2-й етап. Спростуємо зведенням до канонічного виду за допомогою паралельного перенесення осей координат отримане на першому етапі рівняння виду (3.2.20).

Зауваження: спрощення рівняння К2П можна починати з паралельного перенесення осей з метою позбутися членів, які містять змінні у першому степені.

Розглянемо ілюстративні *приклади*.

1. Звести до канонічного виду відоме зі школи рівняння гіперболи $xy = k$ ($k > 0$), асимптотами якої є осі координат.

Розв'язання:

1) *випикуємо* коефіцієнти A, B, C : $A = C = 0, B = 1$ і *обчислюємо* $\sin \alpha, \cos \alpha$:

$$\begin{aligned} \operatorname{ctg} 2\alpha = 0 &\Rightarrow \left(2\alpha = \frac{\pi}{2} + \pi n, n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \right) \Rightarrow \text{покладемо } n = 0 \Rightarrow \\ &\Rightarrow \alpha = \pi/4 \Rightarrow (\sin \alpha = \cos \alpha = \sqrt{2}/2); \end{aligned}$$

2) *визначаємо* формули переходу (3.2.23) і *записуємо* відповідне рівняння відносно X, Y :

$$\begin{aligned} x &= (X - Y)/\sqrt{2} \\ y &= (X + Y)/\sqrt{2} \end{aligned} \Rightarrow |xy = k| \Rightarrow \frac{1}{2}(X^2 - Y^2) = k \Rightarrow X^2 - Y^2 = 2k$$

– рівняння **рівнобічної** гіперболи (див. (3.2.15)). (Подумайте, що отримаємо у разі $k < 0$, *наведіть* геометричне зображення.)

Як бачимо, у цьому простому прикладі паралельне перенесення осей не знадобилося.

2. Установити, якою кривою є графік дробово-лінійної функції:

$$y = \frac{ax+b}{cx+d} \quad \left(\frac{a}{c} \neq \frac{b}{d}, c \neq 0; \text{чому?} \right).$$

Розв'язання:

1) *виконаємо* тотожні перетворення:

$$y = \frac{\frac{a}{c}x + \frac{b}{c}}{x + \frac{d}{c}} \Rightarrow \begin{cases} a/c = \alpha \\ b/c = \beta \\ d/c = \delta \end{cases} \Rightarrow y = \frac{\alpha x + \beta}{x + \delta} \Rightarrow xy - \alpha x + \delta y - \beta = 0$$

– рівняння К2П;

2) *здійснимо* паралельне перенесення осей так, щоб у новій системі XO_1Y рівняння не містило змінних у першому степені:

$$\begin{cases} x = X + x_0 \\ y = Y + y_0 \end{cases} \Rightarrow (X + x_0)(Y + y_0) - \alpha(X + x_0) + \delta(Y + y_0) - \beta = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow XY + X(y_0 - \alpha) + Y(x_0 + \delta) = \alpha x_0 + \beta - x_0 y_0 - \delta y_0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \text{вибираємо:} \\ y_0 = \alpha, \\ x_0 = -\delta \end{cases} \Rightarrow XY = \frac{bc - ad}{c^2} = k \Rightarrow XY = k.$$

Висновок: графіком дробово-лінійної залежності є гіпербола з асимптотами, паралельними осями координат, і центром симетрії у точці $(x_0, y_0) = (-\delta, \alpha) = \left(-\frac{d}{c}, \frac{a}{c}\right)$.

Теорія кривих другого порядку використовується в інших дисциплінах математичного циклу: „Теорія ймовірностей та математична статистика”, „Дослідження операцій”, а також у задачах: оптимізації розташування об'єктів різноманітної природи, дослідження траєкторій літальних апаратів.

3.3. Площина у просторі (в \mathbf{R}^3)

Поняття про рівняння поверхні в \mathbf{R}^3 . Рівняння сферичної поверхні (сфери)

В елементарній геометрії поверхню уявляють як геометричне місце точок (г. м. т.), яке відділяє геометричне тіло – обмежену з усіх сторін частину простору – від частини простору, яка оточує тіло.

Рівняння виду $\Phi(x, y, z) = 0$, де Φ – закон, якому підкоряються змінні x, y, z , називається **рівнянням поверхні S** , якщо координати будь-якої точки поверхні задовольняють це рівняння, а точки, що не належать поверхні, його не задовольняють:

$$\Phi(x, y, z) = 0 \text{ – рівняння } S \Rightarrow (x, y, z) \in S \Leftrightarrow \Phi(x, y, z) = 0, \quad (3.3.1)$$

де x, y, z називають **поточними координатами** точок поверхні.

Якщо рівняння поверхні знайдено, то вивчення її властивостей зводиться до аналізу рівняння, яким вона описується.

Приклад. Скласти рівняння поверхні, всі точки якої розташовані на однаковій відстані R від точки $C(x_0, y_0, z_0)$. (Інакше: знайти рівняння сферичної поверхні (сфери) радіуса R з центром у точці з координатами x_0, y_0, z_0).

Розв'язання зводиться до використання формули відстані між двома точками (2.3.1). Нехай $M(x, y, z)$ – довільна точка поверхні, тоді

$$\begin{aligned} CM &= \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2} \Rightarrow \\ \Rightarrow (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 &= R^2 \end{aligned} \quad (3.3.2)$$

– канонічне рівняння сфери.

Із (3.3.2) випливає:

1) якщо центром сфери є початок координат $O(0,0,0)$, то її канонічне рівняння набуває вигляду: $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$;

2) будь-яка точка (x_0, y_0, z_0) простору описується рівнянням:

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 = 0 \text{ (чому?);}$$

3) якщо в (3.3.2) зафіксувати значення якоїсь із поточних змінних, то отримаємо переріз поверхні площиною, перпендикулярною відповідній осі координат. *Наприклад*, покладемо $z = h$, тоді отримаємо:

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = R^2 - (h - z_0)^2$$

– рівняння кола (у площині $z = h$) радіуса $r = \sqrt{R^2 - (h - z_0)^2}$ і центром у точці (x_0, y_0, h) . (Подумайте, чи для будь-якого h існуватиме переріз сфери площиною у вигляді кола.)

Різновиди рівнянь площини у просторі

Поняття „плоска поверхня”, або „площина”, як і поняття прямої, є первинним в геометрії. Із аксіом елементарної геометрії і наслідків із них відомо, що площину, і до того ж тільки одну, визначають: дві прямі, що перетинаються; пряма і точка, яка не належить прямій; три точки, які не належать одній прямій, та ін.

Уявлення про площину як геометричну фігуру дає слід, утворений переміщенням паралельно самій собі однієї з двох прямих, що перетинаються, вздовж другої.

Задамо у просторі систему координат $xOyz$ і деяку площину π .

1°. Рівняння площини, що проходить через три задані точки.

Задача 3.3.1. Скласти рівняння площини, яка проходить через точки $M_1(x_1, y_1, z_1)$, $M_2(x_2, y_2, z_2)$, $M_3(x_3, y_3, z_3)$ (рис. 3.3.1).

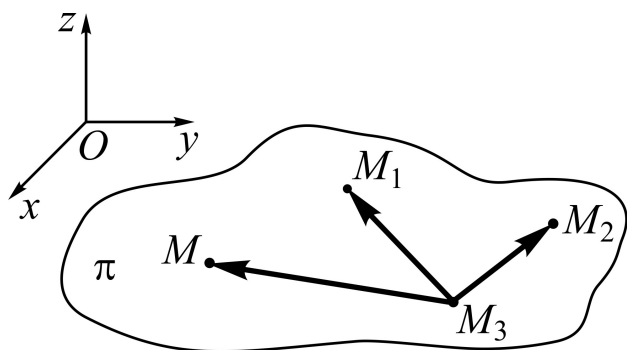


Рис. 3.3.1. Площина, що проходить через три задані точки

Розв'язання. Виберемо на площині довільну точку $M(x, y, z)$, яка не співпадає ні з однією із заданих, і введемо у розгляд вектори з початком в одній із даних точок, наприклад, в M_3 :

$$\overrightarrow{M_3M} = (x - x_3, y - y_3, z - z_3),$$

$$\overrightarrow{M_3M_1} = (x_1 - x_3, y_1 - y_3, z_1 - z_3),$$

$$\overrightarrow{M_3M_2} = (x_2 - x_3, y_2 - y_3, z_2 - z_3).$$

Ці вектори компланарні, бо лежать в одній площині. За умовою компланарності трьох векторів (2.2.27) визначник 3-го порядку, складений із їхніх координат, дорівнює нулю, що і визначає шукане рівняння:

$$\begin{vmatrix} x - x_3 & y - y_3 & z - z_3 \\ x_1 - x_3 & y_1 - y_3 & z_1 - z_3 \\ x_2 - x_3 & y_2 - y_3 & z_2 - z_3 \end{vmatrix} = 0. \quad (3.3.3)$$

Після розкриття визначника (як правило, за елементами першого рядка) отримуємо лінійне рівняння відносно поточних координат x, y, z . У загальному вигляді це проробляти не будемо, а розглянемо конкретний *приклад*: знайти рівняння площини, якій належать точки $M_1(-1, 2, 1)$, $M_2(3, 2, 2)$, $M_3(-2, 0, 1)$.

Використовуючи (3.3.3), отримаємо:

$$\begin{vmatrix} x+2 & y & z-1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 5 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow (x+2) \cdot 2 - y \cdot 1 + (z-1) \cdot (-8) = 0 \Rightarrow \\ \Rightarrow 2x - y - 8z + 12 = 0.$$

Перевірте, чи правильно складене рівняння, підставляючи в нього координати заданих точок.

Наслідок (умова належності трьох точок одній прямій):

$$\frac{x_1 - x_3}{x_2 - x_3} = \frac{y_1 - y_3}{y_2 - y_3} = \frac{z_1 - z_3}{z_2 - z_3}. \quad (3.3.4)$$

Дійсно, якщо точки M_1, M_2, M_3 належать одній прямій, то вектори $\overline{M_3M_1}, \overline{M_3M_2}$ колінеарні, а значить їхні координати пропорційні. (*Подумайте*, що описує рівняння (3.3.3), якщо має місце співвідношення (3.3.4).)

Зауваження: відшукування рівняння площини, яка визначається двома прямими, що перетинаються, або прямою і точкою, що не належить прямій, зводиться до розв'язання задачі 3.3.1. (*Обміркуйте*, як це здійснюється в принциповому плані.)

2°. Рівняння площини у відрізках на осях.

Задача 3.3.2. Знайти рівняння площини, якщо відомі величини відрізків a, b, c , які площина відтинає на осях координат, тобто якщо задані відповідно абсциса, ордината, апліката точок перетину площини з осями Ox, Oy, Oz (рис. 3.3.2).

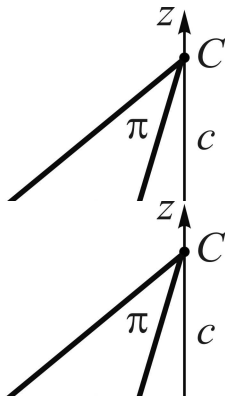


Рис. 3.3.2. Відрізки на осях координат: OA, OB, OC

Розв'язання зводиться до використання (3.3.3), маючи в розпорядженні точки: $A(a, 0, 0), B(0, b, 0), C(0, 0, c)$, де, у даному випадку, $a > 0, b < 0, c > 0$. Отже,

$$\begin{vmatrix} x-a & y & z \\ -a & b & 0 \\ -a & 0 & c \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow bc(x-a) + acy + abz = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow bcx + acy + abz = abc \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1 \quad (3.3.5)$$

– рівняння площини у відрізках на осях. (Зіставте рівняння (3.3.5) з рівнянням (3.1.11) прямої у відрізках на осях (в \mathbf{R}^2).)

Відрізки AB, AC, BC (див. рис. 3.3.2) називають **слідами площини π** на площинах xOy, xOz, yOz (у відповідному октанті).

3°. Нормальне рівняння площини.

Задача 3.3.3. Побудувати рівняння площини, якщо відома відстань p від початку координат до площини і кути, які складає відповідний відрізок з осями координат: α, β, γ

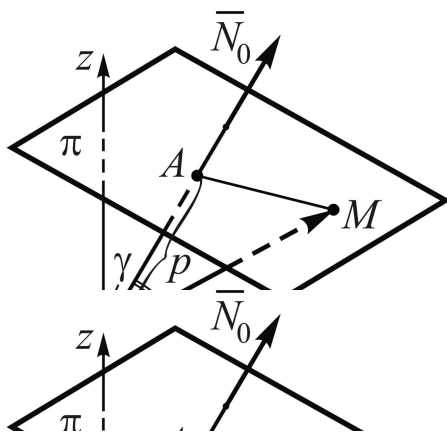


Рис. 3.3.3. Відрізок p і кути α, β, γ

(рис. 3.3.3).

Розв'язання. За заданими кутами побудуємо одиничний вектор нормалі $\vec{N}_0 = (\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)$, виберемо на площині довільну точку $M(x, y, z)$ і пов'яжемо з нею вектор $\vec{OM} = (x, y, z)$ (див. рис. 3.3.3).

Відрізок $OA = p$ є проекцією вектора \overline{OM} на напрям вектора \overline{N}_0 , тобто $\text{пр}_{N_0} \overline{OM} = p$. З іншого боку, скалярний добуток $\overline{OM} \cdot \overline{N}_0$ теж дає $\text{пр}_{N_0} \overline{OM}$:

$$\overline{OM} \cdot \overline{N}_0 = |\overline{N}_0| \cdot \text{пр}_{N_0} \overline{OM} = p.$$

Таким чином, $x \cos \alpha + y \cos \beta + z \cos \gamma = p$, або

$$x \cos \alpha + y \cos \beta + z \cos \gamma - p = 0 \quad (3.3.6)$$

– **нормальне рівняння площини**. (Запишіть, яким рівнянням описується площина, яка проходить через точку $O(0, 0, 0)$.)

4°. Рівняння площини, яка проходить через дану точку, і має заданий нормальний вектор.

Будь-який не нульовий вектор, перпендикулярний до площини, називається **нормальним вектором** цієї площини.

Задача 3.3.4. Скласти рівняння площини, яка містить точку $M_0(x_0, y_0, z_0)$, і задано її нормальний вектор $\overline{N} = (A, B, C)$ (рис. 3.3.4).

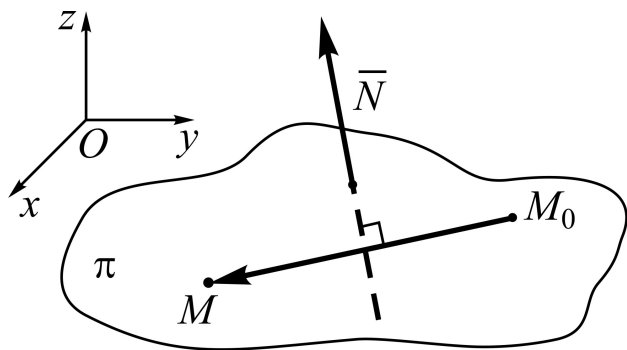


Рис. 3.3.4. Площина, точка і нормальний вектор

Розв'язання. Виберемо на площині довільну точку $M(x, y, z)$ і введемо в розгляд вектор $\overline{M_0M} = (x - x_0, y - y_0, z - z_0)$.

За означенням $\overline{N} \perp \pi$, тоді $\overline{N} \perp \overline{M_0M}$. Отже, скалярний добуток $\overline{N} \cdot \overline{M_0M}$ дорівнює нулю. Подано його через координати векторів і отримаємо рівняння площини:

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0. \quad (3.3.7)$$

Рівняння (3.3.7) називають також **рівнянням жмутка (зв'язки) площин** з центром $M_0(x_0, y_0, z_0)$: при змінюванні параметрів A, B, C воно описує безліч площин.

Зауваження: якщо в (3.3.7) розкрити дужки, то отримаємо стандартний запис в символах лінійного рівняння з трьома змінними x, y, z :

$$Ax + By + Cz + D = 0, \quad (3.3.8)$$

де $D = -(Ax_0 + By_0 + Cz_0)$ – деяке число (вільний член рівняння).

5°. Загальне рівняння площини та його дослідження.

Усі виведені вище рівняння площин (див. (3.3.3), (3.3.5) – (3.3.7)) є лінійними (алгебраїчними) рівняннями відносно змінних x, y, z – поточних координат точок площини. Тому рівняння (3.3.8) називають **загальним рівнянням** площини, або **рівнянням площини у загальному вигляді**.

Теорема 3.3.1 (про загальне рівняння площини):

- 1) будь-яка площина описується рівнянням (3.3.8);
- 2) кожне рівняння виду (3.3.8) визначає площину.

Д о в е д е н н я базується на рівнянні (3.3.7).

1. Довільну площину згідно із задачею 3.3.4 можна описати рівнянням (3.3.7), звідки і отримуємо загальне рівняння.

2. Нехай задано рівняння (3.3.8), у якому параметри A, B, C не дорівнюють одночасно нулю ($A^2 + B^2 + C^2 \neq 0$). Покладемо, наприклад, $A \neq 0$ і виконаємо тотожні перетворення:

$$Ax + By + Cz + D = 0 \Rightarrow A\left(x - \frac{-D}{A}\right) + B(y - 0) + C(z - 0) = 0.$$

Отримане рівняння описує площину, яка проходить через точку на осі Ox : $(-D/A, 0, 0)$, і має нормальний вектор $\vec{N} = (A, B, C)$.

Дослідження загального рівняння площини передбачає з'ясування особливостей розташування площини відносно координатних осей і площин залежно від рівності (чи не рівності) нулю тих чи інших із чисел A, B, C, D . Відповідні висновки будемо робити, спираючись на те, як напрямлений нормальний вектор. Для стислості записів домовимось указувати тільки рівні нулеві параметри (решту, за замовчуванням, вважаємо не нулями).

Якщо жодне з чисел A, B, C, D не нуль, то кажуть, що рівняння (3.3.8) визначає площину π **загального положення**.

Для інших випадків маємо:

1) $D = 0 \Rightarrow Ax + By + Cz = 0$ – площина проходить через початок координат O , або, що теж саме, точка O належить площині π ($O \in \pi$);

$$\begin{aligned} 2) \quad (A = 0) &\Leftrightarrow By + Cz + D = 0 \Leftrightarrow |\overline{N} \perp Ox| \Leftrightarrow \pi \parallel Ox, \\ (B = 0) &\Leftrightarrow Ax + Cz + D = 0 \Leftrightarrow |\overline{N} \perp Oy| \Leftrightarrow \pi \parallel Oy, \\ (C = 0) &\Leftrightarrow Ax + By + D = 0 \Leftrightarrow |\overline{N} \perp Oz| \Leftrightarrow \pi \parallel Oz; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 3) \quad (A = D = 0) &\Leftrightarrow By + Cz = 0 \Leftrightarrow |\overline{N} \perp Ox, O \in \pi| \Leftrightarrow \pi \supset Ox, \\ (B = D = 0) &\Leftrightarrow Ax + Cz = 0 \Leftrightarrow |\overline{N} \perp Oy, O \in \pi| \Leftrightarrow \pi \supset Oy, \\ (C = D = 0) &\Leftrightarrow Ax + By = 0 \Leftrightarrow |\overline{N} \perp Oz, O \in \pi| \Leftrightarrow \pi \supset Oz; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 4) \quad (A = B = 0) &\Leftrightarrow Cz + D = 0 \Leftrightarrow |\overline{N} \perp Ox, \overline{N} \perp Oy| \Leftrightarrow \pi \parallel xOy, \\ (A = C = 0) &\Leftrightarrow By + D = 0 \Leftrightarrow |\overline{N} \perp Ox, \overline{N} \perp Oz| \Leftrightarrow \pi \parallel xOz, \\ (B = C = 0) &\Leftrightarrow Ax + D = 0 \Leftrightarrow |\overline{N} \perp Oy, \overline{N} \perp Oz| \Leftrightarrow \pi \parallel yOz; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 5) \quad (A = B = D = 0) &\Leftrightarrow Cz = 0 \Leftrightarrow |\overline{N} \perp xOy, O \in \pi| \Leftrightarrow \pi - \text{площина } xOy, \\ (B = C = D = 0) &\Leftrightarrow Ax = 0 \Leftrightarrow |\overline{N} \perp yOz, O \in \pi| \Leftrightarrow \pi - \text{площина } yOz, \\ (A = C = D = 0) &\Leftrightarrow By = 0 \Leftrightarrow |\overline{N} \perp xOz, O \in \pi| \Leftrightarrow \pi - \text{площина } xOz, \end{aligned}$$

де \supset – символ включення ($\pi \supset Oz$ – площина включає вісь Oz).

Обміркуйте, яку фігуру описує рівняння (3.3.8) за умови, що $A = B = C = D = 0$: $0 \cdot x + 0 \cdot y + 0 \cdot z + 0 = 0$.

Основні задачі на площину

Задача 3.3.5. Дві площини задані загальними рівняннями:

$$\begin{aligned} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 &= 0 \quad (\pi_1), \quad \overline{N}_1 = (A_1, B_1, C_1); \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 &= 0 \quad (\pi_2), \quad \overline{N}_2 = (A_2, B_2, C_2). \end{aligned} \tag{3.3.9}$$

Установити умови, за яких площини: 1) перетинаються; 2) паралельні; 3) збігаються.

Розв'язання аналогічне тому, як це робилося для прямої на площині (див. задачу 3.1.8).

1. Згідно з аксіомою стереометрії, якщо дві різні площини мають спільну точку, то їхнім перетином є пряма ($\pi_1 \cap \pi_2 = l$). З алгебраїчної точки зору це означає, що система двох рівнянь із (3.3.9) повинна бути сумісна і невизначена (мати безліч розв'язків). Отже, ранги основної і розширеної матриць системи мають бути однаковими, рівними 2, тобто принаймні один із мінорів 2-го порядку відмінний від нуля:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} A_1 & B_1 & C_1 & -D_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 & -D_2 \end{array} \right) \Rightarrow |r=2| \Rightarrow \left(\frac{A_1}{A_2} \neq \frac{B_1}{B_2} \vee \frac{A_1}{A_2} \neq \frac{C_1}{C_2} \vee \frac{B_1}{B_2} \neq \frac{C_1}{C_2} \right) \quad (3.3.10)$$

– **умова перетину** площин; \vee – символ *логічної суми*, читається: „або”.

Пряма l визначатиметься трьома параметричними рівняннями (буде наведено далі), в яких в ролі параметра виступатиме одна зі змінних x, y, z .

2. Якщо площини паралельні ($\pi_1 \parallel \pi_2$), то вони не мають спільних точок, а значить, нормальні вектори колінеарні і їхні координати пропорційні. Система, складена із рівнянь площин, має бути несумісною, це означає, що розширена матриця містить у собі мінор 2-го порядку, відмінний від нуля, а всі мінори 2-го порядку основної матриці рівні нулеві.

Отже, **умова паралельності** площин має вигляд:

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2} \neq \frac{D_1}{D_2}. \quad (3.3.11)$$

3. Якщо площини збігаються ($\pi_1 \mid \pi_2$), то вони повинні описуватись (за логікою) одним рівнянням. Це узгоджується і з алгебраїчним підходом: усі мінори 2-го порядку розширеної матриці повинні бути нулями, отже, її ранг дорівнює одиниці, а **умова збігу** площин така:

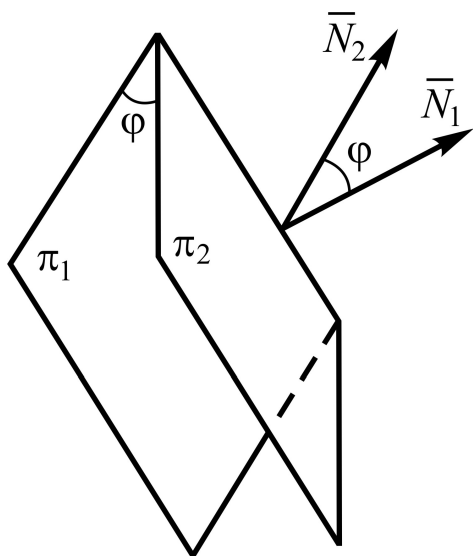
$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2} = \frac{D_1}{D_2}. \quad (3.3.12)$$

Співвідношення (3.3.10) – (3.3.12) можна тлумачити як критерії певного взаємного розташування площин (чому?).

У разі перетину площин ставиться, як правило, питання не тільки про те, по якій прямій вони перетинаються, а і який кут вони утворюють між собою.

Під **кутом між двома площинами** розуміють один із двох суміжних кутів між їхніми нормальними векторами (частіше беруть гострий кут).

Задача 3.3.6. Знайти кут між двома площинами, заданими рівняннями у загальному вигляді (див. (3.3.9)).



Розв'язання базується на формулі кута між двома векторами: $\vec{N}_1 = (A_1, B_1, C_1)$, $\vec{N}_2 = (A_2, B_2, C_2)$ (рис. 3.3.5), а саме:

$$\cos \varphi = \frac{\vec{N}_1 \cdot \vec{N}_2}{N_1 \cdot N_2} = \frac{A_1 A_2 + B_1 B_2 + C_1 C_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2} \cdot \sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}}.$$

Звідки

Рис. 3.3.5. Кут між площинами

$$\varphi = \arccos(\cos \varphi). \quad (3.3.13)$$

Наслідок:

$$\begin{aligned} \pi_1 \perp \pi_2 &\Rightarrow \vec{N}_1 \perp \vec{N}_2 \Rightarrow \cos \varphi = 0 \Rightarrow \vec{N}_1 \cdot \vec{N}_2 = 0 \Rightarrow \\ &\Rightarrow A_1 A_2 + B_1 B_2 + C_1 C_2 = 0 \end{aligned} \quad (3.3.14)$$

– **умова ортогональності** площин. (Наведіть коментар до наслідку і словесне формулювання умови (3.3.14).)

При розв'язанні задач із конкретними даними оперують, як правило, рівняннями площини у загальному вигляді, проте у багатьох випадках буває зручнішим використання інших видів рівнянь.

Задача 3.3.7. Здійснити перехід від загального рівняння площини до рівняння: 1) у відрізках на осях (3.3.5); 2) у нормальному вигляді (3.3.6).

Розв'язання зводиться до тотожних (елементарних алгебраїчних) перетворень вихідного рівняння.

$$\begin{aligned} 1. \quad Ax + By + Cz + D = 0 &\Rightarrow Ax + By + Cz = -D \Rightarrow |D \neq 0| \Rightarrow \\ \Rightarrow \frac{Ax}{-D} + \frac{By}{-D} + \frac{Cz}{-D} &= 1 \Rightarrow \frac{x}{-D/A} + \frac{y}{-D/B} + \frac{z}{-D/C} = 1 \Rightarrow \frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1, \end{aligned}$$

де $a = -D/A$, $b = -D/B$, $c = -D/C$. (Прокоментуйте самостійно ланцюжок наведених рівностей.)

За рівнянням площини у відрізках на осях зручно наносити сліди розглядуваної площини на координатних площинах (див. рис. 3.3.2).

2. Перехід до нормального рівняння площини здійснюється за допомогою нормувального множника M аналогічно тому, як це робилося для прямої в \mathbf{R}^2 (див. задачу 3.1.11):

$$\begin{aligned} Ax + By + Cz + D = 0 &\Rightarrow \left| M = \frac{1}{\pm N}, \text{ де } N = \sqrt{A^2 + B^2 + C^2} \right| \Rightarrow \\ \Rightarrow \frac{A}{\pm N}x + \frac{B}{\pm N}y + \frac{C}{\pm N}z + \frac{D}{\pm N} = 0 &\Rightarrow \left| \begin{aligned} \cos \alpha &= \frac{A}{\pm N}, \quad \cos \beta = \frac{B}{\pm N} \\ \cos \gamma &= \frac{C}{\pm N} \end{aligned} \right| \Rightarrow \\ &\Rightarrow \cos \alpha \cdot x + \cos \beta \cdot y + \cos \gamma \cdot z - p = 0, \end{aligned}$$

а знак перед коренем береться протилежним знакові вільного члена D .

За рівнянням площини у нормальному вигляді відразу визначаються напрямні косинуси нормалі до площини і її відстань до початку координат.

Приклад переходу від (3.3.8) до (3.3.6):

$$\begin{aligned} 2x - 3y + 6z + 14 = 0 &\Rightarrow \left| D > 0 \Rightarrow M = \frac{-1}{\sqrt{4+9+36}} = -\frac{1}{7} \right| \Rightarrow \\ \Rightarrow -\frac{2}{7}x + \frac{3}{7}y - \frac{6}{7}z - 2 = 0 &\Rightarrow \left(\cos \alpha = -\frac{2}{7}, \cos \beta = \frac{3}{7}, \cos \gamma = -\frac{6}{7}, p = 2 \right). \end{aligned}$$

Висновок: площина розташована на відстані двох одиниць від початку координат, а нормаль до неї, що проведена із точки O , складає гострий кут із віссю Oy і тупі кути з осями Ox , Oz (чому?).

Щодо задачі відшукування відстані довільної фіксованої точки $M_0(x_0, y_0, z_0)$ до площини, заданої нормальним рівнянням, убачаємо її аналогію із задачею 3.1.12 відшукування відстані d від точки до прямої в \mathbf{R}^2 . Навіть можна скористатися рис. 3.1.10, вважаючи площину розташованою перпендикулярно площині xOy .

Відповідна формула має вигляд:

$$d = \left| x_0 \cos \alpha + y_0 \cos \beta + z_0 \cos \gamma - p \right|. \quad (3.3.15)$$

Якщо площина описується загальним рівнянням, то

$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}. \quad (3.3.16)$$

Сформулюйте, що треба зробити (згідно з (3.3.15), (3.3.16)), щоб обчислити відстань від точки до площини.

За аналогією із задачею 3.1.13 про побудову рівнянь бісектрис кутів, утворених двома прямими, розв'яжемо задачу відшукування рівнянь **бісекторних площин** – площин, які поділяють навпіл двогранні кути, утворені заданими площинами.

Задача 3.3.8. Знайти рівняння г.м.т., рівновіддалених від двох площин, заданих загальними рівняннями:

$$\begin{aligned} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 &= 0 \quad (\pi_1), \quad \bar{N}_1 = (A_1, B_1, C_1); \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 &= 0 \quad (\pi_2), \quad \bar{N}_2 = (A_2, B_2, C_2), \end{aligned}$$

тобто установити рівняння бісекторних площин для π_1 і π_2 .

Розв'язання принципово нічим не відрізняється від розв'язання задачі 3.1.13, бо зводиться до наведення тих самих міркувань; навіть можна скористатися рис. 3.1.11.

Нехай $M(X, Y, Z)$ – довільна точка бісекторної площини, а d_1, d_2 – її відстані до площин π_1 і π_2 відповідно, причому $d_1 = d_2$. За формулою (3.3.16) маємо:

$$\frac{1}{N_1} |A_1X + B_1Y + C_1Z + D_1| = \frac{1}{N_2} |A_2X + B_2Y + C_2Z + D_2|,$$

$$\text{де } N_1 = \sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2}, \quad N_2 = \sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}.$$

Знімаємо знаки модулів і отримуємо рівняння двох бісекторних площин:

$$N_2 (A_1X + B_1Y + C_1Z + D_1) = N_1 (A_2X + B_2Y + C_2Z + D_2), \quad (3.3.17)$$

$$N_2 (A_1X + B_1Y + C_1Z + D_1) = -N_1 (A_2X + B_2Y + C_2Z + D_2). \quad (3.3.18)$$

Приклад. Знайдемо рівняння бісекторних площин для площин $\pi_1 = xOz$ і $\pi_2 = yOz$ (рис. 3.3.6).

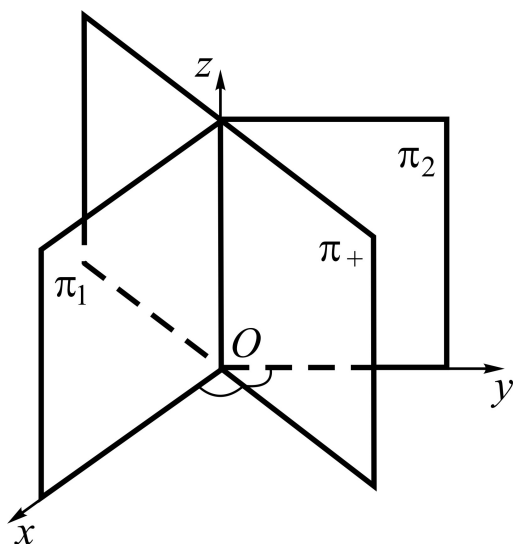


Рис. 3.3.6. Бісекторна площина

Розв'язання полягає у використанні співвідношень (3.3.17), (3.3.18), в яких перейдемо до звичного позначення поточних змінних – малими буквами x, y, z .

Залучимо рівняння площин π_1, π_2 , тоді

$$\begin{aligned} \pi_1: y=0 &\Rightarrow \bar{N}_1 = (0,1,0) = \bar{j} \\ \pi_2: x=0 &\Rightarrow \bar{N}_2 = (1,0,0) = \bar{i} \end{aligned} \Rightarrow \Rightarrow \pi_{\pm}: |y|=|x| \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \pi_+: y=x \Rightarrow x-y=0 \Rightarrow \bar{N}_+ = (1,-1,0) \\ \pi_-: y=-x \Rightarrow x+y=0 \Rightarrow \bar{N}_- = (1,1,0), \end{cases} \quad (3.3.19)$$

де π_{\pm}, \bar{N}_{\pm} – позначення бісекторних площин і їхніх нормальних векторів відповідно до (3.3.17), (3.3.18).

Яке з рівнянь (3.3.17), (3.3.18) описує ту чи іншу бісекторну площину, залежить від напрямку векторів \bar{N}_1, \bar{N}_2 : якщо змінити напрям одного з них (обох) на протилежний, то рівняння π_+ і π_- поміняються місцями (залишаться без зміни).

Зауваження. Ми неодноразово зіставляли рівняння прямої в \mathbf{R}^2 і площини в \mathbf{R}^3 , а також формули для обчислення їхніх числових характеристик, і проводили відповідні аналогії. Але для площини, на відміну від прямої, не розглядалося поняття напрямного вектора як вектора, паралельного площині. Отже, не виводилось (за аналогією з канонічним рівнянням прямої) рівняння площини, що проходить через задану точку $M_0(x_0, y_0, z_0)$ і має напрямний вектор $\bar{s} = (m, n, p)$. Чому? А тому, що за таких умов існує не єдина площина, їх буде безліч. Моделлю у цьому випадку може бути розгорнута віялом книжка (обміркуйте).

А чи можливо побудувати рівняння, яке б описувало одну-єдину площину, якщо задано:

- 1) точку і два напрямні неколінеарні вектори;
- 2) дві точки і напрямний вектор?

Задача 3.3.9. Скласти рівняння площини, яка проходить через точку $M_0(x_0, y_0, z_0)$ і має неколінеарні напрямні вектори: $\bar{s}_1 = (m_1, n_1, p_1)$, $\bar{s}_2 = (m_2, n_2, p_2)$.

Розв'язання. Помістимо початки напрямних векторів у точку M_0 , як показано на рис. 3.3.7, тоді вони цілком належатимуть площині π .

Оскільки за аксіомою через дві прямі, що перетинаються, можна провести площину, і до того ж тільки одну, то розглядувана задача має єдиний розв'язок.

За означенням (2.2.13) векторного добутку векторів $\bar{s}_1 \times \bar{s}_2 \perp \pi$, а це означає, що він визначає один із нормальних векторів площини (див. рис. 3.3.7).

Залучаючи формулу обчислення векторного добутку векторів в координатній формі (2.2.20), отримуємо:

$$\bar{N} = (A, B, C) = \bar{s}_1 \times \bar{s}_2 = \left(\begin{vmatrix} n_1 & p_1 \\ n_2 & p_2 \end{vmatrix}, - \begin{vmatrix} m_1 & p_1 \\ m_2 & p_2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} m_1 & n_1 \\ m_2 & n_2 \end{vmatrix} \right). \quad (3.3.20)$$

Залишається використати рівняння (3.3.7):

$$A(x-x_0) + B(y-y_0) + C(z-z_0) = 0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} x-x_0 & y-y_0 & z-z_0 \\ m_1 & n_1 & p_1 \\ m_2 & n_2 & p_2 \end{vmatrix} = 0. \quad (3.3.21)$$

Пропонуємо самостійно проаналізувати можливість побудови рівняння площини за двома точками і напрямним вектором.

Наведених відомостей про площину достатньо для розв'язання всіх типових задач, передбачених робочою програмою.

Крім площин, в аналітичній геометрії вивчаються більш складні геометричні фігури-поверхні. Рівняння однієї з них, сферичної, ми вже вивели (див. (3.3.2)), інші поверхні будуть розглядатися пізніше.

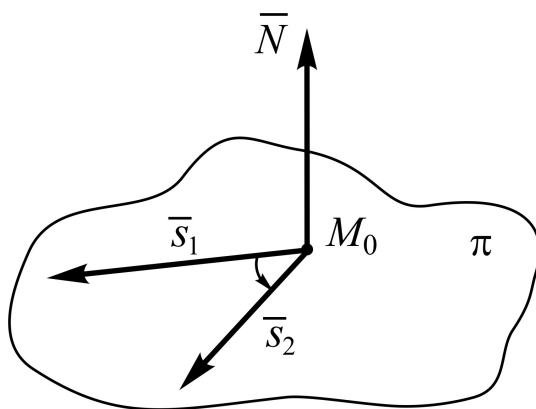


Рис. 3.3.7. Напрямні вектори і точка на площині

3.4. Пряма у просторі (в \mathbf{R}^3). Пряма і площина в \mathbf{R}^3

Різновиди рівнянь прямої в \mathbf{R}^3

Принциповий підхід до висвітлення цього питання залишається таким самим, як і для прямих в \mathbf{R}^2 , а саме: вибирається довільна точка на прямій і за даними характеристиками, які повинні визначати тільки одну пряму (на підставі аксіом і теорем елементарної геометрії), установлюють зв'язок між поточними координатами точок прямої x, y, z , числовими параметрами і константами заданих характеристик.

1°. Канонічні і параметричні рівняння прямої.

Будь-який не нульовий вектор, паралельний даній прямій, називається **напрямним вектором** цієї прямої.

Задача 3.4.1. Побудувати рівняння прямої, яка проходить через точку $M_0(x_0, y_0, z_0)$ і має напрямний вектор $\bar{s} = (m, n, p)$ (рис. 3.4.1).

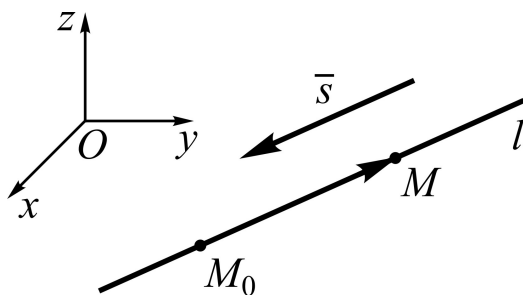


Рис. 3.4.1. Точка на прямій і напрямний вектор

Розв'язання. Для будь-якої точки прямої $M(x, y, z)$, з якою пов'яжемо вектор $\overline{M_0M}$, маємо: вектори $\overline{M_0M} = (x - x_0, y - y_0, z - z_0)$ і $\bar{s} = (m, n, p)$ колінеарні, а значить їхні координати пропорційні, тобто

$$\frac{x - x_0}{m} = \frac{y - y_0}{n} = \frac{z - z_0}{p} \quad (3.4.1)$$

– канонічні рівняння прямої.

Якщо позначити коефіцієнт пропорційності через t (для різних значень поточних координат він буде різний, чому?), то отримаємо **параметричні рівняння прямої**:

$$\left(\frac{x - x_0}{m} = t, \frac{y - y_0}{n} = t, \frac{z - z_0}{p} = t \right) \Rightarrow \begin{cases} x = x_0 + mt \\ y = y_0 + nt \\ z = z_0 + pt, \quad \forall t \in \mathbf{R}. \end{cases} \quad (3.4.2)$$

Зіставте рівняння (3.4.1), (3.4.2) з рівняннями (3.1.5), (3.1.7)

Вибираючи в якості напрямного вектора одиничний вектор $\bar{s}_0 = (\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma)$, із (3.4.1) отримаємо:

$$\frac{x - x_0}{\cos \alpha} = \frac{y - y_0}{\cos \beta} = \frac{z - z_0}{\cos \gamma}, \quad (3.4.3)$$

де $\alpha = \bar{s}_0 \wedge Ox$, $\beta = \bar{s}_0 \wedge Oy$, $\gamma = \bar{s}_0 \wedge Oz$.

Якщо в (3.4.1) один або два знаменника відношень рівні нулю (а чому не всі три?), то відповідні чисельники теж повинні бути рівними нулю (щоб дріб не губив смисл). З геометричної точки зору це означати-ме, що напрямний вектор перпендикулярний одній або двом осям координат (обґрунтуйте).

Наприклад, стосовно прямої, яка описується рівняннями $\frac{x-2}{0} = \frac{y+5}{3} = \frac{z-1}{0}$, можна сказати, що вона проходить через точку $(2, -5, 1)$ і розташована перпендикулярно площині xOz ; її параметричні рівняння виглядають так: $x = 2 + 0 \cdot t$, $y = -5 + 3 \cdot t$, $z = 1 + 0 \cdot t$.

2°. Рівняння прямої, яка проходить через дві задані точки.

Задача 3.4.2. Скласти рівняння прямої за відомими її двома точками: $M_1(x_1, y_1, z_1)$, $M_2(x_2, y_2, z_2)$ (рис. 3.4.2).

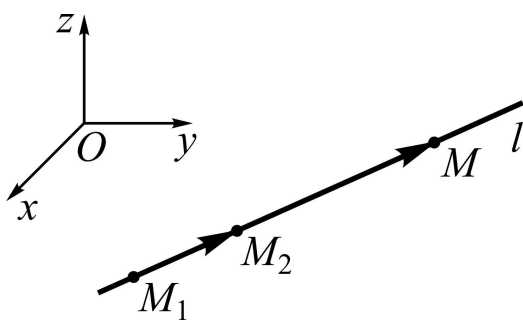


Рис. 3.4.2. Дві дані точки на прямій

Розв'язання. Для будь-якої точки прямої $M(x, y, z)$, з якою пов'яжемо вектор $\overline{M_1M}$, маємо: вектори $\overline{M_1M} = (x - x_1, y - y_1, z - z_1)$ і $\overline{M_1M_2} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1)$, який побудуємо на відрізку M_1M_2 , колінеарні.

Отож, отримуємо співвідношення, яке задовольняють координати точок прямої, і тільки вони:

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{z - z_1}{z_2 - z_1}. \quad (3.4.4)$$

Рівняння (3.4.4) є окремим випадком (3.4.1), у якому в ролі m, n, p виступають відповідно $x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1$, а в ролі $x_0, y_0, z_0 - x_1, y_1, z_1$. В якості точки (x_0, y_0, z_0) можна взяти і (x_2, y_2, z_2) , а в якості $\vec{s} = (m, n, p)$ – вектор $\overline{M_2 M_1}$. Підрахуйте, скільки варіантів рівнянь однієї і тієї ж прямої l можна скласти залежно від вибору точки (однієї із двох заданих) і напрямку вектора \vec{s} (за координатами двох даних точок).

3°. Загальне рівняння прямої та його дослідження.

За однією з аксіом стереометрії (від грецьк. stereos – просторовий і metreo – вимірюю), якщо дві різні площини мають спільну точку, то їхнім перетином є пряма:

$$(M_0(x_0, y_0, z_0) \in \pi_1, M_0(x_0, y_0, z_0) \in \pi_2) \Rightarrow (\pi_1 \cap \pi_2 = l \ni M_0).$$

З алгебраїчної точки зору це означає, що система рівнянь, якими описуються площини, сумісна і має безліч розв'язків:

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 & (\pi_1), \quad \overline{N_1} = (A_1, B_1, C_1); \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0 & (\pi_2), \quad \overline{N_2} = (A_2, B_2, C_2), \end{cases} \quad (3.4.5)$$

де $\frac{A_1}{A_2} \neq \frac{B_1}{B_2} \vee \frac{A_1}{A_2} \neq \frac{C_1}{C_2} \vee \frac{B_1}{B_2} \neq \frac{C_1}{C_2}$, або у поданні відповідно через мінори розширеної матриці системи – визначники, складені із коефіцієнтів при змінних:

$$\Delta_{xy} = \begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix} \neq 0 \vee \Delta_{xz} = \begin{vmatrix} A_1 & C_1 \\ A_2 & C_2 \end{vmatrix} \neq 0 \vee \Delta_{yz} = \begin{vmatrix} B_1 & C_1 \\ B_2 & C_2 \end{vmatrix} \neq 0. \quad (3.4.6)$$

Індекси у позначеннях визначників показують, із коефіцієнтів при яких змінних утворюються мінори.

Загальним рівнянням прямої l в \mathbf{R}^3 , або рівнянням прямої у загальному вигляді, називається система рівнянь двох площин (3.4.5), які визначають пряму l (рис. 3.4.3).

Наприклад, одну із прямих простору визначає система

$$\begin{cases} 2x - 3y + 5z + 10 = 0 \\ 3x - 6y + 10z + 10 = 0, \end{cases}$$

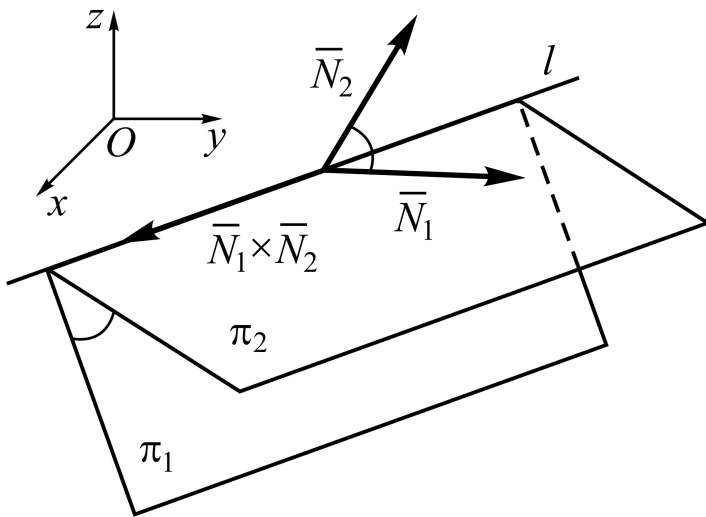


Рис. 3.4.3. Площини π_1 , π_2 і пряма l

бо існує відмінний від нуля мі-
нор

$$\Delta_{xy} = \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 3 & -6 \end{vmatrix} = -3 \neq 0.$$

Для інших визначників маємо:

$$\Delta_{xz} = \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 10 \end{vmatrix} = 5 \neq 0,$$

$$\Delta_{yz} = \begin{vmatrix} -3 & 5 \\ -6 & 10 \end{vmatrix} = 0.$$

Теорема 3.4.1 (про загальне рівняння прямої):

- 1) будь-яка пряма описується системою виду (3.4.5);
- 2) кожна система (3.4.5) визначає пряму.

Д о в е д е н н я проведемо на основі канонічних рівнянь (3.4.1).

1. Довільна пряма описується подвійною рівністю відношень:

$$\frac{x - x_0}{m} = \frac{y - y_0}{n} = \frac{z - z_0}{p},$$

яка рівносильна (еквівалентна) системі двох рівнянь із трьох:

$$\frac{x - x_0}{m} = \frac{y - y_0}{n}, \quad \frac{x - x_0}{m} = \frac{z - z_0}{p}, \quad \frac{y - y_0}{n} = \frac{z - z_0}{p}, \quad (3.4.7)$$

тому що кожне з них є наслідком двох інших (дві величини, рівні поодиноці третій, рівні між собою).

Візьмемо, наприклад, із (3.4.7) перші два рівняння, тоді отримаємо:

$$\begin{cases} n(x - x_0) - m(y - y_0) = 0 \\ p(x - x_0) - m(z - z_0) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} nx - my + (my_0 - nx_0) = 0 \\ px - mz + (mz_0 - px_0) = 0. \end{cases} \quad (3.4.8)$$

Співвідношення із (3.4.8) є рівняннями площин у загальному вигляді; перша з нормальним вектором $\bar{N}_1 = (n, -m, 0)$, друга – $\bar{N}_2 = (p, 0, -m)$.

Висновок: від канонічних рівнянь прямої завжди можна перейти до рівняння прямої у загальному вигляді. *Випишіть* самостійно інші варіанти переходу від (3.4.1) до (3.4.5).

2. Справедливість другої частини теореми відразу впливає з наведеної вище аксіоми (*прокоментуйте, як це?*).

Зауваження. При доведенні першої частини теореми було показано, як здійснюється перехід від канонічних рівнянь прямої до загального. Розглянемо заодно обернену задачу, розв'язання якої можна стлумачити, як конструктивний підхід до доведення другої частини теореми 3.4.1.

Задача 3.4.3. Здійснити перехід від загального рівняння прямої (3.4.5) до її канонічних рівнянь:

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \ (\pi_1) \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0 \ (\pi_2) \end{cases} \Rightarrow \left(\frac{x - x_0}{m} = \frac{y - y_0}{n} = \frac{z - z_0}{p} \ (l) \right). \quad (3.4.9)$$

Розв'язання зводиться до відшукування координат x_0, y_0, z_0 однієї з точок прямої і установлення одного з її напрямних векторів $\bar{s} = (m, n, p)$. Здійснюється це таким чином:

1) *вибираємо* один відмінний від нуля мінор із (3.4.6), нехай це буде $\Delta_{xy} = A_1B_2 - A_2B_1$; покладаємо z_0 рівним нулю і розв'язуємо сумісну і визначену (чому?) систему 2×2 , яка дає базисний розв'язок системи (3.4.5):

$$\begin{aligned} & \begin{cases} A_1x + B_1y = -D_1 \\ A_2x + B_2y = -D_2 \end{cases} \Rightarrow \\ & \Rightarrow \left(\Delta_x = \begin{vmatrix} -D_1 & B_1 \\ -D_2 & B_2 \end{vmatrix}, \Delta_y = \begin{vmatrix} A_1 & -D_1 \\ A_2 & -D_2 \end{vmatrix} \right) \Rightarrow \begin{cases} x_0 = \Delta_x / \Delta_{xy} \\ y_0 = \Delta_y / \Delta_{xy} \\ z_0 = 0 \end{cases}. \quad (3.4.10) \end{aligned}$$

Зазначимо, що для відшукування точки на прямій можна брати будь-який базисний мінор;

2) *знаходимо* векторний добуток $\bar{N}_1 \times \bar{N}_2$ нормальних векторів площин π_1, π_2 (див. рис. 3.4.3), який можна взяти в якості напрямного вектора прямої l , бо він перпендикулярний площині, що визначається векторами \bar{N}_1 і \bar{N}_2 , а значить, паралельний прямій l або лежатиме на ній:

$$\bar{N}_1 \times \bar{N}_2 = (\Delta_{yz}, -\Delta_{xz}, \Delta_{xy}) \Rightarrow \bar{s} = (m, n, p) = (\Delta_{yz}, -\Delta_{xz}, \Delta_{xy}). \quad (3.4.11)$$

Таким чином, система (3.4.5) визначає пряму, яка проходить через точку $(x_0, y_0, z_0) = (\Delta_x/\Delta_{xy}, \Delta_y/\Delta_{xy}, 0)$ і має напрямний вектор $\bar{s} = (\Delta_{yz}, -\Delta_{xz}, \Delta_{xy})$:

$$\frac{x - \Delta_x/\Delta_{xy}}{\Delta_{yz}} = \frac{y - \Delta_y/\Delta_{xy}}{-\Delta_{xz}} = \frac{z}{\Delta_{xy}}. \quad (3.4.11)$$

Наприклад, для прямої $\begin{cases} x - 2y + 2z = 0 \\ 2x - 4y + z + 1 = 0 \end{cases}$ отримаємо:

$$\begin{aligned} 1) \left(\Delta_{yz} = \begin{vmatrix} -2 & 2 \\ -4 & 1 \end{vmatrix} = 6 \neq 0, x_0 = 0 \right) &\Rightarrow \begin{cases} -2y + 2z = 0 \\ -4y + z = -1 \end{cases} \Rightarrow \\ \Rightarrow \left(\Delta_y = \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 2, \Delta_z = \begin{vmatrix} -2 & 0 \\ -4 & -1 \end{vmatrix} = 2 \right) &\Rightarrow (x_0, y_0, z_0) = (0, 1/3, 1/3); \\ 2) \left[\begin{array}{l} \bar{N}_1 = (1, -2, 2) \\ \bar{N}_2 = (2, -4, 1) \end{array} \right] &\Rightarrow \bar{s} = (m, n, p) = \bar{N}_1 \times \bar{N}_2 = (6, 3, 0) \Rightarrow \\ \Rightarrow \frac{x}{6} = \frac{y - 1/3}{3} = \frac{z - 1/3}{0} &\Rightarrow l \perp O_z. \end{aligned} \quad (3.4.12)$$

(Зведіть (3.4.12) до: загального вигляду; параметричної форми.)

Дослідження загального рівняння прямої передбачає з'ясування особливостей розташування прямої відносно координатних осей чи площин залежно від рівності (або не рівності) нулеві тих чи інших із визначників Δ_{xy} , Δ_{xz} , Δ_{yz} ; при цьому будемо указувати тільки рівні нулю мінори, а інші вважатимемо, за замовчуванням, відмінними від нуля. Якщо всі мінори розширеної матриці системи не нулі, то кажуть, що (3.4.5) є рівнянням прямої **загального положення**.

В інших випадках, зважаючи на значення параметрів D_1 , D_2 і напрям вектора \bar{s} , маємо:

$$1) D_1 = D_2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z = 0 \\ A_2x + B_2y + C_2z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \text{пряма проходить через}$$

початок координат ($O \in l$);

$$2) \begin{cases} \Delta_{xy} = 0 \\ \Delta_{xz} = 0 \\ \Delta_{yz} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \bar{s} = (\Delta_{yz}, -\Delta_{xz}, 0) \\ \bar{s} = (\Delta_{yz}, 0, \Delta_{xy}) \\ \bar{s} = (0, -\Delta_{xz}, \Delta_{xy}) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} l \perp Oz \ (l \parallel xOy) \\ l \perp Oy \ (l \parallel xOz) \\ l \perp Ox \ (l \parallel yOz); \end{cases}$$

(Подумайте, як розташована пряма, якщо до того ж $D_1 = D_2 = 0$.)

$$3) \begin{cases} \Delta_{xy} = \Delta_{xz} = 0 \\ \Delta_{xy} = \Delta_{yz} = 0 \\ \Delta_{xz} = \Delta_{yz} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \bar{s} = (\Delta_{yz}, 0, 0) \\ \bar{s} = (0, -\Delta_{xz}, 0) \\ \bar{s} = (0, 0, \Delta_{xy}) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} l \perp yOz \ (l \parallel Ox) \\ l \perp xOz \ (l \parallel Oy) \\ l \perp xOy \ (l \parallel Oz); \end{cases} \quad (3.4.13)$$

$$4) \begin{cases} D_1 = D_2 = 0 \\ \text{і виконуються} \\ \text{умови 3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \bar{s} = (\Delta_{yz}, 0, 0) \\ \bar{s} = (0, -\Delta_{xz}, 0) \\ \bar{s} = (0, 0, \Delta_{xy}) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} l - \text{вісь } Ox: \begin{cases} y=0 \\ z=0 \end{cases} \\ l - \text{вісь } Oy: \begin{cases} x=0 \\ z=0 \end{cases} \\ l - \text{вісь } Oz: \begin{cases} x=0 \\ y=0. \end{cases} \end{cases}$$

Установимо, *наприклад*, як розташована у просторі пряма

$$\begin{cases} 2x - 3y + 7z = 0, & \bar{N}_1 = (2, -3, 7), \\ 4x - 6y - 3z = 0, & \bar{N}_2 = (4, -6, -3). \end{cases}$$

Розв'язання.

Оскільки $D_1 = D_2 = 0$, то пряма проходить через початок координат O (див. умову 1 (3.4.13)).

Для напрямного вектора $\bar{s} = (\Delta_{yz}, -\Delta_{xz}, \Delta_{xy})$ маємо:

$$\left(\Delta_{yz} = \begin{vmatrix} -3 & 7 \\ -6 & -3 \end{vmatrix} = 51, \Delta_{xz} = \begin{vmatrix} 2 & 7 \\ 4 & -3 \end{vmatrix} = -34, \Delta_{xy} = 0 \right) \Rightarrow \bar{s} = (51, 34, 0) \Rightarrow l \perp Oz.$$

Висновок: пряма лежить у площині xOy і проходить через точку O .

Основні задачі на пряму у просторі

Задача 3.4.4. Дві прямі l_1 і l_2 задані канонічними рівняннями:

$$\frac{x-x_1}{m_1} = \frac{y-y_1}{n_1} = \frac{z-z_1}{p_1} \quad (l_1), \quad \frac{x-x_2}{m_2} = \frac{y-y_2}{n_2} = \frac{z-z_2}{p_2} \quad (l_2). \quad (3.4.14)$$

Установити умови: 1) паралельності; 2) збігу; 3) перетину; 4) перехрещування двох прямих.

Розв'язання. Як і в усіх попередніх задачах, відштовхуємося від геометричних умов (1 – 4) і знаходимо відповідні аналітичні співвідношення між характеристиками рівнянь (3.4.14).

1. Якщо прямі l_1 і l_2 **паралельні**, то напрямні вектори прямих (за означенням) колінеарні, а тому їхні координати пропорційні:

$$l_1 \parallel l_2 \Rightarrow \left| \begin{array}{l} \bar{s}_1 = (m_1, n_1, p_1) \\ \bar{s}_2 = (m_2, n_2, p_2) \end{array} \right| \Rightarrow \frac{m_1}{m_2} = \frac{n_1}{n_2} = \frac{p_1}{p_2} \quad (3.4.15)$$

(ця умова не є достатньою, чому?).

2. Для **збігу** прямих, крім умови (3.4.15), повинна виконуватись умова: точка (x_1, y_1, z_1) задовольняє рівняння l_2 , а точка (x_2, y_2, z_2) – рівняння l_1 , тобто указані точки повинні бути спільними для обох прямих:

$$l_1 \parallel l_2 \Leftrightarrow \left(\frac{m_1}{m_2} = \frac{n_1}{n_2} = \frac{p_1}{p_2} \right) \wedge ((x_1, y_1, z_1) \in l_2 \vee (x_2, y_2, z_2) \in l_1). \quad (3.4.16)$$

Установимо, *наприклад*, чи збігаються прямі:

$$\frac{x-1}{3} = \frac{y+5}{2} = \frac{z}{1} \quad (l_1), \quad \bar{s}_1 = (3, 2, 1), \quad (x_1, y_1, z_1) = (1, -5, 0);$$

$$\frac{x-7}{6} = \frac{y+1}{4} = \frac{z-2}{2} \quad (l_2), \quad \bar{s}_2 = (6, 4, 2), \quad (x_2, y_2, z_2) = (7, -1, 2).$$

Для цього перевіряємо виконання умови (3.4.15): $\frac{3}{6} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$, а потім – однієї (чому?) з умов: $(x_1, y_1, z_1) \in l_2$, $(x_2, y_2, z_2) \in l_1$, що дає: $\left(\frac{1-7}{6} = \frac{-5+1}{4} = \frac{0-2}{2} = -1 \right) \Leftrightarrow$ прямі збігаються ($l_1 \parallel l_2$).

3. Нехай прямі l_1 і l_2 , задані рівняннями (3.4.14) (з напрямними векторами $\bar{s}_1 = (m_1, n_1, p_1)$, $\bar{s}_2 = (m_2, n_2, p_2)$ і $(x_1, y_1, z_1) \in l_1$, $(x_2, y_2, z_2) \in l_2$), перетинаються у точці $T_0(x_0, y_0, z_0)$ (рис. 3.4.4).

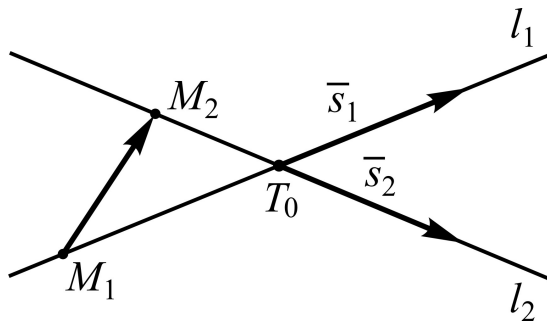


Рис. 3.4.4. Прямі l_1, l_2 і точка перетину T_0

За аксіомою стереометрії прямі, що перетинаються, визначають площину і до того ж тільки одну. Напрямні вектори \bar{s}_1 , \bar{s}_2 і вектор $\overline{M_1M_2} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1)$, який збудуємо на відрізку M_1M_2 , належать цій площині, тобто є компланарними. За умовою компланарності трьох векторів маємо:

$$\begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ m_1 & n_1 & p_1 \\ m_2 & n_2 & p_2 \end{vmatrix} = 0 \quad (3.4.17)$$

– **необхідна умова перетину прямих.**

Ця умова у сукупності з умовою, що напрямні вектори прямих не є колінеарними, дають **достатню умову перетину** прямих.

Умову (3.4.17) можна отримати як наслідок з (3.3.21) (*подумайте, як?*).

Перевіримо, *наприклад*, чи перетинаються (належать одній площині) прямі:

$$\begin{aligned} \frac{x+1}{3} = \frac{y-5}{2} = \frac{z+2}{-1} \quad (l_1), \quad \bar{s}_1 = (3, 2, -1), \quad (x_1, y_1, z_1) = (-1, 5, -2); \\ \frac{x-1}{4} = \frac{y}{0} = \frac{z+2}{3} \quad (l_2), \quad \bar{s}_2 = (4, 0, 3), \quad (x_2, y_2, z_2) = (1, 0, -2). \end{aligned}$$

Для цього складаємо визначник (3.4.17) і обчислюємо його:

$$\begin{vmatrix} 2 & -5 & 0 \\ 3 & 2 & -1 \\ 4 & 0 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & -5 & 0 \\ 3 & 2 & -1 \\ 13 & 6 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & -5 \\ 13 & 6 \end{vmatrix} = 77 \neq 0 \Rightarrow \text{прямі не перети-}$$

наються (не належать одній площині).

4. **Перехресними прямими** називаються дві прямі, через які неможливо провести площину. Тоді із викладеного вище випливає, що **умовою перехресування** двох прямих є нерівність нулеві визначника із (3.4.17). У розглянутому прикладі прямі перехресні.

У випадку перетину прямих природно постає питання про відшукування положення точки перетину T_0 (див. рис. 3.4.4).

Задача 3.4.5. Знайти координати точки перетину $T_0(x_0, y_0, z_0)$ прямих l_1 і l_2 , що описуються рівняннями (3.4.14).

Розв'язання задачі зводиться до аналізу на сумісність і розв'язанню системи лінійних алгебраїчних рівнянь, які описують прямі.

Перейдемо в (3.4.14) до рівнянь у параметричній формі (через допоміжні змінні t_1, t_2) і виключимо поточні змінні x, y, z , в результаті чого отримаємо 3×2 -систему відносно параметрів t_1, t_2 :

$$\begin{aligned} \left[\begin{array}{l} \frac{x-x_1}{m_1} = \frac{y-y_1}{n_1} = \frac{z-z_1}{p_1} = t_1 \\ \frac{x-x_2}{m_2} = \frac{y-y_2}{n_2} = \frac{z-z_2}{p_2} = t_2 \end{array} \right] &\Rightarrow \begin{cases} x_1 + m_1 t_1 = x_2 + m_2 t_2 \\ y_1 + n_1 t_1 = y_2 + n_2 t_2 \\ z_1 + p_1 t_1 = z_2 + p_2 t_2 \end{cases} \Rightarrow \\ \Rightarrow \begin{cases} m_1 t_1 - m_2 t_2 = x_2 - x_1 \\ n_1 t_1 - n_2 t_2 = y_2 - y_1 \\ p_1 t_1 - p_2 t_2 = z_2 - z_1 \end{cases} &\Rightarrow \bar{A} = \left(\begin{array}{cc|c} m_1 & -m_2 & x_2 - x_1 \\ n_1 & -n_2 & y_2 - y_1 \\ p_1 & -p_2 & z_2 - z_1 \end{array} \right) \end{aligned} \quad (3.4.18)$$

– розширена матриця системи.

Оскільки за умовою задачі прямі не є паралельними і перехресними, то перші два стовпці у матриці \bar{A} не пропорційні. Це означає, що існує принаймні один відмінний від нуля мінор 2-го порядку. Нехай він буде розташований у лівому верхньому куті, тоді отримаємо сумісну 2×2 -систему, розв'язок якої дає можливість знайти з першого (чи другого) із рівнянь (3.4.14) координати їхньої спільної точки:

$$\begin{cases} m_1 t_1 - m_2 t_2 = x_2 - x_1 \\ n_1 t_1 - n_2 t_2 = y_2 - y_1 \end{cases} \Rightarrow \left(t_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta}, t_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta} \right),$$

$$\text{де } \Delta = \begin{vmatrix} m_1 & -m_2 \\ n_1 & -n_2 \end{vmatrix}, \Delta_1 = \begin{vmatrix} x_2 - x_1 & -m_2 \\ y_2 - y_1 & -n_2 \end{vmatrix}, \Delta_2 = \begin{vmatrix} m_1 & x_2 - x_1 \\ n_1 & y_2 - y_1 \end{vmatrix};$$

тоді

$$(x_0, y_0, z_0) = (x_1 + m_1 t_1, y_1 + n_1 t_1, z_1 + p_1 t_1). \quad (3.4.19)$$

Значення якого параметра, t_1 чи t_2 , брати для підрахунку x_0, y_0, z_0 не суттєво (чому?). На практиці беруть простіше з них – менше або ціле, якщо таке є.

Зауваження. Координати спільної точки прямих можна знайти без переходу до параметричних рівнянь. При такому підході довелося б розв'язувати систему 4-х рівнянь з трьома невідомими (подумайте, як отримується відповідна система).

Знайдемо, *наприклад*, точку перетину прямих:

$$\begin{aligned} \frac{x-1}{2} = \frac{y+1}{3} = \frac{z}{-5} \quad (l_1), \quad \bar{s}_1 = (2, 3, -5), \quad (x_1, y_1, z_1) = (1, -1, 0); \\ \frac{x}{2} = \frac{y-1}{2/3} = \frac{z+2}{-2} \quad (l_2), \quad \bar{s}_2 = (2, 2/3, -2), \quad (x_2, y_2, z_2) = (0, 1, -2). \end{aligned}$$

Розв'язання:

1) *переконуємося* у тому, що прямі перетинаються (див. умову (3.4.17)), а напрямні вектори не є колінеарними:

$$\left(\begin{vmatrix} -1 & 2 & -2 \\ 2 & 3 & -5 \\ 2 & 2/3 & -2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & 2 & -2 \\ 0 & 7 & -9 \\ 0 & 14/3 & -6 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 7 & -9 \\ 14/3 & -6 \end{vmatrix} = 0; \frac{2}{2} \neq \frac{3}{2/3} \right) \Rightarrow$$

прямі перетинаються;

2) *складаємо* систему відносно параметрів t_1, t_2 (див. (3.4.18)), попередньо замінюючи \bar{s}_2 на вектор $\frac{3}{2} \cdot \bar{s}_2 = (3, 1, -3)$ (для чого?):

$$\begin{cases} 2t_1 + 1 = 3t_2 \\ 3t_1 - 1 = t_2 + 1 \\ -5t_1 = -3t_2 - 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2t_1 - 3t_2 = -1 \\ 3t_1 - t_2 = 2 \\ -5t_1 + 3t_2 = -2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2t_1 - 3t_2 = -1 \\ 3t_1 - t_2 = 2 \end{cases} \Rightarrow (t_1 = t_2 = 1).$$

Не обов'язково значення параметрів повинні бути рівними; цього б не сталося, якби не було заміни вектора \bar{s}_2 ;

3) підставляємо значення параметра, беручи, наприклад, l_1 :

$$(x_0 = 2t_1 + 1, y_0 = 3t_1 - 1, z_0 = -5t_1) \Rightarrow (x_0, y_0, z_0) = (3, 2, -5),$$

або l_2 :

$$(x_0 = 3t_2, y_0 = t_2 + 1, z_0 = -3t_2 - 2) \Rightarrow (x_0, y_0, z_0) = (3, 2, -5).$$

Таким чином, прямі перетинаються у точці $T_0(3, 2, -5)$.

Зауваження. Взаємне розташування прямих у просторі описують такими числовими характеристиками:

- 1) кутом φ , якщо l_1 і l_2 **перетинаються** (рис. 3.4.5-а);
- 2) відстанню d , якщо прямі l_1 і l_2 **паралельні** (рис. 3.4.5-б);
- 3) кутом φ і відстанню d , якщо прямі l_1 і l_2 **перехрещуються** (рис. 3.4.5-в).

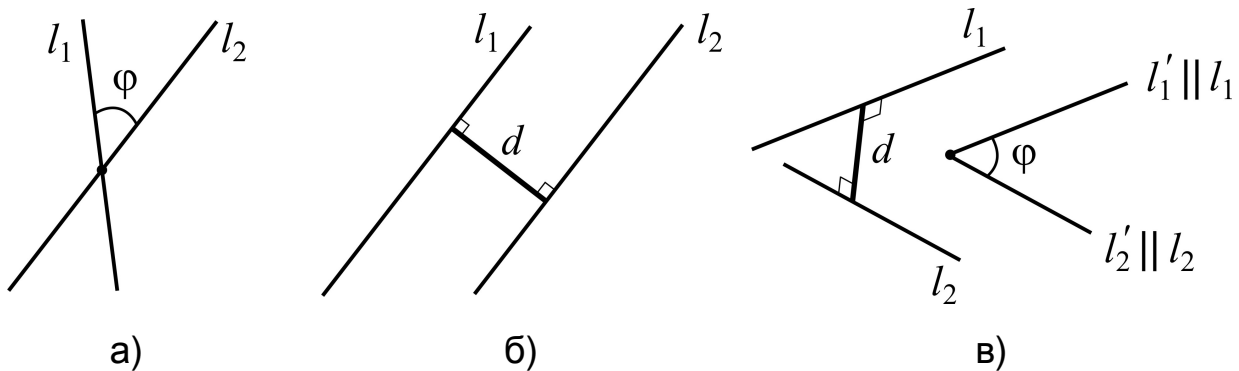


Рис. 3.4.5. Характеристики взаємного положення прямих, що:
а) перетинаються; б) паралельні; в) перехрещуються

Задача 3.4.6. Знайти кут між двома прямими, заданими: а) канонічними рівняннями; б) рівняннями загального вигляду.

Розв'язання. Як і для прямої в \mathbf{R}^2 , під **кутом між прямими** в \mathbf{R}^3 будемо розуміти будь-який із суміжних кутів між їхніми напрямними векторами.

$$\text{а) } \begin{cases} \frac{x-x_1}{m_1} = \frac{y-y_1}{n_1} = \frac{z-z_1}{p_1} & (l_1) \\ \frac{x-x_2}{m_2} = \frac{y-y_2}{n_2} = \frac{z-z_2}{p_2} & (l_2) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \vec{s}_1 = (m_1, n_1, p_1) \\ \vec{s}_2 = (m_2, n_2, p_2) \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \cos \varphi = \cos(l_1 \wedge l_2) = \cos(\bar{s}_1 \wedge \bar{s}_2) \Rightarrow \left| \text{за формулою (2.2.7)} \right| \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \cos \varphi = \frac{\bar{s}_1 \cdot \bar{s}_2}{s_1 \cdot s_2} = \frac{m_1 m_2 + n_1 n_2 + p_1 p_2}{\sqrt{m_1^2 + n_1^2 + p_1^2} \cdot \sqrt{m_2^2 + n_2^2 + p_2^2}} \Rightarrow \quad (3.4.20)$$

$$\Rightarrow \varphi = \arccos(\cos \varphi) \quad (\text{порівняйте з (3.1.22)}).$$

Як наслідок із (3.4.20) отримуємо **критерій перпендикулярності прямих**:

$$\begin{aligned} l_1 \perp l_2 &\Leftrightarrow \varphi = \pi/2 \Leftrightarrow \cos \varphi = 0 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow m_1 m_2 + n_1 n_2 + p_1 p_2 = 0; \end{aligned} \quad (3.4.21)$$

б) для прямих l_1 і l_2 , заданих загальними рівняннями (3.4.5), напрямні вектори виглядають так:

$$\bar{s}_1 = (\Delta_{yz}^{(1)}, -\Delta_{xz}^{(1)}, \Delta_{xy}^{(1)}), \quad \bar{s}_2 = (\Delta_{yz}^{(2)}, -\Delta_{xz}^{(2)}, \Delta_{xy}^{(2)}),$$

де компоненти векторів – мінори 2-го порядку відповідно основних матриць систем, які описують l_1 і l_2 .

Як і вище

$$\cos \varphi = \frac{\bar{s}_1 \cdot \bar{s}_2}{s_1 \cdot s_2} \Rightarrow \varphi = \arccos \frac{\bar{s}_1 \cdot \bar{s}_2}{s_1 \cdot s_2}. \quad (3.4.22)$$

Розписувати (3.4.22) детально не будемо, а покажемо застосування на *прикладі* відшукування кута між прямими:

$$\begin{cases} 3x - 2y + 5z = 0 \\ x + 3y - z + 1 = 0 \end{cases} (l_1), \quad \begin{cases} x - 3y + 5z - 2 = 0 \\ 5x + 3z - 4 = 0 \end{cases} (l_2).$$

Розв'язання. Випишемо матриці коефіцієнтів при змінних і обчислимо компоненти напрямних векторів:

$$\begin{pmatrix} 3 & -2 & 5 \\ 1 & 3 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow \bar{s}_1 = (-13, 8, 11); \quad \begin{pmatrix} 1 & -3 & 5 \\ 5 & 0 & 3 \end{pmatrix} \Rightarrow \bar{s}_2 = (-9, 22, 15).$$

За формулою (3.4.22) отримуємо:

$$\cos \varphi = \frac{13 \cdot 9 + 8 \cdot 22 + 11 \cdot 15}{\sqrt{374} \cdot \sqrt{790}} = \frac{229}{\sqrt{187} \cdot \sqrt{395}} \approx 0.8426 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \varphi = \arccos 0.8426 \approx 32.5^\circ.$$

Задача 3.4.7. Знайти відстань d між паралельними прямими:

$$\frac{x-x_1}{m} = \frac{y-y_1}{n} = \frac{z-z_1}{p} \quad (l_1), \quad \frac{x-x_2}{m} = \frac{y-y_2}{n} = \frac{z-z_2}{p} \quad (l_2). \quad (3.4.23)$$

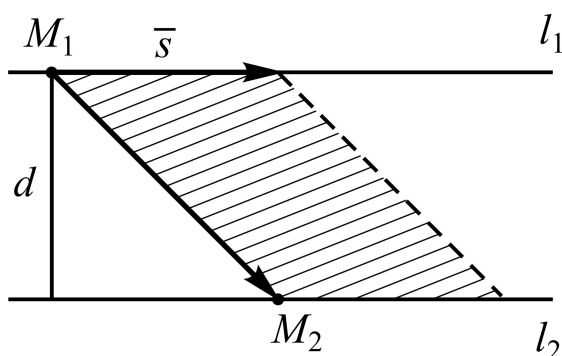


Рис. 3.4.6. Напрямний вектор і точки на прямих

Розв'язання повністю проведемо на засадах векторної алгебри (без переходу до розгляду систем лінійних рівнянь).

Перенесемо початок напрямного вектора $\bar{s} = (m, n, p)$ прямих у точку $M_1(x_1, y_1, z_1)$ і введемо в розгляд вектор $\overline{M_1M_2} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1)$, як показано на рис. 3.4.6.

Тоді, з одного боку, площа паралелограма, побудованого на векторах \bar{s} і $\overline{M_1M_2}$ як на сторонах, дорівнює модулю векторного добутку $\bar{s} \times \overline{M_1M_2}$, а з іншого – це добуток $s \cdot d$, тобто $|\bar{s} \times \overline{M_1M_2}| = s \cdot d$. Звідки

$$d = \frac{|\bar{s} \times \overline{M_1M_2}|}{s}. \quad (3.4.24)$$

У поданні через характеристики (компоненти) рівнянь отримуємо:

$$\bar{s} \times \overline{M_1M_2} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ m & n & p \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \end{vmatrix} \Rightarrow |\bar{s} \times \overline{M_1M_2}| = \sqrt{\Delta_{jk}^2 + \Delta_{ik}^2 + \Delta_{ij}^2},$$

$$\text{де } \Delta_{jk} = \begin{vmatrix} n & p \\ y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \end{vmatrix}, \Delta_{ik} = \begin{vmatrix} m & p \\ x_2 - x_1 & z_2 - z_1 \end{vmatrix}, \Delta_{ij} = \begin{vmatrix} m & n \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 \end{vmatrix}.$$

Індекси показують, які стовпці беруться для складання мінорів.

Остаточно формулу (3.4.24) запишемо у вигляді:

$$d = \frac{\sqrt{\Delta_{ij}^2 + \Delta_{ik}^2 + \Delta_{jk}^2}}{\sqrt{m^2 + n^2 + p^2}}. \quad (3.4.25)$$

Наслідок. Формули (3.4.24), (3.4.25) є разом з тим розв'язком наступної **задачі**: знайти відстань від точки M_1 до прямої l_2 . Дійсно, якщо через точку M_1 провести додатково пряму l_1 , паралельну l_2 , то отримаємо постановку задачі 3.4.7.

Задача 3.4.8. Знайти кут φ і відстань d між прямими, що перехрещуються:

$$\frac{x-x_1}{m_1} = \frac{y-y_1}{n_1} = \frac{z-z_1}{p_1} \quad (l_1), \quad \frac{x-x_2}{m_2} = \frac{y-y_2}{n_2} = \frac{z-z_2}{p_2} \quad (l_2).$$

Розв'язання. Відшукування кута між прямими l_1 і l_2 не викликає труднощів: сумістимо паралельним перенесенням початки напрямних векторів \vec{s}_1 , \vec{s}_2 цих прямих і застосуємо вже знайому формулу (3.4.20).

Як відомо із стереометрії, під **відстанню між двома перехресними прямими** розуміють довжину їхнього спільного перпендикуляра (рис. 3.4.7).

Щоб зобразити шукану відстань d , треба через пряму l_2 провести паралельну прямій l_1 площину π_2 : $\pi_2 \parallel l_1$, $\pi_2 \supset l_2$, і з довільної точки прямої l_1 (у площині $\pi_1 \perp \pi_2$) провести перпендикуляр до площини π_2 .

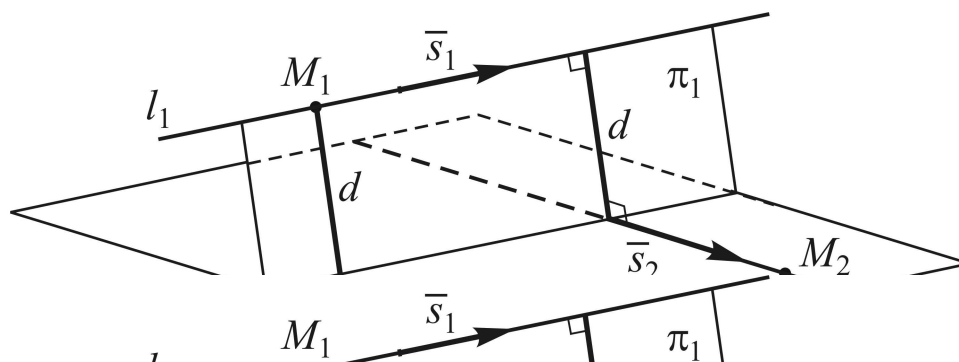


Рис. 3.4.7. Перехресні прямі

Отже, розв'язання задачі зводиться до реалізації двох кроків:

1) складаємо рівняння π_2 за відомими напрямними векторами $\bar{s}_1 = (m_1, n_1, p_1)$, $\bar{s}_2 = (m_2, n_2, p_2)$ і даною точкою M_2 (див. (3.3.21)):

$$\begin{vmatrix} x-x_2 & y-y_2 & z-z_2 \\ m_1 & n_1 & p_1 \\ m_2 & n_2 & p_2 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow A(x-x_2) - B(y-y_2) + C(z-z_2) = 0, \quad (3.4.26)$$

де $A = \begin{vmatrix} n_1 & p_1 \\ n_2 & p_2 \end{vmatrix}$, $B = \begin{vmatrix} m_1 & p_1 \\ m_2 & p_2 \end{vmatrix}$, $C = \begin{vmatrix} m_1 & n_1 \\ m_2 & n_2 \end{vmatrix}$;

2) обчислюємо відстань від точки M_1 до площини π_2 :

$$d = \frac{|A(x_1 - x_2) - B(y_1 - y_2) + C(z_1 - z_2)|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}. \quad (3.4.27)$$

Чисельник в (3.4.27) без символу модуля є розкритим (за елементами першого рядка) визначника 3-го порядку, який відображує мішаний добуток векторів: $(\bar{s}_1 \times \bar{s}_2) \cdot \overline{M_1 M_2}$, а його модуль чисельно дорівнює об'ємові паралелепіпеда, побудованого на цих векторах як на ребрах. Знаменник у (3.4.27) є модулем векторного добутку напрямних векторів: $|\bar{s}_1 \times \bar{s}_2|$, що чисельно дає площу грані паралелепіпеда, побудованої на векторах \bar{s}_1 і \bar{s}_2 як на ребрах, а d є висотою паралелепіпеда, опущеною на цю грань. Таким чином отримуємо стислий (лаконічний) у символах векторної алгебри запис формули (3.4.27):

$$d = \frac{|(\bar{s}_1 \times \bar{s}_2) \cdot \overline{M_1 M_2}|}{|\bar{s}_1 \times \bar{s}_2|}. \quad (3.4.28)$$

Пряма і площина в \mathbf{R}^3 , аналіз взаємного розташування

У задачах на пряму вже доводилось додатково залучати до розгляду рівняння площини (взяти, наприклад, хоча б задачу 3.4.8), а тепер перейдемо безпосередньо до опису характеристик їхнього взаємного розташування у просторі.

Існують три можливі випадки. Пряма і площина мають:

- 1) одну спільну точку T , тобто **перетинаються** ($l \cap \pi = \{T\}$);
- 2) порожню множину спільних точок, тобто **паралельні** ($l \parallel \pi$);
- 3) нескінченну множину спільних точок, тобто **пряма лежить на площині** ($l \subset \pi$).

Задача 3.4.9. Пряма і площина задані рівняннями:

$$\frac{x-x_0}{m} = \frac{y-y_0}{n} = \frac{z-z_0}{p} \quad (l), \quad Ax + By + Cz + D = 0 \quad (\pi). \quad (3.4.29)$$

Описати в алгебраїчній формі можливі випадки взаємного розташування l і π .

Розв'язання. Здійснимо перехід до параметричної форми завдання рівнянь прямої і зведемо сумісний аналіз рівнянь l і π до аналізу одного рівняння від однієї змінної – параметра t :

$$\begin{cases} Ax + By + Cz + D = 0 \\ x = x_0 + mt \\ y = y_0 + nt \\ z = z_0 + pt \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A(x_0 + mt) + B(y_0 + nt) + C(z_0 + pt) + D = 0 \\ \Rightarrow Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D + t(Am + Bn + Cp) = 0. \end{cases}$$

Звідки

$$t = -\frac{Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D}{Am + Bn + Cp}. \quad (3.4.30)$$

Аналізуємо отриманий дріб:

- 1) якщо знаменник дробу не дорівнює нулю, то t має єдине значення, і навпаки; отже,

$$Am + Bn + Cp \neq 0 \Leftrightarrow l \cap \pi = \{T\}; \quad (3.4.31)$$

- 2) якщо знаменник дробу дорівнює нулю, а чисельник відмінний від нуля, то дріб не має сенсу, тобто t не існує; отже,

$$(Am + Bn + Cp = 0 \wedge Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D \neq 0) \Leftrightarrow l \parallel \pi; \quad (3.4.32)$$

- 3) якщо чисельник і знаменник дробу дорівнюють нулеві, то дріб невизначений, тобто t може бути будь-яким дійсним числом; отже,

$$(Am + Bn + Cp = 0 \wedge Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D = 0) \Leftrightarrow l \subset \pi. \quad (3.4.33)$$

Зауваження. У випадку перетину прямої і площини співвідношення (3.4.30) дає можливість легко знайти координати точки T перетину l з π , а саме:

$$x_T = x_0 + mt, \quad y_T = y_0 + nt, \quad z_T = z_0 + pt. \quad (3.4.34)$$

Залишається установити числову характеристику такого взаємного розташування – кут між прямою і площиною.

Задача 3.4.10. Знайти кут між прямою l і площиною π , які описуються рівняннями (3.4.29), і установити умову перпендикулярності прямої і площини (рис. 3.4.8).

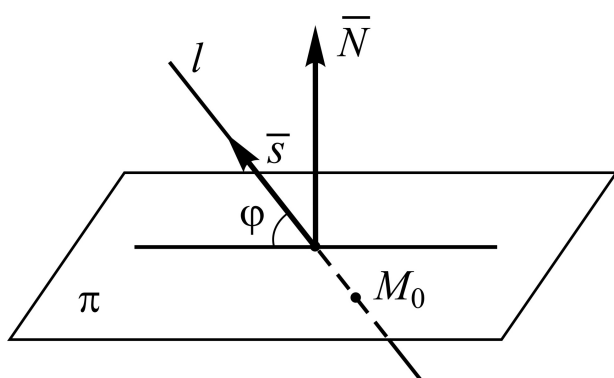


Рис. 3.4.8. Кут між прямою і площиною

Розв'язання. Під **кутом** φ між **прямою і площиною** розуміють будь-який із суміжних кутів, що утворені прямою і її проекцією на площину (див. рис. 3.4.8).

Якщо φ гострий (тупий), то кут між векторами \bar{s} і \bar{N} є одним із кутів: $\frac{\pi}{2} \pm \varphi \left(\pm \frac{\pi}{2} + \varphi \right)$.

Для косинуса кута між двома векторами маємо: $\cos(\widehat{\bar{N}, \bar{s}}) = \frac{\bar{N} \cdot \bar{s}}{N \cdot s}$.

За формулами зведення: $\cos\left(\frac{\pi}{2} \pm \varphi\right) = \mp \sin \varphi$ і $\cos\left(\pm \frac{\pi}{2} + \varphi\right) = \mp \sin \varphi$,

тому $\left| \cos\left(\pm \frac{\pi}{2} \pm \varphi\right) \right| = \sin \varphi$. Отже,

$$\sin \varphi = \frac{|\bar{N} \cdot \bar{s}|}{N \cdot s} = \frac{|Am + Bn + Cp|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2} \cdot \sqrt{m^2 + n^2 + p^2}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \varphi = \arcsin(\sin \varphi). \quad (3.4.35)$$

Якщо пряма задана рівнянням у загальному вигляді (3.4.5), то в (3.4.35) замість m, n, p слід підставити відповідно величини $\Delta_{yz}, -\Delta_{xz}, \Delta_{xy}$ із (3.4.6).

Умова перпендикулярності (паралельності) l і π зводиться до умови колінеарності (ортогональності) векторів \bar{s} і \bar{N} :

$$l \perp \pi \Leftrightarrow \bar{s} \parallel \bar{N} \Leftrightarrow \frac{A}{m} = \frac{B}{n} = \frac{C}{p} \quad (\text{рис. 3.4.9-а});$$

$$l \parallel \pi \Leftrightarrow \bar{s} \perp \bar{N} \Leftrightarrow Am + Bn + Cp = 0 \quad (\text{рис. 3.4.9-б}). \quad (3.4.36)$$

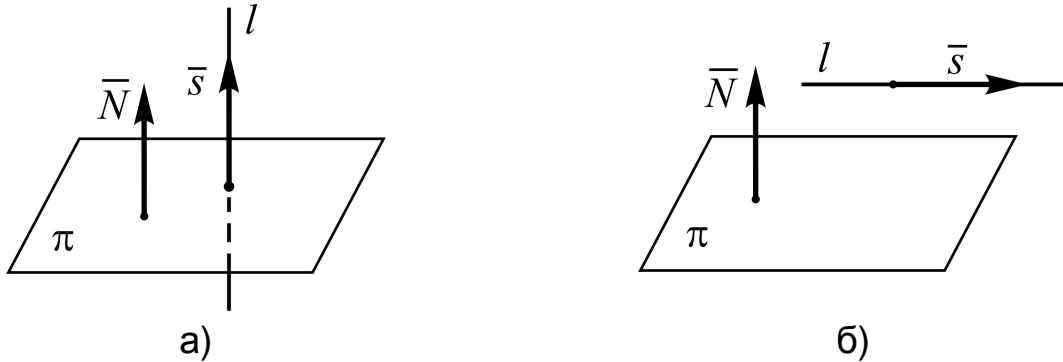


Рис. 3.4.9. Пряма l і площина π : а) перпендикулярні; б) паралельні

Підсумовуючи розглянуте, **відзначимо**, що вивчення прямої і площини в \mathbf{R}^3 , як і прямої в \mathbf{R}^2 , з алгебраїчної точки зору загалом не викликає труднощів, бо вони описуються найпростішими алгебраїчними рівняннями – рівняннями 1-го степеня (відносно поточних змінних). У випадку нелінійності рівнянь кривих і поверхонь задача їх дослідження, природно, істотно ускладнюється і потребує більш глибокого алгебраїчного аналізу.

Вивчені лінії є фундаментом для успішного засвоєння засобів аналітичної геометрії при створенні більш складних геометричних моделей, які мають застосовний характер.

Виразним прикладом таких моделей є криві Без'є (П'єр Етьєн Без'є (1910 – 1999) – французький інженер і винахідник). **Кривою Без'є** називається параметрична крива, яка описується рівнянням виду:

$$B(t) = \sum_{i=0}^n b_{i,n}(t) P_i,$$

де t – числовий параметр ($t \in [0,1]$);

$b_{i,n}(t) = C_n^i t^i (1-t)^{n-i}$ – так звані **поліноми Бернштейна** (за ім'ям

радянського математика Сергія Натановича Бернштейна (1880 – 1968), засновника Українського інституту математичних наук у Харкові);

C_n^i – біноміальні коефіцієнти;

$P_i, i = \overline{0, n}$, – задані (**опорні**) точки (на площині або у просторі).

Криві Без'є – один із найголовніших інструментів систем автоматизованого проектування (САПР) і програм комп'ютерної графіки – різновиду образотворчого мистецтва. Робота з САПР полягає у створенні геометричної моделі виробу (двовимірної чи тривимірної, твердотільної), генерації на основі цієї моделі конструкторської документації (креслень виробу, специфікацій тощо) та її наступний супровід.

Наведемо конкретні приклади кривих за такими заданими точками: $P_0(-2, -1), P_1(0, 3), P_2(3, 3), P_3(4, 0)$.

При $n = 1$ крива є відрізком прямої (рис. 3.4.10-а) від точки P_0 до точки P_1 (**лінійна** крива Без'є):

$$B(t) = (1-t)P_0 + tP_1, t \in [0, 1] \Rightarrow \begin{cases} x(t) = (1-t)x_0 + tx_1, \\ y(t) = (1-t)y_0 + ty_1. \end{cases} \quad (3.4.37)$$

Квадратична крива Без'є ($n = 2$) задається трьома опорними точками (рис. 3.4.10-б):

$$B(t) = (1-t)^2 P_0 + 2t(1-t)P_1 + t^2 P_2, t \in [0, 1].$$

Кубічна крива Без'є ($n = 3$) потребує завдання усіх чотирьох точок P_0, P_1, P_2, P_3 :

$$B(t) = (1-t)^3 P_0 + 3t(1-t)^2 P_1 + 3t^2(1-t)P_2 + t^3 P_3, t \in [0, 1].$$

Лінія починається в точці P_0 і закінчується в точці P_3 , підходячи до неї з боку точки P_2 (рис. 3.4.10-в). Крива не проходить через точки P_1 та P_2 , вони використовуються для визначення форми кривої при змінюванні параметра t від нуля до одиниці. (Подумайте, якою була б крива Без'є за умови: $y_0 = y_1 = y_2 = y_3 = 0$.)

Вирази для $x(t), y(t)$ при $n = 2, 3$ за аналогією з (3.4.37) запишіть *самостійно*.

