МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ

ХАРКІВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ ЕКОНОМІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ
ІМЕНІ СЕМЕНА КУЗНЕЦЯ

ТЕОРІЯ ЙМОВІРНОСТЕЙ, ІМОВІРНІСНІ ПРОЦЕСИ ТА МАТЕМАТИЧНА СТАТИСТИКА

Методичні рекомендації
до самостійної роботи з теми
"Елементи теорії ймовірнісних процесів
і теорії масового обслуговування"
для студентів спеціальності
122 "Комп'ютерні науки"
першого (бакалаврського) рівня

Харків
ХНЕУ ім. С. Кузнеця
2018

УДК 519.2(07.034)
Т33

Укладачі: В. Ф. Сенчуков
Т. В. Денисова

Затверджено на засіданні кафедри вищої математики та економіко-математичних методів.

Протокол № 3 від 18.10.2017 р.

Самостійне електронне текстове мережеве видання

Т33 **Теорія** ймовірностей, імовірнісні процеси та математична статистика [Електронний ресурс] : методичні рекомендації до самостійної роботи з теми "Елементи теорії ймовірнісних процесів і теорії масового обслуговування" для студентів спеціальності 122 "Комп'ютерні науки" першого (бакалаврського) рівня / уклад. В. Ф. Сенчуков, Т. В. Денисова. – Харків : ХНЕУ ім. С. Кузнеця, 2018. – 84 с.

Подано теоретичний матеріал з теорії ймовірнісних (випадкових) процесів і запитання для самоконтролю його засвоєння. Наведено варіанти задач самостійної контрольної роботи та зразки їх розв'язання.

Рекомендовано для студентів спеціальності 122 "Комп'ютерні науки" першого (бакалаврського) рівня всіх форм навчання.

УДК 519.2(07.034)

Математика може відкрити
певну послідовність навіть у хаосі.
Гертруда Стайн

Вступ

Теорія випадкових процесів – це розділ теорії ймовірностей, який інтенсивно розвивається та має численні застосування в фізиці, техніці, біології, медицині, економіці та інших галузях знань.

Теорія випадкових процесів виникла внаслідок практичної необхідності математичного моделювання реальних процесів різної природи, стан кожного з яких в будь-який фіксований момент часу представляє собою випадковий вектор відповідної вимірності. Фактично теорія випадкових процесів займається вивченням випадкових величин, які еволюціонують у часі.

Глибоке і всебічне засвоєння студентами основних понять теорії випадкових процесів, питань отримання й обробки даних експериментів і спостережень, методів розрахунку та моделювання випадкових процесів дозволить їм, як кваліфікованим фахівцям, обґрунтовано приймати технічні, організаційні й управлінські рішення в різних виробничих ситуаціях. За задумом авторів, пропоновані методичні рекомендації мають допомогти студентам оволодіти прикладними методами теорії випадкових процесів і бути сполучною ланкою між строгими математичними дослідженнями, з одного боку, та практичними завданнями – з іншого.

Самостійна робота як одна з форм організації навчального процесу у вищому навчальному закладі передбачає виконання студентом запланованих згідно з робочою програмою завдань під методичним керівництвом викладача.

Навчальний час, відведений для самостійної роботи студентів очної форми навчання, визначається навчальним планом і становить 52 % (78 годин) від загального обсягу навчального часу на вивчення дисципліни (150 годин). Саме тому самостійна робота студента є важливим проявом активної участі в навчальному процесі, прагненні навчитися свідомо ставитися до оволодіння теоретичними та практичними знаннями, вільно орієнтуватися в інформаційному просторі, нести індивідуальну відповідальність за якість власної освітньо-наукової діяльності.

Метою самостійної роботи студента в межах теми "Елементи теорії ймовірнісних процесів і теорії масового обслуговування" навчальної дисципліни "Теорія ймовірностей, імовірнісні процеси та математична статистика" є формування у студентів загальних і професійних компетентностей у питаннях, пов'язаних з використанням засобів теорії ймовірностей і математичної статистики для розв'язання прикладних задач, що відіграє суттєву роль у становленні майбутнього бакалавра.

Основні задачі на шляху досягнення такої мети полягають у засвоєнні в повному обсязі відповідного теоретичного матеріалу, набутті навичок розв'язання задач застосовного характеру.

Засоби розв'язання основних задач полягають у наступному:

опрацювання теоретичного матеріалу в межах рекомендованої літератури;

пошук й огляд інших літературних джерел за проблематикою теми;

самодіагностичну контрольну перевірку студентами набутих знань;

виконання завдань самостійної контрольної роботи.

Прикладне значення матеріалу визначається розмаїттям галузей знань, у яких застосовуються змінні в часі випадкові величини.

Успішне студіювання матеріалу теми сприятиме формуванню таких **компетентностей**:

уміння аналізувати й розрізнювати типи випадкових процесів згідно з їх класифікацією, обґрунтовано вибирати тип випадкового процесу для дослідження можливих станів різних типів систем масового обслуговування;

знання основних функціональних й осереднених характеристик випадкових процесів;

знання та розуміння предметної області та професійної діяльності;

здатність виявляти та враховувати закономірності випадкових явищ, застосовувати методи статистичної обробки даних;

здібність до аналізу стохастичних процесів реального світу;

вміння та навички щодо розв'язання інженерних задач, пов'язаних з управлінням й інтенсифікацією виробництва;

спроможність розробляти математичні та комп'ютерні моделі для обробки, аналізу, синтезу й оптимізації результатів професійної діяльності.

Для сприйняття чужої мудрості
потрібна, перш за все, самостійна робота.
Л. Н. Толстой
Якщо можлива гігієна тіла, то можлива
також гігієна розуму і характеру.
Д. І. Писарєв

1. Методичні рекомендації з організації самостійної роботи студентів

Удосконалення організації навчального процесу у вищих навчальних закладах України відповідно до положень Болонської декларації передбачає блочно-модульний підхід до навчання і засобів поточного та підсумкового контролю знань, що потребує систематичної самостійної роботи студента згідно з навчальним планом.

Для виконання напруженої розумової роботи кожний студент повинен мати певне знайомство з фізіологією розумової праці. І. П. Павлов говорив, що треба навчитися не тільки правильно (тобто корисно і приємно) працювати, відпочивати, харчуватися, але і правильно думати (мислити).

Навчання – це особливий вид праці, напрямлений на опанування знань й узагальнених результатів фізичної та розумової праці багатьох поколінь інших людей. Основний зміст і найважливіша задача навчання – засвоїти, тобто зрозуміти (осмислити) і як слід запам'ятати певну систему знань і придбати комплекс потрібних навичок.

Свідомість у навчанні, розуміння необхідності навчання, живий інтерес до тієї галузі знань і діяльності, вивченню яких себе посвячуєш, мають величезний організуючий вплив на всі складові навчального процесу і забезпечують його успіх.

Не треба шукати самовиправдання в об'єктивних причинах і чекати, що хтось інший організує вашу роботу: свої навчальні заняття треба організовувати самому. Не можна дати конкретні рекомендації, прийнятні для всіх, оскільки в кожного студента свої особливості.

Головне в організації роботи – детально спланувати трудовий день.

Навчання у вищому навчальному закладі – тривалий і важкий процес. Першокурсники зі слабкою волею дуже часто переносять ("відтягують") у часі початок щоденних самостійних занять з одного дня на другий, а потім на тиждень, місяць і в результаті не можуть примусити себе приступити до виконання наміченого плану. У переборенні цієї інертності й полягає тренування волі, її виховання. Сила волі – це не тільки вміння здійснювати свої бажання, але й уміння підкоряти одні бажання іншим і кожне з них – вищим задачам і цілям.

Сила волі визначається спроможністю, неухильно переборюючи перешкоди, доводити до кінця будь-яку розпочату справу, досягаючи здійснення поставленої перед собою мети.

Воля включає в себе такі якості, як наполегливість, рішучість, цілеспрямована активність, самовладання, здібність переборювати перешкоди, вірність почуттю шани.

Величезне значення в організації розумової праці має ритм. Відомо, що ритмічна праця в багато разів продуктивніше, ніж так звані "аврали", коли за короткий час з перенапруженням виконується робота, розрахована на більш тривалий період. Необхідно відзначити, що більше інших "штурмують" першокурсники, бо у них ще нема навичок планомірної самостійної роботи. Ритм – послідовність у роботі, чітке чергування проміжків активності та пауз (перерв) – упорядковує роботу; ритм сприяє найбільш економному витрачанню сил й енергії; ритм значно полегшує розумову працю і є важливою умовою високої працездатності.

Рівномірним чергуванням поглиблених занять і пауз можна здолати ранню появу й розвинення стомленості.

Тривалість окремих занять повинна бути достатньою для того, щоб повністю використати приплив енергії (після відпочинку), але не настільки велика, щоб з'явилося неприємне почуття втоми. Тому для занять необхідно виділяти щоденно певний проміжок часу (3 – 4 години), доцільно чергуючи роботу над книжкою з графічною роботою. У розумову роботу, як і в будь-яку іншу, необхідно "впрацьовуватись": від вивчення матеріалу (дисципліни) середньої складності треба переходити до вивчення більш складних питань. Закінчувати заняття доцільно завжди тим матеріалом, який засвоюється легко. Найбільш важкий період – період "впрацьовування", поступового входження в ритм.

Фахівці запевняють, що:

після кожної години занять необхідно робити 7 – 8-хвилинну перерву (більша тривалість паузи може знизити "впрацьовуваність" у розумову роботу);

краще всього під час перерви походити, зняти напруження м'язів, яке виникає під час сидіння за столом (позитивний ефект дає виконання декількох фізичних вправ: ритмічне скорочення м'язів сприяє обміну речовин в організмі, збільшує перенесення кисню по ньому, стимулює роботу головного мозку);

крім 7 – 8-хвилинної паузи кожної години, доцільно робити перерву на 12 – 15 хвилин після 2 – 2,5 годин напруженої праці;

важливе значення для розумової праці мають тиша і хороше освітлення (джерело штучного освітлення повинно знаходитись ліворуч на відстані 30 – 40 сантиметрів від очей працюючого), звичка сидіти прямо і намагання не нахиляти голову (це позбавляє від швидкого знижування уваги і від стомлювання);

припиняти розумову працю треба за 40 хвилин до сну і використати цей час для прогулянки (для дорослої людини нормальна тривалість сну 6 – 7 годин; важливо лягати спати і прокидатися в один і той самий час; порушення графіка сну – одна з причин безсоння);

тривале нехтування режимом харчування викликає порушення травлення і здоров'я в цілому (І. П. Павлов: "Неувага до харчування є нерозважливістю");

дуже важливою компонентою успіху в навчанні є тренування пам'яті, вироблення здібності запам'ятовувати нове та зберігати набуті знання (розрізняють механічний (моторний), зоровий, слуховий і логічний вид пам'яті; у віці 20 – 25 років переважає загалом механічна пам'ять; при накопиченні досвіду розумової праці формується логічна пам'ять, яка ґрунтується на запам'ятовуванні внутрішнього зв'язку між різними явищами (процесами), тому вона в багато разів міцніше і надійніше механічного запам'ятовування; кожен студент повинен враховувати, який вид пам'яті є для нього оптимальним);

однією з найважливіших складових успіху в навчанні є відповідний психологічний настрій: твердий намір зрозуміти (осмислити) матеріал, що вивчається, запам'ятати його (важливо здолати "лінь думки" – постійне бажання уникати осмислення того, що вивчається, бо це породжує невігласа – нетямущу людину, неука в будь-якій галузі людської діяльності);

емоційний стан студента теж суттєво впливає на ефективність занять: позитивні емоції допомагають подолати труднощі, сприяють покращенню роботи серця, легенів, мозку, мобілізують резервні сили організму; негативні емоції – страх, відчай (розпач), невіра в свої сили, тривога – знижують працездатність, викликають в'ялість, гальмують роботу мозку; тому емоціям не можна піддаватися, ними треба керувати.

Самостійна робота студента складається з наступних основних елементів:

вивчення матеріалу окремих навчальних дисциплін за конспектами лекцій, підручниками і навчальними посібниками;

виконання домашніх завдань, у тому числі – індивідуальних;

повторне проходження всього курсу з метою підготовки до модуля, екзамену чи заліку (студенти старших курсів, крім вивчення навчальних дисциплін, ще виконують курсові й дипломні проекти).

Щоб уникнути помилок, які негативно впливають на виконання навчального плану, доцільно керуватися такими вказівками й порадами:

вивчаючи курс, необхідно домогтися повного й свідомого опанування його теоретичних основ, навчитися застосовувати теорію до розв'язання практичних задач й оволодіти методикою виконання технічних розрахунків ("теорія без практики – мертва, практика без теорії – сліпа");

читати підручник треба вдумливо, уважно, не поспішаючи, невеликими частинами, не пропускаючи ніякого тексту, намагатися зрозуміти кожну фразу ("читати – це ще нічого не значить; що читати і як читати, і як розуміти те, що читаєш – ось у чому головне"); у випадку, коли щось виявиться незрозумілим, треба прочитати відповідні місця повторно, а найбільш важливі – тричі (це сприяє міцному засвоєнню матеріалу);

послідовне конспектування значно полегшує засвоєння найважливіших положень дисципліни, що вивчається, бо самий процес запису вже є методом, який сприяє запам'ятовуванню, оскільки в ньому бере участь моторна пам'ять;

повторення матеріалу заглиблює і закріплює розуміння його (те, що частково осмислене і те, що не повторене, дуже легко забувається);

слід звернути увагу на зв'язок між окремими частинами курсу, який існує в кожній дисципліні; особливо це стосується дисциплін математичного циклу, де майже кожне наступне твердження (теорема) пов'язане з попереднім матеріалом ("ніколи не беріться за наступне, не засвоївши попереднього").

Виробити правильну, найбільш доцільну систему самостійних занять для кожного – справа нелегка, але існують основні умови організації роботи, які корисні для всіх студентів:

планування самостійних занять;

серйозна (вдумлива) робота над навчальним матеріалом (поки той чи інший розділ не засвоєно і знання не закріплені, переходити до нових розділів не слід; матеріал підручника треба продумувати до тих пір, поки він не стане повністю зрозумілим; виконання вправ і розв'язання задач – необхідна складова роботи над курсом);

систематичність самостійних занять, що сприяє розвиткові творчої думки (заняття від випадку до випадку, з тривалими перервами не можуть дати міцних знань; ніякі короткочасні, епізодичні, навіть дуже інтенсивні заняття не дають таких результатів, які забезпечуються при систематичному вивченні матеріалу);

самоконтроль як спосіб перевірки ступеня засвоєння матеріалу (відповіді на запитання при самоперевірці допомагають більш глибоко усвідомити матеріал дисципліни і закріпити його в пам'яті; треба намагатись відповідати на запитання, не підглядаючи в підручник).

До виконання ***самостійної контрольної роботи*** можна приступати тільки тоді, коли є упевненість в тому, що засвоєно весь теоретичний матеріал щодо тієї чи іншої задачі; розв'язання задач треба подавати разом з усіма проміжними перетвореннями; необхідно керуватися зразками розв'язання завдань, які розглянуті в запропонованих методичних рекомендаціях; хід розв'язання завдань треба супроводжувати коротким поясненням (що до чого, куди, як, на якій підставі); писати чітким, розбірливим почерком, чорнилами синього або чорного кольору; не допускати перекреслювань, будь-яких позначень, які не є загальноприйнятими в літературі з відповідної дисципліни; рисунки виконувати за допомогою креслярських інструментів, а ескізи можна виконувати олівцем від руки.

У запропонованих методичних рекомендаціях наведено теоретичний матеріал з теорії ймовірнісних (випадкових) процесів, запитання для самоконтролю його засвоєння, варіанти задач самостійної контрольної роботи з теми "Елементи теорії ймовірнісних процесів і теорії масового обслуговування" та зразки їх розв'язання які, сподіваємося, допоможуть студентам у виконанні й оформленні їхніх робіт.

Випадковості не випадкові…
Мудрість Майстра Угвея
з мультфільму «Панда Кунг-Фу»

2. Основні поняття теорії ймовірнісних (випадкових) процесів

2.1. Витоки понять теорії випадкових процесів (ВП): система, випадкова функція

Витоком основних понять теорії випадкових процесів є поняття **системи** – множини взаємозв'язаних об'єктів (установок, механізмів, явищ тощо), які розглядаються як єдине ціле. Розрізняють системи: біологічні, виробничі, соціальні, економічні, інформаційні тощо. При математичному підході до вивчення систем їх описують сукупністю тих чи інших числових характеристик. Кажуть, що кожний набір числових характеристик визначає **стан системи**. Якщо змінюється хоча б одна характеристика, то це розцінюють як **перехід** в інший стан.

Послідовну зміну станів системи називають **процесом** (зміни станів), а перехід із одного стану в інший – **кроком процесу**. За аналогією з різновидами експерименту – витоку основних понять теорії ймовірностей (ТІ) – процеси бувають передбачувані й непередбачувані (стохастичні, ймовірнісні).

Нехай $\Omega=\{\omega\}$ – простір елементарних подій (наслідків) деякого стохастичного експерименту E, а $\xi=\xi(\omega)$ – випадкова величина (ВВ), задана на цьому просторі, тобто кожному $\omega\in\Omega$ поставлено у відповідність певне число $x\in\mathbf{R}=(-\infty,+\infty)$.

Якщо кожному $\omega\in\Omega$ поставлена у відповідність числова функція $x=x(t)$ від деякого детермінованого (невипадкового) числового параметра $t\in T$ (T – множина значень параметра), то кажуть, що задана **випадкова функція** $\boldsymbol{\xi=\xi(t)}$.

За умови, що в ролі параметра t виступає час, випадкову функцію називають **випадковим процесом** (**ВП**). Залежно від того, якою буде множина T, дискретною чи неперервною, за аналогією з ВВ розрізнюють ВП *дискретного типу* (ДВП) і *неперервного типу* (НВП). Множину T називають **областю визначення** (**існування**) ВП, а множину ВВ, яка описує процес, – **фазовим простором**.

Зауваження. По суті ВП є функцією двох змінних – невипадкового параметра t і випадкової події ω: $\xi = \xi(\omega, t)$, але, як і при позначенні ВВ, символ ω часто пропускають, тобто пишуть ξ замість $\xi(\omega)$, а для ВП замість $\xi = \xi(\omega, t)$ пишуть $\xi(t)$.

ВВ $\xi = \xi(\omega, t_0)$ як значення ВП при фіксованому моменті часу $t = t_0$, називається **перерізом ВП у точці t_0**:

$$\xi(\omega, t)\big|_{t=t_0} \text{ – ВП при } t = t_0 \quad \rightleftharpoons \quad \xi_{t_0}(\omega) \text{ – переріз ВП.}$$

Невипадкову функцію $\xi = \xi(\omega_0, t) = \xi_{\omega_0}(t)$, яку отримано із ВП при фіксованому наслідку ω_0, називають **траєкторією** (**реалізацією, вибірковою функцією**) **ВП**:

$$\xi(\omega, t)\big|_{\omega=\omega_0} \text{ – ВП при } \omega = \omega_0 \;\rightleftharpoons\; \xi(\omega, t)\big|_{\omega=\omega_0} = \xi_{\omega_0}(t) \text{ – траєкторія ВП.}$$

Наприклад, якщо вивчати авіаційні польоти (в певному "коридорі"), то можна розглядати ВП, кожний переріз якого є ВВ зі значеннями – висота польоту, а траєкторії ВП співпадають із фізичними траєкторіями польоту (рис. 2.1).

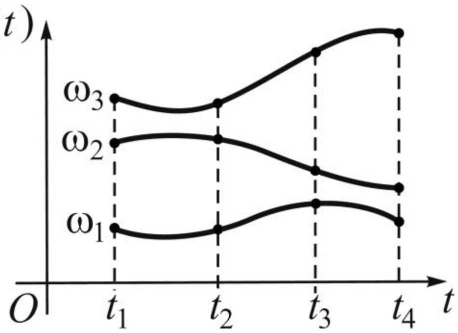

Рис. 2.1. **Перерізи і траєкторії ВП**

Кожне значення t_i, $i = \overline{1,4}$ визначає переріз, жирні точки – значення ВВ; траєкторіями є лінії, які проходять через точки всіх перерізів при фіксованому ω, і описуються функціями від часу t: $\xi_{\omega_j}(t)$, $j = \overline{1,3}$.

Необмежену кількість ВП без змістового наповнення (абстрактних) можна отримати з різних типів функції однієї змінної $f(x)$ при $x = t$, якщо числові параметри (константи) тлумачити як ВВ ($const$ – вироджена ВВ:

$$y = ax + b \;\Rightarrow\; \xi = At + B\text{, де } A,\ B \text{ – ВВ, } t \in T\text{;}$$
$$y = \sin kx \;\Rightarrow\; \xi = \sin Kt\text{, де } K \text{ – ВВ, } t \in T\text{.}$$

Для ВП, як і для ВВ, вводяться поняття: функція розподілу, математичне сподівання, дисперсія тощо, але всі вони, на відміну від ВВ, є функціями часу.

2.2. Закон розподілу й усереднені характеристики ВП

Випадковий процес $\xi(t)$ являє собою сукупність усіх перерізів за всіх можливих значень t, тому для його завдання необхідно розглядати багатовимірну випадкову величину $(\xi(t_1), \xi(t_2), \ldots, \xi(t_n))$, утворену з усіх перерізів цього процесу.

Таких перерізів нескінченно багато, але для завдання випадкового процесу вдається обмежитись порівняно невеликою кількістю перерізів.

Закон сумісного розподілу n перерізів $\xi(t_i)$, $i = \overline{1,n}$, називають **n-вимірним законом розподілу ВП $\xi(t)$**.

