УДК 313.42

Дискретная модель рыночной адаптации

Воронин А.В. , Гунько О.В.

Для экономистов – теоретиков всегда актуальной является проблема конструирования модели механизма формирования цен на выпускаемую предприятиями продукцию. Наиболее важным здесь является синтез двух различных подходов в ценообразовании. Так, с одной стороны, с позиций А. Маршалла, классическая теория фирмы постулирует, что в случае производственного равновесия цена выпускаемой продукции должна быть равна предельным издержкам предприятия. С другой стороны, руководствуясь теорией Л. Вальраса, так называемая «паутинная» модель рыночной цены допускает существование равновесной цены при равенстве объемов спроса и предложения товара. Вполне очевидно, что оба подхода взаимно дополняют друг друга и позволяют учитывать в рамках единой динамической экономической системы совместный эффект от взаимодействия не только избытков спроса и предложения, а также превышения цены спроса над ценой предложения и наоборот.

К настоящему времени известен ряд работ, посвященных данной проблеме и получены соответствующие результаты для динамических систем с непрерывным изменением времени [1-7]. Наше дальнейшее изложение будет посвящено процессам, где время является дискретно меняющейся величиной.

Пусть рынок какого-либо отдельного товара (продукта) характеризуется двумя основными переменными; $p = p(t)$ − цена, зависящая от времени t, единицы товара (продукта); $y = y(t)$ − объем выпускаемой продукции, также меняющийся во времени t. Будем предполагать, что время t изменяется как целочисленная величина − $t = 0,1,2,...$

Для формализации вышеупомянутых подходов Л. Вальраса и А. Маршалла необходимо определить еще ряд понятий:

1) $D = D(p, y, t)$ − объем спроса на товарном рынке;
2) $S = S(p, y, t)$ − объем предложения продукта;
3) $P_d = P_d(p, y, t)$ – рыночная цена спроса;
4) $P_S = P_S(p, y, t)$ – рыночная цена предложения;

Динамический процесс реализуется при наличии запаздывании на сторо-не спроса или предложения. Одним из наиболее простейших допущений в дискретном анализе является сосредоточенное запаздывание или отставание функции предложения на некоторый интервал времени:

$$D(p,y,t) = S(p,y,t-T_1)$$

Данное соотношение имеет место в случае, когда необходимо конечное время T_1 для формирования требуемого объема предложения. С другой стороны, производитель строит свои ожидания будущей цены, которая имела место на рынке, т.е. на цену предыдущего периода T_2:

$$P_S(p,y,t) = P_d(p,y,t-T_2)$$

Далее мы сосредоточим внимание на модели с одинаковыми запаздыва-ниями $T_1 = T_2 = 1$. Тогда получим динамическую систему следующего вида

$$\begin{cases} D(p,y,t) = S(p,y,t-1) \\ P_S(p,y,t) = P_d(p,y,t-1) \end{cases} \qquad (1)$$

Система (1) является слишком общей для анализа и поэтому необходимо выдвинуть дополнительные гипотезы, конкретизирующие явное представление всех вышеуказанных функций. В этой связи допустим, что предложение товара $S(p,y,t)$ равно объему произведенной продукции $y(t)$, а цена спроса $P_d(p,y,t)$ есть цена единицы продукции $p(t)$. Функция спроса $D(p,y,t)$ будет считаться традиционной, т.е. линейной убывающей функцией цены $p(t)$: $D(p,y,t) = d_0(t) - d_1 p(t)$, где $d_1 = const > 0$; $d_0(t)$ — автономная тенденция изменения спроса. Относительно цены предложения $P_S(p,y,t)$, являющейся по сути предельными издержками производственных затрат, положим, что она состоит из условно переменных затрат, линейно зависящих от объема продукции $y(t)$ и условно постоянных затрат $S_0(t)$, зависящих только от времени t и не зависящих от объема выпуска $y(t)$:

$$P_S(p,y,t) = S_1 \cdot y(t) - S_0(t),$$

где $S_1 = const > 0$.