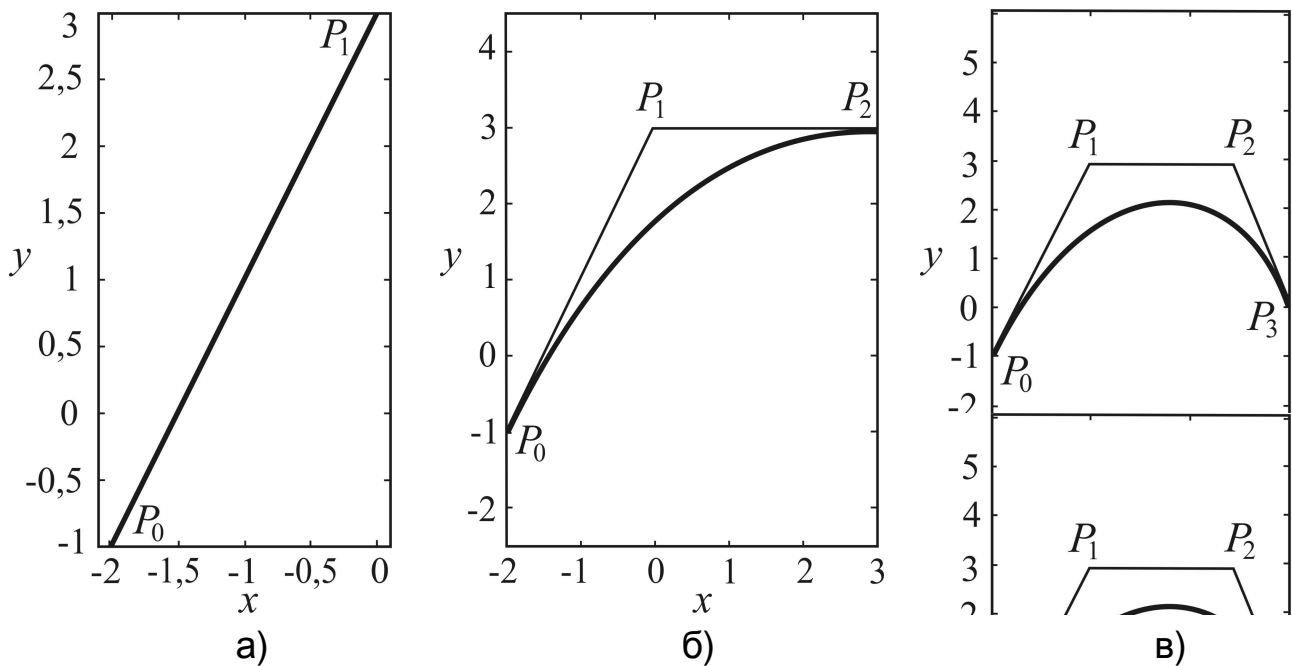


Рис. 3.4.10. Криві Без'є: а) лінійна; б) квадратична; в) кубічна

Побудова графіків кривих (див. рис. 3.4.10) здійснювалась у системі MatLab.

Запитання для самодіагностики засвоєння матеріалу

Відповіді на всі запитання сформулюйте словесно, запишіть в символічній формі, обґрунтуйте (на підставі означень, теорем, правил, формул тощо), наведіть відповідні конкретні приклади.

1. Що розуміють під рівнянням лінії на площині?
2. Виведіть канонічне рівняння кола.
3. Що розуміють під параметричним рівнянням лінії? Який вигляд мають параметричні рівняння кола?
4. У чому полягають основні задачі аналітичної геометрії в \mathbf{R}^2 ?
5. Виведіть рівняння прямої, опишіть геометричний смисл параметрів і констант, які вони містять, якщо задано:
 - а) точку, через яку проходить пряма і її напрямний вектор;
 - б) точку на прямій і допоміжну змінну, через яку виражені поточні координати точок прямої;
 - в) дві точки, які належать прямій;
 - г) точку на прямій і кут нахилу прямої до осі абсцис;
 - д) кут нахилу прямої до осі абсцис і величину відрізка, який відтинає пряма на осі ординат;

- е) величини відрізків, які пряма відтинає на координатних осях;
є) відстань від початку координат до прямої і кут нахилу відповідного відрізка до осі абсцис;
ж) точку на прямій і її нормальний вектор.
6. Яке рівняння називають загальним рівнянням прямої? Наведіть теорему про загальне рівняння прямої.
7. Проведіть дослідження загального рівняння прямої, супроводжуючи кожний випадок геометричною ілюстрацією.
8. Установіть на аналітичному рівні умови, за яких дві прямі перетинаються, паралельні чи збіжні.
9. Як відшукати кут між двома прямими, що описуються рівняннями у загальному вигляді?
10. Виведіть формули кута між двома прямими, умови паралельності і перпендикулярності прямих, які описуються рівняннями, вказаними у запитаннях 5 а) – 5 з).
11. Здійсніть перехід від загального рівняння прямої до рівняння нормального вигляду.
12. Розв'яжіть задачу відшукування відстані від точки до прямої.
13. Виведіть рівняння бісектрис кутів, утворених двома прямими.
14. Наведіть формулу простих відсотків і укажіть економічний смисл усіх її складових.
15. Що називають кривою 2-го порядку (К2П) і який вигляд має її загальне рівняння?
16. Які існують різновиди К2П і якими умовами визначається тип кривої?
17. Яке рівняння називають загальним рівнянням кола і як здійснюється перехід від нього до рівняння канонічного виду?
18. Що таке еліпс? Запишіть його канонічне рівняння, проведіть дослідження форми, дайте означення ексцентриситета еліпса.
19. Що таке гіпербола? Запишіть її канонічне рівняння, проведіть дослідження форми, дайте означення асимптот та ексцентриситета гіперболи.
20. Що таке парабола? Які існують різновиди канонічних рівнянь параболи залежно від розміщення на площині фокуса і директриси? Проведіть дослідження форми однієї з них, дайте означення ексцентриситета параболи.
21. Які К2П називаються центральними, нецентральними?

22. У чому полягає задача перетворення координат?
23. Наведіть формули паралельного перенесення осей координат.
24. Наведіть формули повороту осей координат.
25. Опишіть зведення до канонічного виду рівняння К2П, що не містить добутки змінних.
26. Наведіть умови належності рівнянь К2П, що не містять добутки змінних, до еліптичного, гіперболічного чи параболічного типу.
27. Опишіть зведення до канонічного виду загального рівняння К2П.
28. Зведіть до канонічного виду рівняння гіперболи $xy = k$.
29. Якою кривою є графік дробово-лінійної функції?
30. Що розуміють під поверхнею у просторі і її рівнянням?
31. Дайте означення сфери і виведіть її рівняння.
32. Виведіть рівняння площини, що проходить через три дані точки.
33. У чому полягає умова належності трьох точок одній прямій?
34. Який вигляд має рівняння площини у відрізках на осях.
35. Наведіть рівняння площини у нормальному вигляді.
36. Запишіть рівняння площини, яка проходить через дану точку і має заданий нормальний вектор.
37. Яке рівняння називають загальним рівнянням площини?
38. Сформулюйте і доведіть теорему про рівняння площини у загальному вигляді.
- (Наведені нижче запитання 39 – 48 стосуються *загального рівняння площини*.)
39. Який вигляд має рівняння площини, що проходить через початок координат?
40. Якими рівняннями описуються площини, паралельні одній із осей координат?
41. Як виглядають рівняння площин, що проходять через одну із координатних осей?
42. Як напрямлений відносно осей координат нормальний вектор у площин, паралельних координатним площинам?
43. За яких умов загальне рівняння площини описує координатні площини?
44. За яких умов дві площини: 1) перетинаються; 2) паралельні; 3) збігаються?
45. За якою формулою обчислюється кут між двома площинами? Який вигляд має умова ортогональності площин.

46. Як здійснюється перехід від загального рівняння площини до рівняння: 1) у відрізках на осях; 2) у нормальному вигляді?
47. За якими формулами обчислюється відстань від точки до площини?
48. Що таке „бісекторні” площини і якими рівняннями вони описуються?
49. У чому полягає загальний підхід до вивчення рівнянь прямої у просторі?
50. Виведіть рівняння прямої: канонічні; параметричні; що проходить через дві задані точки.
51. Що називають рівнянням прямої у загальному вигляді? Доведіть теорему про загальне рівняння прямої у просторі.
52. Як здійснюється перехід від загального рівняння прямої до її канонічних рівнянь?
53. Проведіть дослідження загального рівняння прямої.
54. Установіть умови: паралельності; збігу; перетину і перехреснування двох прямих.
55. Розв’яжіть задачу про відшукування спільної точки двох прямих, що перетинаються.
56. За якою формулою обчислюється кут між двома прямими, які задані: канонічними рівняннями, рівняннями у загальному вигляді?
57. Як відшукується відстань між паралельними прямими?
58. Розв’яжіть задачу про відстань від точки до прямої.
59. Якими числовими характеристиками описуються перехресні прямі і як вони обчислюються?
60. Які існують випадки взаємного розташування прямої і площини?
61. Як описуються в алгебраїчній формі випадки взаємного розташування прямої і площини?
62. Виведіть формулу для обчислення кута між прямою і площиною. Як виводяться з неї умови паралельності і перпендикулярності прямої і площини?
63. Чому вивчення прямої і площини не викликає труднощів з алгебраїчної точки зору?
64. Які криві є одним із найголовніших інструментів систем автоматизованого проектування (САПР) і програм комп’ютерної графіки?
65. Запишіть параметричні рівняння $(x = x(t), y = y(t))$ лінійної, квадратичної і кубічної кривих Без’є.

Задачі та вправи

1. Вказати хоча б один напрямний вектор прямої, яка: а) має кутовий коефіцієнт k ; б) задана рівнянням $Ax + By + C = 0$.

2. Задано три точки: $A(5, 2)$, $B(9, 4)$ і $C(7, 3)$. З'ясувати, чи лежать ці точки на одній прямій, якщо „так”, то скласти рівняння цієї прямої.

3. Скласти рівняння прямої; привести його до загального виду; записати у відрізках на осях; побудувати пряму та знайти відстань від початку координат до прямої:

а) пряма задана точкою $M_0(1, 1)$ і нормальним вектором $\vec{N} = (2, -1)$;

б) пряма задана точкою $M_0(-1, 2)$ і напрямним вектором $\vec{s} = (3, -1)$;

в) пряма задана двома точками $M_1(1, 1)$ і $M_2(1, -2)$.

4. За умовою задачі 3 скласти параметричні рівняння прямих.

5. Скласти рівняння прямої, що проходить через точку $M(-8, 1)$, паралельно (перпендикулярно) прямій $2x - y + 7 = 0$.

6. Скласти рівняння медіан трикутника з вершинами у точках $A(-4, 2)$, $B(2, 0)$ та $C(2, -4)$. Знайти точку їх перетину.

7. Скласти рівняння прямої, що проходить через точку $A(4, 3)$ і відтинає від координатного кута трикутник з площею, що дорівнює 3 кв. од.

8. Знайти значення A , при яких пряма $Ax + 8y - 20 = 0$ відтинає на координатних осях однакові відрізки.

9. З'ясувати, чи перетинає пряма $l: 2x + 3y + 5 = 0$ відрізок, обмежений точками $M_1(-1, 3)$ і $M_2(2, -5)$. Якщо „так”, то знайти точку їх перетину. (Вказівка: якщо точки $M_1(x_1, y_1)$ і $M_2(x_2, y_2)$ лежать по різні боки від прямої $l: Ax + By + C = 0$, то вирази $Ax_1 + By_1 + C$ і $Ax_2 + By_2 + C$ мають різні знаки.)

10. Визначити кутовий коефіцієнт k та відрізок b , який відтинає пряма на осі Oy , і побудувати цю пряму:

а) $5x + 3y + 2 = 0$;

б) $2x + 3y - 6 = 0$;

в) $3x + 2y = 0$;

г) $y - 3 = 0$.

11. Сторони трикутника задано рівняннями: $4x + 3y - 5 = 0$, $x - 3y + 10 = 0$, $x - 2 = 0$. Знайти координати його вершин.

12. Середини сторін трикутника лежать у точках $M_1(2,1)$, $M_2(5,3)$ і $M_3(3,-4)$. Скласти рівняння його сторін.

13. При якому значенні параметра a три прямі $2x - y + 1 = 0$, $x + y - 4 = 0$ і $3x + ay - 2 = 0$ проходять через одну точку?

14. З'ясувати, при яких значеннях параметра a пряма

$$(a+2)x + (a^2-9)y + 3a^2 - 8a + 5 = 0 :$$

а) паралельна осі Ox ; б) паралельна осі Oy ; в) проходить через початок координат.

15. Визначити, при яких значеннях параметрів m і n пряма

$$(2m - n + 5)x + (m + 3n - 2)y + 2m + 7n + 19 = 0$$

паралельна осі ординат і перетинає вісь абсцис у точці $(5,0)$. Записати рівняння цієї прямої.

16. Скласти рівняння прямої, яка проходить через точку перетину прямих $2x + 5y - 8 = 0$ і $x - 3y + 4 = 0$ і: а) проходить через початок координат; б) паралельна осі абсцис; в) паралельна осі ординат; г) проходить через точку $A(4,3)$.

17. Задані рівняння сторін чотирикутника $x - y = 0$, $x + 3y = 0$, $x - y - 4 = 0$ і $3x + y - 12 = 0$. Скласти рівняння його діагоналей.

18. Знайти кут між прямими: а) $3x - 4y + 1 = 0$ і $5x - 12y + 3 = 0$; б) $x = 4$ і $2x - y - 1 = 0$.

19. Написати рівняння прямої, що проходить через точку $M(2,1)$ під кутом 45° до прямої $2x + 3y + 4 = 0$.

20. Знайти проекцію точки $P(-8,12)$ на пряму, що проходить через точки $A(2,-3)$ і $B(-5,1)$.

21. Скласти рівняння сторін трикутника, якщо відома вершина $A(3,-4)$, та рівняння двох його висот $7x - 2y - 1 = 0$ і $2x - 7y - 6 = 0$.

22. Скласти рівняння сторін трикутника, якщо відома вершина $A(-4,2)$, та рівняння двох медіан $3x - 2y + 2 = 0$ і $3x + 5y - 12 = 0$.

23. Скласти рівняння сторін трикутника за вершиною $A(2, -4)$ та рівняннями бісектрис двох його кутів $x + y - 2 = 0$ і $x - 3y - 6 = 0$. (Вказівка: сторони кута симетричні відносно його бісектриси. Тому точки, симетричні точці A відносно бісектрис кутів B і C , лежать на прямій BC .)

24. Обчислити відстань від точки $M(1, 1)$ до прямої $x = -1 + 2t$, $y = 2 + t$.

25. Знайти площу квадрата, дві сторони якого лежать на прямих $4x - 3y - 10 = 0$ і $8x - 6y + 15 = 0$.

26. Скласти рівняння прямих, які знаходяться від точки $A(1, -2)$ на відстані $d = \sqrt{20}$ і паралельні прямій $2x - y - 5 = 0$.

27. Знайти рівняння бісектриси внутрішнього кута C трикутника з вершинами $A(0, 0)$, $B(3, -1)$, $C(4, 7)$.

28. Написати рівняння бісектрис кутів між прямими $3x + 4y - 12 = 0$ і $y = 0$.

29. Точка $A(2, 0)$ є вершиною правильного трикутника, а протилежна їй сторона лежить на прямій $x + y - 1 = 0$. Скласти рівняння двох інших сторін трикутника.

30. Скласти рівняння кола в кожному з таких випадків:

а) центром кола є точка $C(2, -3)$, а радіус $R = 7$;

б) центром кола є точка $C(6, -8)$ і коло проходить через початок координат;

в) точки $A(3, 2)$ і $B(-1, 6)$ є кінцями одного з діаметрів кола;

г) центром кола є точка $C(1, -1)$, а пряма $5x - 12y + 9 = 0$ є дотичною до кола;

д) коло проходить через точки $A(3, 1)$ і $B(-1, 3)$, а центр лежить на прямій $3x - y - 2 = 0$;

е) коло проходить через три точки $M_1(-1, 5)$, $M_2(-2, -2)$ і $M_3(5, 5)$;

є) коло проходить через точку $M(1, 2)$ і дотикається до координатних осей.

31. Установити, які лінії визначаються рівняннями:

а) $y = \sqrt{9 - x^2}$; б) $y = -\sqrt{25 - x^2}$; в) $x = -\sqrt{4 - y^2}$; г) $x = \sqrt{16 - y^2}$;

д) $y = 15 + \sqrt{64 - x^2}$; е) $x = -2 - \sqrt{9 - y^2}$; є) $y = -3 - \sqrt{21 - 4x - x^2}$.

Зобразити ці лінії.

32. Визначити, при яких значеннях кутового коефіцієнта k пряма $y = kx$: а) перетинає коло $x^2 + y^2 - 10x + 16 = 0$; б) дотикається до цього кола; в) не має спільних з ним точок.

33. Скласти рівняння еліпса, фокуси якого лежать на осі абсцис симетрично відносно початку координат, якщо:

- а) його велика та мала півосі відповідно дорівнюють 4 і 2;
- б) відстань між фокусами $2c = 6$, а велика вісь $2a = 10$;
- в) велика вісь $2a = 20$, а ексцентриситет $\varepsilon = 0,8$;
- г) мала вісь $2b = 6$, а ексцентриситет $\varepsilon = \sqrt{2}/2$;
- д) сума осей дорівнює 16, а відстань між фокусами $2c = 8$;
- е) відстань між фокусами $2c = 6$, а ексцентриситет $\varepsilon = 0,6$.

34. Задано рівняння еліпса $25x^2 + 169y^2 = 4225$. Визначити:

а) півосі; б) координати фокусів; в) ексцентриситет; г) координати точок еліпса, відстань яких до лівого фокуса F_1 дорівнює 14.

35. Меридіан земної кулі має форму еліпса, відношення осей якого дорівнює $299/300$. Визначити ексцентриситет земного меридіана.

36. Земля рухається по еліпсу, в одному фокусі якого міститься Сонце. Найменша з відстаней від Землі до Сонця приблизно дорівнює 147 500 000, а найбільша – 152 500 000 км. Знайти велику піввісь і ексцентриситет орбіти Землі.

37. Визначити, при яких значеннях параметра m пряма $y = -x + m$:

а) перетинає еліпс $5x^2 + 20y^2 = 100$; б) дотикається до нього; в) не має з ним спільних точок.

38. Скласти рівняння гіперболи, фокуси якої розміщені на осі абсцис симетрично щодо початку координат, якщо:

- а) її дійсна та уявна осі відповідно дорівнюють 10 і 8;
- б) відстань між фокусами $2c = 10$, а вісь $2b = 8$;
- в) відстань між фокусами $2c = 6$, а ексцентриситет $\varepsilon = 1,5$;
- г) вісь $2a = 16$, а ексцентриситет $\varepsilon = 5/4$;
- д) рівняння асимптот $y = \pm 4/3 \cdot x$, а відстань між фокусами $2c = 20$.

39. Скласти рівняння гіперболи, фокуси якої лежать на осі ординат симетрично відносно початку координат, якщо:

а) її осі $2a = 16$, $2b = 36$;

б) відстань між фокусами $2c = 10$, а ексцентриситет $\varepsilon = 5/3$;

в) рівняння асимптот $y = \pm \frac{12}{5}x$, а відстань між вершинами дорівнює 48.

40. Через точку $M(-1,1)$ провести пряму, паралельну асимптотам гіперболи $4x^2 - 9y^2 = 25$.

41. Рівняння еліпса $3x^2 + 4y^2 = 48$. Скласти рівняння гіперболи, вершини якої розміщені у фокусах, а фокуси – у вершинах даного еліпса.

42. Визначити, при яких значеннях параметра m пряма $y = 2,5x + m$:

а) перетинає гіперболу $4x^2 - y^2 = 36$; б) дотикається до неї; в) не має з нею спільних точок.

43. Скласти канонічне рівняння параболи, якщо:

а) відстань фокуса, що лежить на осі Ox , до вершини дорівнює 4;

б) відстань фокуса, розміщеного на осі ординат, до директриси дорівнює 6;

в) парабола симетрична відносно осі абсцис і проходить через точку $M(1,2)$;

г) парабола симетрична відносно осі Oy і проходить через точку $M(5,1)$;

д) вершина параболи має координати $(-2,2)$, параметр $p = 5$, а напрям її осі симетрії збігається з від'ємним напрямом осі Ox .

44. Визначити, при яких значеннях кутового коефіцієнта k пряма $y = kx + 2$: а) перетинає параболу $y^2 = 4x$; б) дотикається до неї; в) не має з нею спільних точок.

45. Визначити тип кривої другого порядку, привести її рівняння до канонічного виду, побудувати криву та вказати: для кола – координати центра і радіус; для еліпса – велику та малу півосі, координати фокусів, ексцентриситет; для гіперболи – дійсну та уявну півосі, координати фокусів, ексцентриситет, рівняння асимптот; для параболи – координати вершини і фокуса, величину параметра, рівняння директриси:

- 1) $x^2 + y^2 - 4x + 6y - 3 = 0$;
- 2) $7x^2 + 7y^2 - 2x - 7y - 1 = 0$;
- 3) $x^2 + y^2 - 6x - 8y + 25 = 0$;
- 4) $16x^2 + 25y^2 + 32x - 100y - 284 = 0$;
- 5) $5x^2 + 9y^2 - 30x + 18y + 9 = 0$;
- 6) $18x^2 + 9y^2 - 72x - 18y - 81 = 0$;
- 7) $9x^2 - 16y^2 + 90x + 32y - 367 = 0$;
- 8) $9x^2 - 16y^2 + 18x + 96y + 9 = 0$;
- 9) $4x^2 - 8x - y + 7 = 0$;
- 10) $0,25y^2 + x - y = 0$.

46. Скласти рівняння площини, що проходить:

- 1) через точку $M_1(3, -1, 2)$ перпендикулярно до вектора $\overline{M_1M_2}$, якщо $M_2(4, -2, -1)$;
- 2) через точки $T_1(1, -3, 2)$ і $T_2(-2, 1, 4)$ паралельно осі Ox ;
- 3) через точки $P_1(-2, 1, -3)$ і $P_2(1, -3, -4)$ паралельно осі Oy ;
- 4) через точки $Q_1(4, -1, 1)$ і $Q_2(0, -2, -3)$ паралельно осі Oz ;
- 5) через вісь Ox і точку $M(-1, 1, -3)$;
- 6) через вісь Oy і точку $P(1, -2, 5)$;
- 7) через вісь Oz і точку $Q(2, 3, -4)$;
- 8) через точку $M(-2, 3, -1)$ паралельно площині xOy ;
- 9) через точку $P(4, -1, 5)$ паралельно площині xOz ;
- 10) через точку $Q(-3, -2, 2)$ паралельно площині yOz ;
- 11) через точки $M_1(1, 2, 0)$ і $M_2(2, 1, 1)$ паралельно вектору $\bar{a} = (3, 0, 1)$;
- 12) через точку $M(1, 1, 1)$ паралельно векторам $\bar{a}_1 = (0, 1, 2)$, $\bar{a}_2 = (-1, 0, 1)$;
- 13) через точку $M(-1, 2, 3)$ і відтинає від осей Ox та Oy відрізки $a = 2$ і $b = -1$.

47. Знайти відстань від точки $P(1,4,5)$ до площини, що проходить через три задані точки $M_1(1,2,0)$, $M_2(2,1,1)$ і $M_3(3,0,1)$.

48. Скласти рівняння площин, що ділять навпіл двогранні кути між площинами $x - 2y + 5z - 11 = 0$ і $2x + y + 5z - 5 = 0$.

49. На осі Oz знайти точку, рівновіддалену від площин $x + 4y - 3z - 2 = 0$ і $5x + z + 8 = 0$.

50. Скласти рівняння площини, що проходить через точку $M(1,0,-1)$ і:

а) паралельна площині $2x - y + 3z = 0$;

б) перпендикулярна до площин $x + 2y + 1 = 0$ і $3x - 2y + z - 4 = 0$;

в) точку $P(1,-1,2)$, перпендикулярно до площини $x - 2y + 3z + 5 = 0$;

г) лінію перетину двох площин $2x - y + 3z - 6 = 0$ і $x + 2y - z + 3 = 0$.

51. Знайти кут між площинами:

$$2x + y + 3z - 1 = 0 \quad \text{і} \quad x + y - z + 5 = 0.$$

52. Знайти відстань між площинами:

$$2x - y + 2z + 9 = 0 \quad \text{і} \quad 4x - 2y + 4z - 21 = 0.$$

53. Скласти канонічні і параметричні рівняння прямої, заданої своїм загальним рівнянням:
$$\begin{cases} 2x - y + 2z - 4 = 0 \\ x + 2y - z - 1 = 0 \end{cases}$$

54. Скласти рівняння прямої, що проходить через дві задані точки $M_1(1,-2,1)$ і $M_2(3,1,-1)$.

55. Перевірити, чи лежать три точки $M_1(3,0,1)$, $M_2(0,2,4)$ і $M_3(1,4/3,3)$ на одній прямій.

56. Довести, що прямі:

а) $\frac{x+7}{3} = \frac{y-5}{-1} = \frac{z-9}{4}$ і $\begin{cases} 2x + 2y - z - 10 = 0 \\ x - y - z - 22 = 0 \end{cases}$ паралельні;

б) $\frac{x}{2} = \frac{y}{3} = \frac{z}{1}$ і $\begin{cases} x - z - 1 = 0 \\ y + z - 1 = 0 \end{cases}$ перпендикулярні.

57. Скласти канонічні рівняння прямої, що проходить через точку $M(2,0,-3)$ паралельно: а) вектору $\vec{a} = (2,-3,5)$; б) осі Ox ; в) осі Oz ; г) прямій $x = t - 2$, $y = 2t$, $z = -0,5t + 1$.

58. Задано пряму $\frac{x-2}{2} = \frac{y}{1} = \frac{z+1}{0}$ і точку $M(0,1,2)$. Треба:

а) скласти рівняння площини, що проходить через задану пряму і точку M ;

б) скласти рівняння площини, що проходить через точку M перпендикулярно до прямої;

в) обчислити відстань від точки до прямої;

г) знайти проекцію точки M на задану пряму.

59. Задано площину $x + y - z + 1 = 0$ і пряму $\frac{x-1}{0} = \frac{y}{2} = \frac{z+1}{1}$. Треба:

а) обчислити синус кута між площиною і прямою;

б) координати точки перетину прямої і площини;

в) скласти рівняння площини, що проходить через задану пряму перпендикулярно до заданої площини.

60. При якому значенні коефіцієнта A площина $Ax + 2y - z + 5 = 0$ паралельна прямій $x = 2t$, $y = 3t + 1$, $z = 2t - 2$?

61. При яких значеннях коефіцієнтів A і B площина $Ax + By - 9z - 1 = 0$ перпендикулярна до прямої $\frac{x}{2} = \frac{y+1}{6} = \frac{z-3}{3}$?

62. Переконатися, що прямі лежать в одній площині, і скласти рівняння цієї площини:

$$\frac{x-1}{2} = \frac{y+2}{-3} = \frac{z-5}{4} \quad \text{і} \quad \frac{x-7}{3} = \frac{y-2}{2} = \frac{z-1}{-2}.$$

63. Переконатися, що задані прямі паралельні, та знайти відстань між ними:

$$\begin{cases} 2x + 2y - z = 0 \\ x - y - z - 1 = 0 \end{cases} \quad \text{і} \quad \frac{x}{3} = \frac{y+3}{-1} = \frac{z-2}{4}.$$

64. Знайти точку, симетричну точці $P(4,3,10)$ відносно заданої прямої $\frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{4} = \frac{z-3}{5}$.

65. Знайти точку, симетричну точці $K(1,5,2)$ відносно заданої площини $2x - y - z + 11 = 0$.

Відповіді

1. а) $(1, k)$; б) $(B, -A)$.

2. $x - 2y - 1 = 0$.

3. а) $2(x-1) - (y-1) = 0$; загальне рівняння: $2x - y - 1 = 0$; у відрізках на осях: $\frac{x}{1/2} + \frac{y}{-1} = 1$; відстань: $1/\sqrt{5}$;

б) $\frac{x+1}{3} = \frac{y-2}{-1}$; загальне рівняння: $x + 3y - 5 = 0$; у відрізках на осях: $\frac{x}{5} + \frac{y}{5/3} = 1$; відстань: $5/\sqrt{10}$;

в) $\frac{x-1}{0} = \frac{y-1}{-3}$; загальне рівняння: $x - 1 = 0$; у відрізках на осях: не існує, відстань: 1.

4. а) $x = \frac{1}{2}t + 1$, $y = t + 1$; б) $x = 3t - 1$, $y = -t + 2$; в) $x = 1$, $y = -3t + 1$.

5. $2x - y + 17 = 0$ ($x + 2y + 6$).

6. $2x + 3y + 2 = 0$, $x - 3y - 2 = 0$, $5x + 3y + 2 = 0$; $(0, -2/3)$.

7. $3x - 2y - 6 = 0$ або $3x - 8y + 12 = 0$.

8. $A = \pm 8$.

9. $(1, -7/3)$.

10. а) $k = -5/3$, $b = -2/3$; б) $k = -2/3$, $b = 2$; в) $k = -3/2$, $b = 0$; г) $k = 0$, $b = 3$.

11. $(2, -1)$, $(-1, 3)$, $(2, 4)$.

12. $7x - 2y - 12 = 0$, $5x + y - 28 = 0$, $2x - 3y - 18 = 0$.

13. $a = -1/3$.

14. а) $a = -2$; б) $a = \pm 3$; в) $a = 1$; $5/3$.

15. $m = -4$, $n = 2$; рівняння прямої: $x - 5 = 0$.

16. а) $4x - y = 0$; б) $11y - 16 = 0$; в) $11x - 4 = 0$; г) $17x - 40y + 52 = 0$.

17. $y = 0$, $x - 3 = 0$.

18. а) $\varphi = \arccos 0,96$; б) $\varphi = \arccos \frac{2}{\sqrt{5}}$.

19. $x - 5y + 3 = 0$ і $5x + y - 11 = 0$.

20. $(-12, 5)$.

21. $2x + 7y + 22 = 0$, $7x + 2y - 13 = 0$, $x - y + 2 = 0$.

22. $2x + y - 8 = 0$, $x - 3y + 10 = 0$, $x + 4y - 4 = 0$.

23. $x + 7y - 6 = 0$, $x - y - 63 = 0$, $7x + y - 10 = 0$.

24. $4/\sqrt{5}$.

25. $S = 49/4$ (кв. од.).

26. $2x - y - 14 = 0$, $2x - y + 6 = 0$.

27. $3x - y - 5 = 0$.

28. $3x - y - 12 = 0$ і $x + 3y - 4 = 0$.

29. $x - (2 + \sqrt{3})y - 2 = 0$, $x - (2 - \sqrt{3})y - 2 = 0$.

30. а) $(x - 2)^2 + (y + 3)^2 = 49$; б) $(x - 6)^2 + (y + 8)^2 = 100$;

в) $(x - 1)^2 + (y - 4)^2 = 8$; г) $(x - 1)^2 + (y + 1)^2 = 4$;

д) $(x - 2)^2 + (y - 4)^2 = 10$; е) $(x - 2)^2 + (y - 1)^2 = 25$;

є) $(x - 1)^2 + (y - 1)^2 = 1$ або $(x - 5)^2 + (y - 5)^2 = 25$.

31. а) верхнє півколо з центром $O(0, 0)$ та $R = 3$; б) нижнє півколо з центром $O(0, 0)$ та $R = 5$; в) ліве півколо з центром $O(0, 0)$ та $R = 2$; г) праве півколо з центром $O(0, 0)$ та $R = 4$; д) верхнє півколо з центром $C(0, 15)$ та $R = 8$; е) ліве півколо з центром $C(-2, 0)$ та $R = 3$; є) нижнє півколо з центром $C(-2, -3)$ та $R = 5$.

32. а) $|k| < 3/4$; б) $k = \pm 3/4$; в) $|k| > 3/4$.

33. а) $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{4} = 1$; б) $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$; в) $\frac{x^2}{100} + \frac{y^2}{36} = 1$;

г) $\frac{x^2}{18} + \frac{y^2}{9} = 1$; д) $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$; е) $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$.

34. а) $a = 13$, $b = 5$; б) $F_1(0, -12)$, $F_2(0, 12)$; в) $\varepsilon = 12/13$;

г) $M_1\left(\frac{13}{12}, \frac{5\sqrt{143}}{12}\right)$ і $M_2\left(\frac{13}{12}, -\frac{5\sqrt{143}}{12}\right)$.

35. $\varepsilon \approx 0,08$.

36. $a = 150\,000\,000$ км, $\varepsilon = 1/60$.

37. а) $|m| < 5$; б) $m = \pm 5$; в) $|m| > 5$.

38. а) $\frac{x^2}{25} - \frac{y^2}{16} = 1$; б) $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16} = 1$; в) $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{5} = 1$; г) $\frac{x^2}{64} - \frac{y^2}{36} = 1$;

д) $\frac{x^2}{36} - \frac{y^2}{64} = 1$.

39. а) $\frac{x^2}{36} - \frac{y^2}{324} = -1$; б) $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = -1$; в) $\frac{x^2}{100} - \frac{y^2}{576} = -1$.

40. $2x - 3y + 5 = 0$ та $2x + 3y - 1 = 0$.

41. $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{12} = 1$.

42. а) $|m| > 4,5$; б) $m = \pm 4,5$; в) $|m| < 4,5$.

43. а) $y^2 = \pm 16x$; б) $x^2 = \pm 24y$; в) $y^2 = 4x$; г) $x^2 = 25y$;

д) $(y-2)^2 = -10(x+2)$.

44. а) $k < 1/2$; б) $k = 1/2$; в) $k > 1/2$.

45. 1) коло $(x-2)^2 + (y+3)^2 = 16$, $(2, -3)$, $R = 4$;

2) коло $\left(x - \frac{1}{7}\right)^2 + \left(y - \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{81}{196}$, $\left(\frac{1}{7}, \frac{1}{2}\right)$, $R = \frac{9}{14}$;

3) $(x-3)^2 + (y-4)^2 = 0$ – точка $(3, 4)$;

4) еліпс $\frac{(x+1)^2}{25} + \frac{(y-2)^2}{16} = 1$, $a = 5$, $b = 4$, $F_1(-3, 0)$, $F_2(3, 0)$,

$\varepsilon = 3/5$;

5) еліпс $\frac{(x-3)^2}{9} + \frac{(y+1)^2}{5} = 1$, $a = 3$, $b = \sqrt{5}$, $F_1(-2, 0)$, $F_2(2, 0)$,

$\varepsilon = 2/3$;

6) еліпс $\frac{(x-2)^2}{9} + \frac{(y-1)^2}{18} = 1$, $a = 3$, $b = 3\sqrt{2}$, $F_1(0, -3)$, $F_2(0, 3)$,

$\varepsilon = \sqrt{2}/2$;

7) гіпербола $\frac{(x+5)^2}{64} - \frac{(y-1)^2}{36} = 1$, $a = 8$, $b = 6$, $F_1(-10, 0)$,

$F_2(10,0)$, $\varepsilon = 5/4$, $3x + 4y + 11 = 0$ і $3x - 4y + 19 = 0$;

8) гіпербола $\frac{(x+1)^2}{16} - \frac{(y-3)^2}{9} = -1$, $a = 4$, $b = 3$, $F_1(0, -5)$,

$F_2(0, 5)$, $\varepsilon = 5/3$, $3x - 4y + 15 = 0$ і $3x + 4y - 9 = 0$;

9) парабола $(x-1)^2 = \frac{1}{4}(y-3)$, $(1, 3)$, $F\left(1, \frac{49}{16}\right)$, $p = \frac{1}{8}$, рівняння

директриси $y = 47/16$;

10) парабола $(y-2)^2 = -4(x-1)$, $(1, 2)$, $F(0, 2)$, $p = 2$, рівняння директриси $x = 2$.

46. 1) $x - y - 3z + 2 = 0$; 2) $y - 2z + 7 = 0$; 3) $x + 3z + 11 = 0$;

4) $x - 4y - 8 = 0$; 5) $3y + z = 0$; 6) $5x - z = 0$;

7) $3x - 2y = 0$; 8) $z + 1 = 0$; 9) $y + 1 = 0$;

10) $x + 3 = 0$; 11) $x - 2y - 3z + 3 = 0$;

12) $x - 2y + z = 0$; 13) $3x - 6y + 7z - 6 = 0$.

47. $\sqrt{2}$.

48. $x + 3y + 6 = 0$ і $3x - y + 10z - 16 = 0$.

49. $(0, 0, 3)$ і $(0, 0, -5/2)$.

50. а) $2x - y + 3z + 1 = 0$; б) $2x - y - 8z - 10 = 0$;

в) $3x + 3y + z - 2 = 0$; г) $17x + 9y + 8z - 9 = 0$.

51. $\varphi = \frac{\pi}{2}$.

52. 6,5.

53. $\frac{x}{-3} = \frac{y-2}{4} = \frac{z-3}{5}$; $x = -3t$, $y = 4t + 2$, $z = 5t + 3$.

54. $\frac{x-1}{2} = \frac{y+2}{3} = \frac{z-1}{-2}$.

55. Так, на прямій $\frac{x-3}{-3} = \frac{y}{2} = \frac{z-1}{3}$.

57. а) $\frac{x-2}{2} = \frac{y}{-3} = \frac{z+3}{5}$; б) $\frac{x-2}{1} = \frac{y}{0} = \frac{z+3}{0}$; в) $\frac{x-2}{0} = \frac{y}{0} = \frac{z-1}{1}$;

г) $\frac{x-2}{1} = \frac{y}{2} = \frac{z-3}{-1/2}$.

58. а) $3x - 6y + 4z - 2 = 0$; б) $2x + y - 1 = 0$; в) $61/\sqrt{5}$;
 г) $(4/5, -3/5, -1)$.
59. а) $1/\sqrt{15}$; б) $(1, -6, -4)$; в) $3x - y + 2z - 1 = 0$.
60. $A = -2$.
61. $A = -6$, $B = -18$.
62. $2x - 16y - 13z + 31 = 0$.
63. $\frac{4\sqrt{78}}{13}$.
64. $(2, 9, 6)$.
65. $(3, 7, 4)$.

Ключові терміни

Лінія (крива), геометричне місце точок, пряма в \mathbf{R}^2 (\mathbf{R}^3), поточні координати, кутовий коефіцієнт, вектор (напрямний, нормальний), рівняння прямої (канонічне, параметричне, з кутовим коефіцієнтом, у відрізках на осях, нормальне, загальне), криві другого порядку (центральні, нецентральні), еліпс, гіпербола, парабола, параметри, фокус, ексцентриситет, перетворення координат (паралельне перенесення, поворот осей), площина, різновиди рівнянь, умови паралельності (перпендикулярності, збігу, перетину, належності), відстань, кут, критерій (паралельності, ортогональності).

Резюме

Викладено основи аналітичної геометрії на площині (пряма, криві другого порядку), у просторі (площина, пряма, площина і пряма), на основі чого розглянуто задачі стосовно взаємного розташування перелічених геометричних об'єктів у просторі і їхніх числових характеристик.

Література: [3; 4; 5; 10; 12; 18; 21; 22; 24].

4. Лінійні простори та лінійні оператори

Математика в усі часи була і залишається „першою красунею” серед наук і, отже, естетичні принципи науки найбільш яскраво виявляються в математиці.

А. Волошинов

Мета: опанувати узагальнення поняття „вектор” на випадок числа координат більше трьох і оволодіти відповідними засобами подання, перетворення і збереження інформації.

Питання теми:

- 4.1. Лінійні m -вимірні простори (\mathbf{R}^m): означення основних понять.
- 4.2. Лінійна залежність і незалежність системи векторів.
- 4.3. Базис \mathbf{R}^m . Розклад вектора за базисом.
- 4.4. Лінійні перетворення (лінійні оператори).
- 4.5. Власні вектори і власні числа квадратних матриць.

Компетентності, що формуються після вивчення теми:

Загальнонаукова: здатність перенесення знань з векторної алгебри на абстрактні простори – простори виміру більше трьох – у поєднанні із засобами лінійної алгебри.

Загальнопрофесійна: володіння методами аналізу інформації, яка подана у вигляді багатовимірних векторів.

Спеціалізовано-професійна: здатність використовувати лінійні оператори при моделюванні різноманітних залежностей між характеристиками складових інформаційних систем.

4.1. Лінійні m -вимірні простори (\mathbf{R}^m): означення основних понять

Поняття „лінійний m -вимірний простір” є узагальненням для $m > 3$ добре відомих понять:

одновимірний векторний простір – сукупність усіх векторів, що лежать на прямій, – який позначають через \mathbf{R}^1 , або просто \mathbf{R} , як і множину дійсних чисел (рис. 4.1.1-а);

двовимірний векторний простір \mathbf{R}^2 – сукупність усіх векторів, що належать площині (рис. 4.1.1-б);

тривимірний векторний простір \mathbf{R}^3 – множина всіх векторів математичної моделі простору (рис. 4.1.1-в), в якому тимчасово перебуваємо і ми.

Передбачається, що на множинах \mathbf{R}^1 , \mathbf{R}^2 , \mathbf{R}^3 визначені лінійні операції (дії): додавання векторів і множення вектора на число.

Якщо вектори кожного простору пов'язати з декартовою системою координат, то будь-якому з них можна поставити у відповідність одне, два або три числа – його проєкції на координатні осі Ox , Oy , Oz (рис. 4.1.1), або *координати (компоненти)* вектора, і тоді пишуть:

$$\bar{a} = (a_x), \bar{a} = (a_x, a_y), \bar{a} = (a_x, a_y, a_z). \quad (4.1.1)$$

Це є запис векторів у *координатній формі* відповідно для $m = 1, 2, 3$.

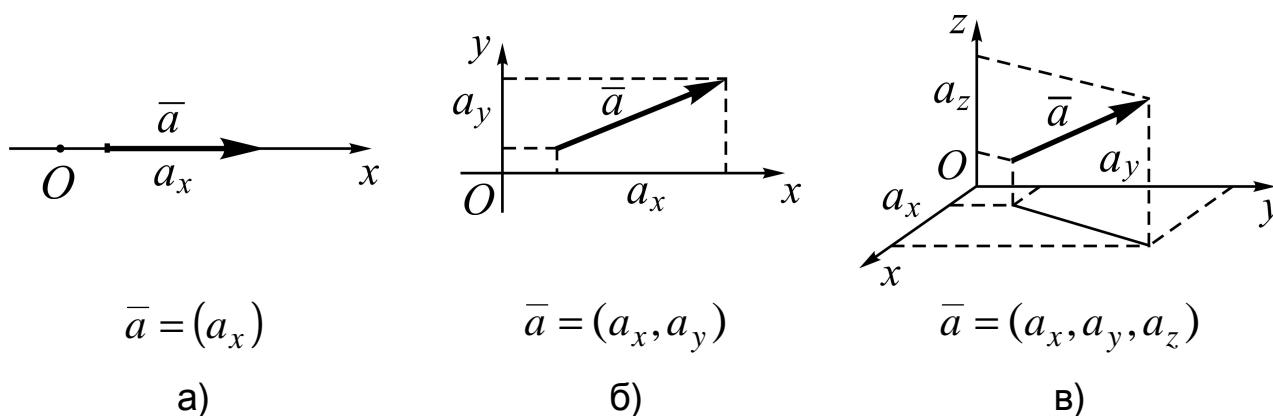


Рис. 4.1.1. Вектори у просторі: а) \mathbf{R}^1 ; б) \mathbf{R}^2 ; в) \mathbf{R}^3

Подання вектора у координатній формі (4.1.1) узагальнюється на будь-яке скінченне число координат: $m \geq 4$, $m \in \mathbf{N}$. Проте, просте геометричне (наочне) зображення вектора з числом координат, більшим трьох, ми дати не зможемо, бо живемо у тривимірному просторі, отож не володіємо інтуїтивним відчуттям просторів більших вимірів. Але така абстракція – теоретичне узагальнення практичного досвіду – є зручною базою для математичного моделювання різних явищ навколишнього світу.

Сукупність (множина) m дійсних чисел a_i , $i = \overline{1, m}$, упорядкованих певним чином за номерами i , називається **m -вимірним вектором**, або просто **m -вектором**, а числа $a_1, a_2, a_3, \dots, a_m$ – його **координатами**, або **компонентами**. Загалом m -вектори будемо позначати великими

латинськими літерами, а їхні координати записувати в круглих дужках у стовпець або в рядок через ко́му; за допомогою операції транспонування матриць (T) вектор-стовпець перетворюється в вектор-рядок і навпаки:

$$A = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_m \end{pmatrix} \Rightarrow A^T = (a_1, a_2, \dots, a_m); \quad B = (b_1, b_2, \dots, b_m) \Rightarrow B^T = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}.$$

Висновок: згідно з таким позначенням m -вектор можна тлумачити, як матрицю-стовпець розміру $m \times 1$ або матрицю-рядок розміру $1 \times m$.

Над m -векторами як над матрицями (див. п.1.1) можна виконувати дії (операції) додавання і множення на число.

Нехай $A = (a_1, a_2, \dots, a_m)$, $B = (b_1, b_2, \dots, b_m)$, тоді:

$$\begin{aligned} C = A + B &\Leftrightarrow c_i = a_i + b_i \quad \forall i = \overline{1, m}, \\ C = \lambda \cdot A &\Leftrightarrow C = (\lambda a_1, \lambda a_2, \dots, \lambda a_m), \quad \lambda - \text{const}. \end{aligned} \tag{4.1.2}$$

Якщо виконується рівність $C = \lambda \cdot A$, то вектор C називають **пропорційним** векторові A . За умови, що $\lambda \neq 0$, маємо: $A = \lambda^{-1} \cdot C$, тобто вектори **взаємно пропорційні**. У частинному випадку, при $\lambda = 1$, отримуємо **рівні вектори**, тобто вектори з рівними однойменними (за номером) координатами:

$$C = A \Leftrightarrow c_i = a_i \quad \forall i = \overline{1, m}.$$

Операції додавання векторів і множення вектора на число (скаляр) називаються **лінійними операціями** над векторами. В результаті виконання лінійних операцій також отримуємо вектори.

Як і дії над матрицями, операції над векторами підкоряються *асоціативному* (сполучному), *комутативному* (переставному), *дистрибутивному* (розподільному) законам арифметики (див. п.1.1).

Вектор, усі координати якого дорівнюють нулеві, називають **нульовим вектором**, або **нуль-вектором**: $\bar{0} = (0, 0, \dots, 0)$.

Для будь-яких вектора A і скаляра λ маємо:

$$A + \bar{0} = A, \quad \lambda \cdot \bar{0} = \bar{0} \quad (\text{обґрунтуйте!}).$$

Крім того, нульовий вектор пропорційний будь-якому іншому вектору (*покажіть!*), але не навпаки (*чому?*).

Вектор $-A = (-a_1, -a_2, \dots, -a_m)$ називається **протилежним** вектору $A = (a_1, a_2, \dots, a_m)$. Зрозуміло, що $A + (-A) = A - A = \bar{0}$.

Вектор, у якого одна з компонент дорівнює одиниці, а інші рівні нулю, називається **одиничним вектором**. Таких m -векторів існує (згідно з числом координат) у кількості m :

$$e_1 = (1, 0, 0, \dots, 0), \quad e_2 = (0, 1, 0, \dots, 0), \quad \dots, \quad e_m = (0, 0, 0, \dots, 1). \quad (4.1.3)$$

Сукупність \mathbf{R}^m усіх m -векторів з дійсними компонентами, для яких визначені лінійні операції, називається **m -вимірним векторним, або лінійним, простором**.

Підкреслимо, що для m -вимірних векторів, як і для одно-, дво-, тривимірних векторів, вводиться поняття **скалярного добутку** двох векторів як суми добутків їхніх однойменних (за номером) координат:

для 3-вимірних векторів

$$(\bar{a} = (a_x, a_y, a_z), \bar{b} = (b_x, b_y, b_z)) \Rightarrow \bar{a} \cdot \bar{b} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z;$$

для векторів довільної вимірності $m \in \mathbf{N}$

$$\begin{aligned} (A = (a_1, a_2, \dots, a_m), B = (b_1, b_2, \dots, b_m)) &\Rightarrow \\ \Rightarrow A \cdot B = a_1 b_1 + a_2 b_2 + \dots + a_m b_m. \end{aligned} \quad (4.1.4)$$

Довжиною, або **модулем**, m -вектора A називається число $|A|$, яке визначається рівністю:

$$|A| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_m^2} = \left(\sum_{i=1}^m a_i^2 \right)^{1/2}. \quad (4.1.5)$$

(*Наведіть словесне формулювання означення модуля m -вектора і порівняйте його з означенням довжини вектора з \mathbf{R}^3 .*)

Модуль – числова характеристика m -вектора, а скалярний добуток можна стлумачити, як спільну числову характеристику двох векторів.

В теорії лінійних просторів будь-яку сукупність (множину) m -векторів A_1, A_2, \dots, A_n прийнято називати **системою векторів**. Позначають систему так: $\{A_j\}_1^n$, де $A_j^T = (a_{1j}, a_{2j}, \dots, a_{mj})$, а індекс j пробігає значення від одиниці до n .

Спираючись на поняття m -вектора і системи з n векторів, СЛАР $m \times n$ (див. п. 1.4) подають так (*прослідкуйте!*):

$$A_1 x_1 + A_2 x_2 + \dots + A_n x_n = B$$

– **векторна форма** запису $(m \times n)$ -системи, або в розгорнутому вигляді:

$$\begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix} \cdot x_1 + \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{pmatrix} \cdot x_2 + \dots + \begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix} \cdot x_n = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}. \quad (4.1.6)$$

Дійсно, якщо помножити кожний вектор A_j покомпонентно на x_j ($j = \overline{1, n}$), скласти отримані вектори, а потім прирівняти компоненти векторів у лівій і правій частинах рівності (4.1.6), то прийдемо, як указано вище, до СЛАР $m \times n$.

Із (4.1.6) випливає, що систему з n векторів можна розглядати, як матрицю розміру $m \times n$, стовпцями якої є m -вектори, і навпаки:

$$\begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}. \quad (4.1.7)$$

Якщо взяти до розгляду систему одиничних векторів (4.1.3), то отримаємо одиничну матрицю m -го порядку.

Зауваження. Виявляється, що на основі теорії m -вимірних лінійних просторів можна побудувати всю теорію матриць, зокрема: матричну алгебру; теорію систем лінійних алгебраїчних рівнянь, елементи якої вивчалися у темі 1, тощо. Тому, в широкому розумінні, **лінійна алгебра** – це розділ математики, *об'єктом* вивчення якого є лінійні (векторні) простори, а *предметом* – розробка відповідних алгебраїчних методів (для встановлення властивостей просторів у цілому та їхніх елементів) і

застосування їх до побудови математичних моделей реальних явищ та процесів у різноманітних галузях людської діяльності.

4.2. Лінійна залежність і незалежність системи векторів

Нехай $\{A_j\}_1^n$ – система m -векторів A_1, A_2, \dots, A_n ; $\alpha_j, j = \overline{1, n}$, – дійсні числа (скаляри); $B = (b_1, b_2, \dots, b_m)^T$ – вектор із \mathbf{R}^m .

Вектор B називають **лінійною комбінацією** векторів системи, якщо його можна подати у вигляді суми добутків чисел α_j на вектори A_j :

$$B = \alpha_1 A_1 + \alpha_2 A_2 + \dots + \alpha_n A_n = \sum_{j=1}^n \alpha_j A_j. \quad (4.2.1)$$

Залучаючи поняття *пропорційності* векторів, можна сказати інакше: вектор B називають **лінійною комбінацією** векторів системи, якщо його можна подати у вигляді суми векторів, пропорційних векторам системи. (Покажіть, що нуль-вектор $\bar{0}$ є лінійною комбінацією векторів будь-якої системи векторів.)

Система векторів $\{A_j\}_1^n$ називається **лінійно залежною (незалежною)**, якщо хоча б один (ні один) з її векторів є (не є) лінійною комбінацією інших:

$$\begin{aligned} \{A_j\}_1^n \text{ – лінійно залежна (лінійно незалежна)} &\Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \exists k \in \{1, 2, \dots, n\} \ (\nexists k \in \{1, 2, \dots, n\}): A_k &= \sum_{\substack{j=1 \\ (j \neq k)}}^n \alpha_j A_j. \end{aligned} \quad (4.2.2)$$

Теорема 4.2.1 (про лінійну залежність системи векторів). Якщо існують числа $\alpha_j, j = \overline{1, n}$, не всі рівні нулю, такі, що справедлива рівність

$$\alpha_1 A_1 + \alpha_2 A_2 + \dots + \alpha_n A_n = \bar{0}, \text{ або } \sum_{j=1}^n \alpha_j A_j = \bar{0}, \quad (4.2.3)$$

то система $\{A_j\}_1^n$ є лінійно залежною.

Д о в е д е н н я. Нехай існують деякі α_j , $j \in \{1, 2, \dots, n\}$, відмінні від нуля, які задовольняють (4.2.3). Виберемо одне з них, неважливо яке; хай це буде α_1 . Помножимо ліву і праву частини рівності (4.2.3) на $1/\alpha_1 \neq 0$:

$$\frac{1}{\alpha_1}(\alpha_1 A_1 + \alpha_2 A_2 + \dots + \alpha_n A_n) = \frac{1}{\alpha_1} \bar{0} \Rightarrow A_1 + \underbrace{\frac{\alpha_2}{\alpha_1} A_2 + \dots + \frac{\alpha_n}{\alpha_1} A_n}_{A_0} = \bar{0}.$$

Далі додамо до лівої і правої частин рівності вектор, протилежний векторові A_0 :

$$A_1 + A_0 + (-A_0) = \bar{0} - A_0 \Rightarrow A_1 = -\frac{\alpha_2}{\alpha_1} A_2 - \frac{\alpha_3}{\alpha_1} A_2 - \dots - \frac{\alpha_n}{\alpha_1} A_n,$$

а це і означає, що система $\{A_j\}_1^n$ згідно з (4.2.1) лінійно залежна, бо вектор A_1 є лінійною комбінацією інших.

Приклад лінійно залежної системи векторів:

$$\begin{aligned} A_1 &= \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, A_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, A_3 = \begin{pmatrix} 7 \\ 6 \\ 7 \end{pmatrix} \Rightarrow 3A_1 - 2A_2 - A_3 = \bar{0} \Rightarrow \\ &\Rightarrow \left(A_1 = \frac{2}{3} A_2 + \frac{1}{3} A_3, A_2 = \frac{3}{2} A_1 - \frac{1}{2} A_3, A_3 = 3A_1 - 2A_2 \right), \end{aligned}$$

де кожний із векторів системи є лінійною комбінацією інших.

Наслідок 4.2.1 (про лінійну незалежність системи векторів). Система векторів $\{A_j\}_1^n$ лінійно незалежна, якщо рівність $\sum_{j=1}^n \alpha_j A_j = \bar{0}$ виконується тільки при $\alpha_j = 0 \quad \forall j = \overline{1, n}$.

Д о в е д е н н я. Дійсно, якщо припустити, що існує $\alpha_j \neq 0$, де $j \in \{1, 2, \dots, n\}$, то згідно з теоремою 4.2.1 система векторів повинна бути лінійно залежною, що суперечить умові наслідку.

Нехай система складається з одного вектора. *Подумайте*, якою вона буде – лінійно залежною чи лінійно незалежною системою.

У світлі викладеного природно постає задача: установити, чи є якась (задана) система m -векторів лінійно залежною, чи незалежною. Цю задачу називають **задачею дослідження системи векторів на лінійну незалежність**. Розв'яжемо її в загальній постановці.

Задача 4.2.1. Дослідити на лінійну незалежність систему векторів $\{A_j\}_1^n$ із простору \mathbf{R}^m .

Розв'язання зводиться (згідно з теоремою 4.2.1 і наслідком з неї) до дослідження рівності (4.2.2): $\alpha_1 A_1 + \alpha_2 A_2 + \dots + \alpha_n A_n = \bar{0}$.

1⁰. Подаємо вектори A_1, A_2, \dots, A_n і $\bar{0}$ через їхні координати:

$$\begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix} \cdot \alpha_1 + \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{pmatrix} \cdot \alpha_2 + \dots + \begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix} \cdot \alpha_n = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (4.2.4)$$

2⁰. Виконуємо в лівій частині рівності (4.2.4) дії множення векторів на числа α_j , $j = \overline{1, n}$, і знаходимо суму отриманих векторів:

$$\begin{pmatrix} a_{11}\alpha_1 + a_{12}\alpha_2 + \dots + a_{1n}\alpha_n \\ a_{21}\alpha_1 + a_{22}\alpha_2 + \dots + a_{2n}\alpha_n \\ \vdots \\ a_{m1}\alpha_1 + a_{m2}\alpha_2 + \dots + a_{mn}\alpha_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (4.2.5)$$

3⁰. *Прирівнюємо* компоненти векторів лівої і правої частин у (4.2.5):

[illegible]

Висновок: дослідження системи векторів на лінійну незалежність зводиться до розгляду однорідної $(m \times n)$ -системи рівнянь.

Однорідна система завжди сумісна (згадайте, чому?), тому залишається з'ясувати, якою вона буде – визначеною чи невизначеною:

якщо ранг системи (4.2.6) дорівнює числу невідомих, то вона має єдиний – нульовий – розв’язок, отже, система векторів *лінійно незалежна*:

$$r = n \Rightarrow \{A_j\}_1^n - \text{лінійно незалежна};$$

якщо ранг системи (4.2.6) менше числа невідомих, то вона має не-нульові розв’язки, а значить, система векторів *лінійно залежна*:

$$r < n \Rightarrow \{A_j\}_1^n - \text{лінійно залежна}.$$

(Подумайте, чи справедливі обернені до наведених твердження.)

Однією з (вартих особливої уваги) лінійно незалежних систем векторів є система m -вимірних одиничних векторів $\{e_j\}_1^m$ (4.1.3); *покажіть* це самостійно.

Задача 4.2.2. Установити, яке найбільше (максимальне) число векторів може містити лінійно незалежна система векторів $\{A_j\}_1^n$ із \mathbf{R}^m .

Розв’язання. Будемо виходити з порівняння *кількості* векторів системи n – довільного скінченного числа – з *вимірністю* простору m – фіксованого числа, – враховуючи їхній зв’язок з рангом системи (4.2.6).

1°. Якщо $n > m$, то система завжди *лінійно залежна*, оскільки ранг відповідної системи рівнянь не може бути більше m ; це означає, що будь-яка система з числом векторів, більшим m , лінійно залежна.

2°. Якщо $n = m$, то отримуємо квадратну $(m \times m)$ -систему, і тоді $\{A_j\}_1^m$ завжди *лінійно залежна* в разі рівності нулю визначника системи рівнянь ($\Delta = 0$), а якщо визначник системи рівнянь відмінний від нуля ($\Delta \neq 0$), то система векторів *лінійно незалежна*.

Відповідь: лінійно незалежна система векторів із \mathbf{R}^m може містити щонайбільше (максимальне) число векторів у кількості, рівній вимірності лінійного простору – числу m .

Пропонуємо самостійно навести міркування щодо випадку $n < m$ і дати відповідь на запитання, яке найменше (мінімальне) число векторів може містити лінійно незалежна система векторів із \mathbf{R}^m .

Розв’язання задачі дослідження на лінійну незалежність системи векторів має виключне значення для універсалізації опису (подання) будь-якого вектора з m -вимірного простору (а їх нескінченно ж багато!).

4.3. Базис \mathbf{R}^m . Розклад вектора за базисом

Поняття „базис” (від грецьк. basis – основа) є одним із фундаментальних понять теорії векторних просторів і означається воно „мовою лінійної незалежності”, а саме: будь-яка система (множина) m лінійно незалежних m -векторів A_1, A_2, \dots, A_m називається **базисом \mathbf{R}^m** :

$\{A_j\}_1^m$ – базис $\mathbf{R}^m \Leftrightarrow \{A_j\}_1^m$ – лінійно незалежна система векторів.

Якщо ж взяти до уваги розв’язання задачі 4.2.2 (див. 2⁰), то базис можна означити „мовою визначника”: будь-яка система m -вимірних векторів називається **базисом \mathbf{R}^m** , якщо визначник, складений із координат її векторів відмінний від нуля:

$$\{A_1, A_2, \dots, A_m\} \text{ – базис } \mathbf{R}^m \Leftrightarrow \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mm} \end{vmatrix} \neq 0. \quad (4.3.1)$$

Теорема 4.3.1 (про розклад m -вектора за базисом). Будь-який вектор $B = (b_1, b_2, \dots, b_m)^T$ із \mathbf{R}^m можна подати у вигляді лінійної комбінації векторів базису $\{A_j\}_1^m$ і до того ж єдиним чином.

Д о в е д е н н я. Покажемо, що існують числа $\alpha_j, j = \overline{1, m}$, такі, що виконується рівність:

$$B = \alpha_1 A_1 + \alpha_2 A_2 + \dots + \alpha_m A_m, \text{ або } \sum_{j=1}^m \alpha_j A_j = B. \quad (4.3.2)$$

Дійсно, за аналогією з (4.2.4) – (4.2.6) отримуємо:

$$\begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix} \cdot \alpha_1 + \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{pmatrix} \cdot \alpha_2 + \dots + \begin{pmatrix} a_{1m} \\ a_{2m} \\ \vdots \\ a_{mm} \end{pmatrix} \cdot \alpha_m = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix} \Rightarrow$$

[illegible]

Подання вектора B у вигляді лінійної комбінації векторів базису називається **розкладом вектора за базисом**, а числа α_j , $j = \overline{1, n}$, – **коефіцієнтами розкладу**.

Система m -вимірних одиничних векторів $\{e_j\}_1^m$ (4.1.3) називається

одиничним базисом \mathbf{R}^m . Коефіцієнти розкладу будь-якого вектора за цим базисом співпадають із координатами самого вектора (*обміркуйте!*).

Зокрема, у тривимірному просторі \mathbf{R}^3 одиничний базис складають відомі вектори: $\bar{i} = (1, 0, 0)$, $\bar{j} = (0, 1, 0)$, $\bar{k} = (0, 0, 1)$ – орти. Одиничний базис є частинним випадком так названих **ортогональних базисів** – базисів $\{A_j\}_1^m$, скалярний добуток будь-якої пари векторів із яких дорівнює нулеві: $A_i \cdot A_j = 0 \quad \forall i \neq j$. Одиничний ортогональний базис називають **ортонормованим**.

Розглянемо типові задачі, пов'язані з відшукуванням базису серед заданої системи векторів і розкладом інших векторів за цим базисом. Коментар кроків процесу розв'язування задач міститиме принципові положення і (у дужках) технічний бік їх реалізації.

Задача 4.3.1. Знайти розклад вектора B за заданим базисом $\{A_j\}_1^3 = \{A_1, A_2, A_3\}$, де

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}, A_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}, A_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Розв'язання ґрунтується на теоремі 4.3.1 і зводиться до розгляду системи трьох лінійних рівнянь з трьома невідомими (СЛАР 3×3). Її будемо подавати розширеною матрицею \overline{A} .

1⁰. *Переконуємося* у тому, що вектори A_1, A_2, A_3 утворюють базис (для чого обчислимо визначник, складений із їхніх координат):

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 3 & -1 & -1 \\ 2 & 3 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & -4 & -7 \\ 0 & 1 & -5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -4 & -7 \\ 1 & -5 \end{vmatrix} = 27 \neq 0 \Rightarrow \{A_j\}_1^3 - \text{базис } \mathbf{R}^3.$$

2⁰. *Знаходимо* коефіцієнти розкладу вектора B (для чого згідно з (4.1.13) розв'яжемо відповідну систему лінійних рівнянь):

$$\begin{aligned} \bar{A} &= \left(\begin{array}{ccc|c} \textcircled{1} & 1 & 2 & 3 \\ 3 & -1 & -1 & -2 \\ 2 & 3 & -1 & -1 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & +4 & +7 & +11 \\ 0 & \textcircled{1} & -5 & -7 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 7 & 10 \\ 0 & 0 & \textcircled{27} & 39 \\ 0 & 1 & -5 & -7 \end{array} \right) \sim \\ &\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -1/9 \\ 0 & 0 & 1 & 13/9 \\ 0 & 1 & 0 & 2/9 \end{array} \right) \Rightarrow \begin{cases} \alpha_1 = -1/9 \\ \alpha_3 = 13/9 \\ \alpha_2 = 2/9 \end{cases} \end{aligned}$$

3⁰. *Виконуємо* перевірку (для чого складемо лінійну комбінацію $\alpha_1 A_1 + \alpha_2 A_2 + \alpha_3 A_3$ і зіставимо її з вектором B):

$$\frac{1}{9} \left[- \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} + 13 \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} \right] = \frac{1}{9} \begin{pmatrix} -1+2+26 \\ -3-2-13 \\ -2+6-13 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix} = B.$$

$$\text{Відповідь: } B = -\frac{1}{9} A_1 + \frac{2}{9} A_2 + \frac{13}{9} A_3.$$

Задача 4.3.2. Установити, чи є серед заданої системи векторів $\{A_j\}_1^4$ базис. У разі існування базису здійснити за ним розклади всіх векторів системи: $A_1^T = (1, 2, 3)$, $A_2^T = (-1, 0, 1)$, $A_3^T = (2, 1, 3)$, $A_4^T = (-2, 0, 1)$.

Розв'язання ґрунтується на використанні умов лінійної залежності (незалежності) системи векторів і, звичайно, на теоремі 4.3.1, а зводиться до розгляду однорідної системи трьох лінійних рівнянь з чотирма невідомими (СЛАР 3×4). Її будемо подавати основною матрицею A , бо $A \sim \bar{A}$ (чому?).

1⁰. Досліджуємо систему векторів на наявність базису (для чого над матрицею A , складеною із координат векторів, виконаємо е/п з метою отримати в ній одиничну матрицю):

$$A = \begin{pmatrix} \textcircled{1} & -1 & 2 & -2 \\ 2 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 3 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & \textcircled{-1} & 2 & -2 \\ 0 & 2 & -3 & 4 \\ 0 & 4 & -3 & 7 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0,5 & 0 \\ 0 & 1 & -1,5 & \textcircled{2} \\ 0 & 0 & -3 & +1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0,5 & 0 \\ 0 & 1 & 4,5 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

\Rightarrow (вектори A_1, A_2, A_4 утворюють базис).

2⁰. Визначаємо коефіцієнти розкладу A_3 за знайденим базисом (для чого виписуємо елементи третього стовпця, нумеруючи їх відповідно до номера одиничного вектора): $\alpha_1 = 0,5$; $\alpha_2 = 4,5$, $\alpha_4 = -3$.

Коефіцієнтам розкладу базисних векторів відповідають одиничні вектори. (Пропонуємо переконатися у правильності розв'язку задачі.)

$$\begin{aligned} \text{Відповідь: } A_1 &= 1 \cdot A_1 + 0 \cdot A_2 + 0 \cdot A_4, & A_2 &= 0 \cdot A_1 + 1 \cdot A_2 + 0 \cdot A_4, \\ A_3 &= 0,5 \cdot A_1 + 4,5 \cdot A_2 - 3 \cdot A_4, & A_4 &= 0 \cdot A_1 + 0 \cdot A_2 + 1 \cdot A_4. \end{aligned}$$

Задача 4.3.3. В умовах задачі 4.3.2 здійснити перехід до іншого („нового”) базису і розклад за ним усіх векторів системи.

Розв'язання зводиться до утворення за допомогою е/п в матриці A одиничного вектора на місці третього стовпця, вибираючи в якості провідного будь-який із його елементів.

Відштовхуючись від розв'язання попередньої задачі, маємо:

$$A \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0,5 & 0 \\ 0 & 1 & 4,5 & 0 \\ 0 & 0 & \textcircled{-3} & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1/6 \\ 0 & 1 & 0 & 3/2 \\ 0 & 0 & 1 & -1/3 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{(новий базис } \{A_1, A_2, A_3\}).$$

Коефіцієнти розкладу векторів визначаються стовпцями матриці.

$$\begin{aligned} \text{Відповідь: } A_1 &= 1 \cdot A_1 + 0 \cdot A_2 + 0 \cdot A_3, & A_2 &= 0 \cdot A_1 + 1 \cdot A_2 + 0 \cdot A_3, \\ A_3 &= 0 \cdot A_1 + 0 \cdot A_2 + 1 \cdot A_3, & A_4 &= 1/6 \cdot A_1 + 3/2 \cdot A_2 - 1/3 \cdot A_3. \end{aligned}$$

Якби ранг матриці A виявився менше трьох, то це б означало, що система векторів не містить базис (чому?). Подумайте, яке найбільше число базисів може містити система n векторів $\{A_j\}_1^n$ із \mathbf{R}^m .

Зауваження. Висновок щодо визначення коефіцієнтів розкладу (векторів за базисом) узагальнюється на будь-яке скінченне число n векторів системи.

Наприклад, якщо у розглядувану вище систему ввести ще один вектор $A_5^T = (3, -1, 2)$, то отримаємо:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & -2 & 3 \\ 2 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 3 & 1 & 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0,5 & 0 & -0,5 \\ 0 & 1 & 4,5 & 0 & 10,5 \\ 0 & 0 & -3 & 1 & -7 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} A_3 = 0,5 \cdot A_1 + 4,5 \cdot A_2 - 3 \cdot A_4, \\ A_5 = -0,5 \cdot A_1 + 10,5 \cdot A_2 - 7 \cdot A_4. \end{cases}$$

Елементи теорії векторних просторів є базовими відомостями для успішного оволодіння багатьма методами розв'язання оптимізаційних задач, які вивчаються у таких дисциплінах як „Математичне програмування” і „Економіко-математичне моделювання”.

4.4. Лінійні перетворення (лінійні оператори)

Лінійні оператори: означення, приклади

Нижче розглядаються системи векторів, число яких – n – дорівнює вимірності простору – m , і сам простір позначається через \mathbf{R}^n .

Якщо кожному векторові $X \in \mathbf{R}^n$ поставлено у відповідність певний вектор $\mathcal{A}X$ (або $\mathcal{A}(X)$), то кажуть, що у векторному просторі \mathbf{R}^n задано **перетворення** \mathcal{A} , або **оператор** \mathcal{A} . Вектор $\mathcal{A}X$ називають **образом** вектора X , а X – **прообразом** вектора $\mathcal{A}X$.

Оператор \mathcal{A} називається **лінійним перетворенням** (ЛП) \mathbf{R}^n в \mathbf{R}^n , або **лінійним оператором**, якщо для двох n -векторів X, Y і довільного дійсного скаляра α виконуються умови:

$$1) \mathcal{A}(X + Y) = \mathcal{A}X + \mathcal{A}Y \text{ (властивість адитивності);} \quad (4.4.1)$$

$$2) \mathcal{A}(\alpha X) = \alpha \mathcal{A}X \text{ (властивість однорідності).} \quad (4.4.2)$$

(Наведіть словесне формулювання властивостей.)

Прикладами найпростіших ЛП є:

тотожне перетворення: $\mathcal{E}X = X \quad (\forall X \in \mathbf{R}^m)$ – це коли кожний m -вектор простору перетворюється у себе самого, тобто залишається без зміни;

нульовий оператор: $\mathcal{O}X = \bar{0} \quad \forall X \in \mathbf{R}^m$ – це коли кожний m -вектор простору перетворюється у нуль-вектор, тобто $\mathcal{O}X = \underbrace{(0, 0, \dots, 0)}_{m \text{ координат}}$.

Переконаємося, що оператор \mathcal{E} лінійний:

$$\mathcal{E}X = X \Rightarrow \left[\begin{array}{l} (\mathcal{E}(X + Y) = X + Y, \quad \mathcal{E}X + \mathcal{E}Y = X + Y) \Rightarrow 1); \\ (\mathcal{E}(\alpha X) = \alpha X, \quad \alpha \mathcal{E}X = \alpha X) \Rightarrow 2). \end{array} \right.$$

(Покажіть, що нульове перетворення задовольняє умови 1), 2).)

Послідовне застосування співвідношень (4.4.1), (4.4.2) до векторів αX , βY дає:

$$\mathcal{A}(\alpha X + \beta Y) = \alpha \mathcal{A}X + \beta \mathcal{A}Y. \quad (4.4.3)$$

Узагальнення: при ЛП образ лінійної комбінації скінченного числа векторів із \mathbf{R}^n дорівнює лінійній комбінації образів цих векторів:

$$\mathcal{A}\left(\sum_{i=1}^k \alpha_i X_i\right) = \sum_{i=1}^k \alpha_i \mathcal{A}X_i, \quad k \in \mathbf{N}, \quad (4.4.4)$$

де $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k$ – дійсні скаляри;

$\{X_i\}_1^k$ – система векторів із \mathbf{R}^n .

У векторних просторах виміру не більше трьох ЛП припускають геометричну інтерпретацію, яка згідно зі властивостями *адитивності* і *однорідності* пов'язана з операціями додавання і множення вектора на число.

Нехай, *наприклад*, \mathcal{A} – поворот усіх векторів із \mathbf{R}^2 навколо початку координат на кут φ проти руху годинникової стрілки. \mathcal{A} володіє властивістю адитивності, бо однаково, спочатку додати вектори, а потім поверну-

ти їхню суму на кут φ , чи спочатку повернути вектори на кут φ , а потім знайти суму (рис. 4.4.1-а). Також однаково, помножити спочатку вектор X на число α , а потім повернути на кут φ , чи спочатку повернути X на кут φ , а потім помножити на α (рис. 4.4.1-б). Отже, \mathcal{A} – лінійний оператор.

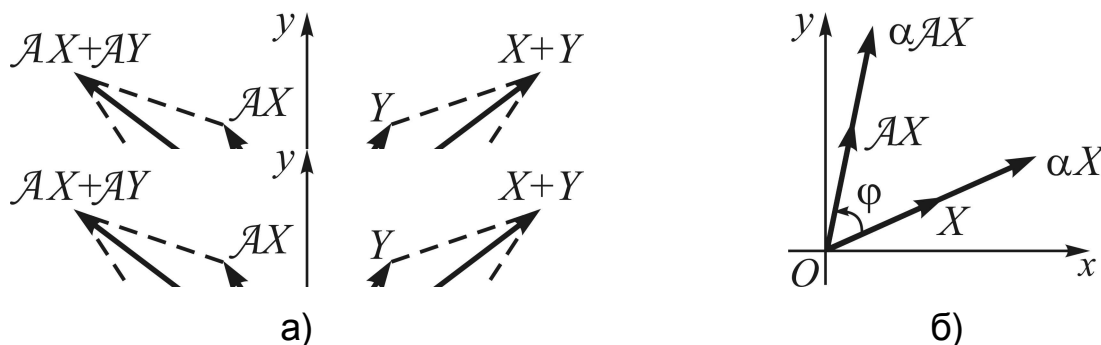


Рис. 4.4.1. Властивості ЛП: а) адитивності; б) однорідності

Формули повороту осей координат – формули переходу від старих координат: x і y , до нових: X і Y , і навпаки (див. (3.2.18), де покладено: $X = x'$, $Y = y'$) – визначають **алгебраїчну форму** зображення лінійного оператора повороту осей:

$$\begin{cases} x' = x \cos \alpha + y \sin \alpha \\ y' = -x \sin \alpha + y \cos \alpha \end{cases} \Rightarrow \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \mathcal{A} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix};$$

$$\begin{cases} x = x' \cos \alpha - y' \sin \alpha \\ y = x' \sin \alpha + y' \cos \alpha \end{cases} \Rightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \mathcal{A}^{-1} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix},$$
(4.4.5)

де \mathcal{A} (\mathcal{A}^{-1}) – оператор переходу від координат старих (нових) до нових (старих);

$(x, y)^T$, $(x', y')^T$ – вектори з початками у точці $O(0,0)$, кінці яких визначаються відповідно точками (x, y) , (x', y') .

ЛП \mathcal{A}^{-1} , за допомогою якого здійснюється відновлення вектора X за його образом $\mathcal{A} X$, називається **оберненим ЛП** (відносно оператора \mathcal{A}).

Співвідношення (4.4.5) можна подати у матричній формі, а саме:

$$\mathcal{A} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha \\ -\sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \quad \mathcal{A}^{-1} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}. \quad (4.4.6)$$

Подання образу вектора із \mathbf{R}^n у вигляді добутку квадратної матриці розміру $n \times n$ з вихідним вектором не є привілеєм ЛП повороту осей координат в \mathbf{R}^2 , а носить загальний характер. Покажемо, як це виглядає у загальному випадку.

Матриця лінійного перетворення, умова оберненості

Задача 4.4.1 (про координати образу вектора). Нехай у просторі \mathbf{R}^n вибрано базис e_1, e_2, \dots, e_n (не обов'язково ортонормований), і x_1, x_2, \dots, x_n – координати вектора X у цьому базисі. Знайти у вибраному базисі координати y_1, y_2, \dots, y_n вектора Y – образа X – при ЛП \mathcal{A} .

Розв'язання спирається на розклад вектора за базисом і властивостях ЛП. За умовою $X = x_1 e_1 + x_2 e_2 + \dots + x_n e_n$, тоді згідно з лінійністю оператора \mathcal{A} отримаємо:

$$Y = \mathcal{A}X = x_1 \mathcal{A}e_1 + x_2 \mathcal{A}e_2 + \dots + x_n \mathcal{A}e_n. \quad (4.4.7)$$

Але $\mathcal{A}e_j$, $j = \overline{1, n}$, це теж вектори із \mathbf{R}^n (чому?), тому їх можна розкласти за тим самим базисом. Нехай

$$\mathcal{A}e_j = a_{1j}e_1 + a_{2j}e_2 + \dots + a_{nj}e_n, \quad (4.4.8)$$

де a_{ij} – коефіцієнти розкладу вектора $\mathcal{A}e_j$ за базисом $\{e_i\}_1^n$.

З урахуванням (4.4.8) співвідношення (4.4.7) набуває вигляду:

$$\begin{aligned} Y = \mathcal{A}X &= x_1(a_{11}e_1 + a_{21}e_2 + \dots + a_{n1}e_n) + \\ &+ x_2(a_{12}e_1 + a_{22}e_2 + \dots + a_{n2}e_n) + \dots \\ &\dots + x_n(a_{1n}e_1 + a_{2n}e_2 + \dots + a_{nn}e_n). \end{aligned} \quad (4.4.9)$$

Групуючи члени правої частини відносно векторів базису, маємо:

$$\begin{aligned} Y = \mathcal{A}X &= (a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n)e_1 + \\ &+ (a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n)e_2 + \dots \\ &\dots + (a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n)e_n. \end{aligned} \quad (4.4.10)$$

З іншого боку, якщо y_1, y_2, \dots, y_n є координатами вектора Y у базисі $\{e_i\}_1^n$, то його можна подати так:

$$Y = y_1 e_1 + y_2 e_2 + \dots + y_n e_n. \quad (4.4.11)$$

Зіставляємо (4.4.11) з (4.4.10) і отримуємо координати вектора Y :

[illegible]

Висновок. При лінійному перетворенні \mathbf{R}^n в \mathbf{R}^n координати образу вектора є лінійними комбінаціями координат прообразу, коефіцієнти яких складають матрицю n -го порядку (позначимо її через A):

$$Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \dots \\ y_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mm} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_m \end{pmatrix} \Rightarrow Y = A \cdot X. \quad (4.4.13)$$

Матриця A , яка у добутку (зліва) з вектором із \mathbf{R}^n визначає координати його образу при ЛП \mathcal{A} , називається **матрицею ЛП \mathcal{A}** , і пишуть:

$$\mathcal{A}X = A \cdot X, \text{ а́бо } \mathcal{A}X = AX, \quad (4.4.14)$$

пропускаючи „крапку” як символ множення (зверніть увагу, що $\mathcal{A}X$ – нероздільний символ (позначення вектора-образу), а AX – добуток матриці з прообразом).

Кожний – j -й – стовпець матриці A складають коефіцієнти розкладу вектора $\mathcal{A}e_j$ за базисом $\{e_i\}_1^n$, кожний – i -й – рядок визначає коефіцієнти розкладу координат вектора $\mathcal{A}X$ за координатами вектора X . (Переконайтеся, що матрицею тотожного ЛП: $\mathcal{E}X = X \quad \forall X \in \mathbf{R}^n$, є одинична матриця, а матриця нульового оператора: $\mathcal{O}X = \bar{0} \quad \forall X \in \mathbf{R}^n$, є нуль-матрицею.)

Якщо вважати відомими координати вектора $Y = (y_1, y_2, \dots, y_n)^T$, то співвідношення (4.4.12) у сукупності складають СЛАР $n \times n$ відносно координат вектора X :

[illegible]

Невироджене ЛП визначає взаємно однозначну відповідність (бієкцію) між образами і прообразами векторів, бо система (4.4.15) при $\det A \neq 0$ має єдиний розв'язок. (А що буде за умови $\det A = 0$?)

$$A \cdot X = Y \Rightarrow X = A^{-1} \cdot Y = \mathcal{A}^{-1}Y.$$

Приклад. Знайти образ вектора X , якщо ЛП \mathcal{A} в деякому базисі τ_1, τ_2, τ_3 задане матрицею A , і з'ясувати, чи існує обернене ЛП \mathcal{A}^{-1} (вектори базису позначені буквою „тау”, щоб підкреслити, що він не обов'язково **ортogonalний**):

$$X = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} -1 & -2 & 3 \\ 6 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 5 \end{pmatrix}.$$

Знаходимо образ вектора X за формулою (4.4.14):

$$\mathcal{A}X = AX = \begin{pmatrix} -1 & -2 & 3 \\ 6 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 19 \\ 19 \end{pmatrix}.$$

Аналізуємо ЛП на невиродженість, для чого обчислюємо визначник матриці A : $\det A = 83 \neq 0$. Отже, існує оператор \mathcal{A}^{-1} , обернений до \mathcal{A} .

Операції над ЛП. Зв'язок між матрицями ЛП в різних базисах

Як відзначалося вище, кожному ЛП у вибраному базисі відповідає деяка квадратна матриця і будь-яку квадратну матрицю можна стлумачити, як матрицю ЛП у певному базисі. Тому операціями **множення ЛП на скаляр, додавання і множення лінійних операторів** називають відповідні операції над їхніми матрицями:

$$\begin{aligned} C = \lambda \mathcal{A} &\Leftrightarrow C = \lambda A, \\ C = \mathcal{A} + \mathcal{B} &\Leftrightarrow C = A + B, \\ C = \mathcal{A} \cdot \mathcal{B} &\Leftrightarrow C = A \cdot B. \end{aligned} \tag{4.4.16}$$

Наслідок: введені операції над ЛП володіють усіма властивостями (див. п. 1.1) відповідних операцій над матрицями (*обґрунтуйте!*).

Задача 4.4.2 (про зв'язок між матрицями ЛП у різних базисах). Нехай квадратна матриця $A = (a_{ij})_{n \times n}$ є матрицею ЛП \mathcal{A} у базисі $\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_n$, а $A' = (a'_{ij})_{n \times n}$ – матриця оператора \mathcal{A} у (новому) базисі $\tau'_1, \tau'_2, \dots, \tau'_n$; базиси не обов'язково ортогональні. Знайти співвідношення, яким пов'язані між собою матриці A і A' .

Розв'язання. Здійснимо розклад векторів $\tau'_j, j = \overline{1, n}$, нового базису за базисом $\{\tau_i\}_1^n$:

$$\tau'_j = p_{1j} \tau_1 + p_{2j} \tau_2 + \dots + p_{nj} \tau_n, \tag{4.4.17}$$

де p_{ij} – коефіцієнти розкладу вектора $\tau'_j, i = \overline{1, n}, j = \overline{1, n}$.

Вони утворюють матрицю $(p_{ij})_{n \times n}$, яку називають **матрицю переходу** до нового базису: від базису $\{\tau_i\}_1^n$ до базису $\{\tau'_i\}_1^n$.

Позначимо її через $P = (p_{ij})_{n \times n}$, а відповідне ЛП через \mathcal{P} . Тоді можна записати подвійну рівність:

$$\mathcal{P} \tau_j = p_{1j}\tau_1 + p_{2j}\tau_2 + \dots + p_{nj}\tau_n = \tau'_j. \quad (4.4.18)$$

Визначник матриці P відмінний від нуля (чому?), тому для \mathcal{P} існує обернене ЛП \mathcal{P}^{-1} , при якому

$$\mathcal{P}^{-1}\tau'_1 = \tau_1, \mathcal{P}^{-1}\tau'_2 = \tau_2, \dots, \mathcal{P}^{-1}\tau'_n = \tau_n.$$

За умовою,

$$\mathcal{A}\tau'_j = a'_{1j}\tau'_1 + a'_{2j}\tau'_2 + \dots + a'_{nj}\tau'_n. \quad (4.4.19)$$

Застосуємо до обох частин рівності (4.4.19) перетворення \mathcal{P}^{-1} :

$$\mathcal{P}^{-1}\mathcal{A}\tau'_j = a'_{1j}\tau_1 + a'_{2j}\tau_2 + \dots + a'_{nj}\tau_n. \quad (4.4.20)$$

А тепер у ліву частину (4.4.20) згідно з (4.4.17) замість τ'_j підставимо $\mathcal{P} \tau_j$, і отримаємо:

$$\mathcal{P}^{-1}\mathcal{A}\mathcal{P} \tau_j = a'_{1j}\tau_1 + a'_{2j}\tau_2 + \dots + a'_{nj}\tau_n. \quad (4.4.21)$$

З одного боку, матрицею перетворення $\mathcal{P}^{-1}\mathcal{A}\mathcal{P}$ є матриця $P^{-1}AP$, а з іншого – A' .

Висновок. Матриці A і A' пов'язані між собою співвідношенням:

$$A' = P^{-1}AP. \quad (4.4.22)$$

(Подумайте, як із (4.4.22) виразити A через матрицю A' .)

Приклад. Нехай у базисі τ_1, τ_2 перетворення \mathcal{A} має матрицю $A = \begin{pmatrix} 6 & -2 \\ 6 & -1 \end{pmatrix}$. Знайти матрицю цього ЛП у базисі τ'_1, τ'_2 , якщо: $\tau'_1 = \tau_1 + 2\tau_2$, $\tau'_2 = 2\tau_1 + 3\tau_2$.

Випишемо матрицю переходу P і знаходимо обернену до неї матрицю:

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \Rightarrow P^{-1} = \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}.$$

Використовуємо (4.4.22) з урахуванням асоціативності добутку матриць:

$$A' = \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 6 & -2 \\ 6 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 6 \\ 4 & 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

(Отримайте матрицю A' , групуючи перші два співмножники.)

Якщо матриця переходу невідома, а задано старий і новий базиси, то її відшукування зводиться до розв'язання лінійних $n \times n$ -систем (у кількості n).

Приклад. Знайти матрицю переходу P від базису τ_1, τ_2 до базису τ'_1, τ'_2 :

$$\tau_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \tau_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}; \quad \tau'_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \tau'_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Здійснюємо за теоремою 4.3.1 розклад векторів нового базису за базисом τ_1, τ_2 (див. (4.3.2)):

$$\begin{aligned} \tau_1 p_{11} + \tau_2 p_{21} = \tau'_1 &\Rightarrow \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} p_{11} + \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix} p_{21} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} p_{11} \\ p_{21} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1/9 \\ 2/9 \end{pmatrix}; \\ \tau_1 p_{12} + \tau_2 p_{22} = \tau'_2 &\Rightarrow \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} p_{12} + \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix} p_{22} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} p_{12} \\ p_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2/3 \\ 2/3 \end{pmatrix}, \end{aligned} \quad (4.4.23)$$

де p_{ij} ($i=1,2, j=1,2$) – коефіцієнти розкладу (елементи матриці переходу): перший індекс указує на номер координати вектора, а другий – на номер вектора нового базису, для якого здійснюється розклад.

$$\text{Таким чином, } P = \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{21} & p_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1/9 & 2/3 \\ 2/9 & 2/3 \end{pmatrix}.$$

Розв'язання двох систем (4.4.23) можна замінити розв'язанням одного матричного рівняння. Дійсно, якщо ввести в розгляд матриці T і T' , стовпцями яких є координати векторів базисів (назвемо їх **матрицями базисів**), то отримаємо:

$$\left(T = \begin{pmatrix} \tau_{11} & \tau_{12} \\ \tau_{21} & \tau_{22} \end{pmatrix}, T' = \begin{pmatrix} \tau'_{11} & \tau'_{12} \\ \tau'_{21} & \tau'_{22} \end{pmatrix} \right) \Rightarrow TP = T' \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} \tau_{11} & \tau_{12} \\ \tau_{21} & \tau_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{21} & p_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tau'_{11} & \tau'_{12} \\ \tau'_{21} & \tau'_{22} \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} \tau'_1 = \tau_1 p_{11} + \tau_2 p_{21} \\ \tau'_2 = \tau_1 p_{12} + \tau_2 p_{22} \end{cases}.$$
(4.4.24)

Виразимо матрицю переходу через матриці базисів:

$$TP = T' \Rightarrow T^{-1}TP = T^{-1}T' \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left| T^{-1}T = E, EP = P \right| \Rightarrow P = T^{-1}T'.$$
(4.4.25)

(Наведіть словесне формулювання отриманого результату.)

Формула (4.4.25) узагальнюється (на якій підставі?) на вектори будь-якого виміру. Для розглянутого прикладу маємо (прослідкуйте):

$$P = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{9} \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{9} \begin{pmatrix} -1 & 6 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1/9 & 2/3 \\ 2/9 & 2/3 \end{pmatrix}.$$

У комп'ютерній графіці (в математичних моделях відображення даних) застосовуються перетворення:

(A) поворот на кут φ навколо деякої точки площини (див. (4.4.5));

(B) розтяг (стиск) уздовж координатних осей:

$$X' = \alpha X, Y' = \delta Y, \quad \alpha > 0, \delta > 0;$$

(C) симетричне відображення відносно осі Ox (Oy):

$$X' = X, \quad Y' = -Y \quad (X' = -X, Y' = Y);$$

(D) перенесення у напрямі вектора (λ, μ) :

$$X' = X + \lambda, \quad Y' = Y + \mu.$$

Будь-яке перетворення (відображення) площини виду:

$$X' = \alpha X + \beta y + \lambda, \quad Y' = \gamma X + \delta Y + \mu,$$

де параметри $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ повинні задовольняти умову: $\alpha \cdot \beta - \gamma \cdot \delta \neq 0$, можна описати за допомогою суперпозиції (накладання) наведених вище перетворень (до речі, чи всі вони є лінійними?).

Наприклад, матриця S подвійної суперпозиції з трьох послідовно виконаних перетворень площини з матрицями A, B, C має вигляд:

$$S = C(B(A)) = C \cdot B \cdot A = \\ = \begin{pmatrix} \cos \varphi & \sin \varphi \\ -\sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \delta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha \cos \varphi & -\delta \sin \varphi \\ -\alpha \sin \varphi & -\delta \cos \varphi \end{pmatrix}.$$

(Чи зміниться результат перетворень, якщо співмножники поміняти місцями?)

Для задач економічного змісту важливим є окремий випадок ЛП, коли образ вектора дорівнює добутку прообразу зі скаляром.

4.5. Власні вектори і власні числа квадратних матриць

Означення власного вектора (в/в) і власного числа (в/ч) квадратної матриці, теореми про кількість в/ч і в/в

Нехай $X = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T$ і $Y = (y_1, y_2, \dots, y_n)^T$ – n -вимірні вектори ($n \in \mathbf{N}$), $A = (a_{ij})_{n \times n}$ – квадратна матриця n -го порядку (її можна розглядати як набір векторів простору \mathbf{R}^n).

Два n -вектори X і Y називаються **колінеарними**, якщо їхні координати пропорційні, тобто

$$\frac{x_i}{y_i} = \mu - \text{const}, i = \overline{1, n}, \text{ або } x_i = \mu y_i, \text{ і пишуть } X = \mu Y \\ \left(\frac{y_i}{x_i} = \lambda = \frac{1}{\mu} - \text{const} (\mu \neq 0), \text{ або } y_i = \lambda x_i, \text{ і пишуть } Y = \lambda X \right).$$

Якщо $n \leq 3$, то геометрично це означає, що вектори належать одній прямій або паралельним прямим.

Вектори із \mathbf{R}^n є матрицями-стовпцями, тобто матрицями розміру $n \times 1$. Отже, існує добуток матриці $A = (a_{ij})_{n \times n}$ з будь-яким вектором $X \in \mathbf{R}^n$ (чому?), і результатом добутку є також n -вектор (нехай ним буде Y): $AX = Y$.

Теоретичний інтерес (а далі виявляється – і практичний!) викликає випадок, коли вектор Y колінеарний векторові X , тобто $Y = \lambda X$.

Ненульовий вектор ($X \neq \bar{0}$) називають **власним**, або **характеристичним, вектором** матриці A , якщо існує таке дійсне число ($\lambda \in \mathbf{R}$), що має місце рівність:

$$AX = \lambda X. \quad (4.5.1)$$

Скаляр λ називається **власним**, або **характеристичним, числом** матриці A , **відповідним в/в X** , або **власним значенням** матриці.

Згідно з означеннями в/в і в/ч маємо:

якщо $A = E$, то кожний вектор із \mathbf{R}^n є власним вектором A , при цьому $\lambda = 1$ (адже за властивістю одиничної матриці $EX = X$);

будь-який n -вектор є в/в нульової матриці $A = (a_{ij})_{n \times n}$, при цьому $\lambda = 0$: $AX = \bar{0} = 0 \cdot X$ (обґрунтуйте правильність твердження).

(Подумайте, чи будуть існувати якісь матриці і числа λ за умови, що в (4.5.1) X – нульовий вектор.)

Теорема 4.5.1 (про єдиність в/ч, відповідного в/в). Якщо X – в/в матриці A , то існує єдиний скаляр λ , який задовольняє умову $AX = \lambda X$.

Д о в е д е н н я. Припустимо, що крім в/ч λ , існує скаляр λ_1 такий, що $AX = \lambda_1 X$. Тоді повинна виконуватись рівність: $\lambda_1 X = \lambda X$. Оскільки за означенням в/в $X \neq \bar{0}$, то отримуємо: $\lambda_1 = \lambda$.

Згідно з теоремою кажуть, що в/в X матриці A належить в/ч λ .

Теорема 4.5.2 (про множину в/в, належних в/ч). Якщо матриця має в/в, належні в/ч λ , то їх нескінченно багато.

Д о в е д е н н я базується на означенні в/в та властивостях асоціативності і комутативності операції множення матриці на скаляр.