Одновимірною функцією розподілу $F_1(x \mid t)$ значень ВП $\xi(t)$ при фіксованому t називається функція розподілу перерізу ВП:

$$F_1(x \mid t) = P(\xi(t) < x)\,. \tag{2.1}$$

Якщо переріз $\xi(t)$ – неперервна ВВ, то у точках диференційовності функції розподілу перерізу ВП існує відповідна **щільність перерізу**:

$$f_1(x \mid t) = \frac{\partial F_1(x \mid t)}{\partial t}\,. \tag{2.2}$$

Якщо переріз $\xi(t)$ – ВВ дискретного типу зі значеннями $x_1(t)$, $x_2(t)$, …, $x_m(t)$, то **закон розподілу** ВВ описується переліком ймовірностей:

$$P\big(\xi(t) = x_i(t)\big) = p_i(t) = F_1\big(x_{i+1} \mid t\big) - F_1\big(x_i \mid t\big)\text{, де } \sum_{i=1}^{m} p_i(t) = 1. \tag{2.3}$$

Аналізуючи (2.1) – (2.3), неважко помітити повну аналогію з відповідними співвідношеннями для ВВ в ТІ (тільки додатково "плутається" параметр t). Наведені означення узагальнюються на будь-яке скінченне число перерізів.

Усередненими характеристиками ВП називають числові невипадкові функції для кожного фіксованого $t \in T$ відповідного перерізу.

Математичне сподівання

Математичне сподівання

$$M\xi(t) = a_{\xi}(t) = m_{\xi}(t) - \tag{2.4}$$

це невипадкова функція, яка для довільного моменту t є математичним сподіванням перерізу процесу в цей момент часу.

Центрованим ВП називають різницю між ВП та його математичним сподіванням (як і в ТІ для ВВ):

$$\overset{\circ}{\xi}(t) = \xi(t) - M\xi(t). \tag{2.5}$$

Якщо переріз $\xi(t)$ – ВВ дискретного типу зі значеннями $x_1(t)$, $x_2(t)$, …, $x_k(t)$, тобто ВП із дискретними значеннями і має одновимірний закон розподілу (2.1), то

$$M\xi(t) = \sum_{i=1}^{k} x_i(t) \cdot p_i(t). \tag{2.6}$$

Якщо ж ВП $\xi(t)$ з неперервними значеннями і має щільність $f_1(x \mid t)$, то математичне сподівання (центр розподілу) визначають формулою:

$$M\xi(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x \cdot f_1(x \mid t)\, dx. \tag{2.7}$$

Властивості математичного сподівання:

1. Математичне сподівання невипадкової функції $\varphi(t)$ дорівнює самій же функції (за аналогією з тим, що для ВВ $MC = C$ – $const$):

$$M\varphi(t) = \varphi(t). \tag{2.8}$$

2. Математичне сподівання центрованого ВП дорівнює нулю:

$$M\overset{\circ}{\xi}(t) = M(\xi(t) - M\xi(t)) = 0\,. \tag{2.9}$$

3. Невипадкову функцію $\varphi(t)$ можна виносити за знак математичного сподівання (як і $const$ у випадку ВВ):

$$M(\varphi(t)\cdot\xi(t)) = \varphi(t)\cdot M\xi(t) = \varphi(t)\cdot m_\xi(t)\,. \tag{2.10}$$

4. Математичне сподівання суми випадкових процесів і дорівнює сумі їхніх математичних сподівань:

$$M(\xi(t) + \eta(t)) = M\xi(t) + M\eta(t)\,. \tag{2.11}$$

У частковому випадку, якщо $\xi(t)$ – ВП, а $\eta(t)$ – невипадкова функція, то $M(\xi(t) + \varphi(t)) = M\xi(t) + \varphi(t)$.

5. Якщо для всіх значень $t \in T$ перерізи випадкових процесів $\xi(t)$ і $\eta(t)$ є незалежними ВВ, то математичне сподівання добутку цих процесів дорівнює добутку їхніх математичних сподівань:

$$M(\xi(t)\cdot\eta(t)) = M\xi(t)\cdot M\eta(t)\,. \tag{2.12}$$

Дисперсія випадкового процесу

Дисперсія:

$$D\xi(t) = \sigma_\xi^2(t) = M\xi^2(t) - M^2\xi(t) \text{ –} \tag{2.13}$$

невипадкова функція, яка для довільного моменту t є дисперсією перерізу процесу в цей момент часу.

Середньоквадратичне відхилення, як і в ТІ, є арифметичним значенням кореня квадратного з дисперсії:

$$\sigma_\xi(t) = \sqrt{D\xi(t)}\,. \tag{2.14}$$

Якщо переріз $\xi(t)$ – ВВ дискретного типу зі значеннями $x_1(t)$, $x_2(t)$, …, $x_k(t)$, тобто ВП із дискретними значеннями та має одновимірний закон розподілу (2.1), то

$$D\xi(t) = \sum_{i=1}^{k} (x_i(t) - m(t))^2 \, p_i(t) = \sum_{i=1}^{k} x_i^2(t) \cdot p_i(t) - m^2(t). \qquad (2.15)$$

Якщо ж ВП $\xi(t)$ з неперервними значеннями та має щільність $f_1(x\,|\,t)$, то дисперсія (розсіяння) визначають формулою:

$$D\xi(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - m(t))^2 \, f_1(x\,|\,t)dx = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 \cdot f_1(x\,|\,t)dx - m^2(t). \qquad (2.16)$$

Властивості дисперсії (розсіяння навколо центру розподілу):

1. Дисперсія випадкового процесу є невід'ємною функцією:

$$D\xi(t) > 0. \qquad (2.17)$$

2. Дисперсія невипадкової функції дорівнює нулеві:

$$D\varphi(t) = 0. \qquad (2.18)$$

3. Дисперсія суми ВП $\xi(t)$ і невипадкової функції $\varphi(t)$ дорівнює дисперсії випадкового процесу:

$$D(\xi(t) + \varphi(t)) = D\xi(t). \qquad (2.19)$$

4. Дисперсія добутку ВП на невипадкову функцію дорівнює добутку квадрата невипадкової функції з дисперсією ВП:

$$D(\varphi(t) \cdot \xi(t)) = \varphi^2(t) \cdot D\xi(t). \qquad (2.20)$$

5. Дисперсія ВП дорівнює різниці між математичним сподіванням квадрата ВП і квадратом його математичного сподівання:

$$D\xi(t) = M\xi^2(t) - M^2\xi(t). \qquad (2.21)$$

6. Якщо за всіх значень перерізи ВП $\xi(t)$ і $\eta(t)$ є незалежними випадковими величинами, то дисперсія цих процесів дорівнює сумі їхніх дисперсій:

$$D(\xi(t) + \eta(t)) = D\xi(t) + D\eta(t). \qquad (2.22)$$

Зауважимо, що властивості середнього квадратичного відхилення $\sigma_{\xi}(t) = \sqrt{D\xi(t)}$ випливають із властивостей дисперсії. Наприклад, із властивості **4** маємо:

$$\sigma(\varphi(t) \cdot \xi(t)) = \varphi(t) \cdot \sqrt{D\xi(t)} = \varphi(t) \cdot \sigma_{\xi}(t).$$

Автоковаріаційна функція

Автоковаріаційна функція – невипадкова функція $K_{\xi}(t_1, t_2)$ двох дійсних змінних t_1, t_2, яка для кожної пари фіксованих значень (t_1, t_2) дорівнює коваріації (як і для двох ВВ) відповідних перерізів:

$$K_{\xi}(t_1, t_2) = M(\xi(t_1) \cdot \xi(t_2)) - M\xi(t_1) \cdot M\xi(t_2) = M(\overset{\circ}{\xi}(t_1) \cdot \overset{\circ}{\xi}(t_2)). \qquad (2.23)$$

Префікс "авто" означає, що йдеться про один ВП $\xi(t)$ з різними перерізами (значеннями) в моменти часу t_1, t_2. У разі вивчення двох чи більше ВП сумісно префікс відкидається й додається термін "взаємно".

Властивості автоковаріаційної функції (а.к.ф.):

1. Переставлення (комутація) аргументів t_1, t_2 не змінює а.к.ф. (властивість симетричності):

$$K_{\xi}(t_1, t_2) = K_{\xi}(t_2, t_1). \qquad (2.24)$$

2. Якщо $t_1 = t_2 = t$, то а.к.ф. є дисперсією випадкового процесу:

$$K_{\xi}(t, t) = D\xi(t). \qquad (2.25)$$

3. Додавання до ВП невипадкової функції не змінює його а.к.ф.:

$$K_{\xi+\varphi}(t_1, t_2) = K_{\xi}(t_1, t_2). \qquad (2.26)$$

4. А.к.ф. добутку ВП $\xi(t)$ із випадковою функцією $\psi(t)$ є добутком а.к.ф. ВП $\xi(t)$ із добутком $\psi(t_1) \cdot \psi(t_2)$:

$$K_{\psi\xi}(t_1, t_2) = \psi(t_1) \cdot \psi(t_2) \cdot K_{\xi}(t_1, t_2). \qquad (2.27)$$

5. Модуль а.к.ф. ВП не перевищує середнього геометричного дисперсії відповідних перерізів (нерівність Коші – Буняковського):

$$|K_\xi(t_1,t_2)| \le \sqrt{D\xi(t_1)\cdot D\xi(t_2)}. \qquad (2.28)$$

Нормована автоковаріаційна функція (н.а.к.ф.)

Автокореляційна функція – нормована автоковаріаційна функція (н.а.к.ф.) як аналог коефіцієнта кореляції в ТІ для ВВ:

$$\rho(t_1,t_2)=\rho_\xi(t_1,t_2)=\frac{K_\xi(t_1,t_2)}{\sigma_\xi(t_1)\cdot\sigma_\xi(t_2)}=\frac{K_\xi(t_1,t_2)}{\sqrt{D\xi(t_1)\cdot D\xi(t_2)}}. \qquad (2.29)$$

На відміну від а.к.ф. величина $\rho_\xi(t_1,t_2)$ не має одиниць виміру – н.а.к.ф. безрозмірна величина.

Загалом властивості усереднених характеристик не відрізняються від властивостей відповідних за смислом числових характеристик ВВ в ТІ. При вивченні реальних процесів закони розподілу й усереднені характеристики ВП визначаються за статистичними даними, тому їх називають також **статистичними характеристиками** ВП.

Властивості н.а.к.ф. випливають з властивостей а.к.ф. і дисперсії ВП, зокрема з властивості **5** маємо:

$$|\rho(t_1,t_2)|\le 1, \text{ причому } |\rho(t,t)|=1.$$

Взаємна кореляційна функція* (*в.к.ф*) *двох ВП
***і нормована взаємна кореляційна функція* (*н.в.к.ф*)**

Взаємною кореляційною функцією двох випадкових процесів $\xi(t)$ і $\eta(t)$ називається випадкова функція $R_{\xi\eta}(t_1,t_2)$, яка для кожної пари значень t_1 і t_2 дорівнює коваріації відповідних перерізів:

$$R_{\xi\eta}(t_1,t_2)=M(\xi(t_1)\cdot\eta(t_2))-M\xi(t_1)\cdot M\eta(t_2)=M(\overset{\circ}{\xi}(t_1)\cdot\overset{\circ}{\eta}(t_2)). \qquad (2.30)$$

Якщо $R_{\xi\eta}(t_1,t_2)=0$, то процеси називаються **некорельованими**. У супротивному випадку процеси називають **корельованими**.

Властивості взаємної кореляційної функції:

1. Переставлення (комутація) ВП $\xi(t)$, $\eta(t)$ не змінює в. к. ф (властивість симетричності):

$$R_{\xi\eta}(t_1,t_2) = R_{\eta\xi}(t_1,t_2).$$

2. Додавання до ВП $\xi(t)$ і $\eta(t)$ невипадкових функцій $\varphi(t)$ й $\psi(t)$ відповідно, не змінює їхньої в.к.ф:

$$R_{\xi+\varphi,\eta+\psi}(t_1,t_2) = R_{\xi\eta}(t_1,t_2).$$

3. При множенні ВП $\xi(t)$ і $\eta(t)$ на невипадкові функції $\varphi(t)$ й $\psi(t)$ відповідно, їхня в.к.ф помножиться на добуток $\varphi(t)\cdot\psi(t)$:

$$R_{\xi\varphi,\eta\psi}(t_1,t_2) = \varphi(t)\cdot\psi(t)\cdot R_{\xi\eta}(t_1,t_2).$$

4. Модуль в.к.ф двох випадкових процесів не перевищує середнього геометричного їхніх дисперсій:

$$|R_{\xi\eta}(t_1,t_2)| \le \sqrt{D\xi(t_1)\cdot D\eta(t_2)}.$$

5. Якщо ВП $\nu(t)$ є сумою ВП $\xi(t)$ і ВП $\eta(t)$, то

$$R_\nu(t_1,t_2) = R_\xi(t_1,t_2) + R_\eta(t_1,t_2) + R_{\xi\eta}(t_1,t_2) + R_{\xi\eta}(t_2,t_1).$$

Наслідки:

1) Якщо $t_1 = t_2 = t$, то

$$D\nu(t) = D\xi(t) + D\eta(t) + 2R_{\xi\eta}(t,t).$$

2) Якщо ВП $\xi(t)$ і $\eta(t)$ некорельовані, то:

$$R_\nu(t_1,t_2) = R_\xi(t_1,t_2) + R_\eta(t_1,t_2);$$
$$D\nu(t) = D\xi(t) + D\eta(t).$$

Нормованою взаємною кореляційною функцією (**н.в.к.ф**) двох ВП $\xi(t)$ і $\eta(t)$ називають невипадкову функцію $\rho_{\xi\eta}(t_1,t_2)$, яка за фіксованих значень t_1 і t_2 дорівнює коефіцієнтові кореляції відповідних перерізів $\xi(t_1)$ і $\eta(t_2)$:

$$\rho_{\xi\eta}(t_1,t_2)=\frac{R_{\xi\eta}(t_1,t_2)}{\sigma_\xi(t_1)\cdot\sigma_\eta(t_2)}=\frac{R_{\xi\eta}(t_1,t_2)}{\sqrt{D\xi(t_1)\cdot D\eta(t_2)}}. \qquad (2.31)$$

Із властивості **4** випливає:

$$|R_{\xi\eta}(t_1,t_2)|\le 1,$$

як і для двох ВВ ξ, η.

Приклад 2.1. Дано: $\xi(t)=u\cdot\cos t$, $\eta(t)=u\cdot\sin t$, $Mu=3$, $Du=6$.

Знайти: 1) $M\xi(t)$; 2) $D\xi(t)$; 3) $K_\xi(t_1,t_2)$; 4) $\rho_\xi(t_1,t_2)$; 5) $R_{\xi\eta}(t_1,t_2)$; 6) $\rho_{\xi\eta}(t_1,t_2)$.

Розв'язання.

1. За означенням математичного сподівання (2.4) та властивістю **3** (див. (2.10)) маємо:

$$M\xi(t)=M(u\cdot\cos t)=\cos t\cdot M(u)=3\cos t.$$

2. Згідно з означенням дисперсії (2.13) і властивістю **4** (див. (2.20)) одержуємо:

$$D\xi(t)=D(u\cdot\cos t)=\cos^2 t\cdot Du=6\cos^2 t.$$

3. Знаходимо центровані процеси (2.5) в моменти часу t_1, t_2 та застосовуємо формулу (2.23) для а. к. ф. із залученням властивості **4** (див. (2.27)):

$$\overset{\circ}{\xi}(t_1)=\xi(t_1)-M\xi(t_1)=u\cdot\cos t_1-3\cos t_1=(u-3)\cos t_1;$$

$$\overset{\circ}{\xi}(t_2)=\xi(t_2)-M\xi(t_2)=u\cdot\cos t_2-3\cos t_2=(u-3)\cos t_2;$$

$$K_\xi(t_1,t_2)=M(\overset{\circ}{\xi}(t_1)\cdot\overset{\circ}{\xi}(t_2))=M((u-3)\cos t_1\cdot(u-3)\cos t_2)=$$

$$=\cos t_1\cdot\cos t_2\cdot M(u-3)^2=\cos t_1\cdot\cos t_2\cdot Du=6\cos t_1\cdot\cos t_2.$$

Якщо покласти $t_1=t_2=t$, то (див. (2.25)):

$$K_\xi(t,t)=D\xi(t)=6\cos^2 t.$$

4. Обчислюємо н. а. к. ф. за формулою (2.29):

$$\rho(t_1,t_2)=\frac{K_\xi(t_1,t_2)}{\sqrt{D\xi(t_1)\cdot D\xi(t_2)}}=\frac{6\cos t_1\cdot\cos t_2}{\sqrt{6\cos^2 t_1\cdot 6\cos^2 t_2}}=1,$$

адже ВП $\xi(t)=u\cdot\cos t$ лінійно залежний від ВВ u.

5. Знаходимо в. к. ф. за формулою (2.30):

$$R_{\xi\eta}(t_1,t_2)=M(\overset{\circ}{\xi}(t_1)\cdot\overset{\circ}{\eta}(t_2)),$$

для чого центруємо $\eta(t)=u\cdot\sin t$:

$$M\eta(t)=M(u\cdot\sin t)=3\sin t,$$
$$\overset{\circ}{\eta}(t)=(u-3)\sin t.$$

Таким чином,

$$R_{\xi\eta}(t_1,t_2)=M(\overset{\circ}{\xi}(t_1)\cdot\overset{\circ}{\eta}(t_2))=\cos t_1\cdot\sin t_2\cdot\underbrace{M(u-Mu)^2}_{Du=6}=6\cos t_1\cdot\sin t_2.$$

6. Обчислюємо н.в.к.ф. за формулою (2.31):

$$\rho_{\xi\eta}(t_1,t_2)=\frac{R_{\xi\eta}(t_1,t_2)}{\sqrt{D\xi(t_1)\cdot D\eta(t_2)}}=\frac{6\cos t_1\cdot\sin t_2}{\sqrt{6\cos^2 t_1\cdot 6\sin^2 t_2}}=1,$$

ураховуючи, що

$$D\eta(t)=D(u\cdot\sin t)=\sin^2 t\cdot M(u)=6\sin^2 t.$$

Як бачимо, коефіцієнт кореляції – н.в.к.ф. – також дорівнює одиниці, бо за формулою доповняльного кута $\sin t=\cos(\pi/2-t)$, тобто $\eta(t)=u\cdot\sin t$ – це ВП $\xi(t)=u\cdot\cos t$ зсунений у часі.

Зауваження. Усереднені числові характеристики ВП є функціями невипадкового аргументу t, тому в разі їх диференційовності можна говорити про похідну чи частинну похідну відповідної функції.

Наприклад, математичне сподівання похідної $\xi'(t)=\dot{\xi}$ від ВП $\xi(t)$ дорівнює похідній від її математичного сподівання: $m_{\dot{\xi}}(t)=m'_{\xi}(t)$.

Запитання для самоконтролю засвоєння матеріалу

1. Що називають системою, станом системи, процесом, кроком процесу?

2. Що розуміють під випадковою функцією?

3. Які процеси називаються випадковими процесами (ВП)?

4. Що розуміють під областю визначення ВП?

5. У чому полягає принципова відмінність між ВВ і ВП?

6. Що називають фазовим простором, перерізом (значенням), вибірковою функцією (реалізацією, траєкторією) ВП?

7. Як називають закон сумісного розподілу n перерізів ВП $\xi(t_i)$, $i=\overline{1,n}$?

8. Який вигляд має одновимірна функція розподілу $F_1(x\,|\,t)$ значень ВП $\xi(t)$ для фіксованого t?

9. За яких умов для функції розподілу перерізу ВП існує відповідна щільність перерізу?

10. Як називають числові невипадкові функції для кожного фіксованого $t \in T$ відповідного перерізу ВП?

11. Що називають математичним сподіванням ВП?

12. Які властивості має математичне сподівання?

13. Що називають дисперсією ВП?

14. Які властивості має дисперсія?

15. Що таке автокореляційна функція ВП?

16. Які властивості має автокореляційна функція?

17. Що таке нормована автокореляційна функція ВП?

18. Які властивості має автокореляційна функція?

19. Що називають взаємною кореляційною функцією двох ВП $\xi(t)$ та $\eta(t)$ і які ВП називають корельованими, некорельованими?

20. Які властивості має взаємна кореляційна функція двох ВП?

21. Яку функцію називають нормованою взаємною кореляційною функцією двох ВП $\xi(t)$ та $\eta(t)$?

22. Які властивості має нормована взаємно кореляційна функція двох ВП?

Судження про те, що навколишній дивовижний світ наповнений випадковостями, безпідставне, і воно побутує лише тому, що людський розум не здатний повністю збагнути сутність усього, що відбувається.
Н. П. Шивдук.

3. Класифікація ВП

3.1. Класифікація ВП залежно від області визначення й множини станів

Випадкові процеси широко застосовують як математичні моделі систем і явищ, які з'являються, змінюються випадковим (непередбачуваним) чином. Вони знаходять своє застосування в багатьох дисциплінах, включаючи такі науки, такі як біологія, хімія, екологія, неврологія і фізика, а також у технічних галузях, таких як обробка зображень, обробка сигналів, у теорії інформації, інформатиці, криптографії і телекомунікації. Крім того, випадкові зміни в фінансових ринках спонукали широке використання стохастичних процесів у фінансах.

За аналогією з теорією ВВ у ТІ, якщо система S в момент t описується однією ВВ $\xi(t)$, то процес називають **скалярним випадковим процесом** $\boldsymbol{\xi(t)}$. Якщо ж стан системи S у момент t описується декількома ВВ $\xi_1(t), \xi_2(t),..., \xi_k(t)$, то відповідний процес називають **векторним ВП** $\boldsymbol{\xi(t)}$, або **системою ВП** із k складовими, або ***k*-вимірним ВП**.

В умовах прикладу 2.1 вивчення авіаційних польотів (у певному "коридорі") можна звести до дослідження 3-вимірного ВП, якщо крім ВВ $\xi_1(t)$, значеннями якої є висота польоту, розглядати ВВ $\xi_2(t)$ зі значеннями – швидкість польоту, ВВ $\xi_3(t)$, значеннями якої є маса (чи об'єм) витраченого палива.

У теорії ВП прийнято класифікувати їх за тими або іншими ознаками, враховуючи плавність або стрибкоподібність реалізації, фіксованість або випадковість моментів часу, в які можуть відбуватися стрибки, вигляд закону розподілу окремого перерізу або сукупності його перерізів тощо.

Якщо коротко, то йдеться про класифікацію ВП "за часом" і "за станами".

ВП $\xi(t)$ називають **процесом із дискретним часом,** якщо система S, у якій він відбувається, може змінювати свої стани тільки у визначені, наперед відомі моменти часу t_1, t_2, …, t_n, які називають **кроками** (або **етапами**) цього процесу. Область визначення (існування) ВП – множина T – може бути скінченною або зліченною.