С учетом всех выдвинутых допущений, система (1) примет вид системы двух линейных разностных уравнений первого порядка для переменных $p(t)$ и $y(t)$:

$$\begin{cases} d_0(t) - d_1 \cdot p(t) = y(t-1) \\ S_1 \cdot y(t) - S_0(t) = p(t-1) \end{cases} \tag{2}$$

при этом будем считать в начальный момент $t = 0$ заданными цену $p(0)$ и объем $y(0)$. Представим систему (2) в форме уравнений, разрешенных относительно $p(t)$ и $y(t)$:

$$\begin{cases} p(t) = -\dfrac{1}{d_1} y(t-1) + \dfrac{d_0(t)}{d_1}, \\ y(t) = \dfrac{1}{S_1} p(t-1) + \dfrac{S_0(t)}{S_1}. \end{cases} \tag{3}$$

Дальнейшие преобразования допускают трансформацию системы (3) в два независимых разностных уравнения второго порядка для каждой искомой переменной:

$$p(t) + p(t-2)/S_1 d_1 = \left(S_1 d_0(t) - S_0(t-1)\right)/S_1 d_1 \tag{6}$$

$$y(t) + y(t-2)/S_1 d_1 = \left(d_0(t-1) + d_1 S_0(t)\right)/S_1 d_1 \tag{7}$$

Очевидно, что по своему внешнему виду уравнения (4) и (5) отличаются только правыми частями

Рассмотрим простейший случай динамического поведения (4), (5) в случае постоянных значений d_0 и S_0. Тогда (4) и (5) будут иметь вид разностных уравнений второго порядка с постоянными правыми частями.

$$p(t) + \frac{1}{S_1 d_1} p(t-2) = \frac{S_1 d_0 - S_0}{S_1 d_1} \tag{6}$$

$$y(t) + \frac{1}{S_1 d_1} y(t-2) = \frac{d_0 + d_1 S_0}{S_1 d_1} \tag{7}$$

Система (6), (7) на больших временах t обладает равновесным решением.

$$p^* = \frac{S_1 d_0 - S_0}{1 + S_1 d_1}, \qquad y^* = \frac{d_0 + d_1 S_0}{1 + S_1 d_1} \tag{8}$$

Поэтому представляется удобным ввести новые переменные $\tilde{p} = p - p^*$ и $\tilde{y} = y - y^*$, являющиеся по своему смыслу отклонениями от равновесных значений. Тогда уравнения (6),(7) в новых переменных примут форму однородных разностных уравнений второго порядка для $\tilde{p}(t)$ и $\tilde{y}(t)$ с соответствующими начальными условиями $\tilde{p}(0) = p(0) - p^*$, $\tilde{y}(0) = y(0) - y^*$.

Все это имеет конкретный экономический смысл, так как интерес представляет именно отклонение от положения равновесия. Итак, имеем

$$\tilde{p}(t)+\frac{1}{S_1 d_1}\tilde{p}(t-2)=0 \qquad (9)$$

$$\tilde{y}(t)+\frac{1}{S_1 d_1}\tilde{y}(t-2)=0 \qquad (10)$$

Решения разностных уравнений (9), (10) хорошо известны и имеют вид:

$$\tilde{p}(t)=A_1 r^t\, cos(\pi\cdot t/2)+A_2 r^t\, sin(\pi\cdot t/2), \qquad (11)$$

$$\tilde{y}(t)=B_1 r^t\, cos(\pi\cdot t/2)+B_2 r^t\, sin(\pi\cdot t/2), \qquad (12)$$

где $r=1/\sqrt{S_1 d_1}$.

Элементарные рассуждения о представлениях (11) и (12) позволяют сделать вывод о том, что отклонение от равновесных значений цены $\tilde{p}(t)$ и объема $\tilde{y}(t)$ совершают колебания вокруг p^* и y^* с одинаковой частотой $\pi/2$, но различными амплитудами и фазами, определяемыми начальными условиями.