Дійсно, нехай X – в/в матриці A , тобто $AX = \lambda X$. Залучимо до розгляду вектор Y , колінеарний векторові X , тобто $Y = \alpha X$, де $\alpha \in \mathbf{R} \setminus \{0\}$, і покажемо, що Y так само в/в (прослідкуйте!):

$$AY = A(\alpha X) = \alpha(AX) = | AX = \lambda X | = \alpha(\lambda X) = \lambda(\alpha X) = \lambda Y. \quad (4.5.2)$$

Оскільки (4.5.2) справедливе для будь-якого $\alpha \in (-\infty, +\infty) \setminus \{0\}$, то в/в, належних певному в/ч, безліч.

Наголошуємо, що стосовно в/ч λ і в/в X кажуть: λ – число, відповідне векторові X , а X – вектор, належний числу λ .

Відшукання власних чисел і власних векторів

Задача 4.5.1. Знайти в/ч і в/в заданої матриці $A = (a_{ij})_{n \times n}$.

Розв'язання. Відштовхуючись від співвідношення (4.5.1) і залучаючи властивості операцій над матрицями, отримуємо:

$$\begin{aligned} AX = \lambda X &\Rightarrow \text{ за властивістю одиничної матриці } \Rightarrow AX = \lambda(EX) \Rightarrow \\ &\Rightarrow \text{ за асоціативним законом } \Rightarrow AX = (\lambda E)X \Rightarrow \\ &\Rightarrow \text{ за властивістю дистрибутивності і означенням рівності матриць } \Rightarrow \\ &\Rightarrow (A - \lambda E)X = \bar{0}. \end{aligned} \quad (4.5.3)$$

Перейдемо до розгорнутого запису (4.5.3):

$$\begin{aligned} &\left(\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} - \lambda \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix} \right) \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \\ &\Rightarrow \begin{pmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} - \lambda \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \\ &\Rightarrow \begin{cases} (a_{11} - \lambda)x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + (a_{22} - \lambda)x_2 + \dots + a_{2n}x_n = 0 \\ \dots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + (a_{nn} - \lambda)x_n = 0. \end{cases} \end{aligned} \quad (4.5.4)$$

Таким чином, задача звелася до розгляду однорідної СЛАР $n \times n$. Нас цікавлять (за означенням в/в) ненульові вектори, тому визначник системи (4.5.4) повинен бути рівним нулеві (на якій підставі?):

$$\det(A - \lambda E) = \begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} - \lambda \end{vmatrix} = 0. \quad (4.5.5)$$

Розкриття визначника в (4.5.5) дає многочлен степеня n відносно λ : $P_n(\lambda) = \det(A - \lambda E)$, який називається **характеристичним многочленом** матриці A , а загалом (4.5.5) визначає рівняння $P_n(\lambda) = 0$, яке називають **характеристичним рівнянням** матриці A . (Укажіть, які корені має характеристичне рівняння нульової матриці.)

Із (4.5.5), (4.5.4) випливає **загальний порядок** відшукування в/ч і в/в:

1⁰. *Складаємо* за даною матрицею характеристичне рівняння (4.5.5) і розв'язуємо його, тобто *відшукуємо* в/ч.

За основною теоремою алгебри для будь-якої матриці рівняння $P_n(\lambda) = 0$ має n коренів, якщо кожний із них рахувати стільки разів, яка його кратність.

2⁰. *Підставляємо* по черзі в/ч у систему (4.5.4) і *знаходимо* відповідні нетривіальні розв'язки, що і дає множину в/в, належних кожному в/ч.

Залежно від рангу матриці ($r < n$) системи (4.5.4) певні координати в/в, у кількості $(n - r)$, оголошуються вільними. Ця обставина узгоджується з теоремою 4.5.2, забезпечуючи нескінченність множини в/в, належних певному в/ч.

Знайдемо, *наприклад*, в/ч і в/в матриці $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -3 & 5 \end{pmatrix}$. Характеристичним рівнянням матриці є квадратне рівняння:

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 \\ -3 & 5-\lambda \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow (1-\lambda)(5-\lambda) + 3 = 0 \Rightarrow \lambda^2 - 6\lambda + 8 = 0 \Rightarrow \\ \Rightarrow \lambda_1 = 2 \text{ і } \lambda_2 = 4 \text{ — відповідні в/ч.}$$

Описуємо множини $X^{(1)}$, $X^{(2)}$ усіх в/в, належних знайденим в/ч.

$$\lambda_1 = 2: \begin{cases} -x_1 + x_2 = 0 \\ -3x_1 + 3x_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = t \\ x_2 = t \end{cases} \Rightarrow X^{(1)} = \begin{pmatrix} t \\ t \end{pmatrix} \quad \forall t \in \mathbf{R} \setminus \{0\};$$

$$\lambda_2 = 4: \begin{cases} -3x_1 + x_2 = 0 \\ -3x_1 + x_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = s \\ x_2 = 3s \end{cases} \Rightarrow X^{(2)} = \begin{pmatrix} s \\ 3s \end{pmatrix} \quad \forall s \in \mathbf{R} \setminus \{0\}.$$

Надаючи параметрам t і s конкретні значення, отримаємо ті чи інші колінеарні між собою в/в, належні λ_1 і λ_2 .

Якщо координати векторів $X^{(1)}$, $X^{(2)}$ поділити на їхні модулі, то приходимо до одиничних в/в:

$$\begin{aligned} e^{(1)} &= \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \end{pmatrix} \Rightarrow e^{(1)} = \frac{1}{\sqrt{2}} \bar{i} + \frac{1}{\sqrt{2}} \bar{j}; \\ e^{(2)} &= \begin{pmatrix} 1/\sqrt{10} \\ 3/\sqrt{10} \end{pmatrix} \Rightarrow e^{(2)} = \frac{1}{\sqrt{10}} \bar{i} + \frac{3}{\sqrt{10}} \bar{j}, \end{aligned} \quad (4.5.6)$$

де \bar{i} , \bar{j} – одиничні вектори ортогонального базису (орти).

Відзначимо, що характеристичне рівняння матриці може мати не тільки дійсні корені, а й комплексні: $\lambda = a + bi$, де a , b – дійсні числа, $i = \sqrt{-1}$ – уявна одиниця. Установлено, що симетрична матриця – матриця, у якої $a_{ij} = a_{ji} \quad \forall i = \overline{1, n}, j = \overline{1, n}$ – має тільки дійсні в/ч (спробуйте переконатися у цьому).

Увесь набір власних чисел (як дійсних, так і комплексних), взятих з тією кратністю, яку вони мають у характеристичному многочлені, називається **спектром матриці (спектром ЛП)**. Якщо корені характеристичного рівняння дійсні і різні, то спектр називають **простим**.

Критерій існування та деякі властивості в/в і в/ч

Теорема 4.5.3 (критерій існування в/в X , належного в/ч λ). Вектор X тоді і тільки тоді є власним вектором матриці $A = (a_{ij})_{n \times n}$, належним власному числу λ , коли його координати x_1, x_2, \dots, x_n є ненульовим розв'язком однорідної квадратної системи лінійних алгебраїчних рівнянь $(A - \lambda E)X = \bar{0}$:

$$(AX = \lambda X) \Leftrightarrow ((A - \lambda E)X = \bar{0} \wedge \det(A - \lambda E) = 0). \quad (4.5.7)$$

Д о в е д е н н я зводиться до тотожних перетворень матричних рівнянь.

Н е о б х і д н і с т ь (\Rightarrow) фактично вже показано при розв'язанні задачі 4.5.1, а саме: здійснено перехід від співвідношення (4.5.1): $AX = \lambda X$, покладеного в основу означення в/в і в/ч, до однорідної

СЛАР $n \times n$ (4.5.3): $(A - \lambda E)X = \bar{0}$, яку в (4.5.4) подано у розгорнутому вигляді.

Д о с т а т н і с т ь (\Leftarrow). На підставі властивостей дій над матрицями з урахуванням умови $\det(A - \lambda E) = 0$, здійснимо перехід від завдання однорідної СЛАР $n \times n$ у матричній формі до співвідношення $AX = \lambda X$:

$$\begin{aligned} (A - \lambda E)X = \bar{0} &\Rightarrow AX - \lambda EX = \bar{0} \Rightarrow AX - \lambda(EX) = \bar{0} \Rightarrow \\ &\Rightarrow AX - \lambda X = \bar{0} \Rightarrow (AX - \lambda X) + \lambda X = \bar{0} + \lambda X \Rightarrow AX = \lambda X. \end{aligned} \quad (4.5.8)$$

Наведіть коментар-обґрунтування щодо ланцюжка логічних наслідків у доведенні достатності.

Теорема 4.5.4 (про лінійну незалежність в/в). Власні вектори, належні різним власним числам, лінійно незалежні.

Д о в е д е н н я проведемо методом від супротивного. Нехай $X^{(1)}$, $X^{(2)}$ – два довільні в/в, що належать відповідно в/ч λ_1 , λ_2 ($\lambda_1 \neq \lambda_2$). Треба показати, що лінійна комбінація в/в $\alpha_1 X^{(1)} + \alpha_2 X^{(2)}$ є нуль-вектором тільки якщо $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$, тобто

$$\alpha_1 X^{(1)} + \alpha_2 X^{(2)} = \bar{0}. \quad (4.5.9)$$

Припустимо протилежне: нехай (4.5.9) виконується за умови, що одне із чисел α_1 , α_2 не є нулем. Покладемо $\alpha_1 \neq 0$ і проробимо таке.

Помножимо ліву і праву частини (4.5.9) на відмінне від нуля в/ч (чому завжди можна здійснити такий вибір?); нехай ним буде λ_2 . Тоді

$$\alpha_1 \lambda_2 X^{(1)} + \alpha_2 \lambda_2 X^{(2)} = \bar{0}. \quad (4.5.10)$$

Далі ліву і праву частини (4.5.9) помножимо зліва на матрицю A , з урахуванням властивостей операцій над матрицями (*укажіть, яких саме*):

$$\begin{aligned} A \cdot (\alpha_1 X^{(1)} + \alpha_2 X^{(2)}) &= A \cdot \bar{0} \Rightarrow \alpha_1 (AX^{(1)}) + \alpha_2 (AX^{(2)}) = \bar{0} \Rightarrow \\ &\Rightarrow \left| AX^{(1)} = \lambda_1 X^{(1)}, AX^{(2)} = \lambda_2 X^{(2)} \right| \Rightarrow \\ &\Rightarrow \alpha_1 \lambda_1 X^{(1)} + \alpha_2 \lambda_2 X^{(2)} = \bar{0}. \end{aligned} \quad (4.5.11)$$

Зіставляючи (4.5.11) з (4.5.10), отримуємо:

$$\alpha_1 \lambda_1 X^{(1)} - \alpha_1 \lambda_2 X^{(1)} = \bar{0} \Rightarrow \alpha_1 (\lambda_1 - \lambda_2) X^{(1)} = \bar{0}. \quad (4.5.12)$$

За умовою теореми $\lambda_1 \neq \lambda_2$, вектор $X^{(1)}$ ненульовий (за означенням в/в), тому рівність (4.5.12) можлива тільки при $\alpha_1 = 0$, тобто припущення про лінійну залежність векторів $X^{(1)}, X^{(2)}$ хибне.

Теорема 4.5.5 (про суму і добуток в/ч). Якщо $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ – власні числа матриці $A = (a_{ij})_{n \times n}$, то:

1) їхня сума дорівнює сумі елементів головної діагоналі матриці:

$$\lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_n = a_{11} + a_{22} + \dots + a_{nn}; \quad (4.5.13)$$

2) добуток в/ч дорівнює визначнику матриці:

$$\lambda_1 \cdot \lambda_2 \cdot \dots \cdot \lambda_n = \det A. \quad (4.5.14)$$

Д о в е д е н н я ґрунтується на формулах Вієта, які описують співвідношення між коренями і коефіцієнтами многочлена n -го степеня зі старшим коефіцієнтом, рівним одиниці.

Щоб уникнути громіздкого викладу, розглянемо найпростіший випадок: $n = 2$. Запишемо характеристичне рівняння у розгорнутому вигляді:

$$\begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow (a_{11} - \lambda) \cdot (a_{22} - \lambda) - a_{12} \cdot a_{21} = 0 \Rightarrow \\ \Rightarrow \lambda^2 - (a_{11} + a_{22})\lambda + (a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}) = 0. \quad (4.5.15)$$

Із (4.5.15) за теоремою Вієта (для квадратного рівняння) маємо:

1) $\lambda_1 + \lambda_2 = a_{11} + a_{22}$; 2) $\lambda_1 \cdot \lambda_2 = \det A$.

Суму всіх в/ч матриці називають **слідом** матриці. (Подумайте, у яких матриць доданки сліду співпадають з елементами матриці.)

Висновки:

1. Якщо n в/в належать різним в/ч, то їх можна використати в якості базисних векторів.

2. Властивості суми і добутку в/ч можна застосувати для перевірки того, чи вірно знайдені в/ч матриці.

Лінійна модель обміну (модель міжнародної торгівлі)

Практично усі країни, крім внутрішнього товарообміну, здійснюють зовнішній товарообмін, тобто займаються зовнішньою торгівлею. Торгівля вважається **збалансованою**, або **бездефіцитною**, якщо дохід від торгівлі кожної країни не менше об'єму коштів, які вона вкладає у товарообмін (внутрішній і зовнішній).

Постановка задачі. Декілька країн здійснюють взаємний товарообмін. Відома частка бюджетних коштів, які витрачає кожна країна на закупівлю товарів у іншій країні, ураховуючи внутрішній товарообмін. Установити, як повинні співвідноситись між собою бюджети партнерів за умови бездефіцитної торгівлі.

Побудова математичної моделі. Введемо позначення кількісних характеристик – величин, – якими описується торгівля, і наведемо зв'язок між ними.

Нехай K_1, K_2, \dots, K_n – країни, що беруть участь у міжнародній торгівлі; частки коштів, які витрачає країна K_j на закупівлю товарів у країни K_i , ураховуючи внутрішній товарообмін ($j = i$), позначимо через a_{ij} , $i = \overline{1, n}$, $j = \overline{1, n}$. Зрозуміло, що

$$\sum_{i=1}^n a_{ij} = 1, \quad j = \overline{1, n}. \quad (4.5.16)$$

Матрицю A , елементами якої є числа a_{ij} , називають **структурною матрицею торгівлі**:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Ця матриця описує взаємодію країн у процесі міжнародної торгівлі. Співвідношення (4.5.16) означає, що сума елементів кожного стовпця матриці дорівнює 1.

Якщо об'єм коштів, які витрачає кожна країна на торгівлю, позначити відповідно через x_1, x_2, \dots, x_n , то дохід p_i кожної країни K_i від внутрішньої та зовнішньої торгівлі, очевидно, складе величину

Введемо у розгляд **вектор** (бюджетних) **коштів** $X = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T$ і подамо систему в матричній формі:

$$AX = X. \quad (4.5.22)$$

Із (4.5.22) робимо **висновок**: для збалансованої торгівлі між країнами вектор коштів X повинен бути власним вектором структурної матриці торгівлі A (див. (4.5.1)), що належить власному значенню $\lambda = 1$ (при виконанні умови (4.5.16) матриця A завжди має власне значення $\lambda = 1$).

Розв'язання задачі зводиться до відшукування в/в X , за компонентами якого установлюється шукане співвідношення між бюджетами країн, які здійснюють товарообмін.

Приклад. Нехай структурна матриця торгівлі країн K_1, K_2, K_3 має

вигляд: $A = \begin{pmatrix} 0 & 3/4 & 1/3 \\ 1/2 & 0 & 2/3 \\ 1/2 & 1/4 & 0 \end{pmatrix}$. Знайти вектор коштів, які повинні вкладати

країни для збалансованої торгівлі. (*Прокоментуйте* наявність нулів на головній діагоналі матриці.)

Шуканий вектор – власний вектор даної матриці, що належить власному значенню $\lambda = 1$ – повинен бути ненульовим (*чому?*) розв'язком однорідної СЛАР $n \times n$:

$$(A - E)X = \bar{0} \Rightarrow \begin{pmatrix} -1 & 3/4 & 1/3 \\ 1/2 & -1 & 2/3 \\ 1/2 & 1/4 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Здійснимо е/п основної матриці системи (а чому не розширеної?):

$$\begin{aligned} (A - E) &\sim \begin{pmatrix} -12 & 9 & 4 \\ 3 & -6 & 4 \\ 2 & \textcircled{1} & -4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -30 & 0 & 40 \\ 15 & 0 & -20 \\ 2 & 1 & -4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -3 & 0 & \textcircled{4} \\ 2 & 1 & -4 \end{pmatrix} \sim \\ &\sim \begin{pmatrix} -3 & 0 & 4 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \left| \begin{array}{l} x_2, x_3 - \text{базисні змінні} \\ x_1 - \text{вільна змінна} \end{array} \right| \Rightarrow \begin{cases} x_1 = t \\ x_2 = t \\ x_3 = 3/4t \end{cases} \Rightarrow X = \begin{pmatrix} t \\ t \\ 0,75t \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Відповідь: $x_1 : x_2 : x_3 = 4 : 4 : 3$. (Як вправу, *знайдіть* інші, окрім $\lambda = 1$, корені характеристичного рівняння структурної матриці торгівлі.)

Запитання для самодіагностики засвоєння матеріалу

Відповіді на всі запитання сформулюйте словесно, запишіть в символічній формі, обґрунтуйте (на підставі означень, теорем, правил, формул тощо), наведіть відповідні конкретні приклади.

1. Що називають одно-, дво-, тривимірним векторним простором?
2. Що таке m -вимірний вектор, координати m -вектора?
3. Які m -вектори називаються пропорційними, рівними?
4. Які операції над векторами називаються лінійними і якими властивостями вони володіють?
5. Що таке нуль-вектор, протилежний вектор, одиничний вектор?
6. Дайте означення лінійного m -вимірного простору.
7. Що називають довжиною вектора, скалярним добутком векторів?
8. Що розуміють під системою m -вимірних векторів?
9. Який вигляд має векторна форма запису СЛАР $m \times n$?
10. Який розділ вищої математики називається лінійною алгеброю?
11. Що розуміють під лінійною комбінацією векторів?
12. Яка система m -векторів називається лінійно залежною (лінійно незалежною)?
13. Сформулюйте та доведіть теорему про лінійну залежність векторів і наслідок з неї.
14. Що розуміють під задачею дослідження системи векторів на лінійну незалежність? Опишіть порядок дій (кроків) її розв'язування.
15. Яке найбільше (найменше) число лінійно незалежних векторів може містити система векторів?
16. Дайте означення базису \mathbf{R}^m „різними мовами”.
17. Який базис називають ортогональним?
18. Наведіть і доведіть теорему про розклад вектора за базисом.
19. Опишіть процес розкладу вектора за заданим базисом.
20. Як відшукати базис серед заданої системи векторів?
21. Як здійснити перехід від одного базису до іншого?
22. У якому випадку кажуть, що задано перетворення n -вимірного простору, і що називають образом (прообразом) вектора?
23. Яке перетворення простору називають лінійним? Опишіть смисл властивостей однорідності і лінійності.
24. Що таке: тотожне перетворення, нульовий оператор, оператор повороту?

25. Що розуміють під оберненим лінійним перетворенням?
26. Наведіть означення матриці лінійного оператора.
27. Який оператор називається невиродженим, виродженим (особливим)?
28. У чому полягає умова невиродженості лінійного перетворення?
29. Опишіть операції: множення лінійного перетворення на скаляр, додавання і множення лінійних операторів.
30. Яку матрицю називають матрицею переходу до нового базису?
31. Яким співвідношенням пов'язані між собою матриці лінійних перетворень в різних базисах?
32. У тривимірному просторі вектори, які розташовані на одній прямій або на паралельних прямих, називаються колінеарними. Чи існує поняття „колінеарність” стосовно векторів більшої вимірності?
33. На якому співвідношенні ґрунтуються означення власних векторів і власних чисел матриці?
34. Чому, на ваш погляд, до множини власних векторів заданої матриці не відносять нуль-вектор?
35. Чи може власному вектору матриці відповідати декілька власних чисел?
36. Чи може власному числу матриці відповідати декілька власних векторів?
37. До аналізу чого зводиться задача відшукування власних чисел і власних векторів матриці і у чому він полягає?
38. З якою числовою характеристикою матриці співпадає кількість її власних чисел?
39. Який вигляд має характеристичне рівняння нульової матриці?
40. У якій послідовності відшукуються власні вектори і власні числа матриці: спочатку в/в, а потім в/ч, чи навпаки?
41. Яку підмножину n -вимірного простору складають власні вектори матриці першого порядку і яке власне число їм відповідає?
42. У чому полягають необхідна і достатня умови існування в/в, належного деякому в/ч, і чим вони відрізняються одна від одної?
43. Чому n власних векторів, що належать різним власним числам, можна взяти в якості базису n -вимірного простору?
44. Як можна обчислити визначник матриці, якщо відомі всі її в/ч?
45. Чи є знання сліду матриці достатньою умовою для перевірки правильності знайдених в/ч?

Задачі та вправи

1. Довести, що сукупність векторів лінійно залежна, якщо серед них є нульовий вектор або деякі з них лінійно залежні.

2. З'ясувати, чи є задана система векторів лінійно залежною:

а) $A_1 = (6, -2, 15)^T$, $A_2 = (-3, 1, 5)^T$;

б) $A_1 = (1, 2, 3)^T$, $A_2 = (2, 5, 7)^T$, $A_3 = (3, 7, 10)^T$;

в) $A_1 = (1, 2, 3)^T$, $A_2 = (2, 5, 7)^T$, $A_3 = (3, 7, 10 + \varepsilon)^T$, де $\varepsilon - const$, $\varepsilon \neq 0$;

г) $A_1 = (1, 3, -1)^T$, $A_2 = (0, 1, 2)^T$, $A_3 = (1, 2, 3)^T$.

3. Довести, що вектори $A_1 = (1, -1, 2)^T$, $A_2 = (10, 1, 1)^T$, $A_3 = (2, -1, 6)^T$ лінійно незалежні.

4. Дано три вектори $A_1 = (3, -1)$, $A_2 = (1, -2)$, $A_3 = (-1, 7)$. Знайти розклад вектора $A = A_1 + A_2 + A_3$ за базисом A_1, A_2 .

5. З'ясувати, чи утворюють вектори A_1, A_2, A_3 базис в \mathbf{R}^3 . Якщо „так”, то знайти координати вектора B у цьому базисі:

а) $A_1 = (2, 2, -1)^T$, $A_2 = (2, -1, 2)^T$, $A_3 = (-1, 2, 2)^T$, $B = (3, 3, 3)^T$;

б) $A_1 = (1, 5, 3)^T$, $A_2 = (2, 7, 3)^T$, $A_3 = (3, 9, 4)^T$, $B = (2, 1, 1)^T$;

в) $A_1 = (3, -2, 1)^T$, $A_2 = (-1, 1, -2)^T$, $A_3 = (2, 1, -3)^T$, $B = (11, -6, 5)^T$.

6. Дано чотири вектори $A_1 = (2, 1, 0)^T$, $A_2 = (1, -1, 2)^T$, $A_3 = (2, 2, -1)^T$, $A_4 = (3, 7, -7)^T$. Знайти розклад кожного з цих чотирьох векторів, приймаючи за базис три інших.

7. Систему векторів $\{A_1, A_2, A_3, A_4, A_5\}$ задано матрицею A . Знайти серед них усі трійки, що утворюють базис, і записати розклад усіх векторів за кожним із базисів:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & -2 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 3 & -3 & 1 \end{pmatrix}.$$

8. З'ясувати, чи є заданий оператор \mathcal{A} лінійним. Якщо „так”, то знайти його матрицю:

а) $\mathcal{A}X = (x_1 - x_3, x_1 + 2x_2, 3x_1 - x_2 + 2x_3)^T$;

б) $\mathcal{A}X = (x_1 - 1, x_2, x_1 + 1)^T$;

в) $\mathcal{A}X = (X \cdot B) \cdot B$, де $B = (1, 2, 3)^T$;

г) $\mathcal{A}X = (X + B) \cdot C$, де $B = (1, 2, 3)^T$, $C = (4, 5, 6)^T$.

9. Знайти образ вектора X , якщо ЛП \mathcal{A} в деякому базисі задане матрицею A , і з'ясувати, чи існує обернене ЛП \mathcal{A}^{-1} :

а) $X = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$, $A = \begin{pmatrix} -1 & -3 & 2 \\ 1 & -6 & 0 \\ 0 & 5 & 1 \end{pmatrix}$; б) $X = \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$, $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$;

в) $X = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $A = \begin{pmatrix} -2 & -5 & 3 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & -3 \end{pmatrix}$; г) $X = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix}$, $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 3 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 6 \end{pmatrix}$.

10. Знайти прообраз вектора Y при ЛП з матрицею A :

а) $Y = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$, $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$; б) $Y = \begin{pmatrix} 7 \\ -2 \end{pmatrix}$, $A = \begin{pmatrix} -3 & -1 \\ 1,5 & 1 \end{pmatrix}$;

в) $Y = \begin{pmatrix} -5 \\ 3 \end{pmatrix}$, $A = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$; г) $Y = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$, $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$.

11. Нехай у деякому базисі задані лінійно незалежні вектори X_1, X_2 . Знайти лінійне перетворення, образами заданих векторів у якому є відповідно вектори Y_1, Y_2 :

а) $X_1 = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \end{pmatrix}$, $X_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$, $Y_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$, $Y_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix}$;

б) $X_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$, $X_2 = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \end{pmatrix}$, $Y_1 = \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \end{pmatrix}$, $Y_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}$;

$$\text{в) } X_1 = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \end{pmatrix}, X_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \end{pmatrix}, Y_1 = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \end{pmatrix}, Y_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix};$$

$$\text{г) } X_1 = \begin{pmatrix} 6 \\ -2 \end{pmatrix}, X_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, Y_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \end{pmatrix}, Y_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

12. Нехай у деякому базисі задані лінійно незалежні вектори X_1, X_2, X_3 . Знайти лінійне перетворення, образами заданих векторів у якому є відповідно вектори Y_1, Y_2, Y_3 :

$$\text{а) } X_1 = \begin{pmatrix} -5 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix}, X_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}, X_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}; Y_1 = \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}, Y_2 = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 6 \end{pmatrix}, Y_3 = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix};$$

$$\text{б) } X_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}, X_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, X_3 = \begin{pmatrix} 4 \\ -6 \\ 3 \end{pmatrix}; Y_1 = \begin{pmatrix} -5 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}, Y_2 = \begin{pmatrix} 6 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix}, Y_3 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

13. Лінійний оператор \mathcal{A} має в базисі τ_1, τ_2 матрицю A . Знайти матрицю цього оператора в базисі τ'_1, τ'_2 :

$$\text{а) } \tau_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \tau_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix}, A = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -5 & 4 \end{pmatrix}, \tau'_1 = \begin{pmatrix} 6 \\ -2 \end{pmatrix}, \tau'_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix};$$

$$\text{б) } \tau_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \tau_2 = \begin{pmatrix} 5 \\ -2 \end{pmatrix}, A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}, \tau'_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix}, \tau'_2 = \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \end{pmatrix};$$

$$\text{в) } \tau_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}, \tau_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \end{pmatrix}, A = \begin{pmatrix} 6 & -1 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}, \tau'_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}, \tau'_2 = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \end{pmatrix};$$

$$\text{г) } \tau_1 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}, \tau_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix}, A = \begin{pmatrix} -4 & -1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}, \tau'_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}, \tau'_2 = \begin{pmatrix} -5 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

14. Знайти матрицю переходу від базису τ_1, τ_2 до базису τ'_1, τ'_2 :

$$\text{а) } \tau_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}, \tau_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \tau'_1 = \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \end{pmatrix}, \tau'_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix};$$

$$\text{б) } \tau_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}, \tau_2 = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \end{pmatrix}, \tau'_1 = \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \end{pmatrix}, \tau'_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix};$$

$$\text{в) } \tau_1 = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \end{pmatrix}, \tau_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}, \tau'_1 = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \end{pmatrix}, \tau'_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix};$$

$$\text{г) } \tau_1 = \begin{pmatrix} 6 \\ -2 \end{pmatrix}, \tau_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix}, \tau'_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \end{pmatrix}, \tau'_2 = \begin{pmatrix} -5 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

15. Знайти матрицю переходу ЛП \mathcal{A} від базису τ_1, τ_2, τ_3 до базису $\tau'_1, \tau'_2, \tau'_3$, якщо:

$$\text{а) } \tau_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}, \tau_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \tau_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \tau'_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}, \tau'_2 = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \tau'_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix};$$

$$\text{б) } \tau_1 = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \tau_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}, \tau_3 = \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \tau'_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \tau'_2 = \begin{pmatrix} -6 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \tau'_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

16. Відомо, що $\mathcal{A}X = Y$, а $\mathcal{B}Y = Z$. Знайти ЛП \mathcal{C} : $CX = Z$, за умови, що:

$$\text{а) } \begin{cases} y_1 = 2x_1 - x_2 + 5x_3 \\ y_2 = x_1 + x_2 - x_3 \\ y_3 = 3x_1 - 5x_2 + x_3 \end{cases}, \quad \begin{cases} z_1 = y_1 + 2y_2 + 3y_3 \\ z_2 = 5y_1 - y_2 - y_3 \\ z_3 = 3y_1 + 3y_2 + 5y_3 \end{cases};$$

$$\text{б) } A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 4 \\ 1 & 0 & -1 \\ 3 & -6 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -2 & -1 & 3 \\ 4 & 0 & 2 \\ 3 & -5 & 2 \end{pmatrix};$$

$$\text{в) } \begin{cases} y_1 = 4x_1 - x_2 + 5x_3 \\ y_2 = x_1 + 6x_2 - x_3 \\ y_3 = x_1 - 2x_2 + 3x_3 \end{cases}, \quad \begin{cases} z_1 = y_1 + 5y_2 + y_3 \\ z_2 = 4y_1 - y_2 - y_3 \\ z_3 = 6y_1 - 4y_2 + y_3 \end{cases};$$

$$\text{г) } A = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 3 \\ -1 & 0 & 1 \\ 2 & -6 & 3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -3 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \\ 2 & -5 & 3 \end{pmatrix}.$$

17. Встановити, які із заданих векторів \bar{a} , \bar{b} , \bar{c} є власними векторами матриці A , знайти відповідні їм власні значення, якщо:

а) $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$, $\bar{a} = (1, 3)$, $\bar{b} = (3, 1)$, $\bar{c} = (5, 0)$;

б) $A = \begin{pmatrix} -3 & 11 & 7 \\ 0 & 5 & -4 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, $\bar{a} = (3, 0, 0)$, $\bar{b} = (0, -2, 0)$, $\bar{c} = (1, 0, -1)$;

в) $A = \begin{pmatrix} 5 & 9 & 7 \\ 0 & 3 & -2 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix}$, $\bar{a} = (-4, 1, 1)$, $\bar{b} = (2, 0, 0)$, $\bar{c} = (0, 0, 2)$.

18. Знайти характеристичне рівняння і спектр матриці A , якщо:

а) $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$; б) $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$; в) $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 2 & -7 & 3 \end{pmatrix}$;

г) $A = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 0 \\ 1 & -2 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$; д) $A = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 5 \\ 0 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$.

19. Знайти власні числа лінійного оператора, заданого в \mathbf{R}^2 (\mathbf{R}^3) матрицею A , якщо:

а) $A = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ -3 & 0 \end{pmatrix}$; б) $A = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$;

в) $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$; г) $A = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix}$.

20. Довести: якщо $\lambda \neq 0$ є власним числом матриці A , то $1/\lambda$ – власне число оберненої матриці A^{-1} .

21. Знайти власні вектори лінійного оператора, заданого матрицею A , якщо:

$$\text{а) } A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}; \quad \text{б) } A = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}; \quad \text{в) } A = \begin{pmatrix} 2 & 19 & 30 \\ 0 & -5 & -12 \\ 0 & 2 & 5 \end{pmatrix};$$

$$\text{г) } A = \begin{pmatrix} -3 & 2 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 15 & -7 & 4 \end{pmatrix}; \quad \text{д) } A = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 5 \\ 7 & -2 & 9 \\ 3 & 0 & 6 \end{pmatrix}.$$

22. Знайти власні числа та власні вектори лінійних операторів в \mathbf{R}^3 , заданих своїми матрицями:

$$\text{а) } A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 5 & -3 & 3 \\ -1 & 0 & -2 \end{pmatrix}; \quad \text{б) } A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -4 & 4 & 0 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix};$$

$$\text{в) } A = \begin{pmatrix} 4 & -5 & 2 \\ 5 & -7 & 3 \\ 6 & -9 & 4 \end{pmatrix}; \quad \text{г) } A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 3 \\ -2 & -6 & 13 \\ -1 & -4 & 8 \end{pmatrix};$$

$$\text{д) } A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 4 \\ 4 & -7 & 8 \\ 6 & -7 & 7 \end{pmatrix}; \quad \text{е) } A = \begin{pmatrix} 7 & -12 & 6 \\ 10 & -19 & 10 \\ 12 & -24 & 13 \end{pmatrix};$$

$$\text{є) } A = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 2 \\ 3 & 0 & 2 \\ -2 & 2 & 1 \end{pmatrix}; \quad \text{ж) } A = \begin{pmatrix} 7 & -2 & 0 \\ -2 & 6 & -2 \\ 0 & -2 & 5 \end{pmatrix}.$$

23. Чи є слушним твердження: якщо матриця лінійного перетворення у деякому базисі є діагональною, то власні вектори ЛП утворюють базис?

24. Чи є слушним твердження: якщо власні вектори ЛП утворюють базис, то матриця лінійного перетворення у цьому базисі є діагональною?

Відповіді

2. а) ні; б) так; в) ні; г) ні.

4. $A = 2A_1 - 3A_2$.

5. а) $B = (1, 1, 1)^T$; б) $B = (0, -5, 4)^T$; в) $B = (2, -3, 1)^T$.

6. $A_1 = \frac{3}{2}A_2 - \frac{1}{2}A_3 + \frac{1}{2}A_4$, $A_2 = \frac{2}{3}A_1 + \frac{1}{3}A_3 - \frac{1}{3}A_4$, $A_3 = -2A_1 + 3A_2 + A_4$, $A_4 = 2A_1 - 3A_2 + A_3$.

7. $\{A_1, A_2, A_3\}$; $\{A_1, A_2, A_4\}$; $\{A_1, A_3, A_5\}$; $\{A_1, A_4, A_5\}$; $\{A_2, A_3, A_4\}$; $\{A_2, A_3, A_5\}$; $\{A_2, A_4, A_5\}$; $\{A_3, A_4, A_5\}$.

8. а) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 3 & -1 & 2 \end{pmatrix}$; б) ні; в) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ 3 & 6 & 9 \end{pmatrix}$; г) ні.

9. а) $(7, 8, -2)^T$, так; б) $(7, -7, 14)^T$, ні; в) $(-7, 10, -3)^T$, ні; г) $(-6, 17, 23)^T$, так.

10. а) $(-1, 4)^T$; б) прообраз не існує; в) $(-22/10, -7/10)^T$; г) прообраз не існує.

11. а) $\begin{pmatrix} -1/2 & -3 \\ 3/2 & 8 \end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -3/11 & -1/11 \end{pmatrix}$; в) $\begin{pmatrix} 7/4 & 1 \\ -3/8 & -3/2 \end{pmatrix}$; г) $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

12. а) $\frac{1}{17} \begin{pmatrix} 26 & 13 & 14 \\ -32 & -33 & 5 \\ 144 & 157 & -14 \end{pmatrix}$; б) $\frac{1}{29} \begin{pmatrix} 116 & 29 & -116 \\ -13 & -8 & 11 \\ 50 & 37 & 38 \end{pmatrix}$.

13. а) $\frac{1}{121} \begin{pmatrix} -62 & 47 \\ -390 & 241 \end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix} 114 & 86 \\ -51 & -35 \end{pmatrix}$; в) $\frac{1}{144} \begin{pmatrix} 152 & -576 \\ -145 & 360 \end{pmatrix}$;

г) $\frac{1}{18} \begin{pmatrix} -318 & 492 \\ 89 & -199 \end{pmatrix}$.

14. а) $\begin{pmatrix} 1 & -1/2 \\ 3 & -1/2 \end{pmatrix}$; б) $\frac{1}{11} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 13 & 19 \end{pmatrix}$; в) $\frac{1}{7} \begin{pmatrix} 12 & -1 \\ -6 & -10 \end{pmatrix}$; г) $\begin{pmatrix} 1/3 & -5/6 \\ -4/9 & -2/9 \end{pmatrix}$.

15. а) $\begin{pmatrix} -1 & -2 & 0 \\ -2 & -5 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix} 2 & -1/6 & 4/3 \\ -1 & -5/6 & -4/3 \\ 2 & 3/2 & 1 \end{pmatrix}$.

$$16. \text{ а) } \begin{pmatrix} 13 & -14 & 6 \\ 6 & -1 & 25 \\ 24 & -25 & 17 \end{pmatrix}; \quad \text{б) } \begin{pmatrix} 2 & -16 & -1 \\ 18 & -16 & 20 \\ 10 & -15 & 21 \end{pmatrix}; \quad \text{в) } \begin{pmatrix} 10 & 27 & 3 \\ 14 & -8 & 18 \\ 21 & -32 & 37 \end{pmatrix};$$

$$\text{г) } \begin{pmatrix} -7 & -9 & -4 \\ 2 & -1 & 5 \\ 19 & -20 & 10 \end{pmatrix}.$$

17. а) \bar{b} з власним числом 3, \bar{c} з власним числом 2; б) \bar{a} з власним числом -3 ; в) \bar{a} з власним числом 1, \bar{b} з власним числом 5.

18. а) $\lambda^2 - 5\lambda + 6 = 0$, $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = 3$; б) $\lambda^2 - 6\lambda + 8 = 0$, $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = 4$; в) $\lambda(\lambda - 2)(\lambda - 3) = 0$; $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 2$, $\lambda_3 = 3$; г) $(\lambda - 1)^2(\lambda + 3) = 0$, $\lambda_1 = -3$, $\lambda_2 = \lambda_3 = 1$; д) $(\lambda - 4)^2(\lambda - 5) = 0$, $\lambda_1 = \lambda_2 = 4$, $\lambda_3 = 5$.

19. а) дійсних власних чисел немає; б) $\lambda_1 = -2$, $\lambda_2 = 3$; в) $\lambda_1 = 1$; г) $\lambda_1 = -2$, $\lambda_2 = 3$, $\lambda_3 = 4$.

21. а) $(t, 0)^T$, $t \in \mathbf{R}$, $t \neq 0$; б) $(t, 2t)^T$, $(s, s)^T$, $t, s \in \mathbf{R}$, $t \neq 0$, $s \neq 0$; в) $(t, 0, 0)^T$, $(8s, -2s, s)^T$, $(9k, -3k, k)^T$, $t, s, k \in \mathbf{R}$, $t \neq 0$, $s \neq 0$, $k \neq 0$; г) $(0, 0, t)^T$, $(5s, 5s, -8s)^T$, $t, s \in \mathbf{R}$, $t \neq 0$, $s \neq 0$; д) $(0, t, 0)^T$, $(15s, 8s, -9s)^T$, $(11k, 16k, 11k)^T$, $t, s, k \in \mathbf{R}$, $t \neq 0$, $s \neq 0$, $k \neq 0$.

22. а) $\lambda = -1$, $(t, t, -t)^T$, $t \in \mathbf{R}$, $t \neq 0$; б) $\lambda = 2$, $(t, 2t, 0)^T + (0, 0, s)^T$, $t, s \in \mathbf{R}$, $|t| + |s| \neq 0$; в) $\lambda_1 = 1$, $(t, t, t)^T$, $t \in \mathbf{R}$, $t \neq 0$, $\lambda_2 = 0$ $(s, 2s, 3s)^T$, $s \in \mathbf{R}$, $s \neq 0$; г) $\lambda = 1$, $(3t, t, t)^T$, $t \in \mathbf{R}$, $t \neq 0$; д) $\lambda_1 = 3$, $(t, 2t, 2t)^T$, $t \in \mathbf{R}$, $t \neq 0$, $\lambda_2 = -1$, $(s, 2s, s)^T$, $s \in \mathbf{R}$, $s \neq 0$; е) $\lambda = -1$, $(2t, t, 0)^T + (s, 0, -s)^T$, $t, s \in \mathbf{R}$, $|t| + |s| \neq 0$; є) $\lambda_1 = 1$, $(t, t, -2t)^T$, $t \in \mathbf{R}$, $t \neq 0$, $\lambda_2 = 3$, $(s, s, 0)^T$, $s \in \mathbf{R}$, $s \neq 0$, $\lambda_3 = -3$, $(5k, -7k, 6k)^T$, $k \in \mathbf{R}$, $k \neq 0$; ж) $\lambda_1 = 3$, $(t, 2t, 2t)^T$, $t \in \mathbf{R}$, $t \neq 0$, $\lambda_2 = 6$, $(s, s/2, -s)^T$, $s \in \mathbf{R}$, $s \neq 0$, $\lambda_3 = 9$, $(-k, k, -k/2)^T$, $k \in \mathbf{R}$, $k \neq 0$.

23. Так.

24. Так.

Ключові терміни

m -Вимірний вектор, m -вимірний векторний (лінійний) простір, координати вектора, вектори пропорційні (рівні), лінійні операції, вектор нульовий (протилежний, одиничний), довжина (модуль) вектора, система векторів, лінійна алгебра, лінійна комбінація векторів, лінійно залежна (незалежна) система векторів, дослідження системи векторів на лінійну незалежність, базис m -вимірного простору, одиничний базис, ортогональний базис, розклад вектора за заданим базисом.

Перетворення n -вимірного простору, образ (прообраз) вектора, лінійне перетворення (тотожне, обернене), адитивність, однорідність, оператор (нульовий, повороту, невироджений, вироджений), матриця оператора, умова невиродженості, операції над лінійними операторами (множення на скаляр, додавання, множення), перехід до нового базису.

Колінеарні n -вимірні вектори, власний вектор і власне число матриці (властивості, відшукування), характеристичний многочлен матриці, характеристичне рівняння матриці, критерій існування властивих векторів, лінійна незалежність властивих векторів.

Резюме

Висвітлюються основні поняття теорії багатовимірних векторних (лінійних) просторів і розв'язуються задачі: дослідження системи векторів на лінійну незалежність, розкладу вектора за базисом, переходу від одного базису до іншого.

Вивчається лінійне перетворення (лінійний оператор) n -вимірного простору – перетворення, яке описується квадратною матрицею (кортежем n векторів), зокрема подаються: умова його невиродженості, зв'язок між матрицями лінійного оператора в різних базисах, і розглядається окремий випадок лінійного перетворення: образ вектора є колінеарним вектором відносно прообразу, який приводить до задач, пов'язаних з відшукуванням власних чисел і власних векторів матриці.

Література: [3; 4; 16; 22; 25].

Розділ 2. Диференціальне числення функції однієї змінної

5. Комплексні числа (к/ч)

Уявні числа – це прекрасна і чудова схованка божественного духу, майже поєднання буття з небуттям.

Готфрід Вільгельм Лейбніц

Мета: оволодіння студентами основ знань з алгебри комплексних чисел для опанування інших розділів вищої математики і спеціальних дисциплін.

Питання теми:

- 5.1. Означення, геометричне зображення та форми завдання к/ч.
- 5.2. Операції над к/ч для різних форм завдання.
- 5.3. Сфера Рімана. Поняття розширеної комплексної площини.

Компетентності, що формуються після вивчення теми:

Загальнонаукова: набуття базових знань з основ теорії комплексних чисел.

Загальнопрофесійна: підготовленість до засвоєння методів дослідження функціональних зв'язків у інформаційних системах за допомогою комплексних чисел.

Спеціалізовано-професійна: здатність до застосування опанованих відомостей у методах математичної обробки цифрових сигналів.

5.1. Означення, геометричне зображення та форми завдання к/ч

Із курсу алгебри середньої школи відомо, що корені квадратні (і парного степеня взагалі) із від'ємних чисел не існують, тобто немає такого дійсного числа, квадрат (парний степінь) якого є від'ємним числом.

На противагу дійсним числам результати добування квадратних коренів із від'ємних чисел домовились називати **уявними числами**. Для однотипності символічного подання уявних чисел кожне від'ємне число $-d$, де $d > 0$, подають у вигляді добутку $d \cdot (-1)$, і тоді за властивістю

операції добування кореня $\sqrt{-d} = \pm\sqrt{d} \cdot \sqrt{-1}$, де \sqrt{d} – арифметичне значення кореня – дійсне число.

Уявне число $\sqrt{-1}$ називають **уявною одиницею** і позначають символом i :

$$i = \sqrt{-1}. \quad (5.1.1)$$

Наголошуємо, що кожне уявне число можна записати як добуток дійсного числа з уявною одиницею – числом i .

Легко одержати натуральні степені уявної одиниці за умови, що арифметичні операції над уявними числами підкоряються законам операцій над дійсними числами:

$i^2 = -1$ (це співвідношення часто кладуть в основу означення уявної одиниці),

$$i^3 = i^2 \cdot i = -i, \quad i^4 = i^2 \cdot i^2 = (-1) \cdot (-1) = 1, \dots,$$

$$i^{4n} = (i^4)^n = 1, \quad i^{4n+1} = i, \quad i^{4n+2} = -1, \quad i^{4n+3} = -i, \quad n \in \mathbf{N}. \quad (5.1.2)$$

Із (5.1.2) випливає, що результат піднесення числа i до натурального степеня визначається остачею від ділення показника степеня на 4, тобто достатньо знати 2-й, 3-й і 4-й степені уявної одиниці. *Наприклад,*

$$i^{25} = i^{24} \cdot i = i; \quad i^{42} = i^{40} \cdot i^2 = -1; \quad i^{163} = i^{160} \cdot i^3 = -i.$$

Поняття „комплексне число” охоплює поняття: „дійсне число”, „уявне число”. Нехай a, b – довільні дійсні числа ($a, b \in \mathbf{R}$), тоді $b \cdot i$ – число уявне. Поєднання дійсного числа a і уявного числа $b \cdot i$ за допомогою знака „плюс” називають **комплексним числом** (від лат. complexus – зв’язок, поєднання) і позначають буквою z :

$$z = a + b \cdot i. \quad (5.1.3)$$

Дійсні числа a, b називають відповідно **дійсною, уявною частиною** комплексного числа (к/ч) і позначаються символами $\operatorname{Re} z, \operatorname{Im} z$ ($\operatorname{Re}, \operatorname{Im}$ – початкові літери латинських слів *realis* – дійсний і *imaginarius* – уявний):

$$a = \operatorname{Re} z, \quad b = \operatorname{Im} z. \quad (5.1.4)$$

Дійсна та уявна частини к/ч об'єднуються загальною назвою – **компоненти**, або **складові**, к/ч.

Якщо $b = 0$, то вважають $b \cdot i = 0 \cdot i = 0$, і тоді $z = a$ – дійсне число; у разі ж, коли $a = 0$, а $b \neq 0$, маємо $z = 0 + b \cdot i = b \cdot i$ – (чисто) **уявне число**. Вважають також, що $0 + 0 \cdot i = 0$. Таким чином, дійсні та уявні числа є окремими випадками к/ч. Або кажуть, що **множина к/ч**, яку позначають через \mathbb{C} , є **розширенням** множини дійсних чисел \mathbb{R} , тобто $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$, або $\mathbb{C} \supset \mathbb{R}$.

Два комплексних числа z_1, z_2 називаються **рівними** тоді і тільки тоді, коли у них рівні дійсні та уявні частини:

$$z_1 = z_2 \Leftrightarrow (\operatorname{Re} z_1 = \operatorname{Re} z_2, \operatorname{Im} z_1 = \operatorname{Im} z_2). \quad (5.1.5)$$

Наголошуємо: поняття „більше” і „менше” для к/ч не вводяться.

Число $\bar{z} = a - b \cdot i$ називається **спряженим** відносно числа $z = a + b \cdot i$ і навпаки. Інакше, два к/ч, які відрізняються одне від одного тільки знаком уявної частини, називаються (**взаємно**) **спряженими**. Зокрема, для дійсних чисел і тільки для них справедливе співвідношення $\bar{z} = z$, оскільки в цьому випадку уявна частина дорівнює нулю. Для чисто уявних чисел (тобто чисел з рівною нулю дійсною частиною) і тільки для них має місце співвідношення $\bar{z} = -z$. Легко переконатися, що корені квадратного рівняння з від'ємним дискримінантом є спряженими к/ч.

Геометричне зображення к/ч $z = a + b \cdot i$ здійснюється на координатній декартовій площині xOy точкою M з координатами a, b або вектором, початок якого – точка $O(0,0)$, а кінець – точка $M(a,b)$ (рис. 5.1.1).

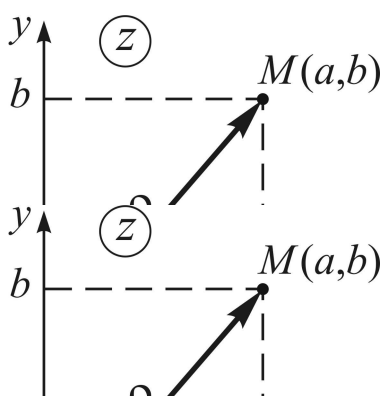


Рис. 5.1.1. Геометричне зображення к/ч

Довжина ρ вектора \overline{OM} називається **модулем** к/ч і позначається через $|z|$, отже,

$$\rho = |z| = \sqrt{a^2 + b^2}. \quad (5.1.6)$$

Кут φ , утворений вектором \overline{OM} з віссю Ox , називається **аргументом** к/ч і позначається символом $\operatorname{Arg} z$, тобто

$$\varphi = \operatorname{Arg} z. \quad (5.1.7)$$

Для числа $z = 0$ поняття аргументу сенсу не має, а при $z \neq 0$ аргумент z визначається з точністю до доданка, кратного 2π .

Серед усіх значень $\text{Arg } z$ ($z \neq 0$) існує одне і тільки одне таке, що належить проміжку $(-\pi; \pi]$. Значення $\text{Arg } z$, яке визначається нерівністю $-\pi < \text{Arg } z \leq \pi$, називається **головним значенням** аргументу к/ч (див. рис. 5.1.1) і позначається через $\arg z$.

Аргумент к/ч і його головне значення пов'язані формулою:

$$\text{Arg } z = \arg z + 2\pi k, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (5.1.8)$$

Неважко збагнути, що мають місце співвідношення:

$$\sin(\text{Arg } z) = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}, \quad \cos(\text{Arg } z) = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}, \quad \text{tg}(\text{Arg } z) = \frac{b}{a}. \quad (5.1.9)$$

Для відшукування головного значення аргументу к/ч $\arg z$ використовують обернену тригонометричну функцію дійсної змінної $y = \arctg x$, для якої $D(y) = (-\infty, +\infty)$ – область існування, $E(y) = [-\pi/2, +\pi/2]$ – область значень.

Отже, головне значення аргументу обчислюється за формулою:

$$\arg z = \begin{cases} \arctg(b/a) & \text{при } a > 0, \\ \arctg(b/a) + \pi & \text{при } a < 0, b \geq 0, \\ \arctg(b/a) - \pi & \text{при } a < 0, b < 0, \\ \pi/2 & \text{при } a = 0, b > 0, \\ -\pi/2 & \text{при } a = 0, b < 0. \end{cases} \quad (5.1.10)$$

Із означень $\text{Arg } z$ і $\arg z$ випливає справедливості тотожностей:

$$\begin{aligned} \sin(\text{Arg } z) &= \sin(\arg z), \quad \cos(\text{Arg } z) = \cos(\arg z), \\ \text{tg}(\text{Arg } z) &= \text{tg}(\arg z). \end{aligned} \quad (5.1.11)$$

(За аналогією з (5.1.10) *запишіть* формулу для $\arg \bar{z}$.)

Площину xOy , на якій зображаються к/ч, називають **комплексною площиною**, або **z -площиною**, і позначають символом \textcircled{z} (див. рис. 5.1.1), а осі Ox , Oy – відповідно **дійсною віссю**, **уявною віссю**.

Із аналізу співвідношень (5.1.6), (5.1.8) випливає: якщо зі z -площиною сумістити полярну систему $\rho O\varphi$ так, що початок координат O декартової і полюс полярної систем та додатна піввісь осі Ox і полярна вісь співпадають, то модуль к/ч $\rho = |z|$ і його аргумент $\varphi = \operatorname{Arg} z$ у межах повного кута від $-\pi$ до π є полярними координатами точки $M(a, b)$ – зображення к/ч. Зв'язок між характеристиками геометричного зображення (ρ, φ) і дійсною та уявною частинами к/ч (a, b) встановлюється формулами:

$$a = \rho \cos \varphi, \quad b = \rho \sin \varphi, \quad (5.1.12)$$

де під φ , як правило, розуміють головне значення аргументу.

Форми завдання к/ч. Представлення к/ч згідно з означенням у вигляді $z = a + b \cdot i$ називається **алгебраїчною формою** к/ч (див. (5.1.3)).

Якщо врахувати (5.1.12), то одержимо:

$$z = a + b \cdot i = \rho \cos \varphi + i \cdot \rho \sin \varphi = \rho (\cos \varphi + i \sin \varphi). \quad (5.1.13)$$

Представлення к/ч у вигляді

$$z = \rho (\cos \varphi + i \sin \varphi) = |z| (\cos (\operatorname{Arg} z) + i \sin (\operatorname{Arg} z)) \quad (5.1.14)$$

називають **тригонометричною формою** к/ч.

Із (5.1.14) випливає: два к/ч рівні тоді і тільки тоді, коли рівні їхні модулі, а аргументи відрізняються на число, кратне 2π . З урахуванням (5.1.11) у (5.1.14) замість $\operatorname{Arg} z$ часто пишуть $\arg z$.

Залучимо далі до розгляду (без доведення) **формулу Ейлера**, яка пов'язує число e з уявним показником степеня $i\varphi$ і тригонометричні функції $\sin \varphi$, $\cos \varphi$:

$$e^{i\varphi} = \cos \varphi + i \cdot \sin \varphi. \quad (5.1.15)$$

Використання формули Ейлера в (5.1.14) дає так звану **показникову форму** к/ч:

$$z = \rho \cdot e^{i\varphi} = |z| \cdot e^{i \operatorname{Arg} z}. \quad (5.1.16)$$

К/ч, задане в одній із форм, неважко подати в двох інших формах завдання.

Приклад. Число $z = -1 - 2i$ подати: а) у тригонометричній формі; б) у показниковій формі.

Знайдемо модуль ρ і аргумент φ (через його головне значення) за формулами (5.1.6), (5.1.10), (5.1.8):

$$\rho = |z| = \sqrt{a^2 + b^2} \Rightarrow \left| \begin{matrix} a = -1 \\ b = -2 \end{matrix} \right| \Rightarrow \rho = \sqrt{(-1)^2 + (-2)^2} = \sqrt{5};$$

$$(a < 0, b < 0) \Rightarrow \arg z = \arctg \frac{b}{a} - \pi \Rightarrow \varphi = \arctg 2 - \pi + 2\pi k = \arctg 2 + \pi(2k - 1).$$

Згідно з (5.1.14), (5.1.16) маємо:

$$\begin{aligned} \text{а) } z &= \rho(\cos \varphi + i \sin \varphi) = \\ &= \sqrt{5} \cdot (\cos(\arctg 2 + \pi(2k - 1)) + i \sin(\arctg 2 + \pi(2k - 1))); \end{aligned}$$

$$\text{б) } z = \rho e^{i \operatorname{Arg} z} = \sqrt{5} e^{i(\arctg 2 + \pi(2k - 1))}, \quad k \in \mathbf{Z} = \{0, \pm 1, \pm 2, \dots\}.$$

(*Дайте* самостійно геометричне зображення $z = -1 - 2i$ і *вказіть* на ньому ρ та $\varphi = \arg z$.)

Особливо легко робити перехід від тригонометричної форми до показникової і навпаки (за допомогою формули Ейлера), а також від тригонометричної до алгебраїчної форми, використовуючи формулу (5.1.12).

5.2. Операції над к/ч для різних форм завдання

Розглянемо два к/ч z_1, z_2 , заданих у алгебраїчній, тригонометричній та показниковій формах:

$$\begin{aligned} z_k &= a_k + b_k i; \quad z_k = \rho_k (\cos \varphi_k + i \sin \varphi_k); \\ z_k &= \rho_k e^{i \varphi_k}, \quad k = 1, 2. \end{aligned} \tag{5.2.1}$$

Означення операцій (дій) над к/ч достатньо дати для випадку їхнього завдання в алгебраїчній формі; для інших форм результати дій визначатимуться як наслідки згідно зі співвідношеннями (5.1.14), (5.1.16). Результат двомісної операції позначатимемо через z .

1. Додавання й віднімання. Сумою (різницею) чисел z_1, z_2 називається число $z = a + bi$, яке визначається рівністю:

$$z = z_1 \pm z_2 = (a_1 \pm a_2) + (b_1 \pm b_2) \cdot i, \quad (5.2.2)$$

тобто сума (різниця) двох к/ч z_1, z_2 , заданих в алгебраїчній формі, – число, компоненти якого дорівнюють сумі (різниці) відповідних компонент чисел z_1, z_2 :

$$z = z_1 \pm z_2 \Leftrightarrow (\operatorname{Re} z = \operatorname{Re} z_1 \pm \operatorname{Re} z_2, \operatorname{Im} z = \operatorname{Im} z_1 \pm \operatorname{Im} z_2). \quad (5.2.3)$$

При заданні z_1, z_2 у тригонометричній формі (див. (5.2.1)) їхні дійсні та уявні частини мають вигляд:

$$a_k = \operatorname{Re} z_k = \rho_k \cos \varphi_k; \quad b_k = \operatorname{Im} z_k = \rho_k \sin \varphi_k, \quad k = 1, 2, \quad (5.2.4)$$

тому

$$z = \underbrace{(\rho_1 \cos \varphi_1 \pm \rho_2 \cos \varphi_2)}_a + \underbrace{(\rho_1 \sin \varphi_1 \pm \rho_2 \sin \varphi_2)}_b \cdot i, \quad (5.2.5)$$

де $a = \rho_1 \cos \varphi_1 \pm \rho_2 \cos \varphi_2$, $b = \rho_1 \sin \varphi_1 \pm \rho_2 \sin \varphi_2$ – відповідно дійсна та уявна частини результату.

При заданні к/ч у показниковій формі для відокремлення дійсної та уявної частин к/ч слід перейти до тригонометричної (або алгебраїчної) форми.

Приклад на відшукування суми і різниці двох к/ч:

$$\text{а) } (z_1 = 5 + 2i, z_2 = 3 - i) \Rightarrow \begin{cases} z_1 + z_2 = (5 + 3) + (2 - 1)i = 8 + i, \\ z_1 - z_2 = (5 - 3) + (2 + 1)i = 2 + 3i; \end{cases}$$

$$\text{б) } \left(z_1 = 2 \left(\cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{\pi}{6} \right), z_2 = 3 \left(\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3} \right) \right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow z_1 \pm z_2 = \left(2 \cos \frac{\pi}{6} \pm 3 \cos \frac{\pi}{3} \right) + i \left(2 \sin \frac{\pi}{6} \pm 3 \sin \frac{\pi}{3} \right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow z_1 \pm z_2 = \left(2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \pm 3 \cdot \frac{1}{2} \right) + i \left(2 \cdot \frac{1}{2} \pm 3 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \right) = \frac{1}{2} (2\sqrt{3} \pm 3) + \frac{1}{2} (2 \pm 3\sqrt{3}) i;$$

$$\begin{aligned} \text{в) } (z_1 = e^{2i}, z_2 = e^{-i}) &\Rightarrow (z_1 = \cos 2 + i \sin 2, z_2 = \cos 1 - i \sin 1) \Rightarrow \\ &\Rightarrow z_1 \pm z_2 = (\cos 2 \pm \cos 1) + (\sin 2 \mp \sin 1) i. \end{aligned}$$

Зауважимо, що операція додавання к/ч, як і додавання дійсних чисел, підкоряється комутативному, асоціативному, дистрибутивному законам і узагальнюється на будь-яке скінченне число доданків.

2. Множення. Добутком чисел z_1, z_2 називається число $z = a + bi$, яке визначається рівністю:

$$z = z_1 \cdot z_2 = \underbrace{(a_1 a_2 - b_1 b_2)}_a + \underbrace{(a_1 b_2 + a_2 b_1)}_b \cdot i. \quad (5.2.6)$$

Формулу (5.2.6), за звичаєм, не запам'ятовують, а результат добутку двох к/ч $z_1 = a_1 + b_1 i$ і $z_2 = a_2 + b_2 i$ одержують за правилом множення двочлена на двочлен, враховуючи, що $i^2 = -1$:

$$\begin{aligned} z_1 \cdot z_2 &= (a_1 + b_1 i)(a_2 + b_2 i) = a_1 a_2 + a_1 b_2 i + a_2 b_1 i + b_1 b_2 i^2 = \\ &= (a_1 a_2 - b_1 b_2) + (a_1 b_2 + a_2 b_1) \cdot i = z. \end{aligned} \quad (5.2.7)$$

Множення зручно виконувати (див. (5.2.7)), якщо к/ч задано в тригонометричній або показниковій формах, завдяки формулам косинуса і синуса суми двох кутів та властивості добутку степенів з однаковою основою. Дійсно:

$$\begin{aligned} z &= z_1 \cdot z_2 = \rho_1 (\cos \varphi_1 + i \sin \varphi_1) \cdot \rho_2 (\cos \varphi_2 + i \sin \varphi_2) = \\ &= \left| \begin{array}{ll} a_1 = \rho_1 \cos \varphi_1 & a_2 = \rho_2 \cos \varphi_2 \\ b_1 = \rho_1 \sin \varphi_1 & b_2 = \rho_2 \sin \varphi_2 \end{array} \right| = \\ &= \rho_1 \rho_2 [(\cos \varphi_1 \cos \varphi_2 - \sin \varphi_1 \sin \varphi_2) + i (\sin \varphi_1 \cos \varphi_2 + \cos \varphi_1 \sin \varphi_2)] \Rightarrow \\ &\Rightarrow z = \rho_1 \rho_2 [\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i \sin(\varphi_1 + \varphi_2)]. \end{aligned} \quad (5.2.8)$$

Висновок. Добутком двох к/ч, заданих у тригонометричній формі, є число $z = \rho(\cos \varphi + i \sin \varphi)$, модуль якого дорівнює добутку модулів співмножників ($\rho = \rho_1 \cdot \rho_2$), а аргумент – сумі їхніх аргументів ($\varphi = \varphi_1 + \varphi_2$).

При завданні к/ч у показниковій формі маємо:

$$z = z_1 \cdot z_2 = \rho_1 e^{i\varphi_1} \cdot \rho_2 e^{i\varphi_2} = \rho_1 \rho_2 \cdot e^{i(\varphi_1 + \varphi_2)}. \quad (5.2.9)$$

Висновок: $\rho = \rho_1 \cdot \rho_2$, $\varphi = \varphi_1 + \varphi_2$ (наведіть словесне формулювання).

Для двох спряжених к/ч добуток дає квадрат їхнього модуля:

$$\text{а) } (z = a + bi, \bar{z} = a - bi) \Rightarrow z \cdot \bar{z} = a^2 + b^2 = \rho^2;$$

$$\text{б) } (z = \rho(\cos \varphi + i \sin \varphi), \bar{z} = \rho(\cos \varphi - i \sin \varphi)) \Rightarrow z \cdot \bar{z} = \rho^2;$$

$$\text{в) } (z = \rho e^{i\varphi}, \bar{z} = \rho e^{-i\varphi}) \Rightarrow z \cdot \bar{z} = \rho^2.$$

За допомогою асоціативного закону формули (5.2.6), (5.2.8), (5.2.9) узагальнюються на будь-яке скінченне число співмножників.

3. Ділення. Часткою чисел z_1 , z_2 називається число $z = a + bi$, яке визначається рівністю:

$$z = \frac{z_1}{z_2} = \frac{a_1 a_2 + b_1 b_2}{\underbrace{a_2^2 + b_2^2}_a} + i \cdot \frac{a_2 b_1 - a_1 b_2}{\underbrace{a_2^2 + b_2^2}_b}, \quad z_2 \neq 0. \quad (5.2.10)$$

На практиці замість прямого використання (5.2.10) відшукування частки двох к/ч зводять до обчислення добутку $z_1 \cdot \overline{z_2}$, а саме:

$$z = \frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1 \cdot \overline{z_2}}{z_2 \cdot \overline{z_2}} = \frac{(a_1 + b_1 i)(a_2 - b_2 i)}{(a_2 + b_2 i)(a_2 - b_2 i)} = \frac{(a_1 a_2 + b_1 b_2) + (a_2 b_1 - a_1 b_2)i}{a_2^2 + b_2^2}. \quad (5.2.11)$$

Якщо числа z_1 і z_2 зображені в тригонометричній або показниковій формах, то

$$z = \frac{z_1}{z_2} = \frac{\rho_1}{\rho_2} [\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i \sin(\varphi_1 - \varphi_2)], \quad (5.2.12)$$

$$z = \frac{z_1}{z_2} = \frac{\rho_1}{\rho_2} e^{i(\varphi_1 - \varphi_2)}. \quad (5.2.13)$$

У справедливості (5.2.12), (5.2.13) можна переконатися так само, як це робилося при розгляді добутку к/ч.

Приклад на відшукування частки двох к/ч:

$$\text{а) } (z_1 = 2 - 3i, z_2 = -1 + i) \Rightarrow \frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1 \cdot \overline{z_2}}{z_2 \cdot \overline{z_2}} = \frac{(2 - 3i)(-1 - i)}{(-1)^2 + 1^2} = -\frac{5}{2} + \frac{1}{2}i;$$

$$\text{б) } \left(z_1 = 2 \left(\cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2} \right), z_2 = \cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3} \right) \Rightarrow \frac{z_1}{z_2} = 2 \left(\cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{\pi}{6} \right);$$

$$\text{в) } (z_1 = 2e^{i\pi/2}, z_2 = e^{i\pi/3}) \Rightarrow \frac{z_1}{z_2} = 2e^{i\pi/6}.$$

4. Піднесення до степеня. Якщо показник степеня n натуральний ($n \in \mathbb{N}$), то, як і для дійсних чисел, відповідний степінь к/ч – це добуток n однакових співмножників. Його відшукування зводиться до використання формули бінома Ньютона з урахуванням (5.1.2):

$$\begin{aligned} z = a + bi \Rightarrow z^n &= (a + bi)^n = \sum_{k=0}^n C_n^k a^{n-k} (bi)^k = \\ &= a^n + C_n^1 a^{n-1} (bi) + C_n^2 a^{n-2} (bi)^2 + \dots + (bi)^n. \end{aligned} \quad (5.2.14)$$

Приклад. Знайти куб числа $z = 2 - 3i$.

Розв'язання. За формулою (5.2.14) маємо:

$$\begin{aligned} z^3 &= (2 - 3i)^3 = 2^3 - C_3^1 2^2 (3i) + C_3^2 2^1 (3i)^2 - (3i)^3 \Rightarrow \\ &\Rightarrow \left| i^2 = -1, i^3 = -i \right| \Rightarrow z^3 = 8 - 36i - 54 + 27i = -46 - 9i. \end{aligned}$$

Для натурального степеня тригонометричної форми к/ч одержуємо:

$$\begin{aligned} z &= \rho(\cos \varphi + i \sin \varphi) \Rightarrow z^n = \rho^n (\cos \varphi + i \sin \varphi)^n = \\ &= \rho^n \underbrace{(\cos \varphi + i \sin \varphi)(\cos \varphi + i \sin \varphi) \dots (\cos \varphi + i \sin \varphi)}_{n \text{ разів}} \Rightarrow \\ &\Rightarrow z^n = \rho^n (\cos n\varphi + i \sin n\varphi). \end{aligned} \quad (5.2.15)$$

В окремому випадку, коли $\rho = 1$, (5.2.15) дає так названу **формулу Муавра**:

$$(\cos \varphi + i \sin \varphi)^n = \cos n\varphi + i \sin n\varphi, \quad (5.2.16)$$

яка справедлива, як і (5.2.15), також для цілих від'ємних показників степеня (переконайтеся!).

Дуже легко обчислити z^n при завданні к/ч у показниковій формі:

$$z = \rho e^{i\varphi} \Rightarrow z^n = (\rho e^{i\varphi})^n \Rightarrow z^n = \rho^n e^{in\varphi}. \quad (5.2.17)$$

5. Добування кореня. Коренями степеня n (n -го степеня, $n \in \mathbb{N}$) із числа z ($z \neq 0$) називаються розв'язки відносно ϖ рівняння

$$\varpi^n = z, \quad (5.2.18)$$

які позначаються звичним символом $\sqrt[n]{z}$.

Рівняння (5.2.18) розв'язується легко, якщо z і ϖ розглядати в тригонометричній формі. Дійсно, нехай $z = \rho(\cos \varphi + i \sin \varphi)$, де $\varphi = \arg z$, а $\varpi = r(\cos t + i \sin t)$ – деякий розв'язок рівняння, тоді:

$$\varpi^n = z \Rightarrow r^n (\cos nt + i \sin nt) = \rho (\cos \varphi + i \sin \varphi),$$

звідки (за умовою рівності двох к/ч)

$$r^n = \rho, \quad nt = \varphi + 2\pi k, \quad \text{а} \quad r = \sqrt[n]{\rho}, \quad t = \frac{\varphi + 2\pi k}{n}. \quad (5.2.19)$$

Отже, враховуючи (5.2.19), одержуємо:

$$\varpi = \sqrt[n]{\rho} \left(\cos \frac{\varphi + 2\pi k}{n} + i \sin \frac{\varphi + 2\pi k}{n} \right). \quad (5.2.20)$$

Формула (5.2.20) дає n різних значень ϖ при вартостях k , які відрізняються на число, не кратне n (чому?). Найменші вартості k , які задовольняють цю умову, такі: $k = 0, 1, 2, \dots, n-1$.

Таким чином, усі (різні) значення $\sqrt[n]{z}$ визначаються формулою:

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{\rho} \left(\cos \frac{\varphi + 2\pi k}{n} + i \sin \frac{\varphi + 2\pi k}{n} \right) \quad (k = 0, 1, 2, \dots, n-1). \quad (5.2.21)$$

Геометрично відповідні кореням точки лежать на колі з центром у точці O радіуса $\sqrt[n]{|z|}$ і поділяють його на n рівних частин, тобто точки

z -площини, які зображають значення кореня n -го степеня із k /ч, є вершинами правильного n -кутника з центром в O . Зокрема, при $z = 1$ (тоді $\rho = 1$, $\varphi = 0$) маємо:

$$\sqrt[n]{1} = \cos \frac{2\pi k}{n} + i \sin \frac{2\pi k}{n}, \quad k = 0, 1, 2, \dots, n-1 \quad (5.2.22)$$

– формула коренів n -го степеня з одиниці.

Відзначимо, що корінь n -го степеня з будь-якого дійсного числа a також має n різних значень. Залежно від парності чи непарності n і знака числа a серед усіх значень $\sqrt[n]{a}$ дійсних буде два, одне або жодного.

Приклад. Знайти всі значення $\sqrt[3]{-2}$ і зобразити їх на комплексній площині (z) .

Розв'язання. Підрахуємо модуль і головне значення аргументу:

$$z = -2 + 0 \cdot i \Rightarrow \left(\rho = |z| = 2, \arg z = \arctg \frac{0}{-2} + \pi = \pi \right).$$

За формулою (5.2.21) отримуємо:

$$(k=0) \quad \varpi_0 = \sqrt[3]{2} \left(\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3} \right),$$

$$(k=1) \quad \varpi_1 = \sqrt[3]{2} (\cos \pi + i \sin \pi),$$

$$(k=2) \quad \varpi_2 = \sqrt[3]{2} \left(\cos \frac{5\pi}{3} + i \sin \frac{5\pi}{3} \right).$$

Як бачимо, $\sqrt[3]{-2}$ має одне дійсне значення ($\varpi_1 = -\sqrt[3]{2}$) і два комплексних.

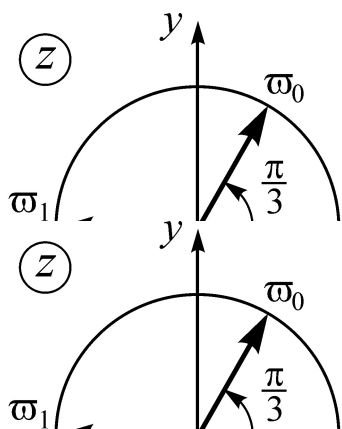


Рис. 5.2.1. Зображення значень коренів із числа $\sqrt[3]{-2}$

Зображуємо (рис. 5.2.1) знайдені значення коренів як точки кола радіуса $\sqrt[3]{2}$ з центром у початку координат, оскільки ϖ_0 , ϖ_1 , ϖ_2 мають однакові модулі. Аргумент кожного наступного значення кореня відрізняється від попереднього на кут $2\pi/3$.

Точки-вектори ϖ_0 , ϖ_1 , ϖ_2 поділяють коло на рівні частини.

Завдяки теорії к/ч установлено так звану **основу теорему алгебри**: у множині \mathbb{C} будь-який многочлен з довільними коефіцієнтами, степінь якого не менше одиниці, має хоча б один корінь. Як наслідок з неї випливає важливий результат: усякий многочлен степеня n ($n \geq 1$) з будь-якими коефіцієнтами має n коренів, якщо кожний з коренів рахувати стільки разів, яка його кратність.

Наприклад, нехай $P_4(x) = x^4 - x^3 + x^2$. Знайдемо його нулі, тобто корені рівняння $x^4 - x^3 + x^2 = 0$:

$$x^2(x^2 - x + 1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x^2 = 0 \\ x^2 - x + 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = x_2 = 0 \\ x_{3,4} = 1/2 \pm \sqrt{3}/2 \cdot i \end{cases}$$

Отже, отримали чотири кореня, із них один дійсний і двократний, два інших є спряженими комплексними числами.

5.3. Сфера Рімана. Поняття розширеної комплексної площини

Розглянемо у тривимірному просторі \mathbf{R}^3 з декартовою системою координат $uOvw$ сферу S з центром у точці $(0,0,1/2)$ радіуса $1/2$ (рис. 5.3.1), яку називають **сферою Рімана**. Площину $w = 0$ прийемо за

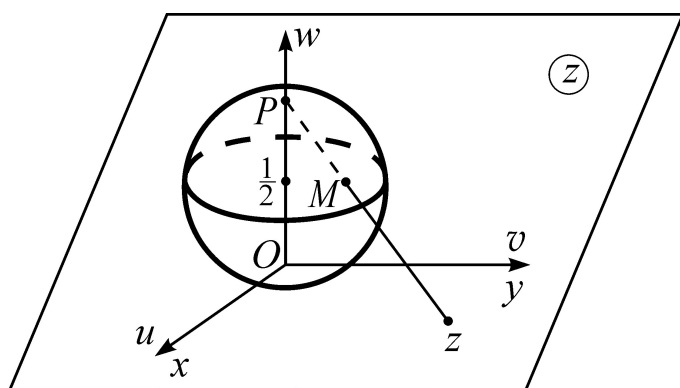


Рис. 5.3.1 Сфера Рімана

z -площину, в якій вісь Ox (Oy) співпадає з віссю Ou (Ov).

Із точки $P(0,0,1)$ проведемо промінь, який перетинає сферу S у відмінній від P точці $M(u,v,w)$, тоді точці перетину променя PM із площиною \textcircled{z} відповідатиме певне к/ч, яке позначимо через z : $z = x + iy$.

Точка M називається **стереографічною проекцією** точки $z \in \mathbb{C}$ на сферу S з полюсом P . Аналітичним шляхом можна показати (чого робити не будемо), що стереографічна проекція встановлює **взаємно однозначну** відповідність між точками на сфері Рімана з виколотим полюсом P і множиною всіх точок z -площини.

Оскільки на z -площині немає точки, для якої б точка $P(0,0,1)$ була стереографічною проекцією на сферу S , то множину \mathbf{C} доповнюють ще одним **невластивим (нескінченним)** к/ч, яке позначають символом ∞ .

Множину \mathbf{C} разом з числом $z = \infty$ називають **розширеною множиною** к/ч і позначають через $\overline{\mathbf{C}}$, а z -площину разом з точкою $z = \infty$ називають **розширеною комплексною площиною**. Точка $z = \infty$ розширеної z -площини називається **нескінченно віддаленою точкою**.

Для невластивого к/ч поняття дійсної та уявної частини, а також поняття аргументу не вводяться. Стосовно модуля числа $z = \infty$, то для нього використовують символ $+\infty$, тобто вважають $|\infty| = +\infty$.

Правила дій над символом ∞ визначаються таким чином:

$$\begin{aligned} z + \infty = \infty; \quad z - \infty = \infty \quad (z \neq \infty); \quad z \cdot \infty = \infty \quad (z \neq 0); \\ \frac{\infty}{z} = \infty \quad (z \neq \infty); \quad \frac{z}{\infty} = 0 \quad (z \neq 0). \end{aligned} \quad (5.3.1)$$

Різницю $\infty - \infty$, добуток $0 \cdot \infty$ і відношення ∞/∞ , взагалі кажучи, вважають такими, що не мають сенсу.

До речі, якщо покласти (що і роблять) $1/\infty = 0$, то відношення $\frac{a \cdot \infty + b}{c \cdot \infty + d}$, де $a, b, c, d \in \mathbf{C}$, у нескінченно віддаленій точці матиме певну вартість, а саме $\frac{a}{c}$, бо $\frac{a \cdot z + b}{c \cdot z + d} = \frac{a + b \cdot 1/z}{c + d \cdot 1/z}$.

Комплексні числа z , у яких дійсна і уявна частини є змінними величинами: $x = \operatorname{Re} z$, $y = \operatorname{Im} z$, називають **комплексними змінними**: $z = x + i \cdot y$.

Відповідно до цього розглядаються **функціональні залежності** між комплексними змінними: $w = f(z)$ – **функція** (від) **комплексної змінної**, де z – незалежна змінна (аргумент), w – залежна змінна (функція), f – закон, яким пов'язані змінні z і w . Вивчаються також **комплекснозначні функції дійсної змінної**: $w = f(z(t))$, це коли x і y є функціями дійсного аргументу t , тобто $z = z(t) = x(t) + i \cdot y(t)$.

При математичному аналізі сигналів (часових функцій) часто замість *дійсних сигналів* (вони описуються функціями дійсної змінної) з метою спрощення математичного апарату перетворення даних використовується *комплексне зображення сигналів*.

Наприклад, з урахуванням формули Ейлера: $e^{i\varphi} = \cos \varphi + i \sin \varphi$ (5.1.15), у теорії електричних кіл запис синусоїдальної напруги $u(t) = U_0 \cos(\omega_0 t + \varphi_0)$, де U_0 , ω_0 , φ_0 – числові параметри (відповідно амплітудна, частотна, фазова характеристика гармонійних коливань), замінюється комплекснозначною функцією дійсної змінної: $\dot{u}(t) = \dot{U}_0 e^{i\omega_0 t}$, де $\dot{U}_0 = U_0 e^{i\varphi_0}$, при цьому $u(t) = \operatorname{Re} \dot{u}(t)$.

Зазначимо, що:

показникову функцію $y = e^x$ часто позначають через $y = \exp(x)$, і називають **експонентою (експоненціальною функцією)**;

комплексні числа і комплексні змінні є основою так званого **символічного методу** розрахунку електричних кіл у електротехніці: напруга U , струм I , опір R , потужність N тощо подаються у вигляді **комплексу** – комплексного числа, дійсною (уявною) частиною якого є активна (реактивна) складова відповідної величини; потужність при цьому визначається добутком U з I .

Запитання для самодіагностики засвоєння матеріалу

Відповіді на всі запитання сформулюйте словесно, запишіть в символічній формі, обґрунтуйте (на підставі означень, теорем, правил, формул тощо), наведіть відповідні конкретні приклади.

1. Що таке уявна одиниця? Чому дорівнюють степені уявної одиниці для всіляких натуральних показників степеня?

2. Які числа називають уявними, комплексними? Як геометрично зображуються к/ч?

3. Що називають модулем, аргументом, головним значенням аргументу к/ч? За якими формулами вони визначаються?

4. Яку множину точок на комплексній площині визначають к/ч: а) з рівними модулями; б) з рівними аргументами; в) з дійсною (уявною) частиною, рівною нулю?

5. Якими співвідношеннями пов'язані: а) аргумент і його головне значення; б) аргумент і модуль к/ч з дійсною та уявною частинами алгебраїчної форми завдання к/ч?

6. Які к/ч називаються взаємно спряженими? Чим (як) відрізняються їхні модулі та головні значення аргументів?

7. Які існують форми завдання к/ч? Укажіть, дайте означення, опишіть складові кожного представлення, наведіть приклади.

8. Як (за якими формулами) здійснюється перехід від однієї з трьох форм завдання к/ч (алгебраїчної, тригонометричної, показникової) до двох інших?

9. Як виконуються операції додавання, віднімання, множення, ділення, піднесення до степеня, добування кореня степеня n ($n \geq 2$), $n \in \mathbf{N}$) над к/ч в: а) алгебраїчній; б) тригонометричній; в) показниковій формах.

10. У якій (яких) формі (формах) завдання к/ч зручно виконувати дії додавання і віднімання (множення, ділення, піднесення до степеня і добування кореня)?

11. Що називають сферою Рімана, розширеною комплексною площиною?

Задачі та вправи

1. Знайти дійсні числа x і y , якщо:

а) $(3-i)x + (1+3i)y = 1-7i$;

б) $(3x-i)(2+i) + (x-iy)(1+2i)y = 5+6i$;

в) $12((2x+1)(1+i) + (x+y)(3-2i)) = 41+6i$;

г) $(x-iy)(a-ib) = i^5$, $a, b \in \mathbf{R}$, $|a| \neq |b|$.

2. Знайти модуль і головне значення аргументу комплексних чисел:

а) $z = 4 + 3i$; б) $z = -2 + 2\sqrt{3}i$;

в) $z = -7 - i$; г) $z = -\cos \frac{\pi}{5} + i \sin \frac{\pi}{5}$;

д) $z = 4 - 3i$; е) $z = \cos \alpha + i \sin \alpha \left(\pi < \alpha < \frac{3}{2}\pi \right)$.

3. Знайти модуль, головне значення аргументу заданого комплексного числа z і подати його у тригонометричній та показниковій формах:

а) $z = 1$; б) $z = 2 + 2i$; в) $z = 3i$; г) $z = -1 + i\sqrt{3}$;

д) $z = -4$; е) $z = -\sqrt{3} - i$; є) $z = -5i$; ж) $z = 2 - i$.

4. З'ясувати, чи записано комплексне число у тригонометричній формі. Якщо „ні”, то подати його в алгебраїчній, тригонометричній і показниковій формах, якщо „так”, то – в алгебраїчній і показниковій:

а) $z = 2\left(\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3}\right)$; б) $z = -2\left(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4}\right)$;

в) $z = \sin \frac{\pi}{3} + i \cos \frac{\pi}{3}$; г) $z = \cos \frac{\pi}{3} - i \sin \frac{\pi}{3}$;

д) $z = -\cos \frac{\pi}{9} + i \sin \frac{\pi}{9}$.

5. Подати задані комплексні числа у тригонометричній формі:

а) $z = \cos \varphi - i \sin \varphi$; б) $z = -\cos \varphi + i \sin \varphi$;

в) $z = -\cos \varphi - i \sin \varphi$; г) $z = 1 + \cos \frac{\pi}{7} + i \sin \frac{\pi}{7}$;

д) $z = 1 - \sin \alpha + i \cos \alpha \quad (0 < \alpha < \pi/2)$;

е) $z = \frac{1 + \cos \alpha + i \sin \alpha}{1 + \cos \alpha - i \sin \alpha} \quad (0 < \alpha < \pi/2)$.

6. Обчислити суму, різницю, добуток, частку заданих комплексних чисел $z_1 = a_1 + ib_1$ і $z_2 = a_2 + ib_2$; зобразити на z -площині самі к/ч z_1 , z_2 і результати дій над ними:

а) $z_1 = 3 - i$, $z_2 = -1 + 5i$; б) $z_1 = 2 - 2i$, $z_2 = 4 - 2i$;

в) $z_1 = 3i$, $z_2 = -5 - 3i$; г) $z_1 = -2 - i$, $z_2 = 6i$.

7. Знайти натуральні степені комплексних чисел:

а) $\left(\frac{1+i\sqrt{3}}{1-i}\right)^{40}$; б) $(2-2i)^7$; в) $(\sqrt{3}-3i)^6$; г) $\left(\frac{1-i}{1+i}\right)^8$.

8. Знайти результат виконання дій над к/ч:

а) $(2+3i)(3-i) + (1+2i)^2$; б) $(1-2i)(2+i)^2 + 5i$;

в) $(1-i)^3 - (1+i)^3$; г) $(2i-i^2)^2 + (1-3i)^3$;

$$д) \frac{2-i}{1+i};$$

$$е) \frac{1}{1+4i} + \frac{1}{4-i};$$

$$е) \frac{(1+i)(3+i)}{3-i} - \frac{(1-i)(3-i)}{3+i};$$

$$ж) \frac{(-3+2i)^2}{(1-i)^3} + 2i - 5;$$

$$з) \left(\frac{1+i}{1-i} \right)^3;$$

$$и) (3 - \sqrt{3}i)^6;$$

$$і) \left(\frac{1+\sqrt{3}i}{1-i} \right)^{20};$$

$$к) \frac{(1+i)^{15}}{(1-i)^{18}}.$$

9. Знайти всі значення кореня з комплексного числа і зобразити їх на z -площині:

$$а) \sqrt[4]{-1};$$

$$б) \sqrt{i};$$

$$в) \sqrt[3]{i};$$

$$г) \sqrt[4]{1};$$

$$д) \sqrt[4]{-i};$$

$$е) \sqrt[3]{-1+i};$$

$$ж) \sqrt{2-2\sqrt{3}i};$$

$$з) \sqrt[5]{\sqrt{2} \left(\cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{\pi}{6} \right)}.$$

10. На множині комплексних чисел розв'язати рівняння:

$$а) z^5 + 32 = 0;$$

$$б) z^2 - (2i - 5)z + 5 - 5i = 0;$$

$$в) z^4 + 9z^2 + 20 = 0.$$

11. Знайти на z -площині множини точок, які визначаються заданими умовами:

$$а) 0 \leq \operatorname{Im} z \leq 1;$$

$$б) \left| \frac{z-1}{z+1} \right| \leq 1;$$

$$в) 1 \leq |z+2-i| \leq 2;$$

$$г) |z-1| \leq |z-i|;$$

$$д) |z| > 2 + \operatorname{Im} z;$$

$$е) |z| - \operatorname{Re} z \leq 0;$$

$$е) \operatorname{Im} \bar{z}^2 < 1;$$

$$ж) |z-a| < |1-a\bar{z}| \quad (a \in \mathbf{R}, |a| \neq 1).$$

12. Довести, що:

а) $\overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}$;

б) $\overline{z_1 - z_2} = \overline{z_1} - \overline{z_2}$;

в) $\overline{z_1 \cdot z_2} = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2}$;

г) $|z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$.

13. Обчислити:

а) $i \cdot i^2 \cdot i^3 \cdot \dots \cdot i^{100}$;

б) $i^4 + i^{14} + i^{24} + i^{34} + i^{44} + i^{54} + i^{64} + i^{74} + i^{84}$.

Відповіді

1. а) $x = 1$, $y = -2$; б) $x = 20/17$, $y = -36/17$; в) $x = 1/3$, $y = 1/4$;

г) $x = -\frac{b}{a^2 + b^2}$, $y = -\frac{a}{a^2 + b^2}$.

2. а) $\rho = 5$, $\varphi = \arctg \frac{3}{4}$; б) $\rho = 4$, $\varphi = \frac{2}{3}\pi$; в) $\rho = 5\sqrt{2}$, $\varphi = \arctg \frac{1}{7} - \pi$;

г) $\rho = 1$, $\varphi = \frac{4}{5}\pi$; д) $\rho = 5$, $\varphi = -\arctg \frac{3}{4}$; е) $\rho = 1$, $\varphi = 2\pi - \alpha$.

3. а) $|z| = 1$, $\arg z = 0$, $z = \cos 0 + i \sin 0$, $z = e^{i0}$; б) $|z| = 2\sqrt{2}$, $\arg z = \frac{\pi}{4}$, $z = 2\sqrt{2} \left(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \right)$, $z = 2\sqrt{2} e^{i\pi/4}$; в) $|z| = 3$, $\arg z = \frac{\pi}{2}$,

$z = 3 \left(\cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2} \right)$, $z = 3e^{i\frac{\pi}{2}}$; г) $|z| = 2$, $\arg z = \frac{2\pi}{3}$, $z = 2 \left(\cos \frac{2\pi}{3} + i \sin \frac{2\pi}{3} \right)$, $z = 2e^{i(2\pi/3)}$; д) $|z| = 4$, $\arg z = \pi$, $z = 4(\cos \pi + i \sin \pi)$, $z = 4e^{i\pi}$;

е) $|z| = 2$, $\arg z = -\frac{5\pi}{6}$, $z = 2 \left(\cos \left(-\frac{5\pi}{6} \right) + i \sin \left(-\frac{5\pi}{6} \right) \right)$, $z = 2e^{i(-5\pi/6)}$;

є) $|z| = 5$, $\arg z = -\frac{\pi}{2}$, $z = 5 \left(\cos \left(-\frac{\pi}{2} \right) + i \sin \left(-\frac{\pi}{2} \right) \right)$, $z = 5e^{i(-\pi/2)}$;

ж) $|z| = \sqrt{5}$, $\arg z = -\arctg \frac{1}{2}$, $z = \sqrt{5} \left(\cos \left(-\arctg \frac{1}{2} \right) + i \sin \left(-\arctg \frac{1}{2} \right) \right)$, $z = \sqrt{5} e^{-i \arctg 1/2}$.

4. а) так, $z = 1 + i\sqrt{3}$, $z = 2e^{i\pi/3}$; б) ні, $z = 1 + i\sqrt{3}$, $z = 2 \left(\cos \left(-\frac{3\pi}{4} \right) + i \sin \left(-\frac{3\pi}{4} \right) \right)$, $z = 2e^{-3\pi i/4}$; в) ні, $z = \frac{\sqrt{3}}{2} + i\frac{1}{2}$,

$$z = 1 \cdot \left(\cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{\pi}{6} \right), \quad z = 1 \cdot e^{i\pi/6}; \quad \text{г) так, } z = 0,809 - i \cdot 0,589, \quad z = e^{-i\pi/5};$$

$$\text{д) ні, } z = -0,940 + i \cdot 0,342, \quad z = 1 \cdot \left(\cos \frac{8\pi}{9} + i \sin \frac{8\pi}{9} \right), \quad z = 1 \cdot e^{i8\pi/9}.$$

$$\mathbf{5. а) } z = \cos(-\varphi) + i \sin(-\varphi); \quad \text{б) } z = \cos(\pi - \varphi) + i \sin(\pi - \varphi);$$

$$\text{в) } z = \cos(\pi + \varphi) + i \sin(\pi + \varphi); \quad \text{г) } z = 2 \cos \frac{\pi}{14} \left(\cos \frac{\pi}{14} + i \sin \frac{\pi}{14} \right);$$

$$\text{д) } z = \sqrt{2(1 - \sin \alpha)} \left[\cos \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\alpha}{2} \right) + i \sin \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\alpha}{2} \right) \right]; \quad \text{е) } z = 1 \cdot (\cos \alpha + i \sin \alpha).$$

$$\mathbf{6. а) } z_1 + z_2 = 2 + 4i, \quad z_1 - z_2 = 4 - 6i, \quad z_1 \cdot z_2 = 2 + 16i, \quad \frac{z_1}{z_2} = -\frac{4}{13} - \frac{7}{13}i;$$

$$\text{б) } z_1 + z_2 = 6 - 4i, \quad z_1 - z_2 = -2, \quad z_1 \cdot z_2 = 4 - 12i, \quad \frac{z_1}{z_2} = \frac{3}{5} - \frac{1}{5}i; \quad \text{в) } z_1 + z_2 = -5,$$

$$z_1 - z_2 = 5 + 6i, \quad z_1 \cdot z_2 = 9 - 15i, \quad z_1/z_2 = -\frac{9}{34} - \frac{15}{34}i; \quad \text{г) } z_1 + z_2 = -2 + 5i,$$

$$z_1 - z_2 = -2 - 7i, \quad z_1 \cdot z_2 = 6 - 12i, \quad z_1/z_2 = -1/6 + 1/3i.$$

$$\mathbf{7. а) } -2^{19}(1 + i\sqrt{3}); \quad \text{б) } 2^{10}(1 + i); \quad \text{в) } 1728; \quad \text{г) } 1.$$

$$\mathbf{8. а) } 6 + 11i; \quad \text{б) } 11 + 3i; \quad \text{в) } -4i; \quad \text{г) } -29 + 22i; \quad \text{д) } \frac{1}{2} - \frac{3}{2}i; \quad \text{е) } \frac{5}{17} - \frac{3}{17}i;$$

$$\text{е) } 14/5i; \quad \text{ж) } -13/4 + 25/4i; \quad \text{з) } -i; \quad \text{и) } -1728; \quad \text{й) } 2^9(1 - \sqrt{3}i); \quad \text{к) } 1/4 + 1/4i.$$

$$\mathbf{9. а) } \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i, \quad \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i, \quad -\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i, \quad -\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i; \quad \text{б) } \frac{\sqrt{2}}{2}(1 + i),$$

$$-\frac{\sqrt{2}}{2}(1 + i); \quad \text{в) } \frac{1}{2}(\sqrt{3} + i), \quad \frac{1}{2}(-\sqrt{3} + i), \quad i; \quad \text{г) } \pm 1, \quad \pm i; \quad \text{д) } \cos \frac{\pi}{8} - i \sin \frac{\pi}{8},$$

$$-\left(\cos \frac{\pi}{8} - i \sin \frac{\pi}{8} \right), \quad \cos \frac{3\pi}{8} + i \sin \frac{3\pi}{8}, \quad -\left(\cos \frac{3\pi}{8} + i \sin \frac{3\pi}{8} \right); \quad \text{е) } \frac{\sqrt[3]{4}}{2}(1 + i),$$

$$\sqrt[6]{2} \left(-\cos \frac{\pi}{12} + i \sin \frac{\pi}{12} \right), \quad \sqrt[6]{2} \left(\sin \frac{\pi}{12} - i \cos \frac{\pi}{12} \right); \quad \text{ж) } \sqrt{3} - i, \quad -\sqrt{3} + i;$$

$$\text{з) } \sqrt[10]{2} (\cos 6^\circ + i \sin 6^\circ), \quad \sqrt[10]{2} (\sin 12^\circ + i \cos 12^\circ), \quad \sqrt[10]{2} (-\sqrt{3}/2 + 1/2i),$$

$$\sqrt[10]{2} (-\cos 42^\circ - i \sin 42^\circ), \quad \sqrt[10]{2} (\sin 24^\circ - i \cos 24^\circ).$$

$$\mathbf{10. а) } 2 \left(\cos \frac{\pi}{5} + i \sin \frac{\pi}{5} \right), \quad 2 \left(\cos \frac{3\pi}{5} + i \sin \frac{3\pi}{5} \right), \quad 2(\cos \pi + i \sin \pi),$$

$$2 \left(\cos \frac{7\pi}{5} + i \sin \frac{7\pi}{5} \right), \quad 2 \left(\cos \frac{9\pi}{5} + i \sin \frac{9\pi}{5} \right); \quad \text{б) } -2 + i, \quad -3 + i; \quad \text{в) } \pm 2i, \quad \pm \sqrt{5}i.$$

11. а) смуга між прямими $y = 0$ і $y = 1$, включаючи ці прямі; б) права півплощина, включаючи вісь Oy ; в) концентричне кільце, обмежене колами радіусів $R_1 = 1$ і $R_2 = 2$ з центрами в точці $z_0 = -(2 + i)$, включаючи кола; г) частина площини, розташована нижче прямої $y = x$, включаючи пряму; д) зовнішність параболи $y = \frac{1}{2}x^2 - 2$; е) дійсна піввісь, включаючи й точку $(0,0)$; є) внутрішність гіперболи $xy = 1/2$; ж) внутрішність одиничного кола.