Вважається, що в проміжках часу між сусідніми кроками t_i, t_{i+1} система зберігає свій стан. Не виключається можливість, що система не змінить свого стану впродовж кількості кроків, більшій ніж два.

ВП $\xi(t)$ із дискретним часом називають також **випадковою послідовністю**: $\xi(t_1), \xi(t_2),...,\xi(t_n)$, або **випадковим ланцюгом**. Часто в позначенні такого ВП моменти часу замінюють їх індексами: $\xi(1)$, $\xi(2)$, …, $\xi(n)$.

ВП $\xi(t)$ називають **процесом з неперервним часом**, якщо система S, у якій він відбувається, може змінювати свої стани в будь-які, випадкові моменти часу, що неперервно заповнюють числову пряму або її підмножину. Множина T такого процесу є нескінченною та незліченною.

ВП $\xi(t)$, який відбувається в системі S, називають **процесом з дискретними станами**, якщо в будь-який момент часу $t \in T$ множина його станів є скінченною або зліченною; іншими словами, якщо його переріз у будь-який момент t описується однією дискретною ВВ $\xi(t)$ – в одновимірному випадку та k-вимірною ВВ – $\xi_1(t)$, $\xi_2(t)$, …, $\xi_k(t)$ – в багатовимірному випадку.

ВП $\xi(t)$, який відбувається в системі S, називають **процесом з неперервними станами**, якщо множина можливих станів системи S незліченна; іншими словами, якщо переріз процесу в будь-який момент часу t описується неперервною (або мішаною) випадковою величиною – в одновимірному випадку та векторною ВВ – у багатовимірному випадку (неперервною або мішаною).

За вказаними ознаками ВП поділяють на чотири класи – ВП із:

дискретним часом і дискретними станами (ДД);

дискретним часом і неперервними станами (ДН);

неперервним часом і дискретними станами (НД);

неперервним часом і неперервними станами (НН).

ВП із дискретним часом є легшими для вивчення, бо неперервні за часом процеси вимагають більш складних математичних методів і знань, зокрема через те, що множина T незліченна.

Приклад 3.1. ВП типу ДД: особа купила m білетів виграшного займу, які можуть вигравати та погашатися в заздалегідь відомі моменти часу (тиражі) t_1, t_2, …, t_n. Випадковий процес $\xi(t)$ – число білетів, на які припав виграш до моменту t.

Приклад 3.2. ВП типу ДН: у певні моменти часу t_1, t_2 реєструється температура повітря $\xi(t)$ у заданій точці простору. Послідовність значень цієї величини – випадковий процес $\xi(t)$ з дискретним часом і неперервними станами.

Приклад 3.3. ВП типу НД: технічний прилад складається з n вузлів, які можуть у ході роботи приладу відмовляти (виходити з ладу). Випадковий процес $\xi(t)$ – кількість вузлів, що відмовили до моменту t.

Приклад 3.4. ВП типу НН: у мікроскоп протягом проміжку часу T спостерігається переміщення малої частинки в рідині, яка здійснює броунівський рух. Координати частинки в момент t – випадковий процес з неперервними станами та неперервним часом.

3.2. Класифікація ВП залежно від закону розподілу й усереднених характеристик

Незалежно від кваліфікації ВП "за часом" і "за станами" розрізняють такі процеси:

1. Стаціонарні ВП (однорідні у часі) – ВП, статистичні (усереднені) характеристики яких не змінюються з часом, тобто незмінні (інваріантні) відносно часових "зсувів":

$$(t \to t+\tau) \;\Rightarrow\; (\xi(t) \to \xi(t+\tau)).$$

Тобто ВП $\xi(t)$, $t \in T$, де T – скінченний або нескінченний відрізок, називають **стаціонарним**, якщо для будь-яких n та τ_1, τ_2, …, τ_n таких, що $t+\tau_i \in T$, $i=\overline{1,n}$, сумісний розподіл випадкових векторів $\xi(t+\tau_i)$ не залежить від t. Інакше кажучи, якщо розглядати дві довільні пари перерізів: $(\xi(t_1), \xi(t_2))$ і $(\xi(t_1+\tau), \xi(t_2+\tau))$, то їх розподіли будуть однакові.

Виразним прикладом стаціонарного $\xi(t)$ є гармонічне коливання з випадковими параметрами:

$$\xi(t) = A(t)\cos(\omega t + \varphi),$$

де φ – випадкова початкова фаза, рівномірно розподілена на інтервалі $(-\pi, \pi)$;

$A(t)$ – випадкова амплітуда, яка не залежить від φ і є, у свою чергу, стаціонарним ВП.

Застосовують стаціонарні ВП при вивченні реальних явищ: пульсацій струму чи напруги в електричному колі (електричний "шум"), коливання виробничого процесу в економіці тощо.

ВП, які не задовольняють умови стаціонарності, називають **нестаціонарними**.

2. ВП з незалежними приростами (**ВП$_{\text{н.п.}}$**) – ВП, визначені на $T=[a,b]$ і такі, що для послідовності значень моментів часу t із $[a,b]$: t_1, t_2, ..., t_n, де $a = t_0 \le t_1 \le t_2 \le ... \le t_n = b$, ВВ $\xi(t_0)$ і прирости випадкових величин (ВВ-прирости): $\xi(t_1)-\xi(t_0)$, ..., $\xi(t_2)-\xi(t_1)$, ..., $\xi(t_n)-\xi(t_{n-1})$ є незалежними.

Якщо закон розподілу ВВ-приросту $\xi(t)-\xi(t_0)$ не залежить від t_0, а визначається лише довжиною інтервалу $t-t_0$, $t \in T$, то ВП$_{\text{н.п.}}$ називають **однорідним**. Інакше, для однорідних ВП$_{\text{н.п.}}$ розподіл імовірностей приросту $\xi(t_0+\tau)-\xi(t_0)$ залежить від τ, але не від t_0.

Прикладом ВП$_{\text{н.п.}}$ є процес, математична модель якого базується на розподілі Пуассона з параметром λ: $P(\xi = k) = \frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}$, де λ – додатне дійсне число, яке дорівнює математичному сподіванню ВВ ξ, а також її дисперсії ($M\xi = D\xi = \lambda$). Відповідний ВП називають **процесом Пуассона**. Такими ВП моделюються так звані "системи масового обслуговування", які будуть розглянуті далі.

3. Марківські процеси (процеси без післядії) – ВП, еволюція (протікання) яких після заданого значення t не залежить від еволюції, яка передувала t, за умови, що значення процесу в цей момент фіксоване.

Образно кажуть так: "майбутнє" й "минуле" ВП не залежать одне від одного при відомому "теперішньому".

Якщо область визначення $\xi(t)$ дискретна (скінченна чи злічення), то приходимо до так званих "ланцюгів Маркова", які є узагальненням схеми Бернуллі на випадок залежних випробувань.

Прикладом марківського ВП є процес "блукання" точки M по осі абсцис випадковим чином. У момент часу нуль точка знаходиться на початку координат і залишається там протягом, припустимо, однієї секунди. Через секунду кидають монету. Якщо випав герб, то точка M переміщується на одну одиницю довжини вправо, якщо цифра – вліво. Через секунду знову кидають монету й проводиться таке ж випадкове переміщення, і так далі. Процес зміни положення точки – блукання – є ВП з дискретним часом ($t = 0, 1, 2, \dots$) і безліччю станів. Наступний стан точки залежить тільки від теперішнього (поточного) стану й не залежить від минулих станів (неважливо, яким шляхом і за який час точка потрапила в поточну координату).

Марківські процеси набули дуже широке застосування в кібернетиці (особливо, в теорії інформації).

4. Розгалужені процеси – ВП, які моделюють процеси "розмноження" й перетворення якихось об'єктів (частинок у фізиці, молекул у хімії, популяцій у біології та інше). Розгалужені ВП тісно пов'язані з марківськими ВП. При цьому розрізнюють процеси "чистого розмноження", "чистого вимирання" (або "чистої загибелі"), "розмноження і вимирання" (ПРВ). Структура ПРВ зображена на рис. 3.1:

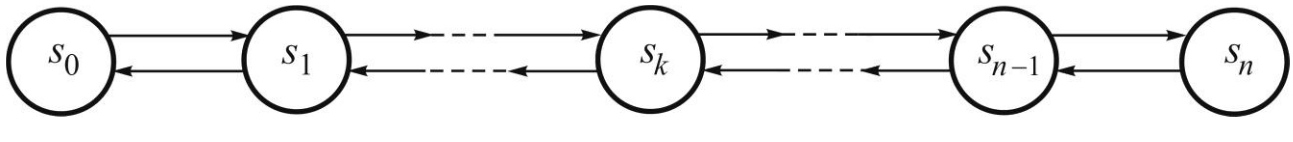

Рис. 3.1. **Структура процесу "розмноження і вимирання"**

5. Гаусівський (**нормальний**) **процес** – ВП, у якого одновимірні та двовимірні розподіли перерізів описуються нормальним законом. Гаусівські ВП відіграють важливу роль у практичних задачах, оскільки за широких умов сума великої кількості незалежних і малих за величиною випадкових функцій наближено є гаусівською випадковою функцією, незалежно від теоретико-ймовірнісної природи окремих доданків (узагальнення центральної граничної теореми з ТІ на ВП).

Запитання для самоконтролю засвоєння матеріалу

1. На які класи поділяють ВП за "за часом" і "за станами"?
2. Які ВП називають ВП класу ДД? Навести приклад.
3. Які ВП називають ВП класу ДН? Навести приклад.
4. Які ВП називають ВП класу НД? Навести приклад.
5. Які ВП називають ВП класу НН? Навести приклад.
6. Які ВП називають стаціонарними (однорідними в часі) й для опису яких реальних процесів їх застосовують? Навести приклад.
7. За яких умов ВП називають процесами з незалежними приростами ($ВП_{н.п.}$)?
8. Який $ВП_{н.п.}$ називають однорідним?
9. Який $ВП_{н.п.}$ називають процесом Пуассона?
10. Які реальні системи моделюються процесами Пуассона?
11. Що розуміють під марківськими процесами (процесами без післядії)?
12. У якій галузі знань знайшли широке застосування процеси Маркова?
13. Які марківські процеси називають "ланцюгами Маркова"?
14. Узагальненнями якої схеми на випадок залежних випробувань є ланцюги Маркова?
15. Як описується процес "блукання" випадковим чином точки M на числовій осі?
16. Які ВП називають розгалуженими?
17. Який вигляд має структура процесу розмноження й вимирання (ПРВ)?
18. Які ВП називають гаусівськими (нормальними) процесами?
19. У чому полягає узагальнення центральної граничної теореми в ТІ стосовно ВП?

З будинку реальності легко заблукати
в ліс математики, але лише деякі
здатні повернутися назад.
Хьюго Штейнгаус

4. Марківські ланцюги

4.1. Поняття потоку подій. Потік Пуассона та його властивості

Під **потоком подій** розуміють появу подій у випадкові моменти часу (самі події можуть бути як детерміновані, так і стохастичні; математичні моделі частіше будуються для детермінованих).

Приклади потоків: прибуття суден у порт, відмови в роботі деякого пристрою, виклики на телефонній станції тощо.

Потоки подій описують ВП $\xi(t)$, $t \ge 0$, для яких подія $\xi(t) = k$ означає: кількість появ події за час t дорівнює k; для відповідної ймовірності пишуть: $p_k(t) = P(\xi(t) = k)$.

Потік подій називають **найпростішим**, якщо він задовольняє вимоги (володіє властивостями):

1) стаціонарність: ймовірність настання k подій у проміжку $[t_0,\ t_0 + t]$ не залежить від t_0, а залежить лише від t і k:

$$P(\xi(t_0 + t) - \xi(t_0) = k) = p_k(t) = P(\xi(t) = k); \tag{4.1}$$

2) відсутність післядії: ймовірність настання k подій у проміжку $[t_0,\ t_0 + t]$ не залежить від того, скільки подій і як (часто) наставало за час до цього проміжку:

$$\begin{gathered} \forall k_1 \in \mathbf{N}_0 = \mathbf{N} \bigcup \{0\} \quad \forall t_1 < t_0: \\ P(\xi(t_0 + t) - \xi(t_0) = k \mid \xi(t_1) = k_1) = p_k(t) = P(\xi(t) = k); \end{gathered} \tag{4.2}$$

3) ординарність: ймовірність настання двох або більшого числа подій за малий проміжок часу ($\Delta t \to 0$) близька до нуля (практично неможлива подія):

$$P(\xi(\Delta t) \ge 2) = o(\Delta t) \iff \lim_{\Delta t \to 0} \frac{P(\xi(t) \ge 2)}{\Delta t} = 0. \tag{4.3}$$

Таким чином, найпростіший потік – це стаціонарний, ординарний потік без післядії.

ВП, який описує найпростіший потік подій, називають **процесом Пуассона** (**пуассонівським процесом**). Така назва обумовлена тим, що умови **1**, **2**, **3** виконуються, якщо:

$$P(\xi(t)=k)=p_k(t)=\frac{(\lambda t)^k}{k!}e^{-\lambda t},\ t\ge 0,\ k=0,1,2,...\ (k\in \mathbf{N}_0). \qquad (4.4)$$

Із (4.4) отримуємо:

1) $p_0(t)=e^{-\lambda t}$ – ймовірність того, що за час t не настане жодної події;

2) $p_{k\ge 1}(t)=1-e^{-\lambda t}$ – ймовірність того, що за час t настане не менше однієї події;

3) $M\xi(t)=\lambda t \ \Rightarrow\ M(\xi(t+1)-\xi(t))=M(\xi(1)-\xi(0))=\lambda$,

тому число λ називають **інтенсивністю** потоку та трактують як **середнє число** настання подій за одиницю часу;

4) $p_k(t)=\dfrac{(\lambda t)^k}{k!}(1+\lambda t+\dfrac{(\lambda t)^2}{2!}+...+\dfrac{(\lambda t)^n}{n!}+...)\ \Rightarrow$

$\Rightarrow\ p_1(t)=\lambda t(1+\lambda t+...)\ \Rightarrow\ p_1(\Delta t)=\lambda\Delta t+o(t)$ –

ймовірність настання однієї події пропорційна довжині інтервалу Δt.

Зауваження. Більш складними ВП є **процеси Пальма,** або стаціонарні, ординарні потоки з обмеженою післядією, – це ВП, для яких проміжки часу між послідовними подіями є незалежними, однаково розподіленими випадковими величинами. Якщо ВВ розподілені за показниковим законом, то потік Пальма перетворюється на найпростіший (стаціонарний пуассонівський) потік.

Якщо ж у найпростішому потоці подій зберегти не всі події, а тільки кожну другу, третю, …, n-у подію, то в результаті такої операції "проріджування" або "просіювання" утворюється знову потік подій, який називають **потоком Ерланга** другого, третього, …, n-го порядку.

4.2. Ланцюги Маркова з дискретним часом

Нехай множини станів Ω й області визначення T є дискретними множинами; $\{s_1, s_2, ..., s_m\}$ – множина всіх можливих станів деякої системи S. З часом система переходить послідовно з одного стану в інший, але в будь-який момент часу вона може знаходитись тільки в одному стані. Для опису еволюції системи розглядають послідовність ВВ: ξ_0, ξ_1, …, ξ_n, ...; індекс n відіграє роль часу. Якщо в момент часу n система знаходиться в стані s_j, то пишуть $\xi_n = j$.

Послідовність ξ_0, ξ_1, …, ξ_n, … називають **ланцюгом Маркова** (**ЛМ**), якщо для будь-якого n і будь-якого i_0, i_1, …, i_{n-2}, $i \in \{1, 2, ..., m\}$, маємо:

$$\begin{aligned} &P(\xi_n = j \mid \xi_0 = i_0, \xi_1 = i_1, ..., \xi_{n-2} = i_{n-2}, \xi_{n-1} = i) = \\ &= P(\xi_n = j \mid \xi_{n-1} = i), \end{aligned} \tag{4.5}$$

тобто ймовірність того, що у момент часу n система S потрапить в стан j, якщо відома вся передісторія процесу, залежить лише від того, в якому стані система знаходилася в момент $(n-1)$. Інакше кажучи, "майбутнє" ($\xi_n = j$) (рис. 4.1) при фіксованому "теперішньому " ($\xi_{n-1} = i$) не залежить від "минулого" ($\xi_0 = i_0$, …, $\xi_{n-2} = i_{n-2}$).

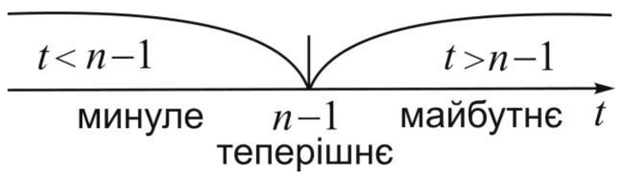

Рис. 4.1. **Марківська властивість**

Ймовірності

$$p_{ij}^{(n)} = P(\xi_n = j \mid \xi_{n-1} = i) \tag{4.6}$$

називають **ймовірностями переходу** (**перехідними ймовірностями**) системи із стану i в стан j за один крок (на n-му кроці).

ЛМ називають **однорідним,** якщо ймовірності переходу $p_{ij}^{(n)}$ не залежать від n (номера кроку), а залежать лише від того, з якого стану в який здійснюється перехід:

$$p_{ij}^{(n)} = P(\xi_n = j \mid \xi_{n-1} = i) = p_{ij} - const \;\; \forall n \in \mathbf{N}. \qquad (4.7)$$

Однорідні ЛМ повністю описуються за допомогою:

1) **вектора** ймовірностей початкового стану: $a = (a_1, a_2, ..., a_m)$;

2) **матриці** ймовірностей переходу за один крок:

$$P = (p_{ij})_{m \times m} = \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} & \cdots & p_{1m} \\ ... & ... & ... & ... \\ p_{m1} & p_{m2} & \cdots & p_{mm} \end{pmatrix}, \; p_{ij} \ge 0, \; \sum_{j=1}^{m} p_{ij} = 1 \;\; \forall i \in \{1, 2, ..., m\}. \qquad (4.8)$$

Матриці, елементи яких задовольняють умови:

$$p_{ij} \ge 0, \; \sum_{j=1}^{m} p_{ij} = 1,$$

називають **стохастичними**.

Для наочності замість матричного опису ЛМ застосовують геометричне – за допомогою **графів**, вершини яких – стани ланцюга, а орієнтовані ребра (стрілки) від s_i до s_j з числом p_{ij} над ними показують, що перехід зі стану i в стан j можливий з імовірністю p_{ij}; при $p_{ij} = 0$ стрілка не проводиться.

Ймовірності

$$p_{ij}(n) = P(\xi_n = j \mid \xi_0 = i) \qquad (4.9)$$

називають **ймовірностями переходу** із стану i в стан j **за *n* кроків**.

Матриця ймовірностей переходу за n кроків – $P(n)$ – є n-им степенем матриці переходу за один крок (4.8):

$$P(n) = P^n = \begin{pmatrix} p_{11}(n) & p_{12}(n) & \cdots & p_{1m}(n) \\ ... & ... & ... & ... \\ p_{m1}(n) & p_{m2}(n) & \cdots & p_{mm}(n) \end{pmatrix}. \qquad (4.10)$$

Приклад 4.1. Процес міграції населення "село – місто" описується ЛМ з двома станами: $s_1 =$(селянин), $s_2 =$(городянин), з вектором ймовірностей початкового стану a і матрицею перехідних ймовірностей P:

$$a=(1/2,\, 1/2), \quad P = \begin{array}{c c} & \begin{array}{cc} s_1 & s_2 \end{array} \\ \begin{array}{c} s_1 \\ s_2 \end{array} & \begin{bmatrix} 1/3 & 2/3 \\ 1/4 & 3/4 \end{bmatrix} \end{array}.$$

Побудувати граф ЛМ і знайти матрицю ймовірностей переходу за два кроки.

Розв'язання. Вибираємо на площині довільним чином дві точки (або кружечки) – вершини графа, з'єднуємо їх орієнтованими ребрами і наносимо відповідні написи (рис. 4.2).

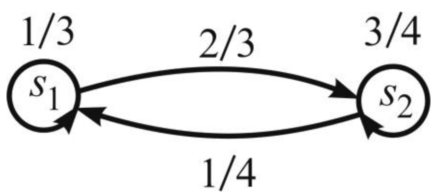

Рис. 4.2. **Граф процесу міграції**

Знаходимо квадрат матриці P:

$$P(2) = \begin{bmatrix} 1/3 & 2/3 \\ 1/4 & 3/4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1/3 & 2/3 \\ 1/4 & 3/4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 15/54 & 39/54 \\ 13/48 & 35/48 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0{,}2(7) & 0{,}7(2) \\ 0{,}2708(3) & 0{,}7291(6) \end{bmatrix}.$$

Порівнюючи матрицю $P(2)$ з вихідною матрицею *P*, можна простежити зміни в процесі міграції.

Наприклад, оскільки $p_{12} = 2/3 = 0{,}6(6)$, а $p_{12}(2) = 0{,}7(2)$, то це означає, що слід чекати збільшення відтоку селян у міста. *З'ясуйте* самостійно "поведінку" городян.

Теорема 4.7. (*про граничні ймовірності*). Якщо для деякого n_0 усі елементи матриці $P(n_0)$ додатні: $p_{ij}(n_0) > 0$, то для кожного $j = 0,1,\dots,m$ (незалежно від значення $i = 0,1,\dots,m$) існують границі:

$$\forall i = 0,1,\dots,m: \ \lim_{n\to\infty} p_{ij}(n) = b_j\,, \ \ j = 0,1,\dots,m\,, \tag{4.11}$$

тобто ймовірність перебування системи в стані j практично не залежить від того, в якому стані вона знаходилась у "далекому минулому".

Граничні ймовірності $\boldsymbol{b_j}$ – єдиний розв'язок системи лінійних алгебраїчних рівнянь (як наслідок з (4.10), (4.11)):

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^{m} b_j = 1, \\ \sum_{i=1}^{m} b_i p_{ij} = b_j, \end{cases} \qquad j = 0,1,\ldots,m; \;\; p_{ij} \in P. \tag{4.12}$$

Вектор $b = (b_1, b_2, \ldots, b_m)$ граничних ймовірностей називають **стаціонарним розподілом** ймовірностей для ЛМ з $P = (p_{ij})_{m \times m}$.