Для определения постоянных A_1 и A_2 рассмотрим (11) при $t=0$ и $t=1$:

$$\tilde{p}(0)=A_1,\quad \tilde{p}(1)=A_2 r$$

Следовательно, (11) перепишется в виде

$$\tilde{p}(t)=A_1 r^t\, cos(\pi\cdot t/2)+A_2 r^t\, sin(\pi\cdot t/2) \qquad (13)$$

Аналогично, $\tilde{y}(0)=B_1,\quad \tilde{y}(1)=B_2 r$

$$\tilde{y}(t)=r^t\tilde{y}(0)cos\,(\pi\cdot t/2)+\frac{\tilde{y}(1)}{r}sin\,(\pi\cdot t/2) \qquad (14)$$

Величины $\tilde{p}(1),\tilde{y}(1)$ могут быть легко найдены из системы (3):

$$p(1)=(d_0-y(0))/d_1\,,\; y(1)=(S_0+p(0))/S_1\,,$$

$$\tilde{p}(1)=p(1)-p^*,\; \tilde{y}(1)=y(1)-y^*.$$

Вполне очевидно, что вопрос об устойчивости положения равновесия p^*, y^* должен рассматриваться с точки зрения динамики. В данном случае важным для нас является значение параметра $r=1/\sqrt{s_1 d_1}$. При этом заметим, что s_1 и d_1 являются сугубо статическими параметрами.

Тем не менее при различных значениях r наблюдаются различные типы динамического поведения. Так, например, при $r>1$ $(s_1 d_1<1)$ колебания вокруг положения равновесия p^*,y^* носят нарастающий «взрывной» характер, т.е. равновесие является неустойчивым. При $r<1$ $(s_1 d_1>1)$, наоборот, колебания являются затухающими, что свидетельствует об устойчивости равновесного положения. В случае $r=1$ ($s_1 d_1 = 1$) равновесие называется «нейтральным», т.к. происходят колебания с постоянной амплитудой.

На рис. 1-3 представлены результаты моделирования переходных процессов для отклонений цен и объемов от своих равновесных значений. Вычисления произведены для следующих значений параметров, $d_1 = 1; S_1 = 1+\mu; d_0 = 3; \quad S_0 = 2 \quad p_0 = d_0/d_1; y_0 = S_0/S_1$ где μ - малая знакопеременная величина [8]. На всех графиках отклонения цены представлены штрих-пунктирной линией, отклонения объема – точечной.

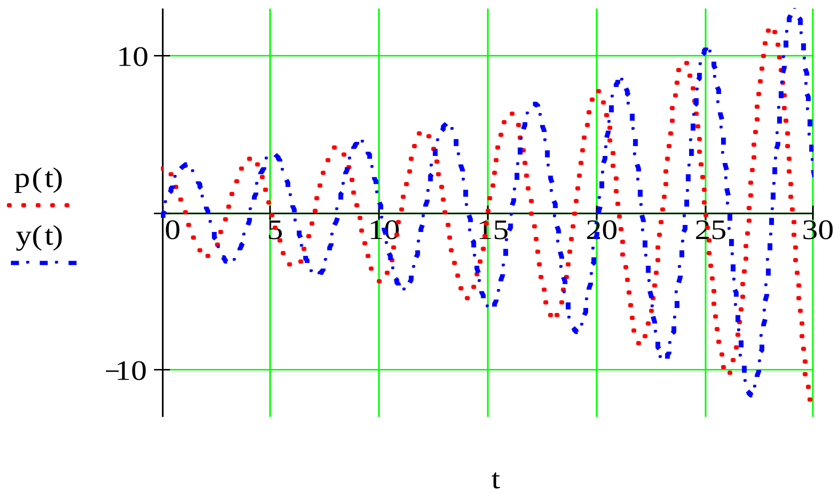

Рис. 1. **Неустойчивый переходный процесс в системе (13), (14) при** $\mu = -0.1$.

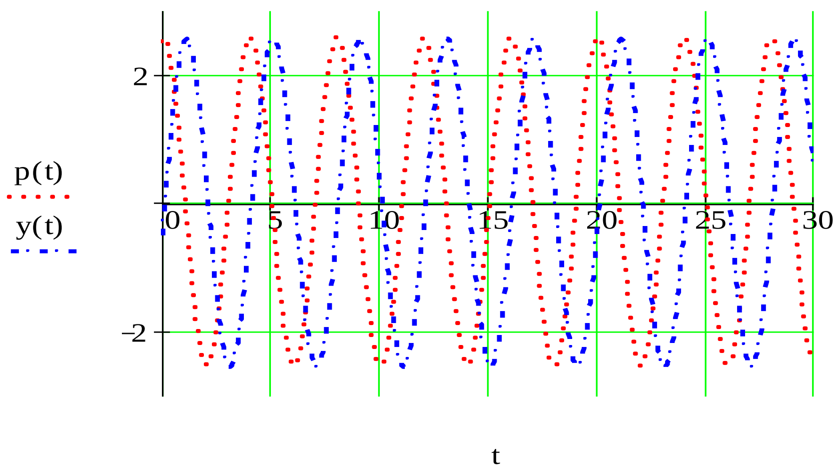

Рис. 2. **Нейтральный переходный процесс в системе (13), (14) при** $\mu = 0$.