13. а) -1 ; б) 1 .

Ключові терміни

Число (дійсне, уявне, комплексне), уявна одиниця, дійсна і уявна частини, компоненти (складові), спряжені числа, геометричне зображення, модуль, аргумент (головне значення аргументу), комплексна площина, дійсна (уявна) вісь, форма завдання (алгебраїчна, тригонометрична, показникова), операції над к/ч (додавання, віднімання, множення, ділення, піднесення до степеня, добування кореня), формула Муавра, сфера Рімана, невластиве (нескінченне) к/ч, розширена множина к/ч, розширена комплексна площина, нескінченно віддалена точка.

Резюме

Викладено основні відомості про комплексні числа як розширення множини дійсних чисел, а саме: означення основних понять, геометричну інтерпретацію, форми завдання комплексних чисел та операції над к/ч для різних форм завдання.

Література: [3; 4; 5; 8; 9; 10; 14; 22; 23; 29].

6. Елементарні функції

„Очевидний” – найнебезпечніше слово в математиці.

Альберт Ейнштейн

У математиці слід пам'ятати не формули, а процеси мислення.

В. П. Єрмаков

Мета: упорядкувати і поглибити знання щодо елементарних функцій, набутих студентами у середній школі.

Питання теми:

- 6.1. Множини: основні відомості, операції над множинами.
- 6.2. Числові функції: основні означення, способи завдання.
- 6.3. Основні елементарні функції і їхні графіки.
- 6.4. Елементарні функції: означення, класифікація.
- 6.5. Задача установлення області визначення функції.

Компетентності, що формуються після вивчення теми:

Загальнонаукова: набуття базових знань з основ теорії елементарних функцій.

Загальнопрофесійна: підготовленість до засвоєння методів дослідження функціональних зв'язків у інформаційних системах.

Спеціалізовано-професійна: здатність до застосування елементарних функцій у методах математичної обробки цифрової інформації.

6.1. Множини: основні відомості, операції над множинами

Поняття множини є одним із фундаментальних у математиці і належить до так званих первісних понять, яким неможливо дати строге означення, використовуючи інші математичні поняття.

Інтуїтивно під **множиною** розуміють сукупність (сімейство, набір, систему, зібрання) об'єктів (предметів), які об'єднано у цю сукупність за певними ознаками. *Прикладами* множин є: множина клавіш персонального комп'ютера; множина команд, що беруть участь у футбольному чемпіонаті; множина зірок певного сузір'я; множина точок на заданій лінії; множина розв'язків рівняння; множина всіх цілих чисел тощо.

Об'єкти, що складають множину, називають її **елементами**. Множини позначають, як правило, великими літерами латинського або

грецького алфавітів, а їхні елементи – малими. Якщо елемент x належить множині A , то пишуть: $x \in A$, де „ \in ” – *символ належності*; запис $x \notin A$ або $x \bar{\in} A$ означає, що елемент x не належить множині A .

Існує два способи завдання множин:

1) спосіб *переліку* – це коли безпосередньо вказуються (називаються) всі елементи, які складають множину, що розглядається;

2) спосіб *опису*, який ґрунтується на завданні так званої **характеристичної властивості** $P(x)$ елементів x розглядуваної множини. Запис $A = \{x \mid P(x)\}$ означає множину всіх тих елементів x ($x \in A$), для яких виконується властивість $P(x)$.

Для символічного запису множин використовують фігурні дужки $\{ , \}$, в яких записують її елементи чи характеристичну властивість $P(x)$.

Наприклад, $A = \{0, -2, 3/7\}$; $B = \{a, b, c, d\}$; $C = \{x \mid 0 \leq x < 5\}$.

Множина, яка не містить жодного елемента, називається **порожньою множиною** і позначається символом \emptyset ; множини, які не є порожніми, природно називати **непорожніми множинами**.

Наприклад, множина цілих додатних коренів рівняння $(x+2)(3x-5)=0$ є порожньою, тобто $\{x \in \mathbb{N} \mid (x+2)(3x-5)=0\} = \emptyset$, де \mathbb{N} – множина натуральних чисел (чисел „лічби”).

Нехай A і B – дві непорожні множини. Множина A називається **підмножиною** множини B , якщо кожний елемент із A належить множині B , і пишуть $A \subset B$ або $B \supset A$. Отже, за означенням:

$$(A \subset B) \Leftrightarrow (\forall x: x \in A \Rightarrow x \in B), \quad (6.1.1)$$

де \subset (\supset) – *символ (знак) включення*, читається: „є підмножиною”, „міститься в”, „включається в”;

$:$ – символ, який читається: „таке (такі), що”, „маємо”.

Якщо A не є підмножиною B , то пишуть: $A \not\subset B$ або $B \not\supset A$ і кажуть: „ A не включається в B ” або „ B не включає A ”.

Наприклад, $(A = \{a, b\}, B = \{a, b, c\}) \Rightarrow A \subset B$, але $B \not\subset A$, бо елемент c із B не належить A .

Очевидно, що кожна непорожня множина є підмножиною самої себе, а порожня множина є підмножиною будь-якої непорожньої множини.

Якщо множини A і B містять одні і ті ж самі елементи, тобто $A \subset B$ і $B \subset A$, то їх називають **рівними** і пишуть: $A = B$.

Наприклад, $\{2,3\} = \{x \mid x^2 - 5x + 6 = 0\}$.

Із означення рівності множин випливає, що *порядок елементів у множині несуттєвий* (!).

Якщо розглядається декілька множин $A_1, A_2, \dots, A_k, k \in \mathbf{N}$, які є підмножинами однієї і тієї ж множини A , то множину A називають **універсальною**, або **універсумом**, і позначають через I :

$$A = I \Leftrightarrow (\forall i=1,2,\dots,k, k \in \mathbf{N}: A_i \subset A). \quad (6.1.2)$$

Наприклад, універсумом арифметики є множина дійсних чисел, лінгвістики – множина всіх слів, планіметрії (стереометрії) – множина точок площини (простору).

Множина A називається **скінченною** (**нескінченною**), якщо існує (не існує) невід’ємне ціле число n , якому дорівнює число елементів множини A :

$$\begin{aligned} A - \text{скінченна множина} &\Leftrightarrow \exists(n \in \mathbf{N} \cup \{0\}): |A| = n \\ (A - \text{нескінченна множина} &\Leftrightarrow \bar{\exists}(n \in \mathbf{N} \cup \{0\}): |A| = n), \end{aligned} \quad (6.1.3)$$

де символом $|A|$ позначено число елементів множини A ; символ $\bar{\exists}$ читається: „не існує”.

Наприклад, множина слухачів у даній аудиторії – скінченна, а множина трикутників, які можна вписати у дане коло, – нескінченна. Порожня множина вважається скінченною; найпростішою серед нескінченних множин є (уже згадувана) множина натуральних чисел \mathbf{N} .

Розглянемо дві непорожні множини A, B . Якщо кожному елементу x множини A можна поставити у відповідність тільки один елемент y множини B так, що кожний елемент $y \in B$ є відповідним тільки одному елементу $x \in A$, то говорять, що між множинами A і B встановлено **взаємно однозначну відповідність**, або **бієкцію** (від лат. *bijectio* – накладання), і пишуть: $A \leftrightarrow B$, де \leftrightarrow – *символ бієкції*.

Наприклад, для множин $A = \{a, b, c\}$, $B = \{\alpha, \beta, \gamma\}$ відповідність, яка описується парами $(a, \alpha), (b, \beta), (c, \gamma)$ є бієкцією.

Будь-яка нескінченна множина, між елементами якої і множиною натуральних чисел \mathbf{N} існує (не існує) бієкція, тобто елементи якої можна (не можна) занумерувати за допомогою натуральних чисел, називається **зліченною (незліченною)**:

$$\begin{aligned} (A - \text{зліченна множина}) &\Leftrightarrow (A \leftrightarrow \mathbf{N}) \\ (A - \text{незліченна множина}) &\Leftrightarrow (A \nleftrightarrow \mathbf{N}). \end{aligned} \quad (6.1.4)$$

Прикладами злічених множин є множини: парних чисел $\{x \mid x = 2n, n \in \mathbf{N}\}$; обернених квадратів $\{x \mid x = 1/n^2, n \in \mathbf{N}\}$. А *прикладом* незлічених множин є множини: дійсних чисел \mathbf{R} ; усіх точок на площині (у просторі); множини точок кола (круга, квадрата, сфери тощо).

У курсі вищої математики найчастіше розглядаються множини, елементами яких є числа. Такі множини називаються **числовими**. Наведемо основні з них:

множина *натуральних чисел* $\mathbf{N} = \{1, 2, 3, \dots, n, \dots\}$;

множина *цілих чисел* $\mathbf{Z} = \{0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots, \pm n, \dots\}$;

множина *раціональних чисел*: $\mathbf{Q} = \{x \mid (\exists p \in \mathbf{Z}, \exists q \in \mathbf{N}): x = p/q\}$;

множина *ірраціональних чисел*: $\overline{\mathbf{Q}} = \{x \mid (\nexists p \in \mathbf{Z}, \nexists q \in \mathbf{N}): x = p/q\}$;

множина *дійсних чисел*: $\mathbf{R} = \{x \mid x \in \mathbf{Q} \vee x \in \overline{\mathbf{Q}}\}$;

множина *комплексних чисел*: $\mathbf{C} = \{x \mid x = a + i \cdot b; a, b \in \mathbf{R}; i = \sqrt{-1}\}$.

Між цими множинами існує зв'язок (*обміркуйте!*):

$$\mathbf{N} \subset \mathbf{Z} \subset \mathbf{Q} \subset \mathbf{R} \subset \mathbf{C}.$$

Нагадаємо, що між множиною дійсних чисел і множиною усіх точок на прямій існує бієкція (яка і визначає числову вісь), тобто кожному числу $x \in \mathbf{R}$ відповідає певна точка прямої і навпаки: кожній точці прямої відповідає певне число, тому терміни „дійсне число” і „точка прямої” можна сприймати як синоніми. З іншого боку, пряму можна розглядати як геометричне зображення множини дійсних чисел.

Поняття „нескінченність” для множин точок на прямій і дійсних чисел можна тлумачити так: на прямій завжди знайдеться точка, яка лежить лівіше (правіше) будь-якої взятої на ній точки, або, що теж саме, у множині \mathbf{R} завжди можна знайти число, яке менше (більше) всякого

наперед заданого числа. З цим поняттям пов'язують символи: $-\infty$ – „мінус нескінченність”; $+\infty$ – „плюс нескінченність”, які називають **невластивими числами** і вважають, що $-\infty$ ($+\infty$) – невластиве число, яке менше (більше) будь-якого наперед заданого числа x : $-\infty < x < +\infty$. Зазначимо, що для невластивих чисел $-\infty$, $+\infty$ на числовій осі не можна вказати відповідних точок (тому їх і було названо „невластивими”).

Нехай a , b – дійсні числа, причому $a < b$. Надалі ми будемо переважно мати справу з такими числовими множинами:

$$\begin{aligned} [a; b] & \text{ – відрізок (сегмент) } \Rightarrow \{x \in \mathbf{R} \mid a \leq x \leq b\}, \\ (a; b) & \text{ – інтервал } \Rightarrow \{x \in \mathbf{R} \mid a < x < b\}, \\ [a; b) & \text{ – піввідрізок (півсегмент) } \Rightarrow \{x \in \mathbf{R} \mid a \leq x < b\}, \\ (a; b] & \text{ – півінтервал } \Rightarrow \{x \in \mathbf{R} \mid a < x \leq b\}. \end{aligned} \quad (6.1.5)$$

Якщо в півінтервалах, півсегментах один із кінців є невластивою точкою, то пишуть: $(-\infty; b]$, $(-\infty; b)$, $[a; +\infty)$, $(a; +\infty)$, що означає відповідно: $x \leq b$, $x < b$, $x \geq a$, $x > a$. Відрізки, піввідрізки, інтервали, півінтервали (скінченні й нескінченні) об'єднують під однією назвою – **проміжок** – і позначають символом $\langle a; b \rangle$. Множину всіх дійсних чисел $\mathbf{R} = (-\infty; +\infty)$ називають **нескінченим інтервалом**. (Зобразіть самостійно на числовій осі перелічені проміжки).

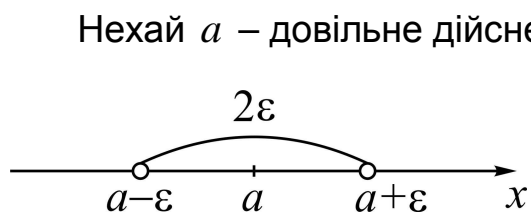


Рис. 6.1.1. ε -Окіл точки a

Нехай a – довільне дійсне число, ε – будь-яке додатне число із \mathbf{R} , тобто $\varepsilon > 0$. Інтервал $(a - \varepsilon; a + \varepsilon)$ називається **ε -околом** точки a і позначається через $B(a, \varepsilon)$, де a – **центр околу**, ε – **радіус околу** (рис. 6.1.1):

$$B(a, \varepsilon) = (a - \varepsilon; a + \varepsilon) = \left\{ x \in \mathbf{R} \mid |x - a| < \varepsilon \right\}. \quad (6.1.6)$$

Інакше кажучи, ε -окіл точки a – це множина всіх дійсних чисел x , які задовольняють нерівність $a - \varepsilon < x < a + \varepsilon$ або $|x - a| < \varepsilon$. Наприклад, множина точок x , які задовольняють нерівність $|x - 4| < 3$, є околом числа 4 радіуса 3. (Зобразіть цей окіл на числовій осі.)

Числові множини за структурою поділяють на дискретні та неперервні. Точка a деякої множини A називається **ізолюваною точкою** цієї множини, якщо у неї є окіл, який не містить інших точок множини A :

$$(a \in A \wedge a - \text{ізолювана точка}) \Leftrightarrow \Leftrightarrow (\exists B(a, \varepsilon): (x \in B(a, \varepsilon) \wedge x \in A) \Rightarrow (x = a)). \quad (6.1.7)$$

Множина A , елементами якої є лише ізолювані точки, називається **дискретною (ізолюваною) множиною**:

$$(A - \text{дискретна множина}) \Leftrightarrow (\forall x \in A: x - \text{ізолювана точка}). \quad (6.1.8)$$

Непорожня множина, яка не містить ізолюваних точок, називається **неперервною множиною**:

$$(A - \text{неперервна множина}) \Leftrightarrow (\exists x \in A: x - \text{ізолювана точка}). \quad (6.1.9)$$

Прикладами дискретних множин є множини: натуральних чисел \mathbf{N} , раціональних чисел \mathbf{Q} , будь-яких їхніх підмножин (скінченних чи нескінченних). Узагалі дискретна множина точок на прямій (на площині, у просторі) скінченна або зліченна; скінченна множина завжди дискретна.

Приклади неперервних числових множин наводилися вище, а саме: множина дійсних чисел (точок прямої) $\mathbf{R} = (-\infty; +\infty)$ і її підмножини – проміжки (див. (6.1.5)), для яких множина \mathbf{R} є універсумом.

Розглянемо **операції (дії), які можна виконувати над множинами**, а для кращого розуміння відповідного матеріалу будемо використовувати наочне зображення множин за допомогою **кругів (діаграм) Ейлера** – це коли множини зображаються на площині у вигляді кругів, а їхній універсум – прямокутником; результати операцій над заданими множинами зображатимемо на рисунках заштрихованими областями.

Нехай маємо дві непорожні множини A і B .

1. Об'єднанням (сумою) множин A і B називається множина C , яка містить усі елементи множин A , B і не містить інших елементів (рис. 6.1.2-а):

$$C = A \cup B \Leftrightarrow C = \{x \mid x \in A \vee x \in B\}, \quad (6.1.10)$$

де \cup – символ об'єднання; $A \cup B$ читається: „об'єднання множин A і B ”.

Приклад. $(A = \{0, 2, 8\}, B = \{2, 8, -13\}) \Rightarrow C = A \cup B = \{0, 2, 8, -13\}$.

2. Перетином (перерізом, добутком) множин A і B називається множина C , яка містить усі спільні елементи множин A , B і не містить інших елементів (рис. 6.1.2-б):

$$C = A \cap B \Leftrightarrow C = \{x \mid x \in A \wedge x \in B\}, \quad (6.1.11)$$

де \cap – символ перетину; $A \cap B$ читається: „перетин множин A і B ”.

Якщо добуток двох множин – порожня множина ($A \cap B = \emptyset$), то кажуть, що ці множини не перетинаються.

Приклад. ($A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{1, 2, 4, 5\}$) $\Rightarrow C = A \cap B = \{1, 2\}$.

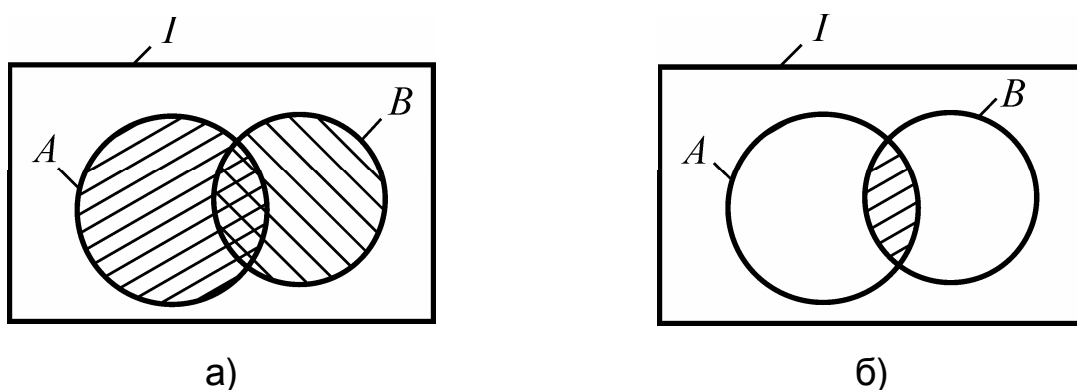


Рис. 6.1.2. Ейлерова діаграма: а) об'єднання; б) перетину множин

Операції об'єднання і перетину множин володіють **властивостями**, аналогічними властивостям арифметики чисел:

1) *комутативність* (переставна властивість):

$$A \cup B = B \cup A, \quad A \cap B = B \cap A;$$

2) *асоціативність* (сполучна властивість):

$$A \cup B \cup C = (A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C), \quad A \cap B \cap C = (A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C);$$

3) *дистрибутивність* – розподільна властивість перетину (об'єднання) відносно об'єднання (перетину):

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C), \quad A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C).$$

Розподільний закон об'єднання відносно перетину в арифметиці чисел місця не має. Дійсно, якщо a , b , c – числа, то хіба справедлива рівність $a + b \cdot c = (a + b) \cdot (a + c)$?

3. Різницею множин A і B називається множина C , яка містить усі елементи множини A , що не належать множині B , і не містить інших елементів (рис. 6.1.3-а):

$$C = A \setminus B \Leftrightarrow C = \{x \mid x \in A \wedge x \notin B\}, \quad (6.1.12)$$

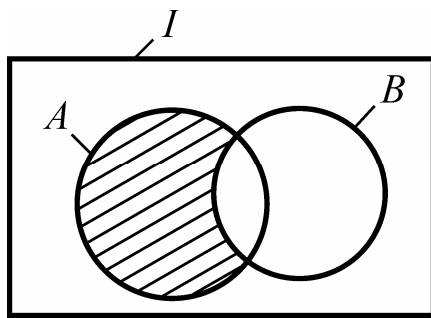
де \setminus – символ різниці; $A \setminus B$ читається: „різниця множин A і B ”.

Приклад. $(A = \{m, n, p, q, r\}, B = \{m, n, p\}) \Rightarrow C = A \setminus B = \{q, r\}$, а різниця $B \setminus A = \emptyset$.

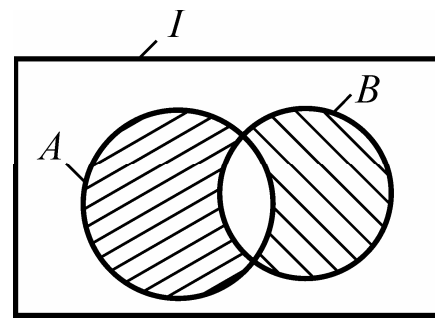
4. Симетричною різницею множин A і B називається множина C , яка визначається як об'єднання різниць $A \setminus B$ і $B \setminus A$ (рис. 6.1.3-б):

$$C = A \Delta B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A), \quad (6.1.13)$$

де Δ – символ симетричної різниці.



а)



б)

Рис. 6.1.3. Ейлерова діаграма: а) різниці; б) симетричної різниці множин

Спробуйте інакше представити у символічному запису симетричну різницю, аналізуючи рис. 6.1.3.

5. Доповненням множини A (до універсальної множини I) називається множина \bar{A} , яка визначається співвідношенням (рис. 6.1.4):

$$\bar{A} = I \setminus A, \quad (6.1.14)$$

де \bar{A} читається як „доповнення A ”.

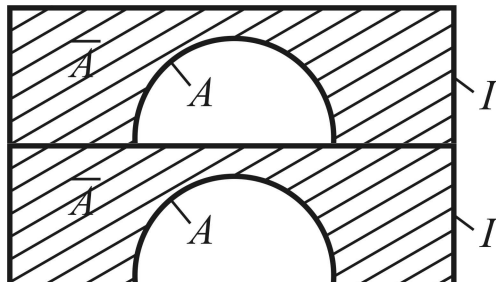


Рис. 6.1.4. Ейлерова діаграма доповнення множини

Інакше кажучи, доповнення множини – це операція, яка є окремим випадком різниці множин, тобто \bar{A} –

це множина, якій належать усі елементи універсума, за виключенням елементів множини A , і тільки вони.

Приклад. Нехай $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{3, 4, 6, 7\}$, $C = \{4, 5, 6\}$. Об'єднання цих множин приймемо за універсум: $I = A \cup B \cup C = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$. Жодна із множин A , B , C не є доповненням суми двох інших множин (*перевірте*). (Як ви гадаєте, за яких умов кожна із множин буде доповненням суми двох інших?)

6.2. Числові функції: основні означення, способи завдання

Змінні і сталі величини. Дослідження будь-якого процесу або явища навколишнього світу зводять здебільшого до вивчення тих чи інших, залежно від умов і поставлених цілей, його числових характеристик (величин), поміж якими у подальшому встановлюються, як правило, певні кількісні співвідношення. Для створення загальних теорій, застосовних до вивчення різноманітних величин, у математиці абстрагуються від конкретного змісту числової характеристики і всі величини незалежно від їхньої природи поділяють на *змінні* і *сталі*.

Величина, яка за даних умов набуває різних числових значень (лише одного значення), зветься **змінною (сталою) величиною**, або просто – **змінною (сталою)**. Здебільшого величини позначаються літерами латинського алфавіту (з індексами або без них) і, як правило, сталі – початковими (a , b , c тощо), змінні – кінцевими (x , y , z , ..., w); застосовується також грецька абетка.

Залежно від умов, які визначають протікання того чи іншого процесу, одна і та ж його характеристика може бути як змінною, так і сталою. *Наприклад*, об'єм виробництва продукції підприємством на протязі деякого проміжку часу.

Сталі величини, які не змінюються за будь-яких умов, називаються **абсолютними**, або **універсальними**. *Наприклад*, відношення довжини кола C до його діаметра d , тобто число $\pi = 3,1415\dots$, величина добутку 2×2 тощо.

Параметром називають величину, яка характеризує однотипні об'єкти (процеси, стани) у тому смислі, що кожна її вартість визначає деякий конкретний об'єкт. *Наприклад*, рівняння прямої $y = k \cdot x$ містить поточні координати точок прямої (змінні x , y) і параметр k , залежно від

значення якого отримуємо ту чи іншу пряму серед безлічі прямих, які проходять через початок координат. (*Обміркуйте*, параметр – це змінна чи стала?)

Сукупність (множина) усіх числових значень, що їх може набувати змінна величина x , називається **областю**, або **обсягом**, її **змінювання**, і позначається символом $D(x)$. На підставі цього означення стали розглядати як окремий випадок змінної, у якій область змінювання є одно-елементна множина. Змінна вважається **заданою**, якщо вказано обсяг її змінювання.

Змінна x називається **неперервною (дискретною)** змінною, якщо областю її змінювання $D(x)$ є відповідно неперервна (дискретна) множина. Усі проміжки числової осі (див. (6.1.5)) є областями змінювання неперервних змінних, а множини натуральних (\mathbf{N}), цілих (\mathbf{Z}), раціональних (\mathbf{Q}) чисел або їхні підмножини (скінченні чи нескінченні) є областями змінювання дискретних змінних.

Числові функції. Способи завдання. Досвід установлення кількісних співвідношень між реальними процесами навколишнього світу показує, що числові характеристики того чи іншого процесу здебільшого змінюються не незалежно одна від одної, а так, що зміна вартостей одних із них тягне за собою зміну вартостей інших. *Наприклад*, об'єм виробленої продукції залежить від продуктивності праці, професійний рівень працівника впливає на якість виробленої продукції і його заробітну платню, пройдений шлях визначається швидкістю руху матеріальної точки тощо.

Предмет математичного аналізу як математичної дисципліни якраз і полягає у вивченні кількісних співвідношень між величинами, які змінюються сумісно (у взаємозв'язку), абстрагуючись, звичайно, від їхнього конкретного змісту (абстракція від лат. *abstractio* – відокремлення).

Поняття „функція” є одним із основних понять математичного аналізу. Подамо означення функції спочатку для випадку сумісного змінювання двох змінних – x , y (узагальнення на випадок більшої кількості змінних розглядається у другій частині посібника).

Якщо кожному значенню змінної x із області її змінювання за деяким правилом чи законом f ставиться у відповідність єдина вартість змінної y , то кажуть, що між змінними x та y встановлено **функціональну залежність** (від лат. *functio* – виконання, здійснення), і пишуть $y = f(x)$;

читається: „ігрек дорівнює еф від ікс”. Змінну x звуть **аргументом**, або **незалежною змінною**, а y – **залежною змінною**, або **функцією** змінної x (або просто **функцією від x**).

Обсяг змінювання аргументу називають **областю визначення**, або **областю існування**, функції і позначають через $D(f)$; відповідний обсяг змінювання y – **областю значень** функції і позначають через $E(f)$.

Для позначення закону відповідності між аргументом і функцією можна застосовувати будь-яку букву латинського або грецького алфавітів (з індексами або без них): $y = F(x)$, $y = \varphi(x)$, $y = \psi(x)$ тощо; іноді для позначення закону і власне функції беруть ту ж саму літеру: $y = y(x)$.

При означенні поняття функції можна виходити із більш загальної точки зору, коли кожному значенню незалежної змінної x відповідає не одне, а декілька значень y (і навіть нескінченно багато!). У таких випадках функцію називають **багатозначною**. У математичному аналізі здебільшого уникають розгляду багатозначних функцій, і надалі говорячи про функцію, якщо не обумовлено супротивне, ми будемо розуміти однозначну функцію.

Окреме значення функції $y = f(x)$ при окремій (фіксованій) вартості аргументу, тобто $x = x_0 - const$, позначають символами:

$$y_0 = f(x_0), \quad f(x)|_{x=x_0}, \quad y = y(x_0), \quad y|_{x=x_0}.$$

Відзначимо, що окремі вартості $f(x)$, які відповідають різним значенням x , не обов'язково повинні бути різними; функція в усій області існування може набувати єдиного значення. Таку функцію (як і взагалі сталу) називають **сталою**: $y = c - const$.

Закон відповідності між аргументом і функцією подається різними способами. Існує три основних способи завдання функцій:

1. Аналітичний спосіб – це коли функція задається у вигляді аналітичного виразу (формули), де зазначено, які операції (дії) і в якому порядку слід виконати над вартостями змінної x (і, можливо, над сталими), щоб дістати відповідні значення функції. Функцію можна задати і у вигляді кількох формул; при цьому указується, на якій множині значень аргументу розглядається кожна формула. *Наприклад,*

$$f(x) = \begin{cases} x^2, & -\infty < x \leq 0; \\ 0, & 0 < x < 1; \\ 1/x^3, & 1 \leq x \leq 3. \end{cases}$$

Областю визначення цієї функції є нескінченний півінтервал: $D(f) = (-\infty, 3]$. Якщо функція задається формулою, і не зазначено область її існування, то під останньою розуміють множину всіх дійсних значень аргументу, для яких формула дає певне число; область вартостей функції визначається законом відповідності між незалежною і залежною змінними.

2. Табличний спосіб – це коли функціональна залежність зображується у вигляді таблиці: подається ряд вартостей незалежної змінної та відповідні цим вартостям значення функції. Такий підхід до завдання функції практикується у багатьох галузях знань (фізика, техніка, економіка, соціологія тощо), де залежність між величинами встановлюється експериментально або шляхом спостережень.

3. Графічний спосіб – це коли відповідність між незалежною змінною і функцією зображується за допомогою деякої лінії або дискретної множини точок, побудованих у декартовій системі координат. Цей спосіб застосовується при дослідженнях, пов'язаних з використанням самописних приладів (осцилографів, барографів, термографів тощо).

Множину всіх точок (x, y) площини xOy , координати яких задовольняють рівність $y = f(x)$, називають **графіком функції**.

Розроблені у математичному аналізі методи дослідження функцій найкраще пристосовані до аналітичного способу завдання функції, інші ж використовуються як допоміжні: графічний – для наочності, табличний – для зручності використання функцій, які часто зустрічаються в теорії і на практиці: тригонометричні, логарифмічні та ін.

Від аналітичного способу завдання функції легко перейти до табличного і графічного, але не навпаки: маючи таблицю чи графік важко, взагалі кажучи, знайти відповідну формулу (аналітичний вираз), хіба що наближено. Ця задача розв'язується в дисципліні „Чисельні методи” за допомогою засобів *інтерполяції* й *апроксимації* функцій.

Інтерполяція функцій (від лат. *interpolatio* – зміна, переробка) – це відшукування проміжних значень функції $y = f(x)$ в точках, які лежать між

точками $x_0 < x_1 < \dots < x_n$, за відомими її вартостями $y_i = f(x_i)$, $i = \overline{0, n}$. Якщо $x \notin [x_0, x_n]$, аналогічна процедура називається **екстраполяцією**.

Апроксимація функцій (від лат. *арпрохіто* – наближаюсь) – це заміна досліджуваних функцій іншими, більш простими і в тому чи іншому смислі близькими до вихідних (наприклад, заміна кривих ліній, близькими до них ламаними).

6.3. Основні елементарні функції й їхні графіки

Вивчені у середній школі функції складають множину функцій, які називають **основними елементарними функціями**. Згадаємо їх.

1. Степенева функція: $y = x^\alpha$, де α – дійсне число ($\alpha \in \mathbf{R}$). Область існування і область значень функції залежить від α (рис. 6.3.1).

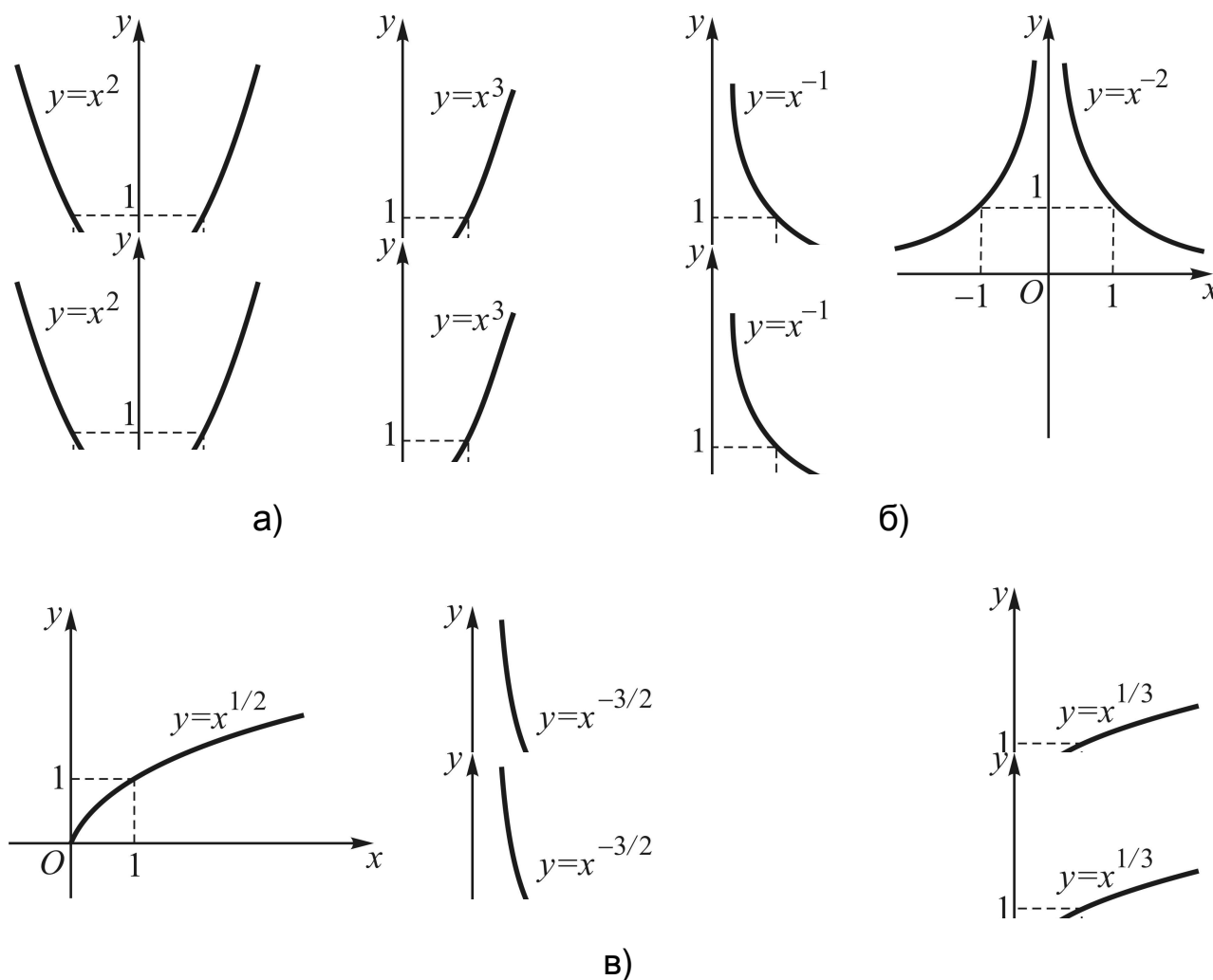


Рис. 6.3.1. Графіки степеневі функції з показниками степеня:
 а) цілими додатними; б) цілими від'ємними; в) дробовими

2. Показникова функція: $y = a^x$, де a – дійсне число ($a > 0$, $a \neq 1$). Область визначення функції $D(y) = (-\infty, +\infty)$, а область значень $E(y) = (0, +\infty)$, тобто графік розташований над віссю Ox (рис. 6.3.2).

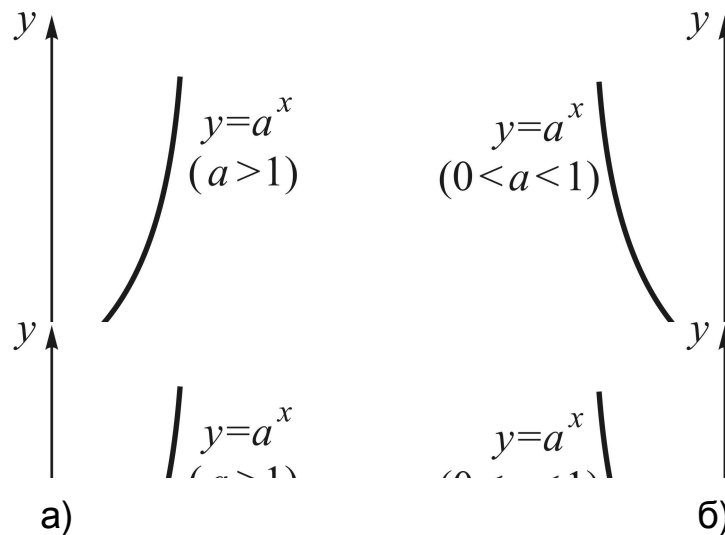


Рис. 6.3.2. Графіки показникової функції з основою степеня:
а) більшою одиниці; б) меншою одиниці

3. Логарифмічна функція: $y = \log_a x$ ($a > 0$, $a \neq 1$). Область визначення $D(y) = (0, +\infty)$, область значень $E(y) = (-\infty, +\infty)$, $(1, 0)$ – точка перетину графіків функції з віссю абсцис з будь-якою основою. Графіки логарифмічних функцій, залежно від основи a , зображено на рис. 6.3.3.

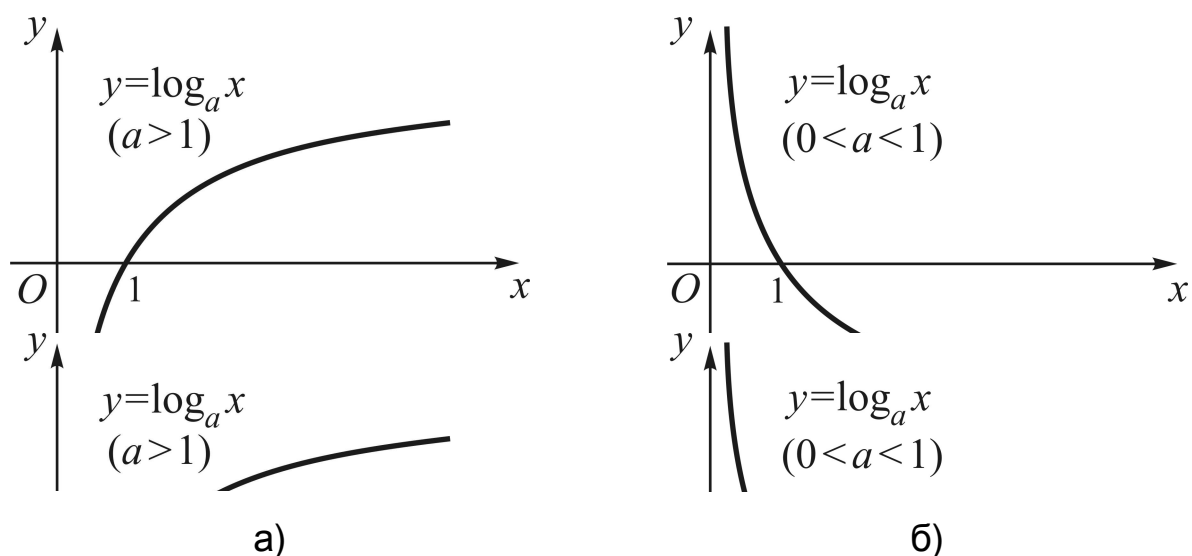


Рис. 6.3.3. Графіки логарифмічної функції з основою логарифма:
а) більшою одиниці; б) меншою одиниці

4. Тригонометричні функції. До них відносяться функції $y = \sin x$, $y = \cos x$, $y = \operatorname{tg} x$, $y = \operatorname{ctg} x$:

а) $y = \sin x$. $D(y) = (-\infty, +\infty)$, область значень $E(y) = [-1, 1]$, точки перетину графіка з віссю Ox : $x = k\pi$, $k \in \mathbf{Z}$ (рис. 6.3.4-а);

б) $y = \cos x$. Область визначення $D(y) = (-\infty, +\infty)$, область значень $E(y) = [-1, 1]$, точки перетину графіка з віссю Ox : $x = (2k + 1)\pi/2$, $k \in \mathbf{Z}$ (рис. 6.3.4-б);

в) $y = \operatorname{tg} x$. Область визначення $D(y) = \mathbf{R} \setminus \{x \mid x = \pi/2 + \pi k, k \in \mathbf{Z}\}$, область значень $E(y) = (-\infty, +\infty)$, точки перетину графіка з віссю Ox : $x = k\pi$, $k \in \mathbf{Z}$ (рис. 6.3.4-в);

г) $y = \operatorname{ctg} x$. Область визначення $D(y) = \mathbf{R} \setminus \{x \mid x = \pi k, k \in \mathbf{Z}\}$, область значень $E(y) = (-\infty, +\infty)$, точки перетину графіка з віссю Ox : $x = (2k + 1)\pi/2$, $k \in \mathbf{Z}$ (рис. 6.3.4-г).

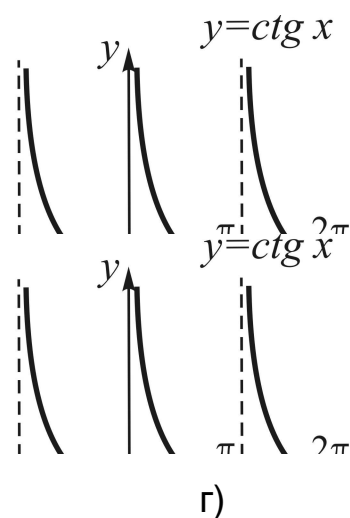
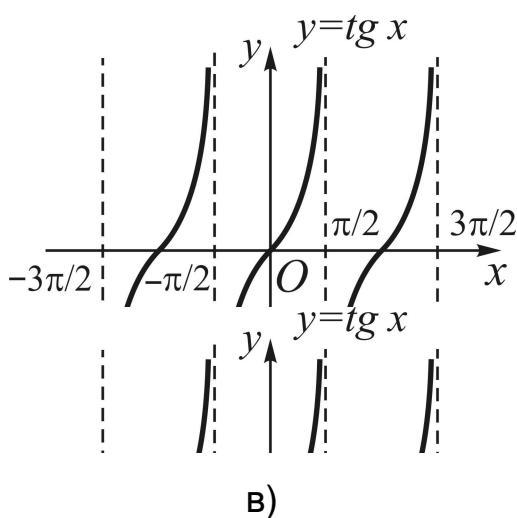
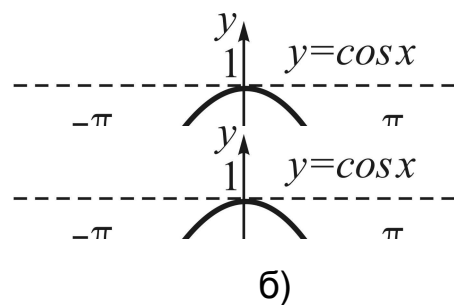
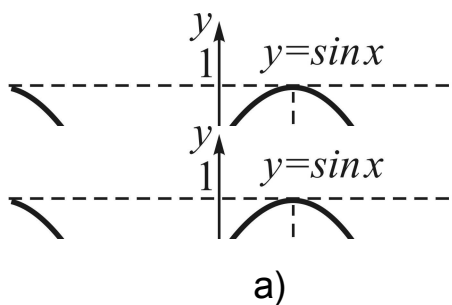


Рис. 6.3.4. Графіки тригонометричних функцій:
а) „синуса”; б) „косинуса”; в) „тангенса”; г) „котангенса”

5. Оборнені тригонометричні функції. До них відносяться функції $y = \arcsin x$, $y = \arccos x$, $y = \arctg x$, $y = \operatorname{arcctg} x$:

а) $y = \arcsin x$. Область визначення $D(y) = [-1, 1]$, область значень $E(y) = [-\pi/2, \pi/2]$, графік функції проходить через точку $O(0, 0)$, яка є його центром симетрії (рис. 6.3.5-а);

б) $y = \arccos x$. Область визначення $D(y) = [-1, 1]$, область значень $E(y) = [0, \pi]$, графік функції проходить через точку $(0, \pi/2)$, яка є його центром симетрії (рис. 6.3.5-б);

в) $y = \arctg x$. Область визначення $D(y) = (-\infty, +\infty)$, область значень $E(y) = (-\pi/2, \pi/2)$, графік функції проходить через точку $O(0, 0)$, яка є його центром симетрії (рис. 6.3.5-в);

г) $y = \operatorname{arcctg} x$. Область визначення $D(y) = (-\infty, +\infty)$, область значень $E(y) = [0, \pi]$, графік функції проходить через точку $(0, \pi/2)$, яка є його центром симетрії (рис. 6.3.5-г).

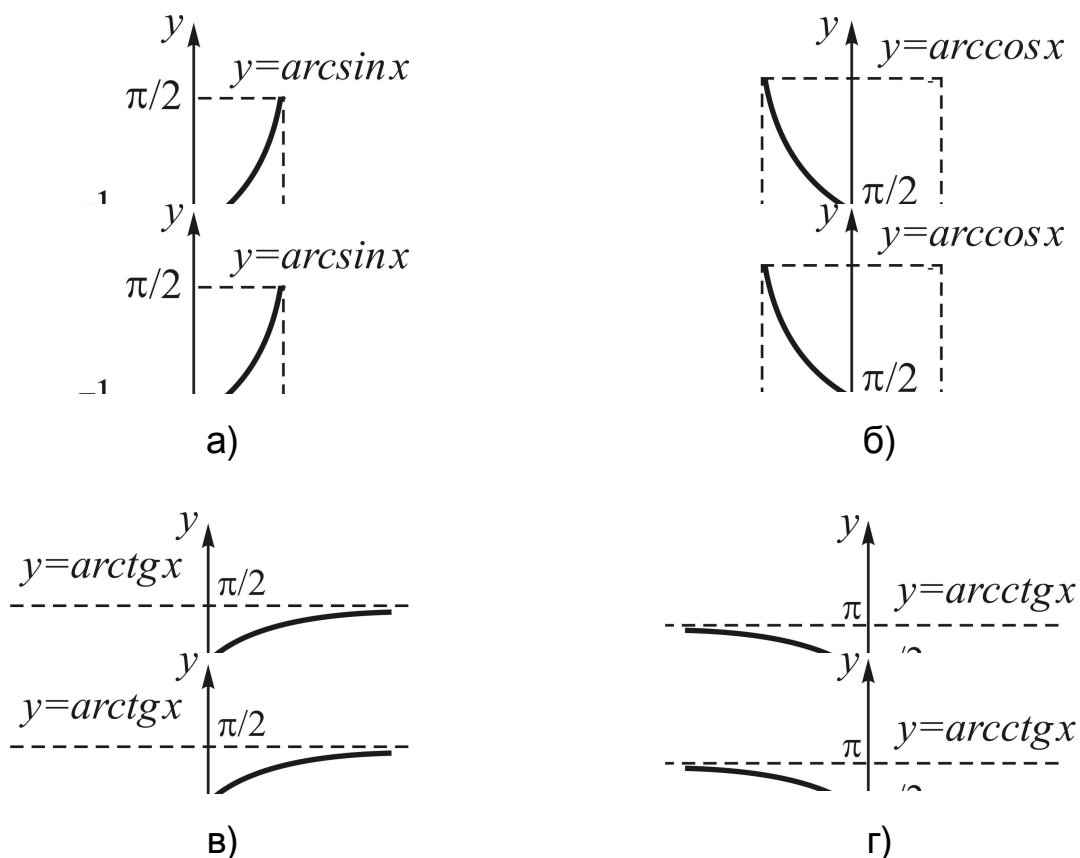


Рис. 6.3.5. Графіки оборнених тригонометричних функцій:

а) „арксинуса”; б) „арккосинуса”;
в) „арктангенса”; г) „арккотангенса”

Завдання кожної з наведених функцій $y = f(x)$ здійснюється однією формулою і так, що значення її при будь-якому $x \in D(f)$ може бути знайдене за допомогою скінченного числа відповідних операцій над вартостями аргументу. Функція, що наведена як *приклад* при опису аналітичного способу завдання не є основною елементарною функцією.

6.4. Елементарні функції: означення, класифікація

Із основних елементарних функцій за допомогою арифметичних дій (додавання, віднімання, множення, ділення) можна утворювати інші, більш складні за будовою функції. *Наприклад*, $y = x^2 - 3 \sin x$.

Інший спосіб утворення більш складних функцій пов'язаний з поняттям „**суперпозиція функцій**” (від лат. superpositio – накладання) – це коли замість аргументу даної функції підставляється деяка функція від іншого аргументу; результат суперпозиції називають **складеною**, або **зложеною**, **функцією**, або **функцією від функції**:

$$(y = f(u), u = \varphi(x)) \Rightarrow y = f[\varphi(x)] - \text{зложена функція,}$$

де змінні u і x – відповідно **проміжний** і **основний** аргументи;

$u = \varphi(x)$ ($y = f(u)$) – **внутрішня** (зовнішня) функція.

Наприклад, $y = \sqrt[3]{\sin x^2} \Rightarrow (y = \sqrt[3]{u}, u = \sin v, v = x^2)$; отже, функція створена за допомогою двох суперпозицій.

Основні елементарні функції та функції, що утворюються з них за допомогою чотирьох арифметичних дій і суперпозицій, застосованих скінченне число разів, називаються **елементарними функціями**.

Класифікація функцій залежно від виду виразів, які зображують функцію, визначається такими типами:

1. Цілі раціональні функції:

$$y = a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n, \quad (6.4.1)$$

де a_0, a_1, \dots, a_n – дійсні числа.

Такі функції називають **многочленами**, або **поліномами**, і часто записують за спадаючими степенями змінної x :

$$y = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_{n-1}x + a_n. \quad (6.4.2)$$

Частинними випадками цілих раціональних функцій є: **лінійна функція** ($y = a_0 + a_1x$, або $y = kx + b$), графік якої – пряма лінія; **квадратична функція** ($y = a_0 + a_1x + a_2x^2$, або $y = ax^2 + bx + c$), яка описується квадратним тричленом; її графік – парабола. (*Обміркуйте, чи можна розглядати сталу величину, як многочлен нульового степеня.*)

2. Дробово-раціональні функції – функції, які є відношенням двох многочленів:

$$y = \frac{a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n}{b_0 + b_1x + \dots + b_mx^m}, \quad (6.4.3)$$

де $a_0, a_1, \dots, a_n; b_0, b_1, \dots, b_m$ – дійсні числа; $n \in \mathbf{N} \cup \{0\}$, $m \in \mathbf{N}$.

Такі функції називають ще **раціональними алгебраїчними дробами**.

3. Ірраціональні функції – функції, в яких аргумент знаходиться під знаком кореня (радикала). *Наприклад*, $y = \sqrt[3]{x}$, $y = 3\sqrt{x+2} - 5x^2$.

Цілі раціональні, дробово-раціональні, ірраціональні функції називаються **алгебраїчними функціями**.

4. Трансцендентні функції (від лат. transcendo – переступати, виходити за межі чогось) – це усі інші функції, які не є алгебраїчними. Так, тригонометричні функції (прямі й обернені), показникова і логарифмічна функції є прикладами трансцендентних функцій.

Класифікація функцій залежно від форми завдання:

1. Явна форма завдання – це коли функціональна залежність між змінними x (аргументом) і y (функцією) зображується співвідношенням, розв'язаним відносно y : $y = f(x)$, де f – закон, за яким кожному значенню x ставиться у відповідність певне значення змінної y (див. п. 6.2). Усі наведені вище функції подавалися в явній формі.

2. Неявна форма завдання – це коли функціональна залежність між змінними x і y зображується співвідношенням, не розв'язаним відносно y : $F(x, y) = 0$, де F – закон, яким пов'язані змінні x і y .

Рівняння $F(x, y) = 0$ задає однозначну функцію лише тоді, коли множина впорядкованих пар чисел (x, y) , які є розв'язком даного рівняння, така, що будь-якому значенню x_0 у цій множині відповідає не більше однієї пари (x_0, y_0) з першим елементом x_0 . *Наприклад*, рівняння $2x - y - 5 = 0$ задає однозначну функцію, а рівняння $x^2 + y^2 - 4 = 0$ – двозначну, бо значенню, скажімо, $x_0 = 1$ відповідає дві пари чисел: $(1, \sqrt{3})$, $(1, -\sqrt{3})$.

Алгебраїчні функції, задані у неявній формі (або коротко – неявно) мають вигляд:

$$p_0(x)y^n + p_1(x)y^{n-1} + \dots + p_{n-1}(x)y + p_n(x) = 0, \quad (6.4.4)$$

де $n \in \mathbf{N}$, а $p_i(x)$ $i = \overline{0, n}$ – цілі раціональні функції.

Наприклад, $y^3 - xy + x^2 - 1 = 0$. Тут $F(x, y) = y^3 - xy + x^2 - 1$;
 $p_0(x) = 1$, $p_1(x) = 0$, $p_2(x) = -x$, $p_3(x) = x^2 - 1$.

Від явної форми завдання легко перейти до неявної:

$$y = f(x) \Leftrightarrow \underbrace{y - f(x)}_{F(x, y)} = 0,$$

але не навпаки. *Наприклад*, функцію $x + y - \cos y = 0$ неможливо подати явно (чому?). Але якщо в ролі незалежної змінної розглядати x , це зробити дуже просто: $x = \cos y - y$.

Зауважимо, що до неявного завдання функції у так названій *стандартній* формі: $F(x, y) = 0$, легко зводяться функції, задані у вигляді рівності з правою частиною, відмінною від нуля: $F_1(x, y) = F_2(x, y)$, де F_1 , F_2 – закони, якими пов'язані змінні x , y . *Укажіть*, як це зробити (сформулюйте відповідне правило) і як виглядатиме $F(x, y)$.

4. Параметрична форма завдання – це коли функціональна залежність між змінними x і y визначається за допомогою двох, явно заданих функцій: $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$, від допоміжної змінної – **параметра** – t , який приймає значення з деякого проміжку $\langle \alpha, \beta \rangle$. Такою формою завдання користуються тоді, коли безпосереднє встановлення зв'язку між

змінними x і y у вигляді одного рівняння або дуже важке (й громіздке), або незручне для застосування. До параметричного завдання функції часто вдаються у механіці, причому роль параметра t відіграє час.

Рівняння кола (див. (3.1.3)) є *прикладом* параметричного завдання двозначної функції: кожному значенню x відповідає два значення y (запишіть, які).

Класифікація функцій залежно від властивостей.

Нехай функція $y = f(x)$ задана на інтервалі (a, b) , який цілком належить області її визначення: $(a, b) \subset D(f)$.

1. Монотонність. Функція $y = f(x)$ називається **зростаючою (спадною)** на інтервалі (a, b) , якщо більшому значенню аргументу відповідає більше (менше) значення функції. Нехай x_1, x_2 – довільні значення аргументів, які задовольняють умову: $a < x_1 < x_2 < b$, тоді наведені означення у символах подаються так:

$$\begin{aligned} f(x) \uparrow \text{ на } (a, b) &\Rightarrow x_2 > x_1 \Rightarrow f(x_2) > f(x_1) \\ (f(x) \downarrow \text{ на } (a, b) &\Rightarrow x_2 > x_1 \Rightarrow f(x_2) < f(x_1)), \end{aligned} \quad (6.4.5)$$

де стрілки є *символами зростання (спадання)*.

Прикладом зростаючої (спадної) на усій числовій осі є показникова функція $y = a^x$ (див. рис. 6.3.2) з основою $a > 1$ ($a < 1$).

Якщо функція на інтервалі $a < x < b$ зростаюча або спадна, то її називають **монотонною** (однотонною) на цьому інтервалі, а сам інтервал називається **інтервалом монотонності**. *Проаналізуйте* самостійно на монотонність логарифмічну функцію $y = \log_a x$ (див. рис. 6.3.3).

Розрізняють також монотонно **незростаючі** (монотонно **неспадні**) на інтервалі функції:

$$\begin{aligned} f(x) \searrow - \text{ незростаюча } &\Rightarrow x_2 > x_1 \Rightarrow f(x_2) \leq f(x_1), \\ (f(x) \nearrow - \text{ неспадна } &\Rightarrow x_2 > x_1 \Rightarrow f(x_2) \geq f(x_1)). \end{aligned} \quad (6.4.6)$$

Наприклад, функція $f(x) = \begin{cases} -x, & x < 0, \\ 0, & x \geq 0 \end{cases}$ незростаюча на усій числовій осі. (*Наведіть* згідно з (6.4.6) словесне означення таких функцій.)

2. Обмеженість та необмеженість. Функція $y = f(x)$ називається **обмеженою знизу**, якщо існує таке число m , що для будь-якого значення x із області існування $D(f)$ значення функції перевищує m :

$$f(x) - \text{обмежена знизу} \Leftrightarrow \exists m \forall x \in D(f): f(x) > m. \quad (6.4.7)$$

Аналогічно:

$$f(x) - \text{обмежена зверху} \Leftrightarrow \exists M \forall x \in D(f): f(x) < M. \quad (6.4.8)$$

Наведіть згідно з (6.4.8) словесне означення таких функцій.

Функція $y = f(x)$ називається **обмеженою**, якщо вона одночасно є і обмеженою знизу, і обмеженою зверху:

$$f(x) - \text{обмежена} \Leftrightarrow \exists m \exists M \forall x \in D(f): m < f(x) < M. \quad (6.4.9)$$

Графіки обмежених функцій розташовані вище прямої $y = m$ і нижче прямої $y = M$. *Прикладами* таких функцій є $y = \sin x$, $y = \cos x$ (див. рис. 6.3.4) і обернені тригонометричні функції (див. рис. 6.3.5).

А як розташовані на координатній площині графіки обмежених знизу і обмежених зверху функцій? *Знайдіть* приклади таких функцій (серед основних елементарних).

Функції, які не є обмеженими, називаються (природно) **необмеженими функціями**:

$$f(x) - \text{необмежена} \Leftrightarrow \bar{\exists} m \bar{\exists} M \forall x \in D(f): m < f(x) < M. \quad (6.4.10)$$

Такі функції поділяють на **необмежені знизу** і **необмежені зверху**. Як вправу, *дайте* словесні означення цих функцій, *зобразіть* їх у символічній формі, *наведіть* приклади.

3. Парність та непарність. Функція $y = f(x)$ називається **парною**, якщо: область її існування симетрична відносно початку координат; для будь-яких, протилежних за знаком значень аргументу, значення функції рівні між собою:

$$f(x) - \text{парна} \Leftrightarrow (x \in D(f) \Rightarrow -x \in D(f) \wedge f(-x) = f(x)). \quad (6.4.11)$$

Графік парної функції симетричний відносно осі Oy .

До парних функцій належать, *наприклад*, степеневі функції з парним показником степеня: $y = x^{2n}$, $n \in \mathbf{N}$, функція $y = \cos x$.

Функція $y = f(x)$ називається **непарною**, якщо: область її існування симетрична відносно початку координат; для будь-яких, протилежних за знаком значень аргументу, значення функції рівні за модулем, але протилежні за знаком:

$$f(x) - \text{непарна} \Leftrightarrow (x \in D(f) \Rightarrow -x \in D(f) \wedge f(-x) = -f(x)). \quad (6.4.12)$$

Графік непарної функції симетричний відносно початку системи координат – точки O .

До непарних функцій належать, *наприклад*, степеневі функції з непарним показником степеня: $y = x^{2n-1}$, $n \in \mathbf{N}$; тригонометричні функції $y = \sin x$, $y = \operatorname{tg} x$, $y = \operatorname{ctg} x$; обернені тригонометричні функції $y = \arcsin x$, $y = \operatorname{arctg} x$ (*переконайтеся за їхніми графіками*).

Функції, які не є парними або непарними, називають **функціями загального виду**, або **ні парними, ні непарними**. *Наприклад*, $y = a^x$.

4. Періодичність. Функція $y = f(x)$ називається **періодичною**, якщо для будь-якого x із області визначення функції існує дійсне число $T \neq 0$ – **період функції** – таке, що: 1) значення аргументу $x - T$ і $x + T$ також належать області існування функції; 2) виконується рівність $f(x \pm T) = f(x)$:

$$\begin{aligned} y = f(x) - \text{періодична функція} &\Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \forall x \in D(f) \exists T (T \in \mathbf{R}, T \neq 0): \begin{cases} 1) (x \pm T) \in D(f); \\ 2) f(x \pm T) = f(x). \end{cases} \end{aligned} \quad (6.4.13)$$

Якщо $f(x)$ має період T , то вона має нескінченно багато періодів (*на якій підставі?*), але звичайно розглядають **головний** – найменше число з усіх додатних періодів (якщо таке існує).

Прикладами періодичних функцій є тригонометричні функції: так $y = \sin x$ і $y = \cos x$ мають період 2π , а $y = \operatorname{tg} x$ і $y = \operatorname{ctg} x$ – період π .

Відзначимо: якщо функція $f(x)$ має період T , то функція $f(kx)$, де $k - \text{const}$, теж періодична з періодом T/k .

5. Оборненість. Функція $y = f(x)$ називається **оборотною**, якщо вона приймає кожне своє значення один раз:

$$f(x) - \text{оборотна} \Leftrightarrow \forall x \in D(f) \exists! y: y = f(x), \quad (6.4.14)$$

де квантор існування зі знаком оклику – $\exists!$ – читається: „існує і єдине”.

Це означає, що за відомим значенням величини y можна відновити, і до того ж єдину, вартість аргументу x . *Наприклад:*

$$y = \frac{1}{x} \quad (x \neq 0) \Rightarrow x = \frac{1}{y} \quad (y \neq 0);$$

$$y = \frac{x}{x+1} \quad (x \neq -1) \Rightarrow x = \frac{y}{1-y} \quad (y \neq 1).$$

Функція $y = x^2$ (і загалом парна функція) на області визначення $D(f) = \mathbf{R}$, не є оборотною, бо кожне значення y приймається двічі, для двох, протилежних за знаком, значень x : $x = \pm x_0 \Rightarrow y = x_0^2$. Але якщо її розглядати на півосях: $(-\infty, 0]$, $[0, +\infty)$, то відповідно $x = -\sqrt{y}$, $x = \sqrt{y}$.

Нехай функція $y = f(x)$ визначена в області $D(f)$, а $E(f)$ – область її значень. Функція $x = \varphi(y)$, яка кожному y – елементу із області значень $E(f)$ – ставить у відповідність елемент x із області існування $D(f)$, називається **оберненою функцією** (відносно) до $f(x)$.

Для позначення оберненої функції домовились (щоб не було плутанини в позначеннях) незалежну змінну позначати через x , а саму функцію – через y ; ознакою ж того, що розглядається обернена до $f(x)$ функція, є символ f^{-1} : $y = f^{-1}(x)$.

Функції $y = f(x)$ і $y = f^{-1}(x)$ називають **взаємно оберненими**; при цьому вихідна функція – функція, для якої відшукується обернена, називається **прямою** функцією. Графіки прямої і оберненої функцій симетричні відносно бісектриси першого і третього координатних кутів: $y = x$, бо у взаємно обернених функцій x і y немовби міняються ролями, а точки (x, y) і (y, x) якраз і володіють такою властивістю. Монотонно зростаюча й монотонно спадна функції мають обернену (наведіть обґрунтування).

У кожному конкретному випадку для обернених функцій застосовують спеціальні символи, *наприклад*: $y = \log_a x$ – пряма функція, а $y = a^x$ – обернена до неї функція; якщо ж $y = \arccos x$ є прямою, тоді $y = \cos x$ – обернена до неї.

У природничих науках використовуються функції, в яких незалежною змінною є час: $y = y(t)$ – **часова функція**. Особливе значення такі функціональні залежності мають у техніці зв'язку, де вони використовуються для передачі інформації; їх стали називати **сигналами**, або **сигнальними функціями**. Узагалі термін „сигнал” (signal, від лат. signum – знак) використовується в широкому смисловому діапазоні.

Під ним розуміють і *технічний засіб* для передачі, перетворення та використання інформації – електричний, магнітний, оптичний сигнал, – і *смисловий зміст* певного фізичного стану або процесу, як, наприклад, сигнали світлофора, звукові попереджувальні сигнали та ін. Всі ці поняття об'єднує кінцеве призначення сигналів.

Сигнал – це певні відомості, повідомлення, інформація про які-небудь процеси, стани, фізичні величини об'єктів матеріального світу, виражені у формі, зручній для передачі, обробки, зберігання і використання цих відомостей. Часова функція тлумачиться як одна із **математичних моделей сигналів**.

Важливе значення мають періодичні сигнали: *гармонійні* і *полігармонійні*. **Гармонійні сигнали** (синусоїдальні і косинусоїдальні), описуються такими (знайомими) формулами:

$$\begin{aligned} s(t) &= A \sin(2\pi f_0 t + \varphi) = A \sin(\omega_0 t + \varphi) \quad \text{або} \\ s(t) &= A \cos(\omega_0 t + \phi), \end{aligned} \tag{6.4.15}$$

де A , f_0 , ω_0 , φ – сталі, які виконують роль інформаційних параметрів:

A – амплітуда сигналу;

f_0 – циклічна частота в герцах;

$\omega = 2\pi f_0$ – кутова частота;

φ (ϕ) – початкові фазові кути в радіанах.

При $\varphi = \phi - \pi/2$ обидві функції із (6.4.13) описують один і той самий сигнал (*поясніть, чому*).

Полігармонійні сигнали описуються сумою n ($n \in \mathbf{N}$) гармонійних коливань і складають найбільш поширену групу періодичних сигналів:

$$s(t) = \sum_{k=0}^n A_k \sin(2\pi f_k t + \varphi_k) \quad \text{або} \quad (6.4.16)$$

$$s(t) = \sum_{k=0}^n A_k \cos(2\pi f_k t + \phi_k).$$

На рис. 6.4.1 наведено відрізок періодичної сигнальної функції, яка отримана сумуванням постійної складової і трьох гармонійних коливань з різними значеннями частоти та початкової фази коливань.

Математична модель таких коливань має вигляд:

$$s(t) = \sum_{k=0}^3 A_k \cos(2\pi f_k t + \phi_k), \quad (6.4.17)$$

де $A_k = 5, 3, 4, 7$ – амплітуди гармонік;

$f_k = 0, 40, 80, 120$ – частоти в герцах;

$\phi_k = 0, -0.4, -0.6, -0.8$ – фазові кути в радіанах, $k = \overline{0,3}$.

Період і частоту полігармонійного коливання, яке називають **повним**, позначають відповідно через T_p , f_p . Для коливань (6.4.17) маємо:

$T_p = 0,025$ с (рис. 6.4.1), частота – $f_p = 1/T_p = 40$ Гц.

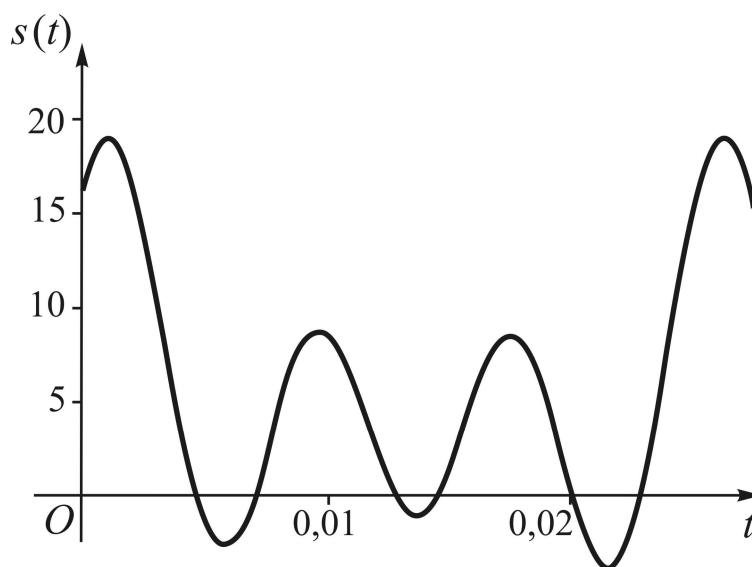


Рис. 6.4.1. **Модель сигналу**

6.5. Задача установлення області визначення функції

Область існування функції $y = f(x)$ як множина точок числової осі може бути числовим проміжком (скінченним чи нескінченним) або їхнім об'єднанням, скінченною чи нескінченною множиною окремих точок та ін. Область визначення $D(f)$ будь-якої елементарної функції, поданої в аналітичному вигляді, установлюють, відштовхуючись від областей існування основних елементарних функцій. Наведемо основні обмеження, які слід урахувати при розв'язанні задачі відшукування $D(f)$.

Перетворення на нуль знаменника. Значення x , при яких знаменник дробу перетворюється на нуль, не належить області існування, бо за такої умови неможливо указати певне значення функції (*на якій підставі?*). Наприклад, функція $y = 1/(1 - \sin 2x)$ не визначена в точках, у яких $1 - \sin 2x = 0$. Тобто області існування не належать точки $x = \pi/4 + \pi k$, де $\forall k \in \mathbf{Z}$. Отже, $D(f) = \mathbf{R} \setminus \{x \mid x = \pi/4 + \pi k, k \in \mathbf{Z}\}$.

Добування кореня парного степеня. При коренюванні з парним степенем ті значення x , що надають підкореневому виразу від'ємних значень, не належать області існування функції (оскільки значення функції повинні бути дійсними). Наприклад, для функції $y = \sqrt[4]{1 - x^2}$ маємо: $D(f) = \{x \mid 1 - x^2 \geq 0\} = [-1, 1]$.

Вирази, що містять логарифми. Значення x , при яких вираз, що стоїть під знаком логарифма, стає від'ємним або перетворюється на нуль, не належить області існування функції (*чому саме?*). Наприклад, функція $y = \log_{1/2}(2 - x)$ визначена за умови $2 - x > 0$, тобто $D(f) = (-\infty, 2)$. Значення x , при яких основа логарифма стає від'ємною, рівною 0 або 1, також не належать області існування (за означенням логарифма). Наприклад, функція $y = \log_{x^2} 5$ існує на всій числовій осі, за винятком трьох точок $x = 0$, $x = \pm 1$, тобто область її визначення є об'єднанням чотирьох інтервалів:

$$D(f) = \{x \mid x^2 \neq 0, x^2 \neq 1\} = (-\infty, -1) \cup (-1, 0) \cup (0, 1) \cup (1, +\infty).$$

Вирази, що містять „арксинуси” або „арккосинуси”. Значення x , при яких вирази, що знаходяться під знаком названих функцій, стають

за модулем більше одиниці, не належать області існування, оскільки вираз для функції губить смисл (на якій підставі?). Наприклад, функція $y = \arcsin(x-3)$ визначена тільки на відрізку, що описується нерівністю $|x-3| \leq 1 \Leftrightarrow -1 \leq x-3 \leq 1$, або $2 \leq x \leq 4$.

Зауважимо, що при відшуванні $D(f)$ необхідно виходити з початкового виразу для функції; різноманітні перетворення, які на перший погляд здаються законними, часто призводять до помилок. Наприклад, функція $y = \frac{x^2-1}{x-1}$ після скорочення дробу на $(x-1)$ дає функцію $y = x+1$, у якої область існування – вся числова вісь. Проте, вихідна функція не існує у точці $x = 1$.

Часто не розрізняють функції $f_1(x) = (\sqrt{x})^2$ і $f_2(x) = \sqrt{x^2}$, хоча області існування у них різні (обміркуйте): $D(f_1) = [0, +\infty)$, $D(f_2) = \mathbf{R}$. Аналогічно для функцій $f_3(x) = a^{\log_a x}$ і $f_4(x) = x$.

Помилково також ототожнюють функції $y = \operatorname{tg} x$ і $z = 1/\operatorname{ctg} x$, адже $D(y) = \{x \mid x \neq \pi/2 + \pi k\}$, $D(z) = \{x \mid x \neq \pi k/2\} \quad \forall k \in \mathbf{Z}$.

Знання областей існування основних елементарних функцій – ключ до відшування області існування будь-якої елементарної функції, бо це дає можливість скласти систему нерівностей відносно змінної x , розв'язок якої і є областю існування функції.

Розглянемо більш складний ілюстративний *приклад* і разом наведемо загальний порядок відшування $D(f)$:

$$y = \frac{\sqrt{x^2 - x - 6}}{\lg(x+5)} + \arccos \frac{1}{2}(x-1).$$

1⁰. *Аналізуємо* структуру (будову) аналітичного виразу з метою установити, які умови повинні задовольняти його складові для існування функції, і *записуємо* відповідну систему нерівностей:

$$\begin{cases} x^2 - x - 6 \geq 0, & (\text{підкореневий вираз повинен бути невід'ємним}) \\ x + 5 > 0, & (\text{логарифм існує тільки для додатних чисел}) \\ \lg(x+5) \neq 0, & (\text{знаменник дробу не може бути рівним нулеві}) \\ 0,5 |x-1| \leq 1. & (\text{„косинус” за модулем не перевищує одиниці}). \end{cases}$$

2⁰. Розв'язуємо отриману систему нерівностей, користуючись геометричною інтерпретацією розв'язків кожної з них. Перетин множин відповідних значень змінної x визначає шукану область:

$$\begin{cases} x \leq -2 \vee x \geq 3, \\ x > -5, \\ x \neq -4 \ (x < -4 \vee x > -4), \\ -1 \leq x \leq 3, \end{cases} \Rightarrow D(f) = \{3\}.$$

Відповідь: задана функція існує лише в одній точці $x = 3$ ($f(3) = 0$).

Запитання для самодіагностики засвоєння матеріалу

Відповіді на всі запитання сформулюйте словесно, запишіть в символічній формі, обґрунтуйте (на підставі означень, теорем, правил, формул тощо), наведіть відповідні конкретні приклади.

1. Що розуміють під множиною, елементом множини? Розтлумачте смисл символу належності.
2. За якої умови кажуть, що множину задано? Укажіть способи задання множин і наведіть приклади.
3. Чому не можна ідентифікувати математичне поняття „множина” з буденним уявленням про множину?
4. Що називають підмножиною даної множини?
5. Які множини називають рівними?
6. Яку множину називають універсальною (універсумом)?
7. У яких випадках кажуть, що між множинами має місце взаємно однозначна відповідність (бієкція)? Наведіть приклади бієкції.
8. Яка множина називається скінченною, нескінченною, зліченною, незліченною, дискретною, неперервною?
9. Дайте означення і наведіть геометричну ілюстрацію теоретико-множинних операцій: об'єднання, перетину, різниці, симетричної різниці, доповнення.
10. Опишіть в символах множини чисел: натуральних, цілих, раціональних, ірраціональних, дійсних, комплексних.
11. Які множини називають числовими проміжками?
12. Які величини називають змінними, сталими?

13. Що розуміють під абсолютними сталими?
14. Дайте означення поняття „параметр”.
15. Що таке область змінювання змінної величини? Чи можна розглядати сталу, як окремий випадок змінної?
16. У чому принципова відмінність між неперервними і дискретними змінними?
17. Яку залежність між змінними величинами називають функціональною?
18. Як називаються незалежна змінна і залежна змінна, якщо йдеться про функціональну залежність?
19. Що розуміють під областю визначення (існування) і областю значень функції?
20. Дайте означення однозначної і багатозначної функцій.
21. Опишіть способи завдання функцій: аналітичний, табличний, графічний.
22. Що таке суперпозиція функцій? Яку функцію називають складеною (зложеною)?
23. Для яких функцій вводяться поняття: „проміжний і основний аргументи”; „внутрішня і зовнішня функції”? Стлумачте їх.
24. Як пов’язані між собою поняття: „основна елементарна функція” і „елементарна функція”?
25. Що таке: ціла раціональна функція, дробово-раціональна функція, ірраціональна функція, трансцендентна функція?
26. Які існують форми завдання функцій? Чи завжди можна здійснити перехід від однієї форми до іншої?
27. Які різновиди мають монотонні функції?
28. Дайте означення обмежених і необмежених функцій.
29. Чи може одна і та ж функція бути парною і непарною?
30. Які функції називаються періодичними? Який період такої функції називають головним?
31. Яку функцію називають оборотною? Для якої функції існує обернена?
32. Як розташовані на площині відносно один одного графіки прямої і оберненої функцій?
33. Які обмеження слід враховувати при відшуванні $D(f)$?
34. Який загальний порядок відшукування області існування функції?

Задачі та вправи

1. Установити, які з наступних тверджень є вірними і чому:

- а) $b \in \{a, 7, b\}$; б) $3 \in \{7, 1, \{2, 3\}\}$;
в) $x \in \{\sin x, \ln(e^x), \sqrt{x}\}$; г) $\{c, d\} \in \{a, \{c, d\}, b\}$;
д) $\{y\} \in \{x, \{x, y\}, y\}$; е) $\{5, 7\} \in \{\{7, 5\}\}$.

2. З'ясувати, чи є рівними задані множини:

- а) $A = \{4, 2, 3, 1\}$, $B = \{1, 3, 2, 4\}$; б) $K = \{a, c, b\}$, $L = \{\{a\}, c, b\}$;
в) $H = \{\{\alpha, \beta\}, \{\beta, \gamma\}\}$, $G = \{\alpha, \beta, \gamma\}$;
г) $S = \{y, x\}$, $C = \{\{x, y\}\}$; д) $V = \{2, \{2, 3\}, 3\}$, $W = \{2, 3\}$;
е) $P = \{x \in \mathbf{N} \mid x^3 - 5x^2 + 6x = 0\}$, $M = \{2, 3\}$;
є) \emptyset , $\{\emptyset\}$.

3. Установити, яка з множин є підмножиною іншої:

- а) $A = \{2, 4, 6\}$, $B = \{7, 6, 5, 4, 3, 2, 1\}$;
б) $C = \{a, b, c\}$, $D = \{\{a\}, \{b, c\}\}$;
в) $G = \{(x, y) \in \mathbf{R} \mid x^2 + y^2 \leq 1\}$, $H = \{(x, y) \in \mathbf{R} \mid |x| \leq 2 \wedge |y| \leq 2\}$;
г) $M_1 = A \cup (B \setminus C)$, $M_2 = (A \cup B) \setminus C$.

4. Описати задану множину переліком усіх її елементів:

- а) $A = \{x \in \mathbf{R} \mid 2x^2 - 7x + 6 = 0\}$; б) $A = \{x \in \mathbf{R} \mid x + 1/x \leq 2, x > 0\}$;
в) $A = \{x \in \mathbf{Z} \mid 1/9 \leq 3^x \leq 27\}$; г) $A = \{x \in \mathbf{N} \mid 2 \leq \log_2 x \leq 3\}$.

5. Указати явно елементи кожної з множин A , B , C (якщо вони є), де $A = \{x \mid x \in \mathbf{R} \wedge (x^3 - 10x^2 + 16x = 0)\}$, $B = \{x \mid x = 3^n - 1 \wedge x \leq 50, n \in \mathbf{N}\}$, $C = \{x \mid x = 4n \wedge x < 30 \wedge x/3 \notin \mathbf{N}, n \in \mathbf{N}\}$. Знайти результати виконання наступних операцій: $A \cap B$, $A \setminus B$, $C \setminus A$, $A \cup B \cup C$, $C \setminus (B \cup A)$, $(A \cup B) \setminus (A \cap B)$, $A \cap (B \setminus C)$, $(C \cap B) \setminus A$, $C \Delta A$.

6. Знайти всі корені рівняння:

а) $f(x) = f(-2)$, якщо $f(x) = 2x^3 - 5x^2 - 23x$;

б) $f(x) = f\left(\frac{x+8}{x-1}\right)$, якщо $f(x) = x^2 - 12x + 3$.

7. Знайти область визначення функції $D(y)$:

1) $y = \sqrt{x^2 + 2x - 3}$;

2) $y = \lg(3 - x)$;

3) $y = \sqrt[3]{5x^2 - x^3}$;

4) $y = \frac{1}{x^5 - 16x}$;

5) $y = 5^{x^2 - 3}$;

6) $y = \sqrt{1 - \sqrt{x}}$;

7) $y = \arccos \frac{2x - 3}{5}$;

8) $y = \arcsin \sqrt{\frac{1 - x^2}{2}}$;

9) $y = \ln \sin(x - 3) + \sqrt{16 - x^2}$;

10) $y = \frac{1}{\sqrt{\sin x}} + \sqrt[3]{\sin x}$;

11) $y = \frac{5}{\sqrt[3]{2x - x^2}} - 7 \cos 2x$;

12) $y = e^{\sqrt{x}} \cdot \log_2(2 - 3x)$.

8. Знайти область значень функції $E(y)$:

1) $y = x^2 + 4x + 1$;

2) $y = 2^{x^2}$;

3) $y = 3 - 5 \cos x$;

4) $y = \frac{1}{x} + 4$;

5) $y = \frac{1}{\pi} \operatorname{arctg} x$;

6) $y = \sqrt{5 - x} + 2$.

9. Визначити, які із заданих функцій є парними, непарними, загального виду:

1) $f(x) = 2x^4 - 3x^2 + 1$;

2) $f(x) = x^6 + 2x$;

3) $f(x) = x^5 + \frac{x^3}{3} - x$;

4) $f(x) = \cos x + |x|$;

5) $f(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$;

6) $f(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$;

7) $f(x) = \sin x - 3x^2$;

8) $f(x) = 3 \cos 2x \cdot \sin x$;

9) $f(x) = \ln \frac{1+x}{1-x}$;

10) $f(x) = 2x^3 \sin x$.

10. З'ясувати, які із заданих функцій є періодичними, і знайти їхній найменший додатний період T , якщо він існує:

1) $f(x) = 3 \sin 5x$; 2) $f(x) = |\cos x|$; 3) $f(x) = \sin \frac{1}{x}$;

4) $f(x) = \operatorname{tg} \sqrt{x}$; 5) $f(x) = \cos^2 4x$; 6) $f(x) = 3 \operatorname{tg} \frac{x}{2} + 2 \operatorname{tg} \frac{x}{3}$;

7) $f(x) = 2 \cos x - 3 \cos 2x + 4 \cos 3x$.

11. Записати в явному вигляді функцію y , яку задано неявно:

1) $x^2 - y^2 = 4$; 2) $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$; 3) $3^{xy} = 4$;

4) $\lg x + \lg(y+1) = 2$; 5) $(1+x) \cos y - x^2 = 0$.

12. Визначити функцію $x = \varphi(y)$, обернену до заданої функції, та знайти область її існування:

1) $y = x^2 + 2x + 3$; 2) $y = \frac{1-x}{1+x}$, $x \neq -1$; 3) $y = \sqrt[3]{x^2 + 1}$;

4) $y = 3 - \ln(x-5)$; 5) $y = 4 \arcsin \sqrt{1-x^2}$; 6) $y = \frac{2^x}{1+2^x}$.

13. Звести параметрично задану функцію до явного вигляду:

1) $x = 3t$, $y = 6t - t^2$; 2) $x = \cos t$, $y = \sin 2t$;

3) $x = t^3 + 1$, $y = t^2$; 4) $x = \operatorname{tg} t$, $y = \sin 2t + 2 \cos 2t$;

5) $x = \varphi - \sin \varphi$, $y = 1 - \cos \varphi$.

14. Навести приклад функції (якщо така існує), заданої однією формулою, область визначення якої містить: а) одну точку; б) дві точки; в) множину всіх цілих чисел.

15. Навести приклад функції (якщо така існує), заданої однією формулою, область значень якої містить: а) одну точку; б) дві точки; в) множину всіх цілих чисел.

16. Навести приклад функції $f(x)$ (якщо така існує), для якої:
а) $D(f) = E(f)$; б) $D(f) \supset E(f)$; в) $D(f) \subset E(f)$.

17. Чи існують функції $f_1(x)$ і $f_2(x)$, такі, що $E(f_1(x))=E(f_2(x))=\mathbf{R}$, для яких: а) $E(f_1(x)+f_2(x))=\{1\}$; б) $E(f_1(x)\cdot f_2(x))=\{2\}$? Якщо „так”, то навести приклад таких функцій.

18. Довести, що:

- а) сума, різниця та добуток двох парних функцій є парна функція;
- б) добуток двох непарних функцій є парна функція;
- в) сума двох непарних функцій є непарна функція;
- г) добуток парної функції з непарною є непарна функція.

19. Чи існує функція $f(x)$ ($D(f)=\mathbf{R}$), яка є і парною, і непарною одночасно?

20. Нехай функція $f(x)$ є періодичною з періодом T . Довести, що функція $f(kx+b)$, де $k \neq 0$, також є періодичною з періодом T/k .

21. Нехай функції $f_1(x)$ і $f_2(x)$ періодичні з періодами T_1 і T_2 відповідно. Довести, що будь-яке додатне число, кратне T_1 і T_2 , є періодом функцій $f_1 \pm f_2$, $f_1 \cdot f_2$.

22. Чи існують функції, обернені самі до себе? Якщо „так”, то навести приклад таких функцій.

Відповіді

1. Вірними є твердження: а), в), г), е).

2. а) $A=B$; б) $A \neq B$; в) $H \neq G$; г) $S \neq C$; д) $V \neq W$; е) $P \neq M$; є) не є рівними.

3. а) $A \subset B$; б) $C \not\subset D$, $D \not\subset C$; в) $G \subset H$; г) $M_1 \supset M_2$.

4. а) $A=\{3/2, 2\}$; б) $A=\{1\}$; в) $A=\{-1, 0, 1, 2, 3\}$; г) $A=\{4, 5, 6, 7, 8\}$.

5. $A=\{0, 2, 8\}$, $B=\{2, 8, 26\}$, $C=\{4, 8, 16, 20, 28\}$, $A \cap B=\{2, 8\}$, $A \setminus B=\{0\}$, $C \setminus A=\{4, 16, 20, 28\}$, $A \cup B \cup C=\{0, 2, 4, 8, 16, 20, 26, 28\}$, $C \setminus (B \cup A)=\{4, 16, 20, 28\}$, $(A \cup B) \setminus (A \cap B)=\{0, 26\}$, $A \cap (B \setminus C)=\{2\}$, $(C \cap B) \setminus A=\emptyset$, $C \Delta A=\{0, 2, 4, 16, 20, 28\}$.

6. а) $\{-2, -1/2, 5\}$; б) $\{-2, 2, 4, 10\}$.

7. 1) $D(y)=(-\infty; -3] \cup [1; +\infty)$; 2) $D(y)=(-\infty; 3)$; 3) $D(y)=(-\infty; +\infty)$;

4) $D(y) = (-\infty; -2) \cup (-2; 0) \cup (0; 2) \cup (2; +\infty)$; 5) $D(y) = \mathbf{R}$; 6) $D(y) = [0; 1]$;
 7) $D(y) = [-1; 4]$; 8) $D(y) = [-1; 1]$; 9) $D(y) = (3 - 2\pi; 3 - \pi) \cup (3; 4]$;
 10) $D(y) = (2k\pi; (2k + 1)\pi)$, $k \in \mathbf{Z}$; 11) $D(y) = (-\infty; 0) \cup (0; 2) \cup (2; +\infty)$;
 12) $D(y) = [0; 2/3]$.

8. 1) $E(y) = [-3; +\infty)$; 2) $E(y) = [1; +\infty)$; 3) $E(y) = [-2; 8]$;
 4) $E(y) = (-\infty; 4) \cup (4; +\infty)$; 5) $E(y) = (-1/2; 1/2)$; 6) $E(y) = [2; +\infty)$.

9. 1) парна; 2) загального виду; 3) непарна; 4) парна; 5) парна;
 6) непарна; 7) загального виду; 8) непарна; 9) непарна; 10) парна.

10. 1) $T = \frac{2\pi}{5}$; 2) $T = \pi$; 3) неперіодична; 4) неперіодична; 5) $T = \frac{\pi}{4}$;
 6) $T = 6\pi$; 7) $T = 2\pi$.

11. 1) $y = \pm \sqrt{x^2 - 4}$; 2) $y = \pm \frac{b}{a} \sqrt{a^2 - x^2}$; 3) $y = \frac{\log_3 4}{x}$; 4) $y = \frac{100}{x} - 1$;
 5) $y = \arccos \frac{x^2}{1+x}$.

12. 1) $x = -1 \pm \sqrt{y-2}$ ($2 \leq y < +\infty$); 2) $x = \frac{1-y}{1+y}$ ($y \neq -1$); 3) $x = \pm \sqrt{y^3 - 1}$
 ($1 \leq y < +\infty$); 4) $x = 5 + e^{3-y}$ ($-\infty < y < +\infty$); 5) $x = \pm \cos \frac{y}{4}$ ($-\infty < y < +\infty$);
 6) $x = \log_2 \frac{y}{1-y}$ ($0 < y < 1$).

13. 1) $y = 2x - \frac{x^2}{9}$; 2) $y = 2x \cdot \sqrt{1-x^2}$; 3) $y = \sqrt[3]{(x-1)^2}$;
 4) $y = \frac{1+x-x^2}{1+x^2}$; 5) $x = \arccos(1-y) \mp \sqrt{2y-y^2}$.

14. а) $y = \arcsin(x^2 + 1)$; б) $y = \arccos(2 - x^2)$; в) $y = \sqrt{-|\sin \pi x|}$.

15. а) $y = C$ ($C - \text{const}$); б) $y = \frac{x}{|x|}$; в) $y = x + \sqrt{-|\sin \pi x|}$.

16. а) $y = x$; б) $y = e^x$; в) $y = \ln x$.

17. а) так, наприклад, $f_2(x) = -f_1(x) + 1$ ($x \in \mathbf{R}$); б) так, наприклад, $f_1(x) = x^2 + 1$, $f_2(x) = \frac{2}{x^2 + 1}$ ($x \in \mathbf{R}$).

19. $f(x) = 0$.

22. Так, наприклад: функції x і $1/x$, функції $\frac{x+1}{x-1}$ і $\frac{x-1}{x+1}$,

Ключові терміни

Множина (порожня, непорожня, універсальна, скінченна, нескінченна, зліченна, незліченна, числова, дискретна, неперервна), елемент, підмножина, рівні множини, бієкція, операції над множинами (об'єднання, перетин, різниця, симетрична різниця, доповнення (до універсума)), діаграми Ейлера, проміжки, окіл точки, змінні і сталі величини, абсолютні сталі, параметр, область змінювання, неперервна і дискретна змінні, функціональна залежність, аргумент (незалежна змінна), залежна змінна (функція), область визначення (існування), область значень, способи завдання (аналітичний, табличний, графічний), графік функції, суперпозиція функцій, проміжний і основний аргументи, функція (багатозначна, складена, внутрішня, зовнішня, основна елементарна, елементарна, ціла раціональна, дробово-раціональна, ірраціональна, алгебраїчна, трансцендентна, оборотна, обернена), форма завдання (явна, неявна, параметрична), монотонність, обмеженість та необмеженість, парність та непарність, періодичність.

Резюме

Висвітлено основні поняття, пов'язані з елементарними функціями. Розглянуто способи завдання функцій. Наведено графіки основних елементарних функцій. Здійснено класифікацію елементарних функцій залежно від: виду виразів, які зображують функцію; форми завдання; властивостей.

Література: [3; 4; 7; 9; 10; 13; 14; 22; 28].

7. Границя функції, нескінченно малі й великі функції

Нескінченно малі величини не піддаються ніякій уяві!

Фома Євграфович Топорище

Якщо хто-небудь хоче коротким і виразним словом визначити суть математики, той повинен сказати, що це наука про нескінченність.

Анрі Пуанкаре

Мета: опанування основним методом розв'язання задач математичного аналізу – методом границь.

Питання теми:

- 7.1. Границя функції натурального аргументу.
- 7.2. Практичні рекомендації щодо відшукування границь.
- 7.3. Границя функції неперервного аргументу.
- 7.4. Порівняння н/м, застосування еквівалентних н/м до обчислення границь.

Компетентності, що формуються після вивчення теми:

Загальнонаукова: володіння методом границь дослідження функціональних залежностей.

Загальнопрофесійна: підготовленість до аналізу за допомогою граничного переходу функціональних зв'язків у інформаційних системах.