Зауваження. Оскільки система (4.12) переповнена: кількість рівнянь більше кількості невідомих, то в процесі її розв'язання одне з рівнянь, крім першого (*чому?*), можна відкинути (краще те, що з меншими p_{ij}).

Приклад 4.2. В умовах прикладу 4.1 знайти граничні (фінальні) ймовірності – стаціонарний розподіл для процесу міграції.

Розв'язання. Складаємо систему (4.12) і розв'язуємо її:

$$m = 2: \quad \begin{cases} b_1 + b_2 = 1, \\ b_1 p_{11} + b_2 p_{21} = b_1, \\ b_1 p_{12} + b_2 p_{22} = b_2 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} b_1 = \dfrac{p_{21}}{p_{21} + p_{12}}, \\ b_2 = \dfrac{p_{12}}{p_{12} + p_{21}} \end{cases} \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left| \; P = \begin{bmatrix} 1/3 & 2/3 \\ 1/4 & 3/4 \end{bmatrix} \right| \Rightarrow \; (b_1, b_2) = \left(\frac{3}{11}, \; \frac{8}{11} \right).$$

Висновок. За умови тривалого процесу міграції слід очікувати, що кількість селян і городян розподіляться у відношенні 3:8.

4.3. Ланцюги Маркова з неперервним часом. Рівняння Колмогорова

Якщо область визначення ВП $\xi(t)$ незлічення, тобто параметр t змінюється не "стрибками", неперервно, то замість $(\xi_n = i)$ будемо писати

$(\xi(t) = i)$ – подія, яка полягає в тому, що в момент часу t (від початку відліку) система перебуває в стані i.

Безумовні (умовні) ймовірності того, що система перебуває в стані i (перейшла із стану i в стан j) позначатимемо так:

$$p_i(t) = P(\xi(t) = i) \\ \left(p_{ij}(t) = P(\xi(t_0 + t) = j \mid \xi(t_0) = i) \right). \tag{4.13}$$

Розглянемо $\xi(t)$ на проміжку $[t,\ t + \Delta t]$ і нехай система має дискретну множину станів $s_1,\ s_2,\ \ldots,\ s_m$; інтенсивності потоку подій (який будемо вважати найпростішим), що переводять систему із стану s_i в s_j позначимо через λ_{ij} ($\lambda_{ij} \geq 0$); у більш загальному випадку $\lambda_{ij} = \lambda_{ij}(t)$, тобто інтенсивності залежать від часу.

Згідно з (4.8) $p_{ij}(\Delta t) = \lambda_{ij} \cdot \Delta t + o(\Delta t)$, тобто ймовірність переходу із стану s_i в s_j на проміжку $[t,\ t + \Delta t]$ пропорційна довжині проміжку Δt.

Приріст імовірності перебування системи в стані j на проміжку $[t,\ t + \Delta t]$ запишеться як $\Delta p_j(t) = p_j(t + \Delta t) - p_j(t)$.

Якщо скласти відношення приросту $\Delta p_j(t)$ до приросту аргументу Δt, а потім перейти до границі при $\Delta t \to 0$, то отримаємо систему диференціальних рівнянь виду:

$$\dot{p}_j(t) = \frac{dp_j(t)}{dt} = \sum_{i=1}^{m} p_i(t) \cdot \lambda_{ij} - p_j(t) \sum_{i=1}^{m} \lambda_{ji}, \quad j = 1, 2, \ldots, m, \tag{4.14}$$

яку називають **системою Колмогорова** для визначення ймовірностей станів системи S, що описується марківським процесом типу ДН з початковими умовами:

$t = 0$, $(p_1(0),\ p_2(0), \ldots, p_m(0))$ – вектор початкових імовірностей.

Одне з рівнянь системи можна замінити так званим **нормованим рівнянням**: $\sum_{j=1}^{m} p_j = 1$ (за аналогією з тим, як це робилося при відшуканні граничних імовірностей ланцюга Маркова з дискретним часом).

Запитання для самоконтролю засвоєння матеріалу

1. Що в теорії випадкових процесів розуміють під потоком подій?

2. Який потік подій називають найпростішим (процесом Пуассона)?

3. Що розуміють під властивостями: *стаціонарність, відсутність післядії, ординарність* пуассонівського процесу?

4. За якою формулою обчислюється ймовірність того, що: за час t не настане жодної події; за час t настане не менше однієї події?

5. Що називають інтенсивністю потоку подій?

6. Якою залежністю пов'язані ймовірність настання однієї події з довжиною інтервалу часу Δt ?

7. Які потоки подій називають процесами Пальма?

8. Які потоки подій називають потоками Ерланга?

9. Яку послідовність випадкових величин називають ланцюгом Маркова (ЛМ)?

10. Що називають марківською властивістю ЛМ?

11. Які ймовірності називають ймовірностями переходу системи із стану i в стан j за один крок (на n-му кроці)?

12. Який ЛМ називають однорідним?

13. Який вигляд має матриця ймовірностей переходу за один крок?

14. За допомогою чого повністю описують однорідні ЛМ?

15. Які матриці називають стохастичними?

16. Як пов'язані між собою матриця ймовірностей переходу за n кроків із матрицею ймовірностей переходу за один крок?

17. Як формулюється теорема про граничні ймовірності ЛМ?

18. Розв'язком якої системи лінійних алгебраїчних рівнянь є граничні ймовірності ЛМ?

19. Як називають вектор $b=(b_1,b_2,...,b_m)$ граничних імовірностей для ЛМ із $P=(p_{ij})_{m\times m}$.

20. Які ЛМ називають ланцюгами Маркова з неперервним часом?

21. За якими формулами обчислюють безумовні (умовні) ймовірності того, що система перебуває у стані i (перейшла із стану i в стан j)?

22. Який вигляд має система Колмогорова для визначення ймовірностей станів системи S, яка описується ЛМ типу ДН?

Яка наука може бути більш благородна, більш чудова,
більш корисна для людства, ніж математика?
Франклін.

5. Системи масового обслуговування (СМО) марківського типу

5.1. Теорія масового обслуговування (ТМО): мета, об'єкт, предмет та основна задача ТМО

Теорія масового обслуговування (ТМО), або **теорія черг**, – розділ теорії ймовірностей, метою досліджень якого є раціональний вибір структури системи обслуговування та процесу обслуговування на основі вивчення потоків вимог на обслуговування, що надходять у систему й виходять з неї, тривалості очікування та довжини черг. Теорія масового обслуговування використовує методи теорії ймовірностей та математичної статистики.

Метою ТМО є розробка математичних методів для оцінювання основних характеристик процесів масового обслуговування та результатів функціонування обслуговуючої системи.

Об'єктом вивчення ТМО є системи масового обслуговування та процеси, які в них відбуваються.

Предметом ТМО є кількісна сторона процесів, пов'язаних із масовим обслуговуванням.

Об'єкт (установа, заклад), який надає будь-які "послуги" з обслуговування "клієнтів" різної природи в масовому обсязі, природно назвати системою масового обслуговування (СМО). Під **СМО** розуміють динамічну систему, призначену для ефективного обслуговування деяких заявок (вимог), які потребують цього обслуговування. На практиці зустрічаються випадки, коли окремі споріднені СМО утворюють об'єднання, діяльність яких спрямована на досягнення тієї ж мети, що й кожної окремої СМО, але в більш широких масштабах, або в поглибленому вигляді. Сукупність таких взаємозалежних СМО називають **мережею масового обслуговування**. Прикладами таких мереж є мережа автозаправних станцій однієї фірми-постачальника паливних продуктів, мережа закладів швидкого харчування, система медичних закладів тощо.

Основна задача ТМО – побудова математичної моделі СМО як сукупності математичних виразів, що описують вхідний потік вимог, процес обслуговування та їхній взаємозв'язок.

5.2. Класифікація систем масового обслуговування

Порівняно з ланцюгами Маркова ВП з дискретною множиною станів і неперервною множиною визначення більш складні для вивчення, оскільки їхні закони описуються, як правило, системами диференціальних рівнянь. Одним із різновидів таких ВП є процес **народження** (**розмноження**) і **загибелі** (**ПНЗ**).

Теорія ПНЗ веде початок від біологічних задач (тому й така назва), але в застосуваннях виходить далеко за біологію: такими ВП моделюються технічні, економічні, фізичні системи, системи **черг**, або **системи масового обслуговування** (**СМО**).

Основні поняття СМО:

вимога (заявка) – запит на обслуговування;

вхідний потік вимог – сукупність вимог, що надходять у СМО;

час обслуговування – період часу, протягом якого обслуговується вимога.

Прикладами СМО є: каси, аеропорти, вокзали, доки, перукарні, ринки тощо.

У більшості випадків основні **вхідні** (**задані**) **параметри** СМО – це число каналів (наприклад, крісел у перукарні), інтенсивність потоку заявок (кількість клієнтів), інтенсивність потоку обслуговування (кількість "покрасивілих").

Характеристиками ефективності роботи СМО, як правило, є так звані усереднені характеристики: пропускна здатність, середнє число зайнятих каналів, відмов і таке інше. Звичайно, теоретична основа СМО – теорія ймовірностей, у якій розроблені відповідні закони розподілів.

Системи масового обслуговування за наявністю черг поділяють на:

1. СМО з відмовами;
2. СМО з чергою.

У **СМО з відмовами** заявка при всіх зайнятих каналах отримує відмову, залишає СМО й надалі не обслуговується.

У **СМО з чергою** заявка, що прийшла в момент, коли всі канали зайняті, не йде, а стає в чергу й чекає, коли її обслужать.

СМО з чергами поділяють на види залежно від того, як організовано чергу – обмежену або не обмежену. Обмеження можуть стосуватися як довжини черги, часу очікування, так і "дисципліни обслуговування".

Крім цього СМО діляться на **відкриті** й **замкнені**. У відкритій (замкнутій) СМО характеристики потоку заявок не залежать (залежать) від того, в якому стані перебуває сама СМО (скільки каналів зайнято). Наприклад, якщо один робітник обслуговує групу верстатів, які час від часу потребують налагодження, то інтенсивність потоку "вимог" з боку верстатів залежить від того, скільки їх вже справно й чекає налагодження.

На рис. 5.1 наведені основні види СМО з відмовами й з очікуванням. Звичайно, повна класифікація СМО далеко не обмежується наведеними різновидами.

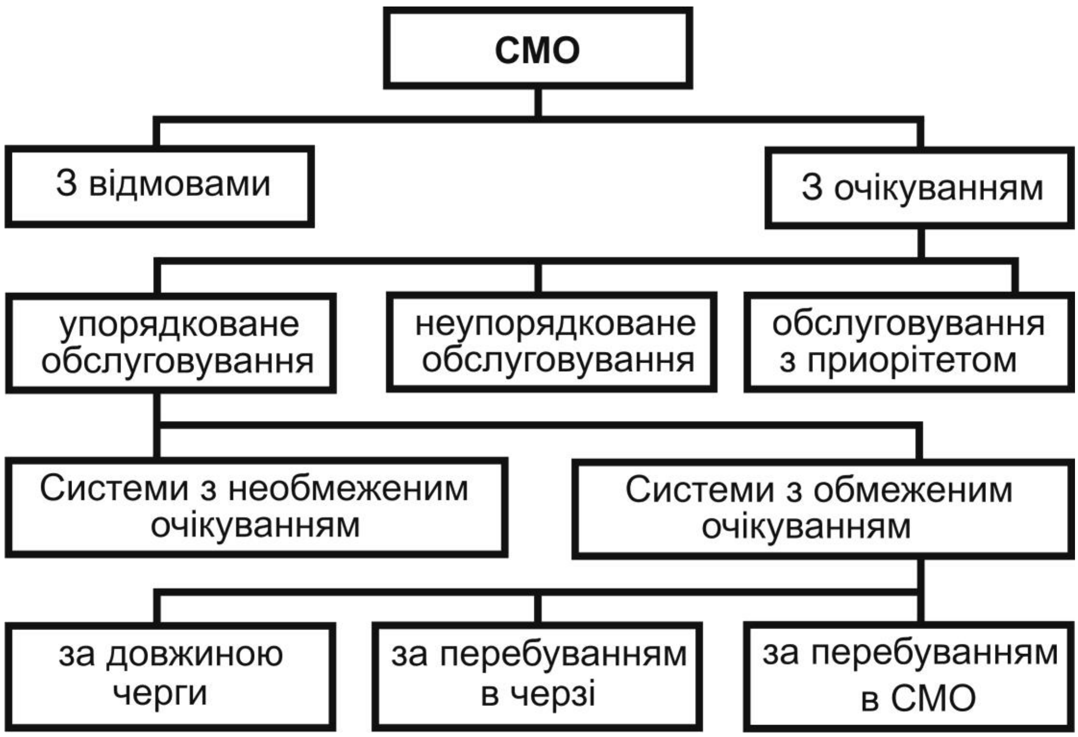

Рис. 5.1. **Класифікація СМО**

Як правило, в СМО вводиться **дисципліна обслуговування** – правило, за яким вибирають на обслуговування заявки з черги:

1) обслуговування в порядку надходження – першим прийшов, першим пішов;

2) обслуговування в зворотному порядку – останнім прийшов, першим пішов;

3) обслуговування у випадковому порядку, коли заявка на обслуговування вибирається випадково серед тих, хто чекає в черзі.

5.3. СМО марківського типу: з відмовами (задача Ерланга), з очікуванням черги, мішаного типу

І. Найпростіша з усіх задач ТМО – задача про функціонування одноканальної СМО (рис. 5.2).

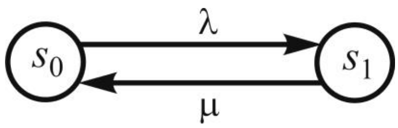

Рис. 5.2. **Одноканальна СМО з відмовами**

Нехай система складається тільки з одного каналу ($n = 1$) і на неї надходить пуассонівський потік заявок з інтенсивністю λ (див. п. 4.1), що залежить, у загальному випадку, від часу:

$$\lambda = \lambda(t). \tag{5.1}$$

Величина, обернена інтенсивності надходження заявок, визначає **середній часовий інтервал** надходження заявок: $\bar{t}_{\text{над}} = 1/\lambda$.

Обслуговування заявки відбувається протягом випадкового часу, розподіленого за показниковим законом з параметром μ:

$$f(t) = \mu \cdot e^{-\mu \cdot t},\ t > 0,$$

де μ – **інтенсивність потоку обслуговування** (трактується як середнє число виконаних заявок за одиницю часу).

Відношення $\rho = \lambda/\mu$ називають **зведеною інтенсивністю навантаження СМО** (потоку заявок); ρ – безрозмірна величина.

Величина, обернена інтенсивності обслуговування μ, визначає **середній час обслуговування** однієї заявки: $\bar{t}_{\text{обс}} = 1/\mu$.

Заявка, що застала канал зайнятим, одержує відмову й залишає систему; вже виконані заявки канал СМО видає з інтенсивністю потоку обслуговування μ.

За заданими λ і μ знайдемо:

відносну пропускну здатність СМО – відносну середню кількість заявок (запитів) q;

абсолютну пропускну здатність СМО – середню кількість заявок (запитів) A.

Єдиний канал як система обслуговування S може знаходитись в одному з двох станів: s_0 – вільний, s_1 – зайнятий. Граф станів системи представлено на рис. 5.2.

Зі стану s_0 в стан s_1 система переводить потік заявок з інтенсивністю λ; з s_1 в s_0 – "потік обслуговування" – з інтенсивністю μ.

Позначимо імовірності станів $p_0(t)$ і $p_1(t)$. Очевидно, для будь-якого моменту часу t:

$$p_0(t) + p_1(t) = 1. \tag{5.2}$$

Для знаходження ймовірності станів СМО розв'язуємо **систему диференціальних рівнянь Колмогорова**:

$$\begin{cases} \dfrac{dp_0}{dt} = -\lambda \cdot p_0 + \mu \cdot p_1, \\ \dfrac{dp_1}{dt} = -\mu \cdot p_1 + \lambda \cdot p_0. \end{cases} \tag{5.3}$$

З двох рівнянь (5.3) одне є зайвим, тому що p_0 і p_1 зв'язані співвідношенням (5.2). З огляду на це, відкинемо друге рівняння, а в перше підставимо замість p_1 його вираз $(1 - p_0)$:

$$\frac{dp_0}{dt} = -\lambda \cdot p_0 + \mu \cdot (1 - p_0), \text{ або } \quad \frac{dp_0}{dt} = -(\mu + \lambda) \cdot p_0 + \mu. \tag{5.4}$$

Це рівняння природно розв'язувати з початковими умовами: $p_0(0) = 1$ і $p_1(0) = 0$ (у початковий момент канал вільний).

Лінійне диференціальне рівняння (5.4) з однією невідомою функцією $p_0(t)$ придатне не тільки для найпростішого потоку заявок ($\lambda - const$), але й для випадку, коли інтенсивність цього потоку змінюється: $\lambda = \lambda(t)$. У випадку найпростішого потоку розв'язок рівняння (5.4) має вигляд:

$$p_0 = \frac{\mu}{\lambda + \mu} + \frac{\lambda}{\lambda + \mu} \cdot e^{-(\lambda + \mu) \cdot t}. \tag{5.5}$$

Залежність величини p_0 від часу t зображено на рис. 5.3. У початковий момент: $t=0$, канал свідомо вільний: $p_0(0)=1$. Зі збільшенням t імовірність p_0 зменшується, його граничне значення за умови $t\to\infty$ дорівнює $\frac{\mu}{\lambda+\mu}$. Величина $p_1(t)$, що доповнює $p_0(t)$ до одиниці, змінюється як показано на тому ж самому рис. 5.3.

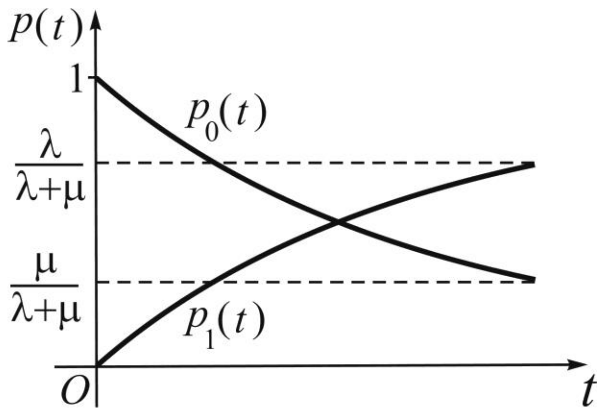

Рис. 5.3. **Залежність p_0 і p_1 від часу t**

Для одноканальної СМО з відмовами імовірність p_0 є не що інше, як **відносна пропускна здатність q**.

Дійсно, p_0 – ймовірність того, що в момент t канал вільний; інакше кажучи, p_0 – ймовірність того, що заявка, яка прийшла в момент t, буде обслугована. Тоді, для даного моменту часу t середнє відношення кількості обслугованих заявок до кількості тих, що надійшли також дорівнює p_0: $q=p_0$. У разі $t\to\infty$, коли процес обслуговування вже встановиться, граничне значення відносної пропускної здатності q дорівнюватиме:

$$q=\frac{\mu}{\lambda+\mu}. \tag{5.6}$$

Знаючи відносну пропускну здатність q, легко знайти абсолютну A. Вони пов'язані очевидним співвідношенням:

$$A=\lambda\cdot q. \tag{5.7}$$

Якщо $t \to \infty$, то абсолютна пропускна здатність згідно з (5.6), (5.7) визначається за формулою:

$$A = \frac{\lambda \cdot \mu}{\lambda + \mu}. \tag{5.8}$$

Знаючи відносну пропускну здатність системи q (імовірність того, що заявка, яка надійшла в момент t, буде обслугована), легко знайти інші показники роботи СМО, наприклад, імовірність відмови:

$$P_{\text{від}} = 1 - q. \tag{5.9}$$

Імовірність відмови $P_{\text{від}}$ є не що інше, як середня частка необслугованих заявок серед поданих. З урахуванням (5.6):

$$P_{\text{від}} = 1 - \frac{\mu}{\lambda + \mu} = \frac{\lambda}{\lambda + \mu}. \tag{5.10}$$

Приклад 5.1. Знайти показники ефективності обслуговування для одноканальної СМО ($n = 1$) з відмовами, в яку заявки надходять з інтенсивністю $\lambda = 1{,}2$ заявки на годину, середній час обслуговування $\bar{t}_{\text{обс}} = 2{,}5$ години.

Розв'язання. Обчислюємо показники обслуговування для заданої одноканальної СМО за її описом.

1*. Інтенсивність* потоку заявок за середнім часом обслуговування однієї заявки:

$$\bar{t}_{\text{обс}} = \frac{1}{\mu} \quad \Rightarrow \quad \mu = \frac{1}{\bar{t}_{\text{обс}}} = \frac{1}{2{,}5} = 0{,}4.$$

2. *Зведена інтенсивність* навантаження СМО (потоку заявок):

$$\rho = \frac{\lambda}{\mu} = \lambda \cdot \bar{t}_{\text{обс}} = 1{,}2 \cdot 2{,}5 = 3.$$

Інтенсивність навантаження $\rho = 3$ показує ступінь узгодженості вхідного й вихідного потоків заявок каналу обслуговування та визначає стійкість системи масового обслуговування.

3. *Імовірність події "канал вільний"*, тобто частка часу простою каналу:

$$p_0 = \frac{\mu}{\lambda + \mu} \quad \Rightarrow \quad \left| \begin{array}{l} \lambda = 1{,}2 \\ \mu = 0{,}4 \end{array} \right| \quad \Rightarrow \quad p_0 = \frac{0{,}4}{1{,}2 + 0{,}4} = 0{,}25.$$

Отже, слід очікувати, що $25\,\%$ часу протягом години канал буде не зайнятий, тобто час простою $\bar{t}_{\text{пр}} = 15$ хвилин.

4. *Доля (частка) заявок, які отримали відмову*:

$$P_{\text{від}} = p_1 = 1 - p_0 = 1 - 0{,}25 = 0{,}75,$$

а це означає, що $75\,\%$ з числа заявок, що надійшли не приймаються до обслуговування.