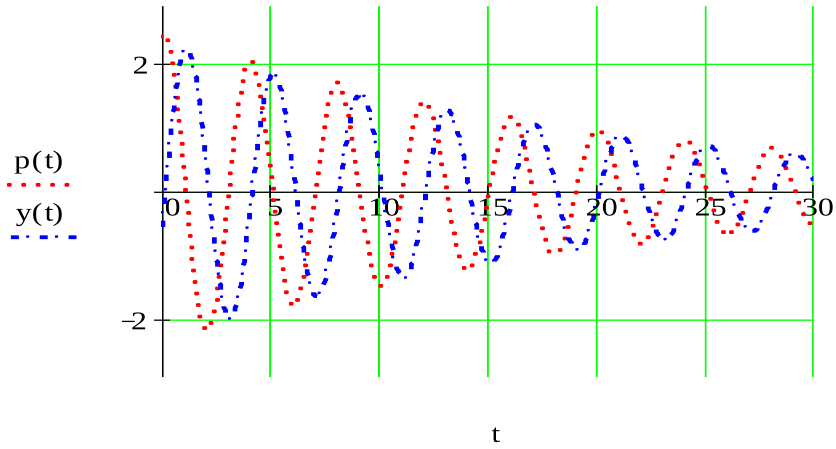

Рис. 3. **Устойчивый переходный процесс в системе (13), (14) при** $\mu = 0.1$

Представляет содержательный интерес рассмотрение ситуации, когда автономная тенденция спроса $d_0(t)$содержит в себе периодическую составляющую, что, как правило, соответствует сезонным колебаниям рыночного спроса:

$$d_0(t) = d_0 + \varepsilon \cdot sin(\omega t)$$

где ε - амплитуда и ω - частота соответствующих колебаний. Кроме того, положим $s_1 d_1 = 1$ с целью нейтрализации затухающих и взрывных периодических режимов в исследуемой экономической системе. С учетом выдвинутых предположений уравнения (4) и (5) примут вид:

$$p(t) + p(t-2) = S_1 d_0 - S_0 + S_1 \varepsilon \, sin(\omega \cdot t) \qquad (15)$$

$$y(t) + y(t-2) = d_1 S_0 + d_0 + \varepsilon \, sin(\omega \cdot (t-1)) \qquad (16)$$

Обозначим $p_e = (S_1 d_0 - S_0)/2$, $y_e = (d_1 S_0 - d_0)/2$ и введем переменные $\bar{p} = p - p_e$, $\bar{y} = y - y_e$. Величины p_eи y_e соответствуют p^* и y^* при условии $s_1 d_1 = 1$. Тогда, в новых переменных уравнения (15), (16) преобразуются к форме:

$$\bar{p}(t+2) + \bar{p}(t) = S_1 \varepsilon \, sin(\omega \cdot (t+2)) \qquad (17)$$

$$\bar{y}(t+2) + \bar{y}(t) = \varepsilon \, sin(\omega \cdot (t+1)) \qquad (18)$$

или

$$\bar{p}(t+2) + \bar{p}(t) = S_1 \varepsilon \, sin(2\omega) cos(\omega \cdot t) + S_1 \varepsilon \, cos(2\omega) sin(\omega \cdot t) \qquad (19)$$

$$\bar{y}(t+2) + \bar{y}(t) = \varepsilon \, sin\,\omega \cdot cos(\omega \cdot t) + \varepsilon \, cos\,\omega \cdot sin(\omega \cdot t) \qquad (20)$$