Спеціалізовано-професійна: уміння впроваджувати метод границь в моделювання процесів управління інформаційними системами.

7.1. Границя функції натурального аргументу

Числові послідовності (ч/п): основні означення, арифметичні операції, деякі типи ч/п

Нехай x – змінна величина (кількісна характеристика якогось явища чи процесу), яка набуває значення з деякої множини $D(x)$ – області її змінювання. Якщо кожному з чисел натурального ряду $1, 2, 3, \dots, n, \dots$ поставити у відповідність за деяким законом (або правилом) f певне значення змінної x , то отримаємо сукупність чисел $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n, \dots$, яка називається **числовою послідовністю (ч/п)**.

Позначається ч/п символом $\{x_n\}$, де $x_n = f(n)$ – формула **загального члена** (елемента) ч/п, яка дозволяє за відомим номером елемента підрахувати його значення.

Ч/п вважається **заданою**, якщо відома формула її загального члена x_n , або описано словесно закон-правило, за допомогою якого визначається будь-який член послідовності. Часто застосовують **рекурентну форму** завдання ч/п – це коли кожний наступний член послідовності, починаючи з деякого номера n , подається через один або декілька попередніх членів ч/п (від лат. recurrens – повторюваний, що повторюється).

Приклади завдання ч/п:

$\{x_n\} = \{a_1 + d(n-1)\}$: $a_1, a_1 + d, a_1 + 2d, \dots, a_1 + d(n-1), \dots$ – арифметична прогресія з першим членом a_1 і різницею d , рекурентна форма завдання має вигляд: $x_{n+1} = x_n + d$, де $x_1 = a_1$;

$x_{n+2} = x_{n+1} + x_n$, де $x_1 = 1, x_2 = 1$, – послідовність чисел Фібоначчі (за прізвиськом славнозвісного італійського математика Леонарда Пізанського (1180 – 1240));

$\{x_n\} = \{2n-1\}$: $1, 3, 5, \dots, 2n-1, \dots$ – послідовність непарних чисел;

$\{x_n\} = \{2\}$: $2, 2, 2, 2, \dots, 2, \dots$ – ч/п, кожний член якої стала 2.

Якщо $x_n = f(n) = c - const$, то ч/п називають **стаціонарною**.

Оскільки окремий член ч/п x_n визначається своїм номером n (як незалежною змінною), то кажуть, що змінна x є **функцією натурального аргументу**: $x = f(n)$. Часто ч/п $\{x_n\}$ ототожнюють з її загальним членом і замість символу $\{x_n\}$ пишуть x_n .

Ч/п називають також **дискретною**, або **перервною**, змінною (від лат. discretus – поділений, перервний): вона приймає свої значення немовби „стрибками”, подібно показанням електронного годинника.

Арифметичні операції над ч/п зводяться до відповідних дій над їхніми членами з однаковими номерами:

$$1) \{z_n\} = \{x_n\} \pm \{y_n\} \Leftrightarrow z_n = x_n \pm y_n;$$

$$2) \{z_n\} = \{x_n\} \cdot \{y_n\} \Leftrightarrow z_n = x_n \cdot y_n,$$

зокрема, $\{z_n\} = c \cdot \{x_n\} \Leftrightarrow z_n = c \cdot x_n \quad (c - \text{const});$

$$3) \{z_n\} = \frac{\{x_n\}}{\{y_n\}} \Leftrightarrow z_n = \frac{x_n}{y_n} \quad (y_n \neq 0 \quad \forall n \in \mathbf{N}).$$

Сформулюйте відповідні правила: для того щоб знайти ..., треба

Залежно від того, які за абсолютною величиною – модулем – значення можуть набувати елементи ч/п, їх поділяють на *обмежені* та *необмежені*. Ч/п x_n називається **обмеженою**, якщо існує число $M > 0$ таке, що всі її вартості за модулем не перевищують M :

$$x_n - \text{обмежена ч/п} \Leftrightarrow \exists M > 0 \quad \forall x_n \in D(x) : |x_n| \leq M.$$

Змінна x_n називається **необмеженою**, якщо для будь-якого числа $M > 0$ можна знайти таке значення $x_n \in D(x)$, яке за модулем перевищує число M :

$$x_n - \text{необмежена ч/п} \Leftrightarrow \forall M > 0 \quad \exists x_n \in D(x) : |x_n| > M.$$

Серед усіляких ч/п виділяють клас **монотонних** послідовностей:

$$\{x_n\} \nearrow - \text{монотонно зростаюча} \Leftrightarrow x_{n+1} > x_n \quad \forall n \in \mathbf{N};$$

$$\{x_n\} \searrow - \text{монотонно незростаюча} \Leftrightarrow x_{n+1} \leq x_n \quad \forall n \in \mathbf{N};$$

$$\{x_n\} \searrow - \text{монотонно спадна} \Leftrightarrow x_{n+1} < x_n \quad \forall n \in \mathbf{N};$$

$$\{x_n\} \nearrow - \text{монотонно неспадна} \Leftrightarrow x_{n+1} \geq x_n \quad \forall n \in \mathbf{N}.$$

Сформулюйте відповідні означення: ч/п називається ..., якщо наступний член x_{n+1} ... попереднього x_n .

Нескінченно малі: означення, властивості

Нехай x_n – дискретна змінна, областю змінювання якої є нескінченна множина $D(x)$; ε – довільна додатна стала ($0 < \varepsilon - \text{const}$), а $N = N(\varepsilon)$ – натуральне число, залежне від величини ε .

Якщо для будь-якого $\varepsilon > 0$ існує $N(\varepsilon)$ таке, що всі члени ч/п з номерами, більшими ніж $N(\varepsilon)$, за модулем менші числа ε , то кажуть, що

ч/п x_n **при змінюванні стає і залишається** за модулем менше будь-якого, наперед заданого, числа $\varepsilon > 0$:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N(\varepsilon) : \forall n > N(\varepsilon) \Rightarrow |x_n| < \varepsilon \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 : \underline{|x_n|} < \varepsilon,$$

де підкреслення читається: „при змінюванні стає і залишається”.

Змінна x_n називається **нескінченно малою величиною**, або просто **нескінченно малою (н/м)**, якщо при своєму змінюванні вона *стає і залишається* за модулем менше будь-якого, наперед заданого, числа $\varepsilon > 0$:

$$x_n - \text{нескінченно мала} \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 : \underline{|x_n|} < \varepsilon. \quad (7.1.1)$$

У подальшому викладі відомостей про ч/п будемо користуватися більш лаконічною символікою, задіяною у (7.1.1), а не „мовою ε , N ”.

У **геометричному смислі** умова $\underline{|x_n|} < \varepsilon$, означає, що при необмеженому зростанні n ($n \rightarrow \infty$) усі значення x_n (крім, можливо, скінченного числа точок) потрапляють у інтервал $(-\varepsilon, \varepsilon)$, тобто $-\varepsilon < x_n < \varepsilon$, який є **ε -околом нуля** (рис. 7.1.1).

Наприклад, розглянемо ч/п, значення елементів якої описуються геометричною прогресією з першим членом $x_1 = 0,1$ і знаменником $q = 0,1$: $x_n = 10^{-n}$, $\forall n \in \mathbf{N}$: $10^{-1}, 10^{-2}, 10^{-3}, \dots$.

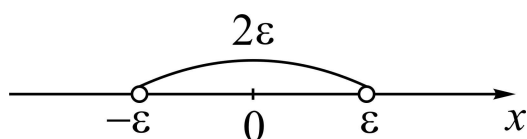


Рис. 7.1.1. **ε -Окл точки 0**

При довільному виборі ε , відштовхуючись від умови: $10^{-n} < \varepsilon$, знаходимо, що для всіх $n > -\lg \varepsilon$ нескінченне число вартостей змінної опиняться в інтервалі $(-\varepsilon, \varepsilon)$, яким би малим він не був.

Якщо ч/п x_n є н/м, то кажуть, що вона у процесі змінювання **прямує до нуля**, або – **граничним значенням (границею) змінної x є нуль**:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0 \Leftrightarrow x - \text{н/м}, \quad (7.1.2)$$

де $n \rightarrow \infty$ читається: „ n необмежено збільшується”, „ n прямує до нескінченності”;

$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ читається: „границя ч/п x_n , коли n прямує до нескінченності”
(\lim від лат. *limes* – границя).

Щоб відрізнити н/м від інших змінних, прийнято позначати їх першими літерами грецької абетки: $\alpha_n, \beta_n, \gamma_n$ тощо.

Теорема 7.1.1 (арифметичні властивості нескінченно малих).
Справедливі твердження:

- 1) сума (різниця) двох н/м є н/м: $\alpha_n \pm \beta_n = \gamma_n$;
- 2) сума обмеженої змінної x_n (або *const*) і н/м є обмеженою змінною: $x_n + \alpha_n = y_n$ – обмежена змінна;
- 3) добуток двох н/м є н/м: $\alpha_n \cdot \beta_n = \gamma_n$;
- 4) добуток обмеженої змінної x_n із н/м є н/м: $x_n \cdot \alpha_n = \beta_n$.

(Наведіть словесне формулювання цих властивостей.)

Справедливість 1) – 4) випливає із означень (7.1.1) і обмеженої змінної на підставі властивостей абсолютних значень величин (модулів):

$$|A + B| \leq |A| + |B|, \quad |A \cdot B| = |A| \cdot |B|.$$

Д о в е д е н н я.

1. Покажемо, що $\alpha_n + \beta_n \in \text{н/м}$: $\forall \varepsilon > 0: |\alpha_n + \beta_n| < \varepsilon$, тобто при змінюванні *стає і залишається* за модулем менше будь-якого, наперед заданого, числа $\varepsilon > 0$.

Дійсно, за умовою $\forall \varepsilon_1 > 0: |\alpha_n| < \varepsilon_1$ і $\forall \varepsilon_2 > 0: |\beta_n| < \varepsilon_2$. Виберемо $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \varepsilon/2$, тоді $\forall \varepsilon > 0: |\alpha_n| < \varepsilon/2, |\beta_n| < \varepsilon/2$. Для суми н/м маємо: $\forall \varepsilon > 0: |\alpha_n + \beta_n| \leq |\alpha_n| + |\beta_n| < \varepsilon/2 + \varepsilon/2$, тобто $\forall \varepsilon > 0: |\alpha_n + \beta_n| < \varepsilon$, при цьому нерівність справджується починаючи з більшого із номерів N_1, N_2 , для яких $|\alpha_n| < \varepsilon/2, |\beta_n| < \varepsilon/2$.

Для різниці н/м $\{\alpha_n\} - \{\beta_n\}$ окремого доведення не знадобиться, бо її можна подати як суму н/м $\{\alpha_n\}, \{-\beta_n\}$.

2. За означеннями обмеженої змінної та н/м (див. (7.1.1)) маємо дві (справедливі!) нерівності: $\forall x_n \in D(x): |x_n| \leq M$ і $\forall \varepsilon > 0: |\alpha_n| < \varepsilon$. Виберемо $\varepsilon > 0$ таке, що усі члени послідовності α_n , починаючи з першого

включно ($\forall n \geq 1$), за модулем не перевищують ε , тоді для суми $\alpha_n + x_n$ маємо: $|\alpha_n + x_n| \leq |\alpha_n| + |x_n| \leq \varepsilon + M = M_1$. Отже, усі члени ч/п $x_n + \alpha_n = y_n$ не перевищують числа M_1 : $\forall y_n \in D(x) \cup D(\alpha): |y_n| \leq M_1$, а значить $\{y_n\}$ – обмежена ч/п. (Пропонуємо випадок $\{x_n\} = \{c\}$ розглянути самостійно.)

3. Якщо $\alpha_n, \beta_n \in \text{н/м}$, то згідно з означенням $\forall \varepsilon_1 > 0: |\alpha_n| < \varepsilon_1$ і $\forall \varepsilon_2 > 0: |\beta_n| < \varepsilon_2$. Виберемо $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \sqrt{\varepsilon}$, тоді $\forall \varepsilon > 0: |\alpha_n| < \sqrt{\varepsilon}, |\beta_n| < \sqrt{\varepsilon}$. Для добутку н/м маємо: $\forall \varepsilon > 0: |\alpha_n \cdot \beta_n| = |\alpha_n| \cdot |\beta_n| < \sqrt{\varepsilon} \cdot \sqrt{\varepsilon}$, тобто $\forall \varepsilon > 0: |\alpha_n \cdot \beta_n| < \varepsilon$, при цьому нерівність справджується починаючи з більшого із номерів N_1, N_2 , для яких $|\alpha_n| < \sqrt{\varepsilon}, |\beta_n| < \sqrt{\varepsilon}$.

4. За означеннями обмеженої змінної та н/м $\forall x_n \in D(x): |x_n| \leq M$ і $\forall \varepsilon_1 > 0: |\alpha_n| < \varepsilon_1$. Покажемо, що для будь-якого $\varepsilon > 0$ має місце нерівність: $|x_n \cdot \alpha_n| < \varepsilon$. За властивостями нерівностей отримуємо:

$$\left(|x_n| \leq M, |\alpha_n| < \varepsilon_1 \right) \Rightarrow |x_n| \cdot |\alpha_n| < M \cdot \varepsilon_1.$$

Оскільки ε_1 довільне, виберемо його рівним ε/M ; тоді приходимо до нерівності $|x_n| \cdot |\alpha_n| < \varepsilon$. За властивістю добутку модулів $|x_n \cdot \alpha_n| < \varepsilon$ $\forall \varepsilon > 0$, а це й означає, що змінна $x_n \cdot \alpha_n = \beta_n$ – нескінченно мала.

Зокрема, якщо $x_n = c - \text{const}$, то $c \cdot \alpha_n = \beta_n$ (доведіть це).

Пропонуємо сформулювати властивості н/м, залучаючи поняття „прямує до нуля”, і записати їх в символах.

Зауваження:

властивості суми (різниці як алгебраїчної суми) і добутку двох н/м поширюються на будь-яке скінченне число доданків і співмножників;

число нуль (0) – константу – розглядають як н/м, яка приймає одне і те ж значення: $\alpha_n = 0, 0, 0, \dots, 0, \dots$; таку н/м називають **стаціонарною**:

$$\forall \varepsilon > 0: |0| = 0 < \varepsilon.$$

Нескінченно великі: означення, властивості, зв'язок з нескінченно малими

Як своєрідну протиприроду н/м вивчають також *нескінченно великі величини*. Нехай x_n – дискретна змінна, а $M - \text{const}$ ($M \in \mathbf{R} \wedge M > 0$).

Змінна x_n називається **нескінченно великою величиною**, або просто **нескінченно великою (н/в)**, якщо при своєму змінюванні вона *стає і залишається* за модулем більше будь-якого, наперед заданого, числа $M > 0$:

$$x_n - \text{нескінченно велика} \Leftrightarrow \forall M > 0: |x_n| > M. \quad (7.1.3)$$

У **геометричному смислі** умова $|x_n| > M$, означає, що при змінюванні n ($n \rightarrow \infty$) усі значення x_n (крім, можливо, скінченного числа точок) потрапляють і залишаються зовні M -околу нуля, тобто виконуються нерівності $x < -M \vee x > M$ (рис. 7.1.2).

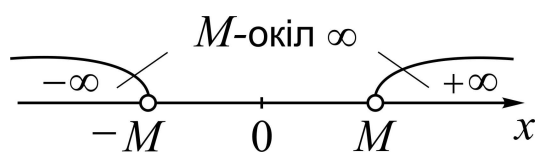


Рис. 7.1.2. M -окол нескінченності
(∞) та $-\infty$ і $+\infty$

Нескінченні інтервали $(-\infty, -M)$, $(M, +\infty)$ та їхнє об'єднання, себто $(-\infty, -M) \cup (M, +\infty)$, називають відповідно **M -околом мінус нескінченності, плюс нескінченності та нескінченності** (див. рис. 7.1.2).

Наприклад, розглянемо змінну, що описується послідовністю $x_n = 10^n$, $\forall n \in \mathbf{N}$: $10, 10^2, 10^3, \dots$. При довільному виборі M , відштовхуючись від умови $10^n > M$, знаходимо, що для всіх $n > \lg M$ нескінченне число вартостей змінної опиняться поза інтервалом $(-M, M)$, яким би великим він не був.

Якщо змінна x_n є н/в, то кажуть, що вона у процесі змінювання **прямує до нескінченності**, або – її **граничним значенням (границею) є нескінченність**, або – **має нескінченну границю**:

$$x_n \text{ прямує до нескінченності } (x_n \rightarrow \infty) \Leftrightarrow x_n - \text{н/в}. \quad (7.1.4)$$

У випадках, коли значення н/в x_n при своєму змінюванні потрапляють в інтервал $(-\infty, -M)$ або $(M, +\infty)$ і залишаються у ньому, то кажуть відповідно, що змінна x_n прямує до „**мінус нескінченності**” ($x_n \rightarrow -\infty$), „**плюс нескінченності**” ($x_n \rightarrow +\infty$). Нагадаємо, що символи $-\infty$, $+\infty$ тлумачаться як **невластиві дійсні числа**. „Невластиві” тому, що їм на числовій осі нема відповідних точок: $-\infty$ ($+\infty$) – число, яке менше (більше) будь-якого певного дійсного числа a , тобто $\forall a \in \mathbf{R}: -\infty < a \wedge a < +\infty$. Найпростіша дискретна н/в – це змінна, вартостями якої є натуральні числа, взяті у природному порядку: $x = n \quad \forall n \in \mathbf{N}: x_n = 1, 2, 3, 4, \dots$, тобто $n \rightarrow +\infty$. Усі інші дискретні н/в є функціями від неї.

Наприклад, $u_n = 1 - n^2$, $v_n = (-1)^n \cdot \lg n$ – н/в; за властивостями степеневі та логарифмічної функцій маємо: $u_n \rightarrow -\infty$, $v_n \rightarrow \infty$.

Нехай x_n , y_n – дві н/в (для виразності будемо зображати їх граничними значеннями: $\infty, \pm\infty$), а z_n – обмежена змінна. Із означень (7.1.3) і обмеженої змінної випливають такі **арифметичні властивості н/в**:

$$1) \text{ сума двох н/в, однакових за знаком, є н/в: } \begin{cases} (+\infty) + (+\infty) = +\infty, \\ (-\infty) + (-\infty) = -\infty; \end{cases}$$

$$2) \text{ сума обмеженої змінної } z_n \text{ (або } const) \text{ і н/в є н/в: } z_n + (\pm\infty) = \pm\infty;$$

$$3) \text{ добуток двох н/в є н/в: } \begin{cases} +\infty \cdot (+\infty) = +\infty, \\ -\infty \cdot (\mp\infty) = \pm\infty; \end{cases}$$

$$4) \text{ добуток обмеженої змінної } z_n \text{ (або } const \neq 0) \text{ з н/в є н/в: } z_n \cdot \infty = \infty \text{ (знак результату залежить від знаків } z_n \text{ і } \infty);$$

Установимо, *наприклад*, справедливість першої властивості.

Д о в е д е н н я.

Нехай $\begin{cases} x_n \rightarrow +\infty \\ y_n \rightarrow +\infty \end{cases}$, тоді $\begin{cases} \forall M_1 > 0: \underline{x_n} > M_1 \\ \forall M_2 > 0: \underline{y_n} > M_2 \end{cases}$, бо при $a > 0$ маємо:

$|a| = a$. Покажемо, що для будь-якого $M > 0$ має місце нерівність $\underline{x_n + y_n} = \underline{x_n} + \underline{y_n} > M$.

За властивостями нерівностей маємо:

$$\left(\underline{x_n} > M_1, \underline{y_n} > M_2 \right) \Rightarrow \underline{x_n + y_n} > M_1 + M_2.$$

Оскільки M_1, M_2 – довільні за вартістю сталі, виберемо їх рівними $M/2$. Тоді приходимо до нерівності $\underline{x_n + y_n} > M \quad \forall M > 0$, а це і означає, що сума змінних x_n, y_n є нескінченно великою.

Пропонуємо: показати аналогічним чином справедливості властивостей 2) – 4), вибираючи довільні числа M_1 (щодо x_n) і M_2 (щодо y_n) відповідно до M ; сформулювати властивості н/в, залучаючи поняття „прямує до нескінченності”, і записати їх у відповідних символах.

Зауваження:

1) властивості суми і добутку двох н/в поширюються на будь-яке скінченне число доданків і співмножників;

2) добуток н/в з константою нуль (0) – стаціонарною н/м – дає нуль;

3) слід розрізнявати н/в і необмежену змінну: н/в є одночасно і необмеженою, але не навпаки (*обміркуйте!*).

Теорема 7.1.2 (про зв'язок між н/в і н/м). Справедливі твердження:

1) якщо змінна x_n – н/в, то обернена до неї змінна $1/x_n$ є н/м:

$$x_n - \text{нескінченно велика} \Rightarrow 1/x_n = \alpha_n - \text{нескінченно мала}; \quad (7.1.5)$$

2) якщо змінна α_n – н/м, то обернена до неї змінна $1/\alpha_n$ є н/в:

$$\alpha_n - \text{нескінченно мала} \Rightarrow 1/\alpha_n = x_n - \text{нескінченно велика}. \quad (7.1.6)$$

Д о в е д е н н я базується на означеннях н/в і н/м.

1. За умовою x_n – н/в, тоді згідно з означенням $\forall M > 0: \underline{x_n} > M$.

Треба показати, що змінна величина $1/x_n = \alpha_n$ є н/м, тобто $\forall \varepsilon > 0$:

$$\underline{1/x_n} = \underline{\alpha_n} < \varepsilon.$$

За властивостями нерівностей і модуля відношення двох чисел:

$$\left[\begin{array}{l} a > 0 \\ b > 0 \end{array} \right] \Rightarrow \left(a > b \Rightarrow \frac{1}{a} < \frac{1}{b}, \left| \frac{a}{b} \right| = \frac{|a|}{|b|} \right),$$

маємо:

$$\frac{1}{|x_n|} < \frac{1}{M} \quad \text{і} \quad \left| \frac{1}{x_n} \right| < \frac{1}{M}.$$

Оскільки M – довільна за вартістю стала, виберемо її рівною $1/\varepsilon$.

Тоді приходимо до нерівності $\left| \frac{1}{x_n} \right| < \varepsilon \quad \forall \varepsilon > 0$, а це означає: $\frac{1}{x_n} = \alpha_n \rightarrow 0$ – н/м.

2. Аналогічним чином доводиться справедливність співвідношення (7.1.6); *наведіть* відповідні викладки самостійно.

Залучаючи поняття „прямує до нуля”, „прямує до нескінченності”, (7.1.5), (7.1.6) можна подати так:

$$x_n \rightarrow \infty \Rightarrow \frac{1}{x_n} = \alpha_n \rightarrow 0, \quad \alpha_n \rightarrow 0 \Rightarrow \frac{1}{\alpha_n} = x_n \rightarrow \infty. \quad (7.1.7)$$

Якщо в (7.1.7) замість x_n , α_n підставити їхні граничні значення ∞ , 0 , то приходимо до символічних рівностей:

$$\frac{1}{\infty} = 0, \quad \frac{1}{0} = \infty. \quad (7.1.8)$$

Наголошуємо, що співвідношення (7.1.8) слід розглядати не як звичайні арифметичні дроби, а як стисле (лаконічне) відображення суті теореми 7.1.2: величина, обернена до н/в (н/м), є н/м (н/в).

Невизначеності: основні означення, типи

Висвітлюючи арифметичні властивості н/м і н/в (у поєднанні з обмеженими змінними), ми зовсім не торкалися операції ділення (!). Чому? Результати розглянутих операцій визначалися однозначно: ними були знову ж таки або н/м (окрім випадку суми н/м і обмеженої змінної), або н/в, граничними значеннями яких є відповідно нуль або нескінченність.

Постає питання: яку змінну за поведінкою (характером) змінювання отримаємо у разі відношення двох н/м або двох н/в і яким буде її граничне значення? Виявляється, що загальної відповіді на це питання дати неможливо! Покажемо це на *приклад*ах відношень н/в, які описуються послідовностями ($x_n = 3^n$, $y_n = 3^{2n}$, $z_n = 3^{2n-1}$, де $n = 1, 2, 3, \dots$):

$$1) u_n = \frac{y_n}{z_n} = \left(\frac{\infty}{\infty} \right) = 3 - \text{const} \text{ (у дужках вказано відношення граничних значень н/в чисельника і знаменника);}$$

$$2) v_n = \frac{x_n}{y_n} = \left(\frac{\infty}{\infty} \right) = \frac{1}{3^n} - \text{н/м} \text{ (} v_n \rightarrow 0 \text{);}$$

$$3) w_n = \frac{z_n}{x_n} = \left(\frac{\infty}{\infty} \right) = 3^{n-1} - \text{н/в} \text{ (} w_n \rightarrow +\infty \text{)}.$$

Як бачимо, в усіх трьох випадках границі відношення н/в до н/в різні, тобто загалом неможливо стверджувати, що дає відношення двох н/в.

Аналогічну ситуацію (*прослідкуйте!*) отримаємо стосовно відношення двох н/м, замінюючи в прикладах задані н/в на обернені змінні згідно з теоремою 7.1.2, та в інших випадках.

Якщо при відшукуванні граничного значення відношення, добутку, суми (або різниці) двох змінних приходимо до таких символічних виразів:

$\frac{0}{0}$, $\frac{\infty}{\infty}$, $0 \cdot \infty$, $+\infty + (-\infty)$, то кажуть, що має місце **невизначеність** відно типу „**нуль на нуль**”, „**нескінченність на нескінченність**”, „**нуль на нескінченність**”, „**нескінченність мінус нескінченність**”.

Наголошуємо, що невизначеність означає: неможливо висловити загальне судження (ось звідки термін „невизначеність”!) щодо граничного значення змінної, а, отож, треба проводити дослідження в кожному окремому випадку!

Установлення граничного значення (границі) змінної у випадку невизначеності називають **розкриттям невизначеності**.

Пропонуємо, залучаючи теорему про зв'язок між н/в і н/м, переконатися, що символічні вирази $\frac{0}{\infty}$ і $\frac{\infty}{0}$ не є невизначеностями.

Зауваження: усього існує 7 типів невизначеностей (як 7 чудес світу):

$$\frac{0}{0}, \frac{\infty}{\infty}, 0 \cdot \infty, +\infty + (-\infty); 1^\infty, 0^0, \infty^0;$$

останні три з них, які породжуються степеневі-показниковими функціями $y = f(x) = u(x)^{v(x)}$, розглядатимуться пізніше.

Границя довільної числової послідовності: означення, критерій існування, властивості

Висвітлені вище у п. 7.1 відомості є базою для загального підходу до вивчення границь будь-яких функцій натурального аргументу $x = f(n)$ – числових послідовностей (ч/п), а не тільки н/м чи н/в. Якщо йдеться про граничне значення аргументу n , то замість $n \rightarrow +\infty$ пишуть $n \rightarrow \infty$, пропускаючи символ $+$, а для позначення граничного значення залежної змінної x використовують вже відомий символ \lim .

Областю існування ч/п може бути вся множина натуральних чисел ($D(f) = \mathbf{N}$) або деяка її нескінченна підмножина ($D(f) \subset \mathbf{N}$).

Наприклад:

$$x = f(n) = 1 - \cos \pi n \Rightarrow D(f) = \mathbf{N};$$

$$y = \varphi(n) = 1 / \sin \frac{\pi}{2} n \Rightarrow D(\varphi) = \{2n - 1\} - \text{множина непарних чисел.}$$

Нехай $\{x_n\}$ – деяка ч/п, a – стаціонарна ч/п ($a \neq \infty \wedge a \neq \pm\infty$, тобто a – скінченне число). Число a називається **границею ч/п** $\{x_n\}$, якщо ч/п $\{x_n - a\}$ – різниця між ч/п $\{x_n\}$ і числом a – є н/м:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a \Leftrightarrow \{x_n - a\} = \{\alpha_n\} - \text{н/м.} \quad (7.1.9)$$

Інакше: число a називається **границею ч/п** $\{x_n\}$, якщо модуль різниці між значеннями x_n і числом a при своєму змінюванні *стає і залишається* менше будь-якого, наперед заданого, числа $\varepsilon > 0$:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0: \underline{|x_n - a|} < \varepsilon. \quad (7.1.10)$$

Наслідок. Границя сталої дорівнює самій сталій:

$$x_n = a - \text{const} \Rightarrow \forall \varepsilon > 0: \underline{|x_n - a|} = |0| < \varepsilon.$$

У **геометричному смислі** умова $\underline{|x_n - a|} < \varepsilon$, означає, що при змінюванні x_n усі значення ч/п (крім, можливо, скінченного числа точок) потрапляють у ε -окіл точки a , тобто $a - \varepsilon < x_n < a + \varepsilon$ (див. рис. 6.1.1).

Наприклад, розглянемо ч/п $\{x_n\}$ із загальним членом $x_n = \frac{n-1}{n}$, тобто $x_n = 0, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \dots, 1 - \frac{1}{n}, \dots$. При $n \rightarrow \infty$ змінна $1/n \rightarrow 0$, тому при довільному виборі числа $\varepsilon > 0$ маємо:

$$|x_n - 1| = \left| \left(1 - \frac{1}{n} \right) - 1 \right| = \frac{1}{n} < \varepsilon \Rightarrow x_n \rightarrow 1.$$

Отже, для всіх $n > 1/\varepsilon$ нескінченне число членів ч/п опиняться в інтервалі $(1 - \varepsilon, 1 + \varepsilon)$, яким би малим він не був; тобто елементи ч/п немовби „скупчуються” біля точки $a = 1$.

Послідовність, яка має границю (не має границі), називається **збіжною (розбіжною)**, або кажуть: ч/п **збігається (розбігається)**:

$$\begin{aligned} \{x_n\} \rightrightarrows a - \text{ч/п збіжна} &\Leftrightarrow \exists \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a \\ (\{x_n\} \leftrightharpoons - \text{ч/п розбіжна} &\Leftrightarrow \nexists \lim_{n \rightarrow \infty} x_n). \end{aligned} \quad (7.1.11)$$

Вище наведено збіжну ч/п, а розбіжною є, *наприклад*, ч/п із загальним членом $x_n = 1 - (-1)^n$: $x_n = 2, 0, 2, 0, \dots, 1 - (-1)^n, \dots$; *обміркуйте, чому?*

Якщо a – властиве дійсне число ($a \in (-\infty, +\infty)$), то кажуть, що ч/п має **скінченну** границю (на противагу випадку, коли ч/п має нескінченну границю).

Теорема 7.1.3 (критерій збіжності ч/п „мовою нескінченно малих”). Число a є скінченною границею ч/п $\{x_n\}$ тоді і тільки тоді, коли її загальний член x_n є сумою числа a і деякої н/м α_n (інакше: ч/п збігається до скінченної границі тоді і тільки тоді, коли її можна подати у вигляді суми стаціонарної ч/п і н/м):

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a \Leftrightarrow x_n = a + \alpha_n \quad (\{x_n\} \rightrightarrows a \Leftrightarrow \{x_n\} = \{a\} + \{\alpha_n\}). \quad (7.1.12)$$

Д о в е д е н н я базується на означеннях (7.1.9), (7.1.10).

Необхідність (\Rightarrow). Якщо a – границя ч/п, то різниця між $\{x_n\}$ і $\{a\}$ є н/м: $\{x_n - a\} = \{\alpha_n\}$. Звідки $x_n - a = \alpha_n$, отже, $x_n = a + \alpha_n$.

Достатність (\Leftarrow) доведемо в символах, а допитливим пропонуємо навести відповідний коментар:

$$x_n = a + \alpha_n \Rightarrow x_n - a = \alpha_n \Rightarrow \underline{|x_n - a|} = \underline{|\alpha_n|} < \varepsilon \quad \forall \varepsilon > 0 \Rightarrow a = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n.$$

Доведення усіх теорем, наведених нижче, базується на критерії збіжності та властивостях н/м.

Теорема 7.1.4 (про єдиність границі). Збіжна ч/п має лише одну границю:

$$\{x_n\} \rightrightarrows a \wedge \{x_n\} \rightrightarrows b \Rightarrow a = b.$$

Д о в е д е н н я. Припустимо, що ч/п $\{x_n\}$ має дві границі a і b , тоді отримуємо ланцюжок рівностей:

$$(x_n = a + \alpha_n \wedge x_n = b + \beta_n) \Rightarrow \alpha_n - \beta_n = b - a.$$

З одного боку, $\alpha_n - \beta_n = \gamma_n$ – н/м, з іншого – $const: \gamma_n = b - a$, а це можливо тільки тоді, коли γ_n – стаціонарна ч/п ($\gamma_n = 0$). Отже, $a = b$.

Теорема 7.1.5 (про арифметичні властивості збіжних ч/п). Сума (різниця), добуток, частка двох ч/п зі скінченними границями існує і дорівнює відповідно сумі (різниці), добутку, частці границь вихідних ч/п (у разі не рівності нулеві границі знаменника):

$$\left[\begin{array}{l} \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a \\ \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = b \end{array} \right] \Rightarrow \left[\begin{array}{l} 1) \exists \lim_{n \rightarrow \infty} (x_n \pm y_n) = a \pm b; \\ 2) \exists \lim_{n \rightarrow \infty} (x_n \cdot y_n) = a \cdot b; \\ 3) \exists \lim_{n \rightarrow \infty} x_n / y_n = a/b \text{ при } b \neq 0. \end{array} \right.$$

(7.1.13)

(7.1.14)

(7.1.15)

Д о в е д е н н я будується на критерії збіжності ч/п „мовою нескінченно малих” і арифметичних властивостях нескінченно малих.

1. За критерієм збіжності (див. теорему 7.1.3) маємо: $x_n = a + \alpha_n$, $y_n = b + \beta_n$. Тоді для суми послідовностей $\{z_n\} = \{x_n\} + \{y_n\}$ загальний член запишеться так: $z_n = (a + b) + \underbrace{(\alpha_n + \beta_n)}_{\gamma_n} \Rightarrow z_n = (a + b) + \gamma_n$.

Границя кожного доданка існує (чому?), отже, існує і границя z_n :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = \lim_{n \rightarrow \infty} (a + b) + \lim_{n \rightarrow \infty} \gamma_n = a + b.$$

2. Аналогічно (наведіть коментар):

$(x_n = a + \alpha_n, y_n = b + \beta_n) \Rightarrow z_n = x_n \cdot y_n = (a + \alpha_n) \cdot (b + \beta_n) = a \cdot b + \gamma_n$,
де $\gamma_n = a \cdot \beta_n + b \cdot \alpha_n + \alpha_n \cdot \beta_n$ – н/м (за теоремою 7.1.1).

3. Нехай $\{z_n\} = \{x_n\} / \{y_n\}$. За критерієм збіжності $x_n = a + \alpha_n$, $y_n = b + \beta_n$, тоді z_n можна записати так (переконайтеся у тотожності наведених алгебраїчних перетворень):

$$z_n = \frac{x_n}{y_n} = \frac{a + \alpha_n}{b + \beta_n} = \frac{a}{b} + \left(\frac{1}{b + \beta_n} \cdot \alpha_n - \frac{a}{(b + \beta_n)b} \cdot \beta_n \right) = \frac{a}{b} + \gamma_n.$$

За властивостями н/м вираз у круглих дужках є н/м γ_n як різниця добутків н/м α_n , β_n з обмеженими величинами. Отже, $\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = a/b$.

Наслідок із (7.1.14): сталий множник c можна виносити за знак (символ) границі:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} c \cdot x_n = c \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} x_n \quad (\text{наведіть відповідні міркування}). \quad (7.1.16)$$

Існує клас послідовностей, важливих з теоретичної і застосовної точок зору, таких, що кожна із них є збіжною. Прийmemo без доведення (це виходить за межі навчальної програми) відповідну теорему.

Теорема 7.1.6 (про збіжність монотонних обмежених ч/п). Будь-яка монотонна обмежена послідовність має скінченну границю.

Класичним прикладом таких послідовностей є послідовності, які породжують число e – **неперове число** (за ім'ям шотландського математика Джона Непера (1550 – 1617)), яке у сучасній математиці є основою так званих **натуральних логарифмів**.

Розглянемо дві ч/п, загальні члени яких зображуються формулами:

$$x_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n, \quad y_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1},$$

і покажемо, що

- 1) $x_n < y_n \quad \forall n \geq 1$;
- 2) $\{x_n\}$ – зростаюча;
- 3) $\{y_n\}$ – зменшувальна.

Дійсно,

$$1. \quad y_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \left(1 + \frac{1}{n}\right) = x_n \left(1 + \frac{1}{n}\right) \Rightarrow \left|1 + \frac{1}{n} > 1\right| \Rightarrow y_n > x_n.$$

Для доведення 2), 3) використаємо відому істину: якщо числа a_i , $i = \overline{1, n}$, не всі однакові, то середнє геометричне цих чисел менше їхнього середнього арифметичного: $\sqrt[n]{a_1 \cdot a_2 \cdot \dots \cdot a_n} < \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n}$.

2. Покладаємо: $a_1 = 1$; $a_i = 1 + \frac{1}{n-1} = \frac{n}{n-1}$, $i = \overline{2, n}$, тоді

$$\begin{aligned} \sqrt[n]{1 \cdot x_{n-1}} &= \sqrt[n]{1 \cdot \left(1 + \frac{1}{n-1}\right)^{n-1}} < \frac{1}{n} \left(1 + (n-1) \cdot \frac{n}{n-1}\right) = \frac{n+1}{n} = \\ &= 1 + \frac{1}{n} = \sqrt[n]{x_n} \Rightarrow \sqrt[n]{x_{n-1}} < \sqrt[n]{x_n} \Rightarrow x_{n-1} < x_n \Rightarrow \{x_n\} \nearrow. \end{aligned}$$

3. Покладаємо: $a_1 = 1$; $a_i = \left(1 + \frac{1}{n-1}\right)^{-1} = \frac{n-1}{n}$, $i = \overline{2, n+1}$, тоді

$$\begin{aligned} \sqrt[n+1]{1 \cdot \frac{1}{y_{n-1}}} &= \sqrt[n+1]{1 \cdot \left(\frac{n-1}{n}\right)^n} < \frac{1}{n+1} \left(1 + n \cdot \frac{n-1}{n}\right) = \frac{n}{n+1} = \frac{1}{1 + 1/n} = \\ &= \sqrt[n+1]{\frac{1}{y_n}} \Rightarrow \frac{1}{\sqrt[n+1]{y_{n-1}}} < \frac{1}{\sqrt[n+1]{y_n}} \Rightarrow y_{n-1} > y_n \Rightarrow \{y_n\} \searrow. \end{aligned}$$

Таким чином:

$$\forall n \geq 1: x_1 < x_2 < \dots < x_{n-1} < x_n < y_n < y_{n-1} < \dots < y_2 < y_1,$$

тобто ч/п $\{x_n\}$, $\{y_n\}$ монотонні й обмежені, і збігаються вони до одного числа:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \left(1 + \frac{1}{n}\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n.$$

Усі члени $\{x_n\}$ менші цього числа, а члени $\{y_n\}$ більші нього, і назване воно числом e : $x_n < e < y_n \forall n \geq 1$. Якщо взяти $n = 1$, то отримаємо: $2 < e < 4$. Неважко переконатися, що $e < 3$, якщо взяти $n = 5$:

$$x_5 < e < y_5 \Rightarrow \left(1 + \frac{1}{5}\right)^5 < e < \left(1 + \frac{1}{5}\right)^6 \Rightarrow 2,488320 < e < 2,985984.$$

Число e – ірраціональне не алгебраїчне число (трансцендентне), зображується воно нескінченним неперіодичним дробом:

$$e = 2,718281828459045....$$

Границю ч/п $\{x_n\}$ називають **другою чудовою границею**:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e;$$

її використовують для розкриття невизначеності виду 1^∞ , що породжується степенево-показниковими функціями.

7.2. Практичні рекомендації щодо відшукування границь

Обчислення границь ч/п, які мають скінченні границі і задовольняють умови теореми 7.1.5, не викликає утруднень. Основні труднощі виникають при розкритті невизначеностей. Загальний підхід до цієї процедури передбачає:

- 1) *тотожні перетворення* загального члена ч/п (з метою звести ситуацію до можливості застосування арифметичних властивостей границь послідовностей; зокрема, властивостей н/м та н/в);
- 2) *застосування еталонних* границь – границь, які часто зустрічаються на практиці і використовуються, як готові формули;
- 3) *впровадження нової* (допоміжної) змінної з метою спрощення початкового аналітичного виразу.

Перелічені кроки здійснюються незалежно один від одного у довільному порядку і не обов'язково разом: те чи інше їх поєднання обумовлюється кожним конкретним прикладом.

Загальний порядок (алгоритм) відшукування границь такий (рис. 7.2.1):

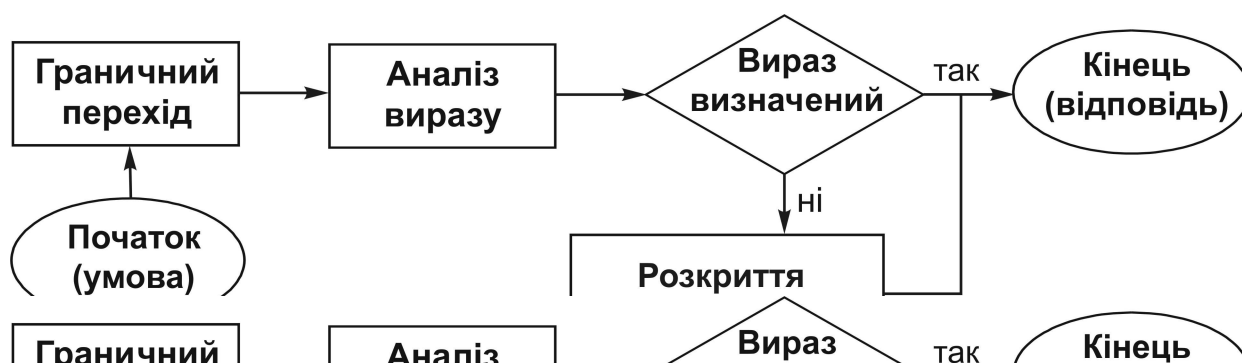


Рис. 7.2.1. Структурна схема алгоритму відшукування границі ч/п

Пояснення кожного кроку наведено нижче:

- 1) здійснюємо граничний перехід (що формально зводиться до підстановки у загальний член ч/п замість змінної n символу ∞);
- 2) аналізуємо отриманий вираз з метою встановлення того, чи визначений він, чи невизначений;
- 3) записуємо відповідний результат у разі визначеного виразу;
- 4) розкриваємо невизначеність, а потім записуємо відповідь.

Приклади обчислення границь ч/п:

$$1. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{0,5^n + 3 \arctg 2n}{5\pi + \arccotg(1/n)} = \frac{0,5^\infty + 3 \arctg 2\infty}{5\pi + \arccotg(1/\infty)} = \frac{0 + 3 \cdot \pi/2}{5\pi + \pi/2} = \frac{3}{11}.$$

Після граничного переходу враховано (прослідкуйте) властивості основних елементарних функцій, взаємозв'язок між н/в і н/м, арифметичні властивості границь ч/п:

$$0,5^\infty = \frac{1}{2^\infty} = \frac{1}{\infty} = 0, \quad 2 \cdot \infty = \infty, \quad \arctg \infty = \frac{\pi}{2}, \quad \arctg 0 = \frac{\pi}{2}.$$

Границі чисельника ($3\pi/2$) і знаменника ($11\pi/2$) скінченні, тому границя ч/п дорівнює їх відношенню ($3/11$).

$$2. \lim_{n \rightarrow \infty} (3n^2 + 5n - 1) = \left| \text{здійснюємо граничний перехід} \right| = \\ = 3 \cdot \infty^2 + 5 \cdot \infty - 1 = \left| \text{застосовуємо властивості н/в} \right| = \infty + \infty = \infty.$$

Вираз визначений, ч/п збігається до нескінченності.

$$3. \lim_{n \rightarrow \infty} (-5n^2 + 3n + 10) = -5 \cdot \infty^2 + 3 \cdot \infty + 10 = -\infty + (\infty + 10) = \\ = (-\infty + \infty) - \text{невизначений вираз.}$$

Для розкриття неvizначеності винесемо старший степiнь n^2 за дужки i знову виконаємо граничний перехiд:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (-5n^2 + 3n + 10) = \lim_{n \rightarrow \infty} n^2 \cdot \left(-5 + 3 \cdot \frac{1}{n} + 10 \cdot \frac{1}{n^2} \right) = \\ = \infty \cdot (-5 + 3 \cdot 0 + 10 \cdot 0) = \infty \cdot (-5) = -\infty - \text{невизначенiсть розкрито!}$$

$$\text{Ураховано, що } n \rightarrow \infty \Rightarrow \left(n^2 \rightarrow \infty, \frac{1}{n} \rightarrow 0, \frac{1}{n^2} \rightarrow 0 \right).$$

Пропонуємо визначити границю ч/п, загальний член якої – многочлен k -го степеня вiд змiнної n :

$$P_k(n) = a_k n^k + a_{k-1} n^{k-1} + a_{k-2} n^{k-2} + \dots + a_1 n + a_0.$$

$$4. \lim_{n \rightarrow \infty} (n - \sqrt{n(n+1)}) = (\infty - \infty) - \text{невизначенiсть.}$$

Помножимо i подiлимо вираз пiд знаком границi на спряжений йому вираз:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n - \sqrt{n(n+1)}) \cdot (n + \sqrt{n(n+1)})}{n + \sqrt{n(n+1)}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{-n}{n + \sqrt{n(n+1)}} = \left(\frac{-\infty}{\infty} \right).$$

Отриману неvizначенiсть розкриваємо дiленням чисельника i знаменника дробу на n :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{-n}{n + \sqrt{n(n+1)}} = \left(\frac{-\infty}{\infty} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{-1}{1 + \sqrt{1+1/n}} = \frac{-1}{1 + \sqrt{1+0}} = -\frac{1}{2}.$$

$$5. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n^2 + 5}{2n^3 - 4} = \left(\frac{\infty}{\infty} \right) = \left| \text{у чисельнику i знаменнику виносимо за} \right.$$

$$\left. \text{дужки найвищий степiнь } n: n^3 \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^3 (3/n + 5/n^3)}{n^3 (2 - 4/n^3)} = \frac{0 + 0}{2 - 0} = 0.$$

Якщо застосуємо такий підхід до розкриття невизначеності відношення двох многочленів при $n \rightarrow \infty$, записаних у загальному виді, то отримаємо результат, який дозволяє знаходити відповідну границю усно: границя відношення двох многочленів при $n \rightarrow \infty$ дорівнює границі відношення їхніх старших членів (це можна стлумачити як готову формулу).

$$\begin{aligned}\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{P_k(n)}{P_m(n)} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_k n^k + a_{k-1} n^{k-1} + a_{k-2} n^{k-2} + \dots + a_1 n + a_0}{b_m n^m + b_{m-1} n^{m-1} + b_{m-2} n^{m-2} + \dots + b_1 n + b_0} = \left(\frac{\infty}{\infty} \right) = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_k n^k}{b_m n^m} = \left(\frac{\infty}{\infty} \right) = \begin{cases} \infty, & k > m; \\ 0, & k < m; \\ a_k / b_k, & k = m. \end{cases}\end{aligned}$$

До таких границь часто приходимо у прикладах, які зводяться до застосування **другої чудової** границі (числа e):

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n} \right)^n = (1)^\infty = e \approx 2,718... \quad (7.2.1)$$

Як узагальнення другої чудової границі справедлива формула:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{\varphi(n)} \right)^{\varphi(n)} = (1)^\infty = e, \quad (7.2.2)$$

де $\varphi(n) \rightarrow \infty$ разом із $n \rightarrow \infty$.

$$6. \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2n+3}{2n-1} \right)^{3n-2} = | \text{здійснюємо граничний перехід} | = \left(\frac{\infty}{\infty} \right)^\infty.$$

„Непорозуміння” $\frac{\infty}{\infty}$ легко ліквідується:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2n+3}{2n-1} \right) = \left(\frac{\infty}{\infty} \right) = 1,$$

а невизначеність 1^∞ розкривається за допомогою числа e . Для цього виділимо в основі степеня одиницю:

$$\frac{2n+3}{2n-1} = 1 + \frac{1}{(2n-1)/4} \quad (\text{тут } \varphi(n) = (2n-1)/4).$$

Згідно з (7.2.2) отримуємо:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2n+3}{2n-1} \right)^{3n-2} = (1^\infty) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\left(1 + \frac{1}{(2n-1)/4} \right)^{(2n-1)/4} \right]^{\frac{4(3n-2)}{2n-1}} = e^6$$

(границя виразу у квадратних дужках дорівнює e , а границя показника степеня – відношення двох лінійних ч/п – дає 6).

Щоб уникнути громіздких записів можна ввести допоміжну змінну $m = \varphi(n) = (2n-1)/4$, тоді $n \rightarrow \infty \Leftrightarrow m \rightarrow \infty$, бо $n = 2m + 1/2$. З урахуванням цього і залученням (7.2.1) отримуємо:

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{m} \right)^{6m - \frac{1}{2}} = (1^\infty) = \lim_{m \rightarrow \infty} \left[\left(1 + \frac{1}{m} \right)^m \right]^{6 - \frac{1}{2m}} = e^{6 - \frac{1}{\infty}} = e^6.$$

Наголошуємо, що для застосування другої чудової границі треба у загальному члені ч/п, яка дає невизначеність 1^∞ , за допомогою тождешних перетворень отримати степінь, основою якого є сума одиниць і n/m , а показник – величина, обернена до цієї n/m (див. (7.2.1)), (7.2.2)).

Зауваження. Виділити в основі степенево-показникової функції одиницю (1) можна різними способами: а) додати і відняти одиницю (загальний підхід); б) якщо основа степеня – алгебраїчний дріб (як у наведеному прикладі), то або в чисельнику спочатку виділити вираз, рівний знаменнику, а потім поділити почленно отриманий чисельник на знаменник, або виконати ділення чисельника на знаменник „сходінками”.

Границі ч/п в економічних розрахунках

Задача 7.2.1 (про граничний перехід у формулі простих відсотків). Дослідити формулу (3.1.35) за умови необмеженого зростання числа нарахувань.

Розв’язання. Рівняння прямої, що описує формулу простих відсотків (див. (3.1.35)), при натуральних вартостях t ($t = n \in \mathbf{N}$) дає ч/п із загальним членом $S_n = S_0 + S_0 \frac{p}{100} n$, яка являє собою зростаючу арифметичну прогресію з першим членом $S_1 = S_0 \left(1 + p \cdot 10^{-2} \right)$ і різницею d , рівною збільшенню суми вкладу за один рік: $d = S_0 \cdot p \cdot 10^{-2}$.

В економічному смислі це означає таке: якщо процес накопичення вкладу вельми тривалий, то сума вкладу через певний проміжок часу перевищить будь-яке наперед задане число S .

„Мовою границь” цей факт описується таким чином:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = S_0 + S_0 \frac{p}{100} \cdot \infty = S_0 + \infty = \infty > S.$$

(Сформулюйте властивості добутку і суми н/в зі сталою величиною, завдяки яким отримано наведений результат; *запишіть* формулу простих відсотків у рекурентному вигляді.)

Висновок: при необмеженому зростанні числа нарахувань простих відсотків n ($n \rightarrow \infty$) ч/п S_n є нескінченно великою ($S_n \rightarrow \infty$).

Задача 7.2.2 (про складені відсотки). Громадянин здійснює вклад заощаджень у банк під **складені відсотки** – проценти, що нараховуються на *всі грошові накопичення*. Яка сума підлягає виплаті вкладнику через декілька років?

Розв’язання. Введемо позначення величин, про які йдеться в умові задачі:

S_0 – початкова (вихідна, основна) сума внеску;

$p\%$ – відсотки, які нараховуються за рік (*ставка* складених відсотків);

t – кількість років, за які нараховується складений відсоток;

S_t – сума, яка підлягає виплаті вкладнику через t років.

За умовою задачі за перший рік вклад збільшиться на суму $S_0 \cdot \frac{p}{100}$, тобто $S_1 = S_0 + S_0 \frac{p}{100} = S_0 \left(1 + \frac{p}{100}\right)$.

Після 2-го, 3-го, ..., t -го року матимемо відповідно накопичення:

$$\begin{aligned} S_2 &= S_1 + S_1 \frac{p}{100} = S_0 \left(1 + \frac{p}{100}\right)^2, \\ S_3 &= S_2 + S_2 \frac{p}{100} = S_0 \left(1 + \frac{p}{100}\right)^3, \dots, \\ S_t &= S_{t-1} + S_{t-1} \frac{p}{100} = S_0 \left(1 + \frac{p}{100}\right)^t. \end{aligned} \quad (7.2.3)$$

Співвідношення (7.2.3) називають **формулою складених відсотків**. Її рекурентна форма – $S_t = S_{t-1} \left(1 + \frac{p}{100} \right)$ – відображає суть складених відсотків, а саме: після кожного наступного року відсотки нараховуються на всі наявні накопичення (а не на початкову суму, як у формулі простих відсотків).

Задача 7.2.3 (про зв'язок формули складених відсотків з числом e). Дослідити формулу (7.2.3) за умови нарахування відсотків $1, 2, 3, \dots, n$ разів протягом року при необмеженому зростанні n .

Розв'язання. Позначимо ставки складених відсотків за проміжки часу між нарахуваннями через q_n , тоді згідно з умовою задачі отримуємо:

$$q_1 = \frac{p}{100 \cdot 1}, q_2 = \frac{p}{100 \cdot 2}, q_3 = \frac{p}{100 \cdot 3}, \dots, q_n = \frac{p}{100 \cdot n}.$$

Для довільного натурального n накопичена через рік сума така:

$$S_1 = S_0 \left(1 + \frac{p}{100 \cdot n} \right)^n = S_0 (1 + q_n)^n.$$

Знайдемо границю накопичених сум при необмеженому зростанні n ($n \rightarrow \infty$):

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_1 = \lim_{n \rightarrow \infty} S_0 (1 + q_n)^n = \left| n \rightarrow \infty \Leftrightarrow q_n \rightarrow 0 \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} S_0 \left[(1 + q_n)^{\frac{1}{q_n}} \right]^{q_n \cdot n}.$$

Границя виразу в квадратних дужках дорівнює числу e , тому остаточно отримаємо: $\lim_{n \rightarrow \infty} S_1 = S_0 \cdot e^{p \cdot 10^{-2}}$.

Висновок: річна сума накопичень S_1 ніколи не перевищить величини $S_0 \cdot e^{p \cdot 10^{-2}}$, яким би великим не було число нарахувань відсотків протягом року.

Звичайно, при необмеженому зростанні числа календарних років t ($t \rightarrow \infty$) сума накопичень S_t прямує до нескінченності (чому?), тобто є величиною н/в ($S_t \rightarrow \infty$).

7.3. Границя функції неперервного аргументу

Означення границі функції, односторонні границі, критерії існування

Розглянуті елементи теорії границь функцій натурального аргументу – ч/п – є основою для побудови відповідної теорії щодо функцій неперервної змінної. На відміну від дискретного аргументу неперервна змінна приймає свої значення не „стрибками”, а „плавно”, подібно плину часу. Областю існування такої змінної є вся числова вісь $\mathbf{R} = (-\infty, +\infty)$ або її нескінченні, обмежені чи необмежені, підмножини; наприклад: відрізок, інтервал, промінь тощо.

Нехай задано функцію $y = f(x)$ неперервного аргументу на множині $D(f)$. Кожна ч/п $\{x_n\}$ значень змінної $x: x_1, x_2, x_3, \dots, x_n, \dots$ породжує ч/п $\{y_n\}$ відповідних значень змінної $y: y_1, y_2, y_3, \dots, y_n, \dots$, де $y_n = f(x_n)$. Інакше, послідовності $\{x_n\} \subset D(f)$ **відповідає** послідовність $\{f(x_n)\} \subset E(f)$. Наприклад, якщо $y = x^2$, то ч/п $\{x_n\} = \{1/n\}$ відповідає ч/п $\{y_n\} = \{1/n^2\}$.

Нехай x_0 – певне (фіксоване) число – точка числової осі, в деякому околі якої функція $f(x)$ визначена; в самій точці вона може і не існувати. Число A називається **границею функції** $y = f(x)$, коли x прямує до x_0 (або у точці x_0), якщо для будь-якої послідовності значень аргументу, збіжної до x_0 , відповідна послідовність вартостей функції збігається до A :

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A \Leftrightarrow \forall \{x_n\} \rightrightarrows x_0 \Rightarrow \forall \{f(x_n)\} \rightrightarrows A. \quad (7.3.1)$$

Це означення називають означенням границі функції „**мовою послідовностей**”, або **за Гейне** (за ім'ям видатного німецького математика (1821 – 1881)).

Із (7.3.1) випливає: у разі, якщо виявиться, що існує ч/п, збіжна до x_0 , для якої відповідна ч/п значень функції не має границі в розглядуваній точці, або існують дві різні ч/п, збіжні до x_0 , для яких відповідні ч/п значень функції мають різні границі, то границя $f(x)$ в точці x_0 не існує.

Наприклад, функція $y = 2^{1/x}$ з областю існування $D(f) = \{x \mid x \neq 0\}$ не має границі, якщо $x \rightarrow 0$. Справді, візьмемо три ч/п, що збігаються до нуля:

$$\{x_n^{(1)}\} = \{1/n\}, \quad \{x_n^{(2)}\} = \{-1/n\}, \quad \{x_n^{(3)}\} = \{(-1)^{n+1}/n\}. \quad (7.3.2)$$

Для перших двох маємо:

$$n \rightarrow \infty \Rightarrow \begin{cases} x_n^{(1)} = 1/n \rightarrow 0 \Rightarrow y_n^{(1)} = 2^n \rightarrow +\infty, \\ x_n^{(2)} = -1/n \rightarrow 0 \Rightarrow y_n^{(2)} = 2^{-n} = 1/2^n \rightarrow 0, \end{cases} \quad (7.3.3)$$

тобто для двох різних ч/п значень x , що збігаються до нуля, одержуємо різні границі відповідних ч/п вартостей функції; отже, $\lim_{x \rightarrow 0} 2^{1/x}$ не існує.

Зробіть самостійно висновок щодо ч/п $\{y_n^{(3)}\}$, яка відповідає ч/п $\{x_n^{(3)}\}$.

Якщо A – властиве (невластиве) дійсне число, то кажуть, що функція має **скінченну (нескінченну) границю**, або $f(x)$ **збігається до A (до нескінченності** (рис. 7.3.1)):

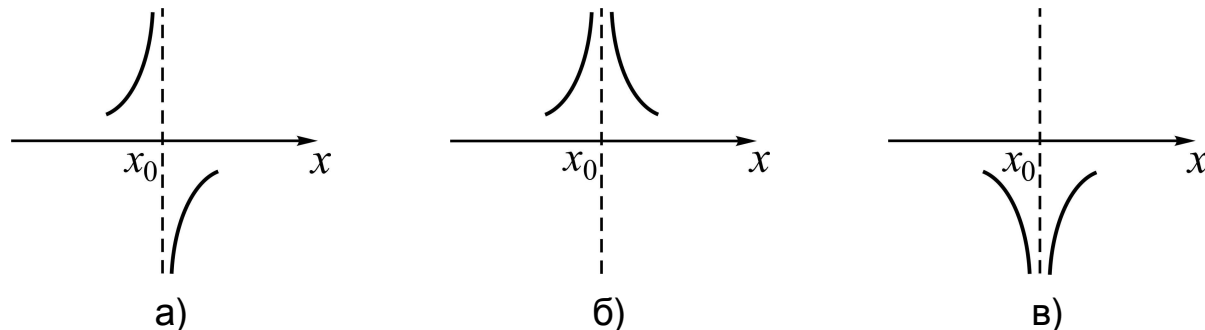


Рис. 7.3.1. Нескінченні границі функції в точці x_0 :

а) $f(x) \rightarrow \infty$; б) $f(x) \rightarrow -\infty$; в) $f(x) \rightarrow \infty$ (ліворуч) і $f(x) \rightarrow -\infty$ (праворуч)

Означення границі функції за Гейне залишається в силі і у випадку, якщо x_0 – один із символів: ∞ , $+\infty$, $-\infty$, тобто коли x прямує до нескінченності. При цьому число A може бути і властивим дійсним числом ($A \in (-\infty, +\infty)$), і невластивим ($A = \infty$, $A = -\infty$, $A = +\infty$). Пропонуємо підтвердити розуміння всіх випадків прямування x до нескінченності (∞ , $+\infty$, $-\infty$), схематично зображаючи поведінку функції, яка має скінченну чи нескінченну границю, у відповідному околі.

Функція $y = f(x)$ називається **нескінченно малою (н/м)** функцією при $x \rightarrow x_0$, якщо її границя в точці x_0 дорівнює нулю:

$$f(x) - \text{н/м при } x \rightarrow x_0 \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0. \quad (7.3.4)$$

Для позначення н/м функцій, як і для н/м послідовностей, використовують перші літери грецького алфавіту і пишуть: $\alpha = \alpha(x)$, $\beta = \beta(x)$ тощо, підкреслюючи функціональну залежність від аргументу x .

Функція $y = f(x)$ називається **нескінченно великою (н/в)** функцією при $x \rightarrow x_0$, якщо її границею в точці x_0 є нескінченність:

$$f(x) - \text{н/в при } x \rightarrow x_0 \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \infty \quad (+\infty, -\infty). \quad (7.3.5)$$

Відзначимо, що розглянуті для ч/п *властивості н/м, н/в* і зв'язок між ними та *арифметичні властивості* послідовностей залишаються в силі і для функцій неперервного аргументу.

Як **наслідок** із означення границі функції в точці (доводити його не будемо) впливає необхідна і достатня умова існування границі.

Теорема 7.3.1 (критерій існування скінченної границі „мовою н/м”). Функція $f(x)$ в точці x_0 має границею число A тоді і тільки тоді, коли її можна подати у вигляді суми числа A і н/м $\alpha(x)$ при $x \rightarrow x_0$:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A \Leftrightarrow f(x) = A + \alpha(x). \quad (7.3.6)$$

(Порівняйте з критерієм збіжності послідовностей (див. (7.1.12).)

Роз'яснимо смисл критерію на *прикладі* дробово-раціональної функції $f(x) = \frac{x^2 - x}{x^2 - 1}$ з $D(f) = \{x \mid x \neq \pm 1\}$, покладаючи $x_0 = 1$.

Обчислюємо границю, залучаючи тотожні перетворення:

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - x}{x^2 - 1} = \left(\frac{0}{0} \right) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x(x-1)}{(x+1)(x-1)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x}{x+1} = \frac{1}{2} \quad (7.3.7)$$

(скорочення на $(x-1)$ „законне”, бо x не дорівнює 1, а прямує до неї).

Далі, за відомими $f(x)$ і A визначаємо н/м $\alpha(x)$ при $x \rightarrow 1$:

$$\alpha(x) = f(x) - A = \frac{x^2 - x}{x^2 - 1} - \frac{1}{2} = \frac{(x-1)^2}{2(x^2 - 1)} \text{ (покажіть, що } \lim_{x \rightarrow 1} \alpha(x) = 0 \text{)}.$$

Таким чином, задану функцію можна подати у такому вигляді:

$$f(x) = \frac{1}{2} + \frac{(x-1)^2}{2(x^2 - 1)}, \text{ де другий доданок є н/м при } x \rightarrow 1.$$

(Пропонуємо самостійно розглянути випадок прямування x до -1 .)

Ще один критерій збіжності функції $f(x)$ до числа A при $x \rightarrow x_0$ базується на понятті „*одностороння границя*”.

Прямування змінної x до x_0 може відбуватися по різному: при наближенні до x_0 значення x залишаються ліворуч (праворуч) від x_0 , тобто виконується умова $x < x_0$ ($x > x_0$), або немовби коливаються навколо точки x_0 (див. $\{x_n^{(1)}\}$, $\{x_n^{(2)}\}$, $\{x_n^{(3)}\}$ в (7.3.2, 7.3.3)).

Число A називається **лівосторонньою границею (границею зліва) функції** $y = f(x)$ у точці x_0 , якщо за умови $x < x_0$ будь-якій послідовності значень аргументу, збіжній до x_0 , відповідає послідовність вартостей функції, збіжна до A . (Означення **границі справа наведіть самостійно**.)

Лівосторонню і правосторонню границі функції називають **односторонніми границями** і позначають так:

$$\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ (x < x_0)}} f(x) = A \text{ – границя зліва, } \lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ (x > x_0)}} f(x) = A \text{ – границя справа.}$$

Застосовують і більш лаконічні позначення:

$$\lim_{x \rightarrow x_0 - 0} f(x) = A \text{ або просто } f(x_0 - 0) = A \text{ – для границі зліва,}$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0 + 0} f(x) = A \text{ або просто } f(x_0 + 0) = A \text{ – для границі справа.}$$

Якщо $x_0 = 0$, то пишуть так: $f(-0) = A$, $f(+0) = A$.

Теорема 7.3.2 (критерій існування скінченної границі „мовою односторонніх границь”). Число A є границею функції $y = f(x)$ при $x \rightarrow x_0$ тоді і тільки тоді, коли її односторонні границі в точці x_0 рівні числу A :

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A \Leftrightarrow f(x_0 - 0) = f(x_0 + 0) = A. \quad (7.3.8)$$

Д о в е д е н н я ґрунтується на означеннях границі функції (7.3.1) і односторонніх границь.

Необхідність (\Rightarrow). Якщо границя A існує, то всім ч/п $\{x_n\} \xrightarrow{>} x_0$ відповідають ч/п $\{y_n\}$, збіжні до A , а значить, і тим, що задовольняють умови односторонності границь: $x_n < x_0$ і $x_n > x_0$.

Достатність (\Leftarrow). Якщо односторонні границі рівні між собою і дорівнюють числу A , то, виходить, ч/п $\{y_n\}$ збігаються до A і для всіх ч/п $\{x_n\} \xrightarrow{>} x_0$, у яких $x_n < x_0$, і для всіх ч/п $\{x_n\} \xrightarrow{>} x_0$, у яких $x_n > x_0$, а значить, і для всіх тих ч/п $\{x_n\}$, елементи яких коливаються навколо точки x_0 . Таким чином, для всіх ч/п $\{x_n\} \xrightarrow{>} x_0$ виконується умова: $\{y_n\} \xrightarrow{>} A$, тобто існує $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$.

Установимо, *наприклад*, використовуючи (7.3.8), чи існує границі функції $f(x) = \arctg(1/x)$ в точці $x_0 = 0$. Для цього дослідимо поведінку функції при $x \rightarrow -0$ та $x \rightarrow +0$:

$$x_0 \rightarrow -0 \Rightarrow 1/x \rightarrow -\infty \Rightarrow f(-0) = \arctg(-\infty) = -\pi/2,$$

$$x_0 \rightarrow +0 \Rightarrow 1/x \rightarrow +\infty \Rightarrow f(+0) = \arctg(+\infty) = \pi/2.$$

Аналізуємо: $f(-0) \neq f(+0)$; отже, дана функція в точці 0 границі не має. (Переконайтеся в протилежному для $f(x) = \arctg(1/x^2)$ при $x \rightarrow 0$.)

Зауваження. Якщо односторонні границі не є властивими числами, тобто $f(x_0 \pm 0) = -\infty$ або $f(x_0 \pm 0) = +\infty$, то відповідні висновки робимо згідно з наведеним вище рис. 7.3.1.

Основні властивості границь функції у точці

Теорема 7.3.3 (про єдиність границі). Функція $y = f(x)$ у точці x_0 може мати лише одну границю:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A \wedge \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = B \Rightarrow A = B. \quad (7.3.9)$$

Д о в е д е н н я базується на теоремі 7.3.1 і проводиться аналогічно тому, як це робилося для функцій натурального аргументу.

Теорема 7.3.4 (про арифметичні властивості збіжних функцій). Сума (різниця), добуток, частка двох функцій зі скінченними границями існує і дорівнює відповідно сумі (різниці), добутку, частці границь (за умови, що границя дільника відмінна від нуля) вихідних функцій:

$$\exists \lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) \pm \varphi(x)) = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \pm \lim_{x \rightarrow x_0} \varphi(x); \quad (7.3.10)$$

$$\exists \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \cdot \varphi(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \cdot \lim_{x \rightarrow x_0} \varphi(x); \quad (7.3.11)$$

зокрема

$$\exists \lim_{x \rightarrow x_0} c \cdot f(x) = c \cdot \lim_{x \rightarrow x_0} f(x), \quad c - const; \quad (7.3.12)$$

$$\exists \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{\varphi(x)} = \frac{\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)}{\lim_{x \rightarrow x_0} \varphi(x)}, \quad \text{де } \lim_{x \rightarrow x_0} \varphi(x) \neq 0. \quad (7.3.13)$$

Д о в е д е н н я теореми здійснюється за допомогою критерію існування границі „мовою n/m ”, як і для числових послідовностей. Точка x_0 може бути, як властивим дійсним числом, так і невластивим. (Пропонуємо довести хоча б одну з наведених властивостей.)

Для стислості символічних записів позначимо ε -окіл точки x_0 через $B(x_0, \varepsilon)$, де x_0 (ε) – **центр (радіус)** околу: $B(x_0, \varepsilon) = (x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon)$.

Теорема 7.3.5 (про перехід до границі в нерівностях):

1) якщо в деякому ε -околі точки x_0 значення функції $y = f(x)$ невід’ємні, то границя функції в цій точці теж невід’ємна:

$$\forall x \in B(x_0, \varepsilon): f(x) \geq 0 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A \geq 0. \quad (7.3.14)$$

Аналогічно: $\forall x \in B(x_0, \varepsilon): f(x) \leq 0 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A \leq 0$ (сформулюйте);

2) якщо в деякому ε -околі точки x_0 значення функцій $f(x)$ і $\varphi(x)$ пов'язані нерівністю $f(x) \leq (\geq) \varphi(x)$, то такою ж, за знаком, нерівністю пов'язані границі функцій у точці x_0 :

$$\forall x \in B(x_0, \varepsilon): f(x) \geq (\leq) \varphi(x) \Rightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \geq (\leq) \lim_{x \rightarrow x_0} \varphi(x); \quad (7.3.15)$$

$$3) \left. \begin{aligned} \forall x \in B(x_0, \varepsilon): \varphi(x) \leq f(x) \leq \psi(x) \\ \lim_{x \rightarrow x_0} \varphi(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} \psi(x) = A \end{aligned} \right] \Rightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A. \quad (7.3.16)$$

(Наведіть словесне формулювання твердження самостійно.)

Д о в е д е н н я.

1. Припустимо, що в (7.3.14) число A від'ємне, тоді маємо:

$$A < 0 \Rightarrow |y_n - A| \geq |A|, \text{ де } y_n = f(x_n).$$

Але якщо A – границя функції в точці x_0 , то згідно з означенням (7.3.1) для всіх ч/п значень аргументу, збіжних до x_0 , всі відповідні ч/п вартостей функції збігаються до A , тобто $\forall \varepsilon > 0: |y_n - A| < \varepsilon$.

Як бачимо, наше припущення вступає в суперечність з тим, що число A є границею функції. Отже, $A \geq 0$. (Обміркуйте випадок $A \leq 0$.)

2. Нехай $\forall x \in B(x_0, \varepsilon): f(x) \geq \varphi(x)$. Введемо в розгляд допоміжну функцію $u(x) = f(x) - \varphi(x)$. Тоді $\forall x \in B(x_0, \varepsilon): u(x) \geq 0$. Залучаючи (7.3.14) і властивість границі різниць функцій, отримуємо:

$$\begin{aligned} u(x) \geq 0 &\Rightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} u(x) \geq 0 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) - \varphi(x)) \geq 0 \Rightarrow \\ &\Rightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) - \lim_{x \rightarrow x_0} \varphi(x) \geq 0 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \geq \lim_{x \rightarrow x_0} \varphi(x). \end{aligned}$$

3. На підставі (7.3.15) і умов теореми маємо ланцюжок умовиводів (коментар наведіть самостійно), який приводить до належного висновку:

$$\begin{aligned} \forall x \in B(x_0, \varepsilon): \varphi(x) \leq f(x) \leq \psi(x) &\Rightarrow \begin{cases} \varphi(x) \leq f(x) \Rightarrow A \leq \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \\ f(x) \leq \psi(x) \Rightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \leq A \end{cases} \Rightarrow \\ &\Rightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A. \end{aligned}$$

Зауваження. Теорема 7.3.5 справедлива і для односторонніх границь, і для випадків, коли в лівих частинах (до символу \Rightarrow) співвідношень (7.3.14), (7.3.15), (7.3.16) знаки строгих нерівностей.

Наприклад, $\forall x \in (10, +\infty): f(x) = 1 - 1/x < 1 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 1.$

Деякі важливі границі та практичні рекомендації щодо обчислення границь

Під „важливими” розуміють границі, які досить широко використовуються (можливо, як готові формули) при обчисленні границь (помимо, звичайно, границь основних елементарних функцій).

1. *Границя відношення двох многочленів від змінної x при прямуванні аргументу до нескінченності:*

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{P_k(x)}{P_m(x)} &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{a_k x^k + a_{k-1} x^{k-1} + a_{k-2} x^{k-2} + \dots + a_1 x + a_0}{b_m x^m + b_{m-1} x^{m-1} + b_{m-2} x^{m-2} + \dots + b_1 x + b_0} = \left(\frac{\infty}{\infty} \right) = \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{a_k x^k}{b_m x^m} = \left(\frac{\infty}{\infty} \right) = \begin{cases} \infty, & k > m; \\ 0, & k < m; \\ a_k / b_k, & k = m. \end{cases} \end{aligned} \quad (7.3.17)$$

(Опишіть словесно всі три випадки, які зустрічаються при обчисленні границь відношення двох многочленів при $x \rightarrow \infty$.)

Співвідношення (7.3.17) справедливе і тоді, коли $P_k(x)$ або $P_m(x)$ є одночленом відповідно степеня k , m .

Застосування (7.3.17) до обчислення границь не потребує ніяких перетворень початкового виразу (винесення за дужки в чисельнику і знаменнику найвищого степеня x чи ділення чисельника і знаменника на найвищий степінь аргументу), а дає змогу зразу записати результат, порівнявши k з m (як і для ч/п).

Якщо обчислюються односторонні границі ($x \rightarrow -\infty$, $x \rightarrow +\infty$), то на результат (точніше, на знак результату) впливає також парність чисел k та m . Наприклад,

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{3x^2 - 4x}{2x + 1} = \left(\frac{\infty}{\infty} \right) = \pm\infty, \text{ а } \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{3x^3 - 4x}{2x + 1} = \left(\frac{\infty}{\infty} \right) = +\infty.$$

Пропонуємо сформулювати загальний висновок щодо впливу парності чисел k та m на знак результату.

Зауваження. Висновки співвідношення (7.3.17) застосовні і до дробів, у яких чисельник і (або) знаменник містять степені з дробовими показниками – кореневу ірраціональність.

Наприклад,

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^2 + 7x - 5}{\sqrt{x^5 - 1} + \sqrt[3]{x}} = \left(\frac{\infty}{\infty} \right) = \left| \begin{array}{l} k = 2; m = 2,5 \\ k < m \end{array} \right| = 0.$$

2. *Границя дробово-раціональної функції від змінної x при прямуванні аргументу до властивого числа x_0 :*

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{P_k(x)}{P_m(x)} = \begin{cases} f(x_0), & P_m(x_0) \neq 0; \\ \infty, & P_k(x_0) \neq 0, P_m(x_0) = 0; \\ 0/0, & P_k(x_0) = P_m(x_0) = 0. \end{cases} \quad (7.3.18)$$

Пропонуємо перші два випадки обґрунтувати самостійно, залучаючи арифметичні властивості границь та зв'язок між н/м і н/в, а ми розглянемо найбільш цікавий і найбільш обтяжливий випадок – невизначеність. Рівність нулеві чисельника і знаменника означає, що x_0 є коренем відповідних многочленів, а отже, кожний з них ділиться без остачі на різницю $(x - x_0)$:

$$P_k(x) = (x - x_0)P_{k-1}(x), \quad P_m(x) = (x - x_0)P_{m-1}(x). \quad (7.3.19)$$

Ця обставина є ключем до розкриття невизначеності:

виконуємо ділення поліномів $P_k(x)$, $P_m(x)$ на двочлен $(x - x_0)$ („сходінками” або за схемою Горнера);

подаємо чисельник і знаменник згідно з (7.3.19);

скорочуємо дріб на множник $(x - x_0)$ і здійснюємо повторно граничний перехід (якщо x_0 не є однократним коренем многочленів, то знову прийдемо до невизначеності „нуль на нуль”).

Зауваження. Подібним чином, тобто вилученням множника $(x - x_0)$, розкривають невизначеності „нуль на нуль” і тоді, коли чисельник і (або) знаменник дробу містять кореневі ірраціональності. При цьому тотожні перетворення дробу виконують так, щоб позбутися ірраціональностей, які дають невизначеність, і домогтися „появи” множника $(x - x_0)$.

Знайдемо, *наприклад*, границю $L = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{x+2} - 2}{\sqrt{4-x} - \sqrt{x}}$.

Граничний перехід дає „нуль на нуль”. Щоб вилучити множник $(x - 2)$, помножимо чисельник і знаменник дробу на спряжені їм вирази: $\sqrt{x+2} + 2$, $\sqrt{4-x} + \sqrt{x}$. Тоді отримаємо:

$$L = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-2)(\sqrt{4-x} + \sqrt{x})}{(4-2x)(\sqrt{x+2} + 2)} = \left(\frac{0}{0}\right) = -\frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{4-x} + \sqrt{x}}{\sqrt{x+2} + 2} = -\frac{\sqrt{2}}{4}.$$

3. Перша чудова границя.

Теорема 7.3.6. Границя відношення синуса нескінченно малого аргументу до цього ж аргументу дорівнює одиниці:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = \left(\frac{0}{0}\right) = 1. \quad (7.3.20)$$

Д о в е д е н н я. Візьмемо гострий кут x в першій чверті тригонометричного круга, тобто $0 < x < \pi/2$ (рис. 7.3.2), де $OD = 1$, $\widetilde{AD} = x$, $AB = \sin x$, $CD = \operatorname{tg} x$. Зіставляючи площі трикутника OAD , кругового сектора OAD і трикутника OCD , отримуємо:

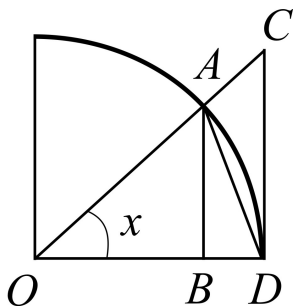


Рис. 7.3.2. Чверть тригонометричного круга

$$\begin{aligned} S_{\triangle OAD} &< S_{\text{сек.} OAD} < S_{\triangle OCD} \Rightarrow \\ \Rightarrow \frac{1}{2} OD \cdot AB &< \frac{1}{2} OD \cdot \widetilde{AD} < \frac{1}{2} OD \cdot CD \Rightarrow \\ \Rightarrow \sin x &< x < \operatorname{tg} x \Rightarrow 1 < \frac{x}{\sin x} < \frac{1}{\cos x}. \end{aligned}$$

Замінюємо члени нерівності оберненими величинами і, з урахуванням умови $0 < x < \frac{\pi}{2}$, одержуємо нерівність: $\cos x < \frac{\sin x}{x} < 1$.

Далі здійснимо перехід до границі при $x \rightarrow 0$ (див. теорему 7.3.5, твердження 3):

$$\lim_{x \rightarrow 0} \cos x < \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} < \lim_{x \rightarrow 0} 1 \Rightarrow \left| \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 0} \cos x = 1 \\ \lim_{x \rightarrow 0} 1 = 1 \end{array} \right| \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1.$$

Таким чином, для границі справа (7.3.20) доведено.

Для лівосторонньої границі, коли $-\pi/2 < x < 0$, в силу непарності (парності) функції $\sin x$ ($\cos x$), приходимо до того ж результату, адже $\frac{\sin(-x)}{-x} = \frac{\sin x}{x}$. Отже, для $f(x) = \frac{\sin x}{x}$ маємо:

$$f(+0) = f(-0) = 1 \Rightarrow \exists \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 1.$$

Формулу (7.3.20) не слід розуміти буквально в тому смислі, що змінна x обов'язково повинна прямувати до нуля. Аргумент може прямувати до будь-якого x_0 (властивого чи невластивого), а аргументом під знаком синуса може бути довільна н/м $\alpha(x)$ при $x \rightarrow x_0$:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\sin \alpha(x)}{\alpha(x)} = \left(\frac{0}{0} \right) = 1 \quad (7.3.21)$$

– узагальнення формули (7.3.20).

Розглянемо відповідні ілюстративні *приклад*и:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(2x(x-1))}{x^2 - x} = \left(\frac{0}{0} \right) = \left| \begin{array}{l} 2x(x-1) = \alpha \\ x \rightarrow 0 \Rightarrow \alpha \rightarrow 0 \end{array} \right| = \lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{\sin \alpha}{\alpha/2} = 2;$$

$$\lim_{x \rightarrow \pi/2} \frac{\cos x}{(x - \pi/2)^2} = \left(\frac{0}{0} \right) = \left| \begin{array}{l} x - \pi/2 = \alpha \\ x \rightarrow \pi/2 \Rightarrow \alpha \rightarrow 0 \end{array} \right| = \lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{\sin \alpha}{\alpha} \cdot \frac{1}{\alpha} = \infty.$$

На практиці, як готові формули (*доведіть їх!*), часто використовують наслідки з (7.3.20), (7.3.21):

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\sin x} = \left(\frac{0}{0}\right) = 1, \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin x}{x} = \left(\frac{0}{0}\right) = 1, \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x}{x} = \left(\frac{0}{0}\right) = 1;$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin ax}{x} = \left(\frac{0}{0}\right) = a, \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin ax}{\sin bx} = \left(\frac{0}{0}\right) = \frac{a}{b} \quad (a, b - \text{const}) \quad \text{та ін.}$$

Область застосування першої чудової границі – розкриття невідзначеності „нуль на нуль”, яка породжується функціями, що містять як складову частину тригонометричні та обернені тригонометричні функції.

4. Друга чудова границя.

Теорема 7.3.7. Границя степеневпоказникової функції $y = \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$ при прямуванні аргументу x до нескінченності дорівнює числу e :

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = (1^\infty) = e. \quad (7.3.22)$$

Д о в е д е н н я. Спочатку нагадаємо, що цілою частиною дійсного числа x називається найбільше ціле число, яке не перевищує x . Отже, $[x] \leq x < [x] + 1$, де $[x]$ – позначення цілої частини (функції *антьє* від x); до того ж $[x] = n \quad \forall x \in [n, n+1)$, де $n \in \mathbf{N}$. Це означає, що коли $x \rightarrow +\infty$ (як неперервна змінна), то $n \rightarrow +\infty$ (як дискретна змінна).

З урахуванням наведеного маємо:

$$[x] \leq x < [x] + 1 \Rightarrow n \leq x < n + 1 \Rightarrow \frac{1}{n+1} < \frac{1}{x} \leq \frac{1}{n} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 1 + \frac{1}{n+1} < 1 + \frac{1}{x} \leq 1 + \frac{1}{n} \Rightarrow \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^n < \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x < \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}.$$

Здійснимо граничний перехід в отриманій нерівності при $x \rightarrow +\infty$ ($n \rightarrow +\infty$), спираючись на теорему 7.3.5 (формулу (7.3.16)). Границі першого і третього членів нерівності дорівнюють числу e :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left[\left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{n+1} \right]^{\frac{n}{n+1}} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left[\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \right]^{\frac{n+1}{n}} = e.$$

Отже,
$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = (1^{+\infty}) = e.$$

Для доведення співвідношення $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = (1^{-\infty}) = e$ (зробіть це самостійно) достатньо ввести нову змінну $t = -(x+1)$. Тоді отримаємо: $x \rightarrow -\infty \Leftrightarrow t \rightarrow +\infty$.

Іншу формулу другої чудової границі одержуємо, якщо в (7.3.22) покласти $t = 1/x$ (тоді $x = 1/t$ і $x \rightarrow \infty \Leftrightarrow t \rightarrow 0$):

$$\lim_{t \rightarrow 0} (1+t)^{1/t} = (1^\infty) = e. \quad (7.3.23)$$

Формули (7.3.22), (7.3.23) не слід розуміти буквально в тому смислі, що незалежна змінна обов'язково повинна прямувати до нескінченності або нуля. Аргумент може прямувати до будь-якого числа x_0 (властивого чи невластивого), але **структура виразу** під знаком границі повинна бути такою: основою степеня є сума одиниці і н/м $\alpha = \alpha(x)$ при $x \rightarrow x_0$, а показник степеня – величина, обернена до н/м $\alpha(x)$:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} (1+\alpha)^{1/\alpha} = (1^\infty) = e. \quad (7.3.24)$$

Область застосування другої чудової границі – розкриття невивзначеності „одиниця в нескінченності”, яка породжується степеневопоказниковими функціями $y = f(x) = u(x)^{v(x)}$, а техніка відшукування другої чудової границі для функції неперервної змінної така ж сама, як і для ч/п.

Знайдемо, *наприклад*, $L = \lim_{x \rightarrow 1} (\cos 2\pi x)^{\frac{1}{\sin \pi x}}$. Граничний перехід дає невивзначеність 1^∞ : $(\cos 2\pi)^{1/\sin \pi} = 1^{1/0} = |1/0 = \infty| = 1^\infty$.

Виділимо в основі степеня одиницю і н/м та тотожним чином внесемо відповідний показник степеня:

$$L = \lim_{x \rightarrow 1} \left[(1 + (\cos 2\pi x - 1))^{\frac{1}{\cos 2\pi x - 1}} \right]^{\frac{\cos 2\pi x - 1}{\sin \pi x}}.$$

Границя функції в квадратних дужках дорівнює e . Залишається обчислити границю показника степеня і записати відповідь:

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\cos 2\pi x - 1}{\sin \pi x} = \left(\frac{0}{0} \right) = - \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2 \sin^2 \pi x}{\sin \pi x} = -2 \lim_{x \rightarrow 1} \sin \pi x = 0 \Rightarrow L = e^0 = 1.$$

На практиці, як готові формули, використовують наслідки з формул (7.3.22), (7.3.24):

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{a}{bx} \right)^x &= e^{\frac{a}{b}}, & \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{a}{x} \right)^{bx} &= e^{ab}; \\ \lim_{x \rightarrow 0} (1 + ax)^{\frac{1}{bx}} &= e^{\frac{a}{b}}, & \lim_{x \rightarrow 0} (1 + ax)^{\frac{b}{x}} &= e^{ab}. \end{aligned}$$

7.4. Порівняння н/м, застосування еквівалентних н/м до обчислення границь

Нехай $\alpha = \alpha(x)$, $\beta = \beta(x)$, $\gamma = \gamma(x)$ – н/м функції (величини) при $x \rightarrow x_0$, де x_0 – скінченне (власне дійсне) число або нескінченність (невласне дійсне число): ∞ , $-\infty$, $+\infty$. Хоча всі н/м мають границю 0, ступінь („швидкість“) прямування до нього буває різною, тому й виникає потреба в їх порівнянні.

Нескінченно малі $\alpha = \alpha(x)$, $\beta = \beta(x)$ називаються **порівнянними**, якщо хоча б одна з границь $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\alpha}{\beta}$, $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\beta}{\alpha}$ є скінченною.

Отже, нехай тепер α , β , γ – порівнянні н/м при $x \rightarrow x_0$, і всі границі, які розглядаються нижче, скінченні; наприклад, $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\alpha}{\beta} = A$.

Величини α , β називаються н/м **одного порядку**, якщо границя їхнього відношення не дорівнює нулю:

$$\alpha = O(\beta) - \text{„альфа дорівнює } O \text{ велике від бета“} \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\alpha}{\beta} = A \neq 0.$$

Зокрема, при $A = 1$ н/м α і β називаються **еквівалентними**: α

$$\alpha \sim \beta - \text{„альфа еквівалентне (рівносильне) бета“} \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\alpha}{\beta} = 1.$$

$$\text{Наприклад, } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = \left(\frac{0}{0} \right) = 1 \Rightarrow \sin x \sim x \text{ при } x \rightarrow 0.$$

Величина α називається н/м **більш високого порядку**, ніж β , якщо границя їхнього відношення дорівнює нулю:

$$\alpha = o(\beta) - \text{„альфа дорівнює } o \text{ маленьке від бета”} \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\alpha}{\beta} = 0.$$

$$\text{Наприклад, } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 x}{x} = \left(\frac{0}{0} \right) = 0 \Rightarrow \sin^2 x = o(x) \text{ при } x \rightarrow 0.$$

Особливий інтерес викликають еквівалентні н/м, а тому відзначимо деякі їхні властивості:

1) *рефлексивність*: $\alpha \sim \alpha$;

2) *симетричність*: $\alpha \sim \beta \Leftrightarrow \beta \sim \alpha$;

3) *транзитивність*: $\alpha \sim \beta \wedge \beta \sim \gamma \Rightarrow \alpha \sim \gamma$;

4) *про головну частину суми двох н/м*: $\beta = o(\alpha) \Leftrightarrow \gamma = \alpha + \beta \sim \alpha$, де α – **головна частина** н/м γ .

Пропонуємо самостійно навести словесні формулювання і довести слушність цих тверджень, а ми зупинимось на теоремі, яку доцільно застосовувати при обчисленні границь (і заодно дамо взірць для доведення властивостей 1) – 4)).

Теорема 7.4.1 (про заміну н/м рівносильними н/м). При відшуванні границі відношення двох н/м кожна з них може бути замінена, без впливу на існування та величину границі, будь-якою еквівалентною їй н/м:

$$(\alpha \sim \alpha_1 \wedge \beta \sim \beta_1) \Rightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\alpha}{\beta} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\alpha_1}{\beta_1} = 1. \quad (7.4.1)$$

Д о в е д е н н я дуже просте. Справді, якщо $\alpha \sim \alpha_1$ і $\beta \sim \beta_1$, то помножаючи чисельник і знаменник вихідного дробу на добуток $\alpha_1 \cdot \beta_1$ і залучаючи арифметичні властивості границь та симетричність еквівалентних н/м, отримуємо (7.4.1):

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\alpha}{\beta} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\alpha}{\alpha_1} \cdot \frac{\alpha_1}{\beta_1} \cdot \frac{\beta_1}{\beta} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\alpha_1}{\beta_1}.$$

Ряд еквівалентних н/м отримуємо з першої чудової границі, інші потребують окремого дослідження.

Якщо $\alpha = \alpha(x)$ – н/м при $x \rightarrow x_0$, то:

$$\begin{array}{lll} \sin \alpha \sim \alpha, & \arcsin \alpha \sim \alpha, & \operatorname{tg} \alpha \sim \alpha, \\ \operatorname{arctg} \alpha \sim \alpha, & 1 - \cos^2 \alpha \sim 1/2 \cdot \alpha^2, & \operatorname{tg} \alpha - \sin \alpha \sim 0,5 \alpha^3, \\ e^\alpha - 1 \sim \alpha, & \ln(1 \pm \alpha) \sim \pm \alpha, & \sqrt[n]{1 \pm \alpha} - 1 \sim \pm \alpha/n. \end{array}$$

Приклад.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 5x}{\operatorname{arctg} 6x} = \left(\frac{0}{0} \right) = \left| \frac{\sin 5x \sim 5x}{\operatorname{arctg} 6x \sim 6x} \right| = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{5x}{6x} = \frac{5}{6},$$

де $x_0 = 0$, у чисельнику $\alpha(x) = 5x$ – н/м при $x \rightarrow 0$, у знаменнику: $\alpha(x) = 6x$ – н/м при $x \rightarrow 0$.

Використання еквівалентних н/м при обчисленні границь є доволі ефективним засобом.

Розглянуті підходи до встановлення граничних вартостей функцій $y = f(x)$ за умови прямування аргументу x до деякого фіксованого x_0 без будь-яких обмежень переносяться на сигнальні (часові) функції $y = f(t)$ (на якій підставі?). Відповідно до того як розрізняють функції неперервної і дискретної змінної, сигнали теж поділяють на *неперервні* і *дискретні*.

Неперервні, або **аналогові**, сигнали (від грецьк. analogia – відповідність, схожість) – це сигнали, які описуються на певному проміжку (скінченному чи нескінченному) неперервною часовою функцією.

Наприклад,

$$y(t) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(t-a)^2}{2\sigma^2}\right),$$

де a і σ деякі дійсні числа (сталі).

Сигнали, які описуються часовими функціями дискретного аргументу, тобто послідовностями, називаються (однойменно) **дискретними** сигналами: $y_n = y(n \Delta t)$, де величину $\Delta t = h$ називають **інтервалом**, або **кроком**, дискретизації; $n = 0, 1, 2, \dots, N$, $N \in \mathbf{N}$. При необмеженому зменшенні Δt : $\Delta t \rightarrow 0$, дискретний сигнал наближається до аналогового.

Установлено, що існує крок дискретизації, при якому неперервний сигнал може бути відновлений за дискретним без утрати інформації, що є важливим з економічної точки зору.

Запитання для самодіагностики засвоєння матеріалу

Відповіді на всі запитання сформулюйте словесно, запишіть в символічній формі, обґрунтуйте (на підставі означень, теорем, правил, формул тощо), наведіть відповідні конкретні приклади.