5. *Відносна пропускна здатність* – частка виконаних заявок із тих, що надійшли протягом одиниці часу:

$$q = p_0 = \frac{\mu}{\lambda + \mu} = 0{,}25.$$

6. *Абсолютна пропускна здатність:*

$$A = q \cdot \lambda \quad \Rightarrow \quad \left| \begin{array}{l} \lambda = 1{,}2 \\ q = 0{,}25 \end{array} \right| \quad \Rightarrow \quad A = 0{,}25 \cdot 1{,}2 = 0{,}3 \text{ заявок/хв.}$$

7. *Середній час простою* СМО $\bar{T}_{\text{пр}}$:

$$\bar{T}_{\text{пр}} = P_{\text{від}} \cdot \bar{t}_{\text{обс}} \quad \Rightarrow \quad \left| \begin{array}{l} P_{\text{від}} = p_1 = 0{,}75 \\ \bar{t}_{\text{обс}} = 2{,}5 \end{array} \right| \quad \Rightarrow \quad \bar{T}_{\text{пр}} = 0{,}75 \cdot 2{,}5 = 1{,}88 \text{ хв.}$$

8. *Середня кількість* обслуговуваних заявок $L_{\text{обс}}$:

$$L_{\text{обс}} = \rho \cdot q \quad \Rightarrow \quad \left| \begin{array}{l} \rho = 3 \\ q = 0{,}25 \end{array} \right| \quad \Rightarrow \quad L_{\text{обс}} = 3 \cdot 0{,}25 = 0{,}75 \text{ од.}$$

9. *Питома кількість* заявок (протягом хвилини), які отримали відмову $l_{\text{обс}}$:

$$l_{\text{обс}} = \lambda \cdot p_1 \quad \Rightarrow \quad \left| \begin{array}{l} \lambda = 1{,}2 \\ p_1 = 0{,}75 \end{array} \right| \quad \Rightarrow \quad l_{\text{обс}} = 1{,}2 \cdot 0{,}75 = 0{,}9 \text{ заявок/хв.}$$

10. *Номінальна та фактична продуктивність* СМО:

$$P_{\text{ном}} = \mu = 1/\bar{t}_{\text{обс}} \;\Rightarrow\; \left|\bar{t}_{\text{обс}} = 2{,}5\right| \;\Rightarrow\; P_{\text{ном}} = 1/2{,}5 = 0{,}4 \text{ заявок на хв.}$$

$$P_{\text{факт}} = A/\mu \;\Rightarrow\; \left|\begin{array}{c} A = 0{,}3 \\ P_{\text{ном}} = 0{,}4 \end{array}\right| \;\Rightarrow\; P_{\text{факт}} = 0{,}3/0{,}4 = 75\ \% \text{ від } P_{\text{ном}}.$$

Висновок. Фактична продуктивність СМО не стовідсоткова, тому треба шукати шляхи покращення її роботи.

ІІ. СМО *n*-канальна з відмовами (**задача Ерланга**). Будемо нумерувати стан системи S за числом зайнятих каналів (або, що в даному випадку те ж саме, за числом заявок, пов'язаних з системою):

s_0 – усі канали вільні;

s_1 – зайнятий рівно один канал, інші вільні;

………………………………………………………

s_k – зайняті рівно k каналів, інші вільні;

………………………………………………………

s_n – зайняті всі n каналів.

Граф станів СМО представлений на рис. 5.4. Розмітимо граф, тобто проставимо поряд зі стрілками інтенсивності відповідних потоків подій. За стрілками зліва направо систему переводить той самий потік – потік заявок з інтенсивністю λ. Якщо система знаходиться в стані s_k (зайнято k каналів) і прийшла нова заявка, система переходить (перескакує) в стан s_{k+1}.

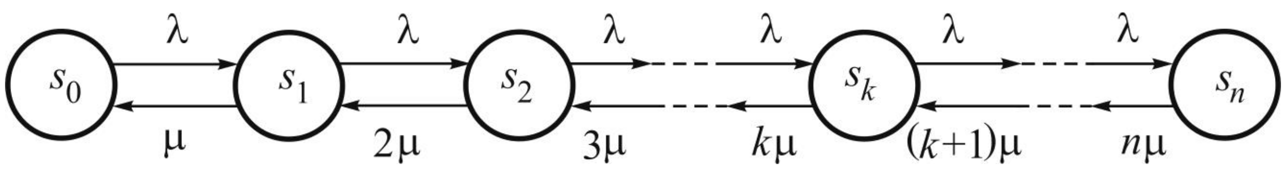

Рис. 5.4. **Граф станів СМО з відмовами**

Визначимо інтенсивності потоків подій, що переводять систему за стрілками справа наліво.

Нехай система знаходиться в стані s_1 (зайнятий один канал). Тоді, як тільки закінчиться обслуговування заявки, що займає цей канал, система перейде в стан s_0; виходить, потік подій, що переводить систему за стрілкою $s_1 \to s_0$, має інтенсивність μ. Якщо обслуговуванням зайнято два канали, а не один, то потік обслуговувань, що переводить систему за стрілкою $s_2 \to s_1$, буде вдвічі інтенсивніше (2μ); якщо зайнято k каналів – у k раз інтенсивніше $(k\mu)$. Проставляємо відповідні інтенсивності біля стрілок, що ведуть справа наліво.

Процес, що протікає в СМО, є окремим випадком процесу розмноження й загибелі. Користуючись загальними правилами, можна скласти рівняння Колмогорова для ймовірностей станів (чого робити не будемо).

Природно, що дослідника більш за все цікавлять граничні ймовірності станів: p_0, p_1, …, p_n, що характеризують усталений режим роботи СМО (при $t \to \infty$).

Для знаходження граничних імовірностей скористаємося вже готовим розв'язком задачі, отриманим для процесу розмноження й загибелі:

$$p_k = \frac{\rho^k}{k!} \cdot p_0,\ k = \overline{1,n};\ p_0 = \left(1 + \frac{\rho}{1!} + \frac{\rho^2}{2!} + \ldots + \frac{\rho^n}{n!} \right)^{-1}, \qquad (5.11)$$

де $\rho = \lambda/\mu$ – так звана **зведена інтенсивність** потоку заявок.

Величина ρ є середньою кількістю заявок, що надходять у СМО за середній час обслуговування однієї заявки.

Формули (5.11) називають **формулами Ерланга**. Вони виражають граничні ймовірності всіх станів системи, залежно від параметрів λ, μ, n: інтенсивності потоку заявок, інтенсивності обслуговування, числа каналів СМО.

Знаючи всі імовірності станів p_0, p_1, …, p_k, …, p_n, можна знайти характеристики ефективності СМО: відносну пропускну здатність q, абсолютну пропускну здатність A та ймовірність відмов $P_{\text{від}}$, середнє число зайнятих каналів $\bar{k}$:

$$\begin{gathered} q = 1 - p_n,\ A = \lambda \cdot q = \lambda \cdot (1 - p_n), \\ P_{\text{від}} = p_n = \frac{\rho^n}{n!} \cdot p_0,\ \bar{k} = \rho \cdot (1 - p_n). \end{gathered} \qquad (5.12)$$

Величину $\bar{k}$ можна обчислити безпосередньо через імовірності p_0, p_1, …, p_k, …, p_n за формулою:

$$\bar{k} = 0 \cdot p_0 + 1 \cdot p_1 + ... + n \cdot p_n .$$

III. Одноканальна СМО з очікуванням (рис. 5.5). Розглянемо спочатку найпростішу з усіх можливих СМО з очікуванням – одноканальну систему ($n = 1$), в яку надходить потік заявок з інтенсивністю λ; інтенсивність обслуговування μ (тобто в середньому безупинно зайнятий канал буде видавати μ заявок, що обслуговуються за одиницю часу). Заявка, що надійшла в момент, коли канал зайнятий, стає в чергу й очікує обслуговування.

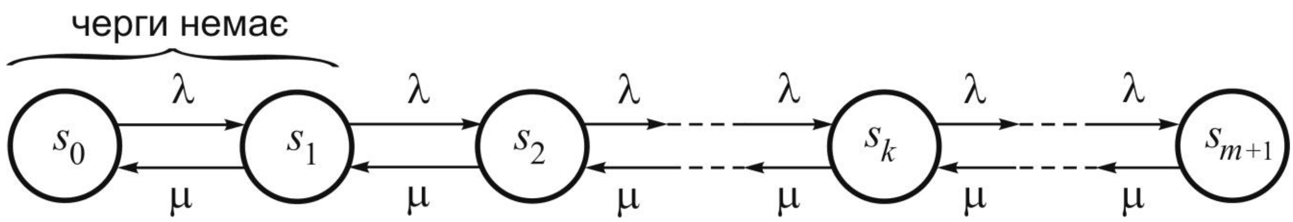

Рис. 5.5. **Граф станів СМО з очікуванням**

Стани СМО занумеровані за кількістю заявок, що знаходяться в системі (вже обслугованих і тих, що очікують обслуговування):

s_0 – канал вільний, s_k – канал зайнятий, ($k-1$)-а заявка стоїть у черзі, $k = 1, 2, 3, ..., m+1$.

Припустимо, спочатку, що кількість місць у черзі обмежена числом m, тобто якщо заявка надійшла в момент, коли в черзі вже стояли m заявок, то вона залишає систему необслугованою. Якщо необмежено збільшувати m ($m \to \infty$), то ми одержимо характеристики одноканальної СМО без обмежень за довжиною черги.

Скористаємося вже готовим розв'язком задачі, отриманим для процесу розмноження й загибелі:

$$p_0 = \frac{1-\rho}{1-\rho^{m+2}}, \quad p_1 = \rho \cdot p_0, \quad p_2 = \rho^2 \cdot p_0, \; ..., \; p_k = \rho^k \cdot p_0, \; ..., \qquad (5.13)$$

$$p_{m+1} = \rho^{m+1} \cdot p_0,$$

де при $\rho = 1$ (розкриттям невизначеності) отримаємо $p_0 = 1/(m+2)$.

На основі (5.13) визначимо характеристики СМО: ймовірність відмови $P_{\text{від}}$, відносну пропускну здатність q, абсолютну пропускну здатність A, середню довжину черги $\bar{r}$ (математичне сподівання), середнє число заявок, пов'язаних із системою:

$$P_{\text{від}} = p_{m+1} = \frac{\rho^{m+1}(1-\rho)}{1-\rho^{m+2}}, \quad q = 1 - P_{\text{від}} = 1 - \frac{\rho^{m+1}(1-\rho)}{1-\rho^{m+2}},$$
$$A = \lambda q, \quad \bar{r} = Mr = \frac{\rho^2(1-\rho^m(m+1-m\rho))}{(1-\rho^{m+2})(1-\rho)}. \tag{5.14}$$

Середня кількість зайнятих каналів $\bar{k}$ (ймовірність події "канали зайняті") підраховується за формулою:

$$\bar{k} = 1 - p_0, \tag{5.15}$$

Середня кількість заявок у системі $\bar{z}$ визначається співвідношенням:

$$\bar{z} = \bar{k} + \bar{r}. \tag{5.16}$$

Середній час перебування заявки в системі $\bar{t}_{\text{СМО}}$ і у черзі $\bar{t}_{\text{чер}}$ такий:

$$\bar{t}_{\text{СМО}} = \bar{z}/\lambda, \quad \bar{t}_{\text{чер}} = \bar{r}/\lambda. \tag{5.17}$$

Формулами (5.13) – (5.17) описуються основні характеристики ефективності роботи СМО.

Дотепер розглядалася робота одноканальної СМО з очікуванням, якщо число m місць у черзі обмежене.

Знімемо це обмеження, тобто спрямуємо m до нескінченності. При цьому число можливих станів системи стане нескінченним і граф станів набуде вигляду, показаного на рис. 5.6.

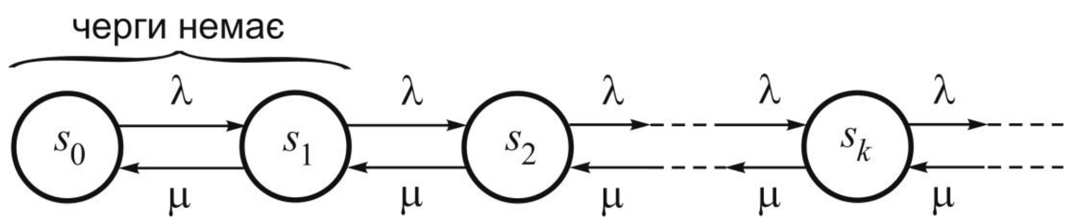

Рис. 5.6. **Граф станів СМО з очікуванням при $m \to \infty$**

Доведено, що граничний усталений режим існує за умови: $\rho < 1$; якщо ж $\rho \geq 1$, то такого режиму не існує, а черга при $t \to \infty$ безмежно збільшується. Спрямуємо у (5.13) m до ∞ та отримаємо формули для граничних імовірностей станів у СМО без обмежень за довжиною черги:

$$p_k = \rho^k (1-\rho), \; k = 0,1,2,\dots , \qquad (5.18)$$

тобто

$$p_0 = 1-\rho, \; p_1 = \rho(1-\rho), \; p_2 = \rho^2(1-\rho), \; \dots .$$

Кожна заявка в такій СМО буде обслугована, тому: $q = 1$, $A = \lambda q = \lambda$. Для інших характеристик за умови $m \to \infty$ отримаємо:

$$\bar{r} = \frac{\rho^2}{1-\rho}, \quad \bar{k} = \rho, \quad \bar{z} = \bar{r} + \bar{k}, \quad \bar{t}_{\text{оч}} = \frac{1}{\mu} \cdot \frac{\rho}{1-\rho}, \quad \bar{t}_{\text{смо}} = \frac{1}{\mu} \cdot \frac{1}{1-\rho}, \qquad (5.19)$$

де, як і в (5.14), $\bar{r}$ – середня довжина черги;

$\bar{k}$ – середня кількість авто, що обслуговуються;

$\bar{z}$ – середня кількість заявок, що перебувають в СМО;

$\bar{t}_{\text{оч}}$ – середній час очікування в черзі;

$\bar{t}_{\text{смо}}$ – середній час перебування заявки в системі.

Зауваження. Випадковий характер потоку заявок може привести до того, що в СМО буде відбуватися якийсь випадковий процес. Щоб дати рекомендації з раціональної організації цього процесу, необхідно його вивчити й описати математично.

Приклад 5.2. Знайти показники ефективності обслуговування для одноканальної СМО ($n = 1$) з очікуванням й обмеженнями на довжину черги ($m = 3$); заявки надходять з інтенсивністю $\lambda = 4$ заявки на годину, час обслуговування $\bar{t}_{\text{обс}} = 0{,}5$ години.

Розв'язання. Обчислюємо показники обслуговування для заданої одноканальної СМО за її описом. Перш за все, за величиною $\bar{t}_{\text{обс}}$ знаходимо інтенсивність обслуговування μ, далі – зведену інтенсивність потоку заявок ρ і ймовірність початкового стану p_0 (див. (5.13)):

$$\mu = 1/\bar{t}_{\text{обс}} = 1/0{,}5 = 2, \quad \rho = \lambda/\mu = 4/2 = 2,$$

$$p_0 = \frac{1-\rho}{1-\rho^{m+2}} = \frac{1-2}{1-\rho^5} = \frac{1}{31}.$$

Визначаємо характеристики ефективності обслуговування.

1. *Ймовірність відмови* (канал зайнятий і всі m місць теж зайняті) (див. (5.14)):

$$P_{\text{від}} = p_{m+1} = \frac{\rho^{m+1}(1-\rho)}{1-\rho^{m+2}} = p_4 = \frac{\rho^4(1-\rho)}{1-\rho^5} = \frac{16(1-2)}{1-32} = \frac{16}{31} \approx 0{,}516.$$

2. *Відносна* пропускна здатність (див. (5.14)):

$$q = P_{\text{обс}} = 1 - P_{\text{від}} = 1 - \frac{16}{31} = \frac{15}{31} \approx 0{,}484.$$

3. *Абсолютна* пропускна здатність (див. (5.14)):

$$A = \lambda \cdot q = 4 \cdot \frac{15}{31} \approx 1{,}936.$$

4. *Середня кількість* зайнятих каналів (імовірність події "канали зайняті") (див. (5.15)):

$$\bar{k} = 1 - p_0 = 1 - \frac{1}{31} = \frac{30}{31} \approx 0{,}968.$$

5. *Середня кількість* заявок у черзі (див. (5.14)):

$$\bar{r} = Mr = \frac{\rho^2(1-\rho^m(m+1-m\rho))}{(1-\rho^{m+2})(1-\rho)} = \frac{4(1-8(4-6))}{(1-32)(1-2)} = \frac{68}{31} \approx 2{,}190.$$

6. *Середня кількість* заявок у системі (див. (5.16)):

$$\bar{z} = \bar{k} + \bar{r} = 0{,}968 + 2{,}190 = 3{,}158.$$

7. *Середній час* перебування заявок у системі й у черзі (див. (5.17)):

$$\bar{t}_{\text{СМО}} = \frac{\bar{z}}{\lambda} = \frac{3{,}158}{4} = 0{,}790, \quad \bar{t}_{\text{чер}} = \frac{\bar{r}}{\lambda} = \frac{2{,}190}{4} \approx 0{,}550.$$

Висновок. За обчисленими показниками СМО потребує покращення роботи шляхом зменшення часу на обслуговування заявок.

Запитання для самоконтролю засвоєння матеріалу

1. У чому полягає мета теорії масового обслуговування (ТМО) або теорії черг?

2. Що є об'єктом, предметом й основною задачею теорії черг?

3. Що розуміють під системою масового обслуговування (СМО)?

4. У чому полягає основна задача СМО?

5. Як трактують основні поняття СМО: вимога (заявка), вхідний потік вимог, час обслуговування?

6. Які приклади СМО ви можете навести?

7. Що розуміють під характеристиками ефективності роботи СМО?

8. Які системи називають СМО з відмовами, СМО з чергою?

9. Які СМО називають відкритими та які замкненими?

10. Що розуміють під дисципліною обслуговування в СМО?

11. Як класифікують СМО з відмовами та СМО з чергою?

12. Яка СМО вважається найпростішою?

13. Що називають інтенсивністю потоку заявок (обслуговування)?

14. Що таке середній час обслуговування однієї заявки?

15. Що називають відносною (абсолютною) пропускною здатністю СМО? Яким співвідношенням вони пов'язані?

16. Який вигляд має граф станів одноканальної СМО з відмовою, СМО з обмеженою чергою та з необмеженою чергою?

17. Який вигляд має система диференціальних рівнянь Колмогорова для одноканальної СМО?

18. Якими формулами визначаються ймовірності подій "канал вільний", "канал зайнятий" для одноканальної СМО?

19. За якою формулою визначають ймовірність відмови заявки $P_{\text{від}}$, що надійшла в СМО?

20. Що таке зведена інтенсивність навантаження СМО (потоку заявок) ρ?

21. Як визначається ймовірність p_0 події "канал вільний"?

22. Як підраховується доля заявок, які отримали відмову?

23. Як підраховується середній час простою СМО $\overline{T}_{\text{пр}}$?

24. За якою формулою визначається середня кількість обслуговуваних заявок $L_{\text{обс}}$?

6. Варіанти задач самостійної контрольної роботи

Задача 1. Задано ВП $\xi(t)$, де $t \in T = [0, +\infty)$ і ВВ u з відомим законом розподілу. Знайдіть: 1) переріз ВП при $t = t_0$; 2) траєкторії ВП (та побудуйте їх).

1.1. $\xi(t) = u \cdot t^2 + 2$, де u – ВВ, закон розподілу якої має вигляд:

$u = y_i$	$-1/2$	1
p_i	0,1	0,9

; $t_0 = 1$.

1.2. $\xi(t) = u \cdot e^t - 1$, де u – ВВ, закон розподілу якої має вигляд:

$u = y_i$	-1	1
p_i	0,8	0,2

; $t_0 = 0$.

1.3. $\xi(t) = u \cdot \cos t$, де u – ВВ, закон розподілу якої має вигляд:

$u = y_i$	-2	2
p_i	0,3	0,7

; $t_0 = \pi/3$.

1.4. $\xi(t) = u \cdot \sin t$, де – ВВ, закон розподілу якої має вигляд:

$u = y_i$	1	2
p_i	0,6	0,4

; $t_0 = \pi/6$.

1.5. $\xi(t) = \dfrac{u}{t+1}$, де u – ВВ, закон розподілу якої має вигляд:

$u = y_i$	-1	2
p_i	0,5	0,5

; $t_0 = 1$.

1.6. $\xi(t) = u \cdot t - 2$, де u – ДВВ, закон розподілу якої має вигляд:

$u = y_i$	-1	3
p_i	0,4	0,6

; $t_0 = 4$.

1.7. $\xi(t)=\ln(t+u)$, де u – ВВ, закон розподілу якої має вигляд:

$u=y_i$	1	e
p_i	0,7	0,3

; $t_0=0$.

1.8. $\xi(t)=\cos(u\cdot t)$, де u – ВВ, закон розподілу якої має вигляд:

$u=y_i$	$1/2$	1
p_i	0,2	0,8

; $t_0=\pi/2$.

1.9. $\xi(t)=\sin(u\cdot t)$, де u – ВВ, закон розподілу якої має вигляд:

$u=y_i$	$1/2$	1
p_i	0,9	0,1

; $t_0=\pi/2$.

1.10. $\xi(t)=e^{-t}+u$, де u – ВВ, закон розподілу якої має вигляд:

$u=y_i$	-1	2
p_i	0,15	0,85

; $t_0=0$.

1.11. $\xi(t)=t^3-u$, де u – ВВ, закон розподілу якої має вигляд:

$u=y_i$	-1	2
p_i	0,75	0,25

; $t_0=1$.

1.12. $\xi(t)=\sqrt{t\cdot u}$, де u – ВВ, закон розподілу якої має вигляд:

$u=y_i$	1	9
p_i	0,35	0,65

; $t_0=4$.

1.13. $\xi(t)=u\cdot e^{-t}+2$, де u – ВВ, закон розподілу якої має вигляд:

$u=y_i$	-1	1
p_i	0,55	0,45

; $t_0=0$.

1.14. $\xi(t)=u\cdot t^2+3$, де u – ВВ, закон розподілу якої має вигляд:

$u=y_i$	-1	$1/2$
p_i	0,1	0,9

; $t_0=2$.