Очевидно, что каждое из уравнений (19) и (20) можно переписать так:

$$x(t+2)+x(t)=R_1\cos(\omega\cdot t)+R_2\sin(\omega\cdot t) \qquad (21)$$

Его общее решение имеет вид:

$$x(t)=C_1\cos(\pi\cdot t/2)+C_2\sin(\pi\cdot t/2)+u(t) \qquad (22)$$

где $u(t)=Q_1\cos(\omega t)+Q_2\sin(\omega t)$ − некоторое частное решение (21) с неопределенными коэффициентами Q_1,Q_2. Для их нахождения подставим $u(t)$ в уравнение (21). В результате подстановки и выполнения необходимых преобразований, получим:

$$Q_1=(1/2)(R_1-tg\omega\cdot R_2), \qquad Q_2=(1/2)(tg\omega\cdot R_1+R_2).$$

Постоянные C_1,C_2 будут найдены из (22) при подстановке $t=0$ и $t=1$:

$$C_1=x(0)-Q_1, \qquad C_2=x(1)-Q_1\cos\omega-Q_2\sin\omega.$$

С учетом вышеизложенного после очевидных вычислений будем иметь:

а) решение уравнения (19):

$$\bar{p}(t)=C_1\cos(\pi\cdot t/2)+C_2\sin(\pi\cdot t/2)+S_1\varepsilon\sin(\omega(t+1))/2\cos\omega \qquad (23)$$

где $C_1=\bar{p}(0)-(S_1\varepsilon/2)tg\omega$, $C_2=\bar{p}(1)-S_1\varepsilon\cdot\sin\omega$.

б) решение уравнения (20)

$$\bar{y}(t)=C_1\cos(\pi\cdot t/2)+C_2\sin(\pi\cdot t/2)+(\varepsilon/2\cos\omega)\sin(\omega t), \qquad (24)$$

где $C_1=\bar{y}(0)$, $C_2=\bar{y}(1)-(\varepsilon/2)tg\omega$.

Из явного вида решений (23), (24) следует, что в данном случае происходит наложение двух гармонических колебаний: свободных и вынужденных. Свободные колебания полностью определены начальными условиями с собственной частотой $\pi/2$ и никак не зависят от сезонной составляющей спроса.

Вынужденные колебания происходят с частотой сезонной компоненты ω и никоим образом не зависят от начальных условий. Когда $\omega=\pi/2$, выражения (23) и (24) теряют смысл из-за имеющейся неопределенности, которая может быть раскрыта по правилу Лопиталя при $\omega\to\pi/2$. Предельный переход приводит к следующим результатам:

$$\bar{p}(t)=\bar{p}(0)\cos(\pi\cdot t/2)+\bar{p}(1)\sin(\pi\cdot t/2)+(S_1\varepsilon/2)(t-1)\sin(\pi\cdot t/2) \qquad (25)$$

$$\bar{y}(t)=\bar{y}(0)\cos(\pi\cdot t/2)+\bar{y}(1)\sin(\pi\cdot t/2)-(\varepsilon t/2)\cos(\pi\cdot t/2) \qquad (26)$$

Легко заметить, что в (25) и (26) присутствуют слагаемые с линейно растущими амплитудами колебаний, что характеризует явление резонанса при совпадении собственной частоты с частотой автономного изменения спроса.

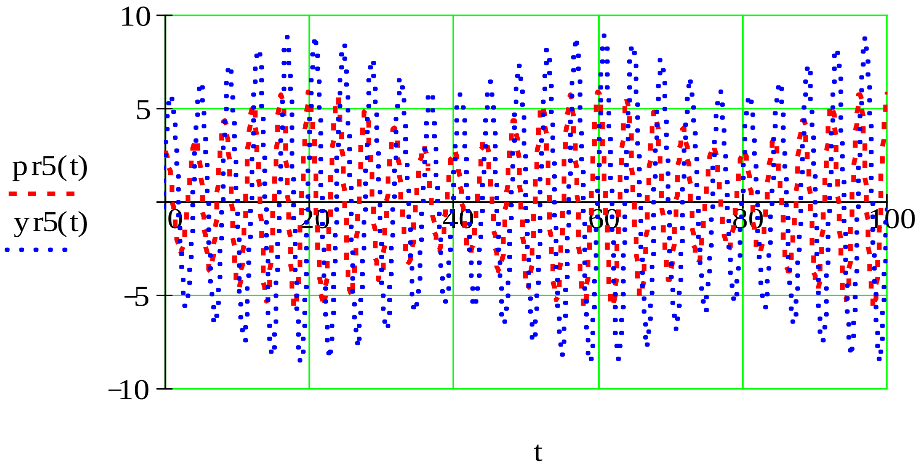

Рис. 4. **Гармонические биения при близости частот свободных и вынужденных колебаний.**