1. Що називається числовою послідовністю (ч/п), формулою загального члена ч/п?
2. Що таке стаціонарна ч/п, дискретна ч/п?
3. Назвіть арифметичні операції над ч/п і сформулюйте правила отримання загального члена результату операції.
4. Які ч/п називають обмеженими, необмеженими?
5. Які ч/п відносять до класу монотонних послідовностей?
6. Які дискретні змінні називають нескінченно малими (н/м)?
7. У якому випадку кажуть, що ч/п в процесі змінювання прямує до нуля, або – граничним значенням (границею) змінної є нуль?
8. Дайте означення н/м, сформулюйте їх арифметичні властивості.
9. Які дискретні змінні називають нескінченно великими (н/в)?
10. В якому випадку кажуть, що ч/п в процесі змінювання прямує до нескінченності, або – її граничним значенням (границею) є нескінченність, або – має нескінченну границю?
11. В якому випадку кажуть, що ч/п прямує до „мінус нескінченності” ($x_n \rightarrow -\infty$), „плюс нескінченності” ($x_n \rightarrow +\infty$)?
12. Дайте означення н/в, сформулюйте їх арифметичні властивості.
13. Сформулюйте і доведіть теорему про зв'язок між н/в і н/м.
14. Як називаються символічні вирази виду: $0/0$, ∞/∞ , $0 \cdot \infty$, $+\infty - \infty$, 1^∞ , 0^0 , ∞^0 ?
15. Що розуміють під розкриттям невизначеності?
16. Яке число a називається границею ч/п?
17. В якому випадку кажуть, що ч/п є збіжною (розбіжною), або ч/п збігається (розбігається)?
18. У чому полягає критерій збіжності ч/п „мовою н/м”?

19. Сформулюйте і доведіть теорему про єдність границі.
20. Сформулюйте і доведіть теорему про арифметичні властивості збіжних ч/п.
21. Опишіть загальний підхід до розкриття невизначеностей.
22. Наведіть загальний порядок (алгоритм) відшукування границь.
23. Яке число A називається границею функції $y = f(x)$ у точці x_0 ?
24. При якому A кажуть, що функція має скінченну границю?
25. Яка функція називається нескінченно малою (н/м), нескінченно великою (н/в) при $x \rightarrow x_0$?
26. Сформулюйте і доведіть критерій існування скінченної границі „мовою н/м”.
27. Які границі функції називають односторонніми?
28. Сформулюйте і доведіть критерій існування скінченної границі „мовою односторонніх границь”.
29. Сформулюйте і доведіть теореми про: єдиність границі, арифметичні властивості збіжних функцій, перехід до границі у нерівностях.
30. Як розкриваються невизначеності, що породжуються відношенням многочленів, дробово-раціональною (іраціональною) функцією?
31. Доведіть теореми про першу і другу чудові границі.
32. У чому полягає порівняння н/м?
33. Які н/м називаються еквівалентними? Наведіть їхні властивості.
34. Опишіть застосування еквівалентних н/м до обчислення границь.
35. Які еквівалентні н/м впливають з першої чудової границі?

Задачі та вправи

1. Записати п'ять перших членів послідовності:

а) $\{x_n\} = \left\{ \frac{1}{1+n^2} \right\};$

б) $\{x_n\} = \left\{ \frac{2n-1}{2n+4} \right\};$

в) $\{x_n\} = \left\{ 2 + (-1)^n \frac{n+1}{n} \right\};$

г) $\{x_n\} = \left\{ (-1)^n \arcsin \frac{\sqrt{3}}{2} + \pi n \right\}.$

2. Записати формулу загального члена послідовності:

а) $\frac{2}{3}, \frac{4}{9}, \frac{6}{27}, \frac{8}{81}, \dots;$

б) $\operatorname{tg} \frac{\pi}{4}, 2\operatorname{tg} \frac{\pi}{8}, 3\operatorname{tg} \frac{\pi}{16}, 4\operatorname{tg} \frac{\pi}{32}, \dots;$

$$\text{в)} -\frac{1}{2 \cdot 5}, \frac{1}{3 \cdot 6}, -\frac{1}{4 \cdot 7}, \frac{1}{5 \cdot 8}, \dots; \quad \text{г)} \frac{1}{1 \cdot 3!}, -\frac{1}{6 \cdot 7!}, \frac{1}{11 \cdot 11!}, -\frac{1}{16 \cdot 15!}, \dots$$

3. Знайти границю послідовності $1, \frac{1}{8}, \frac{1}{27}, \dots, \frac{1}{n^3}, \dots$ при $n \rightarrow \infty$.

Яким має бути число n для того, щоб абсолютне значення різниці між x_n і її границею було меншим від 10^{-3} ?

4. Дано числову послідовність: $x_1 = 0,9, x_2 = 0,99, x_3 = 0,999, \dots, x_n = 0, \underbrace{999\dots 9}_n, \dots$ Чому дорівнює $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$? Знайти n , при якому абсолютне значення різниці між x_n і її границею не перевищує $0,0001$.

5. Довести, що послідовність $\{x_n\} = \left\{ \frac{2n}{n+3} \right\}$ прямує до 2 при необмеженому зростанні n . Починаючи з якого n абсолютне значення різниці між x_n і 2 не перевищує 10^{-4} ?

6. Довести, що для послідовності $\{x_n\} = \{1 + (-1)^n\}$ при $n \rightarrow \infty$ границі не існує.

7. Показати, що послідовність $\{x_n\} = \{2^n\}$ є нескінченно великою при $n \rightarrow \infty$. Для яких значень n величина x_n буде більшою ніж 10^3 ?

8. Знайти границі числових послідовностей:

$$1) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{6n^2 + n - 1}{2n^2 - 9n + 3};$$

$$2) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 + 3n + 4}{n(2 - 5n)};$$

$$3) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n^3 - 7n + 3}{5n^2 + 8};$$

$$4) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(2n+1)^3 - (n-1)^3}{(2n+1)^3 + (n-1)^3};$$

$$5) \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{3n-1}{2n+3} - \frac{2+3n^2}{2n^2-7} \right);$$

$$6) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n^3+2} - \sqrt[3]{1-4n^2}}{\sqrt[4]{2n^3-3n-1} + \sqrt[5]{5n^4+9}};$$

$$7) \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sqrt{n^2+3} - \sqrt{n^2-3} \right);$$

$$8) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)!}{(n+2)! - n!};$$

$$9) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5^n - 2^n}{5^n + 2^n};$$

$$10) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3^n - 5^n}{3^n + 4^n}.$$

9. Знайти границі функцій:

$$1) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + 3}{3x - 1};$$

$$2) \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 + 4x + 3}{\sqrt{x + 5}};$$

$$3) \lim_{x \rightarrow \pi/4} \frac{1 + \operatorname{tg} x}{2 + \cos 2x};$$

$$4) \lim_{x \rightarrow -2} \left(\frac{1}{x^2 + 2} + \frac{2x}{x^3 - 1} \right);$$

$$5) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3\sqrt{x} + 8x^2 - 1}{x + \sin 5x};$$

$$6) \lim_{x \rightarrow -3} \frac{x^2 + 4x + 3}{x^3 - 9x};$$

$$7) \lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^3 + 3x^2 + 2x}{x^2 - x - 6};$$

$$8) \lim_{x \rightarrow 1/2} \frac{8x^3 - 1}{6x^2 - 5x + 1};$$

$$9) \lim_{x \rightarrow -3} \frac{(x + 3)\sqrt{1 - x}}{9 - x^2};$$

$$10) \lim_{x \rightarrow 2} \left(\frac{1}{x - 2} - \frac{12}{x^3 - 8} \right);$$

$$11) \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{x + 2}{x^2 - 5x + 4} + \frac{x - 4}{3(x^2 - 3x + 2)} \right);$$

$$12) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^2 + 1}{x^3 - 3x^2 + 4};$$

$$13) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{7x^5 + 15}{5 + 8x^2 - 3x^4 + 1};$$

$$14) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4x^3 - 9}{8x^3 - 3x^2 + 5x + 1};$$

$$15) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5x^4 - 1}{(1 - 2x^3)(6x - 7)};$$

$$16) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{6x^4}{3x^3 + 1} - 2x \right);$$

$$17) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2x^3}{4x^2 - 3} - \frac{2x^2}{4x + 3} \right);$$

$$18) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[3]{8x^5 + 3} + \sqrt{2x^3 - 1}}{\sqrt[4]{x^5 + 4x^4 + 2} - \sqrt[3]{x^5 - 5}};$$

$$19) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[3]{x^2 + 8x - 1} + x^2}{\sqrt{4x^3 - 3} - \sqrt[5]{x^9 + x^8 + 1}};$$

$$20) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x - 2}{\sqrt{5 + x^2} - 3};$$

$$21) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{3 - \sqrt{8 + x}}{x - 1};$$

$$22) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3 - \sqrt{x^2 + 9}}{\sqrt{x^2 + 1} - 1};$$

$$23) \lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sqrt{x} - 2}{\sqrt{1 + 2x} - 3};$$

$$24) \lim_{x \rightarrow -8} \frac{2 + \sqrt[3]{x}}{\sqrt{1 - x} - 3};$$

$$25) \lim_{x \rightarrow 16} \frac{\sqrt{x} - 4}{\sqrt[4]{x} - 2};$$

- $$26) \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 9}{\sqrt{x+13} - 2\sqrt{x+1}};$$
- $$27) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\sqrt[3]{27+x} - \sqrt[3]{27-x}};$$
- $$28) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\sqrt{x^2+1} - \sqrt{x^2-1} \right);$$
- $$29) \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left(\sqrt{4x^2+3x} - \sqrt{4x^2-x+5} \right);$$
- $$30) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 5x}{\sin 3x};$$
- $$31) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \cdot \operatorname{tg} 4x}{1 - \cos x};$$
- $$32) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos 7x - \cos 3x}{1 - \cos 2x};$$
- $$33) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3 \operatorname{arctg} x}{\sqrt{4+x} - 2};$$
- $$34) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \sin x}{1 - \sqrt{\cos x}};$$
- $$35) \lim_{x \rightarrow \pi/2} \frac{1 - \sin x}{(\pi/2 - x)^2};$$
- $$36) \lim_{x \rightarrow \pi/2} \frac{\operatorname{ctg} 3x}{\operatorname{tg} 2x};$$
- $$37) \lim_{x \rightarrow \pi/4} \frac{(\pi - 4x)^2}{1 - \sin 2x};$$
- $$38) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x^2 - x + 1} - 1}{\operatorname{tg} \pi x};$$
- $$39) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1 + x \sin x} - \sqrt{\cos 2x}}{\operatorname{tg}^2(x/2)};$$
- $$40) \lim_{x \rightarrow \infty} x^2 (1 - \cos(1/x));$$
- $$41) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos(1 - \cos x)}{x^4};$$
- $$42) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{2}{x} \right)^{\frac{3x-1}{x}};$$
- $$43) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2x+1}{3x-2} \right)^x;$$
- $$44) \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left(\frac{3x+2}{x-2} \right)^x;$$
- $$45) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{4x+3}{4x-5} \right)^{3x-1};$$
- $$46) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2+7}{x^2+2} \right)^{\frac{x^2+1}{5}};$$
- $$47) \lim_{x \rightarrow 8} \left(\frac{x+1}{2x-7} \right)^{\frac{1}{\sqrt[3]{x}-2}};$$
- $$48) \lim_{x \rightarrow 0} (1 + \sin x)^{\operatorname{ctg} 3x};$$
- $$49) \lim_{x \rightarrow 0} \left(1 + \operatorname{tg}^2 \sqrt{x} \right)^{\frac{1}{2x}};$$
- $$50) \lim_{x \rightarrow 8} (3x - 23)^{\frac{1}{8-x}};$$
- $$51) \lim_{x \rightarrow -2} (9 + 4x)^{1/(x+2)};$$
- $$52) \lim_{x \rightarrow 2} \left(\frac{\cos 2}{\cos x} \right)^{1/(x-2)};$$
- $$53) \lim_{x \rightarrow 4\pi} (\cos x)^{\frac{\operatorname{ctg} x}{\sin 2x}}.$$

10. Обчислити односторонні границі функції:

$$\begin{array}{ll} \text{а) } \lim_{x \rightarrow 3+0} \frac{2}{x-3}, \lim_{x \rightarrow 3-0} \frac{2}{x-3}; & \text{б) } \lim_{x \rightarrow 1+0} \frac{|x-1|}{x-1}, \lim_{x \rightarrow 1-0} \frac{|x-1|}{x-1}; \\ \text{в) } \lim_{x \rightarrow 2+0} \frac{1}{3^{x-2}}, \lim_{x \rightarrow 2-0} \frac{1}{3^{x-2}}; & \text{г) } \lim_{x \rightarrow \pi/4+0} 2^{\operatorname{tg} 2x}, \lim_{x \rightarrow \pi/4-0} 2^{\operatorname{tg} 2x}; \\ \text{д) } \lim_{x \rightarrow +0} \frac{1}{1+e^{1/x}}, \lim_{x \rightarrow -0} \frac{1}{1+e^{1/x}}; & \text{е) } \lim_{x \rightarrow -1+0} 5^{\frac{1}{(x+1)^2}}, \lim_{x \rightarrow -1-0} 5^{\frac{1}{(x+1)^2}}. \end{array}$$

11. Показати, що при $x \rightarrow 0$ нескінченно малі функції $y = 1 - \cos x$ і $y = x \cdot (\sqrt{1+x} - 1)$ є еквівалентними.

12. При $x \rightarrow 0$ функції $y = \ln(1+x)$ і $y = \sin 2x - \sin x$ є нескінченно малими. Порівняйте їх. Чи будуть вони еквівалентними?

13. Функція $\beta(x) = x^a$, $a > 0$, нескінченно мала при $x \rightarrow 0$. Знайти a таке, щоб нескінченно малі $y(x)$ при $x \rightarrow 0$ і $\beta(x)$ були одного порядку:

$$\begin{array}{ll} \text{а) } y = \frac{8x^7}{x^{10} + 2x^5 + 1}; & \text{б) } y = e^{\sqrt[3]{x}} - 1; \\ \text{в) } y = \ln(1 + \operatorname{tg} x); & \text{г) } y = \sqrt[4]{16x + \sqrt[4]{x^5}}. \end{array}$$

14. Обчислити границі функцій, використовуючи еквівалентні н/м:

$$\begin{array}{ll} 1) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 15x}{\sin 10x}; & 2) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 4x}{1 - \cos 3x}; \\ 3) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin^2 7x}{x \cdot \operatorname{tg} 6x}; & 4) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{arctg} \sqrt[4]{x^3}}{e^{\sqrt{x}} - 1}; \\ 5) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln^2(1+5x)}{\sin^2 4x}; & 6) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos 4x - \cos 2x}{\arcsin^2 3x}; \\ 7) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln \cos x}{x^2}; & 8) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{\sin 3x} - 1}{\arcsin(\ln(1-9x))}; \\ 9) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[4]{1+x^2} - 1}{\operatorname{arctg}^2(x/2)}; & 10) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[5]{1+\sin 4x} - 1}{\arcsin(e^{-2x} - 1)}. \end{array}$$

15. Враховуючи, що при $x \rightarrow 0$ функції $\sqrt[n]{1+x} - 1$ і x/n є еквівалентними нескінченно малими, обчислити наближено: а) $\sqrt[3]{1047}$; б) $\sqrt[3]{8144}$; в) $\sqrt[5]{1,1}$; г) $\sqrt[5]{1080}$.

16. Враховуючи, що при $x \rightarrow 0$ функції $\ln(1+x)$ і x є еквівалентними нескінченно малими, обчислити наближено натуральні логарифми таких чисел: а) 1,01; б) 1,02; в) 1,1; г) 1,2.

Відповіді

1. а) $1/2, 1/5, 1/10, 1/17, 1/26, \dots$; б) $1/6, 3/8, 5/10, 7/12, 9/14, \dots$; в) $0, \frac{7}{2}, \frac{2}{3}, \frac{13}{4}, \frac{4}{5}, \dots$; г) $\frac{2\pi}{3}, \frac{7\pi}{3}, \frac{8\pi}{3}, \frac{13\pi}{3}, \frac{14\pi}{3}, \dots$.

2. а) $\frac{2n}{3^n}$; б) $n \operatorname{tg} \frac{\pi}{2^{n+1}}$; в) $\frac{(-1)^n}{(n+1)(n+4)}$; г) $\frac{(-1)^{n+1}}{(5n-4) \cdot (4n-1)!}$.

3. $0, n > 10$.

4. $1, n \geq 4$.

5. $n = 59997$.

7. $n > 10$.

8. а) 3; б) $-1/5$; в) ∞ ; г) $7/9$; д) 0; е) ∞ ; є) 0; ж) 0; з) 1; і) $-\infty$.

9. 1) 2; 2) 0; 3) 1; 4) $11/18$; 5) ∞ ; 6) $-1/9$; 7) $-2/5$; 8) 6;
9) $1/3$; 10) $1/2$; 11) 0; 12) 0; 13) ∞ ; 14) $1/2$; 15) $-5/12$; 16) 0;
17) $3/8$; 18) -2 ; 19) ∞ ; 20) $3/2$; 21) $-1/6$; 22) $-1/3$; 23) $3/4$;
24) $-1/2$; 25) 4; 26) -16 ; 27) $27/2$; 28) 0; 29) ± 1 ; 30) $5/3$;
31) 8; 32) -10 ; 33) 12; 34) 4; 35) $1/2$; 36) $-3/2$; 37) 8; 38) $(2\pi)^{-1}$;
39) 6; 40) $1/2$; 41) $1/8$; 42) 1; 43) 0 при $x \rightarrow +\infty$, ∞ при $x \rightarrow -\infty$;
44) ∞ при $x \rightarrow +\infty$, 0 при $x \rightarrow -\infty$; 45) e^6 ; 46) e ; 47) $e^{-4/3}$; 48) $\sqrt[3]{e}$;
49) \sqrt{e} ; 50) e^{-3} ; 51) e^4 ; 52) $e^{\operatorname{tg} 2}$; 53) $1/\sqrt[4]{e}$.

10. а) $+\infty, -\infty$; б) 1, -1 ; в) $+\infty, 0$; г) 0, $+\infty$; д) 0, 1; е) $+\infty, +\infty$.

12. Так.

13. а) 7; б) $1/3$; в) 1; г) $1/4$.

14. 1) $3/2$; 2) $32/9$; 3) $49/6$; 4) 0; 5) $25/16$; 6) $-2/3$; 7) $-1/2$;
8) $-1/3$; 9) 1; 10) $-2/5$.

15. а) 10,16; б) 20,12; в) 1,02; г) 4,04.

16. а) $\ln 1,01 \approx 0,01$; б) $\ln 1,02 \approx 0,02$; в) $\ln 1,1 \approx 0,1$; г) $\ln 1,2 \approx 0,2$.

Ключові терміни

Числова послідовність (стаціонарна, обмежена, необмежена, монотонна, збіжна, розбіжна), загальний член, рекурентна форма, функція натурального аргументу, арифметичні операції, нескінченно мала і нескінченно велика величини, граничне значення (границя) змінної, ε -окіл точки, невизначеності, критерій збіжності, єдиність границі, арифметичні властивості, збіжність монотонних послідовностей, натуральні логарифми, алгоритм відшукування границі. Границя функції („мовою послідовностей”), скінченна (нескінченна) границя, нескінченно мала (велика) функція, односторонні границі (лівостороння і правостороння), критерій існування скінченної границі, єдиність границі, перехід до границі в нерівностях, перша і друга чудові границі, нескінченно малі (порівнянні, одного порядку, еквівалентні, більш високого порядку), головна частина нескінченно малої.

Резюме

Подано основні поняття, пов'язані з числовими послідовностями. Розглянуто: арифметичні операції над послідовностями; нескінченно малі і нескінченно великі величини, їхні властивості і зв'язок між ними; границю довільної числової послідовності, її властивості, критерій існування; всілякі типи невизначеності і способи їх розкриття. Наведено ілюстративні приклади. На основі поняття збіжної числової послідовності – функції натурального аргументу – вводиться (за Гейне) поняття границі функції неперервної змінної. Викладено основні відомості щодо властивостей границь: єдиність границі, арифметичні властивості границь, критерії існування границі, перша і друга чудові границі. Наводяться практичні рекомендації по відшукуванню границь, обговорюється застосування еквівалентних нескінченно малих до обчислення границь.

Література: [1; 2; 3; 4; 9; 14; 15; 22].

8. Неперервність і розриви функцій

Зрештою, коло нескінченно великого круга і пряма лінія – одне й те саме.

Галілео Галілей

Мета: опанування засобів методу границь для розв'язання задачі дослідження функціональних залежностей з неперервним змінюванням незалежної змінної щодо установавлення того, чи буде залежна змінна – функція – у свою чергу неперервною змінною на області її визначення.

Питання теми:

8.1. Означення неперервності функції в точці, неперервність основних елементарних функцій.

8.2. Критерії неперервності та властивості функцій, неперервних у точці.

8.3. Розриви функцій та їх класифікація, дослідження функцій на неперервність.

8.4. Неперервність функції на проміжку: означення, основні теореми про неперервні функції.

Компетентності, що формуються після вивчення теми:

Загальнонаукова: здатність проводити аналіз функції неперервного аргументу для з'ясування того факту, чи є область її значень також неперервною множиною.

Загальнопрофесійна: володіння методом границь при аналізі інформації, яка описується функцією неперервної змінної.

Спеціалізовано-професійна: здатність застосовувати метод границь при моделюванні різноманітних залежностей між характеристиками складових інформаційних систем.

8.1. Означення неперервності функції в точці, неперервність основних елементарних функцій

З поняттям границі функції тісно пов'язане інше важливе поняття математичного аналізу – поняття *неперервної функції*. Воно відображає характерну рису багатьох явищ, які ми спостерігаємо в навколишньому світі і говоримо про них, що вони відбуваються неперервно: неперервність

течії рідини, неперервність зростання людини та ін. Інтуїтивне розуміння цього поняття обумовлюється самим терміном, а геометричне зображення функцій допомагає до певної міри скласти уявлення про цю властивість: якщо графік функції є суцільною лінією, тобто його можна накреслити, не відриваючи олівця від паперу, то функція вважається неперервною.

Разом з цим можна навести численні приклади процесів, що описуються функціями, графіки яких не є суцільними лініями. Наприклад, процес зміни чисельності населення міста, як функція часу, зображується ступінчастою лінією. Для вивчення на кількісному рівні тих чи інших процесів треба, безумовно, мати відповідний математичний апарат, розробка якого потребує строгих, а не інтуїтивних, означень усіх понять, якими ми оперуємо.

Нехай функція $y = f(x)$ з областю існування $D(f)$ визначена в точці x_0 , якій відповідає вартість функції $y_0 = f(x_0)$, і x – довільна точка з деякого околу x_0 (рис. 8.1.1). Величина, на яку змінилося значення аргументу при переході від точки x_0 до x , називається **приростом аргументу** в точці x_0 :

$$\Delta x - \text{приріст аргументу в точці } x_0 \Leftrightarrow \Delta x = x - x_0, \quad (8.1.1)$$

а відповідну зміну вартості функції називають **приростом функції** у точці x_0 і пишуть:

$$\Delta y = f(x) - f(x_0), \quad \text{або} \quad \Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0). \quad (8.1.2)$$

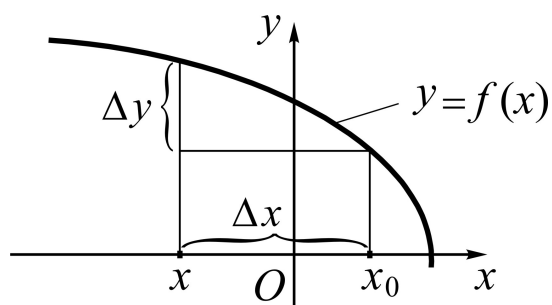


Рис. 8.1.1. Приріст аргументу Δx і приріст функції Δy

Прирости бувають і додатними, і від'ємними: так на рис. 8.1.1 $\Delta x < 0$, а $\Delta y > 0$.

Строге означення поняття *неперервності функції у точці x_0* вводять саме за допомогою понять *приростів функції і аргументу*.

Домовимось множину функцій, неперервних у точці x_0 , позначати символом $C(x_0)$, де перша літера від лат. continuum – неперервний.

Функція $y = f(x)$ називається **неперервною у точці x_0** , якщо в цій точці нескінченно малому приросту аргументу відповідає нескінченно малий приріст функції:

$$\begin{aligned} f(x) \in C(x_0) &\Leftrightarrow (\Delta x \rightarrow 0 \Rightarrow \Delta y \rightarrow 0), \text{ або} \\ f(x) \in C(x_0) &\Leftrightarrow \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Delta y = 0. \end{aligned} \quad (8.1.3)$$

Приклад. Покажемо, що функція $y = e^x$ неперервна кожній точці x_0 області визначення $D(f) = (-\infty, +\infty)$. Дійсно, надамо значенню аргумента x_0 приріст Δx , тоді $\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = e^{x_0 + \Delta x} - e^{x_0}$. Знайдемо границю приросту функції Δy при $\Delta x \rightarrow 0$:

$$\begin{aligned} \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Delta y &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} (e^{x_0 + \Delta x} - e^{x_0}) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} e^{x_0} (e^{\Delta x} - 1) = \\ &= \left| \Delta x \rightarrow 0 \Rightarrow e^{\Delta x} - 1 \sim \Delta x \right| = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} e^{x_0} \cdot \Delta x = e^{x_0} \cdot \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Delta x = 0. \end{aligned}$$

Оскільки x_0 – довільна точка із $D(f)$, то $e^x \in C(x_0) \forall x_0 \in D(f)$.

Розглядаючи аналогічним чином будь-яку основну елементарну функцію (x^α , a^x , $\log_a x$, $\sin x$, $\cos x$, $\operatorname{tg} x$, $\operatorname{ctg} x$, $\arcsin x$, $\arccos x$, $\operatorname{arctg} x$, $\operatorname{arcctg} x$), переконуємося, що справедлива нижче наведена теорема.

Теорема 8.1.1 (про неперервність основних елементарних функцій). Основні елементарні функції неперервні у кожній точці області існування.

Для відповіді на запитання, чи є неперервними у точці функції, які утворюються певним чином з основних елементарних (наприклад, за допомогою арифметичних операцій), наведемо, як теоретичну базу, добірку відповідних теорем.

8.2. Критерії неперервності та властивості функцій, неперервних у точці

Теорема 8.2.1 (критерій неперервності „мовою границі”). Функція $y = f(x)$ неперервна у точці x_0 тоді і тільки тоді, коли границя функції у цій точці дорівнює значенню функції у ній:

$$f(x) \in C(x_0) \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0). \quad (8.2.1)$$

Д о в е д е н н я. Справедливість (8.2.1) випливає з означення неперервності і властивостей границі функції.

Необхідність (\Rightarrow). Спочатку відзначимо, що коли $\Delta x \rightarrow 0$, то $x \rightarrow x_0$, і навпаки (*прослідкуйте!*), тобто $\Delta x \rightarrow 0 \Leftrightarrow x \rightarrow x_0$. Далі, відштовхуючись від (8.1.3), маємо:

$$\begin{aligned} \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Delta y = 0 &\Rightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) - f(x_0)) = 0 \Rightarrow \\ \Rightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) - \lim_{x \rightarrow x_0} f(x_0) &= 0 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0) \end{aligned} \quad (8.2.2)$$

(при виведенні було використано властивості границі різниці функцій та границі *const*).

Достатність (\Leftarrow). Рухаємося в (8.2.2) справа наліво (*наведіть відповідні записи самостійно*), враховуючи, що $f(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x_0)$, і при-

ходимо до (8.1.3): $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Delta y = 0$. Це означає: $f(x) \in C(x_0)$.

Зауваження. Якщо функція неперервна у точці x_0 , то для обчислення границі функції у цій точці достатньо у вираз функції підставити замість аргументу x його граничне значення, тобто здійснити граничний перехід, і отримаємо певне число (а не невизначеність!). Формально це означає, що знак (символ) границі і символ функції можна переставляти:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0) \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(\lim_{x \rightarrow x_0} x). \quad (8.2.3)$$

Наприклад, $\lim_{x \rightarrow 1} \sqrt[3]{\cos \pi x} = \sqrt[3]{\lim_{x \rightarrow 1} \cos \pi x} = \sqrt[3]{\cos(\pi \lim_{x \rightarrow 1} x)} = \sqrt[3]{\cos(\pi \cdot 1)} = -1$.

Теорема 8.2.2 (критерій неперервності „мовою односторонніх границь”). Функція $y = f(x)$ неперервна в точці x_0 тоді і тільки тоді, коли односторонні границі функції в цій точці рівні між собою і дорівнюють значенню функції в ній:

$$f(x) \in C(x_0) \Leftrightarrow f(x_0 - 0) = f(x_0 + 0) = f(x_0). \quad (8.2.4)$$

Д о в е д е н н я. Слушність (8.2.4) базується безпосередньо на теоремі 7.3.2 – критерії існування скінченної границі функції „мовою односторонніх границь” (див. (7.3.8)). (Пропонуємо детальні належні міркування і символічні виклади навести самостійно.)

Якщо (8.2.4) виконується частково, тобто для однієї з односторонніх границь: або тільки $f(x_0 - 0) = f(x_0)$, або тільки $f(x_0 + 0) = f(x_0)$, то відповідно кажуть: функція $f(x)$ **неперервна у точці x_0 зліва (справа)**.

Зрозуміло, що неперервність функції у точці x_0 і зліва, і справа тягне за собою неперервність в точці x_0 (чому?). А якщо $f(x)$ не є неперервною хоча б з одного боку, то вона не буде неперервною у точці x_0 .

Приклад: функція $y = \frac{x^2}{|x|} = \begin{cases} x, & \text{при } x > 0 \\ -x, & \text{при } x < 0 \end{cases}$ (рис. 8.2.1) в точці $x = 0$

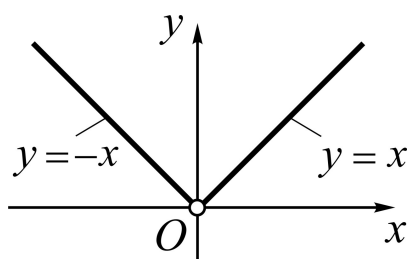


Рис. 8.2.1. **Графік функції, яка не є неперервною**

не є неперервною ні зліва, ні справа, бо в нулі функція невизначена: $O(0,0)$ – „виколота” точка графіка функції $y = |x|$, отже, не виконується жодна з рівностей, які визначають односторонню неперервність (подумайте, як треба змінити функцію, щоб вона стала неперервною).

Розглянемо далі дві функції: $y = f(x)$ і $y = \varphi(x)$, неперервні у точці x_0 , тобто $f(x) \in C(x_0)$ і $\varphi(x) \in C(x_0)$, де $x_0 \in D(f) \cap D(\varphi)$.

Теорема 8.2.3 (про арифметичні властивості неперервних функцій). Якщо функції $y = f(x)$, $y = \varphi(x)$ неперервні у точці x_0 , то їх сума, різниця, добуток, частка (якщо знаменник у розглядуваній точці не стає нулем) є неперервними у точці x_0 функціями:

$$\left[\begin{array}{l} f(x) \in C(x_0) \\ \varphi(x) \in C(x_0) \end{array} \right] \Rightarrow \left[\begin{array}{l} f(x) \pm \varphi(x) \in C(x_0), \\ f(x) \cdot \varphi(x) \in C(x_0), \\ f(x)/\varphi(x) \in C(x_0) \quad \forall x_0 \mid \varphi(x_0) \neq 0. \end{array} \right. \quad (8.2.5)$$

Д о в е д е н н я теореми здійснюється на основі відповідних властивостей границі функції. Покажемо її справедливність для частки функцій.

Згідно з (8.2.1) маємо:

$$\begin{aligned} f(x) \in \mathbf{C}(x_0) &\Rightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0), \\ \varphi(x) \in \mathbf{C}(x_0) &\Rightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} \varphi(x) = \varphi(x_0). \end{aligned}$$

Позначимо частку функцій через $u(x)$, тоді за властивістю границі частки

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow x_0} u(x) &= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{\varphi(x)} = \frac{\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)}{\lim_{x \rightarrow x_0} \varphi(x)} = \frac{f(x_0)}{\varphi(x_0)} = u(x_0) \Rightarrow \\ &\Rightarrow \left| \lim_{x \rightarrow x_0} u(x) = u(x_0) \right| \Rightarrow u(x) \in \mathbf{C}(x_0). \end{aligned}$$

Пропонуємо інші висновки теореми довести самостійно, обміркуйте узагальнення теореми на будь-яке скінченне число доданків і співмножників.

Нагадаємо, що суперпозицію двох функцій: $y = f(u)$, $u = \varphi(x)$ (див. п. 6.3) називають складеною, або зложеною, функцією:

$$(y = f(u), u = \varphi(x)) \Rightarrow y = f[\varphi(x)] \text{ – зложена функція,}$$

де змінні u і x – відповідно проміжний і основний аргументи;

$u = \varphi(x)$ ($y = f(u)$) – внутрішня (зовнішня) функція.

Теорема 8.2.4 (про неперервність складеної функції). Якщо функція $u = \varphi(x)$ неперервна при $x = x_0$, а $y = f(u)$ є неперервною у точці $u_0 = \varphi(x_0)$, то складена функція $y = f[\varphi(x)]$ неперервна у точці x_0 :

$$\varphi(x) \in \mathbf{C}(x_0) \wedge f(u) \in \mathbf{C}(u_0) \wedge u_0 = \varphi(x_0) \Rightarrow f[\varphi(x_0)] \in \mathbf{C}(x_0). \quad (8.2.6)$$

Д о в е д е н н я. Позначимо закон зв'язку змінної y з аргументом x через F , тобто $y = f[\varphi(x)] = F(x)$. Ураховуючи неперервність $\varphi(x)$, а саме: $\lim_{x \rightarrow x_0} \varphi(x) = \varphi(x_0) = u_0$, знайдемо границю $F(x)$, коли $x \rightarrow x_0$:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} F(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} f[\varphi(x)] = \left| x \rightarrow x_0 \Rightarrow u \rightarrow u_0 \right| =$$

$$= \lim_{u \rightarrow u_0} f(u) = f(u_0) = f[\varphi(x_0)] = F(x_0) \Rightarrow F(x) \in C(x_0).$$

Основні елементарні функції та функції, що утворюються з них за допомогою чотирьох арифметичних дій і суперпозицій, застосованих скінченне число разів, називаються **елементарними функціями**.

Як наслідок з теорем 8.2.1, 8.2.2 з урахуванням теореми 8.2.4 випливає наведена нижче теорема.

Теорема 8.2.5 (про неперервність елементарних функцій). Елементарні функції неперервні в кожній точці своєї області існування.

8.3. Розриви функцій та їх класифікація, дослідження функцій на неперервність

Якщо функція $y = f(x)$ не є неперервною в точці x_0 , то кажуть, що в цій точці вона має **розрив**, а точка x_0 називається **точкою розриву**.

Точки розриву і самі розриви класифікуються залежно від того, як порушується критерій неперервності (8.2.4):

$$f(x) \in C(x_0) \Leftrightarrow f(x_0 - 0) = f(x_0 + 0) = f(x_0).$$

Розрізняють такі випадки (словесні формулювання *наведіть самі!*):

$$1) \left. \begin{aligned} f(x_0 - 0) = f(x_0 + 0) = A \\ f(x_0) \neq A \vee f(x_0) \nexists \end{aligned} \right] \Leftrightarrow x_0 - \text{точка усувного розриву.}$$

Назва „усувний” пов’язана з тим, що досить змінити значення функції або довизначити її тільки в одній точці, поклавши $f(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$,

щоб дістати функцію, неперервну у точці x_0 . Приклад такої функції ми вже розглядали (див. рис. 8.2.1). Класичний усувний розрив дає функція

$$y = \frac{\sin x}{x} \text{ в точці } x_0 = 0, \text{ при цьому } x_0 \notin D(f) = \mathbf{R} \setminus \{0\};$$

$$2) \left. \begin{aligned} f(x_0 - 0) \neq f(x_0 + 0) \\ x_0 \in D(f) \vee x_0 \notin D(f) \end{aligned} \right] \Leftrightarrow \begin{aligned} &x_0 - \text{точка скінченного розриву зі} \\ &\text{стрибком } f(x_0 + 0) - f(x_0 - 0), \text{ або} \\ &x_0 - \text{точка розриву I-го роду;} \end{aligned}$$

$$3) \left. \begin{aligned} f(x_0 - 0) = \pm \infty \text{ або } i \\ f(x_0 + 0) = \pm \infty \end{aligned} \right] \Leftrightarrow \begin{aligned} &x_0 - \text{точка нескінченного розриву} \\ &(\text{з нескінченним стрибком}), \text{ або } x_0 - \\ &\text{точка розриву II-го роду.} \end{aligned}$$

До точок розриву II-го роду відносять також точки, в яких функція не має однієї або обох односторонніх границь. Показовим прикладом такої функції є $y = \sin(1/x)$, $x \neq 0$; вона не має границі в нулі ні зліва, ні справа. *Зобразіть* схематично поведінку цієї функції в деякому околі нуля.

Ілюстративні приклади функцій із розривами I-го та II-го роду подано (аналітично і графічно) на рис. 8.3.1-а і 8.3.1-б.

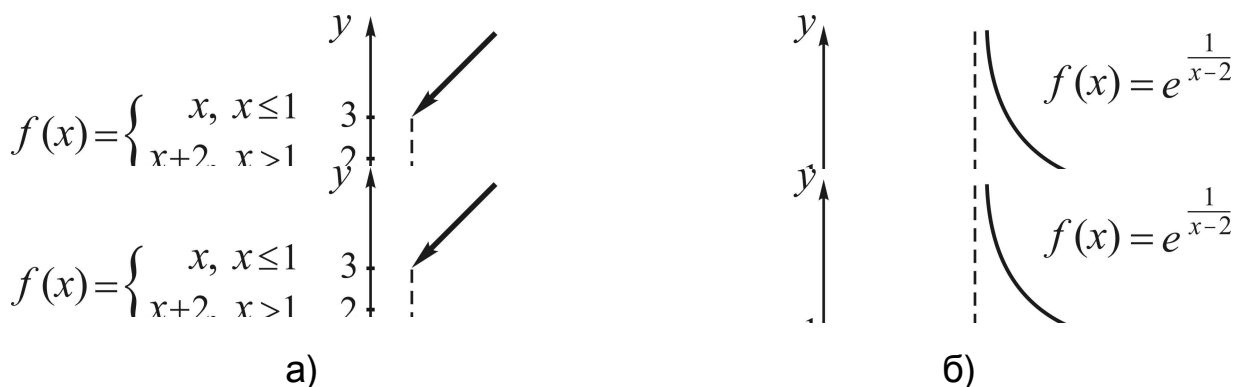


Рис. 8.3.1. Розриви функцій: а) I-го роду; б) II-го роду

Точкою скінченного розриву (див. рис. 8.3.1-а) зі стрибком, рівним двом, є точка $x_0 = 1$; функція неперервна зліва від точки розриву. Зазначимо, що дана функція не є елементарною (чому?).

Точкою нескінченного розриву зі стрибком, рівним $+\infty$, є точка $x_0 = 2$ (див. рис. 8.3.1-б); функція не неперервна ні зліва, ні справа.

Під **дослідженням на неперервність** функції $y = f(x)$ у деякій точці x_0 розуміють установлення факту неперервності (якщо такий, звичайно, має місце), або типу розриву у протилежному випадку.

Якщо функція елементарна, то згідно з теоремою 8.2.3 дослідженню підлягають тільки точки, в яких функція невизначена.

При завданні функції різними аналітичними виразами на різних ділянках області існування досліджуються точки, які є межами відповідних ділянок (див. рис. 8.3.1-а). Така форма завдання функцій часто зустрічається, наприклад, у теорії ймовірностей та в застосовних задачах із різних галузей знань.

Нижче (рис. 8.3.2) наведена структурна схема, за якою здійснюється дослідження на неперервність в точці елементарних функцій. *Пропонуємо* модифікувати її для дослідження функцій не елементарних.

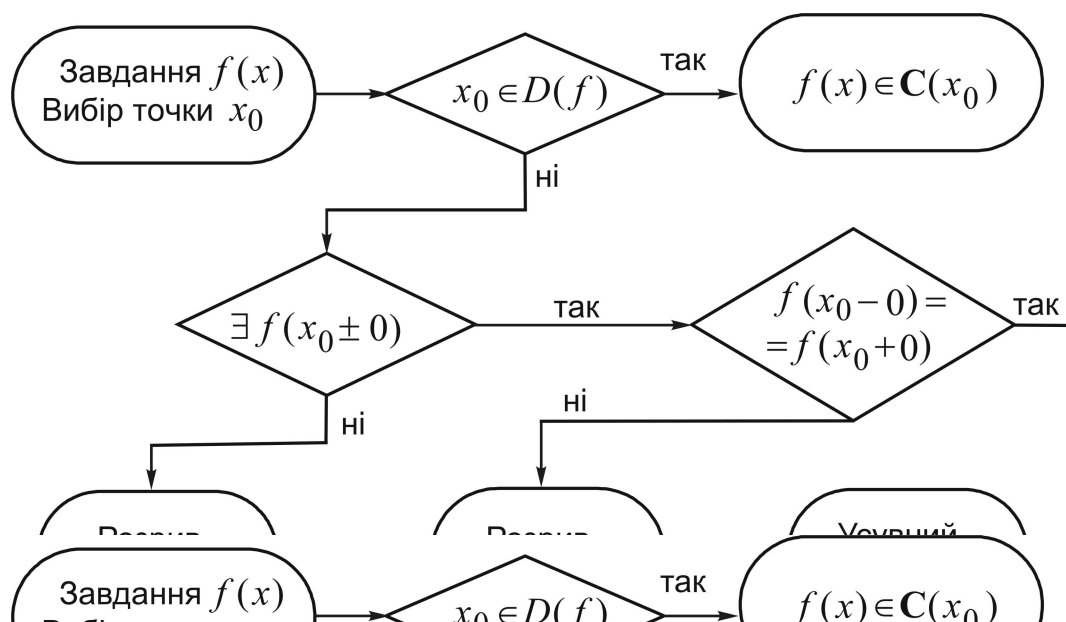


Рис. 8.3.2. **Схема дослідження елементарних функцій на неперервність у точці**

Вибір точки x_0 визначається областю існування функції, а запис $\exists f(x_0 \pm 0)$, згідно з критерієм неперервності, передбачає існування скінченних границь. (Опишіть зображену схему по крокам.)

Усі наведені вище приклади є, за суттю, прикладами дослідження функцій на неперервність.

Не варто думати, що не неперервні – **розривні** – функції „погані”, і не знаходять застосування у прикладних галузях знань. Для побудови математичних моделей обробки (перетворення) сигналів використовують спеціальні розривні функції. Наведемо аналітичне зображення і графіки деяких із них.

Функція Хевісайда – це розривна функція одиничного стрибка (рис. 8.3.3):

$$y = \chi(t) = \begin{cases} 0, & t < 0, \\ 0,5, & t = 0, \\ 1, & t > 0. \end{cases}$$

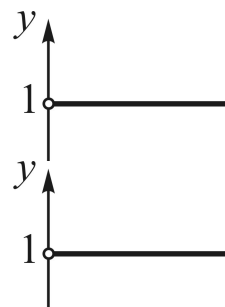


Рис. 8.3.3. **Графік функції $\chi(t)$**

У більшості застосувань значення функції в точці $t = 0$ не є важливим. Функція названа на честь англійського математика і фізика Олівера Хевісайда (1850 – 1925).

Функція Дірака (дельта-функція, або δ -функція, δ -функція Дірака, діраківська дельта, одинична імпульсна функція; від лат. *impulsus* – удар, поштовх) (рис. 8.3.4):

$$y = \delta(t) = \begin{cases} +\infty, & t = 0, \\ 0, & t \neq 0. \end{cases}$$



Невластива точка ∞ зображена Рис. 8.3.4. **Графік функції $\delta(t)$** умовно на вістрі осі Oy .

(Поль Адрієн Моріс Дірак (1902 – 1984) – видатний англійський фізик-теоретик, один із творців квантової механіки.)

Прямокутна функція (одиничний імпульс, прямокутний імпульс) – це кусково-стала функція виду (рис. 8.3.5):

$$rect(t) = \Pi(t) = \begin{cases} 1, & |t| < 0,5, \\ 0,5, & |t| = 0,5, \\ 0, & |t| > 0,5 \end{cases}$$

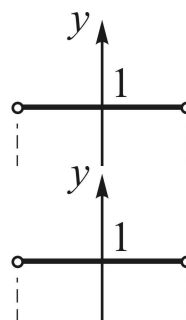


Рис. 8.3.5. **Графік функції $\Pi(t)$**

(від англ. *rect* – прямокутник).

(*Проаналізуйте, якого типу розриви у наведених функцій.*)

Між усіма трьома функціями існує тісний зв'язок. *Наприклад*, граничне значення прямокутного імпульсу за умови, що його тривалість прямує до нуля, дає δ -функцію. Детальніше ці функції вивчаються у спеціальних дисциплінах.

8.4. Неперервність функції на проміжку: означення, основні теореми про неперервні функції

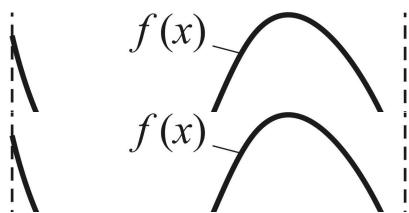
В теоретичних дослідженнях і на практиці використовуються теореми, які відображають властивості неперервних функцій не в окремо взятій точці, а на множині точок – проміжку. Функцію $f(x)$ називають **неперервною на інтервалі (a, b)** , якщо вона неперервна в кожній точці

інтервалу; числа a, b можуть бути і невластивими. Функцію $f(x)$ називають **неперервною на сегменті** $[a, b]$, якщо вона неперервна на інтервалі (a, b) і, крім цього, неперервна справа в точці a і – зліва в точці b . (Пропонуємо самостійно сформулювати означення неперервності на півсегменті $[a, b)$, на півінтервалі $(a, b]$.)

Множину функцій, неперервних на інтервалі (a, b) , сегменті $[a, b]$ позначатимемо відповідно через $C((a, b))$, $C([a, b])$.

Сформульовані нижче теореми приймемо без доведення. Для кращого розуміння їхнього смислу дамо до кожної теореми відповідну геометричну ілюстрацію, що допоможе, сподіваємось, усвідомити справедливність теорем на інтуїтивному рівні.

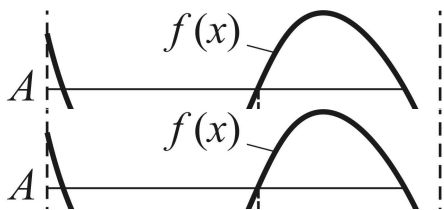
Теорема 8.4.1 (про нулі неперервної функції). Якщо $f(x)$ визначена і неперервна на сегменті $[a, b]$ і на його кінцях приймає значення різних знаків, то між a і b існує хоча б одна точка x_0 , яка є нулем функції (рис. 8.4.1):



$$\left. \begin{array}{l} f(x) \in C([a, b]) \\ f(a) \cdot f(b) < 0 \end{array} \right] \Rightarrow \\ \Rightarrow \exists x_0 \in (a, b): f(x_0) = 0.$$

Рис. 8.4.1. Існування нуля функції

Теорема 8.4.2 (про проміжне значення функції). Якщо $f(x)$ визначена і неперервна на сегменті $[a, b]$ і на його кінцях приймає різні значення, то для будь-якого числа A , яке міститься між $f(a)$ та $f(b)$, існує хоча б одна точка x_0 така, що $f(x_0) = A$ (рис. 8.4.2):

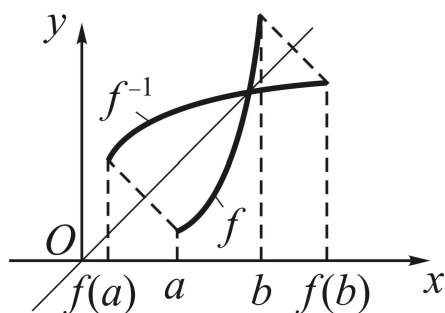


$$\left. \begin{array}{l} f(x) \in C([a, b]) \\ f(a) \neq f(b) \end{array} \right] \Rightarrow \\ \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \forall A \in (f(a), f(b)) \\ \exists x_0 \in (a, b): f(x_0) = A. \end{array} \right.$$

Рис. 8.4.2. Існування проміжного значення функції

Нехай функція $y = f(x)$ визначена в області $D(f)$, а $E(f)$ – область її значень. Функція $y = f^{-1}(x)$ (див. п. 6.3), яка кожному елементу x із області значень $E(f)$ ставить у відповідність елемент y із області існування $D(f)$, називається **оберненою** відносно $f(x)$.

Теорема 8.4.3 (про неперервність оберненої функції). Якщо функція $y = f(x)$ визначена, зростаюча (спадна) і неперервна на сегменті $[a, b]$, то і обернена функція $y = f^{-1}(x)$ визначена, зростаюча (спадна) і неперервна на відрізку $[f(a), f(b)]$ ($[f(b), f(a)]$) (рис. 8.4.3):

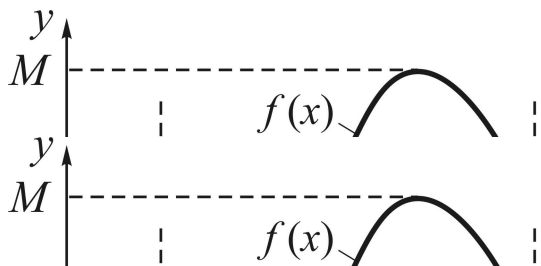


$$\begin{aligned} & \left[\begin{aligned} & f(x) \in C([a, b]) \\ & f(x) \uparrow \forall x \in [a, b] \end{aligned} \right] \Rightarrow \\ \Rightarrow & \left[\begin{aligned} & f^{-1}(x) \in C([f(a), f(b)]) \\ & f^{-1}(x) \uparrow \forall x \in [f(a), f(b)] \end{aligned} \right]. \end{aligned}$$

Рис. 8.4.3. Неперервність оберненої функції

Аналогічно для спадної функції.

Теорема 8.4.4 (про обмеженість неперервної функції). Визначена і неперервна на сегменті $[a, b]$ функція обмежена на ньому (рис. 8.4.4):



$$\begin{aligned} & f(x) \in C([a, b]) \Rightarrow \\ \Rightarrow & \left[\begin{aligned} & \exists (m - \text{const}, M - \text{const}): \\ & m \leq f(x) \leq M \quad \forall x \in [a, b] \end{aligned} \right] \end{aligned}$$

Рис. 8.4.4. Обмеженість неперервної функції

(числа m і/або M можуть співпадати з $f(a)$ чи з $f(b)$).

Теорема 8.4.5 (про найменше і найбільше значення неперервної функції). Якщо функція $f(x)$ визначена і неперервна на сегменті $[a, b]$, то серед її значень на цьому відрізку існує найменше і найбільше (рис. 8.4.5):

$$f(x) \in C([a, b]) \Rightarrow \left[\begin{aligned} & \exists (x_1 \in [a, b], x_2 \in [a, b]): \\ & f(x_1) \leq f(x) \wedge f(x_2) \geq f(x) \quad \forall x \in [a, b] \end{aligned} \right]$$

(числа x_1 або x_2 окремо можуть співпадати з числами a або b).

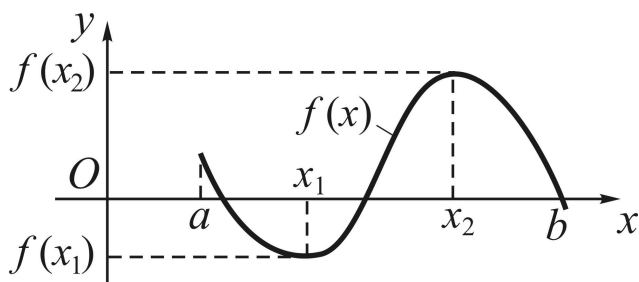


Рис. 8.4.5. Найменше і найбільше значення функції

На закінчення відзначимо, що всі розглянуті щодо „неперервності” питання є по суті застосуванням границь до дослідження функцій. Більш виразні результати у цьому плані пов’язані з *похідною* (як різновидом границі).

Запитання для самодіагностики засвоєння матеріалу

Відповіді на всі запитання сформулюйте словесно, запишіть в символічній формі, обґрунтуйте (на підставі означень, теорем, правил, формул тощо), наведіть відповідні конкретні приклади.

1. Що називають приростами аргументу і функції у точці x_0 ?
2. Яку функцію $y = f(x)$ називають неперервною у точці x_0 ?
3. Чи всі основні елементарні функції неперервні у кожній точці області існування?
4. У чому полягає критерій неперервності „мовою границі”, „мовою односторонніх границь”?
5. Що означає „функція $f(x)$ неперервна у точці x_0 зліва (справа)”?
6. Наведіть арифметичні властивості неперервних функцій?
7. Що таке суперпозиція функцій, складена, або зложена, функція?
8. За яких умов складена функція буде неперервною?
9. Які функції називають елементарними?
10. Чи всі елементарні функції неперервні у кожній точці області існування?
11. Наведіть приклади функцій, які не є елементарними.
12. Яка точка x_0 називається точкою розриву?
13. За якими ознаками розрізняються точки: усувного розриву; скінченного розриву; нескінченного розриву?
14. Що розуміють під дослідженням функції на неперервність?
15. Які функції називаються неперервними на проміжку?
16. Які властивості мають неперервні на проміжку функції?

Задачі та вправи

1. При якому значенні параметра a функція

$$f(x) = \begin{cases} \sin x, & x \leq \pi/2, \\ a - x, & x > \pi/2 \end{cases}$$

буде неперервною? Побудувати її графік.

2. Знайти числа m і n такі, щоб задана функція була неперервною. Побудувати її графік:

$$\text{а) } f(x) = \begin{cases} x+3, & x \leq 0, \\ m \cos x + n, & 0 < x \leq \pi, \\ (x-\pi)^2 + 1, & x > \pi; \end{cases} \quad \text{б) } f(x) = \begin{cases} m-4x, & x \leq -\pi/4, \\ \operatorname{tg} x, & -\pi/4 < x < \pi/4, \\ n/x, & x \geq \pi/4. \end{cases}$$

3. Функція $f(x) = \frac{x^4 - 16}{x^3 - 8}$ невизначена в точці $x = 2$. Яким має бути $f(2)$, щоб після довизначення функції вона стала неперервною при $x = 2$?

4. Довизначити функцію $f(x)$ у точці $x_0 = 0$ так, щоб вона стала неперервною в цій точці:

$$\text{а) } f(x) = \frac{\sqrt{1+x}-1}{x}; \quad \text{б) } f(x) = \frac{\sin^2 x}{1 - \cos x}; \quad \text{в) } f(x) = x \cdot \sin \frac{\pi}{x}.$$

5. Дослідити функцію на неперервність, у разі наявності точок розриву (т/р) установити тип розриву, зобразити схематично поведінку графіка функції в околі точок розриву:

$$1) y = \frac{2}{3x-1} + 1; \quad 2) y = \frac{x^2 + 5}{x^2 - 9}; \quad 3) y = \frac{3}{|x-2|} - \frac{1}{2};$$

$$4) y = \frac{x+7}{x^2 + 3x - 10}; \quad 5) y = 1 - \frac{1}{(x+1)^2}; \quad 6) y = 3^{\frac{x}{2x-5}};$$

$$7) y = \frac{4}{\frac{1}{7^{x+3}} + 2}; \quad 8) y = \frac{1}{2^{3x+4} + 8}; \quad 9) y = \frac{1}{3^{\frac{x}{x-2}} + 1};$$

$$\begin{aligned}
10) \ y &= \frac{1}{\ln|x-2|}; & 11) \ y &= \frac{5}{2^{\frac{3-x}{x}} - 4}; & 12) \ y &= \begin{cases} 9-x^2, & x \leq -3 \\ x+3, & x > -3; \end{cases} \\
13) \ y &= \begin{cases} x+1, & x \leq 2 \\ (x-3)^2, & x > 2; \end{cases} & 14) \ y &= \begin{cases} x, & x \leq 0, \\ \sin x, & 0 < x \leq \pi/2, \\ \pi/2 - x, & x > \pi/2; \end{cases} \\
15) \ y &= \begin{cases} \cos x, & x \leq 0, \\ x^2, & 0 < x \leq 1, \\ \frac{1}{x-3}, & x > 1; \end{cases} & 16) \ y &= \begin{cases} x+1, & x \leq -1, \\ 2x^2-1, & -1 < x \leq 1, \\ \frac{1}{x}, & x > 1; \end{cases} \\
17) \ y &= \begin{cases} e^{x+3}, & x < -3, \\ 10-x^2, & -3 \leq x \leq 3, \\ \frac{1}{2^{x-2}}, & x > 3; \end{cases} & 18) \ y &= \begin{cases} 2-x, & x \leq -1, \\ \frac{3}{3^{1-2x}}, & -1 < x \leq 2, \\ \frac{1}{3(x-1)}, & x > 2. \end{cases}
\end{aligned}$$

6. Використовуючи властивості неперервних функцій, упевнитися в тому, що рівняння $x^5 - 3x = 1$ має принаймні один корінь $1 < x < 2$.

7. Показати, що рівняння $x \cdot 2^x = 1$ має принаймні один додатний корінь, який не перевищує 1.

8. Показати, що рівняння $x = a \sin x + b$ ($0 < a < 1$, $b > 0$) має принаймні один додатний корінь, який не перевищує $a + b$.

9. Дослідити функцію $y = \frac{1}{x^2 - x - 6}$ на неперервність на відрізку:

а) $[-1, 2]$; б) $[-5, 0]$; в) $[-3, 4]$.

Відповіді

1. $a = 1 + \pi/2$.

2. а) $m = 1$, $n = 2$; б) $m = -1 - \pi$, $n = \pi/4$.

3. $8/3$.

4. а) $f(0) = 1/2$; б) $f(0) = 2$; в) $f(0) = 0$.

5. 1) $x = 1/3$ – т/р II-го роду; 2) $x = 3$, $x = -3$ – т/р II-го роду; 3) $x = 2$ – т/р II-го роду; 4) $x = -5$, $x = 2$ – т/р II-го роду; 5) $x = -1$ – т/р II-го роду;

6) $x = 5/2$ – т/р II-го роду; 7) $x = -3$ – т/р I-го роду; 8) неперервна;
 9) $x = 2$ – т/р I-го роду; 10) $x = 0$ – точка усувного розриву, $x = 1$, $x = 3$ – т/р II-го роду; 11) $x = 0$ – т/р I-го роду, $x = 1$ – т/р II-го роду;
 12) неперервна; 13) $x = 2$ – т/р I-го роду; 14) $x = \pi/2$ – т/р I-го роду;
 15) $x = 0$, $x = 1$ – т/р I-го роду, $x = 3$ – т/р II-го роду; 16) $x = -1$ – т/р I-го роду; 17) $x = 3$ – т/р I-го роду; 18) $x = 1/2$ – т/р II-го роду.

9. а) неперервна; б) $x = -2$ – т/р II-го роду; в) $x = -2$, $x = 3$ – т/р II-го роду.

Ключові терміни

Приріст аргументу, приріст функції, неперервність функції у точці, неперервність основних елементарних функцій, критерій неперервності („мовою границі”, „мовою односторонніх границь”), неперервність у точці зліва (справа), арифметичні властивості неперервних функцій, неперервність складеної функції, елементарні функції, неперервність елементарних функцій, точка розриву, розрив функції, точка розриву (усувного, скінченного (I-го роду), нескінченного (II-го роду)), дослідження на неперервність, неперервність на інтервалі (сегменті, півінтервалі, півсегменті), нулі неперервної функції, проміжне значення функції, неперервність оберненої функції, обмеженість неперервної функції, найменше (найбільше) значення неперервної функції.

Резюме

На основі поняття „границя” розглядається формалізація характерної риси багатьох явищ навколишнього світу, про які кажуть, що вони відбуваються *неперервно*. Викладено: означення поняття неперервності функції у точці, критерії неперервності „мовою границі” і „мовою односторонніх границь”, властивості неперервних функцій, алгоритм дослідження на неперервність елементарних функцій, класифікацію точок розриву.

Наведено теореми про властивості функцій, неперервних на інтервалі (сегменті), з відповідною геометричною ілюстрацією.

Література: [1; 2; 4; 5; 9; 10; 15; 22; 27].

9. Похідна та диференціал функції

Я з тремтінням жаху відвертаюся від ... нещасних функцій, у яких немає похідних.

Шарль Ерміт

Мета: оволодіння майбутніми фахівцями засобами диференціального числення для дослідження функціональних залежностей, які описують швидкісні характеристики протікання у часі різноманітних реальних процесів і явищ.

Питання теми:

9.1. Похідна та її властивості.

9.2. Диференціювання складених функцій та функцій різної форми завдання.

9.3. Похідні вищих порядків.

9.4. Диференціали функції.

Компетентності, що формуються після вивчення теми:

Загальнонаукова: володіння основами диференціального числення для опису і дослідження функціональних залежностей.

Загальнопрофесійна: підготовленість до аналізу за допомогою похідних функціональних зв'язків у інформаційних системах.

Спеціалізовано-професійна: уміння впроваджувати засоби диференціального числення в моделювання процесів управління інформаційними системами.

9.1. Похідна та її властивості

Диференціальне числення – це один із розділів **математичного аналізу** як дисципліни, *об'єктом* вивчення якої є функції, а *предметом* – установлення властивостей функцій за допомогою (методом) границь.

Означення похідної, загальний порядок відшукування, зв'язок з неперервністю

Основні поняття цього розділу – похідна та диференціал – склалися як результат розвитку теорії границь у зв'язку з існуванням широкого

класу задач із різних галузей знань, розв'язання яких потребує обчислення границь спеціального вигляду. Це, наприклад, задачі про обчислення: швидкості руху матеріальної точки чи протікання хімічної реакції, теплоємності тіла при даній температурі, сили струму у даний момент часу, собівартості продукції при даному об'ємі виробництва та ін.

Диференціальне числення – розділ математичного аналізу, в якому вивчаються властивості похідної та диференціалу функції, а також їх застосування до дослідження функцій.

Нехай функція $y = f(x)$ визначена у проміжку (a, b) . Виходячи з деякого значення аргументу $x = x_0$, надамо йому приріст Δx (байдуже, додатний чи від'ємний) такий, що $x_0 + \Delta x \in (a, b)$. Тоді відповідний приріст функції $\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$ (див. рис. 8.1.1).

Границя відношення приросту функції Δy до приросту аргументу Δx , коли приріст аргументу довільним чином прямує до нуля, називається **похідною** (від) **функції** $y = f(x)$ за незалежною змінною x при даному її значенні (або в даній точці) $x = x_0$ і позначається так:

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}. \quad (9.1.1)$$

Процес відшукування похідної від даної функції зветься **диференціюванням**. Якщо функція має похідну у кожній точці x із проміжку (a, b) , то кажуть, що вона **диференційовна на інтервалі** (a, b) .

Звичайно, коли функція має похідну у точці x_0 , то $f'(x_0)$ – певне число; якщо ж функція диференційовна на проміжку, то її похідна $f'(x)$, у свою чергу, – деяка функція від x .

Поруч із позначенням $f'(x)$ для похідної вживають і інші: y' , y'_x , $\frac{dy}{dx}$, $\frac{df(x)}{dx}$, а конкретну вартість похідної при $x = x_0$ позначають так:

$$y'|_{x=x_0}, \quad y'(x_0), \quad \left. \frac{dy}{dx} \right|_{x=x_0}, \quad \left. \frac{df(x)}{dx} \right|_{x=x_0},$$

де $\left|_{x=x_0}$ – символ (знак) **одиночної підстановки**, читається: „при $x = x_0$ ” або „у точці x_0 ”.

Аналізуючи означення похідної, одержуємо **загальний порядок** відшукування похідної від функції $y = f(x)$ у деякій точці $x \in (a, b)$:

1) *надаємо* аргументові x приріст Δx і *знаходимо* відповідний приріст функції

$$\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x);$$

2) *ділимо* приріст функції на приріст аргументу, тобто знаходимо відношення приростів

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x};$$

3) *обчислюємо* границю цього відношення, коли приріст аргументу довільним чином прямує до нуля, тобто знаходимо власне похідну

$$y'_x = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}.$$

Виконання останнього кроку потребує врахування структури конкретного відношення, а тому загальних вказівок щодо відшукування його границі не існує.

Знайдемо, *наприклад*, похідну функції $y = \cos x$ у довільній точці $x \in D(f) = \mathbf{R}$. Дотримуючись щойно наведеної схеми, маємо:

$$1) \Delta y = \cos(x + \Delta x) - \cos x = -2 \sin\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right) \sin \frac{\Delta x}{2};$$

$$2) \frac{\Delta y}{\Delta x} = -\frac{\sin(\Delta x/2)}{\Delta x/2} \cdot \sin\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right);$$

$$3) \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \left(\frac{0}{0}\right) = -\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\sin(\Delta x/2)}{\Delta x/2} \cdot \sin\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right) = -1 \cdot \sin x.$$

Таким чином, $(\cos x)' = -\sin x$.

При відшуванні (знаходженні, взятті) похідної, як бачимо, відношення $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ при $\Delta x \rightarrow 0$ породжує невизначеність $\frac{0}{0}$, тобто нескінченно малому приросту аргументу відповідає нескінченно малий приріст функції, і це не випадковість.

Теорема 9.1.1 (про неперервність диференційовної функції). Якщо функція $f(x)$ диференційовна у точці x_0 , то вона неперервна у цій точці.

Д о в е д е н н я. Нехай $f(x)$ має похідну $f'(x_0)$ ($f'(x_0)$ – певне число), тобто

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x_0).$$

За критерієм існування границі „мовою нескінченно малих” маємо:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x_0) + \alpha(\Delta x),$$

де $\alpha(\Delta x)$ – нескінченно мала при $\Delta x \rightarrow 0$.

Отже, $\Delta y = f'(x_0)\Delta x + \Delta x \cdot \alpha(\Delta x)$, і, враховуючи арифметичні властивості границь та нескінченно малих (яких саме?), одержуємо:

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Delta y = 0.$$

Це і означає (див. (8.1.3)), що $f(x)$ неперервна у точці $x = x_0$.

Зрозуміло, якщо функція диференційовна на деякому інтервалі, то вона неперервна на ньому (чому?).

Обернене до теореми 9.1.1 твердження, взагалі кажучи, не є справедливим, тобто із „неперервності” не випливає „диференційовність”. (Пропонуємо переконатися у цьому на прикладі функції $y = |x|$).

Зауваження:

1) випадки „неіснування” похідної – це коли відношення $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ не має скінченної границі при $\Delta x \rightarrow 0$, тобто або вона (границя) нескінченна, або не існує зовсім. У першому випадку кажуть також, що функція має **нескінченну похідну**;

2) як для границь взагалі, так і для похідної вводять поняття **односторонніх (правосторонньої і лівосторонньої) похідних**:

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ (\Delta x > 0)}} \frac{\Delta y}{\Delta x} = f'_+(x_0), \quad \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ (\Delta x < 0)}} \frac{\Delta y}{\Delta x} = f'_-(x_0). \quad (9.1.2)$$

(Згідно з (9.1.2) *дайте* відповідні означення і *сформулюйте* критерій існування похідної „мовою односторонніх границь”).

Функція називається **диференційовною** на відрізку $[a, b]$, якщо вона диференційовна на інтервалі (a, b) і має односторонні похідні у точках a і b .

Аналогічно означаються функції, диференційовні на $[a, b)$ і $(a, b]$.

Інтерпретація похідної у різних галузях знань

Торкаючись упровадження похідних у розв'язання застосовних задач, наведемо деякі тлумачення змісту похідних.

1. Розглянемо неперервну лінію (криву) (рис. 9.1.1), яка описується функцією $y = f(x)$, та деяку її **січну** M_0M – пряму, що проходить через фіксовану точку $M_0(x_0, y_0)$, і довільну точку $M(x, y)$ на кривій.

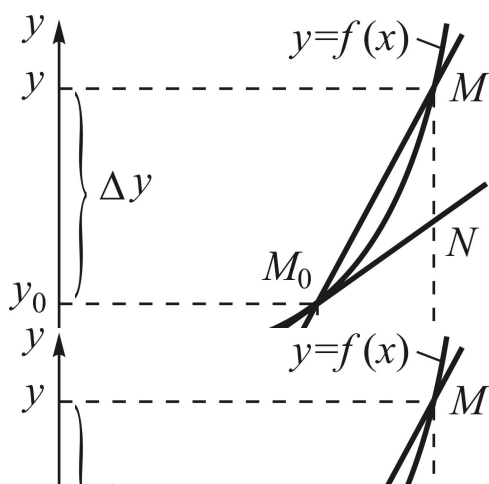


Рис. 9.1.1. До означення дотичної до кривої

Нехай точка M змінює своє положення, рухаючись вздовж кривої до точки M_0 . Таке наближення точки M до точки M_0 ($M \rightarrow M_0$) рівносильне тому, що приріст $\Delta x = x - x_0$ прямуватиме до нуля, а разом з ним до нуля прямує і приріст самої функції: $\Delta y = f(x) - f(x_0) \rightarrow 0$ (чому?).

Нехай точка M змінює своє положення, рухаючись вздовж кривої до точки M_0 . Таке наближення точки M до точки M_0 ($M \rightarrow M_0$) рівносильне тому, що приріст $\Delta x = x - x_0$ прямуватиме до нуля, а разом з ним до нуля прямує і приріст самої функції: $\Delta y = f(x) - f(x_0) \rightarrow 0$ (чому?).

Граничне положення січної M_0M за умови, що приріст $\Delta x \rightarrow 0$, називається **дотичною до кривої** $y = f(x)$ у точці M_0 (на рис. 9.1.1 це пряма M_0N).

Як підсумок розглянутого, маємо ланцюжок (*прослідкуйте*):

$$M \rightarrow M_0 \Rightarrow \Delta x \rightarrow 0 \Rightarrow \Delta y \rightarrow 0 \Rightarrow \varphi \rightarrow \alpha \Rightarrow \operatorname{tg} \varphi \rightarrow \operatorname{tg} \alpha,$$

де φ (α) – кут нахилу січної (дотичної) до осі Ox .

Тангенс кута φ є відношенням приростів функції і аргументу (див. рис. 9.1.1): $\operatorname{tg} \varphi = \Delta y / \Delta x$, а $\operatorname{tg} \alpha$ – кутовий коефіцієнт дотичної: $k = \operatorname{tg} \alpha$.

Тоді:

$$\alpha = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \varphi \Rightarrow \operatorname{tg} \alpha = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \operatorname{tg} \varphi \Rightarrow k = \operatorname{tg} \alpha = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x_0).$$

Узагальнюючи результат на будь-яку фіксовану точку $x \in D(f)$, робимо **висновок**: похідна функції $y = f(x)$ в точці x дорівнює тангенсові кута α , утвореного дотичною до кривої у точці (x, y) з додатним напрямом осі Ox , тобто дорівнює кутовому коефіцієнтові дотичної:

$$y'_x = k = \operatorname{tg} \alpha \quad (9.1.3)$$

(у цьому полягає **геометричний зміст** похідної).

Поряд з дотичною до кривої у заданій точці M_0 розглядають також

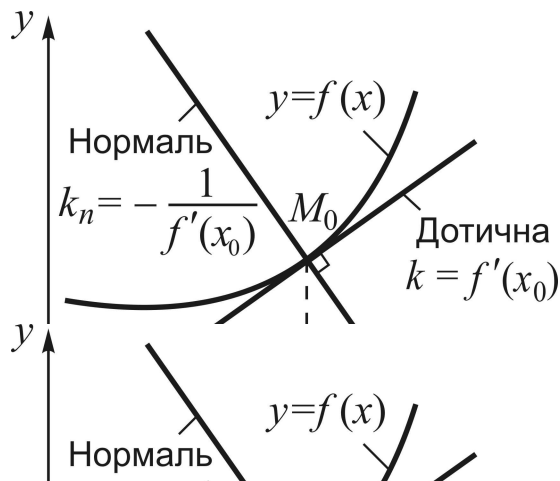


Рис. 9.1.2. Дотична і нормаль до кривої

пряму, яка перпендикулярна дотичній у цій точці, і називають її **нормаллю** до кривої у точці M_0 (рис. 9.1.2).

Геометричний зміст похідної дає змогу записати відповідно рівняння дотичної (нормалі) до кривої $y = f(x)$ у кожній точці (x_0, y_0) , де вона існує, як рівняння прямої, яка проходить через дану точку у заданому напрямі:

$$\begin{aligned} y - f(x_0) &= f'(x_0)(x - x_0) \\ \left(y - f(x_0) &= -\frac{1}{f'(x_0)}(x - x_0), f'(x_0) \neq 0 \right). \end{aligned} \quad (9.1.4)$$

2. Якщо $s = s(t)$ – закон прямолінійного руху матеріальної точки, то похідна від пройденого шляху s за часом t виражає швидкість руху v у момент часу t , тобто миттєву швидкість:

$$v = \frac{ds}{dt} = s'_t \quad (9.1.5)$$

(у цьому полягає **кінематичний, або механічний, зміст** похідної).

Зауваження. Якщо термін „швидкість” розуміти у більш загальному смислі (швидкість протікання хімічної реакції, швидкість нагрівання тіла, темпи зростання об’єму виробництва тощо), то похідну можна було б завжди трактувати як деяку „швидкість”, а саме: похідна функції $y = f(x)$ є **швидкістю змінювання функції** y порівняно зі змінною x (при заданій вартості останньої).

3. Зупинимось детальніше на економічній інтерпретації похідної. Перш за все введемо в розгляд деякі економічні поняття.

Під **витратами виробництва (виробничими витратами)** підприємства розуміють сукупність людських, матеріальних, енергетичних ресурсів тощо, які затрачаються на виготовлення та реалізацію продукції.

Виражені в грошовій формі витрати виробництва називають **собівартістю** продукції. Сюди входять: вартість сировини, власне матеріалів, палива, технічних засобів, загальногосподарчих витрат, заробітна платня тощо. Важливим показником ефективності роботи підприємства є **собівартість одиниці продукції** (або просто **собівартість** S) при певному об’ємі виробництва V .

Функцію $z = f(V)$, яка встановлює залежність виробничих витрат z (у коштах) від кількості (об’єму) виготовленої продукції V , називають **виробничою функцією**. Відношення $f(V)/V$ – **середня собівартість** ($S_{сер}$) продукції на проміжку $[0, V]$.

Змінимо об’єм виготовлення продукції V на величину ΔV , тоді витрати зміняться відповідно на $\Delta z = f(V + \Delta V) - f(V)$, а $S_{сер} = \Delta z / \Delta V$ дає середню собівартість на проміжку $[V, V + \Delta V]$.

Середня собівартість при різних приростах об’єму виробництва ΔV буде, взагалі кажучи, різною. При заданому об’ємі виробництва V середня собівартість точніше характеризує величину S для менших проміжків ΔV , а тому природно покласти:

$$\lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\Delta z}{\Delta V} = z'_V = S, \quad (9.1.6)$$

і кажуть: похідна виробничої функції $z = f(V)$ за об’ємом V дає **собівартість продукції** S при даному об’ємі виробництва V . (Це є одна із економічних інтерпретацій похідної.)

4. Нехай функція $V = V(t)$ описує залежність об'єму виготовленої продукції V від часу t . Змінимо час виготовлення продукції на величину Δt , тоді її обсяг зміниться відповідно на величину $\Delta V = V(t + \Delta t) - V(t)$, а відношення приростів ΔV і Δt **середньою продуктивністю праці** на проміжку $[t, t + \Delta t]$: $p_{сер} = \Delta V / \Delta t$.

Зауважимо, що у разі лінійної залежності між величинами V і t середня продуктивність є величиною сталою: $p_{сер} = p - const$ (наведіть обґрунтування).

У загальному випадку середня продуктивність для різних проміжків часу Δt буде різною. Але чим менше приріст Δt , тим точніше середня продуктивність характеризує зміну інтенсивності праці, а тому природно покласти:

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta V}{\Delta t} = V'_t = p, \quad (9.1.7)$$

де $p = p(t)$ – продуктивність праці у момент часу t .

Вона визначає обсяг виготовленої продукції за умови, що починаючи з цього моменту продуктивність є сталою. Отже, в **економічному смислі** похідна від обсягу виготовленої продукції V за часом t у розглядуваний момент часу є **продуктивністю праці** $p(t)$.

У лексиконі економічних термінів величини

$$S = S(V) = \frac{dz}{dV}, \quad p = p(t) = \frac{dV}{dt} \quad (9.1.8)$$

називають відповідно **граничними витратами виробництва, граничною продуктивністю праці**.

Таблиця похідних та правила диференціювання

Похідну будь-якої елементарної функції можна знайти згідно із загальною схемою відшукування похідних аналогічно тому, як це робилося вище для функції $y = \cos x$; основні труднощі при цьому – у розкритті невизначеностей $\frac{0}{0}$. Щоб полегшити задачу диференціювання, за загальною схемою установлюють похідні лише основних елементарних функ-

цій. У поєднанні із властивостями похідних цього виявляється досить для взяття похідної від будь-якої елементарної функції.

Похідні основних елементарних функцій наведені в табл. 9.1.1.

Таблиця 9.1.1

Таблиця основних похідних

№ п\п	Функція та її похідна		№ п\п	Функція та її похідна	
1	$y=c$ ($c=const$)	$y'=0$	6	$y=\sin x$	$y'=\cos x$
2	$y=x$	$y'=1$	7	$y=\cos x$	$y'=-\sin x$
3	$y=x^a$ ($a \in \mathbf{R}$)	$y=ax^{a-1}$	8	$y=\operatorname{tg} x$	$y'=\frac{1}{\cos^2 x}$
	$y=\frac{1}{x}$	$y'=-\frac{1}{x^2}$	9	$y=\operatorname{ctg} x$	$y'=-\frac{1}{\sin^2 x}$
	$y=\sqrt{x}$	$y'=\frac{1}{2\sqrt{x}}$			
4	$y=a^x$ ($a>0, a \neq 1$)	$y'=a^x \ln a$	10	$y=\arcsin x$	$y'=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
	$y=e^x$	$y'=e^x$	11	$y=\arccos x$	$y'=-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
5	$y=\log_a x$ ($a>0, a \neq 1$)	$y'=\frac{1}{x \ln a}$	12	$y=\operatorname{arctg} x$	$y'=\frac{1}{1+x^2}$
	$y=\ln x$	$y'=\frac{1}{x}$	13	$y=\operatorname{arcctg} x$	$y'=-\frac{1}{1+x^2}$

Наведемо **арифметичні властивості** похідних, які більше відомі під назвою „**основні правила диференціювання**”.

Нехай функції $u=u(x)$, $v=v(x)$ мають похідні у певній точці x , тоді у тій же точці:

$$1) (u \pm v)' = u' \pm v'; \quad (9.1.9)$$

$$2) (u \cdot v)' = u'v + v'u, \quad (9.1.10)$$

$$\text{зокрема, } (cu)' = cu', \quad c = const; \quad (9.1.11)$$

$$3) \left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - v'u}{v^2} \quad (v(x) \neq 0). \quad (9.1.12)$$

(Сформулюйте згідно з (9.1.9) – (9.1.12) відповідні правила самостійно.)

Д о в е д е н н я проведемо для частки функцій $y = \frac{u}{v}$, використовуючи, знову ж таки, загальну схему відшукування похідних.

Надамо аргументові x приріст Δx , тоді функції u , v , y здобудуть, відповідно, прирости Δu , Δv , Δy . Їхні нові значення $u + \Delta u$, $v + \Delta v$, $y + \Delta y$ зв'язані таким самим співвідношенням, а саме: $y + \Delta y = \frac{u + \Delta u}{v + \Delta v}$.

Звідки

$$\Delta y = \frac{u + \Delta u}{v + \Delta v} - \frac{u}{v} = \frac{\Delta u \cdot v - u \cdot \Delta v}{v(v + \Delta v)}, \quad \text{а} \quad \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{1}{v(v + \Delta v)} \left(\frac{\Delta u}{\Delta x} \cdot v - u \cdot \frac{\Delta v}{\Delta x} \right).$$

Спрямуємо Δx до нуля, тоді згідно з теоремою про неперервність диференційовної функції і $\Delta v \rightarrow 0$; а границі при $\Delta x \rightarrow 0$ відношень $\frac{\Delta u}{\Delta x}$,

$\frac{\Delta v}{\Delta x}$, дають, відповідно, u' , v' . Таким чином, вираз для $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ при $\Delta x \rightarrow 0$ не породжує невизначеності (бо $v \neq 0$ за умовою), і прямує до скінченної границі. Отже, похідна $y' = \left(\frac{u}{v} \right)'$ існує і визначається формулою (9.1.12).

Аналогічно доводяться (покажіть) співвідношення (9.1.9) – (9.1.11). Правило (9.1.9) поширюється на довільне скінченне число доданків.

Формула (9.1.10) застосовна і у випадку похідної добутку з більшим, ніж два, числом співмножників, бо його завжди можна записати як добуток двох співмножників. Наприклад, для функції $y = u \cdot v \cdot w$ маємо:

$$\begin{aligned} y &= (u \cdot v) \cdot w \Rightarrow y' = (u \cdot v)' \cdot w + (u \cdot v) \cdot w' \Rightarrow \dots \\ &\Rightarrow y' = u' \cdot v \cdot w + u \cdot v' \cdot w + u \cdot v \cdot w'. \end{aligned} \quad (9.1.13)$$

9.2. Диференціювання складених функцій та функцій різної форми завдання

Відшукування похідних складених функцій:

$$(y = f(u), u = \varphi(x)) \Rightarrow y = f(\varphi(x)),$$

займає центральне місце у так званій техніці диференціювання – вмінні знаходити похідну, і тому дуже важливою є така теорема.

Теорема 9.2.1 (про похідну складеної функції). Якщо функція $y=f(u)$ при деякому значенні u має похідну $y'_u=f'_u(u)$, а функція $u=\varphi(x)$ диференційовна ($u'_x=\varphi'_x(x)$) у точці x , якій відповідає вартість u , то похідна складеної функції $y=f(\varphi(x))$ визначається за формулою:

$$(f(\varphi(x)))'_u = f'_u(u) \cdot \varphi'_x(x), \quad (9.2.1)$$

або (в інших позначеннях)

$$y'_x = y'_u \cdot u'_x. \quad (9.2.2)$$

Д о в е д е н н я. Припущення про існування похідної y'_u рівносильне наявності рівності (за означенням):

$$\lim_{\Delta u \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta u} = y'_u.$$

Звідки згідно з критерієм існування границі маємо: $\frac{\Delta y}{\Delta u} = y'_u + \alpha(\Delta u)$, де $\alpha(\Delta u)$ – нескінченно мала при $\Delta u \rightarrow 0$. Тоді

$$\Delta y = y'_u \cdot \Delta u + \alpha(\Delta u) \cdot \Delta u \Rightarrow \frac{\Delta y}{\Delta x} = y'_u \cdot \frac{\Delta u}{\Delta x} + \alpha(\Delta u) \frac{\Delta u}{\Delta x}.$$

При $\Delta x \rightarrow 0$ і $\Delta u \rightarrow 0$ (в силу неперервності диференційовної функції), а значить і $\alpha(\Delta u) \rightarrow 0$; відношення $\frac{\Delta u}{\Delta x}$ при $\Delta x \rightarrow 0$ є u'_x . Таким чином, остання рівність при $\Delta x \rightarrow 0$ і дає (9.2.2).

Згідно з (9.2.1), (9.2.2) одержуємо **правило** (взяття похідної від складеної функції).

Щоб знайти похідну складеної функції $y=f(\varphi(x))$ за незалежною змінною x треба:

- 1) знайти похідну зовнішньої функції $f(u)$ за аргументом u ;
- 2) здиференціювати внутрішню функцію $\varphi(x)$ за змінною x ;
- 3) записати їхній добуток, або, що те ж саме, – знайти похідну функції y за проміжним аргументом u і помножити на похідну проміжного аргументу за незалежною змінною x .

Основне, крім знання таблиці похідних та правил диференціювання, при взятті похідної складеної функції – це вміння розрізняти зовнішню функцію і проміжний аргумент, себто внутрішню функцію. Якщо цього досягнуто, то на ділі нема ніякої потреби виписувати складові частини складеної функції (хіба що на перших кроках у практиці диференціювання).

Наприклад, якщо $y = \sin^2 x$ (зовнішня функція степенева $f(u) = u^2$, внутрішня – $u = \sin x$ – тригонометрична), то

$$y'_x = 2 \sin x (\sin x)' = 2 \sin x \cos x = \sin 2x.$$

А от для функції $y = \sin x^2$ ($f(u) = \sin u$, $u = x^2$) маємо:

$$y'_x = \cos x^2 (x^2)' = 2x \cos x^2.$$

Випадок складеної функції як суперпозиції декількох (більше двох) функцій вичерпується послідовним застосуванням наведеного правила. Так, для функції $y = f(u)$, $u = \varphi(v)$, $v = \psi(x) \Rightarrow y = f[(\psi(x))]$ отримуємо:

$$y'_x = y'_u \cdot u'_x = y'_u \cdot u'_v \cdot v'_x.$$

Наприклад, $y = \sqrt{\ln \frac{x}{2}}$ ($y = \sqrt{u}$, $u = \ln v$, $v = \frac{1}{2}x$), тоді

$$y'_x = \frac{1}{2\sqrt{\ln \frac{1}{2}x}} \left(\ln \frac{1}{2}x \right)' = \frac{1}{2y} \cdot \frac{1}{\frac{1}{2}x} \cdot \left(\frac{1}{2}x \right)' = \frac{1}{2x\sqrt{\ln \frac{1}{2}x}}.$$

Як наслідок зі щойно доведеної теореми впливають твердження про зв'язок похідних прямої та оберненої функції (1⁰), про диференціювання функцій, поданих у неявній (2⁰) та параметричній (3⁰) формах.

1⁰. *Нагадаємо*: якщо виходячи з рівності $y = f(x)$, за кожним припустимим значенням величини y можна відновити одне і тільки одне значення величини x , то кажуть, що ця рівність визначає **функцію** $x = \varphi(y)$, **обернену** до, або відносно, даної (прямої) $y = f(x)$. У свою чергу $y = f(x)$ можна розглядати як обернену функцію відносно функції $x = \varphi(y)$, а тому їх називають **взаємно оберненими** функціями.

Задача 9.2.1. Знайти похідну функції $x=\varphi(y)$ за змінною y , якщо функція $y=f(x)$ у деякій точці x має відмінну від нуля похідну.

Розв'язання. Згідно з означенням оберненої функції $x=\varphi(y)$ змінну x можна розглядати як складену функцію:

$$(x=\varphi(y), y=f(x)) \Rightarrow x=\varphi(f(x)).$$

Візьмемо похідну від цієї функції за змінною x :

$$x'_x = \varphi_y \cdot f'_x \Rightarrow 1 = x'_y \cdot y'_x. \quad (9.2.3)$$

Таким чином,

$$x'_y = \frac{1}{y'_x} \quad (y'_x \neq 0). \quad (9.2.4)$$

Із (9.2.4) маємо також:

$$y'_x = \frac{1}{x'_y} \quad (x'_y \neq 0). \quad (9.2.5)$$

Знайдемо, *наприклад*, похідну функції $y=\arctg x$, вважаючи, що відома похідна функції $x=tg y$: $x'_y = (tg y)'_y = \frac{1}{\cos^2 y}$. Застосуємо (9.2.5):

$$y'_x = \frac{1}{x'_y} = \cos^2 y = \frac{1}{1+tg^2 y} = \frac{1}{1+x^2}.$$

$$\text{Отже, } (\arctg x)'_x = \frac{1}{1+x^2}, \quad x \in \mathbf{R}.$$

2⁰. Функцію y від x називають **поданою в неявній формі** (або, коротко, **неявною**), якщо вона визначається не розв'язаним відносно y рівнянням

$$F(x, y)=0. \quad (9.2.6)$$

Під символом F розуміють вираз, який містить змінні x, y , і щоб це підкреслити, пишуть $F(x, y)$.

У протиставлення неявній формі подання функції звичну форму її завдання – $y = f(x)$ – називають **явною**.

Якщо рівняння (9.2.6) визначає y як функцію від x : $y = f(x)$, то для всіх пар $(x, y) = (x, f(x))$, де $x \in D(f)$, а $y = E(f)$ – відповідна wartość функції при заданому x , співвідношення (9.2.6) перетворюється у тотожність:

$$F(x, f(x)) \equiv 0. \quad (9.2.7)$$

Щоб знайти похідну від y за змінною x , немає потреби перетворювати неявну функцію в явну, тобто розв'язувати (9.2.6) відносно y (та й не завжди це можна зробити).

Справді, вираз $F(x, y)$, де $y = f(x)$, можна розглядати як своєрідну складену функцію $F(x, f(x))$ від аргументу x . З урахуванням тотожності (9.2.7) похідна від цієї функції теж буде нулем. Саме ця обставина і дозволяє знайти y'_x , не маючи в розпорядженні явного запису y через x .

Покажемо це на *прикладі* залежності ординати y точки кола радіуса r з центром в $O(0,0)$ від абсциси x : $x^2 + y^2 = r^2$, або $x^2 + y^2 - r^2 = 0$; тут $F(x, y) = x^2 + y^2 - r^2$.

Здиференціюємо обидві частини рівності $x^2 + y^2 - r^2 = 0$ за змінною x :

$$(x^2 + y^2 - r^2)'_x = 0 \Rightarrow 2x + 2y \cdot y'_x = 0. \quad (9.2.8)$$

Ураховано, що змінна y – функція від x , тобто при взятті похідної від y^2 застосовувалось правило диференціювання складеної функції. Із (9.2.8), розв'язуючи відповідне рівняння відносно y'_x маємо: $y'_x = -\frac{x}{y}$.

Для обчислення похідної у деякій точці $x = x_0$ нам треба знати, як бачимо, і відповідне значення функції y_0 .

Підсумовуючи розглянуте, дістаємо **правило** диференціювання неявної функції.

Щоб знайти похідну y'_x неявної функції y від x треба:

- 1) *здиференціювати* за x обидві частини рівності, якою вона визначається, застосовуючи правило взяття похідної від складеної функції;
- 2) *розв'язати* одержане рівняння відносно шуканої похідної y'_x .

Зауваження. Часто, щоб спростити задачу диференціювання функції, навмисно переходять від явного завдання функції до неявного, логарифмуючи ліву і праву частини рівності $y = f(x)$: $\ln|y| = \ln|f(x)|$. Модуль береться у зв'язку з тим, що значення лівої і правої частин можуть бути від'ємними. Проте, для спрощення запису, його можна випускати, оскільки після взяття похідної від логарифму модуля змінної він (модуль) зникає: $(\ln|x|)' = \frac{1}{x}$. Такий підхід до відшукування похідної називають **логарифмічним диференціюванням**.

Логарифмічне диференціювання застосовують найчастіше до степенево-показникових функцій $y = (u(x))^{v(x)}$ і, взагалі, до „громіздких” функцій, зручних для логарифмування. *Наприклад:*

$$\begin{aligned} y &= (\sin x)^{\cos x} \Rightarrow \ln y = \cos x \cdot \ln \sin x \Rightarrow \\ \Rightarrow \frac{1}{y} \cdot y'_x &= -\sin x \cdot \ln \sin x + \cos^2 x \cdot \frac{1}{\sin x} \Rightarrow \\ \Rightarrow y'_x &= y \left(\frac{1}{\sin x} - \sin x (1 + \ln \sin x) \right) \Rightarrow \\ \Rightarrow y'_x &= (\sin x)^{\cos x} \left(\frac{1}{\sin x} - \sin x (1 + \ln \sin x) \right). \end{aligned}$$

3⁰. Функцію y від x називають **заданою у параметричній формі** (або, коротко, **параметричною**), якщо вона визначається за допомогою двох функцій $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$ від допоміжної змінної (параметра) t .

Такою формою завдання користуються тоді, коли безпосереднє встановлення зв'язку між x та y у вигляді одного рівняння або досить важке й громіздке, або ж незручне для застосування. До параметричного завдання функції часто вдаються в механіці, причому роль параметра t відіграє час.

Параметричну функцію можна здиференціювати як і неявну, без подання її у явній формі завдання.

Задача 9.2.2. Знайти похідну функції y від x , яку подано в параметричній формі:

$$\begin{cases} x = \varphi(t), \\ y = \psi(t), \end{cases} \quad \alpha \leq t \leq \beta, \quad (9.2.9)$$

за умови, що функції $\varphi(t)$, $\psi(t)$ мають похідні за аргументом t , а $x = \varphi(t)$ має обернену – $t = \Phi(x)$.

Розв'язання. Виходячи з умови задачі робимо висновок, що функцію y від x можна розглядати як складену функцію:

$$(y = \psi(t), t = \Phi(x)) \Rightarrow y = \psi(\Phi(x)).$$

Тоді за правилом диференціювання складеної функції маємо:

$$y'_x = \psi'_t \cdot t'_x = y'_t \cdot \frac{1}{x'_t} = \frac{y'_t}{x'_t}, \text{ адже } t'_x \cdot x'_t = 1.$$

Таким чином,

$$y'_x = \frac{y'_t}{x'_t} = \frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}. \quad (9.2.10)$$

Як відомо, функції $y = f(x)$ геометрично відповідає деяка лінія (крива); у зв'язку з цим рівності (9.2.9) називають **параметричними рівняннями** кривої.

Наприклад, параметричні рівняння еліпса мають вигляд:

$$\begin{cases} x = a \cos t, \\ y = b \sin t, \end{cases} \quad 0 \leq t \leq 2\pi, \quad (9.2.11)$$

де t – кут між радіусом-вектором поточної точки еліпса і додатним напрямом осі Ox .