1.15. $\xi(t)=e^t-u$, де u – ВВ, закон розподілу якої має вигляд:

$u=y_i$	-2	2
p_i	0,8	0,2

; $t_0=0$.

1.16. $\xi(t)=u+\cos t+1$, де u – ВВ, закон розподілу якої має вигляд:

$u=y_i$	-1	1
p_i	0,3	0,7

; $t_0=\pi/2$.

1.17. $\xi(t)=\sin t-u+2$, де u – ВВ, закон розподілу якої має вигляд:

$u=y_i$	-2	-1
p_i	0,6	0,4

; $t_0=\pi/2$.

1.18. $\xi(t)=u\cdot(t+1)$, де u – ВВ, закон розподілу якої має вигляд:

$u=y_i$	-2	1
p_i	0,5	0,5

; $t_0=1$.

1.19. $\xi(t)=\dfrac{1}{\sqrt{u}}\cdot\cos t$, де u – ВВ, закон розподілу якої має вигляд:

$u=y_i$	$1/4$	1
p_i	0,4	0,6

; $t_0=\pi/4$.

1.20. ВП $\xi(t)=e^{ut}$, де u – ВВ, закон розподілу якої має вигляд:

$u=y_i$	-1	1
p_i	0,7	0,3

; $t_0=1$.

Задача 2. Для ВП $\xi(t)$ $(t\in T=[0,+\infty))$ і ВВ u, розподіленої за певним законом з відомими параметрами, знайдіть: 1) математичне сподівання $M\xi(t)$; 2) дисперсію $D\xi(t)$; 3) автоковаріаційну функцію $K_\xi(t_1,t_2)$; 4) нормовану автоковаріаційну функцію $\rho_\xi(t_1,t_2)$.

2.1. $\xi(t)=u\cdot\sin t+t^5$, де u – ВВ, розподілена за нормальним законом з параметрами $a=1$ і $\sigma=2$.

2.2. $\xi(t) = u \cdot t + \cos t$, де u – ВВ, розподілена за рівномірним законом на відрізку $[0;6]$.

2.3. $\xi(t) = u \cdot e^t + 3$, де u – ВВ, розподілена за законом Пуассона з параметром $\lambda = 1/5$.

2.4. $\xi(t) = (u+1) \cdot t^2$, де u – ВВ, розподілена за показниковим законом з параметром $\lambda = 0{,}1$.

2.5. $\xi(t) = u \cdot \sin 2t + 3$, де u – ВВ, розподілена за біноміальним законом з параметрами $n = 10$ і $p = 0{,}3$.

2.6. $\xi(t) = u \cdot t^2 - \sin t$, де u – ВВ, розподілена за нормальним законом з параметрами $a = 3$ і $\sigma = 2$.

2.7. $\xi(t) = u \cdot t^3 - 2$, де u – ВВ, розподілена за рівномірним законом на відрізку $[-1;3]$.

2.8. $\xi(t) = t - u \cdot \sin t$, де u – ВВ, розподілена за показниковим законом з параметром $\lambda = 4$.

2.9. $\xi(t) = t + u \cdot t^2$, де u – ВВ, розподілена за законом Пуассона з параметром $\lambda = 2$.

2.10. $\xi(t) = t^2 - u \cdot e^{-2t}$, де u – ВВ, розподілена за нормальним законом з параметрами $a = -1$ і $\sigma = 0{,}7$.

2.11. $\xi(t) = u \cdot \cos 3t - t$, де u – ВВ, розподілена за біноміальним законом з параметрами $n = 10$ і $p = 0{,}6$.

2.12. $\xi(t) = -e^{3t}u + \cos t$, де u – ВВ, розподілена за рівномірним законом на відрізку $[2;4]$.

2.13. $\xi(t) = u \cdot \cos 3t + 1$, де u – ВВ, розподілена за показниковим законом з параметром $\lambda = 0{,}5$.

2.14. $\xi(t) = 3u \cdot \sin t - e^t$, де u – ВВ, розподілена за законом Пуассона з параметром $\lambda = 4$.

2.15. $\xi(t) = 5 + u \cdot \sin t$, де u – ВВ, розподілена за біноміальним законом з параметрами $n = 10$ і $p = 0{,}1$.

2.16. $\xi(t) = t^2 - u \cdot e^{-3t}$, де u – ВВ, розподілена за нормальним законом з параметрами $a = 2$ і $\sigma = 0{,}7$.

2.17. $\xi(t) = u \cdot t - 4t^2$, де u – ВВ, розподілена за рівномірним законом на відрізку $[3;6]$.

2.18. $\xi(t) = u \cdot e^{-3t} + \cos t$, де u – ВВ, розподілена за показниковим законом з параметром $\lambda = 0{,}25$.

2.19. $\xi(t) = -u \cdot e^{-2t} - t$, де u – ВВ, розподілена за законом Пуассона з параметром $\lambda = 2$.

2.20. $\xi(t) = 5t^2 - u \cdot \sin t$, де u – ВВ, розподілена за біноміальним законом з параметрами $n = 10$ і $p = 0{,}4$.

Задача 3. Робота персонального комп'ютера (ПК) описується ланцюгом Маркова з трьома станами: s_1 – ПК у робочому стані; s_2 – ПК у режимі очікування; s_3 – ПК у сплячому режимі.

За заданою матрицею P перехідних ймовірностей за один крок знайдіть: 1) матрицю ймовірностей переходу за два кроки $P(2)$; 2) граничні ймовірності (стаціонарний розподіл); 3) побудуйте граф ланцюга Маркова.

3.1. $P = \begin{pmatrix} 0{,}1 & 0{,}6 & 0{,}3 \\ 0{,}2 & 0{,}4 & 0{,}4 \\ 0{,}5 & 0{,}3 & 0{,}2 \end{pmatrix}$.

3.2. $P = \begin{pmatrix} 0{,}3 & 0{,}6 & 0{,}1 \\ 0{,}4 & 0{,}4 & 0{,}2 \\ 0{,}2 & 0{,}3 & 0{,}5 \end{pmatrix}$.

3.3. $P = \begin{pmatrix} 0{,}4 & 0{,}2 & 0{,}4 \\ 0{,}2 & 0{,}5 & 0{,}3 \\ 0{,}3 & 0{,}1 & 0{,}6 \end{pmatrix}$.

3.4. $P = \begin{pmatrix} 0{,}4 & 0{,}2 & 0{,}4 \\ 0{,}3 & 0{,}5 & 0{,}2 \\ 0{,}6 & 0{,}1 & 0{,}3 \end{pmatrix}$.

3.5. $P = \begin{pmatrix} 0{,}3 & 0{,}2 & 0{,}5 \\ 0{,}3 & 0{,}6 & 0{,}1 \\ 0{,}4 & 0{,}4 & 0{,}2 \end{pmatrix}$.

3.6. $P = \begin{pmatrix} 0{,}5 & 0{,}2 & 0{,}3 \\ 0{,}1 & 0{,}6 & 0{,}3 \\ 0{,}2 & 0{,}4 & 0{,}4 \end{pmatrix}$.

3.7. $P = \begin{pmatrix} 0{,}1 & 0{,}2 & 0{,}7 \\ 0{,}3 & 0{,}3 & 0{,}4 \\ 0{,}6 & 0{,}2 & 0{,}2 \end{pmatrix}$.

3.8. $P = \begin{pmatrix} 0{,}7 & 0{,}2 & 0{,}7 \\ 0{,}4 & 0{,}3 & 0{,}3 \\ 0{,}2 & 0{,}2 & 0{,}6 \end{pmatrix}$.

3.9. $P=\begin{pmatrix}0,2 & 0,6 & 0,2\\ 0,3 & 0,4 & 0,3\\ 0,2 & 0,7 & 0,1\end{pmatrix}.$

3.10. $P=\begin{pmatrix}0,2 & 0,6 & 0,2\\ 0,3 & 0,4 & 0,3\\ 0,1 & 0,7 & 0,2\end{pmatrix}.$

3.11. $P=\begin{pmatrix}0,4 & 0,3 & 0,3\\ 0,7 & 0,1 & 0,2\\ 0,2 & 0,2 & 0,6\end{pmatrix}.$

3.12. $P=\begin{pmatrix}0,3 & 0,3 & 0,4\\ 0,2 & 0,1 & 0,7\\ 0,6 & 0,2 & 0,2\end{pmatrix}.$

3.13. $P=\begin{pmatrix}0,3 & 0,5 & 0,2\\ 0,6 & 0,3 & 0,1\\ 0,8 & 0,1 & 0,1\end{pmatrix}.$

3.14. $P=\begin{pmatrix}0,2 & 0,5 & 0,3\\ 0,1 & 0,3 & 0,6\\ 0,1 & 0,1 & 0,8\end{pmatrix}.$

3.15. $P=\begin{pmatrix}0,1 & 0,1 & 0,8\\ 0,3 & 0,6 & 0,1\\ 0,3 & 0,5 & 0,2\end{pmatrix}.$

3.16. $P=\begin{pmatrix}0,8 & 0,1 & 0,1\\ 0,1 & 0,6 & 0,3\\ 0,2 & 0,5 & 0,3\end{pmatrix}.$

3.17. $P=\begin{pmatrix}0,2 & 0,3 & 0,5\\ 0,1 & 0,8 & 0,1\\ 0,1 & 0,3 & 0,6\end{pmatrix}.$

3.18. $P=\begin{pmatrix}0,5 & 0,3 & 0,2\\ 0,1 & 0,8 & 0,1\\ 0,6 & 0,3 & 0,1\end{pmatrix}.$

3.19. $P=\begin{pmatrix}0,5 & 0,2 & 0,3\\ 0,3 & 0,1 & 0,6\\ 0,3 & 0,3 & 0,4\end{pmatrix}.$

3.20. $P=\begin{pmatrix}0,3 & 0,2 & 0,5\\ 0,6 & 0,1 & 0,3\\ 0,4 & 0,3 & 0,3\end{pmatrix}.$

Задача 4. Автомобіль може перебувати у двох станах – "справний" (s_1) або "ремонт" (s_2). Потік подій, за яким автомобіль переходить зі стану "справний" у стан "ремонт", є найпростішим і характеризується заданою інтенсивністю λ, яку можна трактувати як кількість поломок (відмов) за одиницю часу. Потік відновлень автомобіля також є найпростішим і характеризується заданою інтенсивністю μ, яку можна трактувати як кількість відремонтованих машин за одиницю часу.

Побудувати граф станів системи $S=\{s_1, s_2\}$. Знайти граничні (фінальні) ймовірності стаціонарного режиму роботи системи.

4.1. $\lambda=1{,}2$, $\mu=1{,}80$.

4.2. $\lambda=1{,}3$, $\mu=1{,}95$.

4.3. $\lambda=1{,}4$, $\mu=2{,}10$.

4.4. $\lambda=1{,}5$, $\mu=2{,}25$.

4.5. $\lambda = 1{,}6$, $\mu = 2{,}40$.

4.6. $\lambda = 1{,}7$, $\mu = 2{,}55$.

4.7. $\lambda = 1{,}8$, $\mu = 2{,}70$.

4.8. $\lambda = 1{,}9$, $\mu = 2{,}85$.

4.9. $\lambda = 2{,}1$, $\mu = 3{,}15$.

4.10. $\lambda = 2{,}2$, $\mu = 3{,}30$.

4.11. $\lambda = 2{,}3$, $\mu = 3{,}45$.

4.12. $\lambda = 2{,}4$, $\mu = 3{,}60$.

4.13. $\lambda = 2{,}5$, $\mu = 3{,}75$.

4.14. $\lambda = 2{,}6$, $\mu = 3{,}90$.

4.15. $\lambda = 2{,}7$, $\mu = 4{,}05$.

4.16. $\lambda = 2{,}8$, $\mu = 4{,}20$.

4.17. $\lambda = 2{,}9$, $\mu = 4{,}35$.

4.18. $\lambda = 3{,}0$, $\mu = 4{,}50$.

4.19. $\lambda = 3{,}1$, $\mu = 4{,}65$.

4.20. $\lambda = 3{,}2$, $\mu = 4{,}80$.

Задача 5. Диспетчерська служба має дві лінії зв'язку. Потік викликів є найпростішим, з інтенсивністю λ викликів за хвилину. Середній час переговорів з диспетчером становить $\bar{t}_{\text{обс}}$ хвилин.

Установіть, який тип СМО є математичною моделлю опису роботи диспетчерської служби, побудуйте граф станів відповідної СМО.

Знайдіть основні показники ефективності обслуговування:

1) імовірності перебування диспетчерської служби в тому чи іншому стані – *"всі лінії вільні"*, *"одна лінія зайнята"*, *"обидві лінії зайняті"*;

2) імовірність відмови в обслуговуванні;

3) абсолютну та відносну пропускні спроможності диспетчерської служби;

4) середню кількість зайнятих ліній зв'язку.

Дізнайтеся, як зміниться ймовірність відмови в обслуговуванні, якщо додати ще одну лінію зв'язку?

5.1. $\lambda = 5{,}2$; $\bar{t}_{\text{обс}} = 0{,}5$.

5.2. $\lambda = 4{,}3$; $\bar{t}_{\text{обс}} = 0{,}6$.

5.3. $\lambda = 3{,}7$; $\bar{t}_{\text{обс}} = 0{,}7$.

5.4. $\lambda = 3{,}3$; $\bar{t}_{\text{обс}} = 0{,}8$.

5.5. $\lambda = 2{,}9$; $\bar{t}_{\text{обс}} = 0{,}9$.

5.6. $\lambda = 2{,}6$; $\bar{t}_{\text{обс}} = 1{,}0$.

5.7. $\lambda = 2{,}4$; $\bar{t}_{\text{обс}} = 1{,}1$.

5.8. $\lambda = 2{,}2$; $\bar{t}_{\text{обс}} = 1{,}2$.

5.9. $\lambda = 2{,}0$; $\bar{t}_{\text{обс}} = 1{,}3$.

5.10. $\lambda = 1{,}9$; $\bar{t}_{\text{обс}} = 1{,}4$.

5.11. $\lambda = 1{,}7$; $\bar{t}_{\text{обс}} = 1{,}5$.

5.12. $\lambda = 1{,}5$; $\bar{t}_{\text{обс}} = 1{,}6$.

5.13. $\lambda = 1{,}4$; $\bar{t}_{обс} = 1{,}8$.

5.14. $\lambda = 1{,}3$; $\bar{t}_{обс} = 2{,}0$.

5.15. $\lambda = 1{,}2$; $\bar{t}_{обс} = 2{,}1$.

5.16. $\lambda = 1{,}1$; $\bar{t}_{обс} = 2{,}3$.

5.17. $\lambda = 0{,}9$; $\bar{t}_{обс} = 2{,}8$.

5.18. $\lambda = 1{,}4$; $\bar{t}_{обс} = 1{,}9$.

5.19. $\lambda = 1{,}2$; $\bar{t}_{обс} = 2{,}2$.

5.20. $\lambda = 1{,}5$; $\bar{t}_{обс} = 1{,}7$.

Задача 6. На станцію технічного обслуговування (СТО) надходить найпростіший потік заявок з інтенсивністю λ автомобілів за годину. У дворі в черзі може перебувати не більше трьох машин. Середній час ремонту становить $\bar{t}_{обс}$ годин. Дайте оцінку роботи СМО й розробіть рекомендації щодо поліпшення обслуговування.

Установіть, який тип СМО є математичною моделлю опису роботи СТО, побудуйте граф станів відповідної СМО.

Знайдіть основні показники ефективності обслуговування:

1) імовірність події "канал вільний";

2) частку заявок, які отримали відмову;

3) відносну й абсолютну пропускні здатності;

4) середню довжину черги;

5) середню кількість зайнятих каналів;

6) середню кількість заявок у системі;

7) середній час перебування авто в СМО й у черзі.

6.1. $\lambda = 2{,}00$; $\bar{t}_{обс} = 0{,}50$.

6.2. $\lambda = 1{,}33$; $\bar{t}_{обс} = 0{,}75$.

6.3. $\lambda = 0{,}80$; $\bar{t}_{обс} = 1{,}25$.

6.4. $\lambda = 0{,}67$; $\bar{t}_{обс} = 1{,}50$.

6.5. $\lambda = 0{,}17$; $\bar{t}_{обс} = 6{,}00$.

6.6. $\lambda = 0{,}57$; $\bar{t}_{обс} = 1{,}75$.

6.7. $\lambda = 0{,}50$; $\bar{t}_{обс} = 2{,}00$.

6.8. $\lambda = 0{,}44$; $\bar{t}_{обс} = 2{,}25$.

6.9. $\lambda = 0{,}40$; $\bar{t}_{обс} = 2{,}50$.

6.10. $\lambda = 0{,}36$; $\bar{t}_{обс} = 2{,}75$.

6.11. $\lambda = 0{,}33$; $\bar{t}_{обс} = 3{,}00$.

6.12. $\lambda = 0{,}31$; $\bar{t}_{обс} = 3{,}25$.

6.13. $\lambda = 0{,}29$; $\bar{t}_{обс} = 3{,}50$.

6.14. $\lambda = 0{,}30$; $\bar{t}_{обс} = 3{,}75$.

6.15. $\lambda = 0{,}25$; $\bar{t}_{обс} = 4{,}00$.

6.16. $\lambda = 0{,}24$; $\bar{t}_{обс} = 4{,}25$.

6.17. $\lambda = 0{,}22$; $\bar{t}_{\text{обс}} = 4{,}50$. **6.18.** $\lambda = 0{,}19$; $\bar{t}_{\text{обс}} = 5{,}25$.

6.19. $\lambda = 0{,}18$; $\bar{t}_{\text{обс}} = 5{,}50$. **6.20.** $\lambda = 0{,}17$; $\bar{t}_{\text{обс}} = 5{,}75$.

Задача 7. На автозаправній станції (АЗС) одна заправна колонка. Заправка одного авто триває в середньому $\bar{t}_{\text{обс}}$ хвилин. Для заправки бензином на АЗС в середньому кожні п'ять хвилин прибуває N авто. Усі водії, які стоять у черзі, "терпляче" очікують своєї черги.

Установіть, СМО якого типу є математичною моделлю опису роботи АЗС.

Знайдіть:

1) ймовірності станів у СМО без обмежень;
2) середню довжину черги;
3) середню кількість авто, що обслуговуються;
4) середню кількість заявок, що знаходяться в СМО;
5) середній час очікування в черзі;
6) середній час перебування заявки в системі.

7.1. $N = 10$; $\bar{t}_{\text{обс}} = 0{,}4$. **7.2.** $N = 5$; $\bar{t}_{\text{обс}} = 0{,}8$.

7.3. $N = 9$; $\bar{t}_{\text{обс}} = 0{,}5$. **7.4.** $N = 4$; $\bar{t}_{\text{обс}} = 1{,}0$.

7.5. $N = 8$; $\bar{t}_{\text{обс}} = 0{,}5$. **7.6.** $N = 3$; $\bar{t}_{\text{обс}} = 1{,}5$.

7.7. $N = 7$; $\bar{t}_{\text{обс}} = 0{,}6$. **7.8.** $N = 2$; $\bar{t}_{\text{обс}} = 2{,}0$.

7.9. $N = 6$; $\bar{t}_{\text{обс}} = 0{,}7$. **7.10.** $N = 1$; $\bar{t}_{\text{обс}} = 4{,}0$.

7.11. $N = 1$; $\bar{t}_{\text{обс}} = 3{,}5$. **7.12.** $N = 2$; $\bar{t}_{\text{обс}} = 1{,}8$.

7.13. $N = 3$; $\bar{t}_{\text{обс}} = 1{,}2$. **7.14.** $N = 4$; $\bar{t}_{\text{обс}} = 0{,}9$.

7.15. $N = 5$; $\bar{t}_{\text{обс}} = 0{,}7$. **7.16.** $N = 6$; $\bar{t}_{\text{обс}} = 0{,}6$.

7.17. $N = 7$; $\bar{t}_{\text{обс}} = 0{,}5$. **7.18.** $N = 9$; $\bar{t}_{\text{обс}} = 0{,}4$.

7.19. $N = 10$; $\bar{t}_{\text{обс}} = 0{,}4$. **7.20.** $N = 8$; $\bar{t}_{\text{обс}} = 0{,}5$.

7. Зразки розв'язання задач самостійної контрольної роботи

Задача 1. Задано ВП $\xi(t) = t \cdot u + 1$, де $t \in T = [0,+\infty)$, u – ДВВ, закон розподілу якої має вигляд:

$u = y_i$	-1	1
p_i	0,6	0,4

.

Знайдіть: 1) переріз ВП при $t = 2$; 2) траєкторії ВП (та побудуйте їх).

Розв'язання.

1. Перетином ВП $\xi(t)$ при $t = 2$ є ВВ $\xi(2) = 2 \cdot u + 1$, яка набуває значень $x_1(2) = 2 \cdot y_1 + 1 = 2 \cdot (-1) + 1 = -1$ і $x_2(2) = 2 \cdot y_2 + 1 = 2 \cdot 1 + 1 = 3$ з імовірностями $p_1 = P(\xi(2) = -1) = P(u = -1) = 0{,}6$ і $p_2 = P(\xi(2) = 3) = P(u = 1) = 0{,}4$ відповідно. Тоді закон розподілу ВВ $\xi(2) = 2 \cdot u + 1$ має вигляд:

$\xi(2) = x_i$	-1	3
p_i	0,6	0,4

.