На рис. 4 представлены результаты взаимодействия частот свободных и вынужденных колебаний при условии достаточной близости их частот при следующих значениях $\omega = \frac{\pi}{2} 0.9;\ d_1 = 1;\ S_1 = 1 + \mu;\quad d_0 = 3;\ S_0 = 2;$

$p_0 = d_0 / d_1;\quad y_0 = S_0 / S_1$.

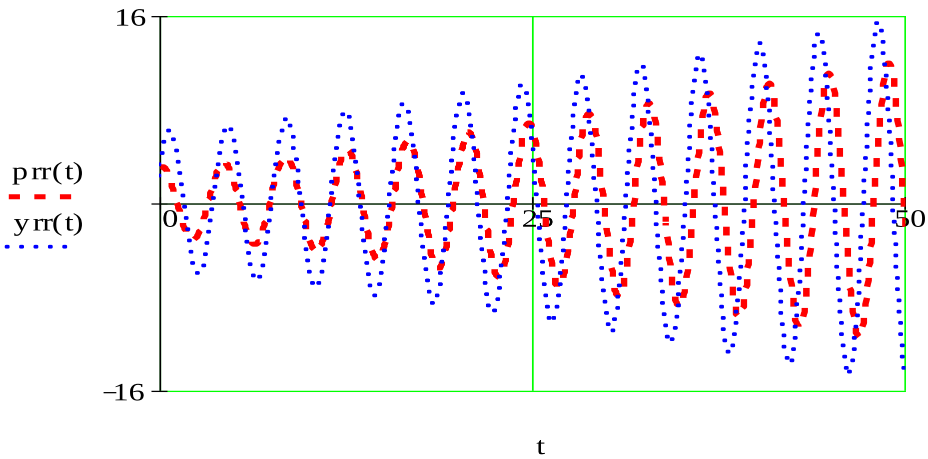

Рис. 5. **Резонанс в динамической системе (15), (16).**

На рис. 5 изображен резонансный случай динамической системы (23), (24), где частоты вынужденных и свободных колебаний совпадают, что соответствуют решениям (25),(26).

В заключение необходимо подчеркнуть, что наличие автономных колебаний на стороне спроса, обусловленных, например, сезонными факторами, рождает различные типы циклических режимов исследуемых в работе динамических систем. В качестве примера в результате математического моделирования пред’явлены численные расчеты таких явлений , как гармонические биения и резонанс.

ЛИТЕРАТУРА

1. Балацкий Е.В. Рыночное ценообразование и производственные циклы // Экономика и математические методы. – 2005. – т.41. – №1. – с.37-44.

2. Воронин А.В. Бифуркации в модели Вальраса – Маршалла / Воронин А.В., Евтушенко С.А., Московкин В.М. // Бизнес Информ – 2002 – №1–2. – с.51-53.

3. Внукова Н.Н. Адаптационные механизмы производственно – экономической системы / Внукова Н.Н., Воронин А.В., Бондаренко А.В. // Економіка: проблеми теорії та практики: Збірник наук. праць. – Дніпропетровськ, ДНУ, 2009, Вип. 253, т.3. – с.756-774.

4. Кизим Н.А. Модель производственного цикла / Кизим Н.А., Воронин А.В. // Бизнес Информ – 2006 – №6. – с.71-74.

5. Воронин А.В. Нелинейность в неоклассических моделях «спрос-предложение»// Бизнес Информ – 2006 – №11. – с.85-88.

6. Воронин А.В.Сложная динамика производственно- экономической системы //
Бизнес Информ – 2007 – №1-2. – с.109-112.

7. Воронин А.В. Структурная неустойчивость рыночного положения фирмы // Бизнес Информ – 2007 – №6. – с.67-70.

8. Гунько О.В. Використання середовища Mathcad при вивченні навчальної дисципліни «Математика для економістів»/ Гунько О.В. , Харків: Вид. ХНЕУ, 2010, – 288 с.