Дійсно, виключаючи параметр t , одержуємо:

$$\begin{cases} x = a \cos t, \\ y = b \sin t \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \cos t = \frac{x}{a}, \\ \sin t = \frac{y}{b} \end{cases} \Rightarrow \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1. \quad (9.2.12)$$

Для похідної y'_x маємо:

$$y'_x = \frac{(b \sin t)'_t}{(a \cos t)'_t} = -\frac{b}{a} \cdot \frac{\cos t}{\sin t} = -\frac{b}{a} \operatorname{ctg} t. \quad (9.2.13)$$

(Пропонуємо сформулювати згідно з (9.2.10) **правило** диференціювання параметрично заданої функції).

Опанування розглянутого теоретичного матеріалу диференціального числення є запорукою успішного засвоєння інших розділів математичного аналізу, а саме: інтегрального числення, теорії диференціальних рівнянь, інших дисциплін математичного циклу: „Чисельні методи”, „Дослідження операцій”, та дисциплін фахової направленості.

9.3. Похідні вищих порядків

Впровадження у розгляд цього поняття обумовлюється тим, що похідна функція $y = f(x)$ на деякому відрізку, взагалі кажучи, теж деяка функція від x . Отже, від неї, в свою чергу, можна брати похідну, якщо, звичайно, така існує.

Похідну від похідної функції $y = f(x)$ називають **похідною другого порядку**, або **другою похідною**:

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = f''(x) = (f'(x))' = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f'(x + \Delta x) - f'(x)}{\Delta x}. \quad (9.3.1)$$

Похідна від другої похідної зветься похідною **третього порядку** і позначається через y''' , $f'''(x)$ або $\frac{d^3 y}{dx^3}$ (читається: „де три ігрек за де ікс тричі”).

Взагалі **похідною n -го порядку** (чи **n -ю похідною**) називають похідну від похідної $(n-1)$ -го порядку і позначають: $y^{(n)}$, $f^{(n)}(x)$, $\frac{d^n y}{dx^n}$, $n \in \mathbb{N}$.

Надалі похідну даної функції $f(x)$ будемо називати **похідною першого порядку**, або просто **першою похідною**; саму ж функцію можна розглядати як **похідну нульового порядку**: $f^{(0)}(x) = f(x)$.

Похідні порядку вище першого називають **похідними вищого порядку**. Якщо опановано відшукання першої похідної, то знаходження другої і вищих похідних не потребує чогось принципово нового.

Щоб знайти n -ну похідну

$$y^{(n)} = \frac{d^n y}{dx^n} = \left(y^{(n-1)} \right)' = \frac{dy^{(n-1)}}{dx}, \quad n \in \mathbf{N}, \quad (9.3.2)$$

необхідно узагалі обчислити послідовно $y', y'', \dots, y^{(n)}$, але буває так, що вдається знайти загальний вираз n -ї похідної, безпосередньо залежний від n , для довільного n .

Приклади:

1) $y = a^x$, тоді: $y' = a^x \ln a$, $y'' = a^x (\ln a)^2$, Загальна формула $y^{(n)} = a^x (\ln a)^n$, зокрема, $(e^x)^{(n)} = e^x$;

2) $y = \sin x$, тоді: $y' = \cos x$, $y'' = -\sin x$, $y''' = -\cos x$, Загальна формула $y^{(n)} = \sin\left(x + n \frac{\pi}{2}\right)$;

3) аналогічно: $y = \cos x \Rightarrow y^{(n)} = \cos\left(x + n \frac{\pi}{2}\right)$ (переконайтеся).

Відзначимо, що:

1) друга похідна від пройденого шляху $s = s(t)$ за часом t визначає **прискорення руху** у момент t :

$$a = (s'_t)'_t = s''_{tt} = \frac{d^2 s}{dt^2} \quad (9.3.3)$$

(кінематичний зміст другої похідної);

2) друга похідна від виробничої функції $z = f(V)$ за змінною V є **швидкістю змінювання собівартості** продукції (зменшення або збільшення) залежно від об'єму виробництва V :

$$T = (z'_V)'_V = z''_{VV} = \frac{d^2 z}{dV^2} \quad (9.3.4)$$

(економічний зміст другої похідної).

Друга похідна за часом t від обсягу продукції $V = V(t)$ є **швидкістю змінювання продуктивності** праці $p = p(t)$:

$$v_p(t) = p'(t) = V''(t) = \frac{d^2V}{dt^2}. \quad (9.3.5)$$

В економіці логарифмічну похідну від продуктивності праці називають **темпом зміни продуктивності** праці:

$$T_p(t) = (\ln p(t))' = \frac{1}{p(t)} \cdot p'(t) = \frac{v_p(t)}{p(t)}, \quad (9.3.6)$$

що означає відношення швидкості змінювання продуктивності праці до самої продуктивності праці.

Відшукування похідних вищих порядків від функцій, заданих *неявно* чи в *параметричній* формі? принципово не відрізняється від того, як це здійснювалося для отримання першої похідної. А саме: розглядаємо похідну першого порядку як вихідну функцію і згідно з (9.3.2) знаходимо другу похідну; вважаючи похідну 2-го порядку вихідною (початковою) функцією, відшукуємо третю похідну і так далі, поки не дійдемо до похідної потрібного порядку.

Нехай функція $y = f(x)$ задана **неявно** рівнянням $F(x, y) = 0$. Вираз для похідної y'_x міститиме, взагалі кажучи, незалежну змінну x і саму функцію $y = y(x)$: $y'_x = F_1(x, y(x))$, де F_1 – закон, яким пов'язані змінні x і y . За означенням $y''_{xx} = (y'_x)'_x$, тому диференціюємо складену функцію $F_1(x, y(x))$ за змінною x , як це робилося і при відшуванні першої похідної (див. п. 9.2).

Друга похідна у загальному випадку визначається виразом, який містить змінні x і y та похідну y'_x : $y''_{xx} = F_2(x, y, y'_x)$, де F_2 – закон, яким пов'язані названі змінні. Підставляємо замість y'_x її зображення через змінні x , $y(x)$ у вираз для y''_{xx} і отримуємо похідну 2-го порядку; вона, як і перша похідна, виражатиметься тільки через змінні x і y .

Приклад. Знайдемо другу похідну неявної функції $x^2 + y^2 - e^y = 0$ у точці $(x_0, y_0) = (1, 0)$.

Відшукуємо першу похідну:

$$2x + 2y y'_x - e^y y'_x = 0 \Rightarrow y'_x = \frac{2x}{e^y - 2y}.$$

Диференціюємо за змінною x отриману функцію:

$$(y'_x)'_x = \frac{2}{(e^y - 2y)^2} \left((e^y - 2y) - x(e^y y'_x - 2y'_x) \right).$$

$$\text{Остаточно маємо: } y''_{xx} = \frac{2}{(e^y - 2y)^3} \left((e^y - 2y)^2 - 2x^2(e^y - 2) \right).$$

Обчислюємо y''_{xx} у заданій точці: $y''_{xx}|_{(1,0)} = 6$.

Нехай функція $y = f(x)$ задана **параметрично**: $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$.

Відомо (див. (9.2.10)), що $y'_x = \frac{y'_t}{x'_t} = \frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}$. Позначимо: $y'_x = \psi_1(t)$.

Диференціюємо за змінною x похідну y'_x як параметрично задану функцію: $x = \varphi(t)$, $y'_x = \psi_1(t)$, а саме: $y''_{xx} = (y'_x)'_x = \frac{\psi'_1(t)}{\varphi'(t)}$.

Якщо знайдено похідну $(n-1)$ -го порядку: $y^{(n-1)} = \psi_{n-1}(t)$, то для n -ї похідної матимемо: $y^{(n)} = \frac{\psi'_{n-1}(t)}{\varphi'(t)}$ (для спрощення запису нижні індекси у позначенні похідних пропущені).

Можна поступати інакше: кожного разу виводити формулу похідної певного порядку заданої функції так само, як це робилося для першої похідної (див. (9.2.10)), ураховуючи зв'язок між похідними взаємно обернених функцій.

Наприклад, для другої і третьої похідних маємо:

$$y''_{xx} = (y'_x)'_x = (y'_x)'_t \cdot t'_x = \left| t'_x = \frac{1}{x'_t} \right| = \frac{(y'_x)'_t}{x'_t};$$

$$y'''_{xxx} = (y''_{xx})'_x = (y''_{xx})'_t \cdot t'_x = \left| t'_x = \frac{1}{x'_t} \right| = \frac{(y''_{xx})'_t}{x'_t}.$$

Приклад. Знайдемо третю похідну функції $\begin{cases} x = a \cos t \\ y = b \sin t \end{cases}$ (див. (9.2.11))

у точці $(x_0, y_0) = (0, b)$.

Згідно з (9.2.13) $y'_x = -\frac{b}{a} \operatorname{ctg} t$, тоді:

$$y''_{xx} = \frac{(y'_x)'_t}{x'_t} = -\frac{b}{a^2} \frac{(\operatorname{ctg} t)'_t}{(\cos t)'_t} = -\frac{b}{a^2} \frac{1}{\sin^3 t};$$

$$y'''_{xxx} = \frac{(y''_{xx})'_t}{x'_t} = -\frac{b}{a^3} \frac{(\sin^{-3} t)'_t}{(\cos t)'_t} = -\frac{3b}{a^3} \frac{\cos t}{\sin^5 t}.$$

Обчислюємо третю похідну у заданій точці: $y'''_{xxx}|_{t=\pi/2} = 0$. (Підрахуйте значення першої і другої похідних у точці $t = \pi/2$.)

9.4. Диференціали функції

При введенні поняття похідної функції $y = f(x)$ у деякій точці $x \in D(f)$ оперують приростами аргументу Δx і відповідним приростом функції Δy . Якщо похідна існує, то $f(x)$ – неперервна у точці x функція, і її приріст можна подати (див. теорему 9.1.1) у вигляді:

$$\Delta y = f'(x) \cdot \Delta x + \Delta x \cdot \alpha(\Delta x), \quad (9.4.1)$$

де $\alpha = \alpha(\Delta x)$ – н/м при $\Delta x \rightarrow 0$.

Якщо у розглядуваній точці похідна $y' = f'(x)$ скінченна і відмінна від нуля, то обидва доданки у (9.4.1) не є стаціонарними н/м при $\Delta x \rightarrow 0$.

Задача 9.4.1. Порівняти нескінченно малий приріст функції Δy і добуток відмінної від нуля похідної y' з приростом аргументу Δx .

Розв'язання. Складемо, спираючись на (9.4.1), відповідне умові задачі відношення і знайдемо його границю при $\Delta x \rightarrow 0$:

$$\frac{\Delta y}{y' \Delta x} = 1 + \frac{\alpha(\Delta x)}{y'} \Rightarrow \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{y' \Delta x} = 1 + \frac{1}{y'} \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \alpha(\Delta x) = 1 + 0 = 1 \quad (9.4.2)$$

(ураховано, що похідна функції у точці є сталою величиною і $y' \neq 0$).

Висновок. За умови прямування приросту аргументу Δx до нуля добуток похідної y' диференційовної функції $y = f(x)$ з приростом аргументу $\Delta x \in \text{н/м}$, еквівалентна приростові функції Δy , тобто

$$\Delta x \rightarrow 0: y' \cdot \Delta x \sim \Delta y. \quad (9.4.3)$$

У термінах властивостей н/м (див. п. 7.4) це означає, що перший доданок формули (9.4.1) являє собою *головну частину* приросту функції Δy , а другий доданок – н/м більш високого порядку, ніж Δx .

Головна, лінійна відносно приросту аргументу Δx , частина приросту функції Δy , називається **диференціалом функції** $y = f(x)$ у точці x і позначається символом dy або $df(x)$:

$$dy = f'(x)\Delta x \quad (dy = y'\Delta x) \quad \text{або} \quad df(x) = f'(x)\Delta x. \quad (9.4.4)$$

Із означення диференціала випливає (*обміркуйте* детально):

1) диференціал незалежної змінної x дорівнює її приростові.

Дійсно, якщо покласти $f(x) = x$, то $f'(x) = 1$, а $df(x) = dx = \Delta x$;

2) диференціал функції дорівнює добуткові з похідної та диференціала аргументу:

$$dy = f'(x)dx \quad (dy = y'dx) \quad \text{або} \quad df(x) = f'(x)dx; \quad (9.4.5)$$

3) похідна функції – це відношення диференціала функції до диференціала аргументу: $f'(x) = \frac{dy}{dx}$; отже, символ $\frac{dy}{dx}$, яким раніше позначалася похідна, тепер можна тлумачити як звичайний дріб.

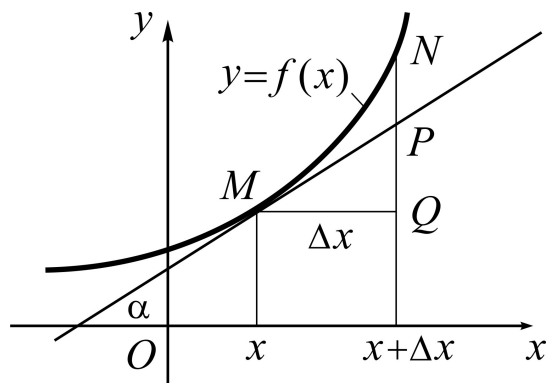


Рис. 9.4.1. Геометричний зміст диференціала

Із зв'язку між похідною і диференціалом функції з урахуванням геометричного змісту похідної легко отримуємо геометричний зміст диференціала (рис. 9.4.1).

За рисунком із прямокутного трикутника MQP ($\angle Q = 90^\circ$) маємо:

$$PQ = \operatorname{tg} \alpha \cdot \Delta x = y' \Delta x \Rightarrow dy = PQ.$$

Висновок (геометричний зміст диференціала): диференціал функції $y = f(x)$ у точці x є приростом ординати дотичної до графіка функції у цій точці при переході від неї до точки $x + \Delta x$ (тобто коли x набуває приросту Δx).

Приріст дотичної – диференціал – додатний (від’ємний), якщо похідна функції і приріст аргументу мають однакові (різні) знаки (чому?).

Основні властивості диференціала. Диференціал функції dy відрізняється від похідної $f'(x)$ лише множником dx , тому неважко отримати аналогічні арифметичні властивості диференціала, а саме:

- 1) $dc = 0, c = \text{const}$;
 - 2) $d(u \pm v) = du \pm dv$;
 - 3) $d(u \cdot v) = v du + u dv$, зокрема $d(c \cdot u) = c \cdot du$;
 - 4) $d\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{v du - u dv}{v^2}$.
- (9.4.6)

Слушність кожного із співвідношень (9.4.6) легко показати, якщо помножити обидві частини рівностей, що описують правила диференціювання, на dx і залучити означення диференціала. Покажемо, *наприклад*, чому дорівнює диференціал добутку двох функцій $u = u(x)$, $v = v(x)$:

$$(u \cdot v)' = u'v + v'u \Rightarrow (u \cdot v)' dx = v(u' dx) + u(v' dx) \Rightarrow d(u \cdot v) = v du + u dv.$$

Щоб описати словесно арифметичні властивості диференціала, досить у твердженнях, сформульованих для похідних, слово „похідна” замінити словом „диференціал”.

Торкаючись диференціалів складених функцій, розглянемо властивість **інваріантності (незмінності)** форми диференціала, а саме: форма (вигляд, формула) диференціала функції не залежить від того чи є аргумент функції незалежною змінною, чи функцією іншої змінної:

$$(y = f(x): dy = f'(x)dx) \Rightarrow (y = f(x), x = \varphi(t): dy = f'(x)dx). \quad (9.4.7)$$

Дійсно, якщо x є не незалежною змінною, а проміжним аргументом – функцією від t , – то за правилом відшукування похідної складеної функції

$y = f(\varphi(t))$ маємо: $\frac{dy}{dt} = f'(x) \cdot \varphi'(t)$. Звідки $dy = f'(x) \cdot \varphi'(t) dt$. Але за означенням диференціала добуток $\varphi'(t) dt$ дорівнює dx : $\varphi'(t) dt = dx$.

Таким чином, $dy = f'(x) dx$, тобто у випадку складеної функції формула диференціала зберігається. Властивість інваріантності диференціала відіграє важливу роль у розділі „інтегральне числення”.

Диференціали вищих порядків. Оскільки приріст Δx не залежить від вартості незалежної змінної x (для будь-якої точки із області визначення функції його можна вибирати довільним чином), від диференціала функції $dy = f'(x) dx$ як функції від x можна утворити диференціал $d(dy)$. Диференціал від диференціала функції називають **диференціалом 2-го порядку**, або **другим диференціалом**, і позначають символом $d^2 y$:

$$d^2 y = d(dy) = d(f'(x) dx) = (f'(x) dx)' dx = f''(x) \cdot (dx)^2.$$

Зважаючи на загальноприйняту умову писати $(dx)^2 = dx \cdot dx = dx^2$, $(dx)^3 = dx \cdot dx \cdot dx = dx^3$, ..., $(dx)^n = \underbrace{dx \cdot dx \cdot \dots \cdot dx}_n = dx^n$, дістаємо остаточно:

$$d^2 y = f''(x) dx^2.$$

Аналогічно відшукується третій, четвертий і диференціали більш високих порядків. **Диференціалом n -го порядку** називають диференціал від диференціала $(n-1)$ -го порядку:

$$d^n y = d(d^{n-1} y) = f^{(n)}(x) \cdot dx^n, \quad n = 2, 3, \dots \quad (9.4.8)$$

Із формули (9.4.8) дістаємо вираз для похідної будь-якого скінченного порядку через відношення диференціалів n -го порядку:

$$f^{(n)}(x) = \frac{d^n y}{dx^n}.$$

Зауважимо, що диференціали вищих порядків ($n > 1$), на відміну від першого диференціала, не зберігають загалом свою форму, якщо замість x запровадити якусь функцію від t (спробуйте показати це на прикладі).

Впровадження диференціала у наближені обчислення розглянемо у двох аспектах: абстрактному (1^0) і застосовному (2^0).

1^0 . *Наближене обчислення вартості функції* $y = f(x)$ базується на еквівалентності приросту Δy і диференціала dy функції при прямуванні приросту аргументу Δx до нуля, тобто на співвідношенні (9.4.3), яке можна подати так:

$$\Delta y \sim dy \text{ при } \Delta x \rightarrow 0. \quad (9.4.9)$$

Еквівалентність н/м Δy і dy означає, що при відносно малому Δx матиме місце наближена рівність:

$$\Delta y \approx dy, \quad (9.4.10)$$

із якої отримуємо формулу для відповідних розрахунків:

$$\begin{aligned} \Delta y \approx dy &\Rightarrow \left| \begin{array}{l} \Delta y = f(x + \Delta x) - f(x) \\ dy = f'(x)\Delta x \end{array} \right| \Rightarrow f(x + \Delta x) - f(x) \approx dy \Rightarrow \\ &\Rightarrow f(x + \Delta x) \approx f(x) + dy \Rightarrow f(x + \Delta x) \approx f(x) + f'(x)\Delta x. \end{aligned} \quad (9.4.11)$$

Правило: щоб за заданою вартістю функції $y = f(x)$ у точці $x = x_0$ знайти її наближене значення у точці $x_0 + \Delta x$, треба *обчислити* диференціал $df(x_0) = f'(x_0)\Delta x$ і *скористатися* формулою (9.4.11).

Обґрунтуванням доцільності використання диференціала є те, що, як правило, структура (будова) приросту функції значно складніша, ніж будова диференціала. Точність наближених обчислень залежить не тільки від величини приросту аргументу (менше Δx – вище точність), а й від поведінки функції в околі точки x_0 (чим менше осциляції – коливання – значень функції поблизу точки x_0 , тим краще).

Ілюстративні *приклад*и:

1. Обчислити диференціал та приріст функції $y = x^3 - 2x^2 + 3x - 4$ при переході від $x = 2$ до $x = 2,02$ і порівняти їх.

Розв'язання. Визначаємо приріст аргументу: $\Delta x = dx = 0,02$, знаходимо похідну: $y' = 3x^2 - 4x + 3$, і обчислюємо диференціал у точці $x = 2$:

$$dy|_{x=2} = y'|_{x=2} \cdot dx = 7 \cdot 0,02 = 0,14.$$

Підраховуємо приріст функції:

$$\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x) = \left[(x + \Delta x)^3 - 2(x + \Delta x)^2 + 3(x + \Delta x) - 4 \right] - \left(x^3 - 2x^2 + 3x - 4 \right) \Rightarrow \Delta y \Big|_{\substack{x=2 \\ \Delta x=0,02}} = 0,141608 \Rightarrow \Delta y - dy = 0,001608.$$

2. Обчислити наближено за допомогою диференціала $A = \sqrt{3,9}$.

Розв'язання. Розглядаємо функцію, для якої число A є її окремим значенням при окремій вартості аргументу: $f(x) = \sqrt{x}$. Покладаємо $x_0 = 4$, тоді $\Delta x = -0,1$. Застосовуємо (9.4.11):

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} \Rightarrow \sqrt{x + \Delta x} \approx \sqrt{x} + \frac{1}{2\sqrt{x}} \Delta x.$$

Підставляємо вихідні дані: $A = \sqrt{3,9} \approx 2 - \frac{0,1}{4} = 1,975$. Абсолютна похибка не перевищує 0,0002.

2⁰. Наближене обчислення приросту виробничої функції $z = f(V)$.

Одним із важливих показників виробництва є приріст у відсотках виробничої функції (збільшення або зменшення), який відповідає приростові незалежної змінної V – об'єму виготовленої продукції – на 1 %, тобто величина $\frac{\Delta z}{z} 100 \%$ при $\Delta V = 0,01 V$. За допомогою тотожних перетворень одержуємо (прослідкуйте):

$$\frac{\Delta z}{z} 100 \% = \frac{\Delta z}{z} \cdot \frac{\Delta V}{\Delta V} 100 \% = \frac{\Delta z}{z} \cdot \frac{0,01V}{\Delta V} 100 \% = \frac{\Delta z}{\Delta V} \cdot \frac{V}{z} \%.$$

Покладаючи $\Delta z \approx dz$, матимемо наближене значення приросту виробничої функції:

$$\frac{\Delta z}{z} 100 \% = \frac{\Delta z}{\Delta V} \cdot \frac{V}{z} \% \approx \frac{dz}{dV} \cdot \frac{V}{z} \%.$$

Величина $\frac{dz}{dV} \cdot \frac{V}{z} \%$, яка дає наближено у відсотках приріст виробничої функції при прирості об'єму виробництва на 1 %, називається **елас-**

тичністю функції $z=f(V)$ за змінною V і позначається символом $E_V(z)$:

$$E_V(z) = \frac{dz}{dV} \cdot \frac{V}{z} \% . \quad (9.4.12)$$

(Еластичність від грецьк. *elastos* – гнучкий.)

Якщо виробнича функція має вигляд степеневі функції $z = aV^\alpha$, де $a, \alpha - const$, то еластичність z за V чисельно дорівнює α . Тобто при збільшенні V на 1 % величина z зміниться на α %. *Пропонуємо* показати це самостійно.

Поняття еластичності функції поширюється на будь-яку (а не тільки на виробничу) функцію:

$$y = f(x) : E_x(y) = \frac{dy}{dx} \cdot \frac{x}{y} = \frac{dy/dx}{y/x} = \frac{y'}{y} \cdot x, \quad (9.4.13)$$

а також на функції багатьох змінних, які вивчатимуться пізніше.

Узагалі область застосовності похідних настільки широка, що важко знайти природничу науку, в якій би вона не використовувалася при математичному моделюванні.

Зокрема, передача сигналів-інформації на великі відстані потребує, щоб вони володіли великою енергією. Відомо, що енергія сигналу пропорційна четвертій степені його частоти, тобто сигнали з більшою частотою володіють більшою енергією, і тому, щоб передати їх на велику відстань, необхідно частоту інформаційних сигналів підвищувати.

У практиці застосувань будь-який як завгодно складний за своєю формою сигнал зображають у вигляді суми більш простих сигналів, *наприклад*, у вигляді суми найпростіших гармонійних коливань, сукупність яких називається (частотним) **спектром** сигналу.

Застосовуючи в якості гармонійної складової сигналу комплексно-значну експоненціальну функцію $v(t) = \exp(i\omega t)$, де i – уявна одиниця ($i = \sqrt{-1}$), $\omega = 2\pi f_0$ – кутова частота (див. (6.4.13)), для її похідної маємо:

$$\frac{d}{dt} v(t) = \frac{d}{dt} \exp(i\omega t) = i\omega \cdot \exp(i\omega t). \quad (9.4.14)$$

Виявляється, що наявність множника $i\omega$ збагачує кожен складову спектра високочастотними складовими (порівняно з вихідним сигналом) і знищує складові з нульовою частотою (адже похідна сталої – нуль). Оскільки диференціювання сигналу рівносильне диференціюванню кожної гармоніки спектра (чому?), то це означає, що перетворений сигнал матиме більшу частоту; отже, і енергія отриманого сигналу більше, ніж енергія вихідного сигналу.

Запитання для самодіагностики засвоєння матеріалу

Відповіді на всі запитання сформулюйте словесно, запишіть в символічній формі, обґрунтуйте (на підставі означень, теорем, правил, формул тощо), наведіть відповідні конкретні приклади.

1. Який розділ математичного аналізу називають диференціальним численням?
2. Що називають похідною функції у даній точці, який загальний порядок відшукування похідної?
3. Яким терміном називають процес відшукування похідної функції?
4. У якому випадку кажуть, що функція диференційовна на заданому проміжку?
5. Чи завжди неперервна у точці функція буде диференційовною?
6. Чи завжди диференційовна у точці функція буде неперервна?
7. У яких випадках кажуть, що функція має у точці нескінченну похідну, не має похідної?
8. Що розуміють під односторонніми похідними?
9. Яку функцію слід називати диференційовною на: а) інтервалі; б) півінтервалі; в) сегменті; г) півсегменті?
10. Виведіть формули похідних тригонометричних і обернених тригонометричних функцій.
11. Наведіть таблицю похідних основних елементарних функцій.
12. Назвіть арифметичні властивості похідних (правила диференціювання) функцій.
13. Опишіть порядок диференціювання складених функцій.
14. Яку функцію називають оберненою відносно заданої функції?
15. Яким співвідношенням пов'язані похідні взаємно обернених функцій?

16. Які функції називаються заданими у неявній формі і як вони диференціюються?
17. Що розуміють під логарифмічним диференціюванням?
18. Які функції називаються заданими у неявній формі і як вони диференціюються?
19. Які функції називаються заданими у параметричній формі і як вони диференціюються?
20. У чому полягають геометричний, механічний і економічний змісти похідної?
21. Що розуміють під похідними 2-го, 3-го, ..., n -го порядку?
22. Запишіть n -ну похідну для функцій $y = a^x$, $y = \sin x$, $y = \cos x$.
23. У чому полягають механічний та економічний змісти похідної 2-го порядку?
24. Що таке диференціал функції у даній точці?
25. У чому полягає геометричний зміст диференціала?
26. Які властивості диференціала аналогічні властивостям похідних?
27. Чи залежить форма (вигляд) диференціала функції $y = f(x)$ від того, який є аргумент x , незалежною чи залежною змінною?
28. Що розуміють під диференціалами 2-го, 3-го, ..., n -го порядку?
29. Яким співвідношенням пов'язані приріст і диференціал функції при малих значеннях приросту аргументу?
30. Опишіть, як за допомогою диференціала функції обчислюється наближено вартість функції в окремій точці.
31. Опишіть, як за допомогою диференціала виробничої функції обчислюється наближено її приріст у відсотках.
32. Що таке еластичність виробничої функції?
33. Чому дорівнює еластичність виробничої функції $z = aV^\alpha$, де a , $\alpha - \text{const}$?
34. Яку величину називають еластичністю функції $y = f(x)$?
35. У вигляді яких простих сигналів подають будь-який складний за своєю формою сигнал?
36. Що таке частотний спектр інформаційного сигналу, і як він змінюється при диференціюванні сигналу?

Задачі та вправи

1. Користуючись означенням, знайти похідну функції:

а) $y = x^3$ в довільній точці і в точці $x = 5$;

б) $y = \cos x$ в довільній точці і в точці $x = \pi/6$;

в) $y = \sqrt[3]{x}$ в довільній точці і в точці $x = 8$.

2. Для заданої функції $f(x)$ знайти лівосторонню і правосторонню похідні ($f'_-(x_0)$ і $f'_+(x_0)$):

а) $f(x) = |x| + |x+2|$, $x_0 = -2$;

б) $f(x) = \begin{cases} x+1, & x \leq 0, \\ -x^2+3x, & x > 0, \end{cases}$ $x_0 = 0$;

в) $f(x) = \begin{cases} 1, & x \leq 1, \\ x^2 \ln x, & x > 1, \end{cases}$ $x_0 = 1$;

г) $f(x) = \sqrt[3]{1-\ln x}$, $x_0 = 1$.

3. Знайти похідні заданих функцій:

1) $y = 7x^8 - \frac{1}{5}x^5 + 2x - 4$;

2) $y = \frac{4}{5}x \cdot \sqrt[4]{x} - \frac{3}{8}x^2 \cdot \sqrt[3]{x^2}$;

3) $y = \frac{3}{x^5} - \frac{4}{\sqrt[5]{x^3}} - \frac{x}{7}$;

4) $y = 4x^5(x^2 - 3)$;

5) $y = \frac{\cos x + 1}{1 - \sin x}$;

6) $y = 5 \cdot 2^x + \frac{3}{4} \operatorname{ctg} x$;

7) $y = \frac{4e^x - 5}{\arcsin x}$;

8) $y = \ln x \cdot (3 \operatorname{arctg} x - 7)$;

9) $y = 3^{\sin x} + \sin^3 x$;

10) $y = \operatorname{tg}^4 3x - 2 \arccos \sqrt{x}$;

11) $y = e^{\sqrt{x^4+5x}} \cdot \arcsin^2 \ln x$;

12) $y = \frac{\operatorname{ctg}(8^{2x-3})}{\ln(x + \cos 2x)}$;

13) $y = \operatorname{arcctg} \frac{x+1}{x-1}$;

14) $y = \frac{\sqrt{\ln \cos 5x}}{\operatorname{arctg}(e^{-x})}$.

4. Знайти похідні функцій, заданих неявно:

1) $x^2 + 2y^3 = 3xy$;

2) $x^4 + x^2 y^2 - y^4 = 10$;

3) $2^x + 2^y = 2^{x+y}$;

4) $x^2 - y = \operatorname{arcctg} y$;

5) $x \ln y = e^y$;

6) $\frac{x}{y} = \frac{\cos y}{1-2x}$;

7) $\sqrt{x} + \sqrt{y} = \sqrt{5}$;

8) $x \cdot \sin y + y \cdot \sin x = y$;

9) $\frac{x+y}{x} = y^2 + x$;

10) $\arcsin \frac{x}{y} = y \ln x$.

5. За допомогою логарифмічного диференціювання знайти похідні функцій:

1) $y = x^{\ln x}$;

2) $y = (\arcsin x)^{1/x}$;

3) $y = (\operatorname{tg} x)^{\sqrt{x}}$;

4) $y = (x^2 + 8)^{\sin x}$;

5) $y = \left(\frac{2x+1}{x+3} \right)^{\cos x}$;

6) $y = (\cos 2x)^{\operatorname{arctg} x}$;

7) $y = \left(\operatorname{ctg} \frac{3}{x} \right)^{x^5}$;

8) $y = (\ln x)^{\sin^4 5x}$;

9) $y = x^{10} \cdot 5^{\sqrt{x}} \cdot \operatorname{tg} 4x \cdot e^{-2x}$;

10) $y = 5 \sqrt[5]{\frac{\arcsin x \cdot \sqrt{3x^2 - 7}}{x^3(2-9x)^4 \ln x}}$.

6. Знайти похідні функцій, обернених до даних:

а) $y = 5x^2 - 2x$;

б) $y = \sqrt[3]{x^2 - 1}$;

в) $y = \operatorname{tg}^2 \sqrt{x}$;

г) $y = \arccos 5^x$;

д) $y = \lg \sin 3x$;

е) $y = 0,1x + e^{x/2}$.

7. Знайти похідні функцій, заданих параметрично:

1) $\begin{cases} x = 3 \cos t, \\ y = 2t \sin t; \end{cases}$

2) $\begin{cases} x = e^{2t} \sin 5t, \\ y = e^{2t} \cos 5t; \end{cases}$

3) $\begin{cases} x = \ln(1+t^2), \\ y = \operatorname{arcctg} t + 2t; \end{cases}$

4) $\begin{cases} x = \ln(1-t^2), \\ y = \arcsin \sqrt{1-t^2}; \end{cases}$

$$5) \begin{cases} x = \frac{\cos t}{1 - \sin t}, \\ y = \frac{\sin t}{\sin t - 1}; \end{cases}$$

$$6) \begin{cases} x = \arccos t^2, \\ y = t \sin \sqrt{t}; \end{cases}$$

$$7) \begin{cases} x = \cos^3 2t, \\ y = \sin^3 2t; \end{cases}$$

$$8) \begin{cases} x = \frac{1}{\sin t} + 3, \\ y = t \operatorname{ctg} t; \end{cases}$$

$$9) \begin{cases} x = \sqrt{t^2 - 1}, \\ y = \frac{t + 1}{\sqrt{t^2 - 1}}; \end{cases}$$

$$10) \begin{cases} x = \arccos 2t, \\ y = \sqrt{1 - 4t^2}. \end{cases}$$

8. Переконатися, що функція задовольняє задане співвідношення:

$$a) y = \ln \frac{1}{x+1}, \quad xy' + 1 = e^y;$$

$$б) y = \frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}, \quad (1-x^2)y' - xy = 1;$$

$$в) \begin{cases} x = \frac{1 + \ln t}{t^2} \\ y = \frac{3 + 2 \ln t}{t} \end{cases}, \quad y \cdot y'_x = 2x(y'_x)^2 + 1.$$

9. В яких точках лінії $y = x^2(x-2)^2$ дотичні паралельні осі Ox ?

10. Скласти рівняння дотичних до лінії $y = x - \frac{1}{x}$ у точках її перетину з віссю абсцис.

11. В якій точці дотична до параболи $y = x^2 - 2x$ паралельна: а) осі Ox ; б) прямій $y = 2x - 1$?

12. Скласти рівняння дотичної і нормалі до вказаних кривих у заданих точках:

а) $y = \operatorname{tg} 2x$ у початку координат;

б) $y = \arcsin \frac{x-1}{2}$ у точці перетину з віссю Ox ;

в) $y = \arccos 3x$ у точці перетину з віссю Oy ;

г) $y = e^{1-x^2}$ у точках перетину з прямою $y = 1$;

д) $x^2 + 3y^2 = 16$ у точці $A(2, -2)$;

е) $x^3 + y^3 - 3x^2y^2 + 3 = 0$ у точці $B(1, -1)$;

є) $\begin{cases} x = e^{2t} + 1, \\ y = 2 - e^{-t} \end{cases}$ у точці, для якої $t = 0$;

ж) $\begin{cases} x = t^3 - 2t^2 + 2, \\ y = t^2 - 3t + 3 \end{cases}$ у точці $C(1, 1)$.

13. Скласти рівняння дотичної до лінії $y = x^3 - 3x^2 + x + 1$, паралельної прямій $2x + y + 5 = 0$.

14. Скласти рівняння дотичної до лінії $y = x^4 + 6x + 6$, перпендикулярної до прямої $2x + 4y - 7 = 0$.

15. Скласти рівняння нормалі до параболи $y = x^2 - x + 1$, перпендикулярної до прямої $6x - 2y - 5 = 0$.

16. Скласти рівняння нормалі до гіперболи $y = \frac{x-1}{x+2}$, паралельної прямій $9x + 3y + 2 = 0$.

17. Знайти відстань від початку координат до нормалі, проведеної до лінії $y = e^{2x} + x^2$ в точці з абсцисою $x = 0$.

18. Скласти рівняння дотичної до параболи $y^2 = 4x + 2$, паралельної прямій $3x - 2y + 6 = 0$.

19. Скласти рівняння дотичних до гіперболи $x^2/2 - y^2/7 = 1$, перпендикулярних до прямої $2x + 4y - 3 = 0$.

20. Скласти рівняння нормалей до еліпса $x^2/9 + y^2/5 = 1$, перпендикулярних до прямої $2x - 3y + 5 = 0$.

21. Скласти рівняння нормалі до параболи $y^2 = 2x + 4$, паралельної прямій $4x - y + 5 = 0$.

22. Знайти приріст і диференціал функції $y = 2x^2 - 3x$ в точці $x = 10$ при переході від цієї точки до точки $x = 10,2$. Обчислити абсолютну похибку ($\alpha = |\Delta y - dy|$) і відносну похибку $\left(\delta = \frac{|\Delta y - dy|}{|\Delta y|} \right)$, які виникають при заміні приросту функції диференціалом.

23. Знайти приріст і диференціал функції $y = \sqrt[3]{x}$ при $x = 8$ і $\Delta x = 0,8$. Обчислити абсолютну і відносну похибки, які виникають при заміні приросту функції диференціалом.

24. Знайти диференціали заданих функцій:

1) $y = \ln \frac{5x-3}{2x+1};$

2) $y = (5+x^2) \cdot e^{\cos 3x};$

3) $y = \sqrt[3]{\arctg^2 x};$

4) $y = \arcsin \frac{\cos x}{1+\tg x};$

5) $y = \sin^2 \frac{6x}{x+1};$

6) $y = 5^{x \cdot \ctg 2x};$

7) $y = \arcctg^4(x^3) - 6;$

8) $y = \frac{1+\sin x}{1-\sin x}.$

25. Знайти диференціали функцій, заданих неявно:

1) $y^3 + y = x^3 - 1;$

2) $e^{y^2} = x^2 - y;$

3) $y^2 - xy = e^y + x;$

4) $\sin \frac{x}{y} = e^{xy}.$

26. Обчислити наближено за допомогою диференціала функції:

1) $\ln 1,02;$

2) $\sqrt{24};$

3) $\sqrt[3]{26};$

4) $\tg 44^\circ;$

5) $(1,02)^5;$

6) $\sin 29^\circ;$

7) $\arctg 1,05;$

8) $\sqrt{\frac{x+3}{x}}$ при $x = 1,04;$

9) $\sqrt[5]{\frac{1,98}{2,02}}.$

27. Функція $y = \sqrt[3]{x^2}$ неперервна на всій числовій осі ($x \in \mathbf{R}$). Показати, що в точці $x = 0$ вона не диференційовна.

28. Дослідити неперервність і диференційовність функції $y = e^{-|x|}$ в точці $x = 0$.

29. Функція $y = |\sin x|$ неперервна при $x \in (-\infty, +\infty)$. На якій множині точок вона диференційовна?

30. Знайти похідні вказаних порядків для заданих функцій:

1) $y = \sin^2 x, y'' = ?;$

2) $y = \arctg \sqrt{x}, y'' = ?;$

$$3) y = e^{-5x^2}, y'' = ?;$$

$$4) y = e^{3x} \cos 2x, y''' = ?;$$

$$5) y = x^4 \cdot \ln x, y^{(5)} = ?;$$

$$6) y = 5^{-x}, y^{(n)} = ?;$$

$$7) y = \frac{x^2}{x-1}, y^{(n)} = ?;$$

$$8) y = \frac{2}{x^2 - 4x + 3}, y^{(50)} = ?.$$

31. Переконатися, що функція задовольняє задане співвідношення:

$$a) y = x e^{2x}, \quad y'' - 4y' + 4y = 0;$$

$$б) y = x \ln^2 x, \quad y'' - \frac{y'}{x} + \frac{y}{x^2} = \frac{2}{x};$$

$$в) y = x e^x + 2e^{2x}, \quad y''' - 4y'' + 5y' - 2y = 0;$$

$$г) y = \frac{x-3}{x+4}, \quad 2(y')^2 = (y-1)y''.$$

32. Для заданих функцій знайти диференціали вказаних порядків:

$$1) y = x^2 \cdot e^{-4x}, d^2 y = ?;$$

$$2) y = \ln(x + \sqrt{x^2 + 16}), d^2 y = ?;$$

$$3) y = 2x^5 + x \cdot \sqrt[3]{x}, d^2 y = ?;$$

$$4) y = 3^{\sqrt{x}}, d^3 y = ?;$$

$$5) y = \arctg 2x, d^3 y = ?;$$

$$6) y = \sin x \cdot \cos x, d^3 y = ?;$$

$$7) y = \frac{x+5}{(x+3)^2}, d^5 y = ?;$$

$$8) y = 64(\sqrt{x+1} + \sqrt{x-1}), d^6 y = ?.$$

Відповіді

$$1. a) y' = 3x^2, \quad y'(5) = 75; \quad б) y' = -\sin x, \quad y'(\pi/6) = -1/2;$$

$$в) y' = \frac{1}{3 \cdot \sqrt[3]{x^2}}, \quad y'(8) = 1/12.$$

$$2. a) f'_-(-2) = -2, \quad f'_+(-2) = 0; \quad б) f'_-(0) = 1, \quad f'_+(0) = 3; \quad в) f'_-(1) = 0, \quad f'_+(1) = 1; \quad г) f'_-(1) = f'_+(1) = -1/3.$$

$$3. 1) y' = 56x^7 - x^4 + 2; \quad 2) y' = \sqrt[4]{x} - x \cdot \sqrt[3]{x^2}; \quad 3) y' = \frac{-15}{x^6} + \frac{12}{5 \cdot \sqrt[5]{x^8}} - \frac{1}{7};$$

$$4) y' = 28x^6 - 60x^4; \quad 5) y' = \frac{\cos x + 1 - \sin x}{(1 - \sin x)^2}; \quad 6) y' = 5 \cdot 2^x \cdot \ln 2 - \frac{3}{4 \sin^2 x};$$

$$\begin{aligned}
& 7) y' = \frac{4e^x}{\arcsin x} - \frac{4e^x - 5}{\sqrt{1-x^2} \cdot \arcsin^2 x}; \quad 8) y' = \frac{3 \operatorname{arctg} x - 7}{x} + \frac{3 \ln x}{1+x^2}; \quad 9) y' = \cos x \times \\
& \times (3^{\sin x} \ln 3 + 3 \sin^2 x); \quad 10) y' = \frac{12 \operatorname{tg}^3 3x}{\cos^2 3x} + \frac{1}{\sqrt{x-x^2}}; \quad 11) y' = \frac{(4x^3+5) \cdot e^{\sqrt{x^4+5x}}}{2\sqrt{x^4+5x}} \times \\
& \times \arcsin^2 \ln x + \frac{2e^{\sqrt{x^4+5x}} \arcsin \ln x}{x\sqrt{1-\ln^2 x}}; \quad 12) y' = \frac{-8^{2x-3} 2 \ln 8}{\sin^2(8^{2x-3}) \cdot \ln(x+\cos 2x)} - \\
& - \frac{\operatorname{ctg}(8^{2x-3})(1-2\sin 2x)}{(x+\cos 2x) \ln^2(x+\cos 2x)}; \quad 13) y = \frac{1}{x^2+1}; \quad 14) y' = \frac{-5 \operatorname{tg} 5x}{2\sqrt{\ln \cos 5x} \cdot \operatorname{arctg}^3(e^{-x})} + \\
& + \frac{3e^{-x} \sqrt{\ln \cos 5x}}{(1+e^{-2x}) \cdot \operatorname{arctg}^4(e^{-x})}.
\end{aligned}$$

$$4. \quad 1) y' = \frac{3y-2x}{6y^2-3x}; \quad 2) y' = \frac{2x^3+xy^2}{2y^3-x^2y}; \quad 3) y' = \frac{2^{x-y}(2^y-1)}{1-2^x};$$

$$4) y' = 2x(1+y^{-2}); \quad 5) y' = \frac{y \ln y}{ye^y-x}; \quad 6) y' = \frac{1-4x}{\cos y-y \sin y}; \quad 7) y' = -\sqrt{\frac{y}{x}};$$

$$8) y' = \frac{-\sin y - y \cos x}{\sin x + x \cos y - 1}; \quad 9) y' = \frac{y^2+2x-1}{1-2xy}; \quad 10) y' = \frac{xy-y^2\sqrt{y^2-x^2}}{xy \ln x \sqrt{y^2-x^2}+x^2}.$$

$$5. \quad 1) y' = 2x^{\ln x-1} \ln x; \quad 2) y' = (\arcsin x)^{1/x} \left(\frac{1}{x\sqrt{1-x^2}} - \frac{\arcsin x}{x^2} \right);$$

$$3) y' = (\operatorname{tg} x)^{\sqrt{x}} \left(\frac{\ln \operatorname{tg} x}{2\sqrt{x}} + \frac{2\sqrt{x}}{\sin 2x} \right); \quad 4) y' = (x^2+8)^{\sin x} \left(\cos x \ln(x^2+8) + \frac{2x \sin x}{x^2+8} \right);$$

$$5) y' = \left(\frac{2x+1}{x+3} \right)^{\cos x} \left(\frac{5 \cos x}{(2x+1)(x+3)} - \sin x \cdot \ln \frac{2x+1}{x+3} \right); \quad 6) y' = (\cos 2x)^{\operatorname{arctg} x} \times \\
\times \left(\frac{\ln \cos 2x}{1+x^2} - 2 \operatorname{tg} 2x \cdot \operatorname{arctg} x \right); \quad 7) y' = \left(\operatorname{ctg} \frac{3}{x} \right)^{x^5} \left(5x^4 \ln \operatorname{ctg} \frac{3}{x} + \frac{6x^3}{\sin(6/x)} \right);$$

$$8) y' = (\ln x)^{\sin^4 5x} \left(20 \sin^3 5x \cdot \cos 5x \cdot \ln \ln x + \frac{\sin^4 5x}{x \cdot \ln x} \right); \quad 9) y' = \frac{x^{10} 5^{\sqrt{x}} \operatorname{tg} 4x}{e^{2x}} \times$$

$$\times \left(\frac{10}{x} + \frac{\ln 5}{2\sqrt{x}} + \frac{8}{\sin 8x} - 2 \right); \quad 10) y' = \frac{1}{5} \cdot 5^{\sqrt{\frac{\sin 2x \cdot \sqrt{3x^2-7}}{x^3(2-9x)^4 \ln x}}} \left(2 \operatorname{ctg} 2x + \frac{3x}{3x^2-7} - \right. \\
\left. - 3/x + 36 \cdot (2-9x)^{-1} - 1/(x \ln x) \right).$$

$$6. \text{ а) } x'_y = \frac{1}{10x-2}; \quad \text{б) } x'_y = \frac{3 \cdot \sqrt[3]{(x^2-1)^2}}{2x}; \quad \text{в) } x'_y = \frac{\sqrt{x} \cdot \cos^3 \sqrt{x}}{\sin \sqrt{x}};$$

$$\text{г) } x'_y = -\frac{\sqrt{1-5^{2x}}}{5^x \ln 5}; \quad \text{д) } x'_y = \frac{\ln 10}{3} \operatorname{tg} 3x; \quad \text{е) } x'_y = \frac{2}{0,2+e^{x/2}}.$$

$$7. 1) y'_x = -\frac{2}{3}(t \operatorname{ctg} t + 1); \quad 2) y'_x = \frac{2 \cos 5t - 5 \sin 5t}{2 \sin 5t + 5 \cos 5t}; \quad 3) y'_x = \frac{2t^2 + 1}{2t};$$

$$4) y'_x = \frac{\sqrt{1-t^2}}{2t}; \quad 5) y'_x = \frac{\cos t}{\sin t - 1}; \quad 6) y'_x = \frac{\sqrt{1-t^4}}{-4t} (2 \sin \sqrt{t} + \sqrt{t} \cos \sqrt{t});$$

$$7) y'_x = -\operatorname{tg} 2t; \quad 8) y'_x = \frac{t - 1/2 \sin 2t}{\cos t}; \quad 9) y'_x = \frac{1}{t-t^2}; \quad 10) y'_x = 2t.$$

$$9. (0,0), (1,1), (2,0).$$

$$10. y = 2x - 2, \quad y = 2x + 2.$$

$$11. \text{ а) } (1, -1); \quad \text{б) } (2, 0).$$

$$12. \text{ а) } 2x - y = 0, \quad x + 2y = 0; \quad \text{б) } x - 2y - 1 = 0, \quad 2x + y - 2 = 0;$$

$$\text{в) } 6x + 2y - \pi = 0, \quad 2x - 6y + 3\pi = 0; \quad \text{г) } 2x + y - 3 = 0, \quad x - 2y + 1 = 0 \quad \text{для точки } (1,1);$$

$$2x - y + 3 = 0, \quad x + 2y - 1 = 0 \quad \text{для точки } (-1,1);$$

$$\text{д) } x - 3y - 8 = 0, \quad 3x + y - 4 = 0; \quad \text{е) } x - 3y - 4 = 0, \quad 3x + y - 2 = 0;$$

$$\text{е) } x - 2y = 0, \quad 2x + y - 5 = 0; \quad \text{ж) } y - x = 0, \quad x + y - 2 = 0.$$

$$13. 2x + y - 2 = 0.$$

$$14. 2x - y + 3 = 0.$$

$$15. x + 3y - 11 = 0.$$

$$16. 3x + y - 3 = 0, \quad 3x + y + 13 = 0.$$

$$17. 2\sqrt{5}/5.$$

$$18. 18x - 12y + 17 = 0.$$

$$19. 2x - y + 1 = 0, \quad 2x - y - 1 = 0.$$

$$20. 9x + 6y + 8 = 0, \quad 9x + 6y - 8 = 0.$$

$$21. 4x - y - 28 = 0.$$

$$22. \Delta y = 7,48; \quad dy = 7,4; \quad \alpha = 0,08; \quad \delta \approx 0,0107.$$

$$23. \Delta y \approx 0,0646; \quad dy \approx 0,0667; \quad \alpha \approx 0,0021; \quad \delta \approx 0,0325.$$

$$24. 1) dy = \frac{11 dx}{(2x+1)(5x-3)}; \quad 2) dy = e^{\cos 3x} (2x - (15 + 3x^2) \sin 3x) dx;$$

$$3) dy = \frac{2 dx}{3(1+x^2) \cdot \sqrt[3]{\arctg x}}; \quad 4) dy = -\frac{1 + \sin x (\sin x + \cos x)}{(\sin x + \cos x) \sqrt{(1 + \tg x)^2 - \cos^2 x}} dx;$$

$$5) dy = \frac{6}{(x+1)^2} \cdot \sin \frac{12x}{x+1} dx; \quad 6) dy = 5^{x \cdot \ctg 2x} \ln 5 \left(\ctg 2x - \frac{2x}{\sin^2 2x} \right) dx;$$

$$7) dy = \frac{-12x^2 \operatorname{arcctg}^3(x^3)}{1+x^6} dx; \quad 8) dy = \frac{2 \cos x}{(1 - \sin x)^2} dx.$$

$$25. 1) dy = \frac{3x^2}{3y^2 + 1} dx; \quad 2) dy = \frac{2x}{2ye^{y^2} + 1} dx; \quad 3) dy = \frac{1+y}{2y-x-e^y} dx;$$

$$4) dy = \frac{y \cos(x/y) - y^3 e^{xy}}{xy^2 e^{xy} + x \cos(x/y)} dx.$$

$$26. 1) 0,02; \quad 2) 4,9; \quad 3) 2,96; \quad 4) 0,965; \quad 5) 1,1; \quad 6) 0,485; \quad 7) 0,811; \\ 8) 1,99; \quad 9) 0,996.$$

28. Неперервна, але не диференційовна.

29. На усій множині \mathbf{R} за виключенням точок: $x = k\pi$, $k \in \mathbf{Z}$.

$$30. 1) y'' = 2 \cos 2x; \quad 2) y'' = -\frac{3x+1}{4x(1+x)^2 \sqrt{x}}; \quad 3) y'' = 10e^{-5x^2} (10x^2 - 1);$$

$$4) y''' = -e^{3x} (9 \cos 2x + 46 \sin 2x); \quad 5) y^{(5)} = \frac{24}{x}; \quad 6) y^{(n)} = (-1)^n 5^{-x} \ln^n 5;$$

$$7) y^{(n)} = \frac{(-1)^n n!}{(x-1)^{n+1}}; \quad 8) y^{(50)} = \frac{50!}{(x-1)^{51}} - \frac{50!}{(x-3)^{51}}.$$

$$32. 1) d^2 y = 2e^{-4x} (8x^2 - 8x + 1) dx^2; \quad 2) d^2 y = -\frac{x}{\sqrt{(x^2 + 16)^3}} dx^2;$$

$$3) d^2 y = \left(40x^3 + \frac{4}{9\sqrt[3]{x^2}} \right) dx^2; \quad 4) d^3 y = \frac{3^{\sqrt{x}} \ln 3 (x \ln^2 3 - 3\sqrt{x} \ln 3 + 3)}{8\sqrt{x^5}} dx^3;$$

$$5) d^3 y = \frac{16 \cdot (12x^2 - 1)}{(4x^2 + 1)^3} dx^3; \quad 6) d^3 y = -4 \cos 2x dx^3; \quad 7) d^5 y = \frac{-120(x+15)}{(x+3)^7} dx^5;$$

$$8) d^6 y = -945 \left(\frac{1}{\sqrt{(x+1)^{11}}} + \frac{1}{\sqrt{(x-1)^{11}}} \right) dx^6.$$

Ключові терміни

Математичний аналіз, диференціальне числення, похідна функції, диференціювання, загальний порядок диференціювання, неперервність диференційовної функції, нескінченна похідна, одностороння (правостороння і лівостороння) похідна, геометричний (механічний, економічний) зміст похідної, середня продуктивність праці, граничні витрати виробництва, гранична продуктивність праці, таблиця похідних, правила диференціювання, похідна складеної функції, взаємно обернені функції, явна (неявна, параметрична) форма завдання функції, логарифмічне диференціювання, параметричні рівняння кривої, похідна 2-го порядку (друга похідна), похідна n -го порядку, кінематичний зміст другої похідної, темп зміни продуктивності праці, диференціал функції, геометричний зміст диференціала, властивості диференціала, інваріантність (незмінність) форми диференціала, диференціали вищих порядків, наближене обчислення вартості функції, наближене обчислення приросту виробничої функції, еластичність функції.

Резюме

Вивчається окремий (спеціальний) вид границі функції – похідна – і пов'язана з нею операція диференціювання. Викладено: тлумачення похідної в різних галузях знань, властивості похідних, підходи до диференціювання складених функцій і функцій різних форм завдання, основні відомості щодо похідних вищих порядків, кінематичний і економічний зміст другої похідної.

Розглядається тісно пов'язане з похідною поняття диференціала функції, його геометричний зміст і властивості, зокрема інваріантність форми диференціала. Наводяться основні відомості щодо диференціала вищого порядку як функції від приросту аргументу. На підставі тісного зв'язку між приростом функції і її диференціалом розглянуто застосування диференціала до наближеного обчислення вартості функції.

Література: [1; 4; 8; 9; 19; 22; 27; 28].

10. Дослідження функцій, побудова графіків

*Яка наука може бути більш благородна, більш чудова,
більш корисна для людства, ніж математика?*

Бенджамін Франклін

Мета: оволодіння майбутніми фахівцями одним із основних методів дослідження функціональних залежностей для вивчення швидкісних характеристик протікання у часі різноманітних процесів і явищ.

Питання теми:

- 10.1. Теорема Лагранжа та наслідки з неї.
- 10.2. Правило Лопітала розкриття невизначеностей.
- 10.3. Формула Тейлора (для многочлена та довільної функції).
- 10.4. Дослідження функцій на монотонність і екстремуми.
- 10.5. Дослідження функцій на опуклість і перегини.
- 10.6. Асимптоти графіка функції. Порядок побудови графіків.

Компетентності, що формуються після вивчення теми:

Загальнонаукова: володіння засобами диференціального числення для дослідження функціональних залежностей.

Загальнопрофесійна: підготовленість до аналізу функціональних зв'язків у інформаційних системах за допомогою похідних.

Спеціалізовано-професійна: уміння впроваджувати методи диференціального числення в моделювання процесів управління інформаційними системами.

10.1. Теорема Лагранжа та наслідки з неї

Знання похідної будь-якої функції дозволяє установити характеристичні властивості щодо поведінки (змінювання) самої функції на проміжках області її існування. Перш за все, зупинимось на теоремі, яка має різноманітні застосування у математичному аналізі.

Теорема 10.1.1 (Лагранжа – теорема про середнє значення (Жозеф-Луї Лагранж (1736 – 1813) – видатний французький математик, механік)). Якщо функція $f(x)$ неперервна на замкненому проміжку $[a, b]$ і диференційовна в інтервалі (a, b) , то всередині інтервалу знай-

дється принаймні одна така точка $x = \xi$ ($a < \xi < b$), в якій справджується рівність:

$$f(b) - f(a) = f'(\xi) \cdot (b - a), \text{ або} \quad (10.1.1)$$

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(\xi). \quad (10.1.2)$$

Д о в е д е н н я. Розглянемо допоміжну функцію

$$F(x) = f(x) - k(x - a), \text{ де } k = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}, \quad (10.1.3)$$

яка є різницею між заданою і лінійною функцією $y = k(x - a)$.

Аналізуючи (10.1.3), приходимо до висновку, що $F(x)$:

- 1) неперервна на $[a, b]$ як різниця двох неперервних функцій;
- 2) має похідну в усіх внутрішніх точках проміжку $[a, b]$, бо її мають $f(x)$ та $k(x - a)$:

$$F'(x) = f'(x) - k; \quad (10.1.4)$$

- 3) на кінцях відрізка $[a, b]$ набуває однакових значень:
 $F(a) = F(b) = f(a)$.

Відомо (див. теорему 8.4.5), що неперервна на замкненому проміжку функція має на ньому як найбільшу вартість M , так і найменшу m ; причому, звичайно, $m \neq M$, якщо тільки $F(x)$ на $[a, b]$ не є сталою. Принаймні одну з них (M або m) функція набуває всередині проміжку $[a, b]$, бо $F(b) = F(a)$, а $m \neq M$.

Припустимо для визначеності, що функція набуває найбільшу вартість M всередині відрізка $[a, b]$ в деякій точці $x = \xi$, тоді $\Delta F(\xi) = F(\xi + \Delta x) - F(\xi) \leq 0$ як для додатних, так і для від'ємних Δx .

Для відношення ж $\frac{\Delta F(\xi)}{\Delta x}$ маємо:

$$\frac{\Delta F(\xi)}{\Delta x} \leq 0, \text{ при } \Delta x > 0; \quad \frac{\Delta F(\xi)}{\Delta x} \geq 0, \text{ при } \Delta x < 0. \quad (10.1.5)$$

Перейдемо в нерівностях (10.1.5) до границі при $\Delta x \rightarrow 0$ ($x \rightarrow \xi$), тоді для правосторонньої (лівосторонньої) похідної одержимо: $F'_+(\xi) \leq 0$ ($F'_-(\xi) \geq 0$).

Оскільки $F(x)$ диференційовна в усіх внутрішніх точках проміжку $[a, b]$, то $F'_+(\xi) = F'_-(\xi) = F'(\xi)$, а це буде тоді, коли $F'(\xi) = 0$. На цій підставі, з урахуванням (10.1.4), отримуємо співвідношення (10.1.1), (10.1.2). Теорему доведено.

Наслідки:

1) (формула скінченних приростів). Приріст функції $f(x)$ у точці $x_0 \in [a, b]$ дорівнює приростові аргументу, помноженому на похідну в деякій точці ξ , що знаходиться між x_0 та $x_0 + \Delta x$:

$$\Delta f(x_0) = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = \Delta x \cdot f'(\xi). \quad (10.1.6)$$

Дійсно, розглядаючи відрізок $[x_0, x_0 + \Delta x]$, де x_0 і $x_0 + \Delta x$ належать сегменту $[a, b]$, на якому виконуються умови теореми Лагранжа, і беручи до уваги рівність (10.1.1), приходимо до (10.1.6).

Якщо ввести в розгляд параметр θ ($0 < \theta < 1$), то будь-яку внутрішню точку $\xi \in [x_0, x_0 + \Delta x]$ можна подати у вигляді $\xi = x_0 + \theta \cdot \Delta x$, і тоді (10.1.6) запишеться так:

$$\Delta y = \Delta f(x_0) = f'(x_0 + \theta \cdot \Delta x) \cdot \Delta x. \quad (10.1.7)$$

Формулу (10.1.7), відштовхуючись від її суті, називають **формулою скінченних приростів**.

Хоча число ξ і, разом з ним, θ , як правило, відшукати нелегко, використання цієї формули в математичному аналізі надзвичайно широке. Як вправу, знайдіть $\xi = x_0 + \theta \cdot \Delta x$ для функції $y = x^2$ на $[0, 1]$;

2) (критерій сталості функції). Для того, щоб диференційовна на проміжку (a, b) функція $f(x)$ була сталою, необхідно і достатньо, щоб $f'(x)$ на цьому проміжку дорівнювала нулю:

$$f(x) = c - \text{const} \Leftrightarrow f'(x) = 0 \quad \forall x \in (a, b). \quad (10.1.8)$$

Достатність (\Leftarrow). Згідно з (10.1.7) для будь-якого $x_0 \in (a, b)$ приріст функції $\Delta f(x_0)=0$, а це означає: на розглянутому проміжку $f(x)=c - const$.

Необхідність (\Rightarrow) пропонуємо довести самостійно;

3) (*критерій сталості різниці функцій*). Якщо функції $f(x)$, $\varphi(x)$ на деякому проміжку (a, b) мають похідні: $f'(x)$, $\varphi'(x)$, і при будь-якому $x \in (a, b)$ $f'(x)=\varphi'(x)$, то різниця $f(x)-\varphi(x)$ між цими функціями є величиною сталою, і навпаки:

$$f(x)-\varphi(x)=c - const \Leftrightarrow f'(x)=\varphi'(x) \quad \forall x \in (a, b). \quad (10.1.9)$$

Доведення достатності і необхідності проведіть самостійно, покладаючи $F(x)=f(x)-\varphi(x)$, з подальшим застосуванням (10.1.8);

4) (*теорема Ролля* (Мишель Ролль (1652 – 1719) – знаний французький математик)). Якщо функція $f(x)$: визначена і неперервна на відрізку $[a, b]$; диференційовна в інтервалі (a, b) ; на кінцях відрізка набуває однакових значень: $f(a)=f(b)$, то всередині інтервалу принаймні в одній точці її похідна стає нулем.

На підставі рівності $f(a)=f(b)$ із (10.1.2) маємо $f'(\xi)=0$;

5) (*теорема Коші* (Огюстен Луї Коші (1789 – 1857) – відомий французький математик)). Якщо дві функції $\varphi(t)$, $\psi(t)$: визначені і неперервні на відрізку $[a, b]$; диференційовні в інтервалі (a, b) ; похідна $\varphi'(t)$ в жодній точці інтервалу (a, b) не стає нулем, то існує принаймні одна така точка $t=\xi$, $a < \xi < b$, що для неї справедлива рівність:

$$\frac{\psi(b)-\psi(a)}{\varphi(b)-\varphi(a)} = \frac{\psi'(\xi)}{\varphi'(\xi)}. \quad (10.1.10)$$

Слушність (10.1.10) впливає з (10.1.2), якщо функцію $f(x)$ подати в параметричній формі: $x=\varphi(t)$, $y=\psi(t)$, і врахувати, що $f'_x(x)=\frac{\psi'_t(t)}{\varphi'_t(t)}$.

Як вправу *пропонуємо* самостійно дати геометричну інтерпретацію теорем Лагранжа і Ролля, виходячи з геометричного змісту похідної і величини $k = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$.

10.2. Правило Лопітала розкриття невизначеностей

Основою розкриття невизначеностей будь-якого типу є *правило Лопітала* (Гійом Франсуа Лопіталь (1661 – 1704) – визначний французький математик), за допомогою якого позбавляються невизначеностей типу „нуль на нуль” і „нескінченність на нескінченність”. Дивним є те, що похідні, як окремий тип границь, дають змогу, за певних умов, розв’язувати загальну задачу відшукування границі функції.

Нехай обчислення границі відношення функцій $u = u(x)$, $v = v(x)$ у точці $x_0 \in (a, b)$ в результаті граничного переходу приводить до невизначених виразів:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{u(x)}{v(x)} = \left(\frac{0}{0} \right) \quad \text{або} \quad \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{u(x)}{v(x)} = \left(\frac{\infty}{\infty} \right). \quad (10.2.1)$$

Теорема 10.2.1 (*правило Лопітала розкриття невизначеностей*). Якщо функції $u = u(x)$, $v = v(x)$ на відрізку $[a, b]$ задовольняють умови теореми Коші, і у точці x_0 існує границя L відношення похідних, то існує у точці x_0 границя відношення самих функцій, рівна границі відношення їхніх похідних: $u' = u'(x)$, $v' = v'(x)$

$$\exists \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{u'(x)}{v'(x)} = L \Rightarrow \exists \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{u(x)}{v(x)} = L. \quad (10.2.2)$$

Д о в е д е н н я. Розглянемо випадок відношення нескінченно малих. Нехай $[x_0, x]$ деякий відрізок на $[a, b]$. На ньому, певна річ, як і на $[a, b]$, виконуються умови теореми Коші, а значить, справджується рівність (10.1.10), у якій аргумент t замінено на звичне x :

$$\frac{u(x) - u(x_0)}{v(x) - v(x_0)} = \frac{u'(\xi)}{v'(\xi)}, \quad x_0 < \xi < x. \quad (10.2.3)$$

Функції $u(x)$, $v(x)$ неперервні на $[a, b]$, тому $\lim_{x \rightarrow x_0} u(x) = u(x_0) = 0$

і $\lim_{x \rightarrow x_0} v(x) = v(x_0) = 0$, і (10.2.3) набуває вигляду:

$$\frac{u(x)}{v(x)} = \frac{u'(\xi)}{v'(\xi)}. \quad (10.2.4)$$

Якщо $x \rightarrow x_0$, то і $\xi \rightarrow x_0$, бо ξ знаходиться між x_0 та x . При $\xi \rightarrow x_0$ існує (за умовою) границя L правої частини рівності (10.2.4), а значить, існує і границя лівої частини цієї рівності, і

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{u(x)}{v(x)} = \lim_{\xi \rightarrow x_0} \frac{u'(\xi)}{v'(\xi)} = L.$$

Теорему доведено.

У такий спосіб за теоремою Коші розкривається і невизначеність типу ∞/∞ .

Зауваження.

1. Теорема має місце і у випадку, коли $u(x)$ або $v(x)$ невизначені при $x = x_0$, але $\lim_{x \rightarrow x_0} u(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} v(x) = 0$.

2. Якщо $u'(x_0) = v'(x_0) = 0$ і похідні $u'(x)$, $v'(x)$ задовольняють умови теореми, то, застосовуючи правило Лопіталя до відношення $\frac{u'(x)}{v'(x)}$,

одержуємо:
$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{u'(x)}{v'(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{u''(x)}{v''(x)}.$$

Взагалі, правило можна застосувати (при виконанні відповідних умов) доти, поки не прийдемо до відношення похідних n -го порядку, яке має при $x \rightarrow x_0$ певну границю.

3. Правило Лопіталя застосовується і у випадку, коли $x \rightarrow \infty$ (*спробуйте* довести це самостійно, здійснюючи заміну змінної $x = 1/t$).

Зведення інших типів невизначеностей: $0 \cdot \infty$, $\infty \cdot -\infty$, 1^∞ , 0^0 , ∞^0 , до розглянутих $\left(\frac{0}{0}, \frac{\infty}{\infty}\right)$ здійснюється за допомогою тотожних перетворень початкового виразу.

Нижче наводяться: тип невизначеності; вид функції, яка її породжує; тотожні перетворення, що приводять до невизначеностей, які безпосередньо розкриваються за правилом Лопіталя (*прослідкуйте*).

$$1. (0 \cdot \infty) \Rightarrow y = u \cdot v \Rightarrow \left[y = \frac{u}{1/v} = \left(\frac{0}{0} \right) \text{ або } y = \frac{v}{1/u} = \left(\frac{\infty}{\infty} \right) \right]. \quad (10.2.5)$$

$$2. (\infty - \infty) \Rightarrow y = u - v \Rightarrow y = \frac{1/v - 1/u}{1/v \cdot 1/u} = \left(\frac{0}{0} \right). \quad (10.2.6)$$

Невизначеність „нескінченність мінус нескінченність” розкривають і інакше: виносять u або v за дужки і переходять до границі у добутку:

$$\left[\begin{array}{l} y = u \left(1 - \frac{v}{u} \right) \\ y = v \left(\frac{u}{v} - 1 \right) \end{array} \right] \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{v}{u} = 1 \left(\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{u}{v} = 1 \right) \Rightarrow (\infty \cdot 0) \\ \text{в інших випадках } \lim_{x \rightarrow x_0} (u - v) = \infty. \end{array} \right]$$

$$3. (1^\infty, 0^0, \infty^0) \Rightarrow y = u^v \Rightarrow \ln y = v \ln u \Rightarrow (0 \cdot \infty), \quad (10.2.7)$$

тобто $v \ln u$ дає невизначеність вже розглянутого типу $0 \cdot \infty$. Якщо вдається знайти $\lim_{x \rightarrow x_0} \ln y = k$, тоді $\lim_{x \rightarrow x_0} y = e^k$, бо $\lim_{x \rightarrow x_0} \ln y = \ln \left(\lim_{x \rightarrow x_0} y \right)$.

Наведемо декілька *прикладів* на застосування правила Лопіталя.

$$1. \text{ Знайти } L = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x + e^{-x} - 2}{1 - \cos x}.$$

При $x=0$ даний вираз набуває вигляду $\frac{0}{0}$, отже, за правилом Лопіталя дістанемо:

$$L_1 = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{u'}{v'} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - e^{-x}}{\sin x} = \left(\frac{0}{0} \right).$$

Застосовуємо правило вдруге:

$$L_2 = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{u''}{v''} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x + e^{-x}}{\cos x} = \frac{2}{1} = 2 \Rightarrow L = 2.$$

Зауважимо, що звичайно на практиці розв'язування прикладів подається у вигляді ланцюжка рівностей.

$$2. L = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln x}{x^3} = \left(\frac{\infty}{\infty} \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(\ln x)'}{(x^3)'} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1/x}{3x^2} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{3x^3} = \frac{1}{\infty} = 0.$$

$$3. L = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x + \sin x}{x} = \left(\frac{\infty}{\infty} \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1 + \cos x}{1}.$$

Остання границя не існує (чому?), але це не означає, що не існує і границя відношення функцій, бо

$$L = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x + \sin x}{x} = \left(\frac{\infty}{\infty} \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{\sin x}{x} \right) = 1.$$

Цей приклад – застереження читача від неправильного висновку, який можна зробити у випадку, коли відношення $u'(x)/v'(x)$ при $x \rightarrow x_0$ не має границі. Границя $u(x)/v(x)$ при $x \rightarrow x_0$ може існувати і тоді, коли відношення похідних при $x \rightarrow x_0$ границі не має.

$$4. L = \lim_{x \rightarrow 0} x \ln x = (0 \cdot \infty) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln x}{1/x} = \left(\frac{\infty}{\infty} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1/x}{-1/x^2} = - \lim_{x \rightarrow 0} x = 0.$$

$$5. L = \lim_{x \rightarrow x_0} x^x = (0^0). \text{ Покладаючи } y = x^x, \text{ знаходимо: } \ln y = x \ln x \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} x \ln x = 0 \text{ (див. приклад 4). Отже, } L = e^0 = 1.$$

10.3. Формула Тейлора (для многочлена та довільної функції)

Задача обчислення вартості функції за значеннями аргументу в технічному відношенні не завжди є тривіальною. Найпростіше вона розв'язується, звичайно, для цілої раціональної функції-многочлена: виконують певну кількість дій додавання (віднімання) та множення. Коли ж аналітичне завдання функції інше, наприклад, $y = \lg x$, $y = \sin x$, то не можна вказати, які саме арифметичні операції та в якій кількості необхідно виконати над значенням аргументу, щоб дістати вартість функції.

Тейлорова формула дає змогу подавати наближено функції у вигляді многочлена і, користуючись цим, складати таблиці логарифмів, тригонометричних функцій, коренів тощо, та розробляти відповідні програми для ЕОМ (Тейлор Брук (1685 – 1731) – знаний англійський математик).

1. Тейлорова формула для многочлена. Многочлен $P(x)$ степеня n , який подано у вигляді:

$$P(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n, \quad (10.3.1)$$

де a_0, a_1, \dots, a_n – сталі (коефіцієнти многочлена), називають **многочленом за степенями змінної x** .

Здиференціюємо його послідовно n разів:

$$\begin{aligned} P'(x) &= 1a_1 + 2a_2x + 3a_3x^2 + \dots + na_nx^{n-1}, \\ P''(x) &= 1 \cdot 2a_2 + 2 \cdot 3a_3x + \dots + n \cdot (n-1)a_nx^{n-2}, \\ P'''(x) &= 1 \cdot 2 \cdot 3a_3 + \dots + n \cdot (n-1) \cdot (n-2)a_nx^{n-3}, \\ P^{(n)}(x) &= 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot na_n, \end{aligned}$$

і, поклавши в цих формулах і в (10.3.1) $x=0$, дістанемо вирази для коефіцієнтів многочлена через значення самого многочлена і його похідних при $x=0$:

$$a_0 = P(0), \quad a_1 = \frac{P'(0)}{1!}, \quad a_2 = \frac{P''(0)}{2!}, \quad \dots, \quad a_n = \frac{P^{(n)}(0)}{n!}. \quad (10.3.2)$$

З урахуванням (10.3.2) дістанемо:

$$P(x) = P(0) + \frac{P'(0)}{1!}x + \frac{P''(0)}{2!}x^2 + \dots + \frac{P^{(n)}(0)}{n!}x^n. \quad (10.3.3)$$

Це – **Тейлорова формула** для многочлена за степенями змінної x ; вона відрізняється від формули (10.3.1) лише способом запису коефіцієнтів.

Многочлен, який подано у вигляді:

$$P(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)^2 + \dots + a_n(x - x_0)^n, \quad (10.3.4)$$

де a_0, a_1, \dots, a_n – коефіцієнти многочлена, x – деяка фіксована вартість аргументу, називають **многочленом за степенями різниці** $(x - x_0)$.

Аналогічно розглянутому вище дістанемо (*спробуйте* зробити це самостійно) Тейлорову формулу для многочлена (10.3.4):

$$P(x) = P(x_0) + \frac{P'(x_0)}{1!}(x-x_0) + \frac{P''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \dots + \frac{P^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n. \quad (10.3.5)$$

Зрозуміло, що формула (10.3.3) – окремий випадок (10.3.5), коли $x_0 = 0$.

Тейлоровою формулою зручно користуватися при обчисленні вартостей многочлена для значень аргументу, близьких до x_0 , бо, починаючи з деякого степеня різниці $(x - x_0)$, доданком можна знехтувати, спрощуючи таким чином обчислення.

Приклад. Знайти вартість многочлена $P(x) = x^4 - 5x^3 + x^2 + 3x + 2$ при $x = 1,1$ з точністю до 0,1.

Запишемо многочлен за степенями $(x - 1)$. Маємо:

$$\begin{aligned} P'(x) &= 4x^3 - 15x^2 + 2x + 3, & P'(1) &= -6; \\ P''(x) &= 12x^2 - 30x + 2, & P''(1) &= -16; \\ P'''(x) &= 24x - 30, & P'''(1) &= -6; \\ P^{(4)}(x) &= 24, & P^{(4)}(1) &= 24. \end{aligned}$$

Отже,

$$P(x) = 2 - 6(x-1) - 8(x-1)^2 - (x-1)^3 + (x-1)^4, \quad P(1,1) = 2 - 6 \cdot 0,1 = 1,4.$$

2. Тейлорова формула для довільної функції. Нехай функція $f(x)$ має похідні до $(n+1)$ -го порядку включно в деякому проміжку, що містить точку $x = x_0$. Запишемо на зразок (10.3.5) многочлен

$$P_n(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n. \quad (10.3.6)$$

Як видно, цей многочлен і його похідні (до n -ї включно) в точці x_0 мають ті ж значення, що і функція $f(x)$, і її похідні. Якщо $f(x)$ – не цілий многочлен n -го степеня, то не можна стверджувати рівності $P_n(x)=f(x)$. Многочлен $P_n(x)$ дає лише деяке наближення до функції $f(x)$; через те особливий інтерес викликає вивчення різниці $f(x)-P_n(x)$. Якщо позначити цю різницю через $R_n(x)$, то одержимо:

$$f(x)=f(x_0)+\frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0)+\dots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+R_n(x). \quad (10.3.7)$$

Функцію $R_n(x)$ називають залишковим членом формули Тейлора для функції $f(x)$. Існують різні форми залишкового члена; одна з них має вигляд:

$$R_n(x)=\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}, \quad (10.3.8)$$

де ξ – проміжна точка між x_0 та x .

Формулу (10.3.8) називають **залишковим членом в Лагранжовій формі**, а відповідну формулу (10.3.7) – **Тейлоровою формулою для $f(x)$** із залишковим членом в Лагранжовій формі.

Як бачимо, (10.3.7) відрізняється від (10.3.6) тільки останнім членом: він має таку ж саму форму, як і інші члени, але похідна обчислюється не в точці x_0 , а в проміжній точці між x_0 та x .

Якщо $x_0=0$, то дістанемо окремий, дуже важливий, випадок Тейлорової формули:

$$f(x)=f(0)+\frac{f'(0)}{1!}x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\dots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n+\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}x^{n+1}, \quad (10.3.9)$$

де ξ – число, що знаходиться між нулем та x .

В цьому випадку замість ξ часто пишуть θx , де θ – параметр ($0 < \theta < 1$).

Приклади на побудову формул Тейлора:

а) для функції $y=e^x$ маємо: $y^{(n)}(x)=e^x$, тому при $x=0$ дістаємо: $y^{(n)}(0)=1$, і (10.3.9) набуває вигляду:

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} e^{\theta x}; \quad (10.3.10)$$

б) функція $y = \cos x$ згідно з (9.3.2) має такий вираз для n -ї похідної: $y^{(n)}(x) = \cos(x + n\pi/2)$. Звідки при $x=0$ отримуємо: $y^{(n)}(0) = 0$, якщо n непарне; $y^{(n)}(0) = -1$, якщо $n = 4m - 2$, $m \in \mathbf{N}$; $y^{(n)}(0) = 1$, якщо $n = 4(m - 1)$. Отже,

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \dots + \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!} + \frac{(-1)^{n+1} x^{2n+2}}{(2n+2)!} \cos(\theta x). \quad (10.3.11)$$

(Пропонуємо записати формулу (10.3.9) для функції $\sin x$.)

Зауваження.

1. Формула теореми Лагранжа є окремим випадком, при $n=0$, формули Тейлора:

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(\xi)}{1!} (x - x_0) \Rightarrow \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(\xi). \quad (10.3.12)$$

2. Тейлорова формула для $f(x)$ застосовується не тільки в практиці наближення функцій многочленами, але й відіграє дуже важливу роль в теоретичних дослідженнях, зокрема, в теорії рядів, яка буде розглядатися пізніше.

10.4. Дослідження функцій на монотонність і екстремуми

Дослідження на монотонність. Нагадаємо, що функція $y = f(x)$ називається **зростаючою (спадною)** на деякому інтервалі (a, b) , якщо для будь-яких двох точок x_1 і x_2 цього проміжку із нерівності $x_2 > x_1$ випливає, що

$$f(x_2) > f(x_1) \quad (f(x_2) < f(x_1)), \quad (10.4.1)$$

тобто якщо більшому значенню аргументу x відповідає більша (менша) вартість функції.

Якщо покласти $x_2 - x_1 = \Delta x$, то $x_2 = x_1 + \Delta x$, і (10.4.1) набуває вигляду:

$$f(x_1 + \Delta x) - f(x_1) > 0 \quad (f(x_1 + \Delta x) - f(x_1) < 0),$$

або

$$\Delta y > 0 \quad (\Delta y < 0) \quad \text{при} \quad \Delta x > 0. \quad (10.4.2)$$

Отже, функція $f(x)$ **зростає (спадає)** на (a, b) , якщо приріст аргументу Δx і приріст функції Δy для всіх $x \in (a, b)$ мають однакові (різні) знаки і навпаки:

$$f(x) \uparrow \Leftrightarrow \frac{\Delta y}{\Delta x} > 0 \quad \left(f(x) \downarrow \Leftrightarrow \frac{\Delta y}{\Delta x} < 0 \right). \quad (10.4.3)$$

Зрозуміло, що питання про умови, „зростання” та „спадання” має сенс, якщо розглядувана функція не є сталою ($f(x) \neq c$, $c - \text{const}$).

Теорема 10.4.1 (необхідна ознака монотонності). Якщо диференційовна функція $f(x)$ на проміжку (a, b) зростає (спадає), то її похідна $\forall x \in (a, b)$ невід’ємна (недодатна):

$$f(x) \uparrow \Rightarrow f'(x) \geq 0 \quad (f(x) \downarrow \Rightarrow f'(x) \leq 0). \quad (10.4.4)$$

Д о в е д е н н я. Спинимось на випадку зростаючої функції, тобто коли $\frac{\Delta y}{\Delta x} > 0$. При $\Delta x \rightarrow 0$ матимемо: границя $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x)$ може бути відповідно додатною або, в крайньому випадку, рівною нулеві, що й треба було довести. Друга частина теореми доводиться аналогічно (зробіть це самостійно).

Геометрична інтерпретація теореми така: дотичні до графіка зростаючої (спадної) функції утворюють з додатним напрямом осі Ox гострі (тупі) кути α ; у деяких точках дотична може бути паралельна осі Ox : $f'(x) = \operatorname{tg} \alpha = 0$.

Теорема 10.4.2 (достатня ознака монотонності). Якщо похідна диференційовної на проміжку (a, b) функції $f(x)$ додатна (від'ємна), то функція зростає (спадає) на (a, b) :

$$f'(x) > 0 \Rightarrow f(x) \uparrow \quad (f'(x) < 0 \Rightarrow f(x) \downarrow). \quad (10.4.5)$$

Д о в е д е н н я. Нехай $f'(x) < 0$ при $a < x < b$. Візьмемо дві будь-які точки x_1 та x_2 із (a, b) і застосуємо теорему Лагранжа до функції $f(x)$ на проміжку $[x_1, x_2]$:

$$f(x_2) - f(x_1) = f'(\xi)(x_2 - x_1), \quad x_1 < \xi < x_2,$$

або

$$\Delta y = f'(\xi) \cdot \Delta x. \quad (10.4.6)$$

Із (10.4.6) випливає, що Δx і Δy на (a, b) мають різні знаки (адже $f'(\xi) < 0$), отже, згідно з (10.4.3) функція $f(x)$ спадає на (a, b) , що і треба було довести. Друга частина теореми доводиться аналогічно (обміркуйте, як це зробити).

Зауваження. Умови монотонності функції – необхідна і достатня – як видно із (10.4.4), (10.4.5), відрізняються одна від одної. В окремому ж випадку: $f(x) = c \quad \forall x \in (a, b)$, за критерієм сталості (див. (10.1.8)) необхідна і достатня умови співпадають:

$$f(x) = c \Leftrightarrow f'(x) = 0 \quad \forall x \in (a, b). \quad (10.4.7)$$

Точки, які відокремлюють інтервали зростання та спадання функції, назвемо межами інтервалів монотонності, або коротше – **межами монотонності**.

Як висновки з теорем 10.4.1, 10.4.2 одержуємо умови наявності меж монотонності, а саме:

Висновок 1 (необхідні умови межі монотонності). Проміжки зростання та спадання функції відокремлюються точками, в яких похідна дорівнює нулеві або не існує.

Дійсно, якщо точка $x = x_0 \in (a, b) \subset D(f)$ є межею інтервалів монотонності (a, x_0) , (x_0, b) , то для похідної $f'(x_0)$ маємо дві можливості:

або $f'(x_0)$ існує, і тоді $f'(x_0)=0$, бо перехід від „додатності” до „від’ємності” і навпаки здійснюється через нуль, або $f'(x_0)$ не існує.

Точки, в яких похідна функції дорівнює нулеві або не існує, називають **критичними точками** $f(x)$; зокрема, точки, де $f'(x)=0$, $x \in D(f)$, звуть **стаціонарними точками** функції $f(x)$.

Висновок 2 (достатні умови межі монотонності). Критична точка є межею монотонності, якщо похідна функції при переході через цю точку змінює знак з плюса (+) на мінус (–) або навпаки. (Обґрунтуйте слушність цього висновку самостійно).

На підставі розглянутого вище наведемо **загальний порядок дослідження функції на монотонність**:

- 1) визначаємо область існування функції $D(f)$;
- 2) знаходимо критичні точки (за першою похідною);
- 3) устанавлюємо знак похідної у кожному з інтервалів, на які критичні точки розбивають область існування, і робимо відповідний висновок.

Приклад. Дослідити на монотонність функцію

$$y = f(x) = 3\sqrt[3]{(x-1)^2} \left(\frac{(x-1)^3}{1!} + \frac{x^2+1}{2} \right). \quad (10.4.8)$$

Маємо: $D(f) = \mathbf{R}$, бо всі складові частини (радикал і доданки в дужках) існують для всіх $x \in \mathbf{R}$.

Знаходимо похідну функції $y' = \frac{x^2(x+1)}{\sqrt[3]{x-1}}$ (перевірте) і критичні точки:

$$y' = 0 \Rightarrow x^2(x+1) = 0 \Rightarrow x_1 = -1, x_2 = 0;$$

$$y' \nexists \Rightarrow \sqrt[3]{x-1} = 0 \Rightarrow x-1 = 0 \Rightarrow x_3 = 1.$$

Область існування розбивається на чотири інтервали, в яких похідна має постійний знак (рис. 10.4.1):

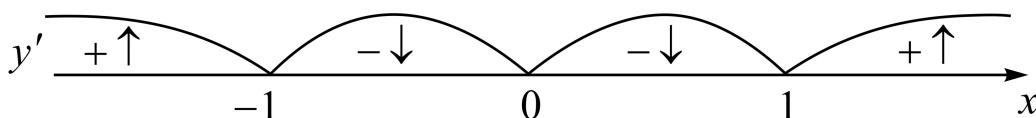


Рис. 10.4.1. Інтервали монотонності функції

Щоб установити знак похідної на кожному із згаданих інтервалів, досить зробити це для однієї (зручної для обчислень) точки кожного інтервалу.

Як бачимо, критична точка $x=0$ не є межею монотонності, бо для неї не виконується достатня умова. Таким чином, дана функція зростає на проміжках $(-\infty, -1)$, $(1, +\infty)$; спадає, коли $x \in (-1, 1)$. Схематичне креслення графіка функції подано на рис. 10.4.2.

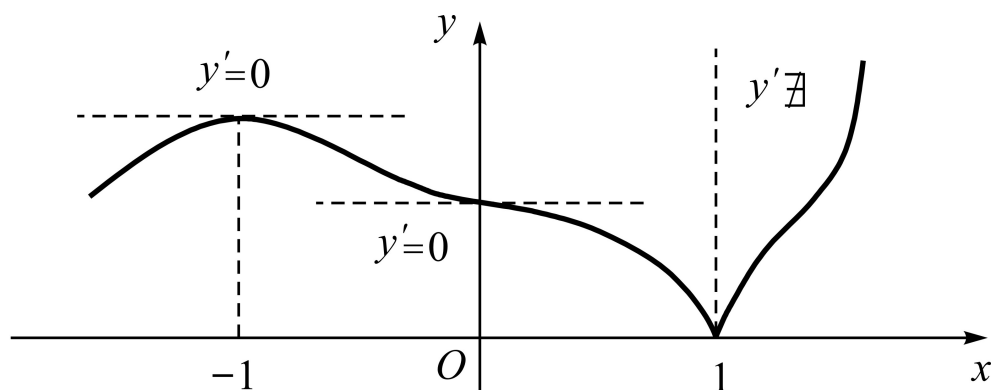


Рис. 10.4.2. Схематичний графік функції

Дослідження на екстремум. Нехай функція $y=f(x)$ визначена і неперервна на інтервалі (a,b) . Точка $x_0 \in (a,b)$ зветься **точкою максимуму (мінімуму)** функції $f(x)$, якщо існує такий окіл X точки x_0 , що для всіх x із нього

$$f(x) < f(x_0) \quad (f(x) > f(x_0)). \quad (10.4.9)$$

Якщо покласти $x - x_0 = \Delta x$, то (10.4.9) можна записати у вигляді:
 $f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) < 0 \quad (f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) > 0)$, або

$$\Delta y < 0 \quad (\Delta y > 0) \quad \forall x \in X. \quad (10.4.10)$$

Отже, іншими словами, x_0 – **точка максимуму (мінімуму)**, якщо приріст функції у цій точці при переході від x_0 до $x \in X$ від'ємний (додатний). Точки максимуму (x_{\max}) і мінімуму (x_{\min}) називають **точками екстремуму** функції, а відповідні вартості функції – **екстремумами** (максимумами f_{\max} , мінімумами f_{\min}).

Теорема 10.4.3 (необхідні умови існування екстремуму). Якщо функція $f(x)$ у точці $x_0 \in (a, b)$ має екстремум, то її похідна у цій точці дорівнює нулеві або не існує, тобто x_0 – критична точка:

$$(x_0 = x_{\max} \vee x_0 = x_{\min}) \Rightarrow (f'(x) = 0 \vee f'(x) \nexists). \quad (10.4.11)$$

Д о в е д е н н я. Нехай для визначеності функція $f(x)$ в точці x_0 має мінімум ($x_0 = x_{\min}$), тоді в деякому околі точки x_{\min} приріст $\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) > 0$. Отже, $\Delta x > 0 \Rightarrow \frac{\Delta y}{\Delta x} > 0$, $\Delta x < 0 \Rightarrow \frac{\Delta y}{\Delta x} < 0$.

Спрямовуючи Δx до нуля, за властивостями границь відповідно матимемо: $\lim_{0 < \Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} \geq 0$, $\lim_{0 > \Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} \leq 0$. Якщо нерівності узгоджені, то існує $f'(x_0)$, при цьому $f'(x_0) = 0$; у протилежному випадку функція у точці x_0 недиференційовна. Отже, x_0 (за означенням) – критична точка.

Випадок $x_0 = x_{\max}$ розглядається аналогічно (доведіть для нього твердження теореми самостійно).

Теорема 10.4.4 (достатні умови існування екстремуму). Якщо x_0 – критична точка і похідна функції при переході через неї (зліва направо) змінює знак, то в цій точці $f(x)$ має екстремум:

$$\left[\begin{array}{l} f'(x_0) = 0 \vee f'(x_0) \nexists \\ f'(x_0 - \Delta x) \cdot f'(x_0 + \Delta x) < 0 \\ (x_0 \pm \Delta x \in X, \Delta x > 0) \end{array} \right] \Rightarrow (x_0 = x_{\max} \vee x_0 = x_{\min}), \quad (10.4.12)$$

при цьому, якщо похідна змінює знак з плюса на мінус, то $x_0 = x_{\max}$, якщо ж зміна знака похідної відбувається з мінуса на плюс, то $x_0 = x_{\min}$.

Д о в е д е н н я. Нехай для визначеності похідна $f'(x)$ при переході через критичну точку x_0 змінює знак з мінуса на плюс, тобто:

$$f'(x) < 0 \quad \forall x \in (x_0 - \Delta x, x_0), \quad f'(x) > 0 \quad \forall x \in (x_0, x_0 + \Delta x). \quad (10.4.13)$$

Щоб показати, де беруться – зліва чи справа від x_0 – точки з околу X , тут (і в умові теореми) знак приросту аргументу винесено за символ Δx , а саме Δx вважається додатним.

За теоремою 10.4.2 (достатня ознака монотонності) із (10.4.13) випливає, що функція $f(x)$ спадає на проміжку $(x_0 - \Delta x, x_0)$ і зростає, коли $x \in (x_0, x_0 + \Delta x)$. А це означає, що приріст функції $f(x)$ у точці x_0 буде додатним незалежно від знака приросту аргументу:

$\Delta f(x_0) = f(x_0 - \Delta x) - f(x_0) > 0$, бо меншому значенню аргументу відповідає більше значення функції, якщо функція спадна;

$\Delta f(x_0) = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) > 0$, бо більшому значенню аргументу відповідає більше значення функції, якщо функція зростаюча.

Таким чином, за означенням точок екстремуму $x_0 = x_{\min}$.

Аналогічно доводиться достатня умова максимуму (наведіть відповідні міркування самостійно).

Висновок. Для дослідження функції на екстремум досить провести її дослідження на монотонність. Дійсно, зіставляючи необхідні і достатні умови існування екстремуму і меж монотонності, одержуємо, що вони співпадають: межа монотонності є точкою екстремуму і навпаки.

Таким чином, точки екстремуму визначаються, так би мовити, автоматично при дослідженні на монотонність.

Отож, звертаючись до розглянутого прикладу (див. рис. 10.4.1, 10.4.2), маємо:

$$x_{\max} = -1, \quad x_{\min} = 1; \text{ а } f_{\max} = \frac{9}{11} \sqrt[3]{4} \approx 1,30, \quad f_{\min} = 0.$$

Якщо функція має тільки стаціонарні точки, тобто розглядаються лише такі вартості аргументу, для яких $f'(x) = 0$, то можна застосувати іншу достатню ознаку екстремуму.

Теорема 10.4.5 (друга достатня ознака екстремуму). Якщо в деякому околі стаціонарної точки x_0 друга похідна неперервна й у самій точці відмінна від нуля, то x_0 – точка екстремуму, причому:

$$\begin{aligned} (f'(x_0) = 0 \wedge f''(x_0) < 0) &\Rightarrow x_0 = x_{\max}, \\ (f'(x_0) = 0 \wedge f''(x_0) > 0) &\Rightarrow x_0 = x_{\min}. \end{aligned} \tag{10.4.14}$$

(Наведіть відповідні міркування, застосувавши умови монотонності до функції $f'(x)$ (як до вихідної функції) і те, що $(f'(x))' = f''(x)$).