2. Траєкторіями даного ВП є невипадкові функції, які отримуються з ВП, коли ВВ η набуває певних значень (рис. 7.1):

$$u = y_1 = -1 \;\Rightarrow\; x_1(t) = t \cdot (-1) + 1 = -t + 1;$$
$$u = y_2 = 1 \;\Rightarrow\; x_2(t) = t \cdot 1 + 1 = t + 1.$$

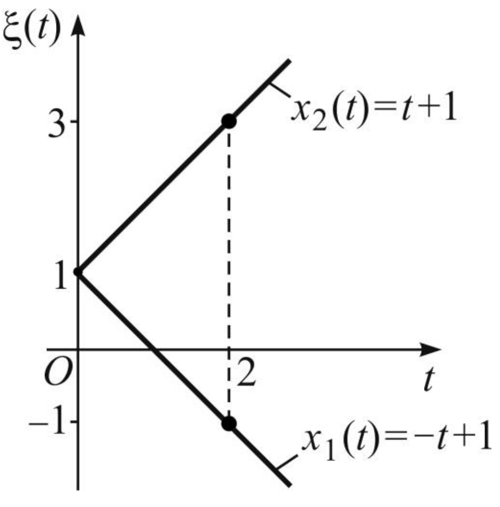

Рис. 7.1. **Перерізи та траєкторії ВП**

Задача 2. Для ВП $\xi(t) = u \cdot \sin 2t$ ($t \in T = [0, +\infty)$), де u – ВВ, розподілена за нормальним законом з параметрами $a = 2$ і $\sigma = \sqrt{3}$, знайдіть: 1) математичне сподівання $M\xi(t)$; 2) дисперсію $D\xi(t)$; 3) автоковаріаційну функцію $K_\xi(t_1, t_2)$; 4) нормовану автоковаріаційну функцію $\rho_\xi(t_1, t_2)$.

Розв'язання.

За відомим законом розподілу ВВ u та його параметрами знаходимо Mu і Du (додаток А):

$$Mu = a = 2, \quad Du = \sigma^2 = 3.$$

1. За властивістю **3** $M\xi(t)$ невипадкову функцію $\varphi(t)$ можна виносити за знак математичного сподівання (див. (2.10)), тому:

$$M\xi(t) = M(u \cdot \sin 2t) = \sin 2t \cdot Mu = 2\sin 2t.$$

2. За властивістю **4** $D\xi(t)$ невипадкову функцію можна виносити за знак дисперсії в квадраті (див. (2.20)), тоді:

$$D\xi(t) = D(u \cdot \sin 2t) = \sin^2 2t \cdot Du = 3\sin^2 2t.$$

3. За формулою (2.5) знаходимо центровані процеси в моменти часу t_1, t_2 та застосовуємо формулу (2.23) для відшукання $K_\xi(t_1, t_2)$ із залученням властивості **4** (див. (2.27)):

$$\overset{\circ}{\xi}(t_1) = \xi(t_1) - M\xi(t_1) = u \cdot \sin 2t_1 - 2\sin 2t_1 = (u-2)\sin 2t_1;$$

$$\overset{\circ}{\xi}(t_2) = \xi(t_2) - M\xi(t_2) = u \cdot \sin 2t_2 - 2\sin 2t_2 = (u-2)\sin 2t_2;$$

$$K_\xi(t_1, t_2) = M(\overset{\circ}{\xi}(t_1) \cdot \overset{\circ}{\xi}(t_2)) = M((u-2)\sin 2t_1 \cdot (u-2)\sin 2t_2) =$$
$$= \sin 2t_1 \cdot \sin 2t_2 \cdot M((u-2)^2) = \sin 2t_1 \cdot \sin 2t_2 \cdot Du = 3\sin 2t_1 \sin 2t_2.$$

4. Обчислюємо н. а. к. ф. за формулою (2.29):

$$\rho(t_1, t_2) = \frac{K_\xi(t_1, t_2)}{\sqrt{D\xi(t_1) \cdot D\xi(t_2)}} = \frac{3\sin 2t_1 \cdot \sin 2t_2}{\sqrt{3\sin^2 2t_1 \cdot 3\sin^2 2t_2}} = 1.$$

Задача 3. Робота персонального комп'ютера (ПК) описується ланцюгом Маркова з трьома станами: s_1 – ПК у робочому стані; s_2 – ПК у режимі очікування; s_3 – ПК у сплячому режимі. За заданою матрицею P перехідних ймовірностей за один крок знайти: 1) матрицю ймовірностей переходу за два кроки $P(2)$; 2) граничні ймовірності (стаціонарний розподіл); 3) побудувати граф ланцюга Маркова.

$$P = \begin{array}{c} \\ s_1 \\ s_2 \\ s_3 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} s_1 & s_2 & s_3 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0{,}5 & 0{,}4 & 0{,}1 \\ 0{,}6 & 0{,}2 & 0{,}2 \\ 0{,}3 & 0{,}4 & 0{,}3 \end{bmatrix} \end{array}.$$

Розв'язання.

1. Для отримання матриці $P(2)$ множимо матрицю P саму на себе:

$$P(2) = \begin{bmatrix} 0{,}5 & 0{,}4 & 0{,}1 \\ 0{,}6 & 0{,}2 & 0{,}2 \\ 0{,}3 & 0{,}4 & 0{,}3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0{,}5 & 0{,}4 & 0{,}1 \\ 0{,}6 & 0{,}2 & 0{,}2 \\ 0{,}3 & 0{,}4 & 0{,}3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0{,}52 & 0{,}32 & 0{,}16 \\ 0{,}48 & 0{,}36 & 0{,}16 \\ 0{,}48 & 0{,}32 & 0{,}20 \end{bmatrix}.$$

Для контролю правильності підрахунків обов'язково перевіряємо, чи буде сума елементів кожного рядка матриці $P(2)$ дорівнювати 1 (*чому?*).

2. Складаємо систему (4.12) для $m = 3$ і розв'язуємо її:

$$\begin{cases} b_1 + b_2 + b_3 = 1, \\ b_1 p_{11} + b_2 p_{21} + b_3 p_{31} = b_1, \\ b_1 p_{12} + b_2 p_{22} + b_3 p_{32} = b_2, \\ b_1 p_{13} + b_2 p_{23} + b_3 p_{33} = b_3 \end{cases} \Rightarrow \left| \begin{array}{c} \text{відкидаємо друге рівняння} \\ \text{й підставляємо } p_{ij} \text{ із матриці } P \end{array} \right| \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} b_1 + b_2 + b_3 = 1, \\ 0{,}4b_1 + 0{,}2b_2 + 0{,}4b_3 = b_2, \\ 0{,}1b_1 + 0{,}2b_2 + 0{,}3b_3 = b_3 \end{cases} \Rightarrow \left| \begin{array}{c} \text{переносимо } b_2, b_3 \text{ із правих} \\ \text{частин рівнянь у ліві} \end{array} \right| \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} b_1 + b_2 + b_3 = 1, \\ 0{,}4b_1 - 0{,}8b_2 + 0{,}4b_3 = 0, \\ 0{,}1b_1 + 0{,}2b_2 - 0{,}7b_3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \left| \begin{array}{c} \text{спрощуємо систему та розв'язуємо} \\ \text{її одним із відомих способів} \end{array} \right| \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} b_1 + b_2 + b_3 = 1, \\ b_1 - 2b_2 + b_3 = 0, \\ b_1 + 2b_2 - 7b_3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \left|\ \text{за правилом Крамера}\ \right| \Rightarrow$$

$$\Rightarrow b = (b_1, b_2, b_3) = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{6}\right).$$

Висновок. За тривалого часу роботи ПК (без зміни умов роботи) слід очікувати, що ймовірності станів s_1, s_2, s_3 розподіляться у відношенні $3{:}2{:}1$.

Для зображення ЛМ графом зробимо ліворуч і зверху матриці P написи, що відповідають станам ланцюга, які полегшують побудову графа (рис. 7.2):

$$P = \begin{array}{c} \\ s_1 \\ s_2 \\ s_3 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} s_1 & s_2 & s_3 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0{,}5 & 0{,}4 & 0{,}1 \\ 0{,}6 & 0{,}2 & 0{,}2 \\ 0{,}3 & 0{,}4 & 0{,}3 \end{bmatrix} \end{array} \Rightarrow$$

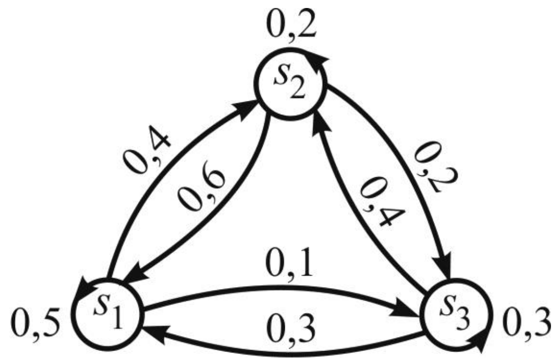

Рис. 7.2. **Граф ланцюга Маркова**

За допомогою графа легко простежити виконання властивості рядків стохастичної матриці: сума написів над орієнтованими ребрами, які виходять із вершин, дорівнює одиниці.

Задача 4. Персональний комп'ютер (ПК) може знаходитися у двох станах – справний (s_1) або в ремонті (s_2). Потік подій, за яким ПК переходить зі стану "справний" у стан "ремонт", є найпростішим і характеризується заданою інтенсивністю $\lambda = 2$, яку можна трактувати як кількість поломок (відмов) за одиницю часу. Потік відновлень ПК також є найпростішим і характеризується заданою інтенсивністю $\mu = 3$, яку можна трактувати як кількість відремонтованих ПК за одиницю часу.

Побудуйте граф станів ПК. Знайдіть граничні (фінальні) ймовірності стаціонарного режиму роботи ПК.

Розв'язання.

Граф станів ПК зображений на рис. 7.3.

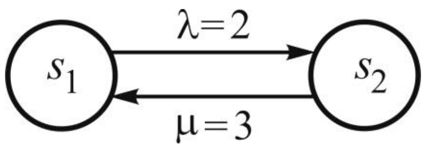

Рис. 7.3. **Граф станів ПК**

1. *Ключем* до відшукання граничних усталених імовірностей станів системи $S = \{s_1, s_2\}$ є система диференціальних рівнянь Колмогорова (див. (4.10)):

$$\dot{p}_j(t) = \frac{dp_j(t)}{dt} = \sum_{i=1}^{m} p_i(t) \cdot \lambda_{ij} - p_j(t) \sum_{i=1}^{m} \lambda_{ji}, \quad j = 1, 2, ..., m,$$

тобто функціонування системи S є марківським процесом типу ДН з початковими умовами:

$t = 0$, $(p_1(0), \ p_2(0), ..., p_m(0))$ – вектор початкових імовірностей.

Зміна ймовірності $p_1(t)$, тобто похідна $\dot{p}_1(t)$, збільшується за рахунок виходу з ремонту та зменшується за рахунок перебування ПК у ремонті. Це й відображають складові в першому рівнянні (відповідно зі знаком "+" і "–").

За умовою задачі потік подій є найпростішим, тому λ_{ij} – інтенсивність вхідного потоку відмов, яка відповідає переходу зі стану s_1 в стан s_2, – є сталою величиною: $\lambda_{ij} = \lambda - const$, як і λ_{ji} – інтенсивність потоку відновлення, яка відповідає переходу зі стану s_2 в стан s_1, – є сталою величиною: $\lambda_{ji} = \mu - const$.

Відповідна система Колмогорова має вигляд:

$$\begin{cases} \dot{p}_1(t) = \dfrac{dp_1(t)}{dt} = \mu \cdot p_2(t) - \lambda \cdot p_1(t), \\ \dot{p}_2(t) = \dfrac{dp_2(t)}{dt} = \lambda \cdot p_1(t) - \mu \cdot p_2(t), \end{cases}$$

а початкові умови:

$$(p_1(t)\big|_{t=0},\ p_2(t)\big|_{t=0}) = (p_{10}, p_{20});$$
$$p_{10} + p_{20} = 1.$$

Записана система диференціальних рівнянь першого порядку є однорідною зі сталими коефіцієнтами. Умова стаціонарності для такої системи – рівність нулю її правої частини:

$$\begin{cases} \mu \cdot p_2(t) - \lambda \cdot p_1(t) = 0, \\ \lambda \cdot p_1(t) - \mu \cdot p_2(t) = 0. \end{cases}$$

Рівняння системи є залежними, оскільки в сумі вони дають нуль, тому замість одного з них використовуємо нормоване рівняння:

$$p_1(t) + p_2(t) = 1,$$

де $p_1(t)$, $p_2(t)$ – фінальні ймовірності, які отримуються за умови $t \to \infty$.

2. *Розв'язуємо* систему, відкидаючи, наприклад, перше рівняння:

$$\begin{cases} p_1 + p_2 = 1, \\ \lambda \cdot p_1 - \mu \cdot p_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} p_2 = 1 - p_1, \\ \lambda \cdot p_1 - \mu \cdot p_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} p_2 = 1 - p_1, \\ (\lambda + \mu) \cdot p_1 = \mu \end{cases} \Rightarrow \left(p_1 = \frac{\mu}{\lambda + \mu},\ p_2 = \frac{\lambda}{\lambda + \mu} \right) \Rightarrow \left| \begin{matrix} \lambda = 2 \\ \mu = 3 \end{matrix} \right| \Rightarrow$$
$$\Rightarrow\ (p_1 = 3/5 = 0{,}6;\ p_2 = 2/5 = 0{,}4).$$

Подія (стан) s_1 настає за рахунок того, що здійснюється перехід із стану "ремонт" (s_2) з інтенсивністю μ. Таким чином перший доданок показує приріст ймовірності, а зменшення ймовірності походить від того, що здійснюється зворотний перехід до іншого вузла з інтенсивністю λ.

Дамо пояснення на прикладі комп'ютерів: $p_1(t)$ – ймовірність того, що ПК справний, може бути визначена як відношення проміжку перебування в справному стані до загального часу протікання процесу.

Що збільшує проміжок справного стану? Перехід з несправного стану в справний з інтенсивністю μ. А що зменшує цей проміжок? Відповідно, зворотний перехід з інтенсивністю λ. Якщо ПК ламаються і ремонтуються з однаковою інтенсивністю, то можна припустити, що ймовірності перебування в обох станах однакові: $p_1 = p_2$.

Якщо ПК ламаються часто, а ремонт відбувається повільно, то ймовірність бути в несправному стані буде більше ніж у справному.

Таким чином, зміна ймовірності $p_1(t)$, тобто похідна $\dot{p}_1(t)$, збільшується за рахунок виходу з ремонту та зменшується за рахунок знаходження ПК у ремонті. Це й відображають складові першого рівняння (відповідно зі знаком "$+$" і "–"). Імовірність $p_2(t)$ того, що ПК несправний, може бути визначена як відношення часу несправного стану до загального часу протікання процесу.

Якщо вже описані два можливих стани ПК, які перебувають в одній мережі з іншими, то можна визначити кількісний склад всієї мережі ПК, штатний склад співробітників ОЦ та інше.

Задача 5. Диспетчерська служба має дві лінії зв'язку. Потік викликів є найпростішим з інтенсивністю $0{,}8$ викликів за хвилину. Середній час переговорів з диспетчером складає три хвилини.

Установіть, який тип СМО є математичною моделлю опису роботи диспетчерської служби, побудуйте граф станів відповідної СМО.

Знайдіть основні показники ефективності обслуговування:

1) імовірності перебування диспетчерської служби в тому чи іншому стані – *"всі лінії вільні"*, *"одна лінія зайнята"*, *"обидві лінії зайняті"*;

2) імовірність відмови в обслуговуванні;

3) абсолютну та відносну пропускні спроможності диспетчерської служби;

4) середню кількість зайнятих ліній зв'язку.

Дізнайтеся, як зміниться ймовірність відмови в обслуговуванні, якщо додати ще одну лінію зв'язку?

Розв'язання.

Аналізуємо умову задачі й приходимо до висновку, що математичною моделлю опису роботи диспетчерської служби є двоканальна СМО ($n = 2$) з відмовами, бо виклик, який надходить у момент, коли обидві лінії зв'язку зайняті, не може бути обслугованим.

Інтенсивність обслуговування становить $0{,}8$ викликів за хвилину: $\lambda = 0{,}8$; *середній час переговорів* $\bar{t}_{обс}$ складає 3 хвилини: $\bar{t}_{обс} = 3$; тобто інтенсивність потоку заявок за середнім часом обслуговування однієї заявки дорівнює:

$$\mu = 1/\bar{t}_{обс} = 1/3 \text{ розмов за хвилину.}$$

Будуємо граф станів досліджуваної СМО (рис. 7.4) й обчислюємо показники її ефективності обслуговування.

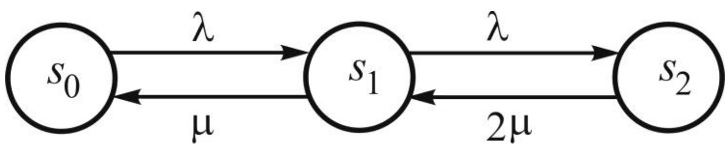

Рис. 7.4. **Граф станів двоканальної СМО з відмовами**

За розрахунковими формулами (5.11), (5.12) й інтенсивностями: $\lambda = 0{,}8$, $\mu = 1/3$, знаходимо потрібні характеристики.

Зведена інтенсивність навантаження СМО (потоку заявок):

$$\rho = \frac{\lambda}{\mu} = \lambda \cdot \bar{t}_{обс} = 0{,}8 \cdot 3 = 2{,}4.$$

1. *Граничний розподіл* ймовірностей станів обчислюємо за формулами Ерланга (5.11):

$$p_k = \frac{\rho^k}{k!} \cdot p_0,\ k = \overline{1,2}; \quad p_0 = \left(1 + \frac{\rho}{1!} + \frac{\rho^2}{2!}\right)^{-1}.$$

Таким чином:

$$p_0 = \left(1 + \frac{2{,}4}{1} + \frac{5{,}76}{2}\right)^{-1} = \left(1 + 2{,}4 + 2{,}88\right)^{-1} = 1/6{,}28 \approx 0{,}16 \ –$$

імовірність події "обидва канали вільні";

$$p_1 = \rho \cdot p_0 = 2{,}40 \cdot 0{,}16 \approx 0{,}38 \ –$$

імовірність події "зайнятий тільки один канал";

$$p_2 = \frac{\rho^2}{2} \cdot p_0 \; = 2{,}88 \cdot 0{,}16 \approx 0{,}46 \; -$$

імовірність події "зайняті обидва канали".

Для контролю правильності обчислень залучаємо співвідношення:

$$p_0 + p_1 + p_2 = 1.$$

2. *Доля (частка) заявок*, *які отримали відмову*:

$$P_{\text{від}} = p_2 = 0{,}46\,,$$

а це означає, що $46\,\%$ з числа заявок, що надійшли, не приймаються до обслуговування.

3. *Абсолютна пропускна здатність:*

$$A = \lambda \cdot (1 - p_2) \;\Rightarrow\; \left| \begin{array}{c} \lambda = 0{,}80 \\ p_2 = 0{,}46 \end{array} \right| \;\Rightarrow\; A = 0{,}80 \cdot 0{,}54 = 4{,}32 \text{ розмов/хв.}$$

Відносна пропускна здатність – частка виконаних заявок із тих, що надійшли протягом одиниці часу – хвилини:

$$q = 1 - p_2 = 1 - 0{,}46 = 0{,}54\,,$$

що означає – $54\,\%$ з числа заявок, що надійшли в СМО, обслуговуються.

Можна було вчинити навпаки – спочатку знайти q, а потім A:

$$A = q \cdot \lambda \;\Rightarrow\; \left| \begin{array}{c} \lambda = 0{,}80 \\ q = 0{,}54 \end{array} \right| \;\Rightarrow\; A = 0{,}54 \cdot 0{,}80 = 4{,}32 \text{ розмов/хв.}$$

4. *Середня кількість зайнятих ліній зв'язку:*

$$\bar{k} = \rho \cdot (1 - p_2) \;\Rightarrow\; \left| \begin{array}{c} \rho = 2{,}40 \\ p_2 = 0{,}46 \end{array} \right| \;\Rightarrow\; \bar{k} = 2{,}40 \cdot (1 - 0{,}46) = 1{,}30\,.$$

Аналізуючи отримані характеристики, бачимо, що така диспетчерська служба мало ефективна, бо слід чекати $46\,\%$ відмов із числа запитів:

$$P_{\text{від}} = p_2 = 0{,}46\,.$$

Покладемо в (5.11) $n = 3$:

$$p_k = \frac{\rho^k}{k!} \cdot p_0, \quad k = \overline{1,3}; \quad p_0 = \left(1 + \frac{\rho}{1!} + \frac{\rho^2}{2!} + \frac{\rho^3}{3!} \right)^{-1},$$

і підрахуємо нове $P_{\text{від}}$:

$$p_0 = \left(1 + \frac{2{,}40}{1!} + \frac{2{,}40^2}{2!} + \frac{2{,}40^3}{3!} \right)^{-1} = (1 + 2{,}40 + 2{,}88 + 2{,}31)^{-1} = \frac{1}{9{,}59};$$

$$P_{\text{від}} = p_3 = \frac{\rho^3}{3!} \cdot p_0 = 2{,}31 \cdot \frac{1}{9{,}59} \approx 0{,}24.$$

Висновок. Імовірність відмови зменшилася майже вдвічі, тому за тих самих λ і μ збільшенням кількості ліній зв'язку можна зробити відмови практично неможливими, тобто досягти $P_{\text{від}} < 0{,}01$.

Задача 6. На станцію технічного обслуговування (СТО) надходить найпростіший потік заявок з інтенсивністю один автомобіль за дві години. У дворі в черзі може перебувати не більше трьох машин. Середній час ремонту становить дві години. Дайте оцінку роботи СМО й розробіть рекомендації щодо поліпшення обслуговування.

Установіть, який тип СМО є математичною моделлю опису роботи СТО, побудуйте граф станів відповідної СМО.

Знайдіть основні показники ефективності обслуговування:

1) імовірність події "канал вільний";

2) частку заявок, які отримали відмову;

3) відносну й абсолютну пропускні здатності;

4) середню довжину черги;

5) середню кількість зайнятих каналів;

6) середню кількість заявок у системі;

7) середній час перебування авто в СМО й у черзі.

Розв'язання.

Аналізуємо умову задачі й приходимо до висновку, що математичною моделлю опису роботи СТО є одноканальна СМО ($n = 1$) з очікуванням: довжина черги $m = 3$.

Інтенсивність обслуговування становить $1/2$ авто за годину: $\lambda = 0{,}5$; *середній час ремонту* складає 2 години: $\bar{t}_{\text{обс}} = 2$; тобто інтенсивність потоку заявок за середнім часом обслуговування однієї заявки дорівнює:

$$\mu = \frac{1}{\bar{t}_{\text{обс}}} = \frac{1}{2} \text{ авто за год.}$$

Зведена інтенсивність потоку заявок:

$$\rho = \frac{\lambda}{\mu} = \lambda \cdot \bar{t}_{\text{обс}} = 0{,}5 \cdot 2 = 1.$$

Будуємо граф станів досліджуваної СМО (рис. 7.5) й обчислюємо показники її ефективності обслуговування.