Наприклад, функція (10.4.8) має три критичні точки: $x_1 = -1$, $x_2 = 0$, $x_3 = 1$, серед яких дві стаціонарні (x_1 , x_2). Друга похідна має вигляд:

$$y'' = \frac{2x(4x^2 - 2x - 3)}{3 \sqrt[3]{(x-1)^4}} \quad (\text{переконайтеся}). \quad (10.4.15)$$

При $x = x_2 = 0$ похідна $f''(x)$ дорівнює нулю, тому теорему 10.4.5 застосувати не можна, а при $x = x_1 = -1$ одержуємо $f''(-1) < 0$. Отже, $x_1 = x_{\max}$.

Зауваження. Означення точки максимуму (мінімуму) вимагає існування такого її околу, що приріст функції у ній при переході до точок цього околу має постійний знак. Саме тому:

1) розглянуті екстремуми називають ще **локальними**, або **місцевими**, бо може бути таке, що $f_{\max} < f_{\min}$ або $f_{\min} > f_{\max}$;

2) екстремуми можливі тільки у внутрішніх точках відрізка $[a, b]$, тобто на інтервалі (a, b) ; для таких проміжків якраз і доводились відповідні теореми.

Коли постає питання про відшукування **найбільшого** (M) і **найменшого** (m) значень неперервної функції $f(x)$ на сегменті $[a, b]$, то:

якщо уже знайдено локальні екстремуми, треба обчислити вартості функції на кінцях проміжку $f(a)$, $f(b)$ і порівняти їх з f_{\min} , f_{\max} ;

якщо ж дослідження на екстремум не проводилось, тоді знаходять критичні точки і значення функції в них порівнюють з $f(a)$, $f(b)$ (з'ясовувати, чи будуть критичні точки точками екстремуму, чи ні – потреби немає).

За допомогою теорії максимумів та мінімумів функції розв'язуються численні задачі з геометрії, механіки, економіки та інших наук.

Задача 10.4.1. На сторінці книги друкований текст повинен займати площу s см². Поля зверху і знизу по a см, а справа і зліва – по b см. Знайти найбільш економні розміри паперу.

Розв'язання. Позначимо через F площу шуканого аркуша паперу, а через x , y – його сторони; тоді найбільш економні розміри повинні забезпечити мінімальну площу $F = x \cdot y$. Враховуючи дані задачі, маємо:

$$s = (x - 2b)(y - 2a) \Rightarrow y = \frac{s}{x - 2b} + 2a \Rightarrow$$

$$\Rightarrow F = x \left(\frac{s}{x - 2b} + 2a \right), \quad D(F) = \{x \mid x \neq 2b\}.$$

Досліджуємо одержану функцію однієї змінної на екстремум:

$$F'_x = \frac{2}{(x - 2b)^2} [a(x - 2b)^2 - bs] = 0 \Rightarrow x = \sqrt{\frac{bs}{a}} + 2b.$$

У знайденій стаціонарній точці друга похідна $F''_{xx} = \frac{4bs}{(x - 2b)^3} > 0$,

тому за теоремою 10.3.5 маємо мінімум. Відповідні розміри аркуша такі:
 $x = \sqrt{bs/a} + 2b$, $y = \sqrt{as/b} + 2a$.

10.5. Дослідження функцій на опуклість і перегини

Дослідження на опуклість. Функція $y = f(x)$ називається **опуклою (угнутою)** у точці x_0 , якщо у деякому околі X цієї точки графік функції – крива – лежить нижче (вище) дотичної до кривої у цій точці. Замість „опукла” („угнута”) кажуть також „опукла вгору” („опукла вниз”). Опуклість і угнутість будемо надалі зображати відповідно символами \cap – опукла вгору (або просто опукла), \cup – опукла вниз (або просто угнута).

Якщо поточні ординати точок дотичної позначити через \bar{y} , то як наслідок із означення маємо (рис. 10.5.1):

$$f(x) \cap \Leftrightarrow y - \bar{y} < 0; \quad f(x) \cup \Leftrightarrow y - \bar{y} > 0 \text{ (опишіть словесно)}. \quad (10.5.1)$$

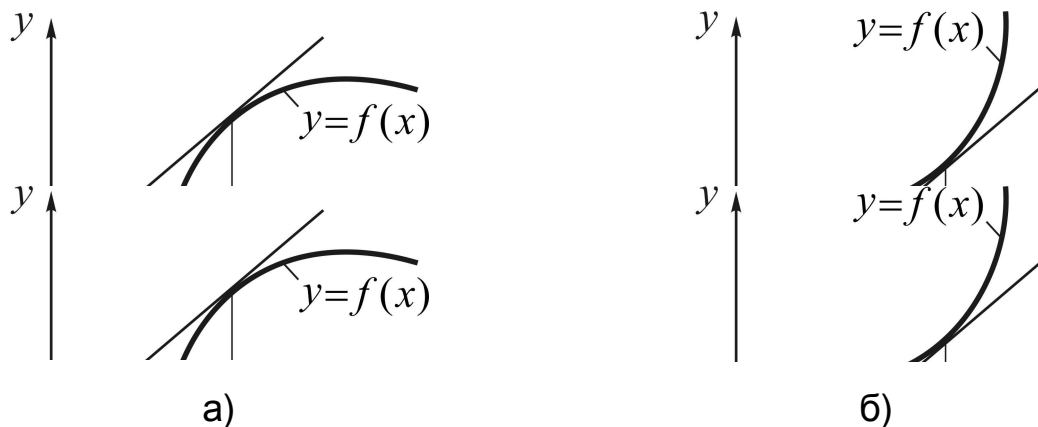


Рис. 10.5.1. Крива опукла: а) вгору; б) вниз

Крива зветься **опуклою (угнутою) на інтервалі (a,b)** , якщо вона опукла (угнута) в усіх точках цього проміжку.

Співвідношення (10.5.1) можна тлумачити як *критерії опуклості й угнутості в геометричній формі*. В диференціальній формі, через похідні, необхідна і достатня умова опуклості (угнутості) визначається теоремою, яка доводиться за допомогою формули Тейлора (див. (10.3.9)).

Теорема 10.5.1 (необхідна і достатня умова опуклості (угнутості)). Якщо функція $y=f(x)$ двічі неперервно диференційовна на інтервалі (a,b) , і $f''(x) \neq 0$ на ньому, то критерієм опуклості (угнутості) кривої $y=f(x)$ на (a,b) є умова: $f''(x) < 0$ ($f''(x) > 0$) $\forall x \in (a,b)$, тобто:

$$\begin{aligned} f(x) \cap &\Leftrightarrow f''(x) < 0 \quad \forall x \in (a,b) \\ (f(x) \cup &\Leftrightarrow f''(x) > 0 \quad \forall x \in (a,b)). \end{aligned} \quad (10.5.2)$$

(Наведіть словесне формулювання записаних у символах тверджень).

Н е о б х і д н і с т ь (\Rightarrow). Нехай для визначеності функція $y=f(x)$ угнута на (a,b) . Покажемо, що $f''(x) > 0 \quad \forall x \in (a,b)$.

Виберемо із (a,b) деяку точку x_0 і запишемо формулу Тейлора для $f(x)$ при $n=1$:

$$y = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0) + \frac{f''(\xi)}{2!}(x-x_0)^2, \quad (10.5.3)$$

і рівняння дотичної до кривої у точці x_0 :

$$\bar{y} = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0). \quad (10.5.4)$$

Із рівностей (10.5.3), (10.5.4) одержуємо:

$$y - \bar{y} = \frac{f''(\xi)}{2}(x-x_0)^2, \quad \xi \in (x_0, x). \quad (10.5.5)$$

За умовою $y - \bar{y} > 0$, тоді $f''(\xi) > 0$, а значить, і $f''(x_0) > 0$, бо в протилежному разі порушувалася б умова $f''(x) \neq 0 \quad \forall x \in (a,b)$. Оскільки точка $x_0 \in (a,b)$ вибиралася довільним чином, то твердження слушне для всіх точок розглядуваного інтервалу.

Д о с т а т н і с т ь (\Leftarrow). Нехай $f''(x) > 0 \quad \forall x \in (a, b)$, тоді згідно з (10.5.5), враховуючи (10.5.1), маємо:

$$f''(x) > 0 \Rightarrow f''(\xi) > 0 \Rightarrow y - \bar{y} > 0 \Rightarrow f(x) \cup.$$

Перше із співвідношень (10.5.2) доводиться аналогічно. (Зробіть це самостійно і *спробуйте* довести теорему 10.5.1 інакше, застосовуючи теорему Лагранжа.)

За аналогією з *межами інтервалів монотонності* введемо поняття „*межі інтервалів опуклості й угнутості*”, а саме: точки (рис. 10.5.2), які відокремлюють інтервали опуклості та угнутості кривої, назовемо **межами відповідних інтервалів**, або коротше – **точками перегину** кривої, а точка кривої з координатами $(x_0, f(x_0))$, де x_0 – точка перегину, визначає власне сам **перегин**.

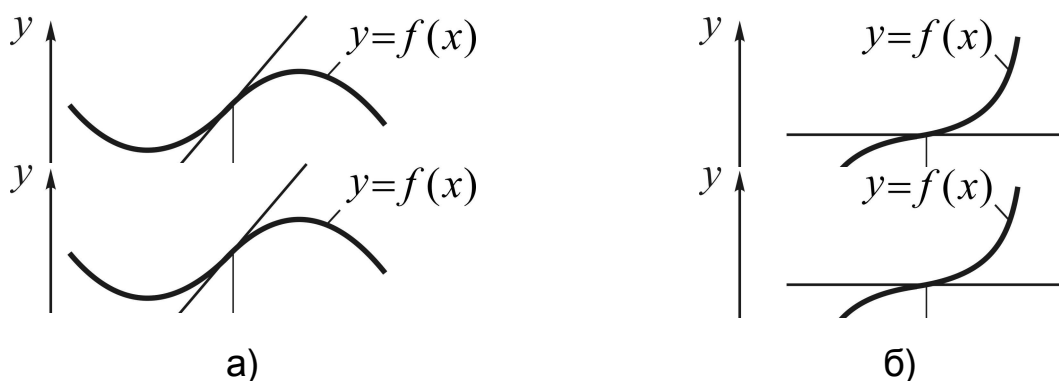


Рис. 10.5.2. Точка перегину x_0 : а) з \cup на \cap ; б) з \cap на \cup

Як висновки з теореми 10.5.1 одержуємо умови наявності перегину.

Теорема 10.5.2 (необхідна умова перегину). Проміжки опуклості та угнутості кривої відокремлюються точками, в яких друга похідна дорівнює нулеві або не існує.

Д о в е д е н н я. Дійсно, якщо точка $x = x_0 \in (a, b) \in D(f)$ є межею інтервалів опуклості та угнутості (a, x_0) , (x_0, b) , то для другої похідної $f''(x_0)$ маємо дві можливості: або $f''(x_0)$ існує, і тоді $f''(x_0) = 0$, бо перехід від „додатності” до „від’ємності” і навпаки здійснюється через нуль; або $f''(x_0)$ не існує.

Точки, в яких друга похідна функції дорівнює нулеві або не існує, називають **критичними точками** $f(x)$ за другою похідною; зокрема,

точки, де $f''(x)=0$, $x \in D(f)$, звуть **стаціонарними точками** $f(x)$ за другою похідною.

Теорема 10.5.3 (достатні умови перегину). Критична точка $x_0 \in X$ є точкою перегину функції $f(x)$, якщо друга похідна функції при переході через цю точку змінює знак з плюса (+) на мінус (–) або навпаки.

$$\left. \begin{array}{l} f''(x_0)=0 \vee f''(x_0) \neq 0 \\ f''(x_0 - \Delta x) \cdot f''(x_0 + \Delta x) < 0 \\ (x_0 \pm \Delta x \in X, \Delta x > 0) \end{array} \right\} \Rightarrow x_0 - \text{точка перегину.} \quad (10.5.6)$$

Д о в е д е н н я здійснюється за аналогією з доведенням достатніх умов існування екстремуму (*наведіть* відповідні міркування самостійно).

Якщо зіставити умови опуклості, угнутості та перегину з умовами монотонності та екстремуму, то дійдемо висновку, що **загальна схема дослідження функції на опуклість (угнутість) та перегини** практично не відрізняється від схеми дослідження на монотонність і екстремуми, а саме:

- 1) відшукуємо область існування функції $D(f)$;
- 2) знаходимо критичні точки (за другою похідною);
- 3) устанавлюємо знак другої похідної в кожному із інтервалів, на які критичні точки (за другою похідною) розбивають область існування, і робимо відповідний висновок.

Різниця тільки в тому, що досліджується поведінка не першої, а другої похідної.

Наприклад, для функції (10.4.8) друга похідна має вигляд (10.4.15):

$$y'' = \frac{2x(4x^2 - 2x - 3)}{3\sqrt[3]{(x-1)^4}},$$

а критичні точки за другою похідною такі:

$$x_1=0, \quad x_{2,3} = \frac{1 \pm \sqrt{13}}{4} \quad (x_2 \approx -0,65; \quad x_3 \approx 1,15), \quad x_4=1.$$

Поведінку другої похідної в $D(f)$ схематично подано на рис. 10.5.3.

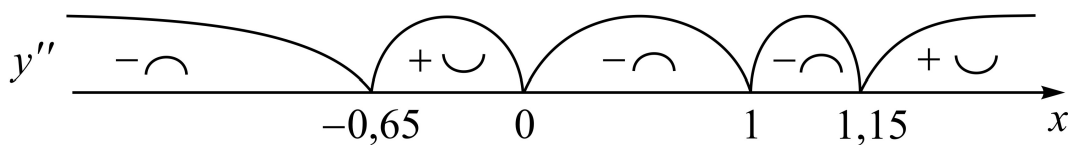


Рис.10.5.3. Інтервали опуклості й угнутості

Як бачимо, критична точка $x_4 = 1$ не є точкою перегину. Інші критичні точки визначають інтервали опуклості й угнутості:

$$x \in \left(-\infty, \frac{1-\sqrt{13}}{4}\right) \cup \left(0, \frac{1+\sqrt{13}}{4}\right) \Rightarrow f(x) \cap,$$

$$x \in \left(\frac{1-\sqrt{13}}{4}, 0\right) \cup \left(\frac{1+\sqrt{13}}{4}, +\infty\right) \Rightarrow f(x) \cup.$$

(Прослідкуйте, чи узгоджуються між собою рис. 10.4.2 і рис.10.5.3.)

10.6. Асимптоти графіка функції. Порядок побудови графіків

Асимптотою кривої $y = f(x)$ зветься пряма, відстань до якої від точки кривої прямує до нуля при необмеженому віддаленні цієї точки вздовж кривої від початку координат. Розрізняють три типи асимптот (рис. 10.6.1):

вертикальні: вони описуються рівнянням $x = a$;

похилі: $y = kx + b$;

горизонтальні: $y = b$, як частковий випадок похилих при $k = 0$.

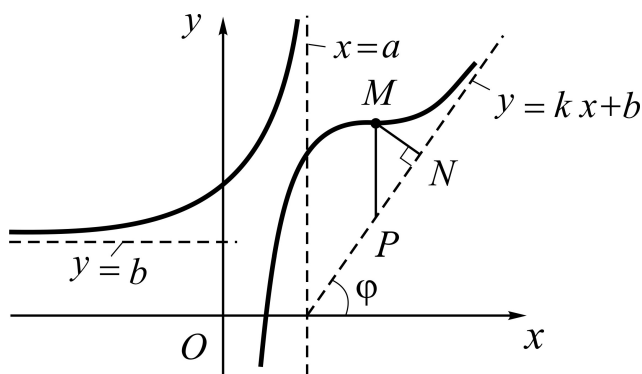


Рис. 10.6.1. Асимптоти графіка функції

Із означення асимптот випливає, що вертикальні асимптоти визначаються точками $x = a$, для яких $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \infty$.

Такими точками, як правило, є точки розриву II-го роду (точки нескінченних розривів); вони легко установлюються при відшукуванні області існування функції, при цьому обчислюють $f(a-0)$ і $f(a+0)$.

Параметри k і b у рівнянні похилої асимптоти $y=kx+b$ знаходять із умови (див. рис. 10.6.1):

$$MP=|f(x)-(kx+b)|\rightarrow 0, \text{ коли } x\rightarrow\infty,$$

яка тягне за собою умову $MN=MP\cos\varphi\rightarrow 0$, де MP – модуль різниці ординат точок кривої і асимптоти при деякому x ; MN – відстань від точки кривої до асимптоти. Отже, за таких обставин $f(x)-(kx+b)=\alpha(x)$, де $\alpha(x)$ – нескінченно мала при $x\rightarrow\infty$, тоді:

$$\frac{f(x)}{x}-k-\frac{b}{x}=\frac{\alpha(x)}{x}\Rightarrow\lim_{x\rightarrow\infty}\frac{f(x)}{x}-k=0\Rightarrow k=\lim_{x\rightarrow\infty}\frac{f(x)}{x}; \quad (10.6.1)$$

$$\lim_{x\rightarrow\infty}(f(x)-kx-b)=0\Rightarrow b=\lim_{x\rightarrow\infty}(f(x)-kx). \quad (10.6.2)$$

Оскільки пряма може бути асимптотою при прямуванні x до нескінченності в одному напрямі ($x\rightarrow+\infty$ або $x\rightarrow-\infty$), то границі для визначення k та b знаходять і при $x\rightarrow+\infty$, і при $x\rightarrow-\infty$; при $k=0$ отримаємо горизонтальну асимптоту: $b=\lim_{x\rightarrow\pm\infty}f(x)$.

Якщо хоч одна із границь (для k або b) не існує або нескінченна, то крива похилих (горизонтальних) асимптот не має.

За результатами дослідження функції з урахуванням деяких інших відомостей про неї, можна дати схематичне зображення графіка функції і здійснюється це за такою **схемою**:

1) знайти *область* існування функції $D(f)$ і встановити поведінку функції в околі точок розриву, якщо такі є;

2) перевірити функцію на *парність* ($f(-x)=f(x)$), *непарність* ($f(-x)=-f(x)$) і *періодичність* ($f(x+T)=f(x)$, $T\neq 0$), з метою урахування симетрії (якщо вона є) чи звуження проміжку дослідження до періоду T ;

3) знайти *точки перетину* $f(x)$ з віссю Ox , розв'язуючи рівняння $f(x)=0$; з віссю Oy , обчислюючи $f(0)$; а також указати інтервали знакосталості, розв'язуючи нерівність $f(x)>0$ або $f(x)<0$;

4) дослідити функцію на *монотонність та екстремуми*;

- 5) установити інтервали *опуклості* (*угнутості*) та *точки перегину*;
- 6) визначити *асимптоти* графіка функції.

На підставі результатів дослідження зображають на площині у вибраній системі координат примітні точки (екстремуми, перегини тощо) і асимптоти, а потім відтворюють схематично хід поведінки функції.

Якщо одержаних відомостей для цього не достатньо, то знаходять додатково декілька точок, які належать графіку функції, і навпаки; не обов'язково проводити дослідження за повною (загальною) схемою, якщо хід поведінки функції можна з'ясувати за результатами декількох (не всіх) пунктів.

У разі, коли рівняння $f(x)=0$ ($f'(x)=0$ або $f''(x)=0$) не належить до раніше вивчених (не розв'язується аналітично), можна спробувати знайти його корені наближено (графічним методом або аналітично).

Приклад. Дослідити функцію та побудувати її графік: $y = \frac{x^3 + x}{x^2 - 1}$.

Розв'язання:

1) функція втрачає смисл при $x = \pm 1$. Область існування функції складається з трьох інтервалів $D(f) = (-\infty, -1) \cup (-1, 1) \cup (1, +\infty)$, а графік має три вітки. Точки $x = 1$, $x = -1$ є точками розриву другого роду, отже, вони визначають вертикальні асимптоти. Для установлення знака функції в околі цих точок знаходимо односторонні границі (це можна було б зробити і в шостому пункті):

$$\lim_{x \rightarrow 1 \pm 0} \frac{x^3 + x}{x^2 - 1} = \pm \infty, \quad \lim_{x \rightarrow -1 \pm 0} f(x) = \pm \infty;$$

2) оскільки

$$f(-x) = \frac{(-x)^3 + (-x)}{(-x)^2 - 1} = -\frac{x^3 + x}{x^2 - 1} = -f(x),$$

то функція непарна, отже, графік її симетричний відносно початку координат;

3) знаходимо точки перетину функції з віссю Ox :

$$f(x) = 0 \Rightarrow x^3 + x = 0 \Rightarrow x(x^2 + 1) = 0 \Rightarrow x = 0 \Rightarrow O(0, 0)$$

– точка перетину графіка з осями координат, бо $f(0) = 0$.

Установлюємо інтервали знакосталості, розв'язуючи нерівність $f(x) > 0$ (рис. 10.6.2):

$$\frac{x^3 + x}{x^2 - 1} > 0 \Rightarrow x(x^2 + 1)(x^2 - 1) > 0 \Rightarrow (x_1 = -1, x_2 = 0, x_3 = 1).$$

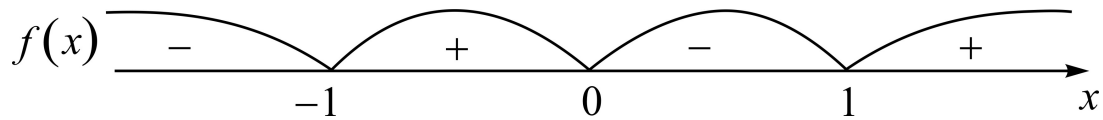


Рис. 10.6.2. Інтервали знакосталості функції

4) відшукуємо критичні точки за першою похідною і визначаємо інтервали монотонності та екстремуми (рис. 10.6.3):

$$f(x) = x + \frac{2x}{x^2 - 1} \Rightarrow f'(x) = 1 - 2 \frac{x^2 + 1}{(x^2 - 1)^2};$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow 2(x^2 + 1) = (x^2 - 1)^2 \Rightarrow (x^2 - 1)^2 - 2(x^2 - 1) - 4 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x_{1,2} = \pm \sqrt{2 + \sqrt{5}};$$

$$f'(x) \nexists \Rightarrow x \in \emptyset \quad (x = \pm 1 \notin D(f)).$$

Отже, маємо дві критичні точки: $x_1 = \sqrt{2 + \sqrt{5}} \approx 2,058$, $x_2 \approx -2,058$.

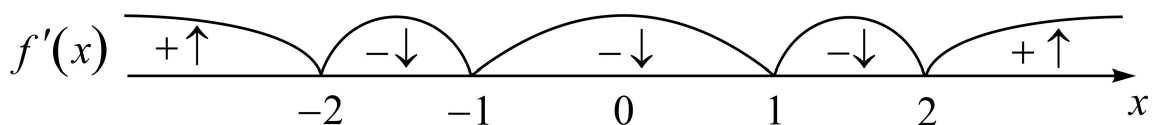


Рис. 10.6.3. Інтервали монотонності функції

Таким чином,

$$x \in (-\infty, -\sqrt{2 + \sqrt{5}}) \cup (\sqrt{2 + \sqrt{5}}, +\infty) \Rightarrow f(x) \uparrow;$$

$$x \in (-\sqrt{2 + \sqrt{5}}, +\sqrt{2 + \sqrt{5}}) \setminus \{-1, 1\} \Rightarrow f(x) \downarrow;$$

$$f_{\min} = f(\sqrt{2 + \sqrt{5}}) \approx 3,236, \quad f_{\max} = f(-\sqrt{2 + \sqrt{5}}) \approx -3,236;$$

5) знаходимо критичні точки за другою похідною (рис. 10.6.4):

$$f''(x) = \frac{2x(x^2 + 3)}{(x^2 - 1)^3} = 0 \Rightarrow x = 0; \quad f''(x) \neq 0 \Rightarrow x \in \emptyset.$$

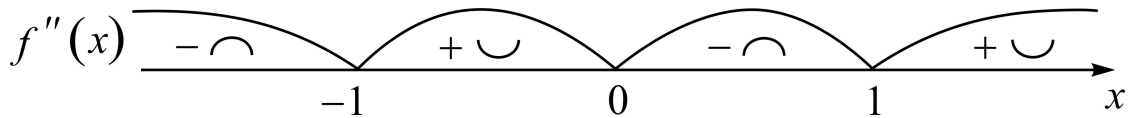


Рис. 10.6.4. Інтервали опуклості й угнутості

Отже, $x \in (-\infty, -1) \cup (0, 1) \Rightarrow f(x) \cap$; $x \in (-1, 0) \cup (1, +\infty) \Rightarrow f(x) \cup$;
 $x=0$ – точка перегину і $f(0)=0$ – перегин у початку координат;

6) відшукуємо похилі асимптоти:

$$k = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x^2 + 1}{x^2 - 1} = 1,$$

$$b = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} (f(x) - kx) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{2x}{x^2 - 1} = \pm 0,$$

тут знак „+” („–”) указує на те, що крива лежить вище (нижче) асимптоти при $x \rightarrow +\infty$ ($x \rightarrow -\infty$).

Отже, маємо похилу асимптоту $y = x$ (рис. 10.6.5).

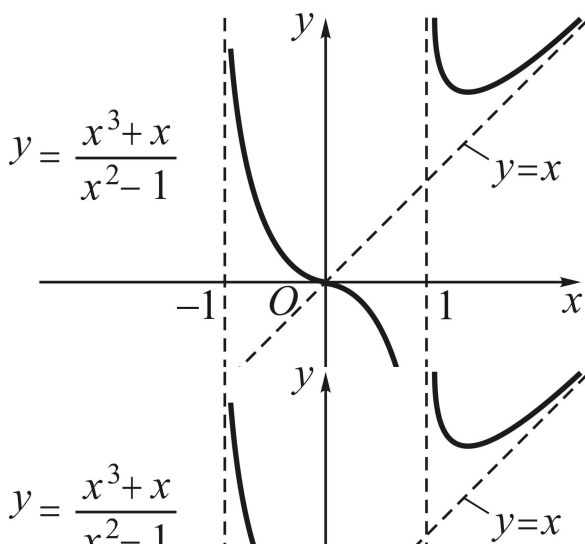


Рис. 10.6.5. Графік функції

Наносимо на координатну площину примітні точки: межі інтервалів знакосталості, монотонності, опуклості, угнутості тощо, та значення функції в них; зображуємо асимптоти і згідно з рис. 10.6.2 – 10.6.4 відтворюємо хід поведінки функції (див. рис. 10.6.5).

Якщо дослідження проведене без помилок, то ми не повинні одержати взаємно виключних проміжних результатів.

При дослідженні функцій засобами диференціального числення важливо не тільки вільно володіти формальною технікою відшукування похідних, а й уміти аналізувати отримані результати; саме це викликає у допитливих найбільші утруднення.

Подальшим розвитком диференціального числення є розв'язання оберненої задачі: задано деяку функцію $f(x)$, а треба знайти таку функцію $F(x)$, щоб похідна $F'(x)$ дорівнювала б $f(x)$. Саме цю задачу, і не тільки, будемо розв'язувати у другій частині посібника.

Запитання для самодіагностики засвоєння матеріалу

Відповіді на всі запитання сформулюйте словесно, запишіть в символічній формі, обґрунтуйте (на підставі означень, теорем, правил, формул тощо), наведіть відповідні конкретні приклади.

1. Доведіть теорему Лагранжа про середнє значення (похідної).
2. Наведіть наслідки з теореми Лагранжа: формулу скінченних приростів; критерій сталості функції; критерій сталості різниці функцій; теорему Ролля; теорему Коші.
3. До розкриття яких невизначеностей при обчисленні границь функцій можна застосовувати правило Лопіталя безпосередньо, тобто без попередніх тотожних перетворень?
4. Наведіть тотожні перетворення, за допомогою яких розкриття наведених нижче невизначеностей зводяться до безпосереднього застосування правила Лопіталя: $0 \cdot \infty$, $\infty - \infty$, 1^∞ , 0^0 , ∞^0 .
5. Який вигляд має многочлен за степенями змінної x (за степенями різниці $(x - x_0)$)?
6. Виведіть формулу Тейлора для многочлена за степенями змінної x (за степенями різниці $(x - x_0)$).
7. Яку формулу називають формулою Тейлора для довільної функції $y = f(x)$?
8. Для розв'язання яких задач використовують формули Тейлора для многочленів і довільної функції?
9. Що таке залишковий член формули Тейлора для заданої функції і який вигляд він має в Лагранжовій формі?

10. Які функції називаються монотонними (зростаючими, спадними)?
11. У чому полягають необхідна і достатня умови монотонності функцій, сталості функції на деякому проміжку?
12. Для яких функцій необхідна і достатня умови монотонності співпадають?
13. Наведіть загальну схему дослідження функцій на монотонність.
14. Що розуміють під точками екстремуму функції (точками максимуму і мінімуму), екстремумами функції?
15. У чому полягають необхідна і достатня умови екстремуму (максимуму і мінімуму) функції?
16. Як виглядає достатня умова екстремуму у разі не рівності нулеві другої похідної у стаціонарній точці?
17. Наведіть загальну схему дослідження функцій на екстремум?
18. Опишіть порядок відшукування найбільшого і найменшого значення неперервної функції $f(x)$ на сегменті $[a, b]$.
19. Які функції називаються опуклими (угнутими) у даній точці, на заданому інтервалі?
20. У чому полягають необхідна і достатня умови опуклості (угнутості) функції?
21. Наведіть загальний порядок дослідження функцій на опуклість (угнутість).
22. Що розуміють під точкою перегину і перегином функції?
23. У чому полягають необхідна і достатня умови наявності точок перегину функції?
24. Чи всяка точка перегину є критичною точкою за другою похідною і навпаки?
25. Що таке асимптота графіка функції і якими рівняннями описуються її різновиди?
26. Наведіть загальну схему дослідження функцій засобами диференціального числення.
27. Опишіть, як за результатами дослідження функції будується її графік.
28. Яку задачу називають оберненою до задачі диференціювання функцій?

Задачі та вправи

1. Записати у символах теореми Лагранжа для заданої функції $f(x)$ на вказаному відрізку:

а) $f(x) = \sqrt[3]{x^5} + 1, [a, b];$

б) $f(x) = \ln(x^2 + 1), [x_1, x_2];$

в) $f(x) = \operatorname{arctg} x, [x_0, x_0 + h].$

2. Перевірити справедливість теореми Лагранжа для заданої функції $f(x)$ на вказаному відрізку $[a, b];$ знайти відповідне значення $\xi \in (a, b)$ (якщо воно існує):

а) $f(x) = x^3 - 3x + 1, [a, b] = [0, 3];$

б) $f(x) = \ln x, [a, b] = [1, e];$

в) $f(x) = \sqrt{x+1}, [a, b] = [0, 8];$

г) $f(x) = |x-1|, [a, b] = [0, 3].$

3. Крива $y = x^2 - 4x$ сполучає точки $A(1, -3)$ і $B(4, 0)$. Виходячи з геометричного змісту теореми Лагранжа, знайти на дузі AB точку M , в якій дотична паралельна хорді AB . Зробити відповідний рисунок.

4. Користуючись критерієм сталості функції, довести, що:

а) $\arcsin x + \arccos x = \pi/2 \quad \forall x \in [-1, 1];$

б) $\operatorname{arctg} x + \operatorname{arcctg} x = \pi/2, x > 0;$

в) $\operatorname{arctg} x + \operatorname{arctg} (1/x) = \pi/2, x > 0.$

5. Перевірити, чи справджується теорема Ролля для заданої функції $f(x)$ на вказаному відрізку $[a, b]$. Якщо „так”, то знайти відповідне значення $\xi \in (a, b)$:

а) $f(x) = x^2, [a, b] = [0, 1];$

б) $f(x) = \ln \cos x, [a, b] = [-\pi/3, \pi/3];$

в) $f(x) = 1 - |x|, [a, b] = [-1, 1];$

$$\text{г) } f(x) = 1 + \sqrt[3]{x^2 - 6x + 5}, \quad [a, b] = [1, 5];$$

$$\text{д) } f(x) = \operatorname{ctg} x, \quad [a, b] = [-\pi/2, \pi/2];$$

$$\text{е) } f(x) = x^2 - 6x + 7, \quad [a, b] = [1, 5];$$

$$\text{є) } f(x) = 1 - \sqrt[3]{x^2}, \quad [a, b] = [-1, 1];$$

$$\text{ж) } f(x) = e^{x^2 - 2x + 2}, \quad [a, b] = [0, 2];$$

$$\text{з) } f(x) = \begin{cases} x, & x \in [0, 1), \\ 0, & x \in [1, 3], \end{cases} \quad [a, b] = [0, 3].$$

6. Не знаходячи похідної функції $f(x) = (x-3)(x-5)(x-6)(x-7)$, з'ясувати, скільки дійсних коренів має рівняння $f'(x) = 0$, і вказати інтервали, яким вони належать. (Вказівка: застосувати теорему Ролля на кожному із скінченних проміжків, на які нулі функції поділяють її область існування.)

7. Довести, що рівняння $x^5 + 5x - 9 = 0$ має тільки один дійсний корінь. (Вказівка: припустити існування двох коренів і скористатися вказівкою до задачі 6.)

8. Записати у символах теореми Коші для заданих функцій $f(x)$ і $\varphi(x)$ на відрізку $[a, b]$:

$$\text{а) } f(x) = \operatorname{arctg} x, \quad \varphi(x) = x^3 + 3x + 1;$$

$$\text{б) } f(x) = e^{2x}, \quad \varphi(x) = e^x + 1;$$

$$\text{в) } f(x) = \ln(1 + x^2), \quad \varphi(x) = \ln(x + \sqrt{1 + x^2}).$$

9. Перевірити справедливість теореми Коші заданих для функцій $f(x)$ і $\varphi(x)$ на вказаному відрізку $[a, b]$; знайти відповідне значення $\xi \in (a, b)$ (якщо воно існує):

$$\text{а) } f(x) = \sin x, \quad \varphi(x) = 1 + \cos x, \quad [a, b] = [0, \pi/2];$$

$$\text{б) } f(x) = x^3, \quad \varphi(x) = x^2 + 1, \quad [a, b] = [1, 2];$$

$$\text{в) } f(x) = 2x^3 + 5x + 1, \quad \varphi(x) = x^2 + 4, \quad [a, b] = [0, 2].$$

10. Обчислити границі функцій за допомогою правила Лопіталя:

$$1) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x};$$

$$2) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x \cdot e^{x/2}}{5x + e^x};$$

$$3) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln \sin 3x}{\ln \sin 5x};$$

$$4) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x + 4x}{x^3};$$

$$5) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x+9)}{\sqrt[5]{x-1}};$$

$$6) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\cos x \cdot \ln(x-2)}{\ln(e^x - e^2)};$$

$$7) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 4x}{x^2};$$

$$8) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{5x} - e^{2x}}{x};$$

$$9) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^3}{x - \sin x};$$

$$10) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x + x^3 - x^5}{4x - x^4};$$

$$11) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2^x - 2^{-x}}{\ln(1+2x)};$$

$$12) \lim_{x \rightarrow \pi/4} \frac{\operatorname{tg} x - 1}{\sin 4x};$$

$$13) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^4 - 2x^3 + 3x - 2}{x^5 + 3x^2 - 2x - 2};$$

$$14) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln \cos ax}{\ln \cos bx} \quad (a, b \in \mathbf{R});$$

$$15) \lim_{x \rightarrow +0} x \cdot \ln x;$$

$$16) \lim_{x \rightarrow +\infty} x^n \cdot e^{-2x}, \quad n \in \mathbf{N};$$

$$17) \lim_{x \rightarrow \infty} x \cdot (e^{1/x} - 1);$$

$$18) \lim_{x \rightarrow \infty} x \cdot \sin(1/x);$$

$$19) \lim_{x \rightarrow 0} x \cdot \ln(\operatorname{ctg} x);$$

$$20) \lim_{x \rightarrow 2} (2-x) \cdot \operatorname{tg} \frac{\pi x}{4};$$

$$21) \lim_{x \rightarrow 0} \operatorname{tg} x \cdot \ln \sin x;$$

$$22) \lim_{x \rightarrow 2} (4-x^2) \cdot \operatorname{ctg} \pi x;$$

$$23) \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{\sin x} \right);$$

$$24) \lim_{x \rightarrow \pi/2} \left(\operatorname{tg} x - \frac{1}{\cos x} \right);$$

$$25) \lim_{x \rightarrow \pi/2} \left(\frac{1}{\cos x} - \frac{1}{\pi - 2x} \right);$$

$$26) \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{\operatorname{arctg} x} \right);$$

$$27) \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{1}{\ln x} - \frac{1}{x-1} \right);$$

$$28) \lim_{x \rightarrow 0} (x^{-2} - \operatorname{ctg}^2 x);$$

$$29) \lim_{x \rightarrow 0} x^x;$$

$$30) \lim_{x \rightarrow 0} (\sin 2x)^{\operatorname{tg} 3x};$$

$$31) \lim_{x \rightarrow 0} x^{\frac{1}{1+\ln x}};$$

$$32) \lim_{x \rightarrow 2} (2-x)^{\cos \frac{\pi x}{4}};$$

$$33) \lim_{x \rightarrow 0} (\cos 2x)^{1/x^2};$$

$$34) \lim_{x \rightarrow 0} \sqrt[3]{1 - \sin x};$$

$$35) \lim_{x \rightarrow 0} (1 + \operatorname{tg} 2x)^{\frac{x^2+1}{x}};$$

$$36) \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin x}{x} \right)^{3/x};$$

$$37) \lim_{x \rightarrow 0} (\ln \operatorname{ctg} x)^{\operatorname{tg} 2x};$$

$$38) \lim_{x \rightarrow 0} (\operatorname{ctg} x)^{1/\ln x};$$

$$39) \lim_{x \rightarrow \infty} (1 + 2^x)^{1/x};$$

$$40) \lim_{x \rightarrow 0} (1/x)^{x^2}.$$

11. Розкласти многочлен $P_n(x)$ за степенями $(x - x_0)$, використовуючи формулу Тейлора:

а) $P_4(x) = x^4 - x^3 + 5x^2 - 4x + 1, x_0 = 1;$

б) $P_3(x) = x^3 + 4x^2 - 6x - 8, x_0 = -1;$

в) $P_5(x) = x^5 - 3x^4 + 7x + 2, x_0 = 2;$

г) $P_4(x) = 8x^4 + 5x^2 + 4x + 6, x_0 = -1/2.$

12. Знайти многочлен третього степеня, якщо $f(3)=2, f'(3)=-1, f''(3)=4, f'''(3)=-18$. Обчислити $f(-2), f'(0)$ і $f''(5)$.

13. Знайти многочлен четвертого степеня, якщо $f(1)=2, f'(1)=3, f''(1)=4, f'''(1)=0, f^{(4)}(1)=-6$. Обчислити $f(0), f'(2)$ і $f''(3)$.

14. Для заданої функції $f(x) = x^6 - 3x^2 + 2x$ знайти три перші члени розкладу за степенями $(x - 2)$. Обчислити $f(1,9)$ наближено за цими трьома членами розкладу і точно. Знайти абсолютну і відносну похибки.

15. Знайти інтервали монотонності функції:

а) $f(x) = x - \operatorname{arctg} x;$

б) $f(x) = x^3 - 6x^2 + 5;$

в) $f(x) = (x - 2)^2(x + 2);$

г) $f(x) = \ln(x^2 - 2x + 4);$

д) $f(x) = x + e^{-x};$

е) $f(x) = x \ln x + 3x;$

є) $f(x) = \frac{1}{1 - x^2};$

ж) $f(x) = \frac{2x}{x^2 + 1};$

з) $f(x) = (2x + 1)\sqrt[3]{(x - 2)^2};$

і) $f(x) = x + \cos x.$

16. Довести, що рівняння $x^7 + 14x - 8 = 0$ має лише один дійсний корінь.

17. Знайти екстремуми функції:

- а) $f(x) = x^3 - 9x^2 + 15x$; б) $f(x) = \frac{x^3}{3} - \frac{3}{2}x^2 + 2x - 3$;
в) $f(x) = \frac{\ln x}{x}$; г) $f(x) = e^{x^2 - 4x + 5}$;
д) $f(x) = x + \sqrt{5 - 2x}$; е) $f(x) = x - \arcsin x$;
є) $f(x) = \sqrt[3]{x^2} \cdot e^x$; ж) $f(x) = x \cdot \sqrt{1 - x^2}$;
з) $f(x) = \frac{(x-2)(3-x)}{x^2}$; і) $f(x) = x^2 - 4 \ln(1+x)$.

18. Знайти найбільше (M) і найменше (m) значення функції $y = f(x)$ на заданому відрізку ($M = \max_{[a,b]} f(x)$, $m = \min_{[a,b]} f(x)$):

- а) $f(x) = x^4 - 8x^2$, $[-1, 3]$; б) $f(x) = 3x - x^3$, $[-2, 3]$;
в) $f(x) = x - 4\sqrt{x} + 1$, $[1, 9]$; г) $f(x) = \sqrt{21 + 4x - x^2}$, $[-1, 7]$;
д) $f(x) = x + \frac{4}{x^2}$, $[1, 3]$; е) $f(x) = \sin 2x - x$, $[-\pi/2, \pi/2]$.

19. Довести, що коли x_0 – єдина стаціонарна точка функції $f(x)$, $x \in (a, b)$, причому $\lim_{x \rightarrow a+0} f(x) = \lim_{x \rightarrow b-0} f(x) = 0$ і $f(x_0) > 0$, то така функція при $x = x_0$ має абсолютний максимум.

20. Навести приклад диференційовної функції, яка має екстремуми тільки в точках $x = k$, $k \in \mathbb{Z}$ (якщо вона існує).

21. Знайти точки перегину та інтервали опуклості й угнутості графіка функції:

- а) $f(x) = \frac{1}{x^2 + 1}$; б) $f(x) = \frac{x^3}{4 - x^2}$;
в) $f(x) = e^{-x^2}$; г) $f(x) = x^4 - 4x^3 - 48x^2 + 6x - 9$;
д) $f(x) = \cos x$; е) $f(x) = x \cdot \operatorname{arctg} x$;
є) $f(x) = 3 + \sqrt[3]{x+2}$; ж) $f(x) = \ln(4 + x^2)$.

22. Довести, що коли графік функції, яка має неперервну другу похідну, скрізь опуклий або угнутий, то функція не може мати більше одного екстремуму.

23. Як розташований на xOy графік функції $y = f(x)$, $x \in (a, b)$, і яким він є з точки зору властивостей монотонності й опуклості, якщо:

- | | |
|-------------------------------------|-------------------------------------|
| 1) $y > 0$, $y' > 0$, $y'' > 0$; | 2) $y > 0$, $y' < 0$, $y'' < 0$; |
| 3) $y < 0$, $y' < 0$, $y'' > 0$; | 4) $y < 0$, $y' > 0$, $y'' < 0$. |

24. Довести, що точка перегину функції не може одночасно бути її точкою екстремуму.

25. Довести, що будь-який многочлен непарного степеня n ($n \geq 3$) має принаймні одну точку перегину.

26. Довести, що будь-який многочлен парного степеня з додатними коефіцієнтами не має точок перегину, але має єдину точку мінімуму.

27. Які умови повинні задовольняти коефіцієнти a і b , щоб крива $y = ax^4 + bx^3 + ax^2 + 3x - 1$ мала точки перегину?

28. Визначити, при яких значеннях параметра a :

- 1) крива $y = 2x^4 + 2ax^3 + 3x^2 - 2x$ скрізь вгнута;
- 2) крива $y = 3ax^4 - x^3 - \frac{x^2}{2} + 2x$ скрізь опукла.

29. Знайти асимптоти графіка функції:

- | | |
|--|--|
| 1) $f(x) = \frac{x^2}{x-1}$; | 2) $f(x) = \frac{x^2 + 3}{x^2 - 9}$; |
| 3) $f(x) = x \cdot e^x$; | 4) $f(x) = \frac{3x}{x+2}$; |
| 5) $f(x) = e^{-1/x}$; | 6) $f(x) = \frac{1}{x^2 + 5x - 6}$; |
| 7) $f(x) = x + \operatorname{arccotg} x$; | 8) $f(x) = \frac{2x^2 + 5x - 1}{x}$; |
| 9) $f(x) = \sqrt{\frac{x^3}{x-2}}$; | 10) $f(x) = \sqrt{2+x^2} \cdot \sin \frac{2}{x}$; |
| 11) $f(x) = 2 + \ln \frac{x+1}{x-2}$; | 12) $f(x) = x - \ln x$. |

30. Дослідити функцію та побудувати її графік:

1) $y = \frac{1}{4}(x-1)^2(x+5)$;

2) $y = \frac{x^2}{2(x-1)}$;

3) $y = \frac{x^3}{x^2+1}$;

4) $y = \frac{5x}{x^2-4}$;

5) $y = \ln(x^2+2x)$;

6) $y = x - \ln(x+1)$;

7) $y = \frac{x^3+4}{x^2}$;

8) $y = \sqrt[3]{x^3-2x^2}$;

9) $y = x^{-2} \cdot e^{-x^2}$;

10) $y = (x-2) \cdot e^x$;

11) $y = \arctg(x^2)$;

12) $y = \arcsin \frac{1}{4x}$.

31. Число 48 розкласти на два доданки так, щоб їхній добуток був найбільшим.

32. Число 30 розкласти на два доданки так, щоб сума їх кубів була найменшою.

33. Якими мають бути розміри ящика з кришкою об'єму $V = 1764 \text{ см}^3$, якщо сторони основи відносяться, як 3:4, щоб на його виготовлення пішло найменше матеріалу?

34. Об'єм правильної шестикутної призми дорівнює V . Якою має бути сторона основи, щоб повна поверхня призми була найменшою? (Вказівка: об'єм правильної шестикутної призми визначається формулою

$V = S \cdot H$, де $S = \frac{3\sqrt{3}}{2}a^2$ – площа основи, a – сторона основи, H – висота призми).

35. Довжина відкритого басейну об'ємом 288 м^2 вдвічі більша за ширину. Якими мають бути розміри басейну, щоб на його облицювання пішло найменше матеріалу?

36. Знайти співвідношення між радіусом R і висотою H прямого кругового циліндра, який має при даному об'ємі V найбільшу повну поверхню? (Вказівка: повна поверхня прямого кругового циліндра обчислюється за формулою $S = 2\pi R^2 + 2\pi RH$).

37. На параболі $y^2 = 4x$ знайти точку, найближчу до точки $(6, 0)$.

38. На гіперболі $xy = 4$ знайти точку, сума квадратів координат якої була б найменшою.

39. Одна сторона прямокутника лежить на осі Ox , а вершини протилежної сторони – на параболі $y = 12 - x^2$. Знайти розміри прямокутника найбільшої площі.

40. Скласти рівняння прямої, яка проходить через точку $(2, 8)$ і відтинає на додатних півосях координат відрізки, сума яких є найбільшою.

41. На гіперболі $x^2 - y^2 = 4$ знайти точки, найближчі до точки $(0, 2)$.

Відповіді

1. а) $\frac{5}{3} \sqrt[3]{\xi^2} (b-a) = \sqrt[3]{b^5} - \sqrt[3]{a^5}$, $\xi \in (a, b)$; б) $\frac{2\xi(x_2 - x_1)}{\xi^2 + 1} = \ln \frac{x_2^2 + 1}{x_1^2 + 1}$

$\xi \in (x_1, x_2)$; в) $\frac{h}{1 + \xi^2} = \operatorname{arctg}(x_0 + h) - \operatorname{arctg} x_0$, $\xi \in (x_0, x_0 + h)$.

2. а) $\xi = \sqrt{3}$; б) $\xi = e - 1$; в) $\xi = 3$; г) умови теореми Лагранжа не виконуються, бо при $x = 1$ функція недиференційовна.

3. $M(5/2, -15/4)$.

5. а) ні, бо $f(0) \neq f(1)$; б) так, $\xi = 0$; в) ні, бо при $x = 0$ функція недиференційовна; г) так, $\xi = 3$; д) ні, бо на відрізку $[-\pi/2, \pi/2]$ функція не є неперервною; е) так, $\xi = 3$; є) ні, бо при $x = 0$ функція недиференційовна; ж) так, $\xi = 1$; з) ні, бо на відрізку $[0, 3]$ функція не є неперервною.

6. Три корені, що належать відповідно інтервалам $(3, 5)$, $(5, 6)$, $(6, 7)$.

8. а) $\frac{\operatorname{arctg} b - \operatorname{arctg} a}{b^3 - a^3 + 3(b-a)} = \frac{1}{3(1 + \xi^2)^2}$, $\xi \in (a, b)$; б) $e^b + e^a = 2e^\xi$, $\xi \in (a, b)$;

в) $\ln \left(\frac{1+b^2}{1+a^2} \right) \cdot \ln^{-1} \left(\frac{b + \sqrt{1+b^2}}{a + \sqrt{1+a^2}} \right) = \frac{2\xi}{\sqrt{1+\xi^2}}$, $\xi \in (a, b)$.

9. а) $\xi = \pi/4$; б) $\xi = 14/9$; в) $\xi_1 = 1/2$, $\xi_2 = 5/3$.

10. 1) 0; 2) 0; 3) 1; 4) $+\infty$; 5) 0; 6) $\cos 2$; 7) 8; 8) 3; 9) 6; 10) $1/4$; 11) $\ln 2$; 12) $-1/2$; 13) $1/9$; 14) a^2/b^2 ; 15) 0; 16) 0; 17) 1;

18) 1; 19) 0; 20) $4/\pi$; 21) 0; 22) $-4/\pi$; 23) 0; 24) 0; 25) ∞ ; 26) 0;
 27) $1/2$; 28) $2/3$; 29) 1; 30) 1; 31) e ; 32) 1; 33) $1/e^2$; 34) $1/e$; 35) e^2 ;
 36) 1; 37) 1; 38) $1/e$; 39) 2; 40) 1.

11. а) $P_4(x)=(x-1)^4+3(x-1)^3+8(x-1)^2+7(x-1)+2$; **б)** $P_3(x)=(x+1)^3+ (x+1)^2-11(x+1)+1$; **в)** $P_4(x)=(x-2)^5+7(x-2)^4+16(x-2)^3+8(x-2)^2- -9(x-2)$; **г)** $P_4(x)=8(x+1/2)^4-16(x+1/2)^3+17(x+1/2)^2-5(x+1/2)+23/4$.

12. $f(x)=2-(x-3)+2(x-3)^2-3(x-3)^3$, $f(-2)=432$, $f'(0)=-94$, $f'(5)=-32$.

13. $f(x)=2+3(x-1)+2(x-1)^2-0,25(x-1)^4$, $f(0)=3/4$, $f'(2)=6$, $f''(3)=-8$.

14. $f(x)\approx 56+182(x-2)+237(x-2)^2$, $f(1,9)\approx 40,17$, $f(1,9)=40,0159$, $\alpha=0,1541$, $\delta=0,0039$.

15. а) $f(x)\uparrow \forall x\in(-\infty,+\infty)$; **б)** $f(x)\uparrow$ при $x\in(-\infty,-2)\cup(2,+\infty)$, $f(x)\downarrow$ при $x\in(-2,2)$; **в)** $f(x)\uparrow$ при $x\in(-\infty,-2/3)\cup(2,+\infty)$, $f(x)\downarrow$ при $x\in(-2/3,2)$; **г)** $f(x)\uparrow$ при $x\in(1,+\infty)$, $f(x)\downarrow$ при $x\in(-\infty,1)$; **д)** $f(x)\uparrow$ при $x\in(-\infty,0)$, $f(x)\downarrow$ при $x\in(0,+\infty)$; **е)** $f(x)\uparrow$ при $x\in(e^{-4},+\infty)$, $f(x)\downarrow$ при $x\in(0,e^{-4})$; **е)** $f(x)\uparrow$ при $x\in(0,1)\cup(1,+\infty)$, $f(x)\downarrow$ при $x\in(-\infty,-1)\cup(-1,0)$; **ж)** $f(x)\uparrow$ при $x\in(-1,1)$, $f(x)\downarrow$ при $x\in(-\infty,-1)\cup \cup(1,+\infty)$; **з)** $f(x)\uparrow$ при $x\in(-\infty,1)\cup(2,+\infty)$, $f(x)\downarrow$ при $x\in(1,2)$; **и)** $f(x)\uparrow \forall x\in(-\infty,+\infty)$.

17. а) $f_{\max}=f(1)=7$, $f_{\min}=f(5)=-25$; **б)** $f_{\max}=f(1)=-13/6$, $f_{\min}=f(2)=-7/3$; **в)** $f_{\max}=f(e)=1/e$; **г)** $f_{\min}=f(2)=e$; **д)** $f_{\max}=f(2)=3$ **е)** екстремумів немає; **е)** $f_{\max}=f(-2/3)\approx 0,4$, $f_{\min}=f(0)=0$; **ж)** $f_{\max}=f(1/\sqrt{2})=1/2$, $f_{\min}=f(-1/\sqrt{2})=-1/2$; **з)** $f_{\max}=f(12/5)=1/24$; **и)** $f_{\min}=f(1)=1-4\ln 2$.

18. а) $M=f(3)=9$, $m=f(2)=-16$; **б)** $M=f(-2)=2$, $m=f(3)=-18$; **в)** $M=f(1)=f(9)=-2$, $m=f(4)=-3$; **г)** $M=f(2)=5$,

$m = f(7) = 0$; д) $M = f(1) = 5$, $m = f(2) = 3$; е) $M = f(-\pi/2) = \pi/2$, $m = f(\pi/2) = -\pi/2$.

20. Наприклад, $f(x) = \cos \pi x$.

21. а) $x_{1,2} = \pm 1/\sqrt{3}$ – точки перегину, $f(x) \cap$ при $x \in (-1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3})$, $f(x) \cup$ при $x \in (-\infty, -1/\sqrt{3}) \cup (1/\sqrt{3}, +\infty)$; б) $x = 0$ – точка перегину, $f(x) \cap$ при $x \in (-2, 0) \cup (2, +\infty)$, $f(x) \cup$ при $x \in (-\infty, -2) \cup (0, 2)$; в) $x_{1,2} = \pm 1/\sqrt{2}$ – точки перегину, $f(x) \cap$ при $x \in (-1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2})$, $f(x) \cup$ при $x \in (-\infty, -1/\sqrt{2}) \cup (1/\sqrt{2}, +\infty)$ г) $x_1 = -2$, $x_2 = 4$ – точки перегину, $f(x) \cap$ при $x \in (-2, 4)$, $f(x) \cup$ при $x \in (-\infty, -2) \cup (4, +\infty)$; д) $x = \frac{\pi}{2} \pm \pi k$, $k \in \mathbf{Z}$ – точки перегину, $f(x) \cap$ при $x \in \left(-\frac{\pi}{2} + 2\pi k, \frac{\pi}{2} + 2\pi k\right)$, $k \in \mathbf{Z}$, $f(x) \cup$ при $x \in \left(\frac{\pi}{2} + 2\pi k, \frac{3\pi}{2} + 2\pi k\right)$, $k \in \mathbf{Z}$; е) точок перегину немає, $f(x) \cup \forall x \in (-\infty, +\infty)$; є) $x = -2$ – точка перегину, $f(x) \cap$ при $x \in (-2, +\infty)$, $f(x) \cup$ при $x \in (-\infty, -2)$; ж) $x_{1,2} = \pm 2$ – точки перегину, $f(x) \cap$ при $x \in (-\infty, -2) \cup (2, +\infty)$, $f(x) \cup$ при $x \in (-2, 2)$.

27. $b^2 \geq \frac{8}{3}a^2$.

28. 1) $|a| \leq 2$; 2) $a \leq -0,25$.

29. 1) $x = 1$, $y = x$; 2) $x = 3$, $x = -3$, $y = 1$; 3) $y = 0$ при $x \rightarrow -\infty$; 4) $x = -2$, $y = 3$; 5) $x = 0$, $y = 1$; 6) $x = 1$, $x = -6$, $y = 0$; 7) $y = x$ при $x \rightarrow -\infty$, $y = x + \pi$ при $x \rightarrow +\infty$; 8) $x = 0$, $y = 2x + 5$; 9) $x = 2$, $y = x + 1$ при $x \rightarrow +\infty$, $y = -x - 1$ при $x \rightarrow -\infty$; 10) $y = \pm 2$; 11) $x = -1$, $x = 2$, $y = 2$; 12) $x = 0$.

30. 1) $D(y) = \mathbf{R}$; загального виду; $(1, 0)$, $(-5, 0)$, $(0, 5/4)$ – точки перетину з осями Ox і Oy ; $y_{\max} = y(-3) = 8$, $y_{\min} = y(1) = 0$, $y(x) \uparrow$ при $x \in (-\infty, -3) \cup (1, +\infty)$, $y(x) \downarrow$ при $x \in (-3, 1)$; $(-1, 4)$ – перегин, $y \cap$ при $x \in (-\infty, -1)$, $y \cup$ при $x \in (-1, +\infty)$; асимптот немає;

2) $D(y) = \mathbf{R} \setminus \{1\}$; загального виду; $(0,0)$ – точка перетину з осями Ox і Oy ; $y_{\max} = y(0) = 0$, $y_{\min} = y(2) = 2$, $y(x) \uparrow$ при $x \in (-\infty, 0) \cup (2, +\infty)$, $y(x) \downarrow$ при $x \in (0, 1) \cup (1, 2)$; перегинів немає, $y \cap$ при $x \in (-\infty, 1)$, $y \cup$ при $x \in (1, +\infty)$; $x = 1$, $y = \frac{x+1}{2}$ – асимптоти;

3) $D(y) = \mathbf{R}$; непарна; $(0,0)$ – точка перетину з осями Ox і Oy ; екстремумів немає, $y(x) \uparrow$ при $x \in (-\infty, +\infty)$; $(0,0)$, $(-\sqrt{3}, -3\sqrt{3}/4)$, $(\sqrt{3}, 3\sqrt{3}/4)$ – перегини, $y \cap$ при $x \in (-\sqrt{3}, 0) \cup (\sqrt{3}, +\infty)$, $y \cup$ при $x \in (-\infty, -\sqrt{3}) \cup (0, \sqrt{3})$; $y = x$ – асимптота;

4) $D(y) = \mathbf{R} \setminus \{-2, 2\}$; непарна; $(0,0)$ – точка перетину з осями Ox і Oy ; екстремумів немає, $y(x) \downarrow \forall x \in (-\infty, +\infty)$; $(0,0)$ – перегин, $y \cap$ при $x \in (-\infty, -2) \cup (0, 2)$, $y \cup$ при $x \in (-2, 0) \cup (2, +\infty)$; $x = 2$, $x = -2$, $y = 0$ – асимптоти;

5) $D(y) = (-\infty, -2) \cup (0, +\infty)$; загального виду; $(0, 41, 0)$ і $(-2, 41, 0)$ – точки перетину з віссю Ox ; екстремумів немає, $y(x) \downarrow$ при $x \in (-\infty, -2)$, $y(x) \uparrow$ при $x \in (0, +\infty)$; перегинів немає, $y \cap \forall x \in D(y)$; $x = -2$, $x = 0$ – асимптоти;

6) $D(y) = (-1, +\infty)$; загального виду; $(0,0)$ – точка перетину з осями Ox і Oy ; $y_{\min} = y(0) = 0$, $y(x) \downarrow$ при $x \in (-1, 0)$, $y(x) \uparrow$ при $x \in (0, +\infty)$; перегинів немає, $y \cup \forall x \in D(y)$; асимптот немає;

7) $D(y) = \mathbf{R} \setminus \{0\}$; загального виду; $(-\sqrt[3]{4}, 0)$ – точка перетину з віссю Ox ; $y_{\min} = y(2) = 3$, $y(x) \uparrow$ при $x \in (-\infty, 0) \cup (2, +\infty)$, $y(x) \downarrow$ при $x \in (0, 2)$; перегинів немає, $y \cup \forall x \in D(y)$; $x = 0$, $y = x$ – асимптоти;

8) $D(y) = \mathbf{R}$; загального виду; $(0,0)$ і $(2,0)$ – точки перетину з осями Ox і Oy ; $y_{\max} = y(0) = 0$, $y_{\min} = y(4/3) \approx -1,1$, $y(x) \uparrow$ при $x \in (-\infty, 0) \cup (4/3, +\infty)$, $y(x) \downarrow$ при $x \in (0, 4/3)$; $(2,0)$ – перегин, $y \cup$ при $x \in (-\infty, 2)$, $y \cap$ при $x \in (2, +\infty)$; $y = x - 2/3$ – асимптота;

9) $D(y) = \mathbf{R} \setminus \{0\}$; парна; екстремумів немає, $y(x) \uparrow$ при $x \in (-\infty, 0)$, $y(x) \downarrow$ при $x \in (0, +\infty)$; перегинів немає, $y \cup \forall x \in D(y)$; $x=0$, $y=0$ – асимптоти;

10) $D(y) = \mathbf{R}$; загального виду; $(0, -2)$ і $(2, 0)$ – точки перетину з осями Oy і Ox ; $y_{\min} = y(1) = -e$, $y(x) \downarrow$ при $x \in (-\infty, 1)$, $y(x) \uparrow$ при $x \in (1, +\infty)$; $(0, -2)$ – перегин, $y \cap$ при $x \in (-\infty, 0)$. $y \cup$ при $x \in (0, +\infty)$; $y = 0$ – асимптота при $x \rightarrow -\infty$;

11) $D(y) = \mathbf{R}$; парна; $(0, 0)$ – точка перетину з осями Ox і Oy ; $y_{\min} = y(0) = 0$, $y(x) \downarrow$ при $x \in (-\infty, 0)$, $y(x) \uparrow$ при $x \in (0, +\infty)$; $(-1/\sqrt[4]{3}, \pi/6)$, $(1/\sqrt[4]{3}, \pi/6)$ – перегини, $y \cap$ при $x \in (-\infty, -1/\sqrt[4]{3}) \cup \cup (1/\sqrt[4]{3}, +\infty)$, $y \cup$ при $x \in (-1/\sqrt[4]{3}, 1/\sqrt[4]{3})$; $y = \pi/2$ – асимптота;

12) $D(y) = (-\infty, -1/4) \cup (1/4, +\infty)$; непарна; екстремумів немає, $y(x) \downarrow \forall x \in D(y)$; перегинів немає, $y \cap$ при $x \in (-\infty, -1/4)$, $y \cup$ при $x \in (1/4, +\infty)$; $y = 0$ – асимптота.

31. 24 і 24.

32. 15 і 15.

33. 10,5, 14, 12.

34. $a = 3\sqrt[3]{\frac{2V}{9}}$.

35. 6, 12, 4.

36. $H = 2R$.

37. (4, 4).

38. (2, 2) і (-2, -2).

39. 4, 8.

40. $2x + y - 12 = 0$.

41. $(-\sqrt{5}, 1)$, $(\sqrt{5}, 1)$.

Ключові терміни

Теорема про середнє значення, формула скінченних приростів, критерій сталості функції, критерій сталості різниці функцій, теорема Ролля, теорема Коші, правило Лопіталя, формула Тейлора (для многочлена і для довільної функції), многочлен за степенями змінної x , многочлен за степенями різниці $(x - x_0)$, залишковий член в Лагранжовій формі, зростаюча (спадна) функція, монотонність, екстремуми, необхідна ознака монотонності, достатня ознака монотонності, критичні точки, стаціонарні точки, точка максимуму (мінімуму), точка екстремуму, екстремум, достатні умови існування екстремуму, опуклість (угнутість), необхідна і достатня умова опуклості (угнутості), точки перегину, перегин, необхідна і достатня умови перегину, асимптота кривої $y = f(x)$, графік функції.

Резюме

Темою охоплені основні теореми диференціального числення функції однієї змінної: Лагранжа, Ролля, Коші. Отримані формули Тейлора (для многочлена і довільної функції). Розглядається їх застосування до: розкриття невизначеностей при обчисленні границь функцій (правило Лопіталя); дослідження функцій засобами диференціального числення.

Установлено необхідні і достатні умови: монотонності і екстремуму функції; опуклості (угнутості) і перегину функції. Означене загальне поняття асимптоти кривої, наведені рівняння вертикальних, похилих і горизонтальних асимптот. Наводиться загальний порядок дослідження функції засобами диференціального числення і демонстраційний приклад побудови графіка.

Література: [1; 3; 4; 19; 22; 27; 28].

Використана література

1. Берман Г. Н. Сборник задач по курсу математического анализа / Г. Н. Берман. – М. : Наука, 2002. – 384 с.
2. Бузько Я. П. Вища математика. Ч. 1 / Я. П. Бузько, В. Ф. Сенчуков, В. Г. Титарев. – Х. : ХДЕУ, 1996. – 136 с.
3. Вища математика. Збірник задач : навч. посібн. / В. П. Дубовик, І. І. Юрик, І. П. Вовкодав та ін. ; за ред. В. П. Дубовика, І. І. Юрика. – К. : Вид. А.С.К., 2003. – 480 с.
4. Вища математика: основні означення, приклади і задачі : навч. посібн. Кн. 2 / І. П. Васильченко, В. Я. Данилов, А. І. Лобанов та ін. – К. : Либідь, 1994. – 480 с.
5. Высшая математика для экономистов / под ред. проф. Н. Ш. Кремера. – М. : Банки и биржи, ЮНИТИ, 1997. – 440 с.
6. Головина Л. И. Линейная алгебра и некоторые ее приложения / Л. И. Головина. – М. : Наука, 1971. – 288 с.
7. Гутер Р. С. Элементы численного анализа и математической обработки результатов опыта / Р. С. Гутер, В. В. Овчинский. – М. : Наука, 1970. – 432 с.
8. Давыдов А. Г. Сигналы и линейные системы: тематические лекции / А. Г. Давыдов. – Екатеринбург : УГГУ, ИГиГ. Фонд электронных документов, 2005. – 262 с.
9. Дороговцев А. Я. Математичний аналіз : підручник : у 2-х ч. : Ч. 1 / А. Я. Дороговцев. – К. : Либідь, 1993. – 320 с.
10. Игнатьева А. В. Курс высшей математики / А. В. Игнатьева, Т. И. Краснощекова, В. Ф. Смирнов. – М. : Высшая школа, 1968. – 692 с.
11. Информационные системы и технологии в экономике: учебник / Т. П. Барановская, В. И. Лойко, М. И. Семенов и др. ; под. ред. В. И. Лойко. – М. : Финансы и статистика, 2006. – 416 с.
12. Клетеник Д. В. Сборник задач по аналитической геометрии / Д. В. Клетеник. – М. : Наука, 1986. – 324 с.
13. Корн Г. Справочник по математике для научных работников и инженеров ; пер. с англ. ; / Г. Корн, Т. Корн ; под ред. И. Г. Арамановича. – М. : Наука, 1970. – 720 с.
14. Кудрявцев В. А. Краткий курс высшей математики / В. А. Кудрявцев, В. П. Демидович. – М. : Наука, 1978. – 656 с.

15. Кудрявцев Л. Д. Современная математика и ее преподавание / Л. Д. Кудрявцев. – М. : Наука, 1985. – 176 с.
16. Курош А. Г. Курс высшей алгебры / А. Г. Курош. – М. : Наука, 1968. – 432 с.
17. Математика для економістів : збірник вправ / укл. Л. М. Афанасьєва, Г. К. Снурнікова, Л. Д. Широкоград. – Х. : ХДЕУ, 2001. – 60 с.
18. Основы лінійної алгебри та аналітичної геометрії : конспект лекцій з курсу „Вища математика” / упоряд. Л. М. Афанасьєва, Я. П. Бузько. – Х. : РВВ ХДУ, 1994. – 92 с.
19. Пискунов Н. С. Дифференциальное и интегральное исчисления. Т. 1, 2 / Н. С. Пискунов. – М. : Наука, 1972. – Т. 1. – 456 с. ; Т. 2. – 576 с.
20. Робоча програма навчальної дисципліни „Вища математика” для студентів напряму підготовки „Комп’ютерні науки” всіх форм навчання / укл. В. Ф. Сенчуков, Т. В. Денисова. – Х. : Вид. ХНЕУ, 2011. – 60 с.
21. Роджерс Д. Математические основы машинной графики / Д. Роджерс, Дж. Адамс. – М. : Мир, 2001. – 604 с.
22. Сборник задач по высшей математике. 1 курс / К. Н. Лунгу, Д. Т. Письменный, С. Н. Федин и др. – М. : Айрис- пресс, 2004. – 576 с.
23. Теоретические основы электротехники: теория электрических цепей и электромагнитного поля : учебн. пособ. для студ. высш. учебн. заведений / под ред. С. А. Башарина, В. В. Федорова. – М. : Издательский центр „Академия”, 2004. – 304 с.
24. Титарев В. Г. Лінійна алгебра (розділ „Квадратичні форми. Криві та поверхні другого порядку”) : конспект лекцій для студентів спеціальності 7.050102 денної форми навчання / В. Г. Титарев, О. Д. Анохіна. – Х. : Вид. ХНЕУ, 2005. – 64 с.
25. Травкін Ю. І. Математика для економістів : підручник / Ю. І. Травкін, Л. М. Малярець. – Х. : ВД „ІНЖЕК”, 2005. – 816 с.
26. Травкін Ю. І. Основы лінійної алгебри і її застосування : навч. посібн. / Ю. І. Травкін. – Х. : Харк. аграр. ун-т ім. В. В. Докучаєва, 1994. – 178 с.
27. Фихтенгольц Г. М. Курс дифференциального и интегрального исчисления. Т. 1 / Г. М. Фихтенгольц – Л. : Физматгиз, 1962. – 608 с.
28. Шкіль М. І. Математичний аналіз. Ч. 1 / М. І. Шкіль. – К. : Вища шк., 1994. – 424 с.
29. Яглом И. М. Комплексные числа / И. М. Яглом. – М. : Физматгиз, 1963. – 192 с.

Показчик позначень

$A=(a_{ij})_{m \times n}=[a_{ij}]_{m \times n}$ – прямокутна матриця A розміру $m \times n$, 6

\forall – квантор загальності (для всіх ...), 7

\Leftrightarrow – знак еквівалентності за означенням, 7

\Rightarrow – логічний наслідок (якщо ..., то ...), 8

A^T – транспонована відносно A матриця, 8

E – одинична матриця, 10

\exists – квантор існування (існує ...), $\bar{\exists}$ – не існує, 10

\wedge – кон'юнкція (... і ...), 10

\sim – знак еквівалентності, 15

$\Delta_A = \Delta = \det A$ – визначник матриці A , 16

$M_{ij} (A_{ij})$ – міnor (алгебраїчне доповнення) елемента a_{ij} , 18

$\sum_{j=1}^n a_{ij}x_j=b_i \ i=\overline{1, n(m)}$ – система n (m) лінійних алгебраїчних рівнянь з n невідомими, 28 (44)

\bar{A} – розширена матриця системи рівнянь, 29

\Leftrightarrow – еквівалентність (якщо і тільки якщо), 29

$S_1 \sim S_2$ – еквівалентні системи рівнянь S_1 і S_2 , 29

Δ_j – визначник, відповідний невідомому x_j , 30

$A^* (A^{-1})$ – приєднана (обернена) до A матриця, 33 (34)

$X = [x_1 \ x_2 \dots x_n]^T$ – матриця-стовпець невідомих СЛАР $m \times n$, 35

$B = [b_1 \ b_2 \dots b_m]^T$ – матриця-стовпець вільних членів СЛАР $m \times n$, 35

$M^{(k)}$ – міnor k -го порядку матриці, 41

$\text{rng } A = r_A (r)$ – ранг матриці A (системи рівнянь), 41 (45)

\mathbf{R} – множина дійсних чисел, 54

X_Φ – фундаментальна система розв'язків однорідної системи, 54

$a, \vec{a}, \bar{a}, \overline{AB}$ – вектор, 67

$|\bar{a}|, a, |\overline{AB}|, AB$ – довжина (модуль) вектора, 68

$\bar{0} (\bar{e})$ – нульовий (одиничний) вектор, 68

- $\bar{a} \parallel \bar{b} \ (\bar{a} \perp \bar{b})$ – колінеарні (ортогональні) вектори, 68 (78)
 $вел \ \bar{a}$ – величина вектора \bar{a} , 71
 $\mathbf{R}^1, \mathbf{R}^2, \mathbf{R}^3$ – одно-, дво-, тривимірні простори, 70
 $пр_{Ox} \bar{a}$ – проекція вектора \bar{a} на вісь Ox , 72
 $\bar{a} \uparrow \uparrow l \ (\bar{a} \downarrow \uparrow l)$ – напрям вектора \bar{a} співпадає (протилежний) на-
 пряму осі l , 73
 $\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}$ – координатні орти, 73
 a_x, a_y, a_z – координати (компоненти) вектора \bar{a} в \mathbf{R}^3 , 73
 $\bar{a} \cdot \bar{b}, \bar{a} \bar{b}, (\bar{a}, \bar{b})$ – скалярний добуток векторів \bar{a} і \bar{b} , 75
 (\bar{a}, \bar{b}) – кут між векторами \bar{a} і \bar{b} , 75
 \vee – диз'юнкція (... або ...), 76
 $\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma$ – напрямні косинуси вектора, 78
 $\bar{a} \times \bar{b}, [\bar{a}, \bar{b}]$ – векторний добуток векторів \bar{a} і \bar{b} , 79
 $(\bar{a} \times \bar{b}) \cdot \bar{c}, (\bar{a}, \bar{b}, \bar{c})$ – мішаний добуток векторів $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$, 82
 $\mathbf{u}(t), \mathbf{v}(t)$ – сигнальні функції, 90
 $\in (\notin)$ – знак належності (неналежності), 98 (251)
 $\bar{s} = (m, n, p)$ – напрямний вектор прямої, 99
 k – кутовий коефіцієнт прямої, 101
 e – ексцентриситет кривої другого порядку, 120
 $\bar{N} = (A, B, C)$ – нормальний вектор площини, 139
 $l_1 \parallel l_2$ – збіг прямих l_1 і l_2 , 155
 $\subset (\supset)$ – знак строгого включення, 164 (141)
 C_n^i – біноміальні коефіцієнти, 167
 $A = (a_1, a_2, \dots, a_m)^T$ – m -вимірний вектор, 186
 \mathbf{R}^m – m -вимірний векторний (лінійний) простір, 188
 $\{A_j\}_1^n$ – система векторів, 189
 \mathcal{A} – лінійне перетворення (лінійний оператор), 198
 $X (\mathcal{A}X)$ – прообраз вектора $\mathcal{A}X$ (образ вектора X), 198
 $\mathcal{E}X (\mathcal{O}X)$ – тотожне перетворення (нульовий оператор), 198

- \mathcal{A}^{-1} – обернене лінійне перетворення, 200
 $A (A')$ – матриця оператора \mathcal{A} у певному (у новому) базисі, 204
 P – матриця переходу до нового базису, 204
 λ – власне число, відповідне вектору X , 209
 $\det(A - \lambda E) = 0$ – характеристичне рівняння матриці A , 211
 $i = \sqrt{-1}$ – уявна одиниця, 230
 z, \bar{z} – комплексне число (к/ч), спряжене к/ч, 230, 231
 $\operatorname{Re} z, \operatorname{Im} z$ – дійсна, уявна частина к/ч, 230
 $\mathbb{C} (\bar{\mathbb{C}})$ – множина (розширена множина) к/ч, 231 (242)
 $|z|, \rho$ – модуль к/ч, 231
 $\operatorname{Arg} z (\arg z)$ – аргумент (головне значення аргументу) к/ч, 231 (232)
 \mathbb{C} – комплексна площина, 232
 $w = f(z)$ – функція комплексної змінної, 242
 \emptyset – порожня множина, 251
 $\{x | P(x)\}$ – множина елементів x із властивістю $P(x)$, 251
 $\mathbb{N} (\mathbb{Z})$ – множина натуральних (цілих) чисел, 251 (253)
 $:$ – „таке (такі), що”, „маємо”, 251
 I – універсальна множина, 252
 \leftrightarrow – символ бієкції, 252
 $\mathbb{Q} (\bar{\mathbb{Q}})$ – множина раціональних (ірраціональних) чисел, 253
 $-\infty, +\infty$ – невластиві числа, 254
 $\langle a; b \rangle$ – проміжок, 254
 $B(a, \varepsilon)$ – ε -окіл точки a , 254
 $\cup (\cap)$ – об'єднання (перетин) множин, 255 (256)
 $\setminus (\Delta)$ – різниця (симетрична різниця) множин, 257
 \bar{A} – доповнення множини A , 257
 $D(y), D(f)$ – область існування функції $y = f(x)$, 260
 $E(y), E(f)$ – область значень функції $y = f(x)$, 260
 $f(x) \uparrow (f(x) \downarrow)$ – зростаюча (спадна) функція, 269

- $f(x) \searrow (f(x) \nearrow)$ – незростаюча (неспадаюча) функція, 269
- $\exists!$ – „існує і єдине”, 272
- $y = f^{-1}(x)$ – обернена до $f(x)$ функція, 272
- $\{x_n\}$ – числова послідовність (ч/п), 286
- – „при змінюванні стає і залишається”, 288
- $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ – границя ч/п, 296
- $\{x_n\} \rightrightarrows (\{x_n\} \leftrightsquigarrow)$ – збіжна (розбіжна) ч/п, 297
- $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ – границя функції $f(x)$ у точці x_0 , 308
- $\lim_{x \rightarrow x_0 \mp 0} f(x) = f(x_0 \mp 0)$ – односторонні границі функції $f(x)$ у точці x_0 , 311
- $\alpha = O(\beta)$ – нескінченно малі (н/м) α , β одного порядку, 321
- $\alpha \sim \beta$ – еквівалентні н/м α і β , 321
- $\alpha = o(\beta)$ – α – н/м більш високого порядку, ніж β , 322
- Δx ($\Delta f(x)$) – приріст аргументу (функції) в точці, 333
- $C(x_0)$ ($C(\langle a, b \rangle)$) – множина функцій, неперервних у точці x_0 (на проміжку $\langle a, b \rangle$), 333 (342)
- $f'(x)$, y' , $\frac{dy}{dx}$, $\frac{df(x)}{dx}$ – похідна функції $y = f(x)$ за змінною x , 349
- $\Big|_{x=x_0}$ – знак одиничної підстановки („у точці x_0 ”), 349
- $f'_+(x)$, $f'_-(x)$ – право-, лівостороння похідні функції $f(x)$, 351
- $y^{(n)}$, $f^{(n)}(x)$, $\frac{d^n y}{dx^n}$ – похідна функції $y = f(x)$ n -го порядку ($n \in \mathbf{N}$), 364
- dy , $df(x)$ – диференціал функції $y = f(x)$ у точці x , 369
- $d^n y$, $d^n f(x)$ ($n \in \mathbf{N}$) – диференціал функції $y = f(x)$ n -го порядку, 371
- $E_x(y)$ – еластичність функції $y = f(x)$ за змінною x , 374
- x_{\max} (x_{\min}) – точка максимуму (мінімуму) функції, 402
- f_{\max} (f_{\min}) – максимум (мінімум) функції $y = f(x)$, 402
- $f(x) \cap (f(x) \cup)$ – опукла (угнута) функція $f(x)$, 406

Предметний покажчик

- Алгебраїчне доповнення** 18
Апроксимація функцій 262
Аргумент комплексного числа 231
— — —, головне значення 232
Асимптоти гіперболи 124
— графіка функції 410
- Базис** 74, 194
— одиничний 195
— ортогональний 195
— ортонормований 195
Базисний мінор 41
Балансова модель виробництва 39
Бієкція 252
- Вектор** 67
— m -вимірний 186
— — пропорційний 187
— нульовий 68, 187
— одиничний 68, 188
Вектори колінеарні 68, 208
— компланарні 68
—, лінійні операції 70
—, нелінійні операції 75
Векторний добуток векторів 78
— — —, властивості 79
Векторний (лінійний) простір 188
Величина вектора 71, 88
— змінна (стала) 258
— нескінченно велика 291, 310
— — —, властивості 292
— нескінченно мала 288, 310
— — —, властивості 289
Визначник матриці 16, 137
— системи 30
— —, відповідний невідомому 30
Відстань точки до прямої 111, 162
— — — площини 144
Власне число (значення) 209
Власний вектор 209
Властивості визначників 19
- Геометричне тіло** 96
— місце точок 97
Гіпербола 122
— спряжена 125
— рівнобічна 125
Границя числової послідовності 296
— — —, властивості 298
— функції 308
— —, властивості 313
— —, критерій існування 310, 312
- Директриса параболи** 125
Диференціал функції 369
— — вищого порядку 371
— —, властивості 370
— —, геометричний зміст 370
— —, застосування 374
Диференціювання функцій 349
— — логарифмічне 362
Діагональ матриці 9
Дії над матрицями 12
Добуток векторів векторний 78
— — мішаний 82
— — скалярний 75, 90, 188
Довжина вектора 68, 188
Доповнення множини 257
Дослідження функцій на монотонність і екстремуми 398
— — — неперервність 339
— — — опуклість (угнутість) 406
— — — перегини 408
Дотична до кривої 352
Друга чудова границя 301, 319
- Еквівалентні матриці** 15
— системи рівнянь 29
Екстраполяція функцій 262
Екстремуми функції 402
Ексцентриситет 121, 122, 125, 128
Еластичність функції 374

Елементарні перетворення 15, 29
– функції 262, 337
– – основні 262

Елементи матриці 6
– – відповідні 8
– – діагональні 9, 25

Еліпс 120

Задача міжгалузевого балансу 38

Змінна дискретна 259

– комплексна 242
– неперервна 259

Ізольована точка 255

Інтерполяція функцій 261

Інтерпретація похідної 353

Комплексна площа 232

– – розширена 242

Координати вектора 70, 186

– середини відрізка 89
– точки 71
– – перетину медіан трикутника 89
– – поточні 98, 135

Крива Без'є 166

– другого порядку 118
– – –, загальне рівняння 118
– – – нецентральна 128
– – – уявна 118

Критерій еквівалентності систем рівнянь 29

– колінеарності векторів 78, 79
– компланарності векторів 83, 85
– неперервності функції в точці 334
– ортогональності векторів 78
– сумісності системи рівнянь 44

Критична точка функції 401, 408

Круги Ейлера 255

Кут між площинами 143

– – прямими 106, 159
– – прямою і площиною 165
Кутовий коефіцієнт 101

Лінійна алгебра 189

– комбінація векторів 190
– модель обміну 215
Лінійний оператор 198
– –, властивості 199
– – вироджений (невироджений) 203

Матриця блокова 10

– діагональна 10, 34, 51
– квадратна 9
– – неособлива (особлива) 33
– – приєднана (союзна) 33
– квазідіагональна 10
– лінійного перетворення 202
– нульова 7
– обернена 34
– одинична 10, 35, 51
– переходу 204
– протилежна 12
– прямокутна 5
– -рядок (-стовпець) 9
– системи основна 29, 35, 44
– – розширена 29, 44
– транспонована 8
– трикутна 9

Матричне рівняння 36

Метод Гаусса 50

– Жордана – Гаусса 51
– елементарних перетворень 42
– обведення 42
– оберненої матриці 36

Міnor елемента 18

– матриці 41
– – базисний 41

Мішаний добуток векторів 82

– – –, властивості 83

Многочлен 266

Множина 250

– дискретна (неперервна) 253
– зліченна (незліченна) 253
– комплексних чисел 231
– порожня 251

– скінченна (нескінченна) 252
– універсальна 252
– числова 253
Модель Леонтьєва 40
Модуль комплексного числа 231

Найбільше (найменше) значення
функції на відрізку 405
Напрямний вектор прямої 99, 148
Напрямні косинуси вектора 78, 99
Нормаль до кривої 353
Нормальний вектор 103, 139
Нормувальний множник 110, 144
Нульовий оператор 198

Об'єднання множин 255
Образ вектора 198
Однорідна система рівнянь 28, 52
Односторонні границі функції 311
Окіл 254, 288, 291
Операції над векторами лінійні 70,
187
– – – нелінійні 75
– – комплексними числами 234
– – лінійними операторами 204
– – множинами 255
– – матрицями 12
– – – , властивості 13
Орт 72, 80

Парабола 125
Параметр 98, 258, 268
– параболі 126
Перегин графіка функції 408
Переставлення векторів 84
– із n чисел 17
Перетворення координат 128
– лінійне 198
– – тотожне 199
– – обернене 200
Перетин множин 256
Перехресні прямі 157
– – , відстань 162

Період функції 271
Перша чудова границя 317
Підматриця 8
Підмножина 251
Поділ відрізка внутрішній 87
– – зовнішній 87
Порівняння нескінченно малих 321
Похідна функції 349
– – вищого порядку 364
– – нескінченна 351
– – одностороння 351
– – , інтерпретація 353
Правила диференціювання 356
Правило Крамера 31
– прямокутника 25, 38
– трикутника (Саррюса) 17
– Лопіталя 391
Приріст аргументу 333
– функції 333
Проміжок 254
Прообраз вектора 198

Ранг матриці 41
– системи 45
Рівняння бісекторних площин 145
– еліпса 120
– жмутка площин 139
– – прямих 101
– кола 98
– лінії 97
– площини 136
– поверхні 135
– прямої на площині 99
– – у просторі 148
– сфери 135
Різниця множин 257
Розв'язок системи рівнянь 28
– – – базисний 47
– – – загальний 47, 53
– – – тривіальний 29, 53
– – – частинний 47
Розклад вектора за базисом 74, 195

- Сигнал** 273, 323
Сигнальні функції 90, 273
Система векторів 189
 – – лінійно залежна (незалежна) 190
 – лінійних алгебраїчних рівнянь 28
 – – – – визначена (невизначена) 29
 – – – – зведена 55
 – – – – квадратна 44, 203
 – – – – неоднорідна 28
 – – – – несумісна (сумісна) 29
 – – – – однорідна 28, 52, 192
 – – – – прямокутна 44
 – розв'язків фундаментальна 54
Січна 352
Скалярний добуток векторів 75, 188
 – – – , властивості 76
Слід матриці 214
Спектр матриці 212
 – сигналу 374
Сфера Рімана 241
- Таблиця основних похідних** 356
Теорема Коші 390
 – Кронекера – Капеллі 44
 – Лагранжа 387
 – Лапласа 21
 – Ролля 390
Точка розриву 338
 – максимуму (мінімуму) 402
 – перегину 408
Транспонування матриці 8
- Умови взаємного розташування площин у просторі** 142
 – – – прямих на площині 106
 – – – прямих у просторі 155
 – – – прямої і площини 163
Уявна одиниця 230
- Формула Ейлера** 233
 – Муавра 238
 – простих відсотків 115
 – складених відсотків 307
 – скінченних приростів 389
 – Тейлора 395
Формули розкладу визначника 22
Функція 260
 – алгебраїчна 267
 – багатозначна 260
 – диференційовна 349
 – дробово-раціональна 267
 – загального виду 271
 – зростаюча (спадна) 269
 – ірраціональна 267
 – комплексної змінної 242
 – монотонна 269, 398
 – неперервна в точці 334
 – – на проміжку 341
 – нескінченно велика 310
 – нескінченно мала 310
 – , область визначення 260
 – , область значень 260
 – обмежена (необмежена) 270
 – обернена 272
 – оборотна 272
 – опукла (угнута) 406
 – парна (непарна) 270
 – періодична 271
 – складена 266
 – , способи завдання 260
 – трансцендентна 267
 – часова 273
- Характеристичне рівняння матриці** 211
- Число комплексне** 230
 – – , форми завдання 233
 – невластиве 242, 254, 292
 – спряжене 231
 – уявне 229
Числова послідовність 285
 – – , арифметичні операції 286
 – – , границя 296
 – – збіжна 286
 – – – , властивості 298
 – – , критерій збіжності 297

Зміст

Вступ	3
Розділ 1. Лінійна і векторна алгебри та аналітична геометрія ..	5
1. Лінійна алгебра	5
1.1. Числові матриці	5
1.2. Визначники квадратних матриць	16
1.3. Системи n лінійних алгебраїчних рівнянь з n невідомими (СЛАР $n \times n$) та їх розв'язання	28
1.4. Системи m лінійних алгебраїчних рівнянь з n невідомими (СЛАР $m \times n$): дослідження на сумісність та розв'язання ..	40
Запитання для самодіагностики засвоєння матеріалу	57
Задачі та вправи	59
Відповіді	64
Ключові терміни	66
Резюме	66
Література	66
2. Векторна алгебра	67
2.1. Вектори: основні означення, лінійні операції	67
2.2. Нелінійні операції над векторами	75
2.3. Найпростіші застосування векторів у задачах геометрії	85
Запитання для самодіагностики засвоєння матеріалу	91
Задачі та вправи	92
Відповіді	95
Ключові терміни	95
Резюме	95
Література	95
3. Аналітична геометрія на площині та в просторі	96
3.1. Пряма на площині (в \mathbf{R}^2)	96
3.2. Криві другого порядку (К2П)	118
3.3. Площина у просторі (в \mathbf{R}^3)	135
3.4. Пряма у просторі (в \mathbf{R}^3). Пряма і площина в \mathbf{R}^3	148
Запитання для самодіагностики засвоєння матеріалу	168
Задачі та вправи	172
Відповіді	180

Ключові терміни	184
Резюме	184
Література	184
4. Лінійні простори та лінійні оператори	185
4.1. Лінійні m -вимірні простори (\mathbf{R}^m): означення основних понять	185
4.2. Лінійна залежність і незалежність системи векторів	190
4.3. Базис \mathbf{R}^m . Розклад вектора за базисом	194
4.4. Лінійні перетворення (лінійні оператори)	198
4.5. Власні вектори і власні числа квадратних матриць	208
Запитання для самодіагностики засвоєння матеріалу	218
Задачі та вправи	220
Відповіді	226
Ключові терміни	228
Резюме	228
Література	228
Розділ 2. Диференціальне числення функції однієї змінної	229
5. Комплексні числа (к/ч)	229
5.1. Означення, геометричне зображення та форми завдання к/ч	229
5.2. Операції над к/ч для різних форм завдання	234
5.3. Сфера Рімана. Поняття розширеної комплексної площини	241
Запитання для самодіагностики засвоєння матеріалу	243
Задачі та вправи	244
Відповіді	247
Ключові терміни	249
Резюме	249
Література	249
6. Елементарні функції	250
6.1. Множини: основні відомості, операції над множинами	250
6.2. Числові функції: основні означення, способи завдання	258
6.3. Основні елементарні функції й їхні графіки	262
6.4. Елементарні функції: означення, класифікація	266
6.5. Задача установлення області визначення функції	275
Запитання для самодіагностики засвоєння матеріалу	277
Задачі та вправи	279

Відповіді	282
Ключові терміни	284
Резюме	284
Література	284
7. Границя функції, нескінченно малі й великі функції	285
7.1. Границя функції натурального аргументу	285
7.2. Практичні рекомендації щодо відшукування границь	301
7.3. Границя функції неперервного аргументу	308
7.4. Порівняння n/m , застосування еквівалентних n/m до обчислення границь	321
Запитання для самодіагностики засвоєння матеріалу	324
Задачі та вправи	325
Відповіді	330
Ключові терміни	331
Резюме	331
Література	331
8. Неперервність і розриви функцій	332
8.1. Означення неперервності функції в точці, неперервність основних елементарних функцій	332
8.2. Критерії неперервності та властивості функцій, неперервних у точці	334
8.3. Розриви функцій та їх класифікація, дослідження функцій на неперервність	338
8.4. Неперервність функції на проміжку: означення, основні теореми про неперервні функції	341
Запитання для самодіагностики засвоєння матеріалу	344
Задачі та вправи	345
Відповіді	346
Ключові терміни	347
Резюме	347
Література	347
9. Похідна та диференціал функції	348
9.1. Похідна та її властивості	348
9.2. Диференціювання складених функцій та функцій різної форми завдання	357
9.3. Похідні вищих порядків	364
9.4. Диференціали функції	368

Запитання для самодіагностики засвоєння матеріалу	375
Задачі та вправи	377
Відповіді	382
Ключові терміни	386
Резюме	386
Література	386
10. Дослідження функцій, побудова графіків	387
10.1. Теорема Лагранжа та наслідки з неї	387
10.2. Правило Лопітала розкриття невизначеностей	391
10.3. Формула Тейлора (для многочлена та довільної функції)	394
10.4. Дослідження функцій на монотонність і екстремуми	398
10.5. Дослідження функцій на опуклість і перегини	406
10.6. Асимптоти графіка функції. Порядок побудови графіків ...	410
Запитання для самодіагностики засвоєння матеріалу	415
Задачі та вправи	417
Відповіді	424
Ключові терміни	429
Резюме	429
Література	429
Використана література	430
Показчик позначень	432
Предметний показчик	436

НАВЧАЛЬНЕ ВИДАННЯ

ВИЩА МАТЕМАТИКА. ЗАГАЛЬНІ РОЗДІЛИ

Частина перша

**Навчальний посібник для студентів напряму підготовки
6.050101 „Комп’ютерні науки”**

Автори: **Сенчуков Віктор Федорович**
Денисова Тетяна Володимирівна

Відповідальний за випуск **Малярець Л. М.**
Відповідальний редактор **Сєдова Л. М.**

Редактор **Семенова І. М.**
Коректор

План 2013 р. Поз. № 19 – П

Підп. до друку Формат 60 × 90 1/16. Папір MultiCopy. Друк Riso.
Ум.-друк. арк. 27,75 Обл.-вид. арк. Тираж прим. 500. Зам. №

*Свідоцтво про внесення до Державного реєстру суб’єктів видавничої справи
Дк №481 від 13.06.2001р.*

Видавець і виготівник – видавництво ХНЕУ, 61001, м. Харків, пр. Леніна, 9а