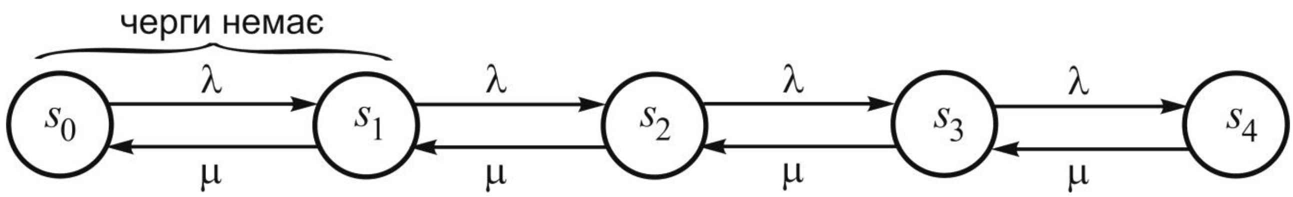

Рис. 7.5. **Граф станів СМО з очікуванням** ($\boldsymbol{m = 3}$)

За розрахунковими формулами (5.13) – (5.17) обчислюємо інші показники ефективності СМО.

Зауважимо, що інтенсивність навантаження $\rho = 1$ показує ступінь узгодженості вхідного й вихідного потоків заявок каналу обслуговування й визначає стійкість СМО.

1. *Імовірність події "канал вільний"* (згідно з (5.13)):

$$p_0 = \frac{1}{m+2} \;\Rightarrow\; \left|\; m = 3 - \text{довжина черги} \;\right| \;\Rightarrow\; p_0 = \frac{1}{5} = 0{,}2.$$

Отже, $20\,\%$ протягом однієї години канал буде не зайнятий; час простою:

$$t_{\text{пр}} = 12 \text{ хв.}$$

2. *Частка заявок*, *які отримали відмову* (див. (5.13)):

$$P_{\text{від}} = p_4 = \rho^4 \cdot p_0 = 1 \cdot 0{,}2 = 0{,}2.$$

3. *Відносна пропускна здатність* q (див. (5.14)):

$$q = 1 - P_{\text{від}} = 1 - 0{,}2 = 0{,}8.$$

4. *Абсолютна пропускна здатність* A (див. (5.14)):

$$A = \lambda q \;\Rightarrow\; \left| \begin{array}{l} \lambda = 0{,}5 \\ q = 0{,}8 \end{array} \right| \;\Rightarrow\; A = 0{,}5 \cdot 0{,}8 = 0{,}4.$$

Отже, середня кількість заявок на ремонт авто незначна.

5. *Середня довжина черги* $\bar{r}$ (математичне сподівання) (див. (5.14)):

$$\bar{r} = Mr = \frac{\rho^2(1-\rho^3(3+1-3\rho))}{(1-\rho^{3+2})(1-\rho)} = \frac{3\rho^2 + 2\rho + 1}{\rho^4 + \rho^3 + \rho^2 + \rho + 1} = \frac{6}{5} = 1{,}2.$$

6. *Середня кількість зайнятих каналів* $\bar{k}$ (див. (5.15)):

$$\bar{k} = 1 - p_0 = 1 - 0{,}2 = 0{,}8,$$

тобто ймовірність події "канали зайняті".

7. *Середня кількість заявок у системі* $\bar{z}$ (див. (5.16)):

$$\bar{z} = \bar{k} + \bar{r} = 0{,}8 + 1{,}2 = 2.$$

8. *Середній час перебування авто в СМО* $\bar{t}_{\text{СМО}}$ *й у черзі* $\bar{t}_{\text{чер}}$ (див. (5.17)):

$$\bar{t}_{\text{СМО}} = \frac{\bar{z}}{\lambda} = \frac{2}{0{,}5} = 4 \text{ год.}, \quad \bar{t}_{\text{чер}} = \frac{\bar{r}}{\lambda} = \frac{1{,}2}{0{,}5} = 2{,}4 \text{ год.}$$

Висновок. За підрахованими показниками ефективності вважаємо роботу СТО цілком задовільною, хоча середній час перебування авто в СМО й у черзі бажано зменшити. Це можна здійснити, наприклад, збільшенням інтенсивності обслуговування.

Задача 7. На автозаправній станції (АЗС) одна заправна колонка. Заправка одного авто триває в середньому три хвилини. Для заправки бензином на АЗС у середньому кожні десять хвилин прибуває три авто. Усі водії, які стоять у черзі, "терпляче" очікують своєї черги.

Установіть, СМО якого типу є математичною моделлю опису роботи АЗС.

Знайдіть:

1) імовірності станів у СМО без обмежень;

2) середню довжину черги;

3) середню кількість автомобілів, що обслуговуються;

4) середню кількість заявок, що знаходяться в СМО;

5) середній час очікування в черзі;

6) середній час перебування заявки в системі.

Розв'язання.

Аналізуємо умову задачі й приходимо до висновку, що математичною моделлю опису роботи АЗС є одноканальна СМО ($n = 1$) без обмежень за довжиною черги ($m \to \infty$).

Інтенсивність потоку заявок становить $3/10$ авто за хвилину: $\lambda = 0{,}3$; *середній час заправки* $\bar{t}_{\text{обс}}$ складає 3 хвилини: $\bar{t}_{\text{обс}} = 3$; тобто інтенсивність потоку заявок за середнім часом обслуговування однієї заявки дорівнює:

$$\mu = \frac{1}{\bar{t}_{\text{обс}}} = \frac{1}{3} \text{ авто за хв.}$$

Зведена інтенсивність потоку заявок:

$$\rho = \frac{\lambda}{\mu} = \lambda \cdot \bar{t}_{\text{обс}} = 0{,}3 \cdot 3 = 0{,}9 < 1,$$

тому існує граничний усталений стан АЗС.

Граф станів досліджуваної СМО зображений на рис. 7.6.

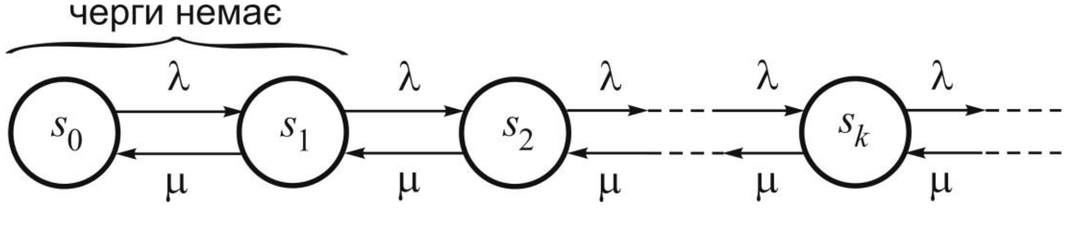

Рис. 7.6. **Граф станів СМО з очікуванням при $m \to \infty$**

За розрахунковими формулами (5.18) – (5.19) обчислюємо інші показники ефективності СМО:

1. *Імовірності станів* у СМО без обмежень за довжиною черги: $p_k = \rho^k(1-\rho)$ $(k = 0,1,2,...)$:

$$p_0 = \rho^0(1-\rho) = 1 - 0{,}9 = 0{,}1;$$
$$p_1 = \rho(1-\rho) = 0{,}9 \cdot 0{,}1 = 0{,}09;$$
$$p_2 = \rho^2(1-\rho) = 0{,}81 \cdot 0{,}1 \approx 0{,}08, \ \dots .$$

2. *Середня довжина черги:*

$$\bar{r} = \frac{\rho^2}{1-\rho} = \frac{0{,}81}{1-0{,}9} = \frac{0{,}81}{0{,}10} = 8{,}10 \text{ авто.}$$

3. *Середня кількість авто*, що обслуговуються:

$$\bar{k} = \rho = 0{,}9.$$

4. *Середня кількість заявок*, що знаходяться в СМО:

$$\bar{z} = \bar{r} + \bar{k} = \frac{\rho}{1-\rho} = \frac{0{,}9}{0{,}1} = 9 \text{ заявки.}$$

5. *Середній час очікування* в черзі:

$$\bar{t}_{\text{оч}} = \frac{1}{\mu} \cdot \frac{\rho}{1-\rho} = \frac{1}{1/3} \cdot \frac{0{,}9}{1-0{,}9} = 3 \cdot 9 = 27 \text{ хв.}$$

6. *Середній час перебування* заявки в системі:

$$\bar{t}_{\text{СМО}} = \frac{1}{\mu} \cdot \frac{1}{1-\rho} = \frac{1}{1/3} \cdot \frac{1}{1-0{,}9} = 3 \cdot \frac{1}{0{,}1} = 30 \text{ хв.}$$

Висновок. За всіма показниками слід покращити роботу АЗС збільшенням кількості заправних колонок.

8. Рекомендована література

8.1. Основна

1. Вентцель Е. С. Теория случайных процессов и ее инженерные приложения : учеб. пособ. / Е. С. Вентцель, Л. А. Овчаров. – 5-е изд., стер. – Москва : КНОРУС, 2013. – 448 с.

2. Волков И. К. Случайные процессы : учебник для вузов / И. К. Волков, С. М. Зуев, Т. М. Цветкова. – Москва : Изд-во МГТУ им. Н. Э. Баумана, 2000. – 448 с.

3. Гихман И. И. Введение в теорию случайных процессов : учебное пособие для вузов / И. И. Гихман, А. В. Скороход. – Москва : Наука, 1977. – 568 с.

4. Гмурман В. Е. Руководство к решению задач по теории вероятностей и математической статистике / В. Е. Гмурман. – Москва : Высшая школа, 2001. – 575 с.

5. Гмурман В. Е. Теория вероятностей и математическая статистика : учебное пособие для вузов / В. Е. Гмурман. – 6-е изд. – Москва : Высшая школа, 1998. – 480 с.

6. Гнеденко Б. В. Беседы о теории массового обслуживания / Б. В. Гнеденко. – Москва : Знание, 1973. – 64 с.

7. Коваленко И. Н. Теория вероятностей : учебник / И. Н. Коваленко, Б. В. Гнеденко. – Киев : Выща школа. – 1990. – 328 с.

8. Коломієць С. В. Теорія випадкових процесів : навчальний посібник у 2 ч. / С. В. Коломієць ; Державний вищий навчальний заклад "Українська академія банківської справи Національного банку України". – Ч. 2. – Суми : ДВНЗ "УАБС НБУ", 2013. – 103 с.

9. Коломієць С. В. Теорія випадкових процесів : практикум / С. В. Коломієць ; Державний вищий навчальний заклад "Українська академія банківської справи Національного банку України". – Суми : ДВНЗ “УАБС НБУ”, 2011. – 80 с.

10. Малярець Л. М. Математика для економістів. Теорія ймовірностей та математична статистика : навчальний посібник. Ч. 3. / Л. М. Малярець, І. Л. Лебедєва, Л. Д. Широкорад. – Харків : Вид. ХНЕУ, 2011. – 568 с.

11. Малярець Л. М. Теорія ймовірностей і математична статистика у вправах, прикладах та задачах : навч.-практ. посіб. / Л. М. Малярець, А. В. Ігначкова, Л. Д. Широкорад. – Харків : Вид. ХНЕУ, 2010. – 548 с.

12. Миллер Б. М. Случайные процессы в примерах и задачах / Б. М. Миллер, А. Р. Панков. – Москва : Изд. МАИ, 2001. – 316 с.

13. Надеинский В. П. Методические советы студентам, обучающимся в высших учебных заведениях с отрывом от производства / В. П. Надеинский. – Москва : Высш. школа, 1971. – 80 с.

14. Павлов И. П. Полное собрание сочинений: в 6-ти т., Т.1 / И. П. Павлов. – Москва : Изд. АН СССР, 1951. – 220 с.

15. Письменный Д. Т. Конспект лекций по теории вероятностей, математической статистике и случайным процессам / Д. Т. Письменный. – 3-е изд. – Москва : Айрис-пресс, 2008. – 288 с.

8.2. Додаткова

16. Бочаров П. П. Теория массового обслуживания : учебник / П. П. Бочаров, А. В. Печинкин. – Москва : Изд. РУДН, 1995. – 529 с.

17. Булинский А. В. Теория случайных процессов / А. В. Булинский, А. Н. Ширяев. – Москва : ФИЗМАТЛИТ, 2003. – 400 с.

18. Чернов В. П. Математика для экономистов. Теория массового обслуживания / В. П. Чернов, В. Б. Ивановский. – Москва : ИНФРА-М, 2000. – 158 с.

8.3. Інформаційні ресурси

19. Астахов В. Н. Теория случайных процессов [Электронный ресурс] : учебное пособие для студентов дневной и заочной форм обучения / В. Н. Астахов, Г. С. Буланов. – Краматорск : ДГМА, 2006. – 52 с. – Режим доступу : http://www.dgma.donetsk.ua/metod/vm/sp.pdf.

20. Вентцель А. Д. Курс теории случайных процессов [Электронный ресурс] / А. Д. Вентцель. – 2-е изд., доп. – Москва : Наука, 1996. – 399 с. – Режим доступу : http://booksshare.net/books/physics/ventcel-ad/1996/files/ kursteoriisluchaynihprocessov1996.pdf.

21. Жлутков В. І. Теорія ймовірностей і математична статистика [Електронний ресурс] : навч.-метод. посіб. : у 2-х ч., Ч. ІІ. Математична статистика / В. І. Жлутков, С. І. Наконечний, С. С. Савіна. – Київ : КНЕУ, 2001. – 336 с. – Режим доступу : dozkontrol.ucoz.ua/index/0-40.

22. Імовірнісні процеси [Електронний ресурс]. – Режим доступу : manualsem.com.

Покажчик позначень

Ω – простір елементарних подій – 10
ω – елементарна подія (наслідок) – 10
E – стохастичний експеримент – 10
$\xi = \xi(\omega)$ – випадкова величина (ВВ) – 10
$\in$ – символ належності – 10
$\mathbf{R}$ – множина дійсних чисел – 10
t – невипадковий параметр (час) – 10
$\xi = \xi(t)$ – випадковий процес (ВП) – 10
T – область визначення ВП – 10
$\rightleftharpoons$ – еквівалентність за означенням – 11
$\xi(\omega,\, t_0)$ – переріз ВП у точці t_0 – 11
$\xi(\omega_0, t)$ – траєкторія (реалізація) ВП у точці ω_0 – 11
$F_1(x \mid t)$ – одновимірна функція розподілу ВП – 12
$f_1(x \mid t)$ – щільність розподілу перерізу ВП – 12
$M\xi(t)$ – математичне сподівання ВП $\xi(t)$ – 13
$\overset{\circ}{\xi}(t)$ – центрований ВП – 13
$D\xi(t)$ – дисперсія ВП $\xi(t)$ – 14
$\sigma_\xi(t)$ – середньоквадратичне відхилення ВП – 14
$K_\xi(t_1, t_2)$ – автоковаріаційна функція ВП – 16
$\rho_\xi(t_1, t_2)$ – нормована автоковаріаційна функція ВП – 16
$R_{\xi\eta}(t_1, t_2)$ – взаємна кореляційна функція двох ВП $\xi(t)$ і $\eta(t)$ – 17
$\rho_{\xi\eta}(t_1, t_2)$ – нормована взаємна кореляційна функція двох ВП $\xi(t)$ і $\eta(t)$ – 18
Mu – математичне сподівання ВВ u – 19
Du – дисперсія ВВ u – 19
S – система – 22
$t_i,\ i = \overline{1, n}$ – кроки ВП – 23
$\xi(t_1), \xi(t_2), \ldots, \xi(t_n)$ – випадкова послідовність (ланцюг) – 23

φ – випадкова початкова фаза – 25

$A(t)$ – випадкова амплітуда – 25

$P(\xi = k)$ – ймовірність того, що ВВ ξ набуде значення k – 25

λ – параметр розподілу Пуассона – 25

$\xi(t) = k$ – подія, яка полягає в тому, що за час t деяка подія відбулася k разів – 28

$p_k(t) = P(\xi(t) = k)$ – ймовірність події $\xi(t) = k$ – 28

$\forall$ – квантор загальності (для всіх …) – 28

: – "таке (такі), що", "маємо", 28

$\mathbf{N}$ – множина натуральних чисел – 28

$\mathbf{N_0}$ – розширена множина натуральних чисел – 28

$\bigcup$ – об'єднання множин – 28

$P(A \mid B)$ – ймовірність події A за умови, що подія B вже відбулась – 28

$\Delta t \to 0$ – нескінченно малий проміжок часу – 28

$o(\Delta t)$ – нескінченно мала більш високого порядку, ніж Δt – 29

$\Leftrightarrow$ – еквіваленція – 29

$\lim\limits_{\Delta t \to 0} f(t)$ – границя функції $f(t)$, якщо Δt прямує до 0 – 29

λ – інтенсивність потоку подій – 29

$\Rightarrow$ – імплікація – 29

$\{s_1, s_2, ..., s_m\}$ – множина всіх можливих станів системи S – 30

$\xi_n = j$ – подія, яка полягає в тому, що в момент часу n система S знаходиться в стані s_j – 30

$p_{ij}^{(n)}$ – ймовірності переходу системи S із стану i в стан j за один крок – 30

$a = (a_1, a_2, ..., a_m)$ – вектор імовірностей початкового стану – 31

$P = (p_{ij})_{m \times m}$ – матриця ймовірностей переходу за один крок – 31

$p_{ij}(n)$ – ймовірності переходу системи S із стану i в стан j за n кроків – 31

$\lim\limits_{n \to \infty} x_n$ – границя послідовності x_n, якщо n прямує до нескінченності (∞) – 32

Предметний покажчик

Додатки

Додаток А

Деякі найважливіші розподіли та їх числові характеристики

I. Дискретні розподіли

1. Біноміальний: розподіл імовірностей ВВ, значеннями якої є число k успіхів у n випробуваннях за схемою Бернуллі:

$$P_n(\xi = k) = C_n^k p^k q^{n-k},\ k = 0,1,2,\dots,n;$$
$$M\xi = np,\quad D\xi = npq.$$

2. Пуассонівський: розподіл імовірностей ВВ, значеннями якої є число k успіхів у рідкісних подіях в n випробуваннях за схемою Бернуллі:

$$P_n(\xi = k) = \frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda},\ \lambda = np > 0,\ k = 0,1,\dots;$$
$$M\xi = \lambda,\quad D\xi = \lambda.$$

3. Геометричний: розподіл імовірностей ВВ, значеннями якої є число випробувань k до першого успіху за схемою Бернуллі:

$$P(\xi = k) = q^k p,\ q = 1 - p,\ k = 0,1,\ \dots;$$
$$M\xi = q/p,\quad D\xi = q/p^2.$$

4. Гіпергеометричний: розподіл імовірностей ВВ, значеннями якої є число m об'єктів, що мають певну властивість, серед n, вибраних із загального числа N об'єктів, серед яких M мають цю властивість:

$$P(\xi = m) = \frac{C_M^m \cdot C_{N-M}^{n-m}}{C_N^n},\ m \le \min(n, M);$$
$$M\xi = \frac{nM}{N},\quad D\xi = \frac{n(M/N)(1 - M/N)(N - n)}{N - 1}.$$

II. Неперервні розподіли

1. Рівномірний розподіл. НВВ ξ має рівномірний розподіл з параметрами a і b на відрізку $[a, b]$, якщо її щільність розподілу $f(x)$ та функція розподілу $F(x)$ мають вигляд:

$$f(x)=\begin{cases} 0, & x<a, \\ \dfrac{1}{b-a}, & x\in[a,b], \\ 0, & x>b, \end{cases} \qquad F(x)=\begin{cases} 0, & x<a, \\ \dfrac{x-a}{b-a}, & x\in[a,b], \\ 1, & x>b. \end{cases}$$

$$M\xi=\frac{a+b}{2}, \quad D\xi=\frac{(b-a)^2}{12}.$$

2. Показниковий розподіл. НВВ ξ має показниковий розподіл з параметром $\lambda>0$, якщо її щільність розподілу $f(x)$ та функція розподілу $F(x)$ мають вигляд:

$$f(x)=\begin{cases} 0, & x<0, \\ \lambda e^{-\lambda x}, & x\geq 0, \end{cases} \qquad F(x)=\begin{cases} 0, & x<0, \\ 1-e^{-\lambda x}, & x\geq 0. \end{cases}$$

$$M\xi=1/\lambda, \quad D\xi=1/\lambda^2.$$

3. Нормальний розподіл. НВВ ξ має нормальний розподіл з параметрами a і σ, якщо її щільність розподілу $f(x)$ та функція розподілу $F(x)$ мають вигляд:

$$f(x)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}=\frac{1}{\sigma}\varphi\left(\frac{x-a}{\sigma}\right),$$

$$F(x)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x}e^{-\frac{(t-a)^2}{2\sigma^2}}dt=\frac{1}{2}+\Phi\left(\frac{x-a}{\sigma}\right),$$

де $\varphi(\cdot)$ і $\Phi(\cdot)$ – функції Гаусса та Лапласа.

$$M\xi=a, \quad D\xi=\sigma^2.$$

Зміст

НАВЧАЛЬНЕ ВИДАННЯ

ТЕОРІЯ ЙМОВІРНОСТЕЙ, ІМОВІРНІСНІ ПРОЦЕСИ ТА МАТЕМАТИЧНА СТАТИСТИКА

Методичні рекомендації до самостійної роботи з теми "Елементи теорії ймовірнісних процесів і теорії масового обслуговування"

для студентів спеціальності 122 "Комп'ютерні науки" першого (бакалаврського) рівня

Самостійне електронне текстове мережеве видання

Укладачі: **Сенчуков** Віктор Федорович
Денисова Тетяна Володимирівна

Відповідальний за видання *Л. М. Малярець*

Редактор *О. І. Черненко*

Коректор *В. Ю. Труш*

План 2018 р. Поз. № 40 ЕВ. Обсяг 84 с.

Видавець і виготовлювач – ХНЕУ ім. С. Кузнеця, 61166, м. Харків, просп. Науки, 9-А

Свідоцтво про внесення суб'єкта видавничої справи до Державного реєстру
ДК № 4853 від 20.02.2015 